

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук  
(ИПМех РАН)

«Утверждаю»  
Директор ИПМех РАН  
Д.ф.-м.н.  
С.Е. Якуш



« 28 » сентября 2018 г.

Рабочая программа учебной дисциплины (РПУД)  
«Оптимальное управление динамическими системами»

Направление подготовки 01.06.01 Математика и механика  
Специальность 01.02.01 Теоретическая механика

Форма подготовки (очная)  
Отдел аспирантуры ИПМех РАН

**Курс 1**

Всего часов – 144, всего зачетных единиц – 4

Аудиторных часов – 144, в том числе:

лекции – 72 часа

семинары – 72 часа

Формы аттестации:

Семестр	Форма контроля	Часы
1	<i>Дифференциальный зачет</i>	72
2	<i>Экзамен</i>	72

Рабочая программа составлена в соответствии с Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) от 30 июля 2014 г. № 866 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации)".

Составитель (ли): гл.н.с., д.ф.-м.н., академик РАН Черноушко Ф.Л.  
с.н.с., д.ф.-м.н. Костин Г.В.

Заведующий отделом аспирантуры: Щелчкова И.Н.

## **1. Аннотация**

Дисциплина «Оптимальное управление динамическими системами» предназначена для аспирантов, обучающихся по образовательной программе 01.02.01 Теоретическая механика, и входит в вариативную часть учебного плана.

При разработке рабочей программы учебной дисциплины использованы Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, учебный план подготовки аспирантов по специальности 01.02.01 Теоретическая механика.

### **2. Цели и задачи**

**Цель дисциплины:** изучение основ теории оптимального управления и знакомство с методами решения различных классов задач оптимального управления через принцип максимума Л.С. Понтрягина и различными численными методами.

#### **Задачи дисциплины:**

- приобретение теоретических знаний в области теории оптимального управления;
- приобретение студентами базовых навыков использования принципа максимума Понтрягина и метода динамического программирования для решения задач оптимального управления;
- изучение методов численного решения задач с оптимального управления;
- приобретение знаний о связи принципа максимума с классическим вариационным исчислением и методом динамического программирования.

## **3. Место дисциплины**

### **3.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы аспирантуры**

Дисциплина «Оптимальное управление динамическими системами» включает в себя разделы, которые могут быть отнесены к вариативным частям программы подготовки аспирантов по направлению 01.06.01, в том числе направленные на подготовку к сдаче кандидатского экзамена.

### **3.2. Дисциплина базируется на дисциплинах:**

1. Общая физика
2. Математический анализ
3. Дифференциальные уравнения
4. Теоретическая механика
5. Вариационные методы в теоретической механике
6. Нелинейные колебания в механике
7. Устойчивость динамических систем

### **3.3. Дисциплина предшествует изучению дисциплин:**

—

#### 4. Результаты обучения

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

##### ***Знать:***

- общую постановку задач теории оптимального управления;
- применение принципа максимума Понтрягина и динамического программирования к решению задач оптимального управления;
- применение численных методов к решению задач оптимального управления.

##### ***Уметь:***

- применять на практике принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования и различные численные методы для решения задач оптимального управления;
- выбирать наиболее эффективный метод решения в зависимости от конкретной постановки оптимизационной задачи;
- приводить задачи оптимального управления к краевым задачам при помощи принципа максимума и решать их;
- осваивать новые предметные области, теоретические подходы и численные методы.

##### ***Владеть:***

- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач;
- навыками решения типовых задач и задач повышенной трудности теоретического и вычислительного плана с использованием методов математического анализа;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач.

#### **Компетенции выпускника, формируемые в результате изучения дисциплины**

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих универсальных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций аспиранта:

##### ***Универсальные компетенции:***

- УК–1. Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
- УК–3. Готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач
- УК–5. Способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития

##### ***Общепрофессиональные компетенции:***

- ОПК–1. Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
- ОПК–2. Готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования

##### ***Профессиональные компетенции:***

- ПК–1. Способность применять аналитические, вычислительные и системно-аналитические методы для решения прикладных задач в области управления объектами и системами объектов техники;
- ПК–2. Способность самостоятельно применять методы аналитической механики и вычислительной математики, теоретические, расчетные и экспериментальные методы

исследований, методы математического и компьютерного моделирования к постановке и решению начально-краевых задач движения механических систем и задач управления их движением;

- ПК–3. Умение использовать системный подход к исследованию технических систем и выработке стратегии научной деятельности в процессе реализации научных и технологических инноваций.
- ПК–4. Способность использовать знания в области математики и теоретической механики для дальнейшего освоения дисциплин в соответствии с профилем подготовки.

## 5. Темы и Разделы

Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам и разделам с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий:

№	Темы дисциплины	Семестр	Лекции	Практич. (семинар.) задания
		(№ семестра)	(часы)	(часы)
1	Теория оптимального управления	1	10	10
2	Принцип максимума Л.С. Понтрягина	1	26	26
3	Динамическое программирование	2	18	18
4	Численные методы оптимального управления	2	19	19
	Итого (часов)	144	72	72

### Разделы:

#### 1. Теория оптимального управления.

- 1.1. Постановка задач оптимального управления. Основные понятия. Примеры задач оптимального управления.
- 1.2. Задачи со свободным правым концом траектории. Формула для приращения функционала.

#### 2. Принцип максимума Л.С. Понтрягина.

- 2.1. Принцип максимума Л.С. Понтрягина для задач со свободным правым концом. Формулировка и доказательство.
- 2.2. Линейные задачи со свободным правым концом. Принцип максимума как необходимое и достаточное условие.
- 2.3. Формулировка принципа максимума для различных классов задач оптимального управления.
  - 2.3.1. Двухточечные задачи.
  - 2.3.2. Задача оптимального быстрогодействия.
  - 2.3.3. Задачи с краевыми условиями. Условия трансверсальности.
  - 2.3.4. Автономные и неавтономные системы.
  - 2.3.5. Задачи с фиксированным и нефиксированным временем окончания процесса.
  - 2.3.6. Задачи с интегральным и терминальным функционалом.
  - 2.3.7. Задачи с параметрами.
- 2.4. Примеры задач оптимального управления. Задача быстрогодействия.
- 2.5. Понятие синтеза оптимального управления.

- 2.6. Связь принципа максимума с классическим вариационным исчислением. Вывод уравнения Эйлера и условий Лежандра-Клебша из принципа максимума. Условие Якоби.
3. **Динамическое программирование.**
  - 3.1. Управляемые многошаговые процессы. Принцип оптимальности.
  - 3.2. Метод динамического программирования для многошаговых процессов управления.
  - 3.3. Метод динамического программирования для задач оптимального управления.
  - 3.4. Дифференциальное уравнение Беллмана. Постановка задач для уравнения Беллмана. Примеры.
  - 3.5. Связь метода динамического программирования с принципом максимума. Вывод условий трансверсальности при помощи метода динамического программирования.
  - 3.6. Линейные управляемые системы с квадратичным функционалом. Построение синтеза оптимального управления.
4. **Численные методы оптимального управления.**
  - 4.1. Численные методы, основанные на приведении задач оптимального управления к краевым задачам при помощи принципа максимума.
  - 4.2. Использование методов решения систем алгебраических уравнений для решения краевых задач. Метод Ньютона и его модификации.
  - 4.3. Численные методы минимизации функций многих переменных. Понятие о линейном и нелинейном программировании. Градиентный метод. Метод штрафных функций.
  - 4.4. Численные методы, основанные на варьировании управляющих функций. Градиентный метод в пространстве управлений. Учет ограничений на управляющие функции. Учет краевых условий и фазовых ограничений методом штрафных функций. Учет краевых условий методом проектирования градиента.
  - 4.5. Метод последовательных приближений в пространстве управляющих функций. Способы улучшения сходимости и модификации метода. Примеры.
  - 4.6. Метод малого параметра для слабоуправляемых систем.
  - 4.7. Численные методы, основанные на варьировании в пространстве фазовых координат. Метод динамического программирования. Полный и частичный перебор. Метод «блуждающей трубки».
  - 4.8. Понятие элементарной операции и приемы ее построения. Построение элементарной операции для задач динамики полета.
  - 4.9. Метод локальных вариаций. Применение метода локальных вариаций к различным вариационным задачам. Вариационные задачи с неаддитивными функционалами. Вариационные задачи в частных производных.

## **6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

- Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).
- Необходимое программное обеспечение: программный комплекс *Maple*.

## **7. Учебно-методическое и информационное обеспечение**

### **7.1. Основная литература:**

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

2. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
4. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965.
5. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
6. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973.
7. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
8. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Физматлит, 1988.
9. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.

### **7.2. Дополнительная литература:**

–

### **7.3. Учебно-методическая литература:**

–

### **7.4. Перечень ресурсов сети интернет:**

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека МФТИ
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
4. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/> – электронная библиотека портала Eqworld.
5. <http://teormech.fizteh.ru> – Сайт кафедры теоретической механики МФТИ.

## **9. Методические указания**

Успешное освоение курса требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, семинаров, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- подготовку к контрольным, самостоятельным работам и тестам.

Руководство и проверка самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

## 10. Фонд оценочных средств

### Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

#### **Порядок проведения контрольных работ/тестов:**

Во время проведения контрольных работ/тестов обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, калькуляторами.

#### **Порядок проведения дифференцированного зачета:**

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости: по результатам контрольных, самостоятельных работ/тестов по каждой теме.

#### **Порядок проведения устного экзамена:**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена при подготовке ответов на билеты обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами лекций, семинаров и любой другой литературой.

Во время проведения экзамена при ответе обучающегося на вопросы по билету или по программе дисциплины, он не может пользоваться конспектами лекций и семинаров и любой другой литературой.

### Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме дифференциального зачета (устного), итоговая аттестация – в форме экзамена (устного).

Текущий контроль осуществляется в форме самостоятельных работ или тестов в письменной форме по каждой теме. Каждое задание в самостоятельных и тестовых работах оценивается определенным количеством баллов в конце условия каждого задания. По итогам набранных баллов выставляется оценка.

Примеры экзаменационных билетов (заданий, тестов и др. материалов, используемых для проведения зачета, экзамена):

#### **Примеры тестовых вопросов к дифференциальному зачету:**

##### **Вариант 1**

- I. Связь принципа максимума и классического вариационного исчисления.
- II. Для задачи оптимального управления

$$\dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, T]$$

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1$$

$$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0$$

$$J = T \rightarrow \min_u$$

- 1) при помощи принципа максимума составить уравнения и граничные условия краевой задачи;
- 2) составить уравнение Беллмана.

### Вариант 2

I. Принцип максимума для задачи оптимального управления со свободным правым концом (с доказательством).

II. Для задачи оптимального управления

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, 1]$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0$$

$$x_1(1) + x_2(1) = 1$$

$$J = \int_0^1 x_1^2 + x_2^2 dt \rightarrow \min_u$$

1) при помощи принципа максимума составить уравнения и граничные условия краевой задачи;

2) составить уравнение Беллмана.

### Вариант 3

I. Метод динамического программирования для многошаговых процессов управления.

II. Для задачи оптимального управления

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad t \in [0, 1]$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0$$

$$x_1(1) = 2$$

$$J = \int_0^1 x_1^2 + x_2^2 dt \rightarrow \min_u$$

1) при помощи принципа максимума составить уравнения и граничные условия краевой задачи;

2) составить уравнение Беллмана.

### Вариант 4

I. Принцип максимума для линейной задачи оптимального управления со свободным правым концом.

II. Для задачи оптимального управления

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad t \in [0, 1]$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0$$

$$x_1(1) + x_2(1) = 2$$

$$J = \int_0^1 x_1^2 - x_2^2 dt \rightarrow \min_u$$

1) при помощи принципа максимума составить уравнения и граничные условия краевой задачи;

2) составить уравнение Беллмана.



### Вариант 5

I. Формула для приращения функционала в задаче оптимального управления (с выводом).

II. Для задачи оптимального управления

$$\dot{x} = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad t \in [0, 1]$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2$$

$$x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 0$$

$$J = \int_0^1 x_1^2 + x_2^2 dt \rightarrow \min_u$$

1) при помощи принципа максимума составить уравнения и граничные условия краевой задачи;

2) составить уравнение Беллмана.

### Вариант 6

I. Линейно-квадратичная задача оптимального управления.

II. Для задачи оптимального управления

$$\dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 + u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, T]$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1$$

$$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0$$

$$J = T \rightarrow \min_u$$

1) при помощи принципа максимума составить уравнения и граничные условия краевой задачи;

2) составить уравнение Беллмана.

### Вариант 7

I. Метод динамического программирования для задач оптимального управления.

II. Для задачи оптимального управления

$$\dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 + u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, T]$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

$$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0$$

$$J = T \rightarrow \min_u$$

1) при помощи принципа максимума составить уравнения и граничные условия краевой задачи;

2) составить уравнение Беллмана.

## Вариант 8

I. Принцип максимума для задач с краевыми условиями. Условия трансверсальности.

II. Для задачи оптимального управления

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, 1]$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0$$

$$x_1^2(1) + x_2^2(1) = 1$$

$$J = \int_0^1 x_1^2 + x_2^2 dt \rightarrow \min_u$$

1) при помощи принципа максимума составить уравнения и граничные условия краевой задачи;

2) составить уравнение Беллмана.

### Примеры экзаменационных билетов:

#### Билет 1

I. Вычислительный метод решения задач оптимального управления, основанный на приведении к краевой задаче принципа максимума.

II. Связь принципа максимума и классического вариационного исчисления.

#### Билет 2

I. Метод Ньютона и его модификации. Применение метода Ньютона для решения краевых задач принципа максимума.

II. Принцип максимума для задачи оптимального управления со свободным правым концом (с доказательством).

#### Билет 3

I. Вычислительные методы поиска экстремума функции многих переменных. Градиентный метод. Учёт ограничений. Метод штрафных функций.

II. Метод динамического программирования для многошаговых процессов управления.

#### Билет 4

I. Градиентный метод в пространстве управлений.

II. Принцип максимума для линейной задачи оптимального управления со свободным правым концом.

#### Билет 5

I. Метод локальных вариаций для простейшей вариационной задачи.

II. Формула для приращения функционала в задаче оптимального управления (с выводом).

#### Билет 6

I. Метод динамического программирования для простейшей вариационной задачи (метод полного перебора).

II. Линейно-квадратичная задача оптимального управления.

### Билет 7

- I. Метод последовательных приближений в пространстве управлений для задач со свободным правым концом. Учёт краевых условий и фазовых ограничений.
- II. Метод динамического программирования для задач оптимального управления.

### Билет 8

- I. Метод локальных вариаций для задачи оптимального управления. Понятие элементарной операции.
- II. Принцип максимума для задач с краевыми условиями. Условия трансверсальности.

### Критерии оценивания

- **оценка «отлично (10)»** выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;
- **оценка «отлично (9)»** выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;
- **оценка «отлично (8)»** выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;
- **оценка «хорошо (7)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он твердо знает материал экзаменационного билета, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- **оценка «хорошо (6)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;
- **оценка «хорошо (5)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;
- **оценка «удовлетворительно (4)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;
- **оценка «удовлетворительно (3)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении про-

граммного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- **оценка «неудовлетворительно (2-1)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета, он показал что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.