

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук
(ИПМех РАН)

«Утверждаю»
Директор ИПМех РАН
Д.ф.-м.н.
С.Е. Якуш



« 28 » сентября 2018 г.

Рабочая программа учебной дисциплины (РПУД)
«Вариационные методы в теоретической механике»

Направление подготовки 01.06.01 Математика и механика
Специальность 01.02.01 Теоретическая механика

Форма подготовки (очная)
Отдел аспирантуры ИПМех РАН

Курс 1

Всего часов – 144, всего зачетных единиц – 4

Аудиторных часов – 144, в том числе:

лекции – 72 часа

семинары – 72 часа

Формы аттестации:

Семестр	Форма контроля	Часы
1	<i>Дифференциальный зачет</i>	72
2	<i>Экзамен</i>	72

Рабочая программа составлена в соответствии с Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) от 30 июля 2014 г. № 866 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации)".

Составитель: с.н.с., д.ф.-м.н. Костин Г.В.

Заведующий отделом аспирантуры: Щелчкова И.Н.

1. Аннотация

Дисциплина «Вариационные методы в теоретической механике» предназначена для аспирантов, обучающихся по образовательной программе 01.02.01 Теоретическая механика, и входит в вариативную часть учебного плана.

При разработке рабочей программы учебной дисциплины использованы Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, учебный план подготовки аспирантов по специальности 01.02.01 Теоретическая механика.

2. Цели и задачи

Цель дисциплины: изучение специальных вопросов вариационного исчисления в приложении к механике систем, а также знакомство с методами решения различных задач аналитической механики.

Задачи дисциплины:

- приобретение теоретических знаний в области решения задач механики, с помощью методов вариационного исчисления для нахождения стационарных значений функционалов зависящих от варьируемых кинематических и динамических переменных и их производных;
- освоение базовых навыков использования аппарата аналитической механики для решения задач о движении механических систем с ограничениями;
- изучение методов решения задач о нахождении инвариантов динамических систем;
- приобретение знаний о необходимых и достаточных условиях существования обобщенных решений вариационных задач механики.

3. Место дисциплины

3.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы аспирантуры

Дисциплина «Вариационные методы в теоретической механике» включает в себя разделы, которые могут быть отнесены к вариативным частям программы подготовки аспирантов по направлению 01.06.01, в том числе направленные на подготовку к сдаче кандидатского экзамена.

3.2. Дисциплина базируется на дисциплинах:

1. Общая физика
2. Математический анализ
3. Дифференциальные уравнения
4. Теоретическая механика

3.3. Дисциплина предшествует изучению дисциплин:

1. Оптимальное управление динамическими системами
2. Механика робототехнических систем
3. Нелинейные колебания в механике
4. Устойчивость динамических систем

4. Результаты обучения

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

Знать:

- необходимые и достаточные условия существования решения вариационных задач;
- общую постановку классических и обобщенных задач механики систем;
- основные методы решения задач аналитической механики;
- понятия о канонических преобразованиях и вариационные принципы в механике систем.

Уметь:

- применять на практике математический аппарат вариационного исчисления для решения начальных задач теоретической механики;
- выбирать наиболее эффективный метод решения в зависимости от конкретной постановки задачи;
- ставить и решать минимизационные задачи для различных внутренних и краевых условий;
- осваивать новые предметные области, теоретические подходы и методики аналитической механики.

Владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования механических задач;
- навыками решения типовых задач и задач повышенной трудности теоретического и экспериментального плана с использованием методов математического анализа и вариационного исчисления;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач механики.

Компетенции выпускника, формируемые в результате изучения дисциплины

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих универсальных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций аспиранта:

Универсальные компетенции:

- УК–1. Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
- УК–3. Готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач
- УК–5. Способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития

Общепрофессиональные компетенции:

- ОПК–1. Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
- ОПК–2. Готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования

Профессиональные компетенции:

- ПК–1. Способность применять аналитические, вычислительные и системно-аналитические методы для решения прикладных задач в области управления объектами и системами объектов техники;

- ПК–2. Способность самостоятельно применять методы аналитической механики и вычислительной математики, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования к постановке и решению начально-краевых задач движения механических систем и задач управления их движением;
- ПК–3. Умение использовать системный подход к исследованию технических систем и выработке стратегии научной деятельности в процессе реализации научных и технологических инноваций.
- ПК–4. Способность использовать знания в области математики и теоретической механики для дальнейшего освоения дисциплин в соответствии с профилем подготовки.

5. Темы и Разделы

Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам и разделам с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий:

№	Темы дисциплины	Семестр	Лекции	Практич. (семинар.) задания
		(№ семестра)	(часы)	(часы)
1	Основы вариационного исчисления	1	8	8
2	Каноническая форма уравнений Эйлера	1	6	6
3	Специальные свойства экстремалей	1	8	8
4	Вариационные задачи с ограничениями	1	6	6
5	Кинематика системы точек	1	8	8
6	Динамика	2	8	8
7	Вариационные принципы механики	2	10	10
8	Элементы теории групп Ли	2	8	8
9	Гамильтонова механика	2	10	10
	Итого (часов)	144	72	72

Разделы:

1. Основы вариационного исчисления.

- 1.1. Краевая задача с фиксированными концами. Формулировка задачи минимизации функционала. Требования к варьируемым функциям. Понятия метрического пространства и различные нормы функций.
- 1.2. Дифференцируемость функционала по Фреше. Производные по Фреше и Гато. Вычисление первой вариации.
- 1.3. Необходимые условия для существования стационарного значения функционала. Дифференциальная и интегральная формы уравнения Эйлера. Частные случаи уравнения Эйлера. Задача с несколькими искомыми функциями с фиксированными концами.
- 1.4. Задача с подвижными концами и одной искомой функцией. Задача со многими искомыми функциями.
- 1.5. Уравнения Эйлера-Пуассона.

2. Каноническая форма уравнений Эйлера.

- 2.1. Канонические переменные.

- 2.2. Невырожденность матрицы Гесса лагранжиана.
- 2.3. Уравнения Гамильтона.
- 2.4. Уравнение Гамильтона–Якоби для неоднородного лагранжиана.
3. **Специальные свойства экстремалей.**
 - 3.1. Экстремали с угловыми точками. Условия Вейерштрасса–Эрдмана.
 - 3.2. Геометрическая интерпретация для одномерного случая. Условия трансверсальности.
 - 3.3. Определение второй вариации. Условие Лежандра.
 - 3.4. Необходимое условие Якоби. Условия Лежандра и Якоби для случая нескольких искомых функций.
 - 3.5. Инвариантный интеграл Гильберта, функция Вейерштрасса.
 - 3.6. Необходимые и достаточные условия оптимальности экстремали.
4. **Вариационные задачи с ограничениями.**
 - 4.1. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача.
 - 4.2. Задача Лагранжа.
 - 4.3. Уравнения экстремалей в канонических переменных.
5. **Кинематика системы точек**
 - 5.1. Кинематика точки. Естественный трехгранник Дарбу. Криволинейные координаты и параметры Ламе.
 - 5.2. Кинематика системы отсчета (кинематика абсолютно твердого тела). Свойства матрицы направляющих косинусов и кватернионов. Спиновые матрицы Паули и параметры Келли–Клейна. Угловая скорость. Кинематические уравнения для углов Эйлера, для матрицы направляющих косинусов (уравнения Пуассона) и уравнения для кватернионов. Теорема о телесном угле в кинематике вращательного движения.
 - 5.3. Кинематика относительного движения.
6. **Динамика**
 - 6.1. Геометрия масс и основные теоремы динамики. Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения. Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении кинетической энергии. Основные теоремы динамики для относительного движения.
 - 6.2. Лагранжева механика. Принцип Даламбера–Лагранжа. Конфигурационное многообразие системы с конечным числом степеней свободы. Обобщенные координаты. Виртуальные перемещения.
 - 6.3. Голономные и неголономные системы. Уравнения Лагранжа. Уравнения Лагранжа с множителями.
 - 6.4. Уравнения Аппеля.
 - 6.5. Уравнения Рауса для систем с циклическими координатами.
 - 6.6. Первые интегралы уравнений Лагранжа.
7. **Вариационные принципы механики**
 - 7.1. Принцип наименьшего принуждения Гаусса.
 - 7.2. Принцип Гамильтона–Остроградского.
 - 7.3. Принцип наименьшего действия в формах Лагранжа и Якоби.
8. **Элементы теории групп Ли**
 - 8.1. Группы преобразований. Операторы группы. Теорема единственности однопараметрической группы. Ряды Ли и Хаусдорфа.
 - 8.2. Группы симметрий. Канонические координаты. Продолжение группы. Дифференциальные и интегральные инварианты.
9. **Гамильтонова механика**
 - 9.1. Обобщенные импульсы. Преобразования Лежандра. Уравнения Рауса и Гамильтона. Первые интегралы. Скобки Пуассона.

- 9.2. Теорема Лиувилля о фазовом объеме. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре–Картана.
- 9.3. Канонические преобразования. Локальный критерий каноничности. Производящие функции. Метод Биркгофа нормализации гамильтониана. Уравнение Гамильтона–Якоби.
- 9.4. Переменные действие-угол. Теорема Лиувилля об инвариантных торах.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

- Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).
- Необходимое программное обеспечение: программный комплекс *Maple*.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение

7.1. Основная литература:

1. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950.
2. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
3. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике: Учебное пособие для вузов. 3е изд., ФМЛ, 2005.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
5. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Лань, 2005.
6. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1, 2. М.: Физматгиз, 1960.
7. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997.
8. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999.
9. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946.
10. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. Изд-во Удмурдского университета, 1999.

7.2. Дополнительная литература:

1. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965.
2. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С. и др. Оптимизация динамики управляемых систем. М.: Изд-во МГУ, 2000.
3. Климов Д.М. Инерциальная навигация на море. М.: Наука, 1984.
4. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.
5. Giaquinta M., Hildebrandt S. Calculus of Variations I, II. New York: Springer Verlag, 1996.
6. Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2004.
7. Kostin G.V., Saurin V.V. Integrodifferential relations in linear elasticity. De Gruyter Studies in Mathematical Physics 10. Berlin: De Gruyter, 2012.

7.3. Учебно-методическая литература:

7.4. Перечень ресурсов сети интернет:

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека МФТИ
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
4. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/> – электронная библиотека портала Eqworld.
5. <http://teormech.fizteh.ru> – Сайт кафедры теоретической механики МФТИ.

9. Методические указания

Успешное освоение курса требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, семинаров, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- подготовку к контрольным, самостоятельным работам и тестам.

Руководство и проверка самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

10. Фонд оценочных средств

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Порядок проведения контрольных работ/тестов:

Во время проведения контрольных работ/тестов обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, калькуляторами.

Порядок проведения дифференцированного зачета:

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости: по результатам контрольных, самостоятельных работ/тестов по каждой теме.

Порядок проведения устного экзамена:

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена при подготовке ответов на билеты обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами лекций, семинаров и любой другой литературой.

Во время проведения экзамена при ответе обучающегося на вопросы по билету или по программе дисциплины, он не может пользоваться конспектами лекций и семинаров и любой другой литературой.

Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме дифференциального зачета (устного), итоговая аттестация – в форме экзамена (устного).

Текущий контроль осуществляется в форме самостоятельных работ или тестов в письменной форме по каждой теме. Каждое задание в самостоятельных и тестовых работах оценивается определенным количеством баллов в конце условия каждого задания. По итогам набранных баллов выставляется оценка.

Примеры экзаменационных билетов (заданий, тестов и др. материалов, используемых для проведения зачета, экзамена):

Примеры тестовых вопросов к дифференциальному зачету:

ВАРИАНТ № 1

1. Первая вариация функционала.
2. Дифференциальная форма уравнения Эйлера.

ВАРИАНТ № 2

1. Задача с несколькими искомыми функциями с фиксированными концами.
2. Необходимое условие Якоби.

ВАРИАНТ № 3

1. Задача с подвижными концами и одной искомой функцией.
2. Условия на свободных концах.

ВАРИАНТ № 4

1. Вывод уравнений Эйлера-Пуассона.
2. Система уравнений Эйлера.

ВАРИАНТ № 5

1. Канонические переменные. Гамильтониан.
2. Каноническая форма уравнений Эйлера (уравнения Гамильтона).

ВАРИАНТ № 6

1. Экстремали с угловыми точками.
2. Условия Вейерштрасса-Эрдмана.

ВАРИАНТ № 7

1. Вариационные задачи на условный экстремум.
2. Изопериметрическая задача. Множители Лагранжа.

ВАРИАНТ № 8

1. Вторая вариация функционала.
2. Условие Лежандра.

ВАРИАНТ № 9

1. Сопряженная точка.
2. Необходимое условие Якоби.

Примеры экзаменационных билетов:

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Кинематика точки. Естественный трехгранник Дарбу. Криволинейные координаты и параметры Ламе.
2. Переменные действие-угол. Теорема Лиувилля об инвариантных торах.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Свойства матрицы направляющих косинусов и кватернионов. Спиновые матрицы Паули и параметры Келли–Клейна.
2. Метод Биркгофа нормализации гамильтониана. Уравнение Гамильтона–Якоби.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Кинематические уравнения для углов Эйлера, для матрицы направляющих косинусов (уравнения Пуассона) и уравнения для кватернионов. Теорема о телесном угле в кинематике вращательного движения.
2. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре–Картана.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

1. Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения. Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении кинетической энергии. Основные теоремы динамики для относительного движения.
2. Теорема Лиувилля о фазовом объеме.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

1. Лагранжева механика. Принцип Даламбера–Лагранжа. Конфигурационное многообразие системы с конечным числом степеней свободы. Обобщенные координаты. Виртуальные перемещения.
2. Уравнения Рауса и Гамильтона. Первые интегралы. Скобки Пуассона.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Голономные и неголономные системы. Уравнения Лагранжа. Уравнения Лагранжа с множителями.
2. Обобщенные импульсы. Преобразования Лежандра.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Уравнения Аппеля. Уравнения Рауса для систем с циклическими координатами.
2. Принцип наименьшего действия в формах Лагранжа и Якоби.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

1. Группы преобразований. Операторы группы. Теорема единственности однопараметрической группы.
2. Принцип Гамильтона–Остроградского.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

1. Группы симметрий. Канонические координаты. Продолжение группы.
2. Принцип наименьшего принуждения Гаусса.

Критерии оценивания

- **оценка «отлично (10)»** выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;
- **оценка «отлично (9)»** выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;
- **оценка «отлично (8)»** выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;
- **оценка «хорошо (7)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он твердо знает материал экзаменационного билета, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- **оценка «хорошо (6)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;
- **оценка «хорошо (5)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;
- **оценка «удовлетворительно (4)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;
- **оценка «удовлетворительно (3)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- **оценка «неудовлетворительно (2-1)»** выставляется студенту по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также, если во время ответа экзаменационного билета, он показал что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.