FUNDAMENTAL AND ENVIRONMENTAL FLUID MECHANICS

10-АЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

ВОЛНЫ И ВИХРИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ

Москва, 03 – 05 декабря 2019

WAVES AND VORTICES IN COMPLEX MEDIA

PROCEEDINGS OF
10-th INTERNATIONAL CONFERENCE –
SCHOOL OF YOUNG SCIENTISTS

Moscow, December 03 – 05, 2019

УДК 532
ББК
22/253
В67

В67

Волны и вихри в сложных средах: 10-ая международная конференция – школа молодых ученых; 03 – 05 декабря 2019 г., Москва: Сборник материалов школы. – М.: ООО «Премиум-принт», 2019. – 368 с.

ISBN 978-5-91741-252-8

Материалы 10-ой международной конференции – школы молодых ученых “Волны и вихри в сложных средах”, посвященной обсуждению фундаментальных и прикладных проблем механики жидкостей и газов в природных и техногенных системах.

Ключевые слова: волны, вихри, математическое и лабораторное моделирование, неоднородные жидкости, течения в сложных средах.

УДК 532
ББК 22/253

Proceedings of the 10-th international conference – scientific school of young scientists “Waves and vortices in complex media” dedicated to the discussion of fundamental and applied problems in fluid and gas mechanics for environmental and technological systems.

Key words: waves, vortices, mathematical and laboratory modelling, inhomogeneous fluids, fluxes in complex media.

ISBN 978-5-91741-252-8

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, 2019

ОРГАНИЗАТОРЫ ШКОЛЫ:

Федеральное государственное бюджетное учреждение

Российская академия наук

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

акад. А.Г. Куликовский – почетный председатель, к.ф.-м.н. В.Г. Байдулов – уч. секр., проф. Т. Боднар (Чехия), проф. Р.М. Вильфанд, проф. А. Герчински (США), член-корр. РАН Д.А. Губайдуллин – зам. председателя, проф. А.И. Григорьев, д.ф.-м.н. Е.В. Ерманюк, д.ф.-м.н. А.Г. Зацепин, проф. А.Н. Осипцов, проф. Г.П.Р. Секхар (Индия), проф. С.Ф. Урманчеев – зам. председателя, проф. Ф. Фрони (Франция), проф. Я. Фукумото (Япония), проф. Шатров М.Г., проф. Г. Чой (Корея), проф. Ю.Д. Чашечкин – председатель, д.ф.-м.н. О.Г. Чхетиани, д.ф.-м.н. С.Е. Якуш

НАУЧНАЯ ПРОГРАММА:

- **Фундаментальные уравнения и конститутивные модели течений сложных сред;**
- **Методы математического и лабораторного моделирования течений сложных сред;**
- **Лигаменты, волны, вихри, когерентные структуры и турбулентность;**
- **Механика простых и сложных жидкостей с шугой, льдом, пеной, пузырьками, фазовыми переходами, а также газожидкостных систем и суспензий, в том числе во внешних электрических и магнитных полях;**
- **Техника современного эксперимента;**
- **Технические и технологические приложения.**

СПОНСОРЫ:

Российская академия наук

Российский фонд фундаментальных исследований (грант № 19-05-20091)

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

ORGANIZERS:

Russian Academy of Sciences

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS

INTERNATIONAL PROGRAM COMMITTEE:

Acad. RAS A.G. Kulikovsky (honorary chair), Dr. V.G. Baydulov – sci. secr., Prof. T. Bodnar (Czech), Prof. Yu.D. Chashechkin – chair, Prof. O.G. Chkhetiany, Prof. H. Choi (Korea), Dr. E.V. Ermanyuk, Prof. P. Fraunie (Fra), Prof. Ya. Fukumoto (Jap), Corr.m. RAS D.A. Gubaidullin (deputy chair), Prof. A. Herczynski (USA), Prof. A.I. Grigoriev, Prof. A.N. Osiptsov, Prof. G.P.R. Sekhar (India), Prof. S.F. Urmacheev (deputy chair), Prof. M.G. Shatrov, Prof. R.M. Vilfand, Dr. S.E. Yakush. Dr. A.G. Zatsepin,

---

SCIENTIFIC PROGRAM:

- **Fundamental equations and constitutive models of flows of complex media;**
- **Methods of mathematical simulation and laboratory modeling of flows of complex media;**
- **Ligaments, waves, vortices, coherent structures and turbulence;**
- **Mechanics of simple and complex liquids with sludge, ice, foam, bubbles, phase transitions, as well as gas-liquid systems and suspensions, including external electric and magnetic fields;**
- **Technique of modern experiment;**
- **Technical and technological applications.**

SPONSORS:

Russian Academy of Sciences

Russia Foundation for Basic Research
(Grant 19-05-20091)

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics
of the Russian Academy of Sciences

FOREWORD

The activity of growing population of the Earth, the rapid development of industrial technologies, among which the so-called "green technologies", minimizing the direct negative impact on the environment, occupy an increasingly important place, supplement the influence of the natural factors causing variability of weather and climate. The growing need in reliability of weather forecasts taking into account anthropogenic impact has supported the interest in an in-depth study of the mechanics of continuous media – liquids, gas, plasma, as well as the key structural components of flows – waves and vortices. The development of computer and information technologies, as tools for solving complex mathematical problems and resources for improving observational instruments, protocols for the collection of processing, presentation and assimilation of data, has a positive effect on research efficiency. At the same time, important changes are taking place in the formalization of the foundations of the sciences, which make it possible to more clearly define the resources and limitations of the basic branches of mathematics, physics, mechanics, and metrology. A whole arsenal of scientific methods is used to study fluid flows – observations and special experiments in natural conditions, mathematical (analytical and numerical) simulation and laboratory modeling. In current investigations, increasing attention is paid to the study of spatial structures of flows in all ranges of scales available for observation – from cosmic to microscopic, to the establishment of the nature of formation and the influence on the properties of ongoing processes, both in natural and technological conditions.

The ongoing changes were reflected in the composition of the participants and the program content of the Tenth international conference – the school for young scientists, which was originally started in 2010 by the decision of the Energy, Engineering, Mechanics and Control Processes Department of the Russian Academy of Sciences as a room for analyzing the results obtained during Implementation of the Basic Research Program III/4 “Dynamics of the formation and interaction of waves and vortices in continuous media” under the scientific supervision of Academician A.G. Kulikovsky. The conference “Waves and Vortices in Complex Media” was held in Moscow (2010–2014, 2016, 2017) and Kaliningrad (2015). Over the years, the conference has transformed from a compact academic event to an international meeting, focusing on young participants.

In the program of the Tenth, jubilee international conference-school, organized by the Ishlinsky Institute of Problems of Mechanics RAS with support from the Russian Foundation for Basic Research (grant 19-05-20091), included both theoretical (analytical and numerical) and experimental reports on the full range of studies in leading research centers in several countries. Two working languages used in preparation of abstracts and talks allow participants to most fully present their results, focusing on a local audience. The relevance of the discussed topics contributed to the expansion of the number of scientific institutions participating in the conference, which included institutes of the Russian Academy of Sciences, leading industries and educational centers.

The Organizing Committee

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рост численности населения Земли, быстрое развитие промышленных технологий, среди которых все более важное место занимают так называемые "зеленые технологии", минимизирующие прямое негативное воздействие на окружающую среду, свойства которой заметно меняются под действием природных, и, как признано в последние годы, антропогенных факторов, необходимость повышения достоверности прогноза погоды и изменчивости климата поддерживают интерес к углубленному изучению механики сплошных сред – жидкостей, газа, плазмы, а следовательно и ключевых структурных компонентов течений – волн и вихрей. Положительное влияние на эффективность исследований оказывает развитие вычислительной техники и информационных технологий, как инструментов решения сложных математических проблем и как ресурсов совершенствования наблюдательных инструментов, протоколов сбора обработки, представления и усвоения данных. Одновременно происходят важные изменения в формализации основ наук, позволяющие более четко определить возможности и ограничения базовых разделов математики, физики, механики и метрологии. Для изучения течений привлекается весь арсенал научных методов – наблюдения и специальные эксперименты в естественных условиях, математическое (аналитическое и численное) и лабораторное моделирование. В проводимых исследованиях все большее внимание уделяется изучению пространственных структур течений во всех доступных для наблюдений диапазонах масштабов – от космических до микроскопических, установлению природы формирования и влияния на свойства протекающих процессов, как естественных, так и технологических.

Происходящие перемены нашли свое отражение в составе участников и тематике программы Десятой международной конференции – школы, которая первоначально была организована в 2010 г. Решением Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук в качестве инструмента анализа результатов, полученных в ходе выполнения Программы фундаментальных исследований III/4 «Динамика формирования и взаимодействия волн и вихрей в сплошных средах» под научным руководством академика А.Г. Куликовского. Конференция «Волны и вихри в сложных средах» проводилась в Москве (2010–2014, 2016, 2017 гг.) и Калининграде (2015 г.). За годы работы конференция трансформировалась из специализированной академической в международную, уделяющую особое внимание молодым участникам.

В Программу юбилейной, Десятой, международной конференции-школы, организованной Институтом проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН при организационной и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-05-20091), вошли как теоретические (аналитические и численные), так и экспериментальные доклады по всему комплексу проводимых исследований в ведущих научных центрах ряда стран. Два рабочих языка тезисов и выступлений позволяют участниками наиболее полно представлять свои результаты, ориентируясь на локальную аудиторию. Актуальность тематики способствовала расширению числа научных учреждений, принимающих участие в работе конференции, в число которых вошли институты Российской академии наук, ведущих отраслей промышленности и образовательных центров.

Оргкомитет

NUMERICAL FILTERS IN SIMULATIONS OF VARIABLE DENSITY FLOWS

T. Bodnár [1,2], Ph. Fraunié [3]
[1] *Czech Technical University in Prague, Czech Republic, e-mail: Tomas.Bodnar@fs.cvut.cz*
[2] *Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences*
[3] *Mediterranean Institute of Oceanography, France, e-mail: philippe.fraunie@univ-tln.fr*

The aim of this talk is to present two specific classes of numerical filters as valuable tools for removing numerical oscillations appearing in the solution of convection dominated flows. The filtering algorithms are first described on a simple 1D advection model and then used in more realistic problems. The applications chosen to demonstrate the practical usability of the filtering techniques were chosen from the area of aerodynamics and hydraulics described using variable density incompressible models.

The numerical simulations of convection dominated problem are often connected with the appearance of non-physical oscillations in the solution. Such spurious numerical oscillations are related with the numerical scheme used to obtain the solution. The low numerical diffusion provided by the numerical method in use, manifests itself by the appearance of oscillations in the solution. The classical way of numerical stabilization is either based on the use of more dissipative numerical method or alternatively on the use of additional artificial numerical diffusion. This approach helps to smooth out the spurious oscillations, however the added numerical diffusion can sometimes be too strong (in comparison with the physical diffusion or viscosity).

An alternative way of stabilizing the numerical simulations and removing the non-physical oscillations is based on the use of non-oscillatory postprocessing od the numerical solution. This approach is often referred to as numerical filtering. By adding such a filtering step to existing numerical solution algorithm, the properties of the solution can be largely improved, making it free of evidently non-physical oscillations.

NUMERICAL FILTERS

The idea can be tracked down to signal and image processing, where it's used as a standard tool for "de-noising" the data. Two different types of filters were used in numerical simulations presented in this work.

- *Non-linear digital filter* – Simple algorithm allowing to cut-off and redistribute the local extrema of the solution. It only works locally, point-wise at the point of local extrema and it is able to preserve the conservativity of the underlying numerical algorithm. These filters were introduced in [3,7] and used e.g. in [2,6].
- *Compact filter* – A linear low-pass filter aimed at suppression of high-frequency oscillations, that are considered to be the spurious part of the numerical solution. This filter can be fine-tuned to selectively damp only the components of the solution oscillating at the grid frequency. These filters were introduced in [4,5,8] and used e.g. in [1,6].

The example of application of the digital filter on an oscillatory solution (obtained using Lax-Wendroff scheme) of advection problem with piecewise constant initial data is shown in the Fig. 1.

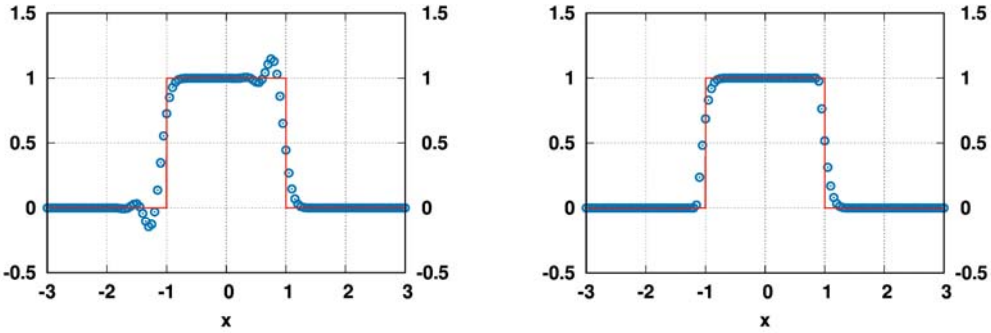
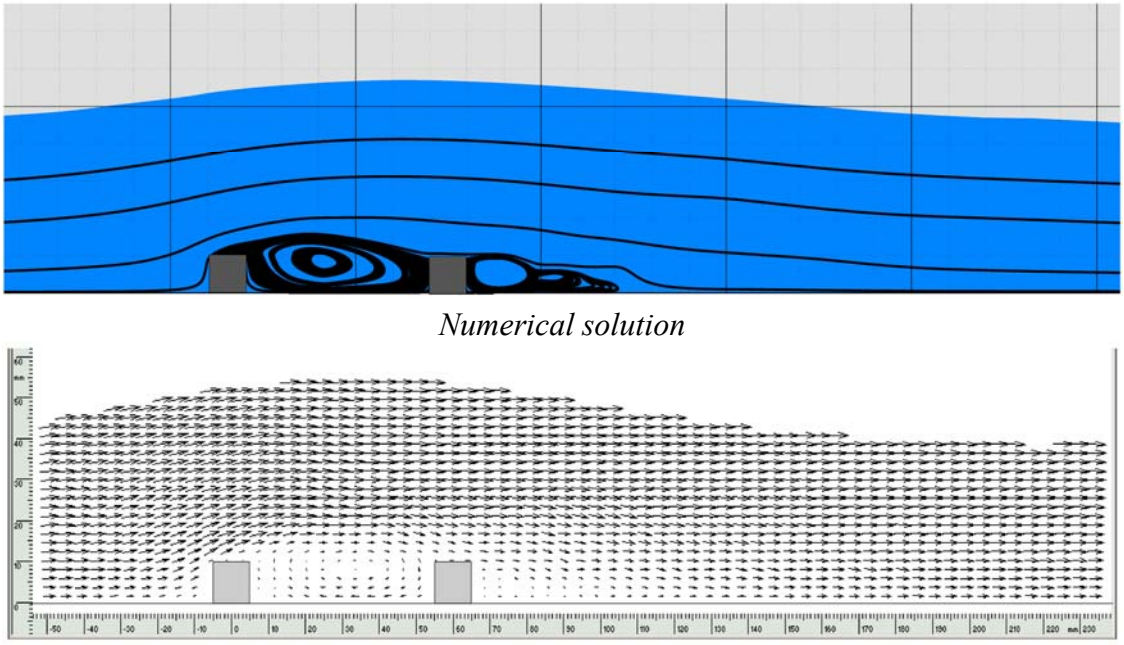


Fig. 1. The numerical solution (blue circles) and analytical solution (red line) for the 1D advection problem. The non-filtered solution is on left, the filtered solution is on right.

SELECTED APPLICATIONS

Both types of filters were previously used in some of our numerical simulations. The non-linear digital filter was combined with a central finite-volume scheme in simulations of free–surface flow over a ribbed bottom. The model was based on a variable density approach simulating the combined water-air flow, considering a density jump at the position of free-surface. The filter helped to stabilize the simulation, without smearing the density interface. See Fig. 2 for the sample comparison of simulated and experimental data.



Numerical solution

Experiment

Fig. 2. The numerical simulation of the free-surface flow over ribbed bottom. The sharp water-air interface is well resolved using the digital filter.

The compact filters were used for example in our numerical studies of stably stratified flows behind low, smooth hills. The gravity waves can still be well resolved, while the high-frequency numerical oscillations are filtered out. For example of these results see e.g. [1].

ACKNOWLEDGMENTS

Tomáš Bodnár is greatful for the financial support partly provided by the European Regional Development Fund-Project "Center for Advanced Applied Science"

No.CZ.02.1.01/0.0/0.0/16 019/0000778 and partly by the Czech Science Foundation under the grant No. P201-19-04243S. Philippe Fraunié was partly supported by the CNRS LEFE Project TURBO-RADAR.

REFERENCES

1. *Bodnár T., Fraunié P.* Numerical simulation of three-dimensional lee waves behind isolated hill // Appl. Math. Modell., 2019. P. 2–29. DOI: 10.1016/j.apm.2019.08.003.
2. *Bodnár T., Sequeira A.* Numerical simulation of the coagulation dynamics of blood // Comput.&Math. Meth. in Medicine, 2008, V. 9, No. 2. P. 83–104.
3. *Engquist B., Lötstedt P., Sjögreen B.* Nonlinear filters for efficient shock computation // Math. Comput., 1989, V. 52, No. 186. P. 509–537.
4. *Gaitonde D.V., Shang J.S., Young J.L.* Practical aspects of higher-order numerical schemes for wave propagation phenomena // Intern. J. Numer. Meth. in Engng, 1999, V. 45. P. 1849–1869.
5. *Lele S.K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // J. Comput. Phys., 1992, V. 103, P. 16–42.
6. *Sequeira A., Bodnár T.* On the filtering of spurious oscillations in the numerical simulations of convection dominated problems // Vietnam J. Math., 2019, DOI: 10.1007/s10013-019-00369-z.
7. *Shyy W., Chen M.-H., Mittal R., Udaykumar H.* On the suppression of numerical oscillations using a non-linear filter // J. Comput. Phys., 1992, V. 102, P. 49–62.
8. *Visbal M.R., Gaitonde D.V.* On the use of higher-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes // J. Comput. Phys., 2002, V. 181, P. 155–185.

——— ♦♦♦ ———

ACTUAL PROBLEMS OF A DROP IMPACT HYDRODYNAMICS

Yu.D. Chashechkin
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS
e-mail: yulidch@gmail.com

The prevalence of drops in the environment and industrial technologies, the variety of reconnected hydrodynamic processes, the availability of the object of study explain the steadily growing interest in the study of drop impact – the sequence of processes following the immersion of a drop into a liquid. Fundamental studies of the cascade of well-defined short-lived processes are actively developing, as well as applied studies focused on optimizing a large number of technological processes, both traditional, based on drip technologies in metallurgy, the chemical and biochemical industry, and new, including problems of optimizing flat and modern volume printing, coolers for terrestrial and space conditions, the fight against fogs and icing of aircraft. It should also be noted the humanitarian aspect of interest in drops in education, music, poetry and culture in general.

Both the formulation of problems and the study of impact drops is a complex scientific task. In the theory of flows, the questions of the mathematical representation of the processes of the boundaries elimination in one part of the flow and the appearance in the other, as well as mechanisms of a fine structure formation, the existence of which was noted in the first observations of drop flows by the "naked eye" in the middle of the 19th century, still are not solved. The later discovered fine effects of the emission of sound packets and light pulses by bubbles accompanying hydrodynamic processes also need in theoretical explanations. The lack of mathematical models makes it difficult to formulate reasonable requirements for in-

struments, techniques, and experimental conditions that satisfy the completeness criteria.

The basis of work of the Laboratory of Fluid Mechanics, IPMech RAS, on the drop hydrodynamics is a system of fundamental equations of the mechanics of non-homogeneous fluids that are system equations for matter, momentum, and energy transfer (taking into account the internal energy) with physically reasonable initial and boundary conditions [1]. The classification of the traditional structural components of flows that are waves, ligaments (fine 2D interfaces and 3D fibers) and vortices was carried out according to the analysis of the complete system solutions taking into account the compatibility condition in the linear and slightly nonlinear approximation [2]. A large-scale analysis of the fundamental system gives a basis to formulate requirements for the experimental research methodology, which makes it possible to observe the most large-scale and distinguish fine-structure components, to formulate conditions for the coordination of spatial and temporal metrological characteristics of instruments [3].

The experiments were conducted at the stands of the Hydrophysical complex for modeling hydrodynamic processes in the environment (UEF “HPC IPMech RAS) “IPK IPMeh RAS”, allowing photo and video recording of the general flow patterns in various projections [4], measurement of the parameters of hydrodynamic and acoustic processes in contacting media – the atmosphere and hydrosphere in all phases of the process: drop pinch-off, its oscillations during free fall, partial decomposition at the moment of contact with the target liquid, immersion, splash formation, generation of sound packets and capillary waves [5–7].

During the initial contact of the free falling drop with the surface of the target liquid, the free surfaces of the contacting media are eliminated and a “double layer” of merged media is formed, in which the released available potential surface energy is enclosed. The expanding “double layer” forms an “ejecta” – a thin inclined disk with outer teeth edge. From the tips of the teeth fine fast jets (spikes) fly out in the local radial direction (Fig. 1, a). Fast small droplets are successively thrown from the tips of the jets. Their velocity gradually decreases, and the diameter increases (Fig. 1, b, c). Some droplets even fall on the surface of an immersing drop [8].

As the droplet is immersing, the band of free surface elimination departs off the wall of the cavity, then stops, and begins to accelerate back to the center of the flow. In this phase, simultaneously with the elimination of the free surface of the there is a process of increasing the surface of the cavity bottom as well as the free surface of the target fluid, in which part of the energy of mechanical motion is absorbed.

In all cases, fine ligaments (jets or trickles) are formed at the bottom of the cavity that deformed the rim of the crown and create protruding teeth on it. New jets – streamers – are drawn from the tops of the teeth, they are thicker than spikes (Fig. 1, d). Droplets also fly out from the tops of streamers. Their sizes gradually increase as well as the angle of inclination of their trajectories to the horizon. At the last stage, the walls of the cavity are distorted by thin transverse streamers with ring vortex heads – secondary ligaments. From the outer side of the crown diverges a system of ring gravitational-capillary waves. A thin ring ligament separates the crown and waves, it forms and dynamic state determines the shape of the phase surfaces of the waves.

With the termination of the matter flow after complete immersion of the drop, the growth of the crown height stops and the phase of its disintegration and immersion in the liquid begins. Later a splash (a reverse or cumulative jet) begins to form. The thickness of splash is comparable to and even exceeds the diameter of the falling drop. In this phase, the center of the smoothed trough is again covered with protruding spikes (Fig. 1, e). The shape of the rapidly evolving splash head surface is affected by both large-scale processes and the remnants of the high-energy “double layer” in the bulk of the liquid (Fig. 1, f). The colored drop liquid at this stage collects at the apex of the splash and in the system of vortex loops – new liga-

ments – forming fairly regular radial structures in the bulk and on the surface of the central trough. Depending on the experimental conditions, both a single drop and a sequence of several drops, isolated or connected into a rosary, can fly out from the top of the splash.

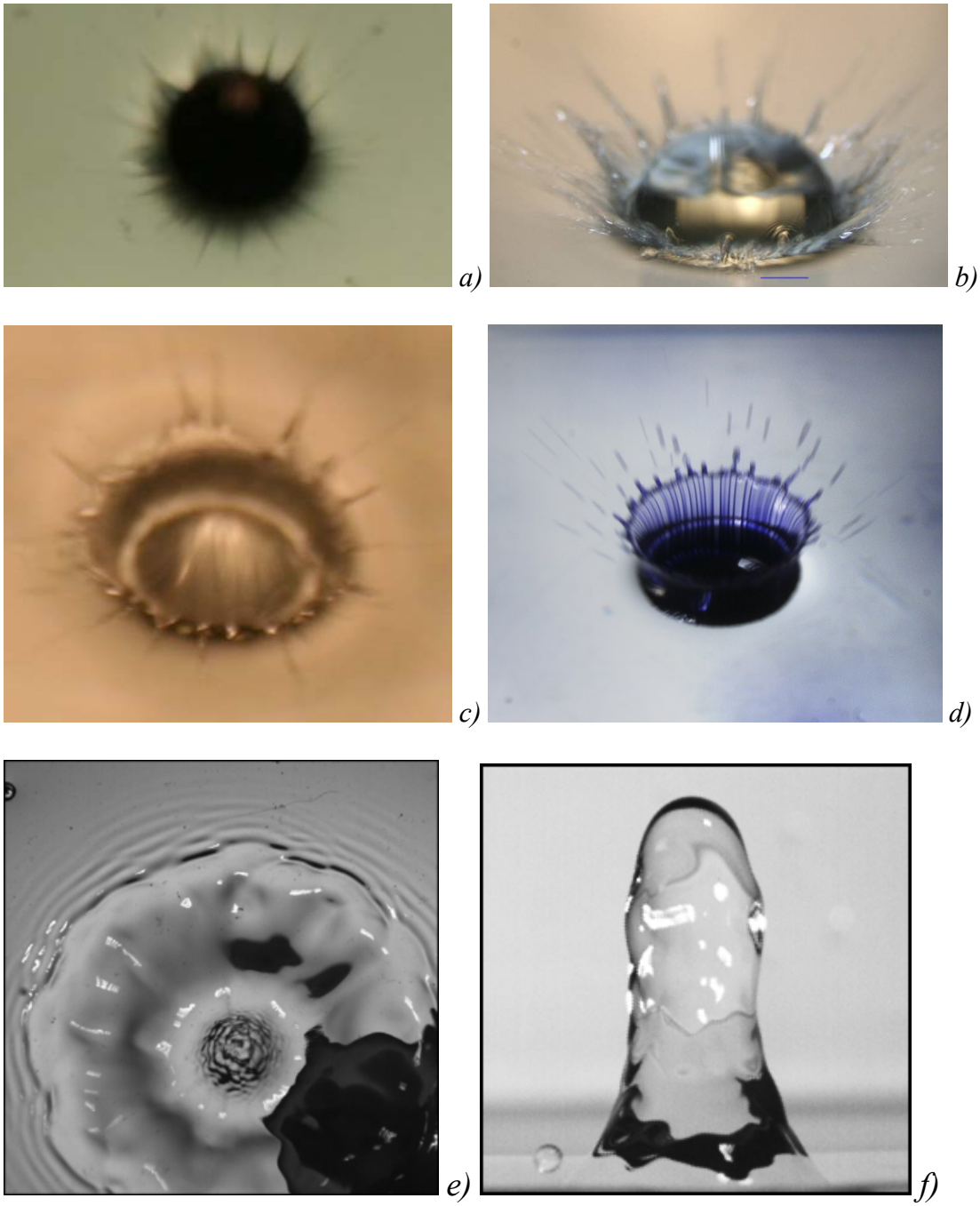


Fig. 1. Structural components of the flows by the drop falling into the liquid at rest impact: a) ejecta, spikes, sprays; b) streamers and capillary waves on the surface of the droplet; c) the rear part of the drop, cavity, crown, streamers, spray; d) crown, streamers, spray, d) a growing splash, a cavity with dips, the remnant of the crown, capillary waves; f) perturbed lateral surface of the growing splash

The back immersion of the splash and ejected droplets leads to the formation of a new cavities and pointed depressions in the remains of the trough. The fall of the secondary droplets of the splash onto the deformed surface leads to the formation of new gas cavities of

complex shape. Some of them come off with irregular flows in the center of the impact region and begin to emit acoustic packets in a wide frequency range. The observed base frequency of individual sound packets are consistent with that calculated using the Rayleigh – Minaert formulas for a spherical bubble.

The splash droplets falling into the target water form new cavities of conic shape, the collapse of which is accompanied by the formation of relatively thin and tall streamers, ejecting systems of smaller droplets from their peaks. Immersed streamers and droplets contribute to the formation of new cavities and gas bubbles, the separation of which is accompanied by the generation of additional sound packets. The parameters of the acoustic field reflect the complexity of the dynamics of individual gas cavities, which can come into contact, merge, divide into fragments and merge again under the influence of intense fine-structure flows near the cavity and the remnants of the crown.

At all stages of the evolution of the studied flow, the distribution of the droplet substance in the target fluid retains a fine-fiber structure in which the geometry, position, and shape of individual fibers are continuously modified by the slow and large scale flow components [9]. At the last stage of slow flows, part of the primary drop substance remains in a thin layer on the free surface, and part is sumerged in the form of the remnants of a cascade of vortex rings into the liquid bulk, where it is slowly blurred by molecular diffusion processes.

At the initial stage of the drop merging with the target liquid at rest, the decisive influence on the transfer of matter is exerted by the process of elimination of the free surface between the contacting liquids, in which the available potential surface energy is converted into other forms, that are perturbations of temperature, pressure and energy of mechanical motion in a thin layer of two liquids contact – “double layer”.

The thickness of the energy-saturated “double layer” slowly increases under the influence of molecular diffusion of the momentum. The layer is deformed and carried by large-scale flows. When each new drop is immersed, a new “double layer” is formed and the entire family of rapidly decaying fine-structure components is updated.

The experiments showed the important role of energy, the transfer rate of which varies with the evolution of the flow due to the peculiarities of the physical structure of liquids, in which the kinetic and potential energy are distributed throughout the volume and are characterized by specific values. In contrast the available potential surface energy, which is a component of internal energy due to surface tension, is concentrated in the surface layer with a thickness of the order of the molecular cluster size. In an inhomogeneous medium with large concentration gradients, the chemical potential is also non-uniformly distributed. The value of chemical energy is proportional to the concentration of an individual component. The relationship of internal energy and thermodynamic potentials as a whole with thermodynamic variables was analyzed in [10]. Taking into account all the energy components in the system of fundamental equations of the mechanics of inhomogeneous fluids allows constructing models of complex flow creating the basis of consistent techniques of laboratory and numerical modeling without involving additional hypotheses and constants [1, 2].

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Russian Science Foundation (grant 19-19-00598). The experiments were conducted at the stands of the Hydrophysical complex for modeling hydrodynamic processes in the environment (UEF “HPC IPMech RAS).

REFERENCES

1. Chashechkin Yu.D. Differential fluid mechanics – harmonization of analytical, numerical and laboratory models of flows // Math. Model.&Optimiz. Compl. Struct. Springer Ser. 2016. V. 40. P. 61–91. DOI: 10.1007/978-3-319-23564-6-5.

2. Chashechkin Yu.D. Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves // Math. Model. Nat. Phenom. 2018. V. 13. No. 2. P. 1–29. https://doi.org/10.1051/mmnp/2018020
3. Chashechkin Yu.D. Evolution of the fine structure of the matter distribution of a free-falling droplet in mixing liquids // Izvestiya Atmosph.&Oceanic Phys. 2019. V. 55. No. 3. P. 285–294. DOI: 10.1134/S0001433819020026
4. Hydrophysical complex for modeling hydrodynamic processes in the environment and their impact on underwater technical objects, as well as the distribution of impurities in the ocean and atmosphere (UEF "HPC IPMech RAS) // 2019, http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#aboutESP.
5. Chashechkin Yu.D., Prokhorov V.E. Transformation of the bridge during separation of a droplet // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 2016. V. 57. No. 3. P. 402–415. DOI: 10.15372/PMTF20160303
6. Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D. Surface oscillations of free falling droplet of ideal liquid // Izvestia Atmosph.&Oceanic Phys. 2018, V. 54. No. 2. P. 182–188. DOI: 10.7868/S0003351518020095.
7. Chashechkin Yu.D., Prokhorov V.E. Acoustics and hydrodynamics of a drop impact on a water surface // Acoust. Phys. 2017. V. 63. No. 1. P. 33–44. DOI: 10.1134/S1063771016060038
8. Chashechkin Yu.D., Ilyinykh A. Yu. Capillary waves on the surface of the liquid droplets in submerging in a fluid drop // Dokl. Phys. 2015. V. 465. No.4. P. 434–440. DOI: 10.1134/S1028335815120022
9. Chashechkin Yu.D., Ilinykh A.Yu. Banded structures in the distribution pattern of a drop over the surface of the host liquid // Dokl. Phys. 2018. V. 63. No. 7. P. 282–287. DOI: 10.1134/S1028335818070066
10. Wright D.G., Feistel R., et. al. Numerical implementation and oceanographic application of the thermodynamic potentials of liquid water, water vapour, ice, seawater and humid air. Part 2: The library routines // Ocean Sci. 2010. V. 6. P. 695–718. www.oceansci.net/6/695/2010/ doi:10.5194/os-6-695-2010.

—— ♦ ♦ ♦ ——

DIFFERENTIAL FLUID MECHANICS –"OLD – NEW" GENERATION OF SOLVABLE MODELS OF FLOWS

Yu.D. Chashechkin
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS
e-mail: yulidch@gmail.com

Achievements of classical fluid mechanics, focused on the study, description, and prediction of the evolution of flows of liquids, gases, and plasmas, are used in many branches of science and technology, which in turn serve as sources of new problems, methods, and instruments. Of particular note is the influence of computer technology, both direct as a tool for analyzing complex problems, and indirect in various forms. The logical basis of mechanics is

MATHEMATICS:

Axiomatic science implementing the principles for choosing the content of symbols, rules of operations and accuracy of their results.

The modern observational technique has established firmly that all natural systems, from space systems with scales of hundreds of light years to nanoscale system, as well as

flows in industrial plants, are characterized by a fine structure, which manifests itself in the existence of highly gradient boundaries separating regions with relatively uniform parameter distributions, containing pronounced fibers. The universality of the fact of the existence of structures poses a rational hydrodynamics task of describing the mechanisms of their formation, assessing the impact on the dynamics of ongoing processes. Models are developed in the approximation of a continuous medium based on the principles of G. Galileo in the presentation of J. C. Maxwell: “When studying a physical phenomenon, it is first necessary to determine the quantities that characterize it, then give mathematical relationships between them to form a theory of the phenomenon, the study of which should be carried out using mathematical methods and logic without involving experimental data (which is far from always possible), and then compare the results with the data of specially set experiments.... "[1].

In modern fluid mechanics, a description of the properties of a medium is based on an analysis of thermodynamic potentials. Derivatives of the base parameter – the Gibbs potential – determine the physical quantities of the medium that are density, pressure, temperature, concentration of dissolved substances or suspended particles, heat capacity and others [2]. The relations between the parameters calculated in statistical physics, combining quantum-mechanical and macroscopic descriptions of the medium [3], or found empirically, form sets of state equations. The flows causing changes in the continuous medium are characterized by fields of their own independent physical quantities of scalar and vector nature, which are also described by continuous functions of coordinates and time.

As the parameters of the flows, the conserved quantities are used – the specific gravity (density) of the medium and its components, specific momentum and total energy. The selected quantities are observable, that is, they allow estimation of the error together with determining their value, since they are connected by “hard” relationships with reference values – standards of length, time and mass.

DEFINITIONS:

Flows of liquids (gases, plasma) – internally inherent or forced interdependent fluxes of momentum and energy, causing self-consistent changes in the density and all others parameters of a continuous medium.

Changes in quantities are described by a system of fundamental partial differential equations – continuity by d'Alembert, momentum transfer (the Navier – Stokes type equations), energy (Fourier) and matter (Fick) that are analogues of fundamental conservation laws with physically justified initial and boundary conditions [4, 5]. Symmetries of the fundamental system correspond to the basic principles of physics [6].

The **velocity** of the medium (kinematic flow parameter) **is unobservable**. The velocity values are determined indirectly, under the assumption of immutability of the functional relations defining its calculation. In fact, the functional relationships of velocity with other quantities change due to the influence of a number of factors. Variations in the atomic-molecular composition of a substance, different forms of energy – internal, kinetic, potential, the dependence of the coefficients on the parameters of motion, the internal structure of the medium, and a number of other factors, explains the uncertainty of the fluid velocity with a guaranteed error estimate.

A special influence on the dynamics and structure of flows is exerted by energy transfer processes. Kinetic energy directly characterizes the dynamics of the medium. Internal energy takes into account the influence of a large number of processes obliged to the atomic-molecular structure of matter. All energy components are directly interconnected. A number of time scales characterizes the rate of energy change, depending on the parameters of the medium and the properties of the phenomena under study. The characteristic energy transfer time τ is quite large in dissipative (diffusion) processes $\tau^D = L^2/\kappa$; it is shorter in the flows

of the media with velocity U, here $\tau^U = L/U$, L is the characteristic length scale; special $\tau^\omega = L/c_g$ in wave processes with group velocity c_g, which can be both small (in fast acoustic) and large in slow waves; and the shortest $\tau \sim 10^{-8} \div 10^{-12}$ s in direct atomic-molecular interactions (for example, at releasing available potential surface or chemical energy). The issues of the interaction of matter with constant and variable electromagnetic fields will not be considered below.

Partial differential equations (PDE), describing changes in basic physical quantities in flows of liquids and gases, have been known since the 19th century, and are given in full in the first edition [4], published in 1944. As the results of group analysis show, the symmetries of systems of fundamental equations correspond to the basic principles of physics in contrast to other constitutive (theories of turbulence) and reduced (theories of waves or vortices) models [5]. However, the analysis of the properties of complete solutions obtained taking into account the compatibility condition was delayed and was first carried out recently [5, 6].

The classification of the basic structural components of flows, including a family of ligaments and waves, reflects the properties of complete solutions of a linearized system of fundamental equations [6]. The number of basic functions constituting complete solutions constructed taking into account the compatibility condition is determined by the rank of the complete system, the order of its linearized version, or the degree of the characteristic (dispersion) equation. The rank of the system depends on the form of the equation of state that relates various thermodynamic quantities, that is, on the completeness of the physical properties of the medium, whose density is not constant. The flows are defined as the processes of temporal variability of the patterns of the fields of the basic (density, momentum, energy) and derivatives (velocity, displacement of isolines, etc.) of physical quantities. Complete solutions give a room for the calculation of all physical characteristics of flows and the environment without involving additional hypotheses, process parameters, and constants. Due to the differences in the physical nature of physical quantities, the patterns of their fields are not similar in scale and can vary significantly.

Ligaments are the components of all flows formed from a dormant state, non-stationary and periodic. They have a form of thin envelopes (shells), interfaces and fibers (filaments), the transverse scales of which δ are determined by the dissipative properties of the medium (kinematic viscosity ν, thermal diffusivity κ_T or diffusion coefficients κ_S) and characteristic values of temporal variability that are the process establishment time ΔT, frequency waves ω or rates U of momentum and energy transfer: $\delta_T^\nu = \sqrt{\nu \Delta T}$, $\delta_\omega^\nu = \sqrt{\nu / \omega}$, $\delta_U^\nu = \nu / U$.

The minimum number of Ligaments is determined by the form of the equation of state. There are four ligaments if density variability is taken into account, as well as six when heat conductivity is taken included and increases to eight when diffusion is taken into account. They are described by a group of singularly perturbed solutions of the fundamental system [6].

A wave is defined as a periodic process in which the parameters of the local temporal variability of physical fields (frequency ω) and instantaneous spatial structure (wave number $\mathbf{k}$ or wavelength λ) are related by a functional (dispersion) relation $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{kA}, ...)$, which can also include perturbation amplitudes $\mathbf{A}$. Waves are described by a group of regularly perturbed solutions of the fundamental system.

The multiplicity of coexisting components, causes complexity of the internal structure the spatio-temporal scales of which are connected by irrational relations, explains the non-stationarity of all kinds of flows even at stationary conditions.

Real flows are described by systems of nonlinear equations [4, 5]. Already in the approximation of weak nonlinearity, all components nonlinearly interact with each other and generate new ones, including long-lived vortices and fine ligaments.

Vortices are the products of nonlinear interactions of the basic components – ligaments and waves – non-stationary components of flows with a relatively high vorticity $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ value. In a vortex, free solids in the bulk or on the surface of a liquid are carried by the flow and simultaneously rotate around their own axis, and compact "liquid particles" in them are split by ligaments into distinguishable fibers.

When density variability is taken into account, the system of fundamental equations is solvable in the entire range of parameters. The approximation of an actually constant density leads to the degeneracy and overdetermination of the system of equations due to the multiplicity of singularly perturbed solutions. In the ideal fluid approximation, the system becomes underdetermined.

It should be emphasized that the equations themselves and their complete solutions are parametrically and scale invariant – independent of the values of the initial and boundary conditions that determine the relative severity of various structural components. The fact of the observed strong dependence of the structure and dynamics of flows on macroscopic parameters is due to a variety of non-mechanical energy transfer mechanisms (with corresponding time parameters), changes in the form of the equation of state (for example, during phase transitions), and a number of other factors.

The fine structure of waves, vortices, jets, tracks, other structural components and its evolution are observed at the stands of the Unique Scientific Facility "HPC IPMeh RAS" [7]. The most common among them are ligaments, the existence of which requires dissipation, stratification (and real media always separate in the field of mass forces (gravitational) due to the different density of particles) and changes in the external conditions or internal state of the medium.

Ligaments are observed both in the slowest flows, which include the flows induced by diffusion on the topography, and in the fastest, for example, upon droplet impact. Ligaments are observed near an impermeable obstacle in the thickness or on the solid boundary of a resting continuously stratified fluid in the field of gravity [8]. With the beginning of the motion, the layer of diffusion-induced flows at the boundaries of the bodies becomes thinner, detached and forms in the thickness of the fluid highly gradient interfaces between the regions of wave propagation and the vortex components of the satellite flows.

Beams of internal waves in the thickness of a continuously, stratified fluid with an arbitrary density distribution have a pronounced fine structure. Accounting for ligaments allows us to solve the whole complex of problems of generation, propagation, reflection, nonlinear interaction of internal wave beams from a solid wall or critical layer [9], the results of which are in good agreement with the data of independently performed experiments [10].

As an example, comparisons of observations and numerical calculations of the patterns of flows formed during the movement of various bodies (plate, cylinder, sphere) in stratified liquids and gases are given (modern computer technology allows us to calculate the fields of physical quantities of flows in a full nonlinear formulation). The general geometry of the flows, the patterns of the attached internal waves are in good agreement with each other and with the data of independently performed calculations. The calculations of the fine structure of flows for four types of liquids are also consistent – stratified strongly and weakly, and homogeneous (potentially when the density variations are so small that they cannot be fixed by existing equipment) and relevant (the density is identically constant).

An example of the strong influence of weak stratification is the symmetry catastrophe of the cross section of the density wake behind a sphere moving uniformly in the horizontal plane in a continuously stratified fluid – the axisymmetric wake in a homogeneous (cross sec-

tion – circle) is replaced by a prismatic (cross-section – rectangle) in a continuously stratified fluid. The experiments [11] initiated the calculations of the body drag, the geometry of the confluent flow and wave fields, a review of which is given in [12]. Research around the sphere continues.

A significant role is played by ligaments in the pattern of convective flows during lateral heating of a stratified fluid above a point and linear heat sources, both in experiments [13] and in calculations based on a system of fundamental equations [14], the results of which are in good agreement with each other, as well as in vortex flows [15]. The results of studies of the fine structure and calculations of patterns around the strip [16], hydrodynamics of impact droplets [17] are discussed in separate reports included in the conference program.

Further study of ligaments that relate the features of atomic-molecular processes to the macroscopic properties of continuous media will improve both the qualitative and quantitative description of flows, taking into account chemical, biological, and electromagnetic processes in moving liquids, gases, and plasmas.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-19-00598). The experiments were performed at the stands of the Higher Educational Institution “GFK IPMeh RAS”.

REFERENCES

1. Maxwell J.C. Remarks on the Mathematical Classification of Physical Quantities // Proc. L. Math. Soc. 1871. V. 3, S. 1–3. P. 224–233.
2. Feistel R. Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean Sci. 2018. V. 14. P. 471–502. https://doi.org/10.5194/os-14-471-2018).
3. Landau L.D., Lifshitz E.M. Statistical Physics. Part 1. V.6. Course of Theoretical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1980.
4. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. V.6. Course of Theoretical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1987.
5. Chashechkin Yu.D. Differential fluid mechanics – harmonization of analytical, numerical and laboratory models of flows. // Math. Model. Optimiz. Complex Struct. Springer Series “Computational Methods in Applied Sciences”, 2016. V. 40. P. 61–91. DOI: 10.1007/978-3-319-23564-6-5.
6. Chashechkin Yu.D. Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves // Math. Model. Nat. Phenom. 2018. Vol. 13. No. 2. P. 1–29. https://doi.org/10.1051/mmnp/2018020
7. Hydrophysical complex for modeling hydrodynamic processes in the environment and their impact on underwater technical objects, as well as the transport of impurities in the ocean and atmosphere (HPC IPMech RAS). http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#equip
8. Dimitrieva N.F., Chashechkin Yu.D. Fine structure of stratified flow around a fixed and slow moving wedge // Oceanology. 2018. V. 58. No. 3. P. 340–349. DOI: 10.1134/S0001437018030
9. Kistovich Yu.V., Chashechkin Yu.D. Linear theory of beams internal wave propagation an arbitrarily stratified liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 1998, V. 39, No. 5, P. 302–309. doi:10.1007/BF02468043
10. Paoletti M.S., Swinney H.L. Propagating and evanescent internal waves in a deep ocean model // J. Fluid Mech., 2012, V. 706, P. 571–583. doi: 10.1017/jfm.2012.284
11. Sysoeva E.Ya., Chashechkin Yu.D. Vortex systems in the stratified wake of a sphere // Fluid Dyn., 1991. V. 26, No. 4, P. 544–551.

12. Voisin B. Lee waves from a sphere in a stratified flow // J. Fluid Mech., 2007, V. 574, P. 273–315. doi:10.1017/S0022112006004095
13. Chashechkin Yu.D., Popov V.A. Methods of laboratory modeling of convective processes in heterogeneous systems under normal and reduced gravity. In: Hydromechanics and heat and mass transfer in zero gravity. M.: Nauka. 1982. P. 119–146.
14. Sabbah C., Pasquetti R., Peyret R., Levitsky V., Chashechkin Y.D. Numerical and laboratory experiments of sidewall heating thermohaline convection // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2001. V. 44. No. 14. P. 2681–2697.
15. Chashechkin Yu.D., Stepanova E.V. Formation of a single spiral arm from a central marking-admixture spot on a compound vortex surface // Dokl. Phys., 2010, V. 55, No. 1, P. 43–46. DOI: 10.1134/S102833581001009X
16. Chashechkin Yu.D., Zagumennyi Ya.V. The 2D flow around tilted plate // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences, 2019, No. 4, P. 73–88.
DOI: 10.18698/1812-3368-2019-4-73-88. vestniken.ru/catalog/phys/condph/885.html
17. Chashechkin Yu.D. Visualization of the Fine Perturbation Structure of a Liquid Surface by Flows Induced by a Drop Impact // Fluid Dyn., 2019, V. 54, Suppl. 7. P. S33–S40. DOI: 10.1134/S0015462819070036

——— ♦♦♦ ———

VISUALIZATION OF STRATIFIED FLOW AROUND A VERTICAL PLATE: LABORATORY AND NUMERICAL MODELING

Yu.D. Chashechkin [1], Ya.V. Zagumennyi [2]
[1] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, e-mail: yulidch@gmail.com
[2] Institute of Hydromechanics of the NASU, Ukraine, e-mail: zagumennyi@gmail.com

Studies of flows around a plate are a traditional object of experimental and theoretical investigations in hydro and aerodynamics due to the fundamental nature of the problem and the importance of practical applications. Starting from the first systematic studies carried out at the end of the 19th century, the flow pattern and the nature of the forces acting on an obstacle have been studied as functions of many parameters, including plate size, its angular position, density and free stream velocity of a fluid or a gas [1].

In the second half of the last century, due to the increasing interest in environmental fluid dynamics, the range of media types studied and factors taken into account was expanded, including numerical and experimental studies of the stratification effects naturally present in the environment [2]. Schlieren visualization images of flow patterns in the mode of intensive generation of attached internal waves by a cylinder and a vertical plate uniformly moving in a stratified fluid along with measurements of velocity profiles in the upstream flow perturbation using density markers are conducted in [3]. Such an important detail of the flow patterns as presence of high-gradient interfaces was used for consistent optical and acoustic visualization of the flow past a vertical plate [4].

Calculations of the flow pattern past a vertical plate using turbulence models show a good qualitative and quantitative agreement with the observation data of internal wave patterns [5], however some fine structural elements, which are clearly observed in the experiments, are not visualized numerically due to the limitations of the problem formulation. Numerical simulation of laminar flow past a vertical plate was performed in [6], and unsteady evolution of a weakly stratified flow was analysed numerically in [7] neglecting the influence of internal waves. During the recent years, mathematical models for flows around both solid and perforated plates has been created within the framework of modern versions of the turbu-

lence theory in both the traditional 2D formulation [8] and a more complete 3D one [9]. However, computational techniques based on turbulence theory do not make it possible identifying the inhomogeneous fluid flow fine structure, which is clearly visualized by the classical schlieren visualization methods [3, 4], and studying its effect on the flow dynamics.

The aim of this work is to develop a methodology for high-resolution numerical simulation of the fine structure and internal waves in the stratified flow pattern around a vertical plate and to compare the obtained numerical results with the schlieren visualization data from the laboratory experiments.

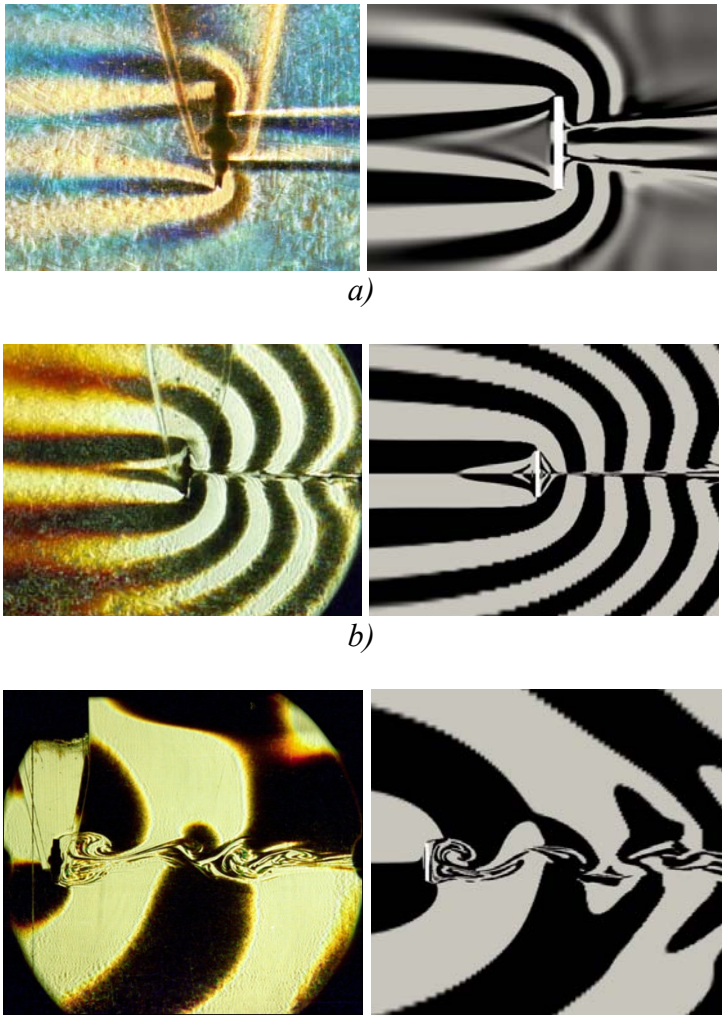


Fig. 1. Comparison of schlieren image (light refraction index) and computed pattern (horizontal component of density gradient) of stratified flow around a vertical plate: $h = 2.5\ cm$, $T_b = 12.5\ s$, $U = 0.03; 0.18; 0.75\ cm/s$ $(a-c)$.

Mathematical modeling of the problem is carried out on the basis of the system of equations of incompressible continuously stratified fluid mechanics, including the momentum transfer equation taking into account the gravitational force in the Businesque approximation, the diffusion and continuity equation, and the closing linearized equation of state [10]. The problem is solved by direct numerical simulation based on the finite volume method in the framework of the OpenFOAM computing tools. In order to compute the stratified flow patterns original OpenFOAM solvers were developed, including specific dynamic mesh libraries

enabling coordination between mesh displacement and movement of an obstacle, and special utilities for processing and visualizing the computational results [11].

Laboratory observations of the flow patterns were conducted by the schlieren instrument IAB-458 at the LMT stand of the URF "HPC IPMech RAS" using a vertical slit illumination diaphragm 10×12 mm and a flat vertical Foucault knife. Changes in illumination are proportional to variations in the horizontal component of refraction index gradient which is in a linear relation to salinity and density gradients for the aqueous sodium chloride solution used to create the stratification. The coloring is due to the pronounced light dispersion in such a medium [12]. Comparison of high-resolution computation and visualization data on stratified flow patterns are in a good qualitative and quantitative agreement (Fig. 1).

The creeping flow regime at a slow body motion is characterized by existence of a set of flow structural components, including upstream oblique rays, internal waves attached past the body, and ligaments being formed at a distance from the plate edges and bounding the density wake (Fig. 1, a). At the smallest value of velocity of plate movement considered, the stratification substantially restricts the vertical size of the perturbations, so that the downstream wake contacts the rear side of the obstacle at some distance from its edges.

With increase in the velocity of plate movement the vertical size of the wake grows and the contact area approaches the plate edges. In the regime of intense wave perturbations, both waves and an extensive family of ligaments forming a thin-layered wake are presented (Fig. 1, b). Moreover, both in the calculations and the experiments, the upstream perturbation fine structure is visualized, indicating the existence of ligaments both past and in front of the body. In the experiments, the phase surfaces of the attached internal waves are deformed by the wake flow a bit stronger as compared to the calculation results, and the split pattern of thin-layered perturbations is more pronounced.

With a further increase in the velocity, the general flow structure undergoes some modifications, such as leaning of the internal wave phase surfaces towards the direction of the body motion, and change in geometry of the fine-structural interfaces and manifestation degree of separate flow components (Fig. 1, c). The strongest structural changes are observed in the wake past the plate, where typical vortex elements, such as vortex dipoles past the body and "vortex bubbles", are formed in the divergence zones of the internal wave phase surfaces. All the flow components evolve and actively interact with each other and with the free stream. In the unsteady flow regime, one can distinguish slowly evolving components, such as upstream and attached wave fields, rapidly changing ones, including fine-structured layers or ligaments, and their sets which are vortices.

Таким образом, в нестационарном течении в различной степени представлены все его компоненты, включая медленно эволюционирующие – поля присоединенных и опережающих волн, и быстро меняющиеся – тонкоструктурные прослойки (лигаменты) и их наборы – вихри, которые активно взаимодействуют между собой и со средним течением.

Thus, in an unsteady flow, all the flow components are represented simultaneously to various manifestation degrees, including slowly evolving ones, such as fields of attached waves and upstream perturbations, and rapidly changing ones, such as fine structural interfaces (ligaments), and their sets – vortices, which actively interact with each other and with the free stream.

REFERENCES

1. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary Layer Theory. Berlin: Springer-Verlag. 2017.
2. *Turner J.C.* Buoyancy Effects in Fluids. Cambridge: Univ. Press. 1973.
3. *Chashechkin Yu.D., Mitkin V.V.* A visual study on flow pattern around the strip moving uniformly in a continuously stratified fluid // J. Visualiz. 2004. V. 7. No. 2. P. 127–134.

4. *Prokhorov V.E., Chashechkin Yu.D.* Visualization and acoustic sounding of the fine structure of a stratified flow behind a vertical plate // Fluid Dyn. 2013. V. 48. No. 6. P. 722–733.
5. *Houcine H. et. al.* Numerical modeling of the generation of internal waves by uniform stratified flow over a thin vertical barrier // Int. J. Numer. Methods in Fluids. 2012. V. 68. P. 451–466.
6. *Castro P., Cliffe K.A., Norgett M.J.* Numerical predictions of the laminar flow over a normal flat plate // Int. J. Numer. Meth. in Fluids. 1982. V. 2. P. 61–88.
7. *Chernyshenko S.I., Castro I.P.* High-Reynolds-number weakly stratified flow past an obstacle // J. Fluid Mech. 1996. V. 317. P. 155–178.
8. *Castro I.P.* Wake characteristics of two-dimensional perforated plates normal to an airstream // J. Fluid Mech. 1971. V. 46. P. 599–609.
9. *Basnet K., Constantinescu G.* Effect of a bottom gap on the mean flow and turbulence structure past vertical solid and porous plates situated in the vicinity of a horizontal channel bed // Phys. Rev. Fluids. 2019. V. 4. 044604.
10. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical Physics. Hydromechanics. Pergamon Press. 1987.
11. *Chashechkin Yu.D., Zagumennyi Ia.V.* Formation of waves, vortices and ligaments in 2D stratified flows around obstacles // Physica Scripta. 2019. V. 94. No. 5. 054003.
12. *Chashechkin Yu.D.* Schlieren visualization of a stratified flow around a cylinder // J. Visualiz. 1999. V.1. No. 4. P. 345–354.

—— ♦♦♦ ——

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ВОЛНЫ ТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕТОНАЦИИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

L.T. Chung, О.И. Мелихов
Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Настоящая работа посвящена изучению особенностей протекания стратифицированного парового взрыва при взаимодействии высокотемпературного расплава с водой в условиях, когда струя расплава попадает в неглубокий слой воды и растекается по дну бассейна, не подвергаясь существенной фрагментации. При таком расположении слой расплава отделен от находящегося выше водяного теплоносителя пленкой пара, лимитирующей интенсивность передачи тепловой энергии от расплава к воде. Этим стратифицированный паровой взрыв отличается от традиционно рассматриваемого попадания струи расплава в глубокий бассейн, где она полностью фрагментируется на капли, создавая в объеме воды дисперсное облако горячих капель, способное взорваться. Характеристики взрывного взаимодействия существенным образом зависят от предварительного перемешивания расплава и воды в трехфазной области, содержащей расплав, воду и пар. В данной работе с помощью метода частичных адиабат Гюгонио выполнен анализ результатов экспериментов по стратифицированным паровым взрывам [1] и оценены массы расплава и воды, принявшие участие в этом взаимодействии. Также предложен физический механизм, в соответствии с которым может образоваться перемешанная смесь расплава с водой в условиях их первоначальной стратификации.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ВОЛНЫ ТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕТОНАЦИИ В СТРАТИЦИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

В данном разделе дана оценка параметров волны термической детонации в стратифицированной системе методом частичных адиабат Гюгонио. Она основывается на модели многофазной термической детонации, рис. 1. Рассматриваются уравнения сохранения массы, импульса и энергии для смеси в исходном состоянии и точке, когда устанавливается равновесие в смеси (плоскость Чепмена – Жуге). Анализируется многофазная смесь, которая изначально состоит из крупных (~ 1 см) высокотемпературных капель расплава, окруженных тонкой паровой пленкой, и теплоносителя (пароводяная смесь). Предполагается, что расплав не взаимодействует со всей охлаждающей жидкостью, а только с той частью, которая находится рядом. Вода вдали от капель (фаза 2) не участвует во взаимодействии. Ударная волна, распространяющаяся по смеси, вызывает разрушение пленочных паров вокруг капель расплава, что приводит к прямому контакту воды и расплава и к фрагментации капель расплава на мелкие (~ 0,1 мм) фрагменты. Рассматриваются уравнения сохранения массы, импульса и энергии для смеси в исходном состоянии и точке, когда устанавливается равновесие в смеси (плоскость Чепмена – Жуге). Анализируется многофазная смесь, которая изначально состоит из крупных (~ 1 см) высокотемпературных капель расплава, окруженных тонкой паровой пленкой, и теплоносителя (пароводяная смесь). Предполагается, что расплав не взаимодействует со всей охлаждающей жидкостью, а только с той частью, которая находится рядом. Вода вдали от капель (фаза 2) не участвует во взаимодействии. Ударная волна, распространяющаяся по смеси, вызывает разрушение пленочных паров вокруг капель расплава, что приводит к прямому контакту воды и расплава и к фрагментации капель расплава на мелкие (~ 0,1 мм) фрагменты.

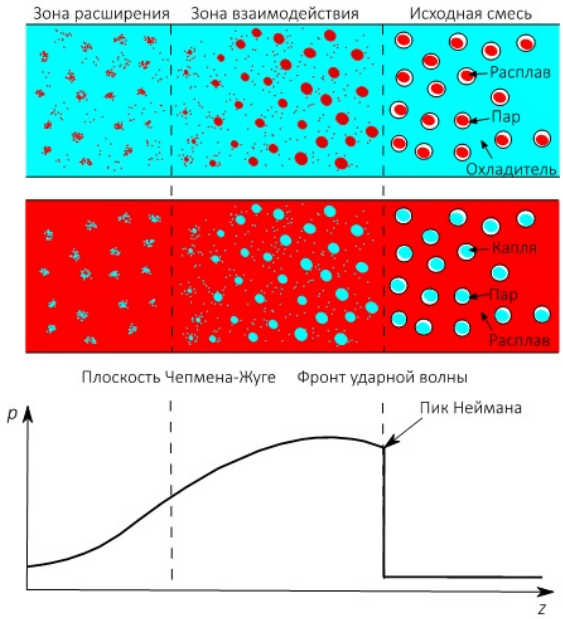


Рис. 1. Модель многофазной термической детонации.

Предполагается, что исходные капли расплава не полностью фрагментируют, поэтому в конечном состоянии находятся: 1) большие остаточные капли расплава, 2) вода и пар, которые не участвуют во взаимодействии, 3) мелкие фрагменты, 4) часть охлаждающей жидкости, которая взаимодействует с небольшими осколками расплава. Также предполагается, что только небольшие фрагменты и теплоноситель вблизи них достигают термодинамического равновесия, то есть их температуры выравниваются. Темпе-

ратуры других фаз не успевают выровняться, однако давление всех фаз в конечном состоянии считается одинаковым.

С помощью данной модели были рассмотрены эксперименты [1]. В этих экспериментах расплав оксидного материала, имеющий температуру 1049°С, вливался в сосуд, на дне которого находилась холодная вода (глубина слоя воды 20 см). Поскольку расплав имеет большую плотность, происходила стратификация компонентов – тяжелый расплав растекался «пятном» по дну под водой. В [1] было установлено, что в такой стратифицированной конфигурации может возникать паровой взрыв с коэффициентами конверсии порядка 1–3%. Нами был детально проанализирован эксперимент E6. Было выявлено, что наилучшее соответствие между расчетными максимальным давлением и коэффициентом конверсии и экспериментальными величинами достигается при массе фрагментов расплава в диапазоне 1,52–2,85 кг и массе соответствующего теплоносителя 1,05–1,68 кг. Сравнение вычисленной скорости детонации с экспериментальной величиной позволило оценить начальную объемную долю пара в смеси величиной около 0,4. Эти результаты хорошо согласуются с данными, полученными в [2] при численном моделировании эксперимента с использованием кода MC3D.

ВОЗМОЖНЫЙ МЕХАНИЗМ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ РАСПЛАВА С ВОДОЙ

1. Оценка размера пузырька, захваченного водой

Паровой слой и находящийся над ним слой воды представляют собой неустойчивую систему, их граница нестабильна, образующиеся на ней возмущения развиваются по механизму Рэлея–Тейлора, рис. 2. Длина волны λ самой быстрорастущей гармоники определяется соотношением [3]:

$$\lambda = 2\pi\sqrt{3\sigma / (g\Delta\rho)}$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение силы тяжести, Δρ – разность плотностей воды и пара. Для условий эксперимента E6 [3] λ = 1,35 см. Примем, что диаметр образующегося пузырька d равен половине этой длины волны, d = 0,675 см. Если допустить бесконечно быструю конденсацию пара в образовавшемся пузырьке, находящемся в недогретой воде, то давление пара в пузырьке будет равно давлению насыщения, соответствующему температуре окружающей воды, и его динамика будет описываться уравнением Рэлея – Плессета [3].

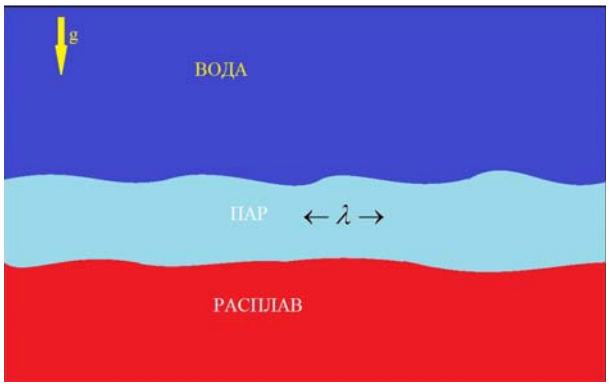


Рис. 2. Развитие неустойчивости границы раздела пар – вода

На рис. 3 показана вычисленная с помощью уравнения Рэлея – Плессета временная зависимость кинетической энергии жидкости при конденсации пузырька. Кинетическая энергия жидкости определялась для 4 случаев: 1) рассмотрена жидкость в объеме, равном начальному размеру пузырька a_0, 2) рассмотрена жидкость в объеме шара с радиусом $2a_0$, 3) рассмотрена жидкость в объеме шара с радиусом $10a_0$, 4) рассмотрена вся жидкость.

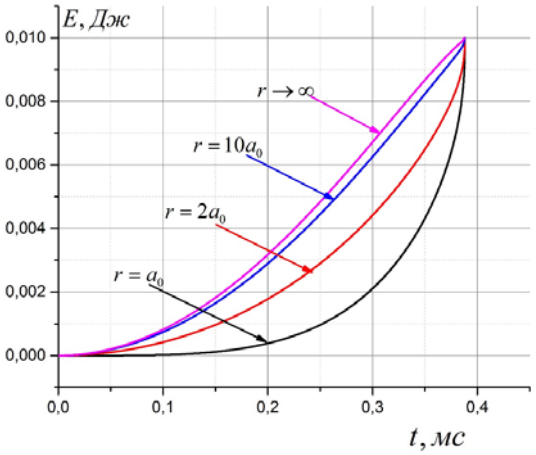


Рис. 3. Кинетическая энергия жидкости

Как видно из рис. 3, при коллапсе пузырька жидкость приобретает заметную кинетическую энергию, которая может сообщить капле размером с пузырек скорость около 11 м/с. Попадание такой высокоскоростной капли воды в поверхность расплава приведет к ответному выбиванию капель расплава в сторону воды, а совокупность таких одновременно происходящих событий может сформировать вблизи границы раздела динамически существующую смесь расплава с водой.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержки Российского научного фонда в рамках проекта № 18-19-00289.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grishchenko D., Konovalenko A., Karbojian A., Kudinova V., Bechta S., Kudinov P.* Insight into steam explosion in stratified melt-coolant configuration // In: 15th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics, NURETH 15, 2013, May 12–17, Pisa, Italy, Paper 599
2. *Leskovar M., Centrih V., Uršič M.* Simulation of steam explosion in stratified melt-coolant configuration // Nucl. Eng. Design. 2016. V. 296. No. 1. P. 19–29.
3. *Лабунцов Д.А., Ягов В.В.* Механика двухфазных систем: Учебное пособие для вузов. М.: Издательство МЭИ, 2000. 374 с.

——— ♦ ♦ ♦ ———

THE FORMATION OF THE SPECTRUM OF ATMOSPHERIC TURBULENCE

A.V. Dmitrenko [1,2]
[1] *National Research Nuclear University «MEPhI», e-mail: AVDmitrenko@mephi.ru*
[2] *Russian University of Transport «MIIT», e-mail: AMMSV@yandex.ru*

In articles [12–25] the physical regularity of the equivalence of measures and the systems of the stochastic equations for the determination onset of turbulence in isothermal and non-isothermal and flows were presented. Using these new dependences the result of distortions introduced by the turbulent atmosphere into optical images of objects is presented.

SET OF EQUATIONS

Stochastic equations of conservation, which were derived in [1–14]. For the non-isothermal motion of the medium, using the definition of equivalency measures between deterministic and random process in the critical point, the sets of stochastic equations of energy, momentum, and mass are defined for the next space-time areas: 1) the beginning of the generation (index 1,0 or 1); 2) generation (index 1,1); 3) diffusion (1,1,1) and 4) the dissipation of the turbulent fields. These results provide an opportunity to introduce the concept of the correlator, which is defined for the potential physical quantities and combinations (N, M). This correlator, in its structure, will determine the possible range of motion in space depending on the different combinations of (M, N) and the corresponding values that determine the correlation interval of space-time. Subscripts «*cr*» or «*c*» refer to critical point $r(x_{cr}, \tau_{cr})$ or r_c: the space-time point of the beginning of the interaction between the deterministic field and random field that leads to turbulence. So, for the area of 3) diffusion, in according with [1–14] we have two fractal equations. The first equation is written as

$$\frac{d\left(E_{st}\right)_j}{d\tau} = -\left(R_{zTz}\right)_{(1,1,1)} \frac{\left(E_{st}\right)_j}{\tau_{cor1}} \tag{1}$$

$\left(E_{st}\right)_j$ is the fraction of the field energy, which is actually the stochastic field component (index st). Then the solution may be written for $\left(R_{zTz}\right)_{1;(1,0)} = 1$ as an expression for the correlation function in statistic theory

$$B(\tau) c \exp\left(-\alpha\tau^2\right) \tag{2}$$

For $\tau = 0$ we have the correlation function

$$c = \left(E_{st}\right)_{\tau_{cor}^1} = \left(E_{st}\right)_{\tau_{cor}^0} \left|\mathrm{Re}_{st} - \mathrm{Re}_{st}^{-1}\right|_{\tau_{cor}^0} \tag{3}$$

So, the spectral function is equaled

$$E(w) = \frac{c}{\sqrt{\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right) \tag{4}$$

Using (4) for constant c and in case $\alpha = \frac{1}{2}\omega_1^2$, we have the next expression

$$E(w) = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_1}\left[\left(E_{st}\right)_{\tau_{cor}^0} \left|\mathrm{Re}_{st} - \mathrm{Re}_{st}^{-1}\right|\right]_{\tau_{cor}^0} \left[\Phi\left(\mathrm{Re}_{st}\right) - \Phi\left(\mathrm{Re}_{st}^{-1}\right)\right]^{-1} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\omega_1^2}\right)$$
$$\mathrm{Re}_{st} \geq 10\left[\Phi\left(\mathrm{Re}_{st}\right) - \Phi\left(\mathrm{Re}_{st}^{-1}\right)\right]^{-1} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \tag{5}$$

Estimations of values of turbulent energy for frequency bands $\omega_1 \div \omega_2$ and $\omega_1 \div \omega_3$ are equaled

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} E(w)dw\right| = \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\left(\Phi(1) - \Phi\left(\omega_2/\omega_1\right)\right) = \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\left(\Phi\left(\omega_3/\omega_1\right) - \Phi(1)\right) \tag{6}$$

Here $\Phi\left(\omega_3/\omega_1\right) - \Phi\left(\omega_2/\omega_1\right) = \Phi\left(\mathrm{Re}_{st}\right) - \Phi\left(\mathrm{Re}_{st}^{-1}\right) \to \sqrt{\pi}/2$. Widths of the frequency bands equal $\omega_{cor,1} - \omega_{cor,2}^0 = \omega_{cor,1}\left(1 + \mathrm{Re}_{st}^{-1}\right)$ and $\omega_{cor,3} - \omega_{cor,1}^0 = \omega_{cor,1}\left(1 + \mathrm{Re}_{st}\right)$. Thus, knowing the parameters of the initial disturbance and using diffusion equation(1),which is obtained from the relations of equivalence of measures, in case $\left(R_{zTz}\right)_{1;(1,0)} = 1$, gives the possibility to write the value for the spectral

function which is well known in the statistical theory.

RESULTS

As is known, the motion of the atmosphere is a complex phenomenon of air mass flows with different turbulent characteristics. It is the difference in the parameters of these spatio-temporal turbulent characteristics and the associated interactions of different atmospheric flows that are the reason for the difficulty of increasing the resolution of recording and observation devices. As is known, these processes of atmospheric turbulence are reflected in the fluctuations of the refractive index of air [15,16]. The known procedure for determining the refractive index continues to improve, as reflected in recent work in the field of atmospheric turbulence. However, the essence of these improvements is to improve the recording instrumentation, and search for optimal expressions of the height dependence of the structural characteristics of the refractive index. At the same time, there is an understanding that the search for physical laws that determine the interaction of turbulent currents in the entire range of wave numbers of the spectrum of turbulent fluctuations atmospheric. It is also important to emphasize that it is considered particularly interesting to establish a link between the characteristics of small-scale turbulence and the characteristics of different atmospheric formations. However, the main provisions of turbulence, which are used to build the design ratios of the refractive index in function of the fluctuation characteristics of atmospheric currents remains practically unchanged. Namely, the main provisions of the theory of turbulence are Kolmogorov's relations for equilibrium and homogeneous turbulence in the inertial range of the spectrum. The use of these Kolmogorov's relations is clearly explained by the fact that at large Reynolds numbers the inertial interval is a significant part of the spectrum.

$$E(k)_j = \cos\mathrm{tg}\, t \cdot k^{-5/3}\varepsilon^{2/3} \tag{7}$$

In article [17] was determined the *spectral function for vortexes* in the range of wave numbers in which the energy-containing vortices are concentrated. Then there is the existence of a family of vortices, which have the dependence of space–energy similarity constant $\left(EL^{-a}\right) = \text{const}$ which, when interacting with the main motion, are capable of generating turbulence. *So the spectral function* in the range of wave numbers in which the energy-containing vortices is

$$E(k)_j = \text{const}\, k^{-n} \tag{8}$$

where $n \neq 5/3$. Thus, it is not always correct to be guided by measurements only on the basis of the ratio (6) of the corresponding inertial interval. This is especially important if the measurements are made in the areas of atmospheric flows with the turbulence generation.

REFERENCES

1. *Dmitrenko A.V.* Equivalence of measures and stochastic equations for turbulent flows // *Dokl. Phys*. 2013.V.58. № 6, P. 228–235.
2. *Dmitrenko A.V.* Calculation of pressure pulsations for a turbulent heterogeneous medium //Dokl. Phys. 2007. V.**52**. № 7. P.384–387.
3. *Dmitrenko A.V.* Some analytical results of the theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for nonisothermal fl ows//Adv. Studies Theor. Phys. 2014.V. **8**, №. 25, P. 1101–1111.
4. *Dmitrenko A.V.* Analytical estimation of velocity and temperature fi elds in a circular tube on the basis of stochastic equations and equivalence of measures//, J. Eng. Phys. Thermophys. 2015. V. 88, №6, P. 1569–1576.
5. *Dmitrenko A.V.* Determination of critical Reynolds numbers for nonisothermal flows

with using stochastic theories of turbulence and equivalent measures//*Heat Transfer Res.* 2016. V. **47**, №. 1. P. 338–399.
6. *Dmitrenko A.V.* An estimation of turbulent vector fi elds, spectral and correlation functions depending on initial turbulencebased on stochastic equations. The Landau fractal equation// Int. J. Fluid Mech. Res. 2016. V. 43, №. 3,P.82–91.
7. *Dmitrenko A.V.* The theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for nonisothermal fl ow on the flatplate// Int. JFMR. 2016. V. **43**, №. 2, P. 182–187.
8. *Dmitrenko A. V.* Stochastic equations for continuum and determination of hydraulic drag coeffi cients for smooth fl at plate andsmooth round tube with taking into account intensity and scale of turbulent flow//Continuum Mech. and Thermodyn.V. 29, №1, P. 1–9.
9. *Dmitrenko A.V.* Analytical determination of the heat transfer coefficient for gas, liquid and liquid metal flows in the tube based on stochastic equations and equivalence of measures for continuum //Contin.Mechan. Thermod. 2017.V. 29.№ 6.P.1197–1206
10. *Dmitrenko A.V.* Estimation of the critical Rayleigh number as a function of an initial turbulence in the boundary layer of the vertical heated plate. *//Heat Transf. Res.* 2017.V.48. No. 13. P. 1195–1202.
11. *Dmitrenko A.V.* Determination of the Coefficients of Heat Transfer and Friction in Supercritical–Pressure Nuclear Reactors with Account of the Intensity and Scale of Flow Turbulence on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures *//J.of Eng. Phys.and Thermophys*.2017.V.90.№6. P.1288–1294.
12. *Dmitrenko A.V.* 2013 Regular Coupling between Deterministic (Laminar) and Random (Turbulent) Motions-Equivalence of Measures Scientifi c Discovery Diploma No. 458 registration No. 583 of December 2
13. *Dmitrenko A.V.* Theory of Equivalent Measures and Sets with Repeating Denumerable Fractal Elements. Stochastic Thermodynamics and Turbulence. Determinacy–Randomness Correlator //Galleya-Print: Moscow.2013.226p. [in Russian]
14. *Dmitrenko A.V.* Fundamentals of heat and mass transfer and hydrodynamics of single-phase and two-phase media.Criterial integral statistical methods and direct numerical simulation. // Galleya print: Moscow. 2008. 398p.
15. Monin, A.S., Yaglom, A.M.: Statistical Fluid Mechanics. M.I.T Press, Cambridge (1971)
16. Hinze J O 1975 Turbulence (McGraw-Hill.)
17. *Dmitrenko A.V.* Uncertainty relation in turbulent shear flow based on stochastic equations of the continuum and the equivalence of measures// Continuum Mech. and Thermodyn. 2019. DOI:10.1007/s00161-019-00784-0

—— ♦ ♦ ♦ ——

TURBULENT PARAMETERS IDENTIFICATION IN THE MARINE SURFACE LAYER

P. Fraunié[1], C. Aldebert[1]. G. Koenig[1], J.L. Devenon[1], M. Baklouti[1], D. Bourras[1], A. Sentchev[2], V. Shrira[3]
[1] Mediterranean Institute of Oceanography, Université de Toulon, Aix Marseille Université, CNRS 7294, IRD, BP 20832, 83957 La Garde cedex France, e-mail: fraunie@univ-tln.fr
[2] Laboratoire d'Océanologie et Géosciences Université du Littoral – Côte d'Opale – CNRS
[3] Keele University, UK

Controlling the marine surface layer is well known as a key challenge for coupled Ocean–Atmosphere models, especially when fine grid discretization is considered. Then, so called bulk formulas fail to represent local and unsteady energy and mass exchanges. A care-

ful parametrization of turbulent fields need to be involved in the models, when local wind and hydrological fields are more accurately monitored. So, when the mixing layer needs to be resolved with a metric resolution, turbulent models need to be validated in typical situations.

Number of measurements have been performed in the marine surface layer in order to develop adequate turbulent models (e.g. [4]) with semi-empirical parameters due to the complexity of the physical processes occurring there, as surface and internal waves, Langmuir circulation, Ekman layer and instability and their non linear interactions [9].

In such complex situations, a number of parameters of turbulent models need to be tuned in order to recover measurements in the surface layer, most of such models considering turbulent kinetic energy (TKE), its dissipation rate, mixing lengths and Richardson numbers – e.g. [6,7,11,12].

Due to the complexity and non linearity of the problem, developing an adjoint model for TKE has been proved to represent a more than difficult task [2,5].

A recent experimental investigation has been conducted in North Western Mediterranean microtidal sea by performing together measurements of velocity and density fields. The horizontal surface velocity field was mapped by HF radars [8] when high resolution vertical profiles of velocity were obtained by deployment of acoustic Doppler currentmeters from the Koursk floating drifter[1,8]. By complement, the marine density was measured by Conductivity – Temperature–Depth profilers and atmospheric fluxes are measured by a dedicated drifted device using the OCARINA device [1].

In the same time, a Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation method (SPSA) [10] has been developed, including a Nesterov relaxation procedure and applied for identification of eddy viscosity models parameters from measured local profiles.

Two types of turbulent models have been considered to date: the KPP [4] and the TKE [3] models.

Twin experiments on such models have been performed based on realistic situations in order to verify the feasibility of the approach and quantify sensitivity of such models to different parameters (Fig. 1).

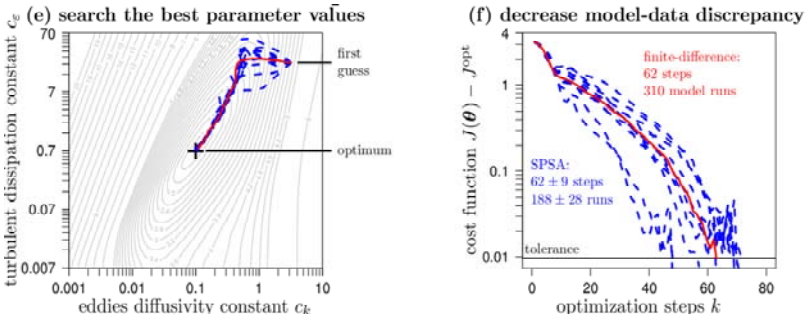


Fig. 1. Optimal search in a control 2D space

ACKNOWLEDGMENTS

CNRS LEFE "TURBORADAR" and ANR ASTRID "TURBIDENT" projects

REFERENCES

1. *Bourras, D, H. Branger, G. Reverdin, L. Marié, R. Cambra, L. Baggio, C. Caudoux, G. Caudal, S. Morisset, N. Geyskens, A. Weill, and D. Hauser, 2014.* A New Platform for the Determination of Air–Sea Fluxes (OCARINA): Overview and First Results. J. Atmos. Oceanic Technol., 31, 1043–1062.
2. *Dekeyser, Y., Leredde, Y., & Devenon, J. (2004).* Marine-turbulence modeling using data

assimilation. (in H. Baumert, J. Simpson and J. Sundermann (eds.) Marine Turbulence – Theories, Observations and Models, Results of the CARTUM Project, Cambridge University Press, Chapter 21.
3. *Gaspar, P., Gregoris, Y., & Lefevre, J.-M.* 1990. A simple eddy kinetic energy model for simulations of the oceanic vertical mixing: Tests at station papa and long-term upper ocean study site. J. of Geophysical Research: Oceans, 95 (C9), 16179–16193.
4. *Large W.G., McWilliams J.C., and Doney S.C.*1994. Oceanic vertical mixing: A review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization. Reviews of Geophysics, 32(4):363–403.
5. *Leredde, Y., Devenon, J., & Dekeyser, I.* 1999. Turbulent viscosity optimized by data assimilation. Annales Geophysicae, 17 (11), 14631477.
6. *Pacanowski R.C.and Philander S.G.H.,* 1981 Parametrization of Vertical Mixing in Numerical Models of Tropical Oceans. J. of Physical Oceanography, 11, 1443–1451.
7. *Umlauf L. and Burchard H.* 2003. A generic length scale equation for geophysical turbulence models. J. of Marine Res. 61, 235–265.
8. *Sentchev A., Forget P., Fraunié P.* 2017. Surface current dynamics under sea breeze conditions observed by simultaneous HF radar, ADCP and drifter measurements. Ocean Dynamics, 67, 3–4
9. *Shrira V., P. Forget 2015,* On the Nature of Near-Inertial Oscillations in the Uppermost Part of the Ocean and a Possible Route towards HF Radar Probing of Stratification, J. Physical Oceanogr., 45(10), 2660–2678.
10. *J. Spall*, J. 1998. An overview of the simultaneous perturbation method for efficient optimization. John Hopkins APL Technical Digest, 19 (5).
11. *Verdier-Bonnet, C., Angot, P., Fraunié,* P., 1997. Paramétrisation de la turbulence pour le phénomène d'upwelling côtier en milieu stratifié. C. R., Ac. Sc., Série II b, Vol. 324, P. 229–238.
12. *Verdier-Bonnet, C., Angot, P., Fraunié, P., Coantic, M.*, 1999. Three dimensional modelling of coastal circulations with different k–ε closures. J. Mar. Syst. 21 (1–4), 321–339.

—— ♦♦♦ ——

STABILITY OF FINITE SHEAR LAYER OF A SHALLOW-WATER FLOW

Y. Fukumoto[1], T. T. Le[2]
[1] Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, Fukuoka City 819-0395, Japan
e-mail: yasuhide@imi.kyushu-u.ac.jp
[2] Graduate School of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka City 819-0395, Japan
e-mail: lethithai1208@gmail.com

Typical treatments of the Kelvin–Helmholtz instability (KHI) assume tangential discontinuity of the velocity across a surface (i.e. the *vortex-sheet approximation*). The fluid is in relative motion parallel to the interface, and this interface is necessarily destabilized by perturbations deforming it, regardless of the strength of the velocity difference [1, 2]. Landau [3] demonstrated a surprising result that the KHI is suppressed by the effect of compressibility, if the Mach number, the ratio of velocity difference to the sound velocity, is equal or greater than $\sqrt{8}$. A mathematical analogy holds between the gravity waves in a shallow-water flow of an incompressible fluid and the sound waves in a compressible gas flow [4]. Exploiting this analogy, Bezdenkov and Pogutse [5] examined the stability of an interface with discontinuity in tangential velocity across it of the shallow-water flow for which the propagation speed of the gravity wave is given by $c = \sqrt{gh}$, depending on the depth of water H. Here g is the

gravity acceleration. They showed that the interface of a tangential-velocity discontinuity in a shallow water is stabilized if the Froud number $\mathrm{Fr} = U / c$, the ratio of the velocity difference U to c, is equal or greater than $\sqrt{8}$. This critical value of the Froude number coincides with that of the Mach number for a compressible fluid [3, 4]. Jin *et al.* [6] considered the influence of bottom drag on the linear stability of an interface of tangential-velocity discontinuity of a shallow-water flow, and found that the drag, regardless of its strength, makes the flow unstable for the whole range of the Froude number.

Such a "discontinuity" in velocity is a mathematical idealization of a shear layer of small but finite thickness with rapid velocity variation within it. In reality, the effect of finite thickness L of a shear layer becomes significant for disturbances of wavelength $\lambda \le L$. Michalke [7] considered the effects of a shear layer, with hyperbolic-tangent velocity, on the Kelvin–Helmholtz instability of an incompressible fluid. He found that the smooth variation of velocity stabilizes the flow for wavelengths shorter than the width of the shear layer. Blumen *et al.* [8] examined the effect of compressibility on this hyperbolic-tangent shear layer. They showed that, unlike the case of the tangential discontinuity, instability occurs at all Mach numbers. The linear-in-coordinate velocity profile was treated by Chandrasekhar [9], Vallis [10] and others for an incompressible fluid. They obtained results similar to those found in the hyperbolic tangent case [7]. The linear shear flow of bounded or unbounded extent in shallow water of constant depth was investigated numerically by Satomura [11] and by Takehiro and Hayashi [12]. The latter was concerned with the over-reflection.

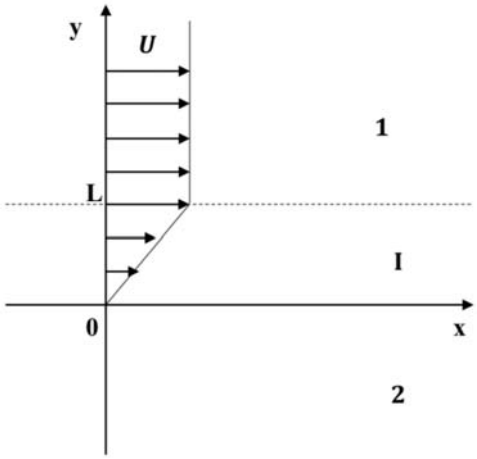


Fig. 1. Geometry and coordinate system for a simple shear layer in a shallow water flow.

In this investigation, we address the effect of a finite shear layer, with linear velocity profile, on the KHI characteristics of a shallow water flow. The simple shear flow is assumed in the middle layer as shown in Fig. 1. In the simple shear (region I), the combination of linearized equations of motion and the continuity takes the form of the Whittaker equation. The dispersion relation between the wave frequency and the wavenumber is written out in terms of the Whittaker functions and their first derivatives.

FORMULATIONS AND DISPERSION RELATION

We begin this section with deriving the governing equations for infinitesimal perturbation to a shallow water flow of depth H. The domain is divided into three regions. Let $U = U(y)$ be the base flow, directing along the x-axis that varies with y in the middle region of width L The velocity is given in each region by $U(y) = U$ constant for $y > L$, $U(y) = Uy / L$ for $0 \le y \le L$ and $U(y) = 0$ for $y < 0$ as shown in Fig. 1. We superimpose disturbances proportional to $\exp(iqx - i\omega t)$, of infinitesimal amplitude, $(\tilde{u}, \tilde{v})$ to the velocity

field and $\tilde{h}$ to the height of the free surface as $u(x,y,t)=U(y)+\tilde{u}(x,y,t)$, $v(x,y,t)=\tilde{v}(x,y,t)$, $h(x,y,t)=H+\tilde{h}(x,y,t)$, where q is the real wavenumber and ω is the frequency. The linearized equations of motion and the continuity equation for wave perturbation are

$$\frac{D\tilde{h}}{Dt}+H\left(\tilde{u}_x+\tilde{v}_y\right)=0 \tag{1}$$

$$\frac{D\tilde{u}}{Dt}+\tilde{v}\frac{\partial U}{\partial y}+g\tilde{h}_x=0 \tag{2}$$

$$\frac{D\tilde{h}}{Dt}+H\left(\tilde{u}_x+\tilde{v}_y\right)=0 \tag{3}$$

Where $D/Dt=\partial/\partial t+U(y)\partial/\partial x$ Taking the derivative of equations (2) and (3) with respect to x and y, respectively, we have, after some manipulations,

$$\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial y^2}+\frac{2q}{\omega-qU(y)}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial y}\frac{\partial U(y)}{\partial y}+\left[\left(\frac{\omega-qU}{c}\right)^2-q^2\right]\tilde{h}=0 \tag{4}$$

where $c=\sqrt{gh}$ is the velocity of gravity wave. In the region 1 $y>L$ the basic flow $U(y)=U$ is a constant, and hence the disturbance takes the form

$$\tilde{h}_1=A_1e^{i(qx-\omega t)}e^{K_1y} \tag{5}$$

with the wavenumber K_1 in the y-direction provided by

$$K_1^2=q^2-\left(\frac{\omega-qU}{c}\right)^2 \tag{6}$$

Similarly, in the region 2 ($y<0$) with $U(y)=0$, we have

$$\tilde{h}_2=A_2e^{i(qx-\omega t)}e^{K_2y} \tag{7}$$

supplemented by

$$K_2^2=q^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{8}$$

In the intermediate region I ($0<y<L$), we introduce dimensionless variables

$$\mathrm{Fr}=\frac{U}{c},\ \hat{q}=qL,\ \hat{K}_1=K_1L,\ \hat{K}_2=K_2L,\ \hat{\omega}=\frac{\omega}{qc},\ \hat{y}=\frac{\mathrm{Fr}}{L}y-\hat{\omega} \tag{9}$$

and new variables

$$4\tau=\hat{q},\ \alpha=4i\tau,\ m\frac{\sqrt{3}}{2},\ \kappa=i\tau,\ Y=\alpha\hat{y}^2 \tag{10}$$

For velocity profile $U(y)=Uy/L$, (4) is reduced to the standard form of Whittaker equation,

$$\frac{d^2W}{dY^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{Y}+\frac{1/4-m^2}{Y^2}\right]W=0 \tag{11}$$

The general solution of equation (11) is written down as

$$W=B_1M_{\kappa,m}(Y)+B_2M_{\kappa,-m}(Y) \tag{12}$$

in terms of the Whittaker functions $M_{\kappa,\pm m}$ [13].

We impose the following boundary conditions on the two perturbed interfaces. The normal components of the velocities at the interfaces should be continuous. Since the displacement in the y-direction is assumed to be small, thus we have

$$\tilde{v}_{1|y\approx L} = \tilde{v}_{I|y\approx L};\ \tilde{v}_{2|y\approx 0} = \tilde{v}_{I|y\approx 0} \tag{13}$$

The pressure should be continuous across the interface. In the hydrostatic approximation, the pressure perturbation $\tilde{p}$ is $-\rho g\tilde{h}$. This dynamical boundary condition is reduced to that of the continuity of the wave height across the interfaces.

$$\tilde{h}_{1|y\approx L} = \tilde{h}_{I|y\approx L};\ \tilde{h}_{2|y\approx 0} = \tilde{h}_{I|y\approx 0} \tag{14}$$

Combination of boundary conditions (13) and (14), we obtain the dispersion relation

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\mathrm{Fr}+\hat{K}_1(M-\hat{\omega})\right)M_{\kappa,m}\left(\alpha(\mathrm{Fr}-\hat{\omega})^2\right)+(Fr-\hat{\omega})M'_{\kappa,m}\left(\alpha(\mathrm{Fr}-\hat{\omega})^2\right)\right]\times \\
&\times\left[\left(\mathrm{Fr}+\hat{K}_2\hat{\omega}\right)M_{\kappa,-m}\left(\alpha\hat{\omega}^2\right)-\hat{\omega}M'_{\kappa,-m}\left(\alpha\hat{\omega}^2\right)\right]- \\
&-\left[\left(\mathrm{Fr}+\hat{K}_1(M-\hat{\omega})\right)M_{\kappa,-m}\left(\alpha(\mathrm{Fr}-\hat{\omega})^2\right)+(Fr-\hat{\omega})M'_{\kappa,-m}\left(\alpha(\mathrm{Fr}-\hat{\omega})^2\right)\right]\times \\
&\times\left[\left(\mathrm{Fr}+\hat{K}_2\hat{\omega}\right)M_{\kappa,m}\left(\alpha\hat{\omega}^2\right)-\hat{\omega}M'_{\kappa,m}\left(\alpha\hat{\omega}^2\right)\right]=0
\end{aligned} \tag{16}$$

where $M'_{\kappa,\pm m}$ denote the first derivative of Whittaker function $M_{\kappa,\pm m}$ on Y.

In case there exits at least one root $\hat{\omega}$ of (14) with its imaginary part $\mathrm{Im}\,\hat{\omega} > 0$, the basic state is linearly unstable. In other words, our three-layer model with the simple shear layer in the middle is stable if only if all the roots of (15) have non-positive imaginary part. We note that the signs of K_1 and K_2 defined by (6) and (8) should be chosen, when they are real, correspondingly to the inverse of the decay length in the y-direction. When they take pure imaginary values, which may occur for large Froude number Fr, the condition is imposed that the group velocity is directed outwards. We see from equation (15) that, for a given Froude number Fr, $\hat{q} = qL$ is the only parameter to be considered.

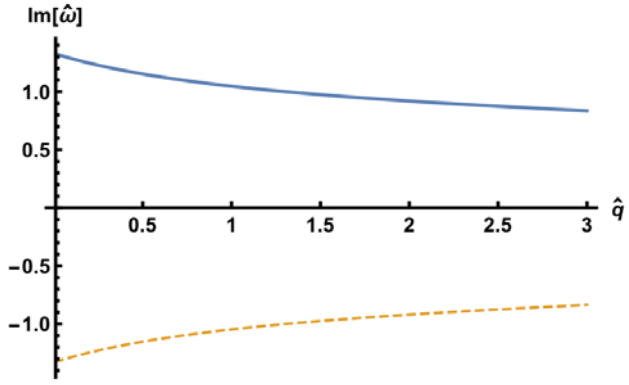


Fig. 2. Imaginary parts $\mathrm{Im}\,\hat{\omega}$ *vary with the factor* $\hat{q} = qL$ *for given Froude number* $\mathrm{Fr} = 3$

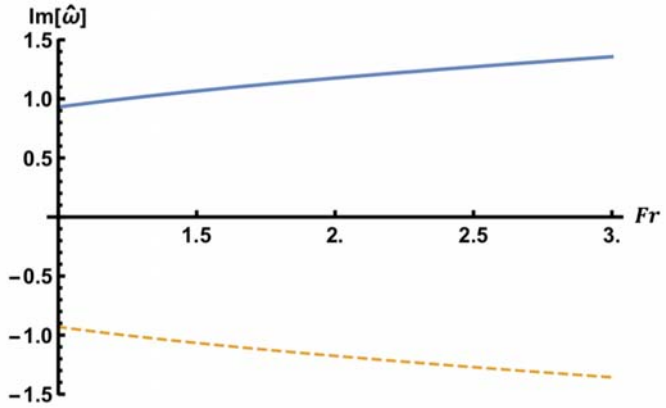


Fig. 3. Imaginary parts $\mathrm{Im}\,\hat{\omega}$ *vary with Froude number* $\mathrm{Fr} \geq 1$ *for given* $\hat{q} = 1$

NUMERICAL RESULTS

In Figs. 2 and 3, we display numerical examples of captured growth rate, by selecting typical parameter values. Fig. 2 shows the imaginary parts $\mathrm{Im}\,\hat{\omega}$ of the frequency as a function of the product between wavenumber q and the layer thickness L of simple shear, for a given Froude number $\mathrm{Fr} = 3$. The solid line corresponds to an unstable mode, with positive $\mathrm{Im}\,\hat{\omega}$ for which the disturbance is amplified exponentially with time. At least a pair of complex roots with the same magnitude of imaginary part but opposite signs appear and the negative counterpart is drawn with the dashed line. We have made an attempt to capture the largest value of the growth rate. The mode shown in Fig. 2 may not be the most unstable one. Fig. 3 shows the imaginary parts $\mathrm{Im}\,\hat{\omega}$ of a solution of (15) as a function of Fr, given $\hat{q} = 1$.

For an incompressible fluid of infinite extent, the simple shear layer is stable for large values of wavenumber for which the wavelengths are shorter than the width of the shear layer [10]. Here, we show numerically that, for $\mathrm{Fr} = 3$, the simple shear layer in a shallow-water flow is unstable for the entire range of wavenumbers as shown in Fig. 2. Fig. 3 shows that, for given $\hat{q} = qL = 1$, the growth rate of instability increases with the Froude number Fr. Our result drastically alters the discontinuous model, with zero thickness of shear layer, for which the interface is stable for large values of the Froude number [5].

CONCLUSIONS

We have considered the stability of finite shear flow in a shallow-water flow. The simple shear layer is sandwiched between two infinite layers moving parallelly with different velocities. The dispersion relation is written out in terms of the Whittaker functions. As an advantage of our explicit formula, various limits are easily accessible. The asymptotics of $c \to \infty$ correspond to the case of an incompressible fluid of infinite extent, we confirm that the simple shear layer becomes stable to disturbances of large wavenumbers or short wavelengths, but unstable to disturbances of long wavelengths [10].

By including the finite layer of simple shear flow, the flow becomes linearly unstable for the entire range of the Froude number Fr, as opposed to the case of zero thickness of shear layer, or the vortex-sheet model, which is linearly stable for Froude number $\mathrm{Fr} \geq \sqrt{8}$. We conclude that the vortex-sheet model is not adequate when waves are included, such as sound waves for a compressible fluid and gravity waves for a shallow water. Our results are similar in many respects to those of Blumen *et al.* [8] for the stability of the three-layer flow with shear layer of a hyperbolic-tangent profile between uniform flows in a compressible fluid. An advantage of our treatment is that, with an explicit solution in terms of the Whittaker functions, we can gain deeper information of the stability characteristics, which is under investigation.

ACKNOWLEDGMENTS

YF was supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research from the Japan Society for the Promotion of Science (Grant No. 19K03672). TTL was supported by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan with scholarship award.

REFERENCES

1. H. Lamb, Hydrodynamics, Dover, 1945.
2. G. K. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge Univ. Press, 1967.
3. L. D. Landau, On the problem of turbulence, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 44 (1944), 339–343.
4. L. D. Landau, E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics, 2nd ed., Butterworth-Heinemann, 1987.
5. S. V. Bezdenkov and O. P. Pogutse, Supersonic stabilization of a tangential shear in a thin atmosphere, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 37 (1983), 317–319.
6. L. Jin, T. T. Le, Y. Fukumoto, Frictional effect on stability of discontinuity interface in tangential velocity of a shallow-water flow, Phys. Lett. A, published online (2019).
7. A. Michalke, On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile, J. Fluid Mech. 19 (1964), No. 4, 543–556.
8. W. Blumen, P. G. Drazin, D. F. Billings, Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. part 2, J. Fluid Mech. 71 (1975), No. 2, 305–316.
9. S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Dover, 1961.
10. G. K. Vallis, Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation, Cambridge Univ. Press, 2005.
11. T. Satomura, An investigation of shear instability in a shallow water, J. Met. Soc. Japan. Ser. II 59 (1981), 148–167.
12. S. Takehiro, Y. Hayashi, Over-reflection and shear instability in a shallow-water model, J. Fluid Mech. 236 (1992), 259–279.
13. E. T. Whittake, G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1996.

—— ♦♦♦ ——

APPLICATION OF THE MARKER METHOD FOR REGISTRATION OF COMPLEX THREE-DIMENSIONAL FLOWS

R.I. Kanygin, I.I. Kanygin, E.E. Meshkov, I.A. Novikova
Sarov Physical & Technical Institute NRNU "MEPHI"
e-mail: Kanygin.roman@gmail.com

Investigation in hydrodynamics beginning with O. Reynolds is closely related to the development of methods for visualizing currents. An overview of the methods for hydrodynamic flows visualization developed in the SarPhTI hydrodynamic laboratory of the NRNU MEPhI is presented. These include:

- The method of solid markers, in which the flow is visualized by solid polystyrene beads, whose density is close to the density of water. This method serves to visualize the flow and determine the flow rate.
- The method of 'liquid markers' – the flow is visualized with the help of dyed trickles $KMnO_4$, the density in which is close to the density of the liquid under study.
- The 'falling curtain' method – the flow is visualized with the help of many adjacent dyed trickles $KMnO_4$.

These methods were used in the study of the following problems:

1. Flow around [1–2].
2. Cylinder floating in the water [3].
3. Bubble floating in the water [4].

In these cases, mainly two-dimensional flows were studied. Recently, the development of a method for studying complex three-dimensional flows has begun. In this case, the flow is recorded by two synchronous cameras with an angle of 90^0 between them and then the data obtained by the two cameras are compiled in the OriginPro7.0 software and presented in the form of 3D graphs.

This method began to be used to register the flow in the form of surfacing small bubbles and the flow that occurs when a water bubble rises in a salt solution [5].

REFERENCES

1. *Bashurin V.P., Budnikov I.N., Hatunkin V.Yu, Klevtsov V.A., Ktitorov L.V., Lazareva A.S., Meshkov E.E., Novikova I.A., Pletenev F.A., Yanbaev G.M.*. Wind or water turbine power augmentation using the system of guiding surfaces // Physica Scripta, Volume 91, Number 4 // http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/91/4/044002.
2. *Bashurin V.P., Budnikov I.N., Klevtsov V.A., Ktitorov L.V., Lazareva A.S., Meshkov E.E., Novikova I.A., Pletenev F.A., Fedorenko I.V., Yanbaev G.M.*. «Hydrodynamic stand» // Technical Physics, 2015, т.85, №7, p.149–150.
3. *Vlasov K.O., Dolinsky V.Yu., Meshkov E.E., Novikova I.A.* «Development of methods for investigating two-dimensional flow near a pop-up hollow cylinder» // XLIII Zvenigorod international conference on plasma physics and controlled fusion, Zvenigorod, 8–10 February, 2016.
4. *Meshkov E.E., Novikova I.A*. «Visualization of some unstable fluid flows by means of solid and liquid markers» // Abstracts of Sixth International Conference Turbulent Mixing and Beyond 14–18 August, 2017, Trieste, Italy, p. 104.
5. Kanygin R.I., Kashcheev A.D., Kudryavtsev A.Y., Meshkov E.E., Novikova I.A. The stability of the dome of a liquid bubble rising in a dense liquid // Physica Scripta Vol. 93 Num. 2 2018 // https://doi.org/10.1088/1402-4896/aa9abc

——— ♦ ♦ ♦ ———

DEFORMATION OF DROP SURFACE BY HIGH SPEED FLOW

V.V. Mitkin
University of Virginia, USA
e-mail: vvm8n@virginia.edu

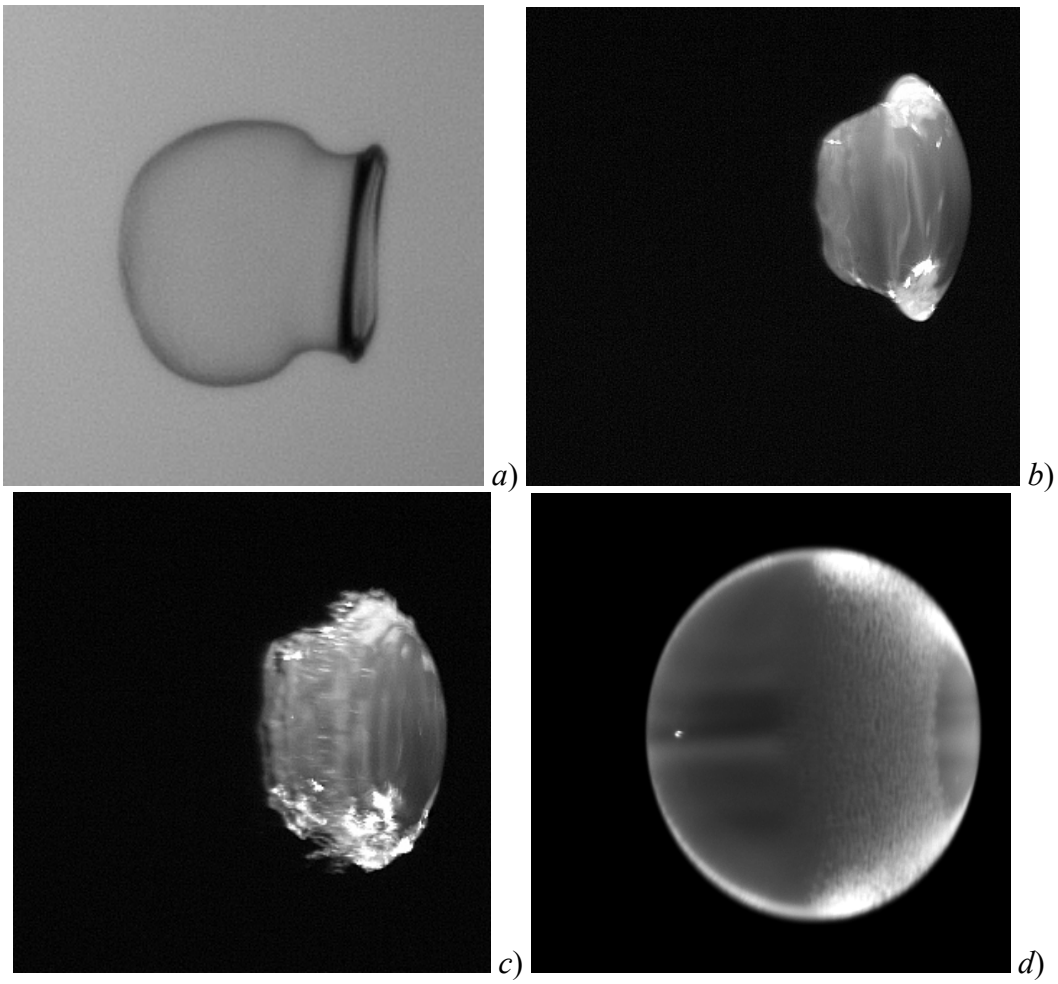
Results of experimental studies of aerobreakup of liquid drops with low and moderate viscosities are presented. The scope includes the full range of aerodynamics from near incompressible to supersonic flows and visualizations are recorded with $\mu m / \mu s$ resolutions with different techniques. The key physics of Rayleigh–Taylor piercing (RTP, first criticality) and of shear-induced entrainment (SIE, second and terminal criticality) are verified and quantified by new viscosity and capillarity-based scalings.

The principal modes of breakup of Newtonian liquids are dominated by two criticalities: Rayleigh–Taylor piercing and shear-induced entrainment. Both consist of inviscid and viscous branches with critical conditions that obey the key physics of Rayleigh–Taylor instability and viscous Kelvin–Helmholtz instability, respectively. Both R–T and K–H instabilities originate by self-selecting the fastest-growing linear wave.

Different breakup regimes lead to different types of drop deformation and development

of fine structures on the drop surface. In RTP regime drop shape changes to the disc following by appearance and growth of some small number of R–T waves on the windward face of an aerodynamically flattened drop (*a*).

After passing the second criticality a single 2D wave crest appears on the drop surface (*b*) and with next growth of Weber number several 2D waves can be distinguished (*c*). Finally, fine structure on the drop surface becomes fully three-dimensional (*d*) but area around stagnation point remains almost undisturbed.



The structure of water drop before breakup initiation. (a–d): We=14; 210; 550; 40000

REFERENCES

1. *Theofanous, T. G: Mitkin V. V.; Ng C. L.; et al.* The physics of aerobreakup. II. Viscous liquids Phys. Fluids Volume: 24 Issue: 2 Article Number: 022104 DOI: 10.1063/1.3680867 Published: FEB 2012

—— ♦♦♦ ——

METHODS OF GRADIENT MORPHOLOGY IN ESTIMATION OF VORTEX PARAMETERS IN REMOTE STUDIES

E.N. Terentiev, I.I. Farshakova, I.N. Prikhodko, I.D. Kuznetsov, A.D. Dyakonova
M.V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: en.teren@physics.msu.ru,irinafarshakova@gmail.com, prikhodko_in@mail.ru, smitid@yandex.ru, annamorozova28@outlook.com

The image is associated with its vector gradient field. The analysis of vector fields with the help of single-length vector templates made it possible to localize (indicate) object in the image by calculating the main parameters of the object: position and size. The proposed method of indicating local objects using gradient fields turned out to be highly precision and noise-immunity.

GRADIENT FIELDS, DIRECTION TEMPLATES AND VECTOR OPERATIONS

According to the 2D Finite Dimensional Sampling Teorems (FDST) [3,4], the gradient from the sample array D=f (x0,y0) with interpolation at the points (x, y) is:

$$gD = \text{grad } D = \{\frac{\partial}{\partial x}D, \frac{\partial}{\partial y}D\} = \{f^{(1,0)}(x,y), f^{(0,1)}(x,y)\} \quad (1)$$

gD (1) – there is a vector gradient field associated with the scalar image D.

In Fig. 1 graphically represents the steps from left to right of the proposed method of "vector analysis of images". For image analysis, it is often convenient to consider orthogonal or rotated in $\pi/2$ to a vector field ogD.

The analysis of the shape of vector fields is performed using two given templates of vector fields with unit directions along the radius and circumference [diR], [diC].

The second and third cells of Fig. 1 shows how the COS and SIN projection operations are implemented, on the direction template X=[diC].

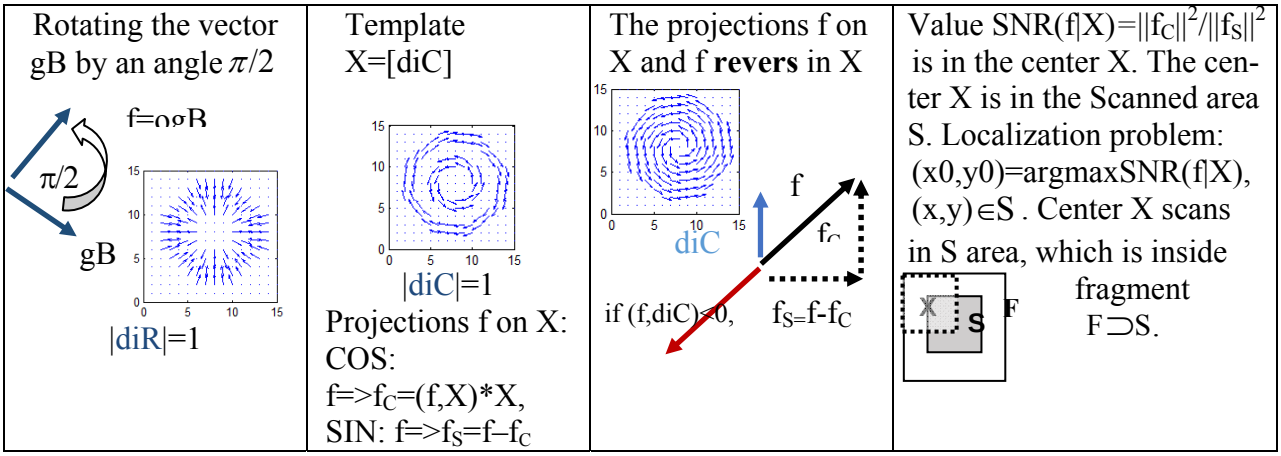


Fig. 1. Operations on vector fields, templates, projections, SNR function – "Signal / Noise Ratio".

The COS projection f=>fc, fc=(f,X)*X is called a signal, and the orthogonal SIN part fs=f–fc – by noise. There is a revers operation for vectors f, i.e. change the direction of the vector f by the opposite –f operation if (f, diC) <0, then if between the vectors f and diC is an obtuse angle.

Let us write the signal-to-noise ratio SNR:

$$SNR(f|X)=\sum|f_C|^2/\sum|fs|^2 =||f_C||^2/||f_S||2 \quad (2)$$

Note that SNR (2) can have an infinite value if the part with noise $||f_S||^2=0$, for example, for $f_S=X$. Therefore, we will use the Mat Lab function atan2 (arctg):

$$aSNR(f|X)= \pi/2 *atan2(||fS||, ||fC||) \quad (3)$$

The function aSNR with normalization on $\pi/2$ (8) will be used later in estimating the parameters of real vortices.

The center of the template X scans in the region S in the image fragment F of the image. The values of functions of the SNR, aSNR type (2.3) are associated with the coordinate (x, y) in the S part F of the image fragment. The point (x0,y0) of the maximum of the function SNR (x,y), $(x,y) \in S \subset F$ determines the positions of the object of interest in the image. The quality or accuracy of localization can be estimated by the size of the light part or the "radius of spot" in the image of the SNR function.

Thus, the problem of localizing or determining the coordinates (x0, y0) of an object reduces to the maximization problem:

$$(x0,y0)=argmaxSNR(f|X)(x,y), (x,y) \in S \quad (4)$$

EXAMPLES OF LOCALISATION OF VORTICES

Next, examples of the localization of objects of different classes will be demonstrated: vortices, Traffic Sings (TS) and Pupil of the Eye (PE). If it is possible to say about TS, PE that the forms of TS, PE are standard, they are known. Vortices cannot be attributed to objects whose form is known.

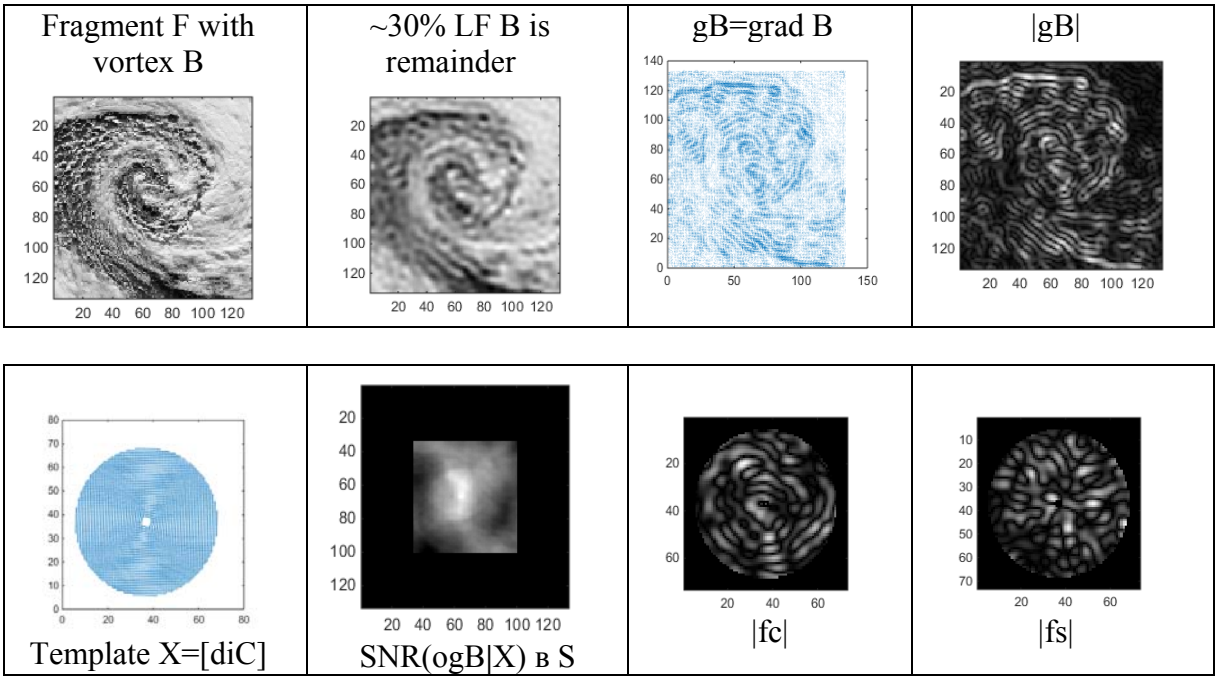


Fig. 2. Components of the SNR function for a vortex with 30% Low Frequency image and its values in the scanning area S

The vortex is identified by a vector template X=[diC], indicating the location by the maximum of the function SNR (4) in the scanning region S shown in Fig. 2.

EVALUATING THE POSITION AND SIZE OF THE PE

To evaluate the position and size of the PE, you must use a variable template

$$X=[diR, r, d], (r,d)\in RD. \quad (5)$$

In X (5), r is the inner radius, and r + d is the outer radius of the ring with unit vectors along the radius; r and d are independent variables in template X.

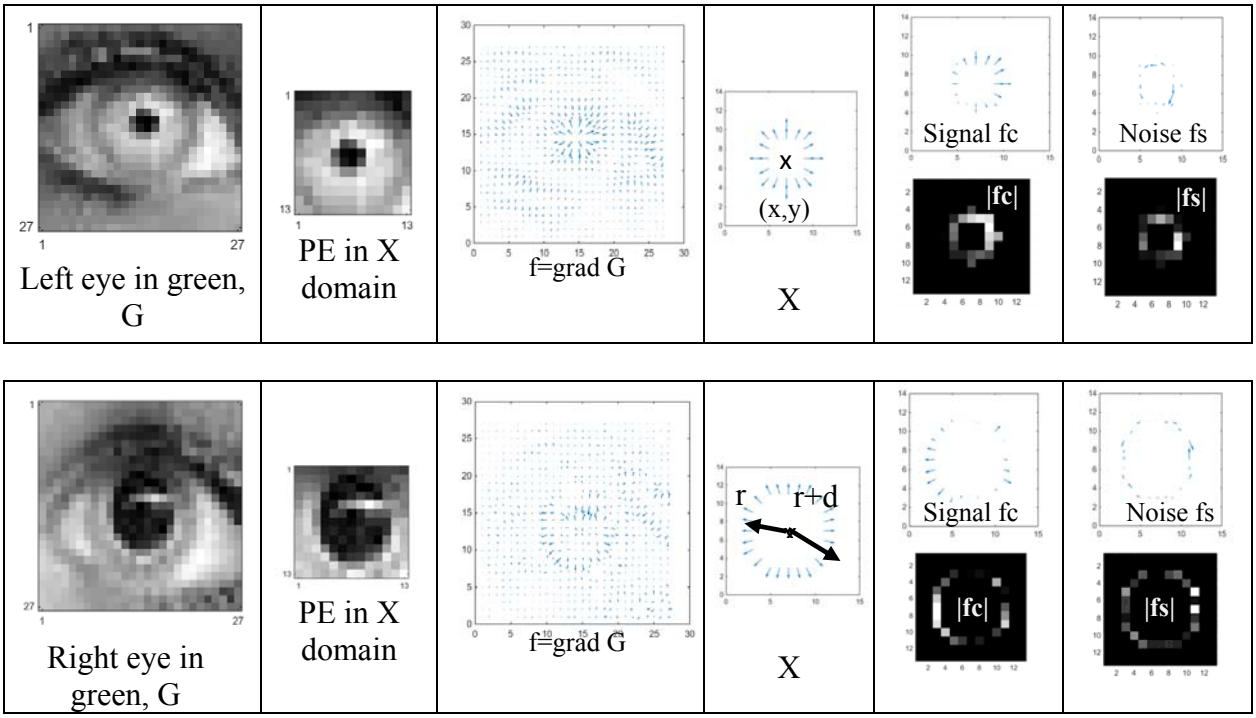


Fig. 3. Left and right eyes, grad G, templates X and signal and noise parts.

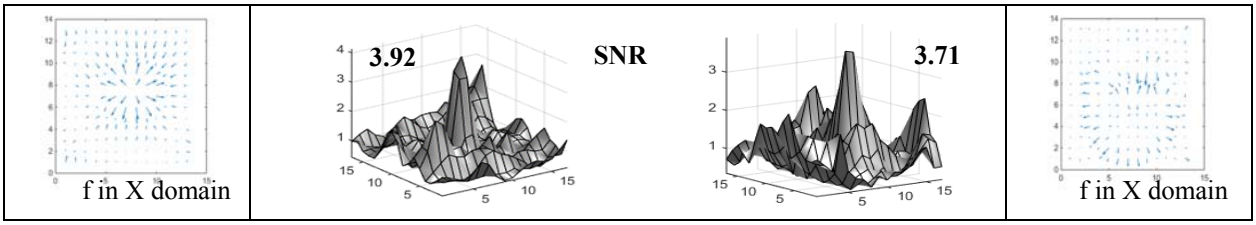


Fig. 4. SNRs and f in X domain for left and right eyes.

The task of evaluation the position and size of the PE taking into account the variables X (5) is posed similarly to (4):

$$(x0,y0, r0,d0)=\text{argmaxSNR}(f|X)(x,y,r,d), (x,y), (r,d)\in RD \quad (6)$$

CONCLUSIONS

Estimating the exact distance between the PE makes it possible to formulate new semantic problems in estimating the parameters of the Facial Features type for the realization of methods for recognizing face images of individuals. In the plans of the problem of estimating the parameters of atmospheric vortices and dipole eddies of sea currents in space images of the Earth [1].

The well-known Wiener–Kotelnikov sampling theorem [5] does not implement the differentiation operation and therefore is not applicable.

REFERENCES

1. *Aleksanin A.I., Zagumennov A.A.* // Modern problems of remote sensing of the Earth from space. 2008. V.5. T.2. C. 17–21, (in Russian).
2. *N.P. Grishenkova, D.N. Lavrov* Review of methods for identifying a person by the iris of the eye, Mathematical Structures and Modeling, p. 43–64, №1(29),2014. (in Russian)
3. *E.N. Terentyev, N.E. Terentyev // PROCESSES IN GEOMEDIA. 2016. No. 4(9), p. 355–362* (in Russian).
4. *E. N. Terentiev, I. García-Magariño, N. E. Shilin-Terentyev, I. N. Prikhodko, I. I. Farshakova,* The Method of False Vortices in Designation Problems of Targets, Road Signs, Facial Features and Real Vortices in Space Images, Information and Computer Security (2018) Volume 1, doi:10.24294/ics.v1i1.1025 *(http://systems.enpress-publisher.com/index.php/ICS/article/view/* 1025*).*
5. *Kuznetsov N.A., Sinitsyn I.N.* Development of the Kotelnikov sampling theorem, UFN, 179 216–218 (2009) (in Russian).

—— ♦♦♦ ——

SUPER-RESOLUTION OF WHIRLWINDS IN BLACK HOLE POWEHI SHADOW

E.N. Terentiev [1], I.I. Farshakova [1], N.E. Shilin-Terentyev [2]
[1] M.V. Lomonosov Moscow State University,
e-mail: en.teren@physics.msu.ru, irinafarshakova@gmail.com
[2] EPAM systems, e-mail: nikolay.terentyev@gmail.com

The problem definitions of super-resolution must begin with the choice of the corresponding hidden object – the working discrete model of Apparatus Function (AF). With apodization such Black Holes (BH), we will associate the mathematical invers problem of choosing working AFs with reversible $R=O^{-1}$ and a small inverse norm Nor(R)=||R||. The apodization setting of super-resolution tasks, the indication of objects arise in the analysis of the Characteristics of Circumstances (CC) of the O AF models. The CC allowed us to solve the problem of the Super-Resolution of the image of the BH Powehi shadow.

In convolution operations with even reversible AF O, $R=O^{-1}$ corresponds to the Modulation Transfer Function (MTF) M=M(O), M(R)=1/M(O). We introduce the conditionality of the AF O DIAP=1/diap, diap=min|M(O)|, as is done in linear algebra for symmetric matrices. The most conditioned object is the Delta–Kronecker symbol DK with the MTF M(DK)==1 (identically equal). For reversible AF O under normalization conditions ∑O=1, the MTF value at zero M(O)(0,0)=1 the restriction diap ≤|M(O)|≤1, 1≤|M(R)|≤DIAP and all values of the MTF pairs are located in the diap ≤|M(O)|, |M(R)|≤DIAP.

BASIC CONCEPTS, PROBLEM STSTEMENTS

The main problem of the conditioned (by DIAP) choice of the AF $pO=pR^{-1}$ is set as the minimum task (maximum precision of the solution) [1–3]:

$$\min_{LO}\{\|pR\| \mid Err(pO) \le err\},\ \ LO = \{pO \mid [Loc, dx, mD]\} \qquad (1)$$

with the construction of the Characteristics of the Adequacy of the discrete Model (CAM) AF pO:

$$CAMp=\{x=Nor(pR),\ y=Err(pO),\ z=II(pR*O)\} \qquad (2)$$

Let $Iz=10^{-13}$ be the error of the mantissa or instrumental zero. In connection with this restriction, by mistake, consider the CAM AF version of the zO taking into account Iz the inversion of the two-dimensional MTF M(O) (in the record without indices):

$$M(zR)=\begin{cases}1/M(O), \; for\; all \left|M(O)\right|>Iz\\ M(O)\end{cases} \tag{3}$$

$$CAMz=\{x=Nor(zR),\ y=Err(zO),\ z=II(zR*O)\} \tag{4}$$

We introduce a numerical function – the Invertibility Indicator in order to know if we decided whether the AF O invertibility problem or not. By definition: II(zR*O)=zR*O(0,0). If the value of the invertibility indicator II(zR*O)=1, then the inversion is $zR=R=O^{-1}$. If II(zR*O)<1, then we have an incomplete Iz inversion of AF O in zR. Similarly, for conditional tunable reversibility II(pR*O) for estimating the value of reversibility with a given value.

Of course, the apodization of AF O is preceded by the construction of CC discrete AF zO models for fixed continuous AF parO:

$$CC=\{x=Dx,\ y=Nor(zR),\ z=Loc\} \tag{5}$$

In CC (5), Loc is an array of lengths of the definition areas of continuous parO AF, and Dx is an array of steps dx of digitizing AF parO. In the examples XO AF zO, the complete invertibility is noted with an asterisk * inside the symbol O, see Figs. 1.

If the normalization of AF O: ∑O=1 takes place, then at zero the MTF M(O)(0,0)=1, then in this case we will define the Super-Resolution function by the expression [1–2]:

$$SR=\sum M(pR)M(O)/\sum M(O) \tag{6}$$

Note that SR≥1. If AF O=DK, then SR=1. The super-resolution expression SR is the function of the parameters [Loc, dx, mD] (1). The value of super-resolution SR does not depend on the size of images and large Loc [1–2].

EXAMPLES OF CC AF O

In this section, we will introduce CC as a mathematical object. The purpose of this introduction is that there may be Good Circumstances (GC) in the CC, which will prompt us the correct formulation of the problem.

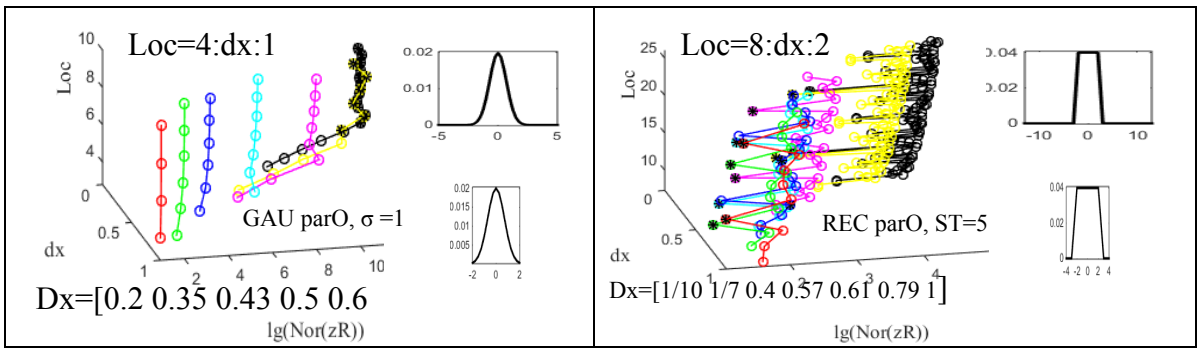
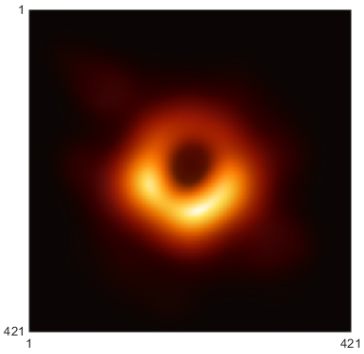


*Fig. 1. CC AF parO is Gaussoid and CC AF parO Rectangle with ST=5, an asterisk * indicates irreversible options*

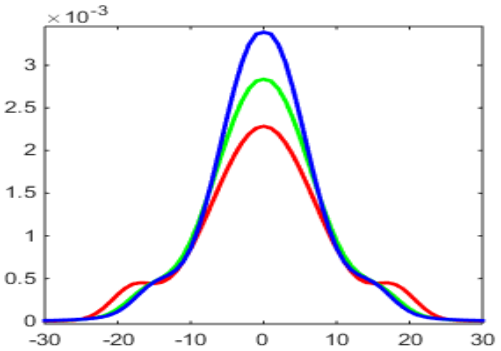
SUPER-RESOLUTION OF THE BLACK HOLE POWEHI SHADOW

The image of the shadow of the BH Powehi was recorded by the Event Horizon Telescope [4] in three radio bands {R, G, B} consisting of 8 receiving synchronized antennas with

a single antenna pattern or AF $O_T=\{O_R, O_G, O_B\}$, the length of the definition area is Loc=60, see Fig. 2.



Fragment of BH Powehi



AF $O_T=\{O_R, O_G, O_B\}$, Loc=60, mD=1/155

Fig. 2.The shadow BH Powehi, graphs of AF O_T through three channels R, G, B, Loc=60

We assumed that individual points on channel B are stars falling in BH. The apodization search for a solution without the use of a priori information about the smoothness of solutions helped us to resolve individual stars.

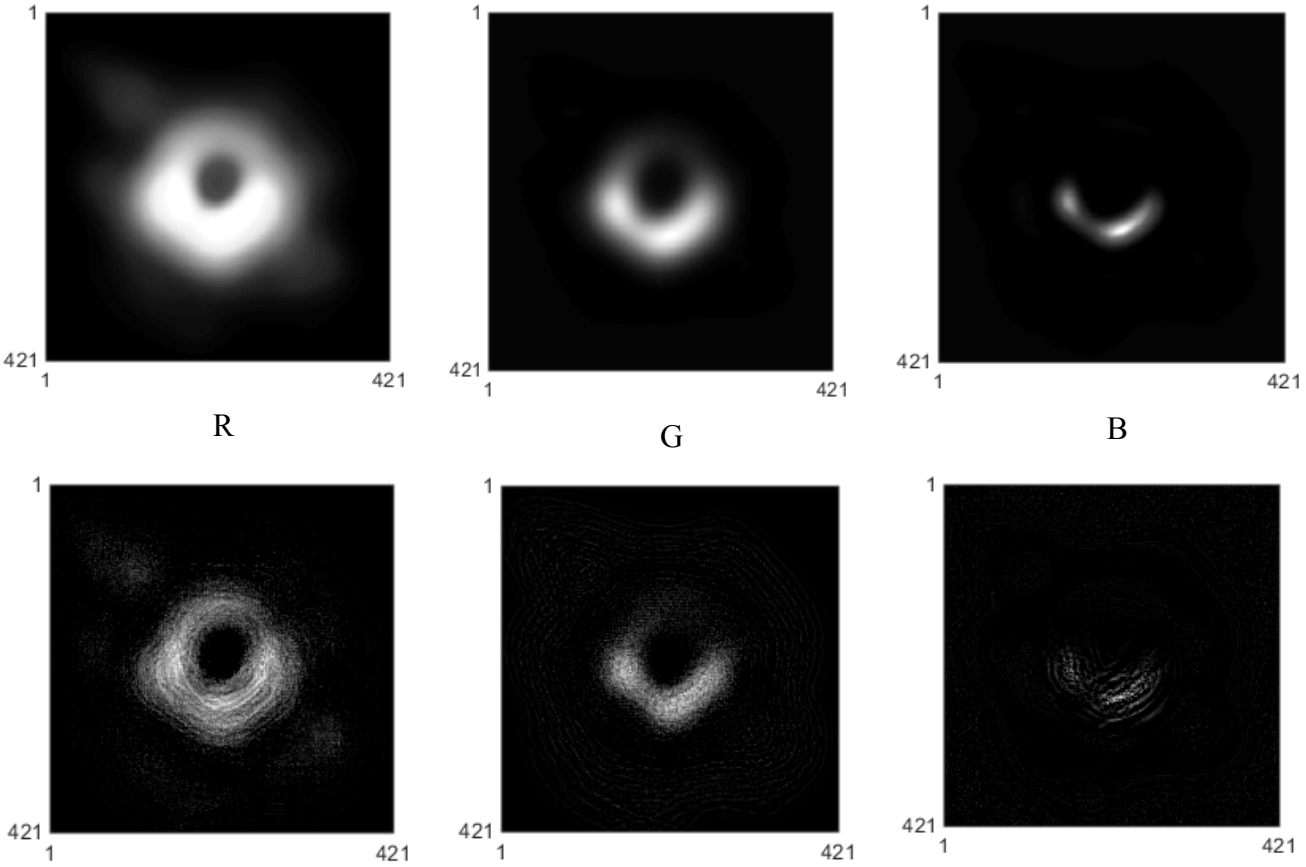


Fig. 4. Comparison of the original and Super Resolved images for each radio band R, G, B

Note that the task Super Resolution BH was solved according to low accuracy data – the first byte image from the Internet.

CONCLUSIONS

We hope that we will be able to obtain a much higher Super Resolution on high-precision data using the apodization method [2,3], to refine the antenna pattern. Since the volume of high-precision data is more than 100–200 times larger, we plan to center the fragments of the resulting images on the selected stars in channel B

REFERENCES

1. *Terentiev, E.N. and Terentiev, N. E.* // ISSN 1062-8738, Bulletin of the Russian Academy of Science. Physics, 2015, Vol.79, No 12, pp.1427–1431, DOI 10.3103/S1062873815120229
2. *Terentiev E.N., Terentiev N.E., Farshakova I.I.,* PMMEEP 2017, Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes, 19 Chapter, Principles of Controlling the Apparatus Function for Achieving Super-Resolution in images, P. 171–182, Number of pages 382, Springer International Publishing, DOI: 10.1007/978-3-319-77788-7_19C
3. *E.N. Terentiev, N.E. Shilin-Terentiev*, Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes (2018), Classifiers in Super-Resolution Problems, P. 441–455, Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Springer, Cham, doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_44
4. The Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole, The Astrophysical J. Letters, 875:L1 (17pp), 2019 April 10, https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7

—— ♦♦♦ ——

INTERACTION OF INTERNAL WAVE BEAMS IN A VISCOUS STRATIFIED FLUID

A.Yu. Vasiliev
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS
e-mail: corwin@ipmnet.ru

The solution to the interaction of periodic internal waves in a viscous continuously stratified fluid is analyzed, taking into account the diffusion effects of compact sources based on the fundamental equations of fluid flow.

Methods of the theory of singular perturbations solve the linearized problem of the interaction between two wave sources, which is part of a plane experiencing periodic oscillations along its surface, taking into account diffusion effects. The obtained solutions include regularly perturbed dissipative constituent factors – internal waves and a family of singularly perturbed components, two of which are caused by the action of viscosity, and the other by the influence of diffusion.

To evaluate the influence of the main dissipative factors, such as diffusion and stratification of viscosity, and a detailed analysis of the limiting transitions both in dissipative factors and in the geometry of the problem (consider the cases of horizontal and vertical inclination of the radiator, the case of critical angles, and the transition to a two-dimensional and one-dimensional problem). In the transition to two-dimensional problems.

ACKNOWLEDGMENTS

This research is supported by the Russian Academy of Sciences and by the Russian Foundation for Basic Research 18-05-00870.

—— ♦♦♦ ——

COMPUTATION OF THE STRATIFIED FLOW PATTERN IN THE MODES OF INTERNAL WAVE AND VORTEX WAKE GENERATION

Ya.V. Zagumennyi
Institute of Hydromechanics of the NASU, Ukraine
e-mail: zagumennyi@gmail.com

A pattern of fluid flow around a body depends on many factors, including dissipative properties and nature of the medium stratification, shape, size, angle of attack and surface quality of the body, speed and state of the incoming free stream, influence of external dynamic factors, etc.

Experimental studies of flows around various-shaped bodies, actively carried out in wind tunnels, hydraulic pools and channels [1], and more recently in stratified pools [2], have established a number of important properties of the laminar and vortex flow patterns, determined forces and torques acting on a body in a wide range of influencing parameters. Sclieren visualization of the stratified flow patterns together with the measurement of velocity profiles using density markers were performed in [3] in the mode of intensive generation of attached internal waves and vortex wake by a uniformly moving cylinder or a tilted plate. An important feature of these studies is presence in the flow patterns of highly gradient interfaces or so-called ligaments which separate individual flow components [4].

The mathematical modeling of flow around an obstacle was initially carried out on the basis of approximate analysis, in particular, using the boundary layer theory for the simplest forms of a body [5]. However, development of computer technology and programming methods enabled carrying out calculations of flows around obstacles based on the system of fundamental equations, taking into account more complex medium properties and influence of external dynamic factors. The stratified flows structure and dynamics on a fixed and a uniformly moving horizontal plates were studied in the linear and full non-linear formulations in [6–8]. A detailed review on analytical and numerical studies of the vortex flow pattern around a plate in a wide range of angles of attack is given in [9].

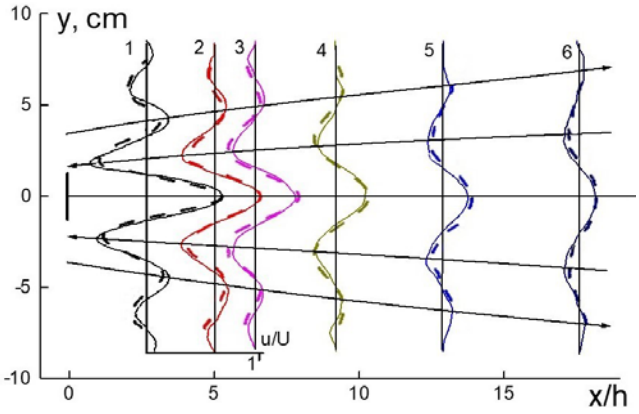
This paper presents the results of high-resolution numerical computations of upstream perturbations, internal attached waves, wake vortex elements and fine structure in the stratified flow pattern around vertical and inclined plates, as well as comparison of the numerical results with the data of experimental studies using schlieren instruments.

Mathematical modeling of the problem is carried out using original OpenFOAM solvers on the basis of the system of incompressible continuously stratified fluid mechanics equations, including the momentum transfer equation taking into account the gravitational force in the Businesque approximation, the diffusion and continuity equations, and the closing linearized equation of state [10]. Laboratory observations of flow patterns were conducted by the schlieren instrument IAB-458 at the LMT stand of the URF “HPC IPMech RAS” using a vertical slit illumination diaphragm 10×12 mm and a flat vertical Foucault knife. Changes in illumination are proportional to variations in the horizontal component of refraction index gradient which is in a linear relation to salinity and density gradients for the aqueous sodium chloride solution used to create the stratification [3].

The stratified flow structure around an obstacle can vary significantly depending on speed of its movement, starting from multilevel diffusion-induced circulation flows arising

when the molecular flux is broken by an impenetrable motionless obstacle [7], to complex unsteady vortex and fine-structured modes at relatively large Reynolds numbers, when all the flow components are involved in a complex nonlinear interaction [9]. A number of typical flow regimes can be distinguished, which have their own set of predominate structural components, such as vortices which are common elements for all types of fluids, as well as internal waves, upstream perturbations, and fine-structural interfaces, which are typical for stratified media.

a)



b)

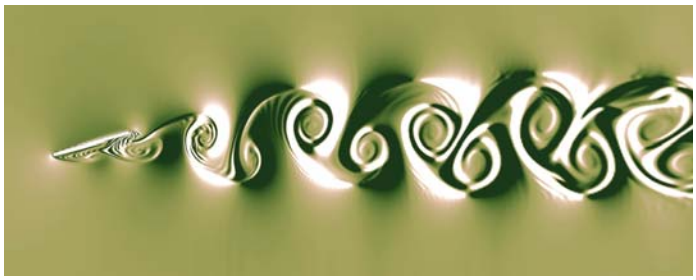
Fig. 1. Combined schlieren (upper half of the image) and calculated (lower one) flow patterns around a vertical plate (a) and velocity profiles at different distances in front of the plate (b), 1–6 – x/h = 2.7; 5.1; 6.4; 9.2; 13.1; 17.5 (solid and dash lines correspond to experiment and computations respectively), $h = 2.5\ cm$; $T_b = 12.5\ s$; $U = 0.26\ cm/s$; $Fr = 0.21$.

In the regime of intensive generation of internal waves (Fig. 1), upstream perturbations are clearly distinguished, which consist of a blocked fluid directly in front of the body and unsteady internal waves smoothly passing into the attached waves past the obstacle, and the wake (Fig. 1, a). The upstream perturbation amplitudes decrease with distance from the obstacle, and their phase surfaces gradually deviate from the horizontal position, that is confirmed by velocity profiles calculated and experimentally measured using density markers (Fig. 1, b).

Shapes of the phase surfaces of the attached internal waves deviate from the semicircles in the vicinity of the density wake, where they are carried away by the free stream. Periodic changes in the structure and thickness of the density wake, as well as the formation of a fam-

ily of high-gradient fibrous structures (ligaments), are the result of active interactions of the wake with the attached internal waves, which contain extrema of the wake's height on their crests and troughs.

a)



b)

Fig. 2. Comparison of schlieren image (light refraction index) (a) and computed pattern (horizontal component of density gradient) (b) of stratified flow around a tilted plate, $L = 2.5\ cm$, $T_b = 7.6\ s$, $\alpha = -16^\circ$ $U = 3.6\ cm/s$.

In the regime of intensive generation of wake vortex structures (Fig. 2), the internal wave length becomes comparable to the size of the observation region and the strongest structural changes are observed in the wake past the obstacle, where typical vortex elements, such as vortex dipoles past the body and "vortex bubbles", are formed in divergence zones of the internal wave phase surfaces. A variety of multilayer fine-structural flow elements is formed on the vortex element shells and in the regions of interaction of the vortex flow multiscale components between themselves and with the plate surface.

The calculations and observations of the flow patterns are in a good qualitative agreement with each other in all the flow regions, including the upstream perturbations, a system of internal waves, the wake with fine structures and vortices. However, besides a simple analysis of the flow geometry, computations also enable evaluation of the physical quantities, including density, velocity, pressure, and their gradients, both in space and time.

REFERENCES

1. *Ananda G.K., Sukumar P.P., Selig M.S.* Measured aerodynamic characteristics of wings at low Reynolds number // Aerospace Science and Technology. 2015. V. 4. P. 392–406.
2. *Chashechkin Yu.D.* Schlieren Visualization of a Stratified Flow around a Cylinder // J. of Visualization. 1999. V.1. No. 4. P. 345–354.
3. *Chashechkin Yu.D., Mitkin V.V.* A visual study on flow pattern around the strip moving uniformly in a continuously stratified fluid // J. of Visualization. 2004. V. 7. No. 2. P. 127–134.
4. *Chashechkin Yu.D.* Waves, Vortices and Ligaments in Fluid Flows of Different Scales // Physics & Astronomy International J.. 2018. V. 2. No. 2. P. 105–108.

5. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary Layer Theory. Springer-Verlag: Berlin. 2017.
6. *Zagumennyi Ya.V., Chashechkin Yu.D.* Fine structure of unsteady diffusion-induced flow over a fixed plate // Fluid Dynamics. 2013. V. 48 No. 3. P. 374–388.
7. *Bardakov R.N., Mitkin V.V., Chashechkin Yu.D.* Fine structure of stratified flow around a plate // J. Applied Mechanics and Technical Physics. 2007. V. 48. No. 6. P. 77–91.
8. *Chashechkin Yu.D., Zagumennyi Ia.V.* Formation of waves, vortices and ligaments in 2D stratified flows around obstacles // Physica Scripta. 2019. V. 94. No. 5. 054003.
9. *Teimourian A., Yazdi S.G., Hacisevki H.* Vortex shedding: a review on flat plate // Fluid Dynamics. 2018. V. 53. No. 2. P. 212–221.
10. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical Physics. Hydromechanics. Pergamon Press. 1987.

—— ♦♦♦ ——

PHYSICAL MECHANISMS OF SUBMESOSCALE EDDIES GENERATION: IN SITU SATELLITE AND SHIP-BORN OBSERVATIONS FOR THE BLACK SEA AND LABORATORY MODELLING

A.G. Zatsepin[1], A.A. Kubryakov[1,2], D. N. Elkin[1]
[1] Shirshov Institute of Oceanology of the RAS, e-mal: zatsepin@ocean.ru
[2] Marine Hydrophysical Institute, e-mail: arskubr@gmail.com

Submesoscale eddies are one of the most common but poorly studied forms of the vortex motion of ocean waters. In contrast to mesoscale oceanic eddies whose radius R exceeds the local baroclinic deformation radius R_d ($R > R_d = NH/f$, where N is the Väisälä–Brent frequency, H – the depth of the sea, f – the Coriolis parameter), and the angular velocity ω of the orbital rotation is much less than the Coriolis parameter ($Ro = \omega/f << 1$, where Ro is the Rossby number), submesoscale eddies have a radius less than the local baroclinic deformation radius ($R < R_d$), and the irrelative vorticity is comparable to or even higher than the Coriolis parameter ($Ro \geq 1$). Therefore in submesoscale eddies the centrifugal force can exceed the Coriolis force in magnitude.

The nature of submesoscale eddies formation in most situations is not completely clear. Obviously, it differs from the main mechanism of mesoscale eddies formation associated with baroclinic instability of jet streams and in many cases is related to barotropic, or horizontal-shear instability of the flow. In this report three mechanisms of submesoscale eddy formation are discussed: 1) Horizontal velocity shear instability, which lead to the intense formation of the submesoscale eddies on the fronts; 2) interaction of currents with orographic obstacles – capes, peninsulas; 3) impact of the offshore wind jets. The investigation is based on the analysis of satellite data, field observations, and laboratory modeling results (Zatsepin et al., 2019.

RESULTS AND DISCUSSION

Horizontal shear instability. The structure of the flows with a cyclonic and anticyclonic horizontal velocity shear was investigated by means of laboratory modeling in a wide range of the magnitude variations of the dimensionless velocity shear – Rossby number, and for sufficiently large Reynolds numbers. It was observed that in a rotating fluid in the presence of a flow with a cyclonic velocity shear, turbulence is suppressed and chains of coherent cyclonic vortices are formed. In the case of flow with an anticyclonic shear, the formation of anticyclonic vortices was observed only for relatively small values of the velocity shear. For large velocity shear the flow had a turbulent character and the coherent eddies were not formed.

The generation of submesoscale eddies often occurs at the periphery of mesoscale eddies, primarily anticyclones. The Black Sea is characterized by the presence of well pro-

nounced mesoscale anticyclonic eddies, some of which are recurrent, or quasi-stationary. The southeastern part of the Black Sea, where the "Batumi" anticyclone is located in the warm period of the year, is one of the quasi-stationary mesoscale anticyclonic circulation areas. Analysis of satellite data shows that the periphery of the Batumi anticyclone is a region of submesoscale cyclones permanent formation. As in the case of the laboratory experiments the formation of submesoscale anticyclones the zones with anticyclonic shear in the Black Sea is rather rear event. We could state that the asymmetry in horizontal shear instability for the cyclonic and anticyclonic shear is the cause of strong prevalence of cyclonic submesoscale eddies over anticyclonic in the open sea.

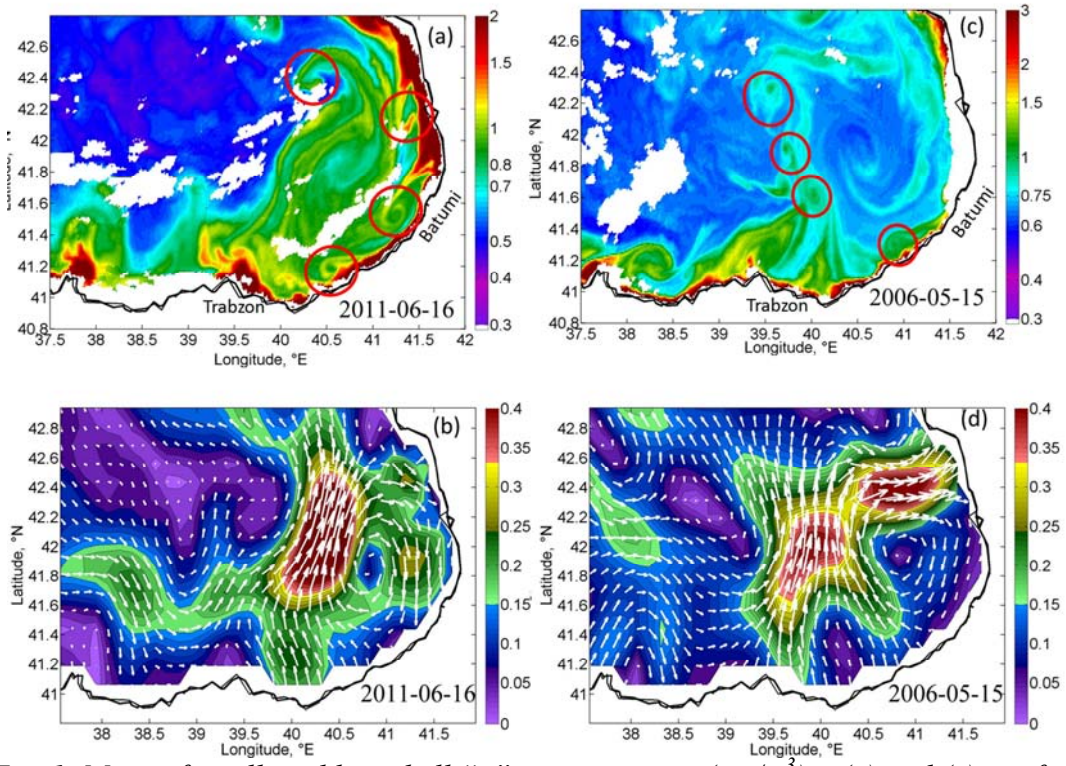


Fig. 1. Maps of satellite chlorophyll "a" concentration (mg/m^3) – (a) and (c), surface geostrophic velocity (m/s)– (b) and (d) distributions in the southeastern Black Sea on 16 June, 2011 (a, b) and 15 May, 2006 (c, d). Red circles mark the submesoscale cyclonic eddies.

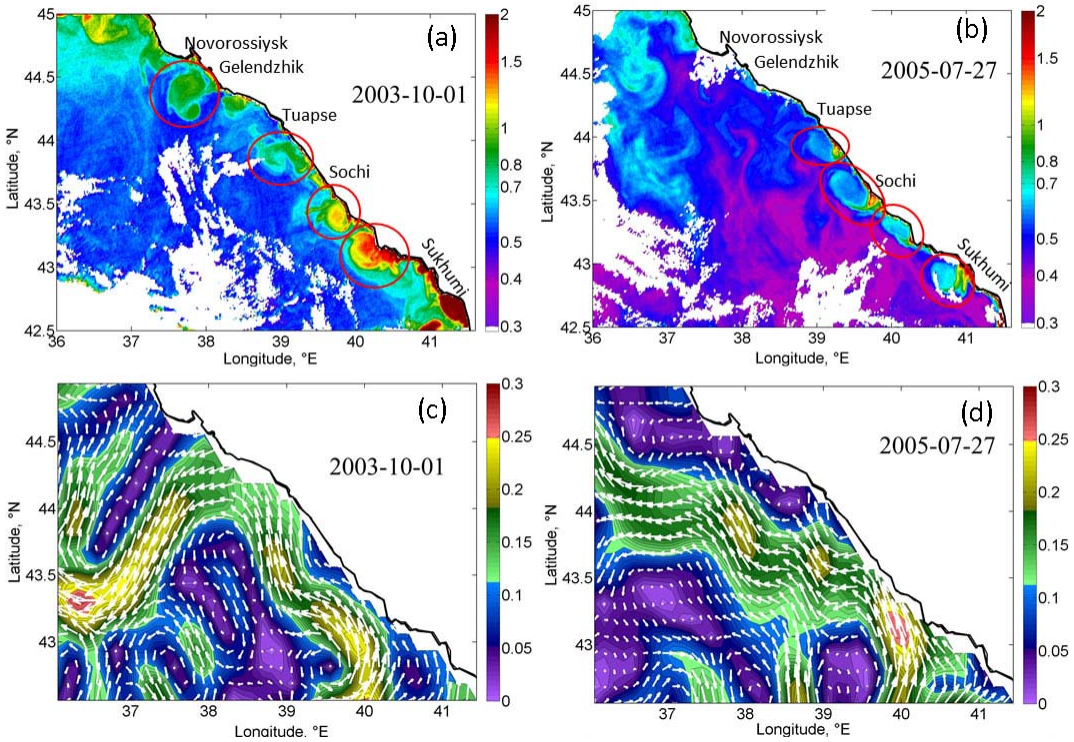


Fig. 2. Maps of satellite chlorophyll "a" concentration (mg/m3) – (a) and (c), surface geostrophic velocity (m/s)– (b) and (d), in the northeastern Black Sea on 01 October, 2003 (a, c) and 27 July 2005 (b,d). Red circles mark the submesoscale and mesoscale eddies.

Impact of the offshore wind jets. The coastal wind inhomogeneity causes a horizontal velocity shear of different signs on the left and right peripheries of the wind streams. In the Northern Hemisphere the velocity shear at the left periphery of the stream is a cyclonic one and at its right periphery – anticyclonic. It contributes to the formation of a vortex dipole, or a mushroom-like current in the sea surface layer. In the Black Sea, the most intensive and spatially inhomogeneous coastal wind is observed at the NE coast, where the several valleys of the high Caucasian mountains are located. This coastal wind is called "Nord-Ost". Two examples of several mushroom-like currents appearance under the impact of the spatially inhomogeneous Nord-Ost are shown in Fig. 3. In the first example, for August 23, 2005, four mushroom-like currents were noted on the map of the satellite Chl-a (Fig.3a). At the left and right sides of each mushroom-like current an anticyclonic and cyclonic eddy are observed, respectively. These vortex dipole structures were formed under the influence of a strong wind, whose velocity exceeded 15 m/s on August 22, 2005 (Fig. 3b). The wind operated in this area for three days: from August 20 to August 22. Before the strong wind eddies were absent on the satellite Chl-a maps. This give an evidence that wind forcing was a mechanism for their generation.

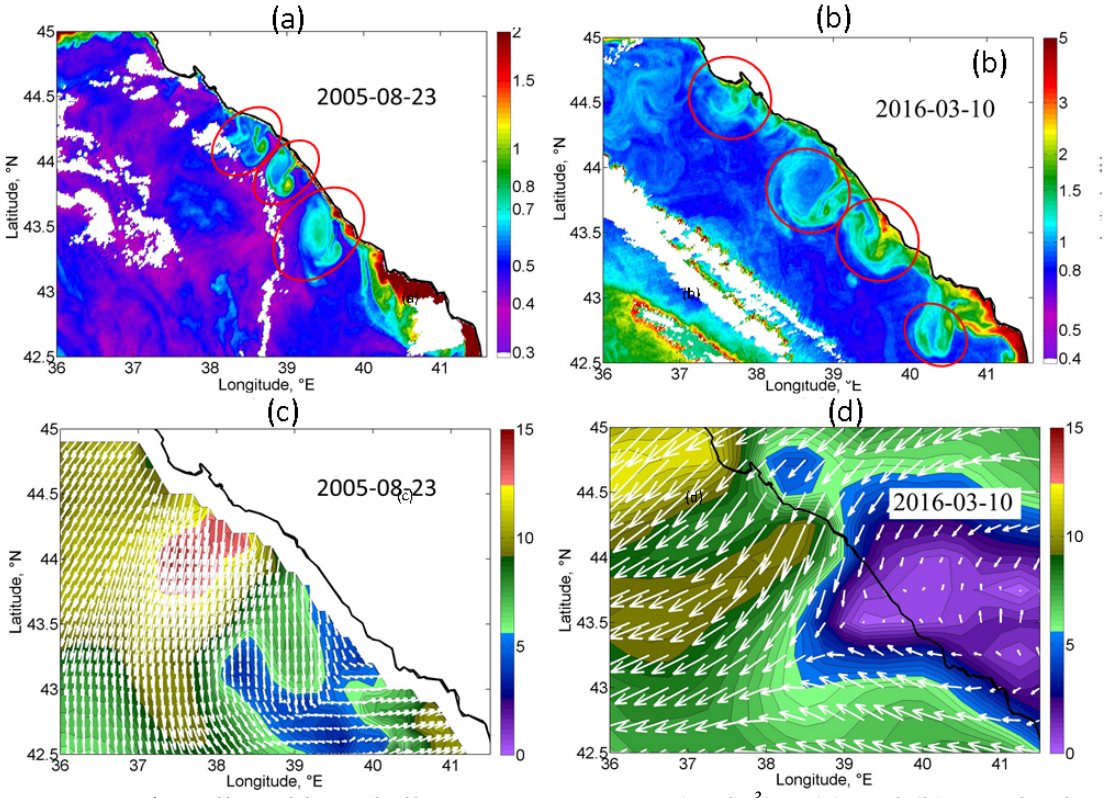


Fig.3 Maps of satellite chlorophyll "a" concentration (mg/m^3) – (a) and (b), wind velocity (m/s) – (c) and (d) in the northeastern Black Sea on 23 August, 2003 (a, c) and 10 March 2016 (b, d). Red circles mark the position of submesoscale and mesoscale eddies.

ACKNOWLEDGMENTS

This research was performed in the framework of the Russian state assignment (theme No. 0149-2019-0004) and supported in part by RFBR (project No. 17-05-00799). Kubryakov A A. was supported by RFBR grant 19-05-00479

REFERENCES

1. A. Zatsepin, A. Kubryakov, A. Aleskerova, D. Elkin, O. Kukleva Physical mechanisms of submesoscale eddies generation: evidences from laboratory modeling and satellite data in the Black Sea //Ocean Dynamics (2019) 69:253–266. https://doi.org/10.1007/s10236-018-1239-4

—— ♦♦♦ ——

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛАТТЕРА КОНСТРУКЦИЙ В ГАЗОВЫХ ПОТОКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Ф.А. Абдухакимов
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: farruh.abduhakimov7@gmail.com

Флаттер может наблюдаться в различных системах, в том числе в панелях обшивки летательных аппаратов и в лопатках компрессоров газотурбинных двигателей. Одномодовый флаттер – один из типов панельного флаттера, который возникает при малой сверхзвуковой скорости без взаимодействия между модами колебания. Для исследования одномодового флаттера поршневая теория неприменима, и поэтому необходи-

мо использовать более сложные аэродинамические модели.

Флаттер лопатки можно определить, как самовозбуждающиеся колебания лопатки в потоке газа, возникающие как результат их взаимодействия. Инженеры и конструкторы, как правило, используют при проектировании упрощенные критерии, основанные на опыте, накопленном при конструировании двигателя и его доводке. Более точные результаты дает статистический метод, основанный на обработке большого числа проведенных испытаний и прогнозировании на их основе флаттера лопаток новых компрессоров. Другим методом прогнозирования флаттера лопаток является частотный метод, основанный на вычислении собственных частот связанной системы поток-лопатка. Еще один метод, прямой, заключается в моделировании движения во времени связанной системы лопатка-поток. Наконец, энергетический метод, основан на вычислении работы, совершаемой аэродинамическими силами на поверхности лопатки, гармонически колеблющейся по собственной форме за период колебаний.

В работе исследуется влияние формы панели обшивки летательного аппарата на границы одномодового флаттера (Рис 1а) и конструктивных параметров на границы флаттера лопаток компрессоров газотурбинных двигателей (Рис 1б) с применением энергетического метода [1].

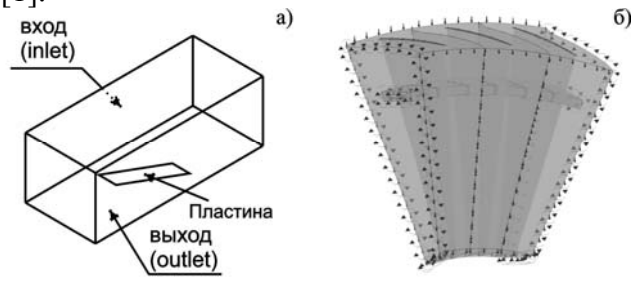


Рис 1. Расчетные модели. а) Одномодовый флаттер пластины, б) флаттер лопатки

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Предполагается, что влияние потока воздуха на собственные колебания конструкции (лопатки или пластины) незначительно и сводится лишь к аэродинамическому демпфированию, положительному или отрицательному. При этом собственные формы и частоты колебаний конструкции в потоке и в пустоте совпадают и могут быть вычислены стандартными методами. Движение конструкции в потоке принудительно задается по собственной моде [2, 3], и решается нестационарная задача аэродинамики при заданных колебаниях конструкции. В результате решения вычисляется работа, совершенная силами давления на одном периоде колебаний. Критерием флаттера при таком подходе является положительность этой работы.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследована устойчивость панели обшивки летательного аппарат. Панель обшивки моделируется в виде тонкой упругой пластины, одна сторона которой обтекается идеальным совершенным газом. Рассмотрены пластины, имеющие различную форму. По всем кромкам пластины задано условие шарнирного опирания. Определены границы одномодового флаттера для различных значений длин пластин. Исследования были проведены для чисел Маха от 1,05 до 1,7.

Исследовано влияние различных конструктивных параметров (радиального зазора, угла прикрытия и открытия входного направляющего аппарата, радиальной неравномерности потока на входе в компрессор и величины монтажного натяга) на прогнозирование флаттера лопаток компрессоров. Расчеты проведены на двух режимах, на которых при испытаниях двигателя был диагностирован флаттер или было зафиксирова-

но его отсутствие. Во всех конфигурациях аэродинамической модели были воспроизведены бандажные полки лопаток. Границы флаттера определены для второго и третьего семейства собственных форм колебаний бандажированного рабочего колеса первой ступени компрессора низкого давления. Для каждого семейства собственных форм колебаний рассмотрен полный диапазон чисел узловых диаметров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием энергетического метода проведено численное исследование одномодового флаттера панели обшивки летального аппарата, которое моделировалось в виде тонкой упругой пластины, а также Проведено исследование границ одномодового флаттера панелей обшивки различной формы при разных значениях длины пластины.

Получено, что границы одномодового флаттера трапециевидных пластин близки к границам одномодового флаттера прямоугольных пластин и при уменьшении значения угла скоса меняются незначительно. В противоположность этому, границы флаттера пластин в форме параллелограмма существенно отличаются от границ флаттера прямоугольных пластин и при уменьшении угла скоса увеличивается их аэроупругая устойчивость при малых сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях.

Определены границы флаттера лопаток при различных конфигурациях. Показано, что влияние радиального зазора, угла прикрытия и открытия входного направляющего аппарата, радиальной неравномерности потока и величины монтажного натяга на результаты расчетов по прогнозированию флаттера лопаток незначительно. Значение же монтажного натяга существенно влияет на границы флаттера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vedeneev V.V., Kolotnikov M.E.,* Makarov *P.V.* Experimental validation of numerical blade flutter prediction// J. of propulsion and power. 2015. Vol. 31. No. 5. P. 1281–1291.
2. *Абдухакимов Ф. А., Веденеев В. В*. Исследование одномодового флаттера пластин различной формы при малой сверхзвуковой скорости// Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. 48. № 1. С. 86–98.
3. *Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В., Колотников М.Е., Макаров П.В*. Численное исследование влияния конструктивных параметров на прогнозирование флаттера лопаток// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 2 С. 17 –26.

—— ♦ ♦ ♦ ——

РАСЧЕТ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ ПРИ КОЛЛАПСЕ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА

А.А. Аганин, И.Н. Мустафин
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail; Aganin@kfti.knc.ru, Mustafin@imm.knc.ru

Импульсы давления в жидкости, возникающие при коллапсе кавитационных пузырьков, привлекают значительное внимание в силу их большого практического значения. В частности, в результате их воздействия близко расположенные поверхности твердых тел могут подвергаться повреждениям, коррозии, находящиеся в их окрестности твердые частицы могут перемещаться, а соседние пузырьки – схлопываться. Можно выделить два основных механизма возникновения импульсов при коллапсе пузырька. Пер-

вый обусловлен изменением объема пузырька, а второй – ударом струи жидкости, образующейся на поверхности пузырька при его несферическом коллапсе, по противоположной части поверхности пузырька. В настоящей работе рассматривается ударно-волновой импульс, возникающий в жидкости (воде) в результате изменения объема кавитационного пузырька в том случае, когда коллапс пузырька является сферическим. Внимание направлено на особенности расчета этого импульса классическим методом С.К. Годунова.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОДИКА РАСЧЕТА.

Динамика пара и жидкости описывается следующей системой уравнений [1]

$$\frac{\partial(\rho r^2)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u r^2)}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho u r^2)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2 r^2+pr^2)}{\partial r}=2rp,$$

$$\frac{\partial(\rho e r^2)}{\partial t}+\frac{\partial[ur^2(\rho e+p)]}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

Здесь t – время, r – расстояние до центра пузырька, ρ – плотность, u – радиальная компонента вектора скорости, p – давление, $e = U + u^2/2$ – удельная полная энергия, U – удельная внутренняя энергия, T – температура, κ – коэффициент теплопроводности.

Используются уравнения состояния жидкости и пара $p(\rho, T)$, $U(\rho, T)$ из работы [2]. Они представляют собой суммы потенциальных и тепловых компонент давления и внутренней энергии. Процессы диссоциации и ионизации пара не учитываются.

Граничные условия в центре пузырька ($r = 0$), на межфазной границе ($r = R(t)$) и на бесконечном удалении от пузырька ($r = \infty$) имеют вид:

$$r = 0\text{: } u = 0,\ \frac{\partial T}{\partial r}=0,$$

$$r = R\text{: } \dot R = u_L+\frac{j}{\rho_L}=u_G+\frac{j}{\rho_G},\ p_L=p_G-\frac{4\mu_L u_L}{R}-\frac{2\sigma}{R},$$

$$\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\right)_L=\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\right)_G=jl(p_G),\ T_L=T_G;$$

$$r=r_\infty\text{: } p=p_\infty,\ T=T_\infty,$$

где p_∞, T_∞ – давление и температура жидкости, точка сверху означает производную по времени, μ_L – динамический коэффициент вязкости жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, l – теплота парообразования, j – интенсивность фазовых превращений (испарения/конденсации), отнесенная к единице времени и единице поверхности. Нижние индексы L и G относятся соответственно к параметрам жидкости и пара. Интенсивность фазовых превращений j определяется выражениями

$$j=\frac{\alpha'(p_s(T)-\chi p_G)}{\sqrt{2\pi R_G T}},\ \chi=e^{-\Omega^2}-\Omega\sqrt{\pi}\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\Omega e^{-x^2}dx\right),\ \Omega=\frac{j\sqrt{R_G T}}{\sqrt{2}p_G}$$

Здесь α' – коэффициент аккомодации, R_G – газовая постоянная для пара, $p_s(T)$ – давление насыщенного пара при температуре T.

Применяется методика расчета [3], основанная на методе С.К. Годунова [4]. В настоящей работе неограниченная область жидкости $R \le r < \infty$ заменяется сферическим слоем $R \le r < R_{ex}$, на внешней поверхности которого ставятся условия на бесконечно-

сти. Применяются подвижные сетки, связанные с поверхностью пузырька $r = R$ и внешней границей жидкости $r = R_{ex}$. В пузырьке и жидкости используются сетки с ячейками, расширяющимися от поверхности пузырька по геометрической прогрессии со знаменателями q_G и q_L, с числом ячеек N_G и N_L и размером примыкающих к поверхности пузырька ячеек Δr_G и Δr_L. Размер Δr_G определяется как $\Delta r_G = \alpha_G R / N_G$, где $0 < \alpha_G \le 1$. Полагается $\Delta r_L = \alpha \Delta r_G$, где $0 < \alpha \le 1$. Знаменатель q_G (q_L) определяется по известным значениям N_G, Δr_G и R (N_L, Δr_L и $R_{ex} - R$).

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ

Для иллюстрации особенностей расчета с помощью методики [3] импульса давления, возникающего в жидкости при коллапсе пузырька, рассматривается случай [5] коллапса пузырька, образованного в воде лазерным импульсом. Полагается, что $R(0) = R_0 = 1$ мм, $R_{ex}(0) = 15$ мм, $p_\infty = 1$ бар, $T_\infty = 293.15$ К, пар в пузырьке в начале коллапса (при $t = 0$) находится в состоянии насыщения при температуре окружающей жидкости с давлением $p_s(T_\infty) = 0.0223$ бар, $\alpha' = 0.075$ [5], $\mu_L = 0.001$ Па·с, $\sigma = 0.0725$ Н/м, $\kappa_G = 0.018$ Вт/(м·К), $\kappa_L = 0.598$ Вт/(м·К). Считается, что радиальное распределение давления в жидкости в начале коллапса соответствует его профилю в несжимаемой жидкости. Применяются расчетные сетки со сгущением к поверхности пузырька, что нужно для адекватного описания тонких тепловых пограничных слоев. В пузырьке применяется сетка с $N_G = 500$, $\alpha_G = 0.02$, $q_G = 1.0114$, что достаточно для моделирования динамики пара. В жидкости применяются сетки с $\alpha = 1$ и числом ячеек, варьируемым в диапазоне от 1000 до 64000 (соответственно варьируется и q_L).

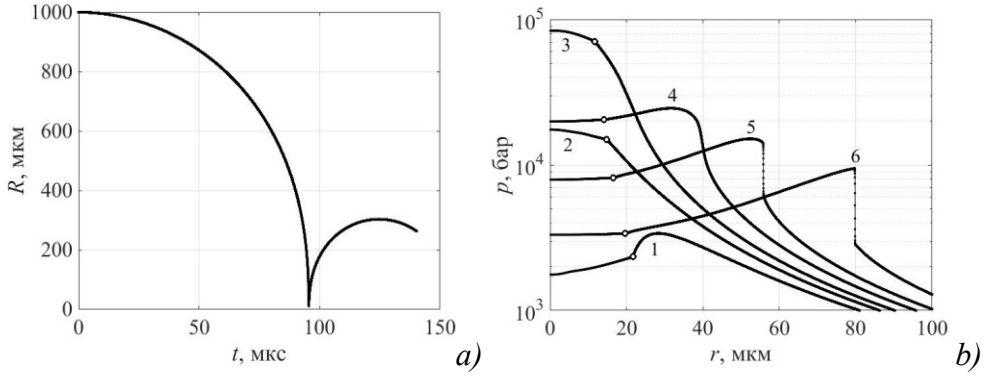
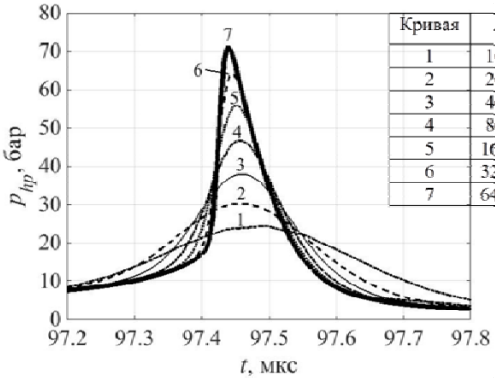


Рис.1. Изменение радиуса пузырька при его коллапсе и последующем расширении (a) и профилей давления в пузырьке и его окрестности при переходе от коллапса к расширению (приведено 6 последовательных моментов времени, указанных цифрами 1–6, момент 3 соответствует концу коллапса, полыми кружками отмечена поверхность пузырька) (b). Приведенные результаты получены на сетке с $N_L = 64000$.

Рис.1 характеризует изменение размеров пузырька при его коллапсе и последующем расширении и профилей давления в пузырьке и его окрестности в финальной стадии коллапса и начальной стадии расширения в рассматриваемых условиях. Видно, что на стадии коллапса пузырек довольно сильно сжимается (от $R_0 \approx 1000$ мкм до $R_{\min} \approx 11.7$ мкм при $t_c \approx 95.5$ мкс) при относительно небольшой однородности давления (кривые 1–3). В начале расширения пузырька в его окрестности формируется уходящий в жидкость ударно-волновой импульс (кривые 4–6).



Кривая	N_L	$(q_L-1)\cdot 10^4$	Δr_{hp}
1	1000	104	27.6
2	2000	48	13.7
3	4000	22	6.30
4	8000	10	2.88
5	16000	4	1.30
6	32000	2	0.58
7	64000	1	0.26

Рис.2. Изменение численного разрешения импульса давления в жидкости на радиусе r_{hp} = 3 мм по мере измельчения сетки (параметры сетки в области жидкости приведены в таблице, Δr_{hp} – радиальный размер ячеек в окрестности $r = r_{hp}$).

Рис 2 иллюстрирует сходимость результатов расчета импульса давления в жидкости при $r = r_{hp}$ по мере измельчения сетки. Видно, что согласно принятому закону измельчения расчетная сетка в жидкости с ростом числа ячеек N_L становится все более равномерной (q_L стремится к единице). При этом амплитуда импульса возрастает, а его передний фронт все более превращается в ударный, что обусловлено уменьшением схемной вязкости метода С.К. Годунова. В работе [5] приводятся результаты экспериментальных измерений и численных расчетов максимального значения давления в ударно-волновом импульсе при $r = r_{hp}$ для ряда значений радиуса пузырька в начале коллапса R_0. Сравнение показывает, что в случае R_0 = 1 мм максимум давления у кривой 7 отличается от экспериментального значения на 5%, тогда как аналогичное расхождение результатов численного моделирования работы [5] (при их экстраполяции из промежутка 0.94 мм ≤ R_0 ≤ 1.1 мм) составило бы около 18%.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект No. 17-11-01135).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Ильгамов М.А.* Образование сходящихся ударных волн в пузырьке при его сжатии // ДАН. 2014. Т. 458. № 3. С. 282–286.
2. *Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х.* Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49. № 2. С. 310–313.
3. *Aganin A.A.* Dynamics of a small bubble in a compressible fluid // Int. J. Numerical Methods in Fluids. 2000. V. 33. P. 157–174.
4. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука. 1976. 400с.
5. *Akhatov I., Lindau O., Topolnikov A., Mettin A., Vakhitova A., Lauterborn W.* Collapse and rebound of a laser-induced cavitation bubble // Phys. Fluids. 2001. V. 13. № 10. P. 2805–2819.

—— ♦♦♦ ——

О МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ ТЕКСТУРИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.И. Агеев, А.Н. Осипцов
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова
e-mail: aaiageev@mail.ru

Гидрофобные поверхности, имеющие структурированную шероховатость (текстуру), в микрокавернах которой силами поверхностного натяжения удерживаются пузырьки газа, принято называть супергидрофобными поверхностями (СГП) [1]. При течениях вязкой жидкости вдоль таких поверхностей трение на границах пузырьков практически отсутствует, поэтому макроскопическая скорость жидкости на СГП, измеренная в экспериментах, не равняется нулю – наблюдается осредненное проскальзывание жидкости. Эффективное «скольжение» обычно сказывается лишь на масштабах, сравнимых с размером шероховатости текстуры, поэтому снижение вязкого трения, обусловленное СГП, заметно проявляется лишь при ламинарных течениях в устройствах микрофлюидики, в которых жидкость прокачивается через микроканалы, имеющие толщину порядка нескольких десятков или сотен микрометров. Современные технологии позволяют производить искусственные СГП с заданной контролируемой текстурой, в связи с чем возникла важная практическая задача – оптимизация микрорельефа поверхности для достижения максимального снижения осредненного трения. Решение задачи оптимизации рельефа поверхности для конкретных приложений требует проведения междисциплинарных исследований и разработки методов математического моделирования течений вязкой жидкости вблизи СГП на масштабе микрорельефа [2]. При этом необходимо учитывать факторы, обусловленные геометрией СГП и межфазных поверхностей, которые решающим образом влияют на интенсивность снижения вязкого трения на СГП [2, 3].

В последние годы в ряде экспериментальных работ обнаружено, что межфазные границы, как правило, искривлены, а пузырьки газа лишь частично заполняют пространство между твердыми элементами текстуры СГП [4]. Именно эти два фактора обуславливают точность теоретической оценки снижения трения. При использовании упрощенных моделей, в которых рассматривается идеализированный случай плоской межфазной границы, закрепленной в углах рельефа поверхности, предсказания заметно расходятся с экспериментальными измерениями. В [5] показано, что учет кривизны межфазной поверхности и ее смещения внутрь каверн приводит к резкому «ухудшению» эффективных характеристик СГП. В связи с этим возникла необходимость в разработке алгоритмов, позволяющих достаточно просто учитывать форму и положение межфазной границы при численном решении соответствующей математической задачи обтекания вязкой жидкостью текстуры СГП и вычислении осредненного трения. Ввиду малости линейных размеров текстуры СГП, локальное течение вблизи ее отдельных элементов можно описывать в стоксовом приближении. Этот факт позволяет применять численные алгоритмы, основанные на использовании метода граничных интегральных уравнений (МГИУ). Указанный метод успешно применяется для расчета стоксовых течений в областях со сложной геометрией границы, в том числе, с заданными на границе комбинированными (прилипание/проскальзывание) граничными условиями [6].

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛНЬЫХ УРАВНЕНИЙ

Суть МГИУ заключается в замене уравнений Стокса (1) в некоторой области эк-

вивалентной системой граничных интегральных уравнений на границе расчетной области (2–3) для компонент вектора скорости **u**:

$$\nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\Lambda u_j(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma f_i(\mathbf{x}) G_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\, dl(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x})\, dl(\mathbf{x}) \tag{2}$$

$$G_{ij} = -\delta_{ij}\ln r + \frac{\xi_i \xi_j}{r^2}, \;\; T_{ijk} = -4\frac{\xi_i \xi_j \xi_k}{r^4}, \;\; \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \;\; r = |\boldsymbol{\xi}| \tag{3}$$

Граничные условия, которые используются для решения математических задач, соответствующих рассматриваемым в работе течениям, описаны в [5, 7]. Здесь G_{ij} и T_{ijk} (двумерные «стокслет» и «стресслет») – фундаментальные решения для оператора Стокса. В (1)–(3) использованы обозначения, подробно описанные в [5, 7]. Для вычисления скорости жидкости во всех граничных и внутренних точках расчетной области необходимо знать компоненты векторов **u** и **f**, которые являются «плотностями» стокслетов и стресслетов, распределенных по границе расчетной области. Неизвестные значения компонент этих векторов вычисляются из решения интегральных уравнений для граничных точек из условия удовлетворения заданным граничным условиям. Основное преимущество МГИУ – это снижение размерности исходной задачи на единицу. С использованием метода коллокаций система интегральных уравнений (2) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно компонент векторов **u** и **f**, которая решается стандартными численными методами [2]. Граничные условия для точек, лежащих на межфазной границе, добавляются к СЛАУ в качестве дополнительных уравнений [5, 7]. Неизвестная скорость жидкости на межфазной границе вычисляется в ходе решения граничных интегральных уравнений для граничных точек. Для численного решения задачи о течении вязкой жидкости в окрестности элемента текстуры СГП, содержащего газовый пузырек, был разработан оригинальный численный алгоритм, который позволяет проводить расчеты параметров течения с заданной точностью. Качество разработанного численного алгоритма проверено на основе сравнения численных расчетов параметров течения с результатами работ, в которых представлены аналитические решения модельных задач.

Использование МГИУ для решения задач обтекания элементов периодической текстуры СГП с двумерными кавернами, занятыми газовой фазой, позволяет достаточно просто выполнять многопараметрическое моделирование при вариации геометрических параметров текстуры, доли газового участка на стенках канала с СГП, формы поверхности пузырьков, положения мениска в кавернах, ширины канала. Кроме того, вычисленная картина течения в окрестности текстуры СГП совместно с экспериментальными наблюдениями обтекания текстуры дают возможность установить истинную геометрию межфазной поверхности, максимально приближенную к практике, что позволит получать более точные оценки снижения трения.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера применения МГИУ для решения рассматриваемых в работе задач ниже представлены расчеты для напорного течения вязкой жидкости в плоском микроканале, стенки которого – различные СГП, имеющие периодические текстуры. Поверхности, образующие стенки канала, характеризуются разными значениями ширины каверн, радиуса кривизны пузырьков и положения мениска в кавернах. В выполненных расчетах форма поверхности пузырьков считается статической и аппроксимируется элементом дуги окружности. Положения менисков фиксированы и считаются заданными. На рис. 1. представлена картина течения вязкой жидкости, соответствую-

щая одному элементу периодического течения в микроканале с двумя СГП. Для представленного случая геометрии стенок канала в кавернах над газовыми пузырьками образуются вихревые зоны. На основе выполненного параметрического исследования величины трения в канале (перепада давления) установлено, что возможное смещение менисков в каверны, то есть сжимаемость газа, может приводить к ухудшению свойств СГП, образующих стенки микроканала.

Рис. 1. Картина линий тока в микроканале с двумя разными СГП, содержащими каверны, частично заполненные газовыми пузырьками.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по госбюджетному плану МГУ при частичной поддержке гранта РФФИ № 17-01-00057.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Jeevahan et al.* Superhydrophobic surfaces: a review on fundamentals, applications and challenges // J. Coat. Technol. Res. 2018. V. 15. N 2. P. 231–250.
2. *Агеев А.И.* Течения вязкой жидкости вдоль супергидрофобных поверхностей // Дисс. канд. физ.-мат.наук. – М.: МГУ имени М.В. Ломоносова, 2015.
3. C. Lee et al. Superhydrophobic drag reduction in laminar flows: a critical review // Exp. Fluids. 2016. V. 57. P. 176.
4. *H. Kim, H. Park*. Diffusion characteristics of air pockets on hydrophobic surfaces in channel flow: three-dimensional measurement of air-water interface // Phys. Rev. Fluids. 2019. V. 4. 074001.
5. *A.I. Ageev, I.V. Golubkina and A.N. Osiptsov.* Application of boundary element method to Stokes flows over a striped superhydrophobic surface with trapped gas bubbles // Phys. Fluids. 2018. 30. 012102.
6. *C. Pozrikidis.* Boundary integral and Ssngularity methods for linearized viscous flows // Cambridge University Press. 1992. 259 p.
7. *А.И. Агеев, А.Н. Осипцов.* Стоксово течение в микроканале с супергидрофобными стенками // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 2. С. 1–14.

—— ♦♦♦ ——

КОРОТКОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИКИ В ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЯХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.И. Аллилуева
Институт Проблем механики им.А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: esina_anna@list.ru

Линеаризованные уравнения релятивистской газовой динамики описывают эволюцию малых возмущений поля скоростей в релятивистской ситуации. При описании коротковолновых асимптотических решений этих уравнений возникают эффекты, связанные со сменой кратности характеристик, которые в данной ситуации оказываются весьма специфическими (не выполнены стандартные условия общего положения). В докладе изучаются асимптотические решения задачи Коши для указанных уравнений. Мы описываем полное асимптотическое разложение решения, которое представляется в виде суммы трех мод. Одна из мод двукратно вырождена и ее эволюция определяется линейными уравнениями характеристик (таким образом, для этой моды отсутствует фокусировка). Амплитуда этой моды описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль характеристик; эволюция решений этой системы может быть различной для разных типов внешних полей. Остальные две моды простые и описываются квадратичным гамильтонианом; соответствующие фокальные точки образуют поверхность в фазовом пространстве, которая может быть описана в терминах гамильтоновой системы. Амплитуды этих мод описываются явно (соответствующие уравнения переноса интегрируются); их рост и убывание определяются аналогом геометрической фазы.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ
Работа поддержана РНФ (грант 16-11-10282).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Allilueva, A.I., Shafarevich*, 2019. Short-Wave Asymptotic Solutions of a Linearized system of Relativistic Gas Dynamics. Russ.J. of Math.Phys. 26: 255–264.

—— ♦♦♦ ——

ПОДЪЕМНАЯ СИЛА НА МАЛЫЕ ЧАСТИЦЫ В ТЕЧЕНИИ В КАНАЛЕ

Е.С. Асмолов[1,2], Т.В. Низкая[1], О.И. Виноградова[1,2]
[1]Институт физической химии и электрохимии РАН, e-mail: aes50@yandex.ru
[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В канале с конечным числом Рейнольдса на сферические частицы действует инерционная подъемная сила, вызывающая их движение поперек линий тока. Исследования начались с 1960-х гг наблюдениями миграции нейтрально плавучих частиц в цилиндрическом канале к положению равновесия на расстоянии 0.6 радиуса от центра канала (кольцо Сегрэ–Зильберберга) [1]. Данный эффект был объяснен теоретически влиянием малых нелинейных конвективных членов (инерцией жидкости) на основе асимптотического решения уравнений Навье–Стокса [2, 3]. В последние годы активно развивались также различные методы численного определения подъемной силы, результаты которых хорошо согласуются с экспериментальными данными. Тем не менее, оставался неясным функциональный вид зависимости силы от размера частиц, в том

числе, предлагались различные степенные зависимости.

В данной работе изучена подъемная сила, действующая на нейтрально плавучие сферические частицы конечного размера в плоских микроканалах с условиями прилипания или скольжения на стенках. Миграция нейтрально плавучих частиц в канале с конечным числом Рейнольдса Re моделируется на основе метода решеточного уравнения Больцмана. Показано, что сила обусловлена не только возмущениями, связанными с вращением частиц в сдвиговом потоке, но и их скоростью скольжения, которая вызвана гидродинамическим взаимодействием со стенками. Предложено выражение для силы при конечных Re и размерах частиц. Использование анизотропных супергидрофобных стенок каналов позволяет управлять равновесным положением частиц и их движением в боковом направлении с целью эффективного разделения по размерам.

ПОДЪЕМНАЯ СИЛА В КАНАЛЕ С ГЛАДКИМИ СТЕНКАМИ

Если число Рейнольдса частицы Re_p мало, возмущенное течение обусловлено двумя типами возмущений: обтеканием однородным потоком (стокслет) со скоростью скольжения V_s (разница скоростей частицы и несущего потока) и вращением в сдвиговом потоке (стресслет), и в главном приближении описывается уравнениями Стокса. В этом приближении на сферическую частицу действует сила сопротивления, совпадающая по направлению с V_s, но отсутствует подъемная сила. В случае, когда число Рейнольдса канала Re также мало, подъемная сила находится в виде следующего члена регулярного разложения по Re_p [2]:

$$F_l' = \rho\left(4a^2U_m / H\right)^2 c_l, \quad c_l = c_{l0} + c_{l1}V_s + c_{l2}V_s^2, \tag{1}$$

где ρ плотность жидкости, a радиус частицы, U_m скорость в центре канала ширины H, скорость скольжения V_s обезразмерена на $4aU_m/H$. В общем случае коэффициенты подъемной силы c_{li} зависят от относительного размера частиц a/H, расстояния до стенки z/H и числа Re. Выражения для них были получены лишь в некоторых предельных случаях: для течения в канале при $\mathrm{Re} \ll 1$ и $a/H \ll 1$ (точечные частицы) [2]; для частицы конечного размера в линейном сдвиговом потоке, ограниченном одной стенкой [4]. В нашей недавней работе [5] была предложена формула, обобщающая предшествующие теоретические результаты, и равномерно пригодная во всем канале при $\mathrm{Re} < 20$:

$$c_l = c_{l0}^{VC}(z / H) + \gamma c_{l1}^{CM}(z / a)V_s + c_{l2}^{CM}(z / a)V_s^2. \tag{2}$$

Здесь коэффициент c_{l0}^{VC} соответствует постановке [2], а коэффициенты c_{l1}^{CM}, c_{l2}^{CM} – [4], величина $\gamma = 1 - 2z / H$ учитывает изменение локального сдвига в точке нахождения частицы. Скорость скольжения V_s может возникать из-за действия внешней силы (не нейтрально плавучая частица). Для нейтрально плавучей частицы обычно считается, что $V_s = 0$, и подъемная сила обусловлена только стресслетом.

Миграция нейтрально плавучих частиц моделировалась на основе метода решеточного уравнения Больцмана (РУБ), что позволило численно определить скорости скольжения и величину c_l для различных a/H, z/H и Re = 11.3, 22.6. Показано, что V_s конечна для свободно движущейся и вращающейся частицы на расстоянии от стенки, сравнимом с радиусом. При малом зазоре между стенкой $z/a - 1 \ll 1$, она описывается известной формулой [6] для линейного сдвигового потока, ограниченного одной стенкой,

$$V_s = -1 + \frac{0.7431}{0.6376 - 0.200\log\left(z / a - 1\right)}.$$

В контакте со стенкой при z/a = 1 скорость достигает минимального значения V_s = –1, т.е. частица покоится. В результате в пристеночной области коэффициент c_l сильно отличается от зависимости [2], полученной для точечных частиц, которая не учитывает влияния V_s на подъемную силу.

Результаты расчетов c_l показаны на Рис. 1а. Можно видеть, что коэффициент не зависит от числа Рейнольдса при небольших Re < 20, и формула (2) хорошо описывает численные результаты, в особенности в пристеночной области, где коэффициент c_l быстро растет из-за изменения V_s. Кроме того, уравнение (2) удовлетворительно предсказывает смещение положения равновесия z_{eq} к центру канала с увеличением размера частиц (Рис. 1б).

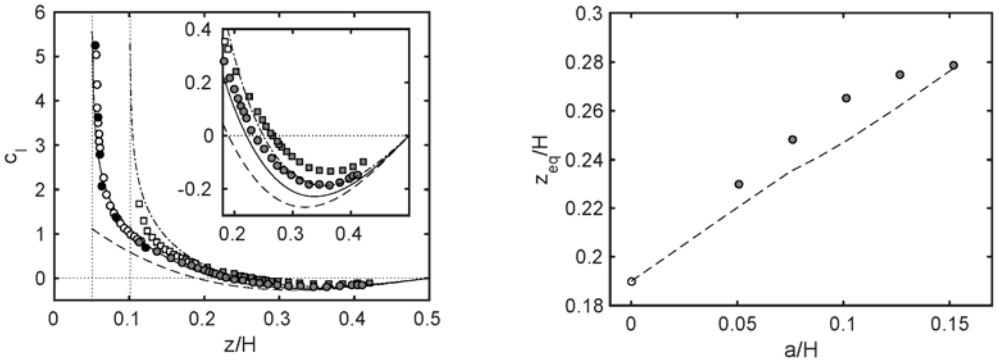


Рис. 1. (а) коэффициент поперечной силы для частиц с a/H = 0.05 (кружки) и 0.1 (квадраты), Re = 11.3 (серый) и Re = 22.6 (белый); сплошная и штрих-пунктирная линии – уравнение (2) для a/H = 0.05 и 0.1, штриховая – точечные частицы. (б) положения равновесия в зависимости от размера частиц; кружки – расчеты, линия – уравнение (2).

ПОДЪЕМНАЯ СИЛА В КАНАЛЕ С СУПЕРГИДРОФОБНЫМИ СТЕНКАМИ

Анизотропные супергидрофобные (СГ) поверхности снижают сопротивление трения в микроканалах и генерируют вторичные течения в направлении, перпендикулярном основному течению. В рамках РУБ нижняя СГ поверхность моделировалась в виде периодических полос с чередующимися условиями прилипания/полного скольжения, направленных под углом 45° к градиенту давления (рис. 2а). Доля скользящей поверхности φ варьировалась от 0.5 до 0.875. На верхней стенке канала выполнялись условия прилипания. Усредненное по периоду невозмущенное частицей течение характеризуется эффективными длинами скольжения в продольном и боковом направлениях, расчетные значения которых совпадают с теоретическими результатами. Усредненный профиль в направлении градиента давления является параболическим со скоростью скольжения на СГ стенке, растущей с φ. В боковом направлении генерируется вторичное течение с линейным профилем скорости.

Скорости миграции и положения равновесия частиц (рис. 2б, в) существенно изменяются в СГ канале даже при небольшой эффективной длине скольжения и становятся несимметричными относительно оси канала. Частицы большего размера всегда фокусируются ближе к центру канала. Нижние положения равновесия (рис. 2б) смещаются к скользящей стенке с увеличением φ, однако зависимость верхних положений от φ немонотонна – z_{eq} ближе всего к верхней стенке при φ = 0.5 (синие символы на рис. 2в). Вторичное течение приводит к боковому смещению частиц, так что направление их движения зависит от размера (рис. 2а). Данный эффект может быть использован для разделения частиц в боковом направлении.

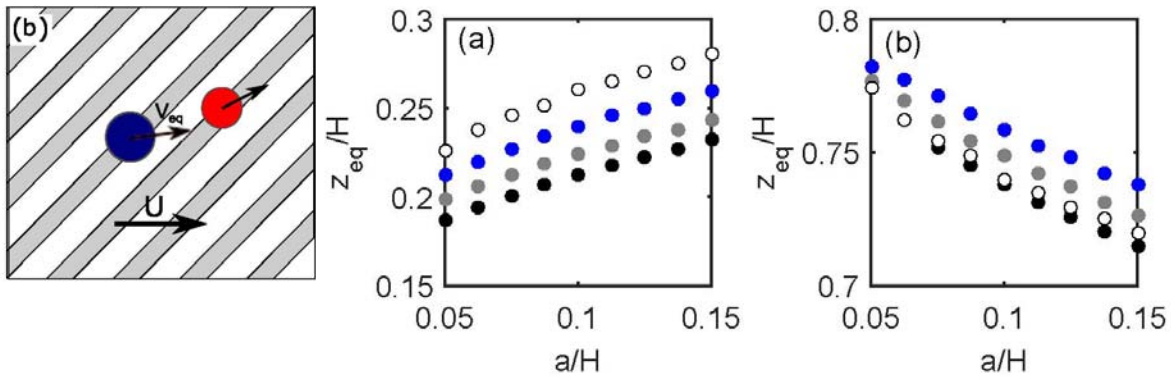


Рис. 2. (а) схема движения частиц в канале с СГ стенками (вид сверху); (б) нижнее и (в) верхнее положения равновесия для φ = 0, 0.5, 0.75, 0.875 (белый, синий, серый, черный).

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00729.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Segre, A. Silberberg. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 2. Experimental results and interpretation. // J. of fluid mechanics. 1962. Т. 14. №. 1. С. 115–157.
2. P. Vasseur, R. G. Cox. The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows. // J. of Fluid Mechanics. 1976. Т. 78. №. 2. С. 385–413.
3. E. S. Asmolov. The inertial lift on a spherical particle in a plane Poiseuille flow at large channel Reynolds number. // J. of Fluid Mechanics. 1999. Т. 381. С. 63–87.
4. P.Cherukat, J. B. McLaughlin. The inertial lift on a rigid sphere in a linear shear flow field near a flat wall. // J. of Fluid Mechanics. 1994. Т. 263. С. 1–18.
5. E. S. Asmolov et al. Inertial focusing of finite-size particles in microchannels // J. of Fluid Mechanics. 2018. Т. 840. С. 613–630.
6. A. J. Goldman, R. G. Cox, H. Brenner. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall – II Couette flow. // Chemical engineering science. 1967. Т. 22. №. 4. С. 653–660.

—— ♦♦♦ ——

УПРАВЛЕНИЕ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫМ ПЕРЕХОДОМ В ТРЕХМЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ПОМОЩИ ОТСОСА

С.А. Баранов, А.Ф. Киселев, Д.С. Сбоев, С.Н. Толкачев
Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского
e-mail: tolkachevst@gmail.com

Система ламинаризации пограничного слоя, основанная на принципе отсоса пограничного слоя является одной из наиболее эффективных, однако она не застрахована от отказов. Одним из возможных путей повышения её эффективности и надежности является использование секционированной системы отсоса. В работе рассматриваются несколько сценариев: базовый режим, когда на всех секциях реализован расход воздуха, заданный перепадом давления на ультраперфорированной пластине; отказ одной секции отсоса; режим работы, при котором одна секция отключена, а на соседней сек-

ции повышается расход воздуха с целью компенсации потери эффективности ламинаризации; режим работы, при котором потеря эффективности ламинаризации из-за отключения одной секции компенсируется увеличением расхода воздуха на всех оставшихся секциях. Интерес представляет величина требуемого увеличения расхода воздуха и сравнение процесса ламинарно-турбулентного перехода в нормальном и аварийном режимах.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Эксперименты проводились в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-124 Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ). Трехмерный пограничный слой на скользящей плоской пластине был организован применением криволинейной верхней и боковых стенок, имитирующих градиент давления (см. рис.1), присутствующий на стреловидном крыле. Такой способ создания трехмерного пограничного слоя находит широкое применение [1,2]. Угол скольжения модели составляет 35°, размах 998 мм, хорда 2100 мм, толщина 20 мм. Модель выполнена из оргстекла. Её передний край имеет форму эллипса с большой полуосью 80 мм. Ось X ортогональна передней кромке модели и отсчитывается от неё. Модель оснащена ультраперфорированными секциями размером 484×32×0.49 мм. Перфорированная область панели имеет размер 460×9.5 мм. 20 рядов отверстий диаметром 80 мкм расположены в узлах квадратной сетки с ребром 0.5 мм. Средние позиции панелей отсоса были расположены в X = 304 мм; 404 мм; 504 мм; 654 мм.

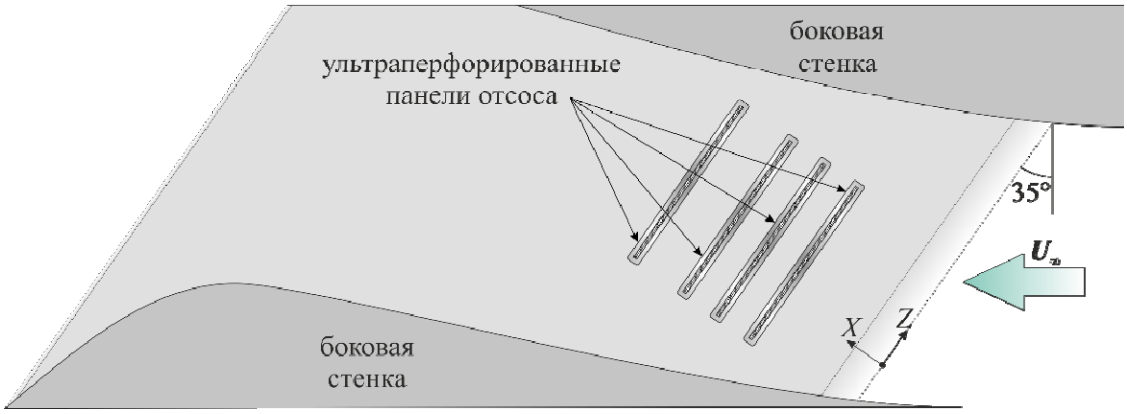


Рис. 1. Схема эксперимента (вид сверху).

Исследование структуры пограничного слоя проводилось методом термоанемометрии. В качестве базового был выбран режим отсоса, при котором перепад давления на ультраперфорированной пластине составлял 500 Па. Исходя из калибровки, скорость отсоса в отверстиях панелей от первой до четвертой составляла: 5.6 м/с.

Исследования проводились при двух режимах по степени турбулентности набегающего потока: 0.12% и 0.93%.

Низкая степень турбулентности характеризует обтекание в полетных условиях. Доминирующим источником возмущений является шероховатость поверхности, приводящая к возбуждению стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения, на каждом из которых развивается вторичная неустойчивость, приводящая к ламинарно-турбулентному переходу. Линия перехода при этом имеет зазубренную форму, что осложняет процесс исследования течения, так как требуются измерения вдоль передней кромке на длине не менее одного периода стационарных вихрей. Скорость набегающего потока в области передней кромки модели для этого режима была выбрана U_{fs} = 31.3 м/с для удобства измерений, опираясь на целевой уровень перемежаемости в

точке измерений на расстоянии 830 мм от передней кромки модели 21% в базовом режиме отсоса.

В этом режиме отключение первой секции отсоса приводит к увеличению перемежаемости до 75% (см. рис.2а). Для компенсации потери эффективности ламинаризации требуется увеличить скорость отсоса во второй секции до 39.7 м/с (увеличить в 7.1 раз), что при линейной зависимости перепада давления на ультраперфорированной пластине от расхода приведет к увеличению суммарной потребной мощности отсоса в 13 раз в случае, если остальные 2 секции работают в штатном режиме. Применение другой стратегии, при которой расход равномерно увеличивается на всех оставшихся секциях требует увеличения требуемой мощности системы отсоса в 8.5 раз.

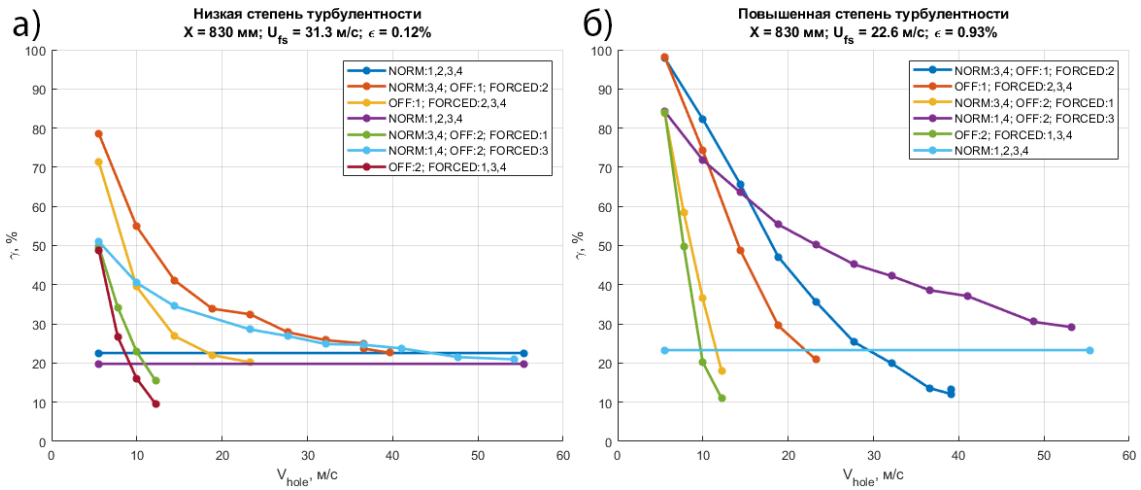


Рис. 2. Зависимость перемежаемости на расстоянии 830 мм от передней кромки в зависимости от режимов отсоса при низкой (а) и повышенной (б) степени турбулентности набегающего потока. NORM – секции, работающие в штатном режиме, скорость отсоса в отверстиях 5.6 м/с; OFF – отключенные секции; FORCED – секции, в которых скорость отсоса увеличивалась для компенсации потери ламинаризации.

Отключение второй секции менее критично – перемежаемость увеличивается до 51%. Для компенсации потери эффективности ламинаризации требуется увеличить скорость отсоса на первой секции в 1.68 раза, что приведет к увеличению требуемой мощности системы отсоса в 1.3 раза. Попытка компенсировать с помощью третьей секции потребует увеличения скорости отсоса в 7.7 раз, что приведет к увеличению мощности отсоса в 15.2 раза. Для компенсации потери эффективности ламинаризации увеличением расхода воздуха на всех секциях потребуется увеличение мощности отсоса в 1.9 раз.

При повышенной степени турбулентности доминирующим источником возмущений являются вихревые возмущения из набегающего потока, приводящие к возбуждению бегущих вихрей неустойчивости поперечного течения, из-за чего процесс перехода в среднем не зависит от положения по Z. Скорость набегающего потока в области передней кромки модели для этого режима была выбрана U_{fs} = 22.6 м/с для удобства измерений, опираясь на целевой уровень перемежаемости в точке измерений на расстоянии 830 мм от передней кромки модели 23% в базовом режиме отсоса.

В этом режиме отключение первой секции отсоса приводит к увеличению перемежаемости до 98% (см. рис.2б). Для компенсации потери эффективности ламинаризации требуется увеличить скорость отсоса во второй секции до 29.4 м/с (увеличить в 5.3 раза), что приведет к увеличению суммарной потребной мощности отсоса в 7.4 раз в

случае, если остальные 2 секции работают в штатном режиме. Применение другой стратегии, при которой расход равномерно увеличивается на всех оставшихся секциях, требует увеличения требуемой мощности системы отсоса в 11.6 раз.

Отключение второй секции приводит к увеличению перемежаемости до 84%. Для компенсации потери эффективности ламинаризации с помощью первой секции отсоса требуется увеличить скорость отсоса в 2 раза, что приведет к увеличению требуемой мощности системы отсоса в 1.6 раза. Компенсировать потерю эффективности ламианризации с помощью третьей секции не удалась – не хватило максимально развиваемой скорости отсоса (более 53 м/с, экстраполяция дает около 75 м/с). Для компенсации потери эффективности ламинаризации увеличением расхода воздуха на всех секциях потребуется увеличение мощности отсоса в 2.3 раза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача подбора оптимального режима отсоса нетривиальна – в общем случае требуется обеспечить максимальный выигрыш по мощности, требуемой для поддержания скорости летательного аппарата, за счет снижения трения методом ламинаризации за вычетом требуемой мощности для обеспечения работы системы отсоса пограничного слоя.

Анализ данных показал достаточно большое различие в ламинаризующей эффективности панелей отсоса, вызванное большим расстоянием между ними. Для компенсации потери эффективности ламинаризации при отключении одной секции требуется значительно увеличить скорость отсоса в соседних панелях, особенно на следующей, расположенной ниже по потоку. При этом мощность, требуемая для системы отсоса, может возрастать кратно. Таким образом, для минимизации последствий отказа одной из секций системы секционированного отсоса, требуется располагать их достаточно близко друг к другу. Минимизация требуемой мощности требует увеличения скорости отсоса сразу на нескольких секциях. При этом следует увеличивать скорость отсоса больше на тех секциях, которые обеспечивают максимальное влияние на ламинаризацию течения. Оптимальный алгоритм обеспечения аварийного режима требует проведения комплексных исследований и может быть подобран под заданный внешний конструктив летательного аппарата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deyhle H., Bippes H.* Disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 316, №1. P.73.
2. *Gaponenko V.R., Ivanov A.V., Kachanov Y.S. and Crouch J.D.* Swept-wing boundary-layer receptivity to surface non-uniformities // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 461, P. 93–126

—— ♦ ♦ ♦ ——

УПРАВЛЕНИЕ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫМ ПЕРЕХОДОМ В ТРЕХМЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ПОМОЩИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО БАРЬЕРНОГО РАЗРЯДА

С.А. Баранов, А.П. Курячий, Д.С. Сбоев, С.Н. Толкачев, С.Л. Чернышев
Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского
e-mail: tolkachevst@gmail.com

В качестве одного из методов снижения сопротивления летательного аппарата в настоящее время рассматривают технологию ламинаризации по-

граничного слоя. Большая часть самолетов оснащается стреловидными крыльями, на которых реализуется механизм неустойчивости поперечного течения, приводящий к переходу на разгонном участке крыла. В Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ) был разработан способ повышения устойчивости течения в ламинарном трехмерном пограничном слое на стреловидном крыле путем ослабления поперечного течения с помощью объемного силового воздействия, оказываемого приповерхностными электрическими разрядами с диэлектрическим барьером (ДБР) [1]. В работе были проведены экспериментальные исследования этого метода управления.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Эксперименты проводились в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-124 ЦАГИ. Трехмерный пограничный слой на скользящей плоской пластине был организован применением криволинейной верхней и боковых стенок, имитирующих градиент давления, присутствующий на стреловидном крыле. Угол скольжения модели составляет 35°, размах 998 мм, хорда 2100 мм, толщина 20 мм. Модель выполнена из оргстекла. Её передний край имеет форму эллипса с большой полуосью 80 мм. Ось X ортогональна передней кромке модели, ось Z, направлена вдоль нее и ось Y ортогональна к поверхности модели. Начало координат расположено на передней кромке. Для управления течением в пограничном слое была изготовлена многоразрядная актуаторная система (МАС), содержащая 44 плоских внешних электрода шириной 1 мм, высотой 50 мкм и расстоянием между активными кромками соседних электродов 7 мм. Два слоя диэлектрика (стеклотекстолита), разделяющие внешние, экранирующие и ускоряющий электроды имели общую толщину 1 мм. Внешние электроды перпендикулярны передней кромке пластины. Направленное вдоль нее объемное силовое воздействие МАС обеспечивалось в области с размерами по осям X и Z 186×310 мм. Область воздействия начиналась при X = 420 мм. Измерения скорости проводились двухниточным V-образным датчиком термоанемометра в области X = 620 мм.

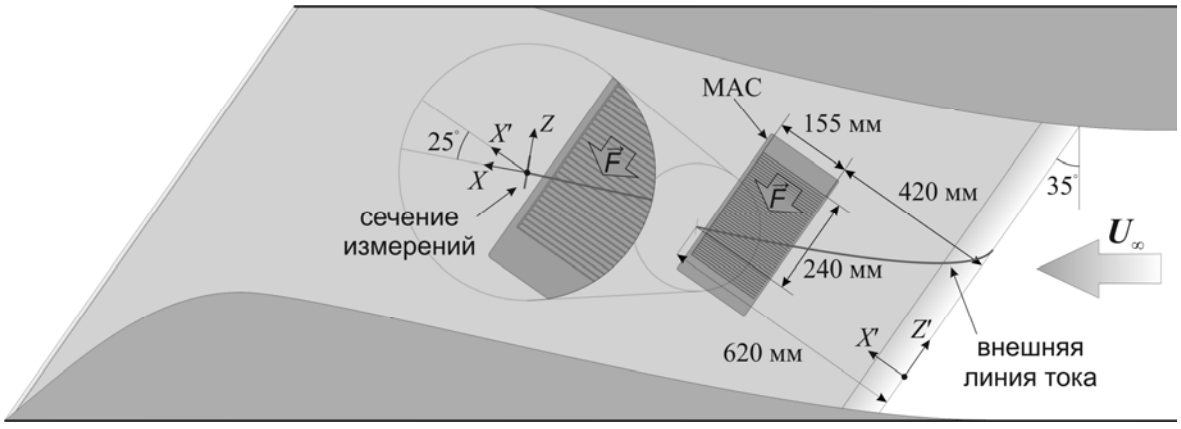


Рис.1. Схема эксперимента.

При скорости потока в контрольном сечении рабочей части АДТ 19.7 м/с скорость у передней кромки составляла U_0 = 25.2 м/с. Эксперименты выполнены при заземленном ускоряющем электроде и подаче на внешние и экранирующие электроды МАС переменного напряжения отрицательной пилообразной формы (быстрое нарастание и линейное уменьшение) в двух режимах с амплитудой 4 кВ, частотой 10 кГц и 4.5 кВ, 12 кГц соответственно.

Исследования показали, что в экспериментальной конфигурации МАС приводит к уменьшению поперечной компоненты скорости в 1.5 раза в режиме 4 кВ, 10 кГц и в 2.2

раза в режиме 4.5 кВ 12 кГц (см. рис.2). Это приводит к уменьшению амплитуды стационарных возмущений продольной компоненты скорости в 1.6 и в 1.9 раза соответственно (см. рис.3а) и к смещению стационарных вихрей по трансверсальной координате. Наклон стационарных возмущений становится меньше. Воздействие на стационарные возмущения поперечной компоненты скорости более сложное – амплитуда уменьшается в 1.3 раза, максимум возмущений сдвигается ближе к поверхности модели, становится меньше длина волны при воздействии МАС в режиме 4.5 кВ 12 кГц.

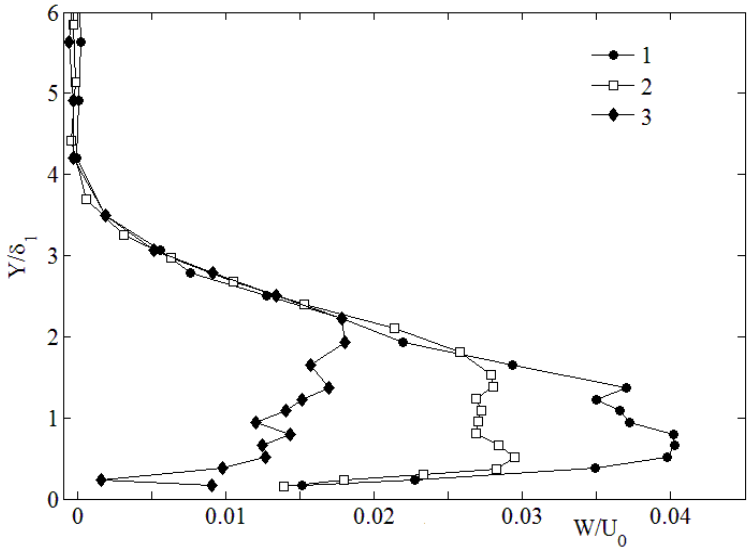


Рис.2. Профили осредненной по размаху поперечной скорости в пограничном слое: 1 – без разряда; 2 – режим 4 кВ, 10 кГц; 3 – режим 4.5 кВ, 12 кГц.

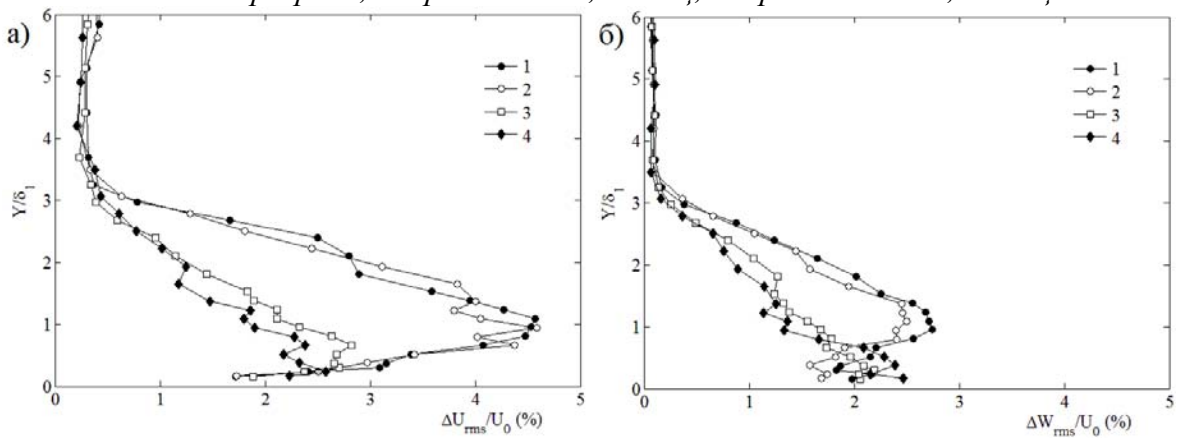


Рис.3. Профили среднеквадратичных отклонений продольной (а) и поперечной (б) компоненты скорости: 1, 2 – без разряда; 3 – режим 4 кВ, 10 кГц; 4 – режим 4.5 кВ, 12 кГц.

Однако на пути к ламинаризации течения стоит препятствие в виде возбуждения возмущений в широком диапазоне частот, что способствует развитию бегущих вихрей неустойчивости поперечного течения, вторичных возмущений и приводит к ускорению ламинарно-турбулентного перехода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chernyshev S.L., Kiselev A.Ph., Kuryachii A.P.* Laminar Flow Control Research at TsAGI: Past and Present // Progress Aerospace Sci. 2011. V. 47. P. 169–185.

—— ♦♦♦ ——

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ КАРТИНЫ ТЕЧЕНИЙ ОКОЛО РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА В ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Р.Н. Бардаков
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: bard@ipmnet.ru

Целью данной работы является экспериментальное исследование пространственной картины течений внешнего потока, прилегающего к краю вращающегося диска в однородной и слабо стратифицированной среде. Основное внимание уделено анализу структуры потока в вертикальном положении диска, когда ось вращения лежит в горизонтальной плоскости и поток может наблюдаться в различных проекциях.

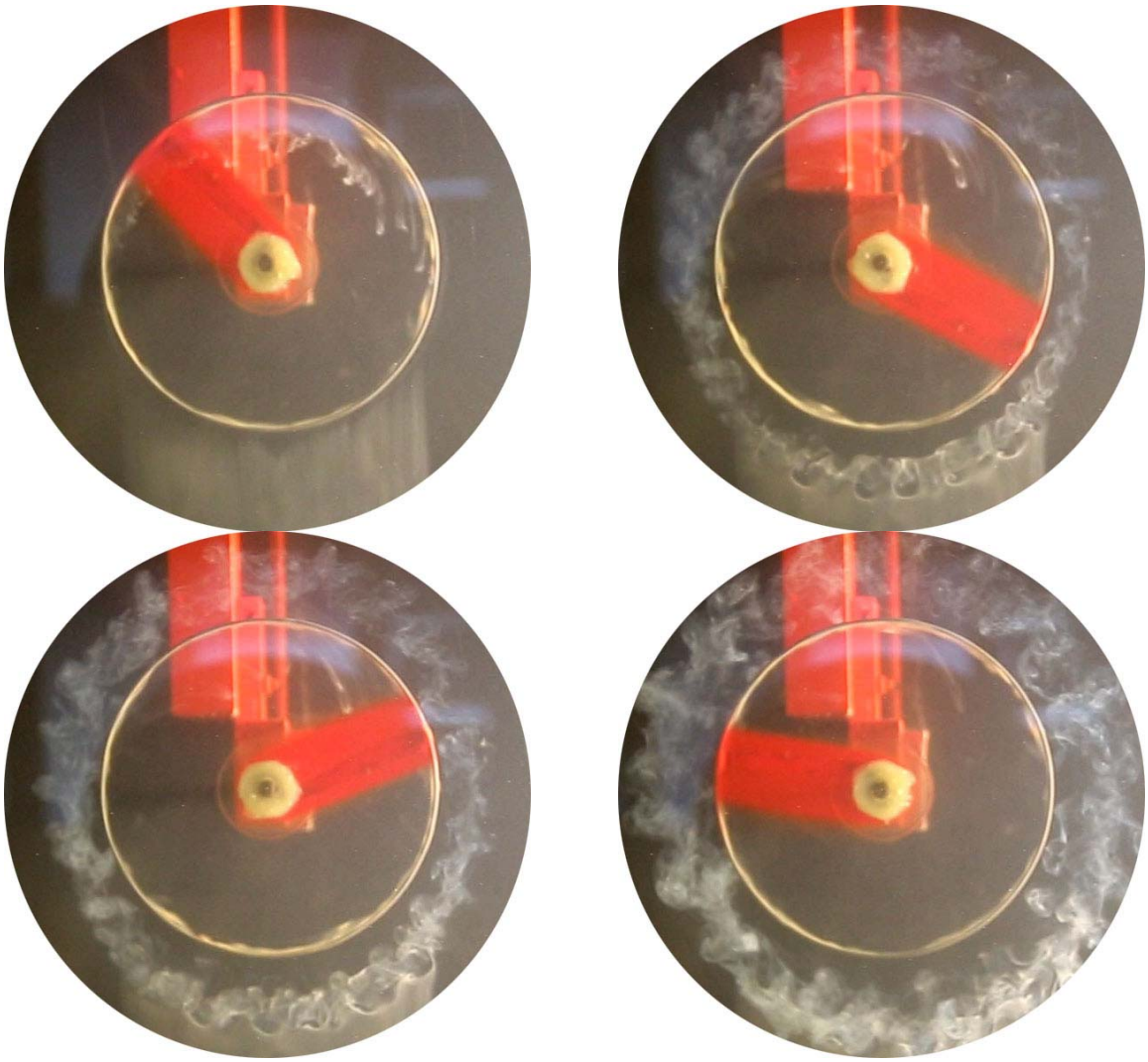


Рис. 1. Эволюция кольцевого вихря около равномерно вращающегося диска в однородной жидкости

Изучение картины течений при движении тел простой формы, например, полосы или диска, является одной из традиционно рассматриваемых задач теоретической и экспериментальной механики жидкостей в силу фундаментальной природы проблемы и важности практических приложений. В большинстве случаев основное внимание уделяется изучению структуры и динамики течений за равномерно движущимися препят-

ствиями правильной формы, как в однородных, так и в стратифицированных жидкостях, где наблюдаются несколько характерных типов течений. Обтекание вращающегося диска в основном изучается непосредственно над его поверхностью в однородной жидкости.

Расчет общего характера потока, выполненный Карманом, был подтвержден в ряде экспериментов, проведенных на воде и в воздухе. [1]. Проведенные позже эксперименты подтвердили стабильность элементов спиральной структуры потока на вращающемся диске в свободном пространстве. [2], рядом с другим вращающимся диском [3] или дисков находящимся внутри цилиндрической полости [4].

Следует отметить, что закономерности внешнего обтекания края вращающегося диска ранее не изучались. Такая задача представляет как практический интерес при изучении природы вихревых течений, так и методологическую как основу для интерпретации экспериментов по визуализации закрученных потоков однородных жидкостей.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по госзаданию № АААА-А17-117021310378-8 при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 18-05-00870) и программы Президиума РАН № №1.2.49 «Взаимодействие физических, химических и биологических процессов в Мировом океане». Эксперименты выполнены на стенде ТСТ УНУ «ГФК ИПМЕХ РАН».

ЛИТЕРАТУРА

1. Von Karman, (1921) T. Uberlaminare und turbulence reibung. *ZAMM*, 1, 52–233.
2. *Imayama S., Alfredsson H.P., Lingwood R.J.* A new way to describe the transition characteristics of a rotating-disk boundary-layer flow // Physics of fluids 2012. V. 24. 031701
3. *G. Gauthiery, P. Gondret, F. Moisy and M. Rabaud* Instabilities in the flow between co- and counter-rotating disks // J. Fluid Mech. (2002), V. 473, P. 1–21.
4. *Cros A., Ali R., Le Gal P., Thomas P.J., Schouveiler L., Carpenter P.W., Chauve M.P.,* Effects of wall compliance on the laminar-turbulent transition of torsional Couette flow, J. Fluid Mech. 481, 177–186, 2003.

—— ♦♦♦ ——

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СОПЛОВЫХ ВИХРЕГЕНЕРАТОРОВ НА ПУЛЬСАЦИИ СТРУИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С ОТКРЫТОЙ РАБОЧЕЙ ЧАСТЬЮ

Н.И. Батура, Г.Г. Гаджимагомедов, Г.Я. Масленников
Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского

Известно, что в аэродинамических трубах с открытой рабочей частью и замкнутым контуром при определенных скоростях потока в результате взаимодействия рабочей струи и закрытого тракта возникает автоколебательный процесс. Акустические колебания могут инициировать образование крупномасштабных тороидальных вихрей в слое смешения, а вихри в свою очередь приводят к пульсациям расхода во входном устройстве. За счет обратной связи образуется замкнутая колебательная система, которая имеет свои резонансные режимы, характеризующиеся существенным повышением амплитуды колебаний. Взаимодействие вихрей с диффузором приводит к его вибрациям, что при больших скоростях потока создает опасность разрушения элементов конст-

рукции трубы [1,2]. Для решения данной проблемы в больших аэродинамических трубах применяются следующие методы:

1. Обустройство диффузора щелевой вставкой, обеспечивающей подавлениие пульсаций расхода на входе в диффузор.
2. Шумоподавляющие материалы в качестве стенок тракта трубы за диффузором.
3. Установка на срезе сопла вихрегенераторов в виде пластин разной геометрии выступающих в поток.

Исследованию последнего метода и посвящена данная работа.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Эксперименты проводились в аэродинамической трубе замкнутого типа с открытой рабочей частью и камерой Эйфеля. Труба имеет прямоугольное сопло размером 570×370 мм. Расстояние от среза сопла до диффузора составляет 1,3 м. Задача состояла в исследовании резонансных явлений на данной установке, а также поиске наиболее оптимальной конфигурации вихрегенераторов в виде треугольных пластин. Были рассмотрены различные варианты, отличающиеся углом установки их в поток, высотой, расстоянием между ними и углом при вершине. Измерения проводились с помощью системы PIV и двух термоанемометров.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В спектре частот колебаний скорости в ядре потока были обнаружены дискретные пики, а также сплошной пакет центрированный числом Струхаля St=0.5 (рис. 1). По сигналам с двух датчиков термоанемометра были рассчитаны кросс-спектры и получено, что данные колебания вызваны наличием в потоке когерентных вихревых структур, распространяющихся со скоростью $0.5U_0$

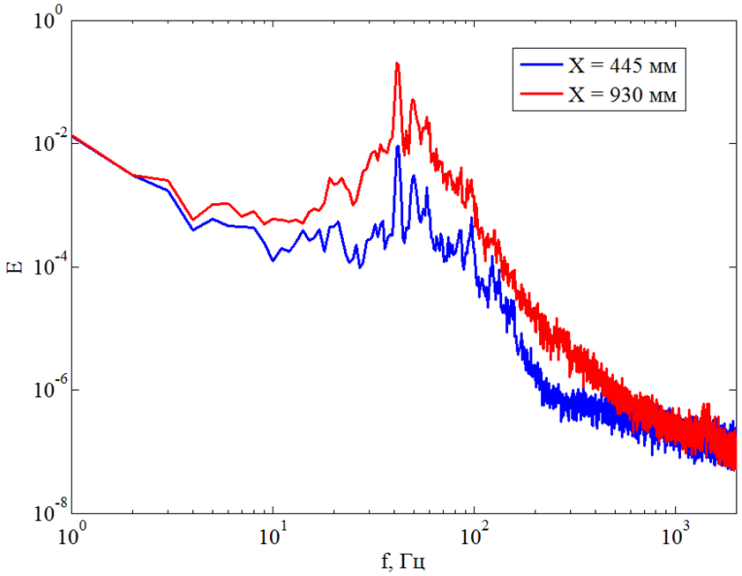


Рис. 1. Спектр пульсаций скорости в ядре потока в различных сечения рабочей части.

В случае вихрегенераторов, установленных на срезе сопла, измерения показали, что дискретные пики не исчезли полностью, а лишь уменьшились в амплитуде (рис. 2). Следовательно, вихрегенераторы не нарушают периодичность образования крупномасштабных вихрей, а приводят к их частичной диссипации.

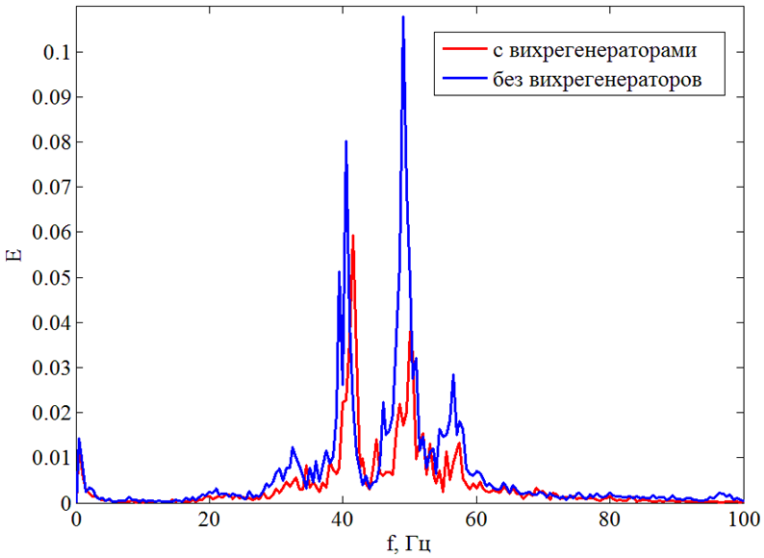


Рис. 2. Спектр пульсаций скорости с вихрегенераторами и без.

В части исследования, посвященного воздействию на струю треугольных вихрегенераторов, измерения проводились с помощью 2D PIV в центральном сечении струи в слое смешения. По мгновенным полям скорости рассчитывались среднеквадратичные пульсации компонент скорости. Было получено, что наибольшее падение пульсаций при прочих равных параметрах достигается при расположении пластинок под углом к потоку на выходе из сопла α=20÷45°. Варьирование высоты показало, что при выдвижении пластин в поток пульсации в слое смешения сначала падают, а затем снова растут. При этом оказалось, что оптимальная с точки зрения подавления пульсаций высота пластин зависит от их формы. Более узкие вихрегенераторы нужно выдвигать на большую глубину. Максимальное падение пульсаций, наблюдаемое в эксперименте составило около 50 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелков С.П., Бендриков Г.А., Смирнов Н.А. Пульсации в аэродинамических трубах и способы демпфирования их. Труды ЦАГИ. 1946. №593.
2. Holthusen, H. and Kooi, J.W., Model and Full Scale Investigations of the Low Frequency Vibration Phenomena of the DNW Open Jet, AGARD-CP-585, 1997

——— ♦ ♦ ♦ ———

О ВЛИЯНИИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА НА ЗАКОНОМЕРНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ФАРАДЕЯ

Д.Ф. Белоножко[1], А.А. Очиров[2], А.В. Апарнева[3]
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
e-mail: belonozhko@mail.ru [1,3], otchirov@mail.ru [2]

Поверхность жидкости в большинстве случаев весьма чутко реагирует на появление вибрационного поля. В частности, свободная поверхность горизонтального жидкого слоя, совершающего малые вертикальные вибрации, покрывается сеткой складок, называемых рябь Фарадея. При этом само явление называется неустойчивость Фарадея. В работах по её изучению немало внимания уделяется роли вязкости [1–3], часто в сочетании с различными

дополнительными динамическими эффектами [4–7]. В настоящей работе представлены результаты аналитического асимптотического исследования влияния пленки поверхностно-активного вещества (ПАВ) на условия развития неустойчивости плоской поверхности вязкой жидкости, совершающей вертикальные гармонические колебания.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Задача решалась в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью Ox, направленной горизонтально, вдоль направления распространения волнового возмущения малой амплитуды, и осью Oz, направленной вертикально вверх, против направления действия поля силы тяжести $\mathbf{g}$. Для простоты течение жидкости считалось независящим от горизонтальной координаты y, а сама жидкость полагалась бесконечно глубокой. Равновесная концентрация ПАВ Γ_0 и соответствующее ей равновесное значение поверхностного натяжения γ_0 на поверхности жидкости полагались известными. Эффективность влияния ПАВ на упругие свойства поверхности характеризовалось параметром упругости пленки $\varepsilon = \Gamma_0 \left(d\gamma / d\Gamma \right) < 0$, который пропорционален тангенсу угла наклона изотермы, изображающей зависимость поверхностного натяжения от концентрации ПАВ [6]. Задача состояла в исследовании устойчивости рассматриваемой системы по отношению к малым возмущениям $z = \xi(t,x)$ поверхности жидкости. Полагалось, что система координат вместе с жидкостью совершает малые гармонические вертикальные колебания заданной амплитуды a и частоты $2f$ относительно неподвижной инерциальной системы отсчета.

В первом приближении по малому параметру, пропорциональному отношению амплитуды возмущения к его длине математическая формулировка задачи имеет вид:

$$z < 0: \ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{U}; \ \left(\nabla \cdot \vec{U} \right) = 0. \tag{1}$$

$$z = 0: \ \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathrm{v}_z; \ -\frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial x^2} = -\frac{\chi}{\nu} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}; \ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} + \Gamma_0 \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} = 0; \tag{2}$$

$$-\rho\xi \left(1 - \frac{4a\omega^2}{g} \cos(2\omega t) \right) g + p - 2\rho\nu \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} = -\gamma_0 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right);$$

$$z \to -\infty: \ \mathrm{u} \to 0; \ \mathrm{v} \to 0. \tag{3}$$

Здесь $\vec{\mathrm{U}} = \mathrm{v}_x \vec{\mathrm{e}}_x + \mathrm{v}_z \vec{\mathrm{e}}_z$ – поле скоростей в жидкости, $\vec{\mathrm{e}}_x$, $\vec{\mathrm{e}}_z$ – единичные орты осей Ox, Oz, $p = p(x,z,t)$ – добавка к гидростатическому давлению внутри жидкости, ρ – плотность жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, t – время. Слагаемое $-4a\omega^2 \cos(2\omega t)$ описывает отнесенную к единице массы силу инерции, возникающую благодаря неинерциальности системы отсчета ($\omega = \pi f$); $\gamma = \gamma(\Gamma)$ – коэффициент поверхностного натяжения, Γ – поверхностная концентрация ПАВ, представленная слагаемыми нулевого и первого порядка малости $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$ ($\Gamma_1 = \mathrm{Const} \exp(ikx)$ – добавка первого порядка малости к равновесной поверхностной концентрации ПАВ, обозначенной, как Γ_0). На глубине использовалось условие полного затухания движения (3).

ПРИНИЦИП РАСЧЕТА УСЛОВИЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Задача (1)–(3) приводилась к безразмерным переменным, в которых $\rho = g = \gamma_0 = \gamma(\Gamma_0) = 1$. В качестве переменной, отвечающей за время, вводилась величина $\tau = \omega t$. Для решения использовались представления теории Флоке о характере эволюции динамической системы с периодически изменяющимся по закону $\sim \cos(2\tau)$ параметром. Согласно теории Флоке, на границах устойчивости решение рассматриваемой задачи является периодическим по переменной τ и раскладывается в ряд Фурье.

В связи со сказанным, полагалось, что простейшее возмущение поверхности с волновым числом k имеет следующий вид [7]:

$$\xi \equiv \xi(\tau, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\tau - ikx). \tag{4}$$

Для выполнения граничных условий (2) остальные неизвестные тоже должны описываться выражениями соответствующего строения:

$$v_x(\tau,x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(z)\exp(in\tau - ikx);\ v_z(\tau,x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(z)\exp(in\tau - ikx);\tag{5}$$

$$p(\tau,x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_n(z)\exp(in\tau - ikx);\ \Gamma_1(\tau,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(z)\exp(in\tau - ikx).$$

Вид функций $H_n(z)$, $F_n(z)$, $\Pi_n(z)$, $G_n(z)$ определялся в результате подстановки (5) в (1) и решения получившихся уравнений с учетом условий (3). Построенные соотношения вместе с (4) подставлялись в граничные условия (2). В результате получалась бесконечная система линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_n. Анализ условий разрешимости этой системы сводится к довольно громоздким уравнениям, описывающим условия нарушения устойчивости рассматриваемой системы. Условия пограничного состояния, по-другому – нейтральной устойчивости – формулировались в виде соотношения на безразмерные переменные:

$$\Omega^2 = \frac{gk\left(1 + k^2\gamma(\Gamma_0)/(\rho g)\right)}{\omega};\ q = 2ak \tag{6}$$

Величина Ω имеет смысл отношения частоты капиллярно-гравитационного волнового движения к половине частоты вертикальных осцилляций системы, а q характеризует безразмерную амплитуду этих осцилляций. В первом квадранте плоскости безразмерных параметров $\left(q, \Omega^2\right)$ строились границы зон устойчивости. Анализировалось влияние безразмерной вязкости $\delta = \nu k^2 / \omega$ на форму и взаимное расположение этих зон.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчеты показали, что в пределе исчезающее малой вязкости неустойчивые зоны представляют собой изогнутые клинообразные односвязные области с вершинами, образующими на оси Ω^2 ряд: $\Omega^2 = 1;4;9;...N^2;...$. Область с вершиной $\Omega^2 = 1$ называется первой неустойчивой зоной. Значение $\Omega^2 = 4 = 2^2$ соответствует второй, $\Omega^2 = 9 = 3^2$ – третьей и т.д. областям неустойчивости. Вершина каждой области определяет условия

дестабилизации волновых возмущений с частотами, кратными половине частоты вертикальных осцилляций системы. С увеличением вязкости вершины всех неустойчивых зон отодвигаются от оси Ω^2 и округляются. Расстояние от вершины области неустойчивости до оси Ω^2 определяет пороговое значение амплитуды вертикальных осцилляций, превышение которой дестабилизирует соответствующую волновую моду. Выяснилось, что даже незначительные значения вязкости заметно увеличивают пороговые значения амплитуды, и с ростом номера зоны этот эффект существенно усиливается. Минимальным пороговым значением амплитуды обладает первая зоне неустойчивости. Это означает, что наиболее чувствительными к вертикальным вибрациям являются капиллярно-волновые возмущения с частотой равной половине частоты вертикальных вибраций. Именно этот случай наиболее интересен с точки зрения приложений.

Влияние пленки ПАВ на капиллярно-гравитационное волновое движение в существенной степени определяется ее упругостью. С увеличением упругости усиливается демпфирование волнового движения. Для каждого волнового числа существует свое значение упругости пленки ПАВ, при котором капиллярно-гравитационная волна гасится за счет влиянии ПАВ особенно эффективно [6]. Это является следствием взаимного влияния волн сжатий и растяжений, инициируемых в пленке ПАВ, и непосредственно капиллярно-гравитационных волн. Расчеты показали, что в случае вязкой жидкости, оказавшейся в вертикальном вибрационном поле, пленка ПАВ способна в разы увеличить пороговое значение амплитуды вертикальных осцилляций, вызывающих появление ряби Фарадея. Этот эффект особенно сильно проявляется именно при тех значениях упругости пленки ПАВ, которые наиболее интенсивно подавляют капиллярно-волновое движение на свободной поверхности в отсутствии вибрации.

ВЫВОДЫ

Пленка ПАВ может служить действенным инструментом подавления ряби Фарадея на поверхности вязкого жидкого слоя, совершающего вертикальные вибрации. Воздействие ПАВ усиливается с ростом вязкости жидкости и особенно заметно при значениях упругости пленки, обеспечивающих максимальный декремент затухания в отсутствие вибрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bosch E.G.T. “An experimental investigation of Faraday waves and spatio-temporal chaos”. Eindhoven: Techniche Universiteit Eindhoven, 1995.
2. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. “Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях”. М.: Физматлит, 2003.
3. Белоножко Д.Ф., Апарнева А.В. // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2017. № 6. 1760401
4. Bestehorn M., Pototsky A. // Phys. Rev. Fluids. 2016. V. 1. 063905.
5. Stephen L. Strickland, Michael Shearer and Karen E. Daniels //J. Fluid Mech. 2015. V. 777. P. 523.
6. *Lucassen J., Hansen R. S.* // J. of Colloid and Interface Science. 1967. Т. 23. №. 3. С. 319328.
7. *Белоножко, Д. Ф., Апарнева А.В.* // Динамические системы. 2018. Т. 8(36), № 1. С. 5161.

—— ♦♦♦ ——

ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА OPENFOAM

Е.Д. Бирюков, М.С. Копылов, А.Е. Кувшинников
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
e-mail: kuvsh90@yandex.ru

Вопрос оценки точности численного решения газодинамических задач имеет огромную важность. Основным критерием точности и надежности является сравнения с эталонным решением. В качестве эталонного решения используются данные экспериментов или известные аналитические решения. Важной особенностью подобных задач является большое число определяющих параметров: число Рейнольдса, число Маха, геометрические параметры задачи и т.п.

В данной работе используется программный пакет OpenFOAM [1]. Он является программным пакетом с открытым исходным кодом и позволяет создавать собственные солверы, такие, например, как pisoCentralFoam [2, 3] и QGDFoam [4, 5]. В последнее время проводились исследования по сравнению точности различных солверов, в которых использовались задачи обтекания клина [6] и обтекания конуса под нулевым углом атаки [7]. Данные задачи являются эталонными, что отражено в недавно принятом ГОСТ Р 57700.12-2018 [8].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Было исследовано две задачи: обтекание конуса равномерным сверхзвуковым потоком идеального газа под углом атаки и моделирование косого скачка уплотнения.

В задаче обтекании конуса угол атаки α изменялся с 0° до 10° с шагом 5°. Угол полураствора конуса β изменялся с 10° до 20° с шагом 5°. Число Маха M изменялось с 2 до 4 с шагом 1. Были выбраны солверы rhoCentralFoam, pisoCentralFoam и sonicFoam.

На рис. 1 представлена схема течения. Начальные условия: давление P = 101325 Па, температура $T = 300$ K, компоненты скорости изменялись в зависимости от числа Маха и угла атаки. Граничные условия и настройки солверов взяты аналогично работе [7]. Эталонное решение было получено интерполяций таблиц из [9].

В задаче моделирования косого скачка уплотнения угол падения сверхзвукового потока газа β был равен 6°, 10°, 15°, 20°.Число Маха M изменялось от 2 до 4 с шагом 0.5. Были выбраны солверы rhoCentralFoam, pisoCentralFoam, sonicFoam и QGDFoam. Схема течения представлена на рис. 2. Граничные условия и настройки солверов выбирались аналогично работе [10]. Эталонное решение является аналитическим [11].

Расчеты для солвера QGDFoam проводились с помощью программного пакета OpenFOAM версии 4.1. Расчеты для всех остальных солверов, проводились с помощью программного пакета OpenFOAM версии 2.3.0. Солвер sonicFoam в стандартной версии не поддерживает динамическое изменение шага по времени, поэтому в код солвера были внесены необходимые изменения.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Были проведены расчеты для всех солверов, а также скоростей, углов атаки и углов полураствора в вышеуказанных диапазонах. Для каждого варианта были вычислены разностные аналоги нормы L_2:

$$\sqrt{\sum_m \left| y_m - y_m^{exact} \right|^2 V_m} \Big/ \sqrt{\sum_m \left| y_m^{exact} \right|^2 V_m},$$

где y_m – компоненты скорости U_x, U_y, U_z давление p и плотность ρ в ячейке, V_m – объем ячейки сетки. Значения y_m^{exact} получены из эталонного решения.

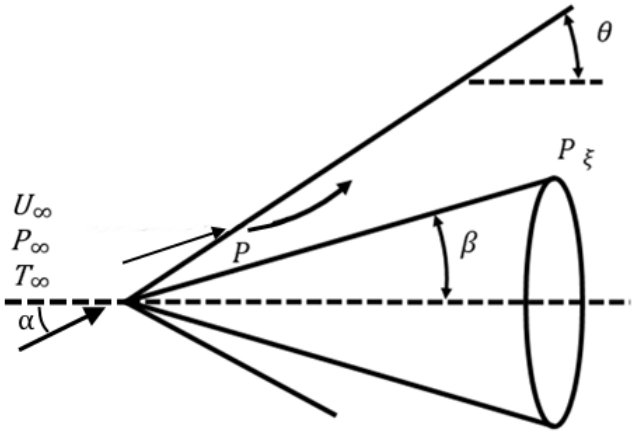


Рис. 1. Схема течения задачи обтекания конуса под углом атаки.

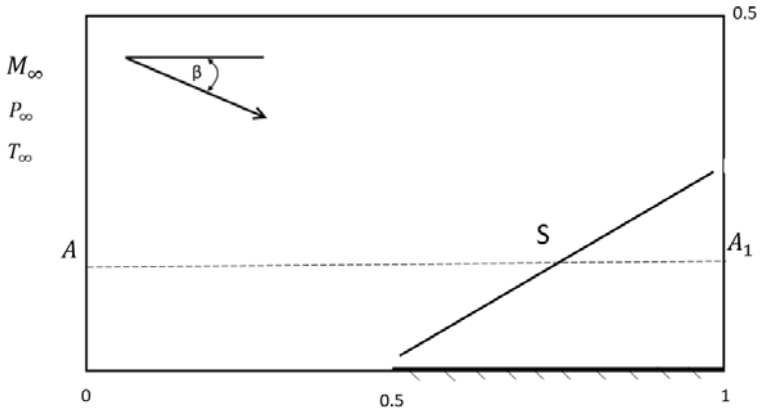


Рис. 2. Схема течения задачи моделирования косого скачка уплотнения.

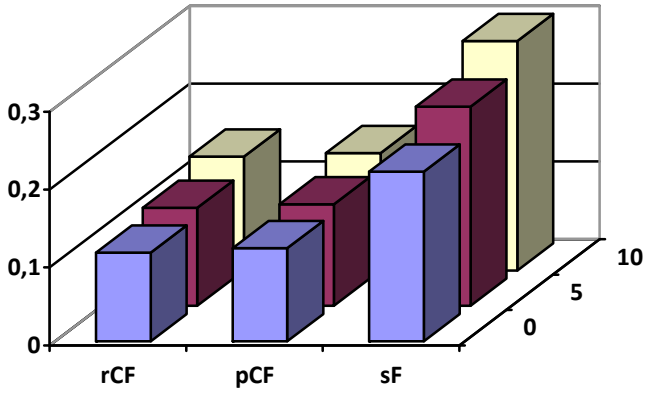


Рис. 3. Изменение отклонения от точного решения для давления в зависимости от выбора солвера и угла атаки для угла полураствора конуса 15° и числа Маха 5.

На рис. 3 в качестве примера представлена зависимость отклонения от точного решения в аналоге нормы L_2 для давления для угла полураствора $\beta = 15°$ и числа Маха $M = 5$ при вариации выбора солвера и угла атаки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение 4 солверов программного пакета OpenFOAM проводилось на двух эталонных задачах. Полученные результаты позволяют сделать выводы о характеристиках солвера и дать рекомендации о его использовании. Для всех солверов при увеличении угла атаки падает точность расчетов. Мы считаем, что это связано с увеличением кривизны сетки, тем самым ухудшается вычислительные свойства солверов. Минимальной нормой погрешности поля обладает солвер rhoCentralFoam. Солвер QGDFoam показывает хороший результат при изменении настраиваемых параметров, которые влияют на диссипационные свойства солвера. Его особенность в том, что оптимальные значения данных параметров зависят от определяющих параметров задачи.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-31-00320-мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. OpenFOAM Foundation, URL: http://www.openfoam.org (Дата обращения 20.09.2019)
2. *Kraposhin M., Bovtrikova A., Strijhak S.* Adaptation of Kurganov–Tadmor numerical scheme for applying in combination with the PISO method in numerical simulation of flows in a wide range of Mach numbers // Procedia Computer Science. 2015. Vol 66, P. 43 – 52.
3. pisoCentralFoam solver, URL: https://github.com/mkraposhin/pisoCentralFoam (Дата обращения 20.09.2019).
4. *Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Smirnova E.V., Elizarova T.G., Istomina M.A.*, Development of OpenFOAM Solver for Compressible Viscous Flows Simulation Using Quasi-Gas Dynamic Equations // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS), Moscow, 2017, P. 117–123.
5. QGDFoam solver, URL: https://github.com/unicfdlab/QGDsolver (Дата обращения 20.09.2019).
6. *Карвацкий А.Я., Пулинец И.В., Лазарев Т.В., Педченко А.Ю.* Численное моделирование сверхзвуковых течений с применением свободного открытого программного кода OpenFOAM // Космическая наука и технология, 2015, Т. 21, № 2, С. 47 – 52.
7. *Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E.* Analysis of the accuracy of OpenFOAM solvers for the problem of supersonic flow around a cone // Computational Science – ICCS 2018. 2018, P. 221 – 230.
8. Численное моделирование физических процессов. Численное моделирование ламинарных течений вязких жидкостей и газов. Валидация ПО. ГОСТ Р 57700.15-2018. Издание официальное. М.: Стандартинформ, 2018. 16 с.
9. Бабенко К.И., Воскресенский Г.П., Любимов А.Н., Русанов В.В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М.: Наука, 1964. 505 с.
10. Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E. Comparative analysis of the accuracy of OpenFOAM solvers for the oblique shock wave problem // Matematica Montisnigri, 2019, V. XLV, P. 95–105.
11. Бондарев Е.Н., Дубасов В.Т., Рыжов Ю.А. и др. Аэрогидромеханика. М.: Машиностроение, 1993. 608 с.

—— ♦♦♦ ——

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ В МЕГАВАТТНОМ ИНДУКЦИОННОМ ВЧ-ПЛАЗМОТРОНЕ ВГУ–3 ИПМЕХ РАН

А.И. Брызгалов, С.А. Васильевский, А.Ф. Колесников, С.Е. Якуш
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: bryzgalov@ipmnet.ru

В Институте ИПМех РАН работают два индукционных ВЧ-плазмотрона: ВГУ–4 (мощность до 100 кВт) и ВГУ–3 (мощность до 1000 кВт). На этих установках проводятся экспериментальные исследования теплообмена и термохимической стойкости образцов материалов в высокоэнтальпийных струях газов, истекающих из разрядного канала. Для определения каталитической активности поверхности материала по отношению к рекомбинации атомов O, N и энтальпии набегающего потока необходимо численное моделирование течений плазмы в разрядном канале и обтекания испытываемой модели для условий экспериментов. Методика численного моделирования и результаты расчетов для плазмотрона ВГУ–4 разработаны и опубликованы во многих работах, см. например [1]. Первый и пока единственный расчет для разрядного канала ВГУ–3 опубликован в работе [2]. Существенно, что у плазмотрона ВГУ–4 канал относительно тонкий (диаметр 80 мм, длина 400 мм) и поэтому для расчета вихревого электрического поля можно использовать упрощенное локально-одномерное уравнение Максвелла. Это обстоятельство существенно упрощало задачу. Разрядный канал ВГУ–3 не является достаточно тонким (диаметр ~200 мм, длина ~900 мм), и для корректного расчета в этом случае необходимо использовать более точную двумерную модель вихревого электрического поля [2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Расчет течения в разрядном канале ВГУ–3 проводился на основе двумерных уравнений Навье–Стокса, записанных в цилиндрической системе координат, с учетом тангенциальной компоненты скорости, обеспечивающей закрутку течения в канале. Воздух с заданным расходом G, с комнатной температурой и с углом закрутки β=45° (тангенциальная W и продольная U компоненты скорости равны) втекает в канал через узкую кольцевую щель, прилегающую к стенке канала – цилиндрической кварцевой трубки. Течение в канале стационарное, дозвуковое, ламинарное. Для достаточно больших давлений (более 50 гПа) течение считается химически и термически равновесным. Излучением плазмы можно пренебречь при не слишком больших мощностях.

Высокочастотный ток с частотой $f = 0.44$ МГц, протекающий по водоохлаждаемым виткам индуктора, создает вихревое электромагнитное поле внутри канала в области индуктора. Для обеспечения двумерной постановки задачи индуктор представляется в виде бесконечно тонких витков, расположенных эквидистантно и перпендикулярно оси симметрии канала, в которых течет одинаковый ток с амплитудой I_0. Электромагнитное поле, порождаемое токами индуктора, считается монохроматическим и может быть записано с использованием комплексных амплитуд:

$$\vec{E}(t,z,r) = \vec{E}(z,r)\cdot\exp(-i\omega t), \quad \{\vec{H}(t,z,r) = \vec{H}(z,r)\cdot\exp(-i\omega t)$$

где z, r – продольная и радиальная координаты, t – время, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота. Для условий экспериментов в плазмотроне ВГУ–3 можно пренебречь током смещения и считать магнитную проницаемость μ равной единице, а диэлектрическую проницаемость считать не зависящей от координат z, r. Плазма в канале считается квазинейт-

ральной. Уравнения Навье–Стокса считаются усредненными относительно осцилляций электромагнитного поля. Влияние поля на течение плазмы описывается источниковыми членами, входящими в уравнения: F_z и F_r – продольная и радиальная компоненты силы Лоренца, Q_J – Джоулево тепловыделение. Для их определения необходимо рассчитать амплитуду вихревого электрического поля. Используя закон Ома и условия симметрии, уравнения Максвелла для определения компонент амплитуды вихревого электрического поля E_z, E_r, E_θ можно записать в виде следующей двумерной модели:

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rE_\theta\right) = -i\omega\mu_0\sigma E_\theta, \quad E_z = 0, E_r = 0 \qquad (1)$$

здесь μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, σ – электропроводность плазмы в канале, E_θ (z,r) – тангенциальная компонента амплитуды электрического поля, которую для численного решения удобно разбить на две части: $E_\theta = E_{V\theta} + E_{P\theta}$, где $E_{\theta V}$ индуцировано только током в витках индуктора в вакууме (сингулярная часть), $E_{P\theta}$ индуцировано вихревыми токами в плазме. Следуя [2], уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 E_{P\theta}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} rE_{P\theta}\right) = -i\omega\mu_0\sigma(E_{V\theta} + E_{P\theta}) \qquad (2)$$

Амплитуда $E_{V\theta}$ определяется суммированием амплитуд от каждого отдельного кольцевого тока (витка индуктора) по известной аналитической формуле. Уравнение (2) решается на отдельной прямоугольной неравномерной расчетной сетке, выходящей за пределы канала. Граничные условия для (2) ставятся на достаточно удаленных поверхностях: $E_{P\theta}(z,\ r = \pm\infty)=0$; $E_{P\theta}(z = \pm\infty,\ r)=0$. После решения уравнения (2) источниковые члены определяются по формулам:

$$F_z = -\frac{\sigma}{2\omega}\mathrm{Re}\left\{E_\theta\left(i\frac{\partial E_\theta}{\partial z}\right)\right\}, F_r = -\frac{\sigma}{2\omega}\frac{1}{r}\mathrm{Re}\left\{E_\theta\left(i\frac{\partial rE_\theta}{\partial r}\right)\right\}, Q_J = \frac{\sigma}{2}E_\theta E_\theta,$$

где Re обозначает действительную часть, i – комплексная единица, $E_\theta = E_{V\theta} + E_{P\theta}$.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Уравнения Навье–Стокса решаются модифицированным методом SIMPLE Патанкара–Сполдинга, описанным в [1], на прямоугольной неравномерной расчетной сетке.

В уравнении (2) эллиптический оператор в левой части аппроксимировался стандартной схемой 2-го порядка. Результирующая система алгебраических уравнений с разреженной матрицей решалась итерациями с помощью эффективного GMRES метода с предобуславливателем. Подробнее метод решения описан в [2].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

С помощью описанных методов проведены расчеты течения и электрического поля в канале плазмотрона ВГУ–3 для мощности по анодному питанию N_{ap}=300 кВт (соответствующая мощность, вкладываемая в плазму, N_{pl}=180 кВт) для трех значений давления P=50, 100, 200 гПа, расход воздуха G=11 г/с. Длина канала 870 мм, диаметр – 192 мм, число витков индуктора n=4. Основные результаты расчетов приведены в таблице 1. Расчеты для P=50 и 200 гПа для ВГУ–3 проведены впервые.

Таблица 1. Основные результаты расчетов в канале ВГУ–3.

P, гПа	U_c, м/с	h_c, МДж/кг	T_c, K	I_0, А	T_{max}, K
50	366	68.7	10630	1012	10810
100	213	62.0	10670	1010	10910
200	125	55.4	10390	975	10740

Обозначения к таблице: U_c, h_c, T_c – продольная компонента скорости, энтальпия и температура на срезе разрядного канала на оси симметрии; I_0 – амплитуда тока в индукторе, определенная в ходе решения из условия, что суммарное Джоулево тепловыделение в плазме в канале равно значению мощности, вкладываемой в плазму N_{pl}; T_{max} – максимальная температура плазмы в области внутри индуктора.

На рис. 1 и 2 приведены изолинии безразмерной функции тока и изотермы в канале для N_{ap}=300 кВт, N_{pl}=180 кВт, G=11 г/с, для трех значений давления.

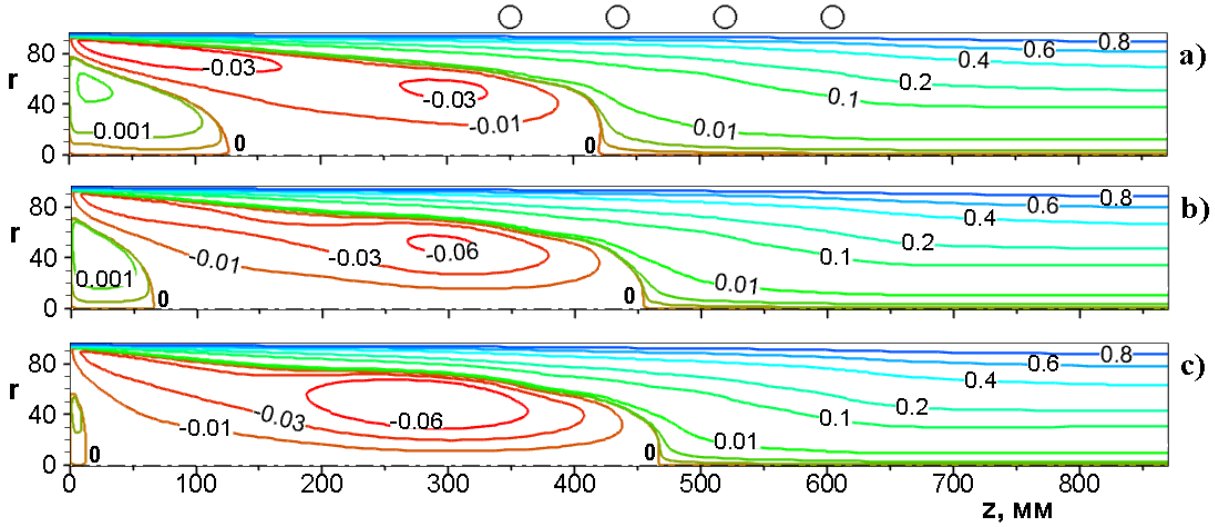


Рис. 1. Изолинии безразмерной функции тока в канале ВГУ–3 для трех значений давления: P=50 (a), 100 (b), 200 (c) гПа.

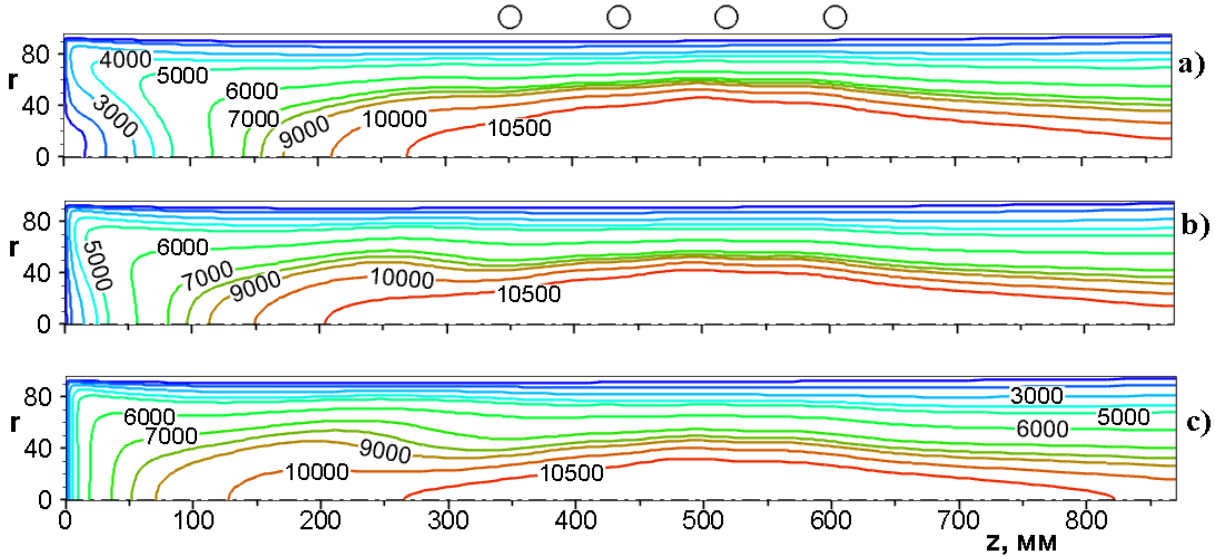


Рис. 2. Изотермы в канале ВГУ–3 для трех значений давления: P=50 (a), 100 (b), 200 (c) гПа.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания номер госрегистрации АААА-А17-117021310383-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильевский С.А., Колесников А.Ф.* Численное моделирование течений равновес-

ной индукционной плазмы в цилиндрическом канале плазмотрона // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. №5. 2000. С. 164–173.
2. *Vasilevskii S.A., Kolesnikov A.F., Bryzgalov A.I., Yakush S.E.* Computation of inductively coupled air plasma flow in the torches // J. of Physics: Conference Series. 2018. Vol.**1009.** No. 012027.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ СО СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

В.В. Булатов[1], *Ю.В. Владимиров*[2]
[1] *Институт проблем механики им.А.Ю. Ишлинского РАН, e-mail: internalwave@mail.ru*
[2] *Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, e-mail: vladimyura@yandex.ru*

Рассмотрена задача о построении решений, описывающих внутренние гравитационных волны от осциллирующего точечного источника возмущений в стратифицированной среде со сдвиговым течением. Рассмотрено модельное распределение сдвигового течения по глубине и получено аналитическое решение задачи в виде характеристической функции Грина, которое выражается через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса. С помощью дебаевских асимптотик модифицированной функции Бесселя получены аналитические выражения для дисперсионных соотношений и построены интегральные представления решений. Исследованы зависимости волновых характеристик возбуждаемых полей от основных параметров использованных моделей стратификации, течений и режимов генерации.

ВВЕДЕНИЕ И АКТУАЛЬНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ

Среди большого многообразия наблюдаемых волновых процессов различной физической природы в океане и атмосфере Земли особое место вызывает взаимодействие возбуждаемых волн с гидродинамическими потоками[1–6]. Движение стратифицированной среды является одним из основных факторов, влияющих на динамику внутренних гравитационных волн, как в естественных условиях, так и в технических устройствах. В современных научных исследованиях при анализе динамики внутренних гравитационных волн в природных стратифицированных средах с учетом наличия течений применяются асимптотические методы исследования аналитических моделей волновой генерации. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и их асимптотическом анализе.

В реальных океанических условиях необходимо рассматривать внутренних гравитационных волн, распространяющиеся на фоне средних течений с вертикальным сдвигом скорости, причем вариация скорости по вертикали составляет десятки см/сек и м/сек, то есть имеет тот же порядок, что и максимальные скорости внутренних гравитационных волн. Такие течения должны существенно сказываться на распространении внутренних гравитационных волн. В [6] приведено результаты многочисленных исследований по натурным измерениям внутренних волн, течений, а также их взаимодействию в различных областях Мирового океана, в частности рассмотрена генерация волн сдвиговым течением в проливе Карские Ворота, причем течение меняется с приливной частотой, и пакеты внутренних гравитационных волн появляются с приливной периодичностью за счет сдвиговой неустойчивости течений. Аналогичные результаты получены на примере Гибралтарского пролива, где рассмотрены измерения течений и внут-

ренних гравитационных волн, амплитуда которых составляет десятки метров.

Для моделирования генерации внутренних гравитационных волн точечным источником в реальном океане можно считать крутой склон поперечного хребта в проливах, который обтекается сдвиговым течением и периодическим приливным течением. Если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин внутренних гравитационных волн, а масштаб временной изменчивости много больше периодов внутренних волн, то естественной математической моделью является случай стационарных и горизонтальных однородных сдвиговых течений. Целью настоящей работы является построение аналитических решений, описывающих поля внутренних гравитационных волн от осциллирующего источника возмущений в стратифицированной среде с учетом сдвиговых течений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается слой вертикально стратифицированной среды глубины H. Пусть $(U(z),V(z))$ – вектор сдвигового течения на горизонте z. Исходной для анализа является линеаризованная система уравнений гидродинамики относительно невозмущенного состояния, которая имеет вид

$$\rho_0 \frac{DU_1}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 , \rho_0 \frac{DU_2}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 , \rho_0 \frac{DW}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 , \frac{\partial \rho}{\partial t} + W \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 , \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x} + V(z)\frac{\partial}{\partial y}$$

где (U_1, U_2, W) – компоненты возмущенной скорости, (p, ρ) – возмущения давления и плотности, $\rho_0(z)$ – невозмущенная плотность среды. Воспользовавшись приближением Буссинеска, можно получить уравнение для вертикальной компоненты скорости

$$\frac{D^2}{Dt^2}\Delta W - \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\frac{\partial W}{\partial y}\right) + N^2(z)\Delta_2 W = Q(t,x,y,z)$$

$$\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \ \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \ N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)}\frac{d\rho_0(z)}{dz}$$

где $N^2(z)$ – квадрат частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести), g – ускорение свободного падения, $Q(t,x,y,z)$ – плотность распределения источников при их наличии. Граничные условия берутся в виде (вертикальная ось z направлена вверх): $W = 0$ при $z = 0, -H$.

Частота плавучести Брента–Вяйсяля предполагается постоянной: $N(z) = N = \text{const}$ и течение одномерным: $V(z) \equiv 0$. Функция $U(z)$ – линейная функция глубины: $U(z) = U_0 + (U_0 - U_H)z / H$, где $U_0 = U(0)$, $U_H = U(-H)$. Использование данной модельной гидрологии широко применяется в реальных океанологических расчетах и позволяет учитывать основные особенности волновой динамики с учетом реальной изменчивости плотности морской среды, наблюдаемой при натурных измерениях внутренних гравитационных волн в океане, а также исследовать задачу аналитически [5,6]. Ненулевая правая часть берется в виде $Q(t,x,y,z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)\exp(i\omega t)$, то есть рассматривается функция Грина для осциллирующего точечного источника возмущений, расположенного на глубине z_0.

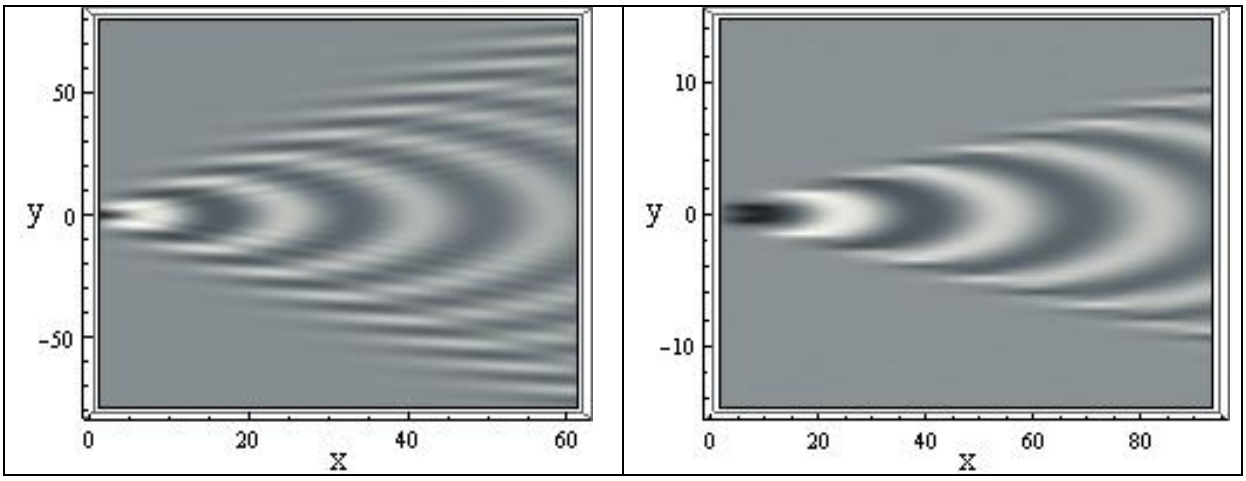


Рис. 1. Внутренние гравитационные волны в стратифицированной среде с учетом сдвиговых течений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о поле внутренних гравитационных волн от осциллирующего локализованного точечного источника возмущений в стратифицированной среде со сдвиговым течением. Для аналитического решения задачи использовано постоянное распределение частоты плавучести и линейная зависимость сдвигового течения от глубины. Используя модельную гидрологию, получены аналитические выражения, описывающие дисперсионные зависимости, которые выражаются через модифицированную функцию Бесселя мнимого индекса. При выполнении условия устойчивости Майлса и больших числах Ричардсона для построения аналитических решений были использованы дебаевские асимптотики модифицированной функции Бесселя мнимого индекса. Подробно изучены свойства дисперсионного уравнения и исследованы основные аналитические свойства дисперсионных кривых. В приближении стационарной фазы построены интегральные представления решений для дальних волновых полей. Численно рассчитаны фазовые картины возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн для данной модели волновой генерации (рис.1).

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
2. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
3. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Теория волновых движений неоднородных сред. – Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017. 580 с.
4. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Новые задачи математической теории поверхностных волновых возмущений. Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017. 318 с.
5. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В*. A general approach to ocean wave dynamics research: modelling, asymptotics, measurements. М.: ОНТО-ПРИНТ, 2019, 587 с.
6. Morozov E.G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018, 317 p.

—— ♦ ♦ ♦ ——

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОКОНВЕКТИВНЫХ СТРУКТУР В АТМОСФЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Н.В. Вазаева
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
Московский государственные технический университет им. Н.Э. Баумана,
e-mail: vazaevanv@ifaran.ru,
О.Г. Чхетиани, В.С. Люлюкин
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
e-mail: ochkheti@gmail.com, lyulyukin@ifaran.ru,
К.В. Барсков
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, e-mail: barskovkv@gmail.com,
Ф.А. Козлов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, e-mail: fed_ko_95@mail.ru

Изучению термиков (термоконвективных структур) – конвективных движений изолированных объемов воздуха – называемых в иностранной литературе также пузырями, в настоящее время уделяется большое внимание. Учет термиков важен, например, при воспроизведении пространственной структуры поля примеси в атмосферном пограничном слое (АПС). Восходящие струи теплого воздуха, в особенности вертикальный перенос за счет мощных восходящих движений в термиках, приводят к повышенной концентрации пыли. Частицы аэрозоля, попавшие в такие конвективные потоки, поднимаются практически до верхних уровней АПС, и при наличии среднего ветра формируются аэрозольные слои. Максимум концентрации аэрозоля в такой циркуляционной ячейке может в несколько раз превышать ее среднее значение. Значительный интерес представляет также изучение процессов образования кучевых облаков вследствие мощной атмосферной конвекции, связанных с наличием термиков в АПС [1–3].

В процессе изучения атмосферной термической конвекции было создано большое число аналитических и полуэмпирических моделей. Уравнения термогидродинамики в этих моделях сложны для вычисления, анализа и понимания результата и самого явления, точные решения в замкнутом виде находятся лишь в частных случаях. Все это значительно усложняет вычисление характеристик термоконвективных структур. Соответственно, статистические методы исследования данных натурных измерений имеют особую ценность, в частности, при разработке вихреразрешающего моделирования атмосферных конвективных процессов [4, 5].

Нами разработан и апробирован алгоритм выделения конвективной структуры из данных акустического зондирования АПС. Использовались дневные данные акустического зондирования, полученные в экспедициях ИФА им. А.М. Обухова РАН в Калмыкии в июле 2007, 2016 гг. В этот период в регионе устанавливается стабильная жаркая погода, с преимущественно слабыми ветрами. Для оценки вертикальной протяженности восходящих конвективных потоков воздуха использовался длинноволновый содар с разрешающей способностью по высоте 20 м, интервалом излучения пакетов импульсов 5 сек для 2007 г. и с разрешающей способностью по высоте 10 м, интервалом излучения пакетов импульсов 3 сек для 2016 г., с высотным диапазоном 400 м и базовой несущей частотой 2 кГц.

Для исследования статистики конвективных образований в различных ветровых и температурных условиях начальные данные горизонтальных и вертикальной компонент скорости ветра осреднялись прямоугольным фильтром. В дальнейших вычислени-

ях использовались осредненные значения. Основные результаты приведены на рис. 1–2 на примере уровня 100 м с параметром осреднения 1 мин.

Фиксировались случаи превышения вертикальной скоростью некоторого порогового значения вертикальной скорости, при которой, предположительно, возникают конвективные структуры. В качестве величины порогового значения, характеризующего конвективные образования, в данном исследовании рассматривались несколько вариантов. Представлены результаты для скоростей 0,3 м/с, 0,6 м/с и 1,2 м/с. В этих случаях проводилось вычисление длительности превышения скоростью предельного (порогового) значения, регистрировалась максимальная вертикальная скорость внутри этого промежутка времени для каждого случая, находились пространственные масштабы по координатам X и Y и общий горизонтальный пространственный масштаб. При нахождении пространственных масштабов считалось, что конвективная структура движется поступательно на протяжении некоторого относительно малого промежутка времени с некоторой осредненной за этот промежуток скоростью (гипотеза Тэйлора). Промежуток времени выбирался эмпирическим путем и составлял в данном случае 10 минут. При таком значении, в целом, хорошо воспроизводится пространственно-временная структура поля скорости в АПС.

Распределения для данных акустического зондирования, полученных в дневное время в пустынной или полупустынной местности, оказываются близкими к распределению Рэлея [6], применяемого, в частности, для статистики интенсивных влажно-конвективных вихрей и высоты волн в океане:

$$\rho(U) = \frac{2U}{U_0^2}\exp\left(\frac{U_m^2 - U^2}{U_0^2}\right)$$

Здесь $U_0^2 = \left[\left\langle U^2\right\rangle - U_m^2\right]$, $\left\langle U^2\right\rangle$ – средняя квадратичная вертикальная скорость термиков, U_m – предельное значение вертикальной скорости термика. Отметим, что для ансамбля термиков модель [5] дает одномерное распределение Максвелла. На рис. 1 и 2 показаны распределения максимального значения скорости (вертикальная скорость термиков) для 23 и 24 июля 2016 г. (3 с, 10 м).

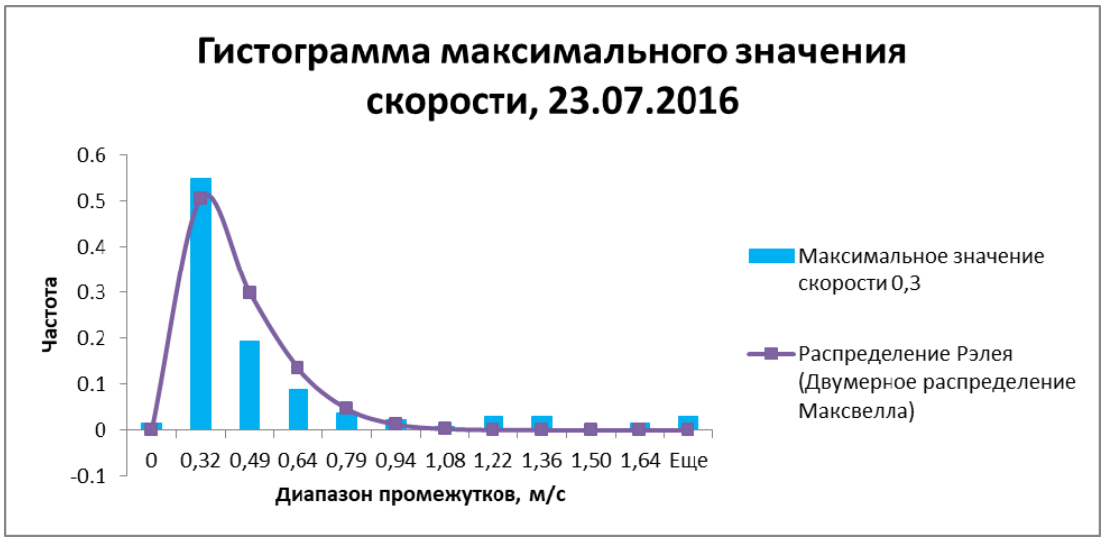


Рис. 1. Гистограмма распределения максимального значения скорости, распределение Рэлея (двумерное распределение Максвелла), Калмыкия, 23 июля 2016 г.

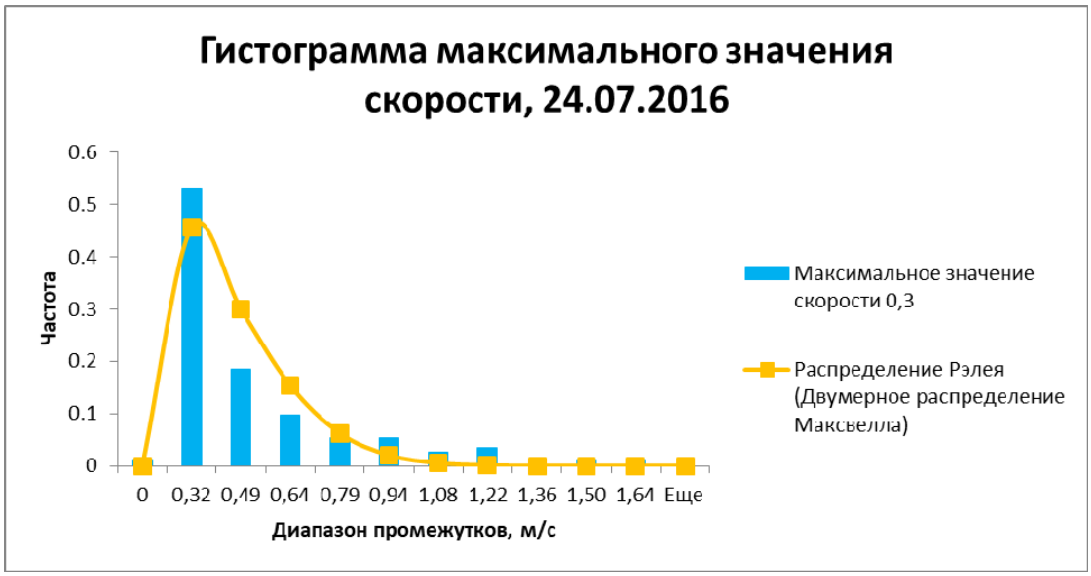


Рис. 2. Гистограмма распределения максимального значения скорости, распределение Рэлея (двумерное распределение Максвелла), Калмыкия, 24 июля 2016 г.

Полученные статистические характеристики термоконвективных структур можно использовать для прогноза условий зарождения и пути распространения термиков.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Приносим благодарность М.А. Каллистратовой, Р.Д. Кузнецову, В.Ф. Крамару и Д.Д. Кузнецову за вклад в подготовку и проведение экспериментов по акустическому зондированию; и М.В. Курганскому за помощь в выборе применимого для термоконвективных структур распределения и интерес к работе.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-35-00600, № 17-05-41121РГО-а, № 19-05-01008).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt H., Schumann U.* Coherent structure of the convective boundary layer derived from large-eddy simulations // J. Fluid Mech. 1989. V. 200. P. 511–562.
2. *Moeng C.H.* A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence // J. Atm. Sci. 1984. V. 41. № 13. V. 2052–2062.
3. *Hernandez-Deckers D., Sherwood S.C.* A numerical investigation of cumulus thermals // J. Atm. Sci. 2016. V. 73. №. 10. P. 4117–4136.
4. *Petenko I.V., Bezverkhnii V.A*. Temporal Scales of Convective Coherent Structures Derived from Sodar Data, Meteorol. // Atmos. Phys. 1999. V. 71. P. 105–116.
5. *Вульфсон А.Н., Бородин О.О.* Система конвективных термиков как обобщённый ансамбль броуновских частиц // Успехи физических наук. 2016. Т. 186. №. 2. С. 113–124.
6. *Курганский М.В.* Статистическое распределение интенсивных влажно-конвективных спиральных вихрей в атмосфере // ДАН. 2000. Т. 371, № 2. С. 240–242.

—— ♦♦♦ ——

СРАВНЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ ДИССИПАЦИИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

В.В. Вановский
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: vladimir.vanovsky@gmail.com

В актуальной в большинстве случаев линейной постановке рассмотрены все основные механизмы диссипации: вязкий, термический и акустический, предложен способ одновременного описания затухания для свободных и вынужденных колебаний с помощью единой системы уравнений. Показано, что для пузырьков в воде на малой глубине определяющую роль играет именно термический механизм диссипации. Определены условия, при которых становятся значимыми другие механизмы затухания.

Диссипация энергии колебаний пузырьков – фундаментальная тема, входящая во многие современные труды по гидродинамике, играющая важную роль для описания механизмов дробления пузырьков в акустической волне, затухания акустической волны в пузырьковой среде, задач кавитации, что имеет многочисленные инженерные и медицинские приложения. Среди них прорыв гематоэнцефалического барьера с помощью направленного воздействия ультразвуком на специально введённые в кровь микропузырьки, контрастно усиленная ультразвуковая томография, защита турбин от кавитационной эрозии, изолированный подрыв подводных конструкций, сонолюминисценция, подводные стелс-технологии, исследование газообмена атмосферы с океаном.

Основные результаты линейной теории затухания сферических колебаний малых пузырьков получены в работах [1–3], работа [4] дополняет рассмотрение учётом фазовых превращений, однако автором не найдено работ с единым рассмотрением свободных и вынужденных колебаний для основных механизмов диссипации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим малый пузырёк, заполненный газом, в поле давления акустической волны в жидкости. Размер пузырька $a(t)$ примем много меньше длины волны, чтобы давление в волне можно было считать однородным на масштабах пузырька, а колебания пузырька – сферически симметричными. Пусть плотность газа $\rho_g(r,t)$ много меньше плотности жидкости ρ, что позволяет использовать приближение гомобаричности. Считаем, что температуры газа и жидкости далеки от температуры фазовых превращений, и фазовые переходы не вносят существенного вклада в диссипацию. Температуропроводность жидкости гораздо выше, чем газа, что даёт возможность считать температуру жидкости постоянной и равной T_∞. Течение жидкости вокруг пузырька считаем потенциальным, что позволяет учесть вязкость как небольшую диссипативную добавку к давлению на границе пузырька и приближённо учесть акустические эффекты с помощью уравнения Келлера, представляющего собой уравнение Рэлея–Плессета с поправкой на малые эффекты сжимаемости:

$$\left(1-\frac{\dot a}{c}\right)a\ddot a+\frac{3}{2}\left(1-\frac{\dot a}{3c}\right)\dot a^2=\left(1+\frac{\dot a}{c}\right)\frac{p_e(t)-p_\infty-p_w(t+a/c)}{\rho}+\frac{a}{c}\frac{d}{dt}\frac{p_e(t)}{\rho} \qquad (1)$$

где $p_e(t)=p(t)-2\sigma/a-4\mu\dot a/a$ – это почти что давление жидкости на границе пузырька, выраженное через давление газа внутри пузырька $p(t)$, p_∞ – давление в невозмущённой жидкости, $p_w(t)$ – давление в акустической волне в центре пузырька, μ – вязкость жидкости, c – скорость звука в жидкости.

Для газа внутри пузырька запишем уравнение состояния идеального газа

$p/\rho_g/T$=Const и уравнение температуропроводности с граничными условиями:

$$\frac{k}{T}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{d}{dt}\ln T-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{d}{dt}\ln p;\ \ \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0}=0,\ \ T(t,a)=T_\infty \tag{2}$$

Здесь k – коэффициент температуропроводности газа, $T(r,t)$ – его температура, а γ – постоянная адиабаты.

РЕШЕНИЕ

Линеаризуем уравнения с помощью подстановки:

$$\begin{aligned}&p_w=p_\infty F e^{i\Omega t},\ \ p_e=p_\infty(1+Pe^{i\Omega t}),\ \ a=a_0(1+Ae^{i\Omega t}),\\&T=T_\infty(1+\theta(r)e^{i\Omega t}),\ \ \rho_g=\rho_{g0}(1+\rho_g'(r)e^{i\Omega t})\end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) и оставляя только линейные члены, получим:

$$\frac{k}{i\Omega}\left(\theta''(r)+\frac{2}{r}\theta'(r)\right)-\theta(r)=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(P-\frac{2\sigma}{a_0p_\infty}A+4i\frac{\mu\Omega}{p_\infty}A\right),\ \ \theta'(0)=0,\ \ \theta(a_0)=0 \tag{4}$$

Решение для безразмерной температуры записывается в виде:

$$\theta=\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(P-\frac{2\sigma}{a_0p_\infty}A+4i\frac{\mu\Omega}{p_\infty}A\right)\cdot\left(1-\frac{\sinh(xZ)}{x\sinh(Z)}\right),\ \ Z=a_0\sqrt{\frac{i\Omega}{k}},\ \ x=\frac{r}{a_0} \tag{5}$$

Подставляем (3) в (1) и осредняем уравнения по объёму пузырька с учётом уравнения состояния газа. Получаем линейную систему уравнений относительно P и A:

$$\begin{aligned}&P-F+\frac{\rho a_0^2\Omega^2}{p_\infty}\left(1+i\frac{a_0\Omega}{c_l}\right)^{-1}A=0\\&\left(P-\frac{2\sigma}{a_0p_\infty}A+4i\frac{\mu\Omega}{p_\infty}A\right)\left[\left(1+\frac{2\sigma}{a_0p_\infty}\right)^{-1}-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-3\frac{Z\coth Z-1}{Z^2}\right)\right]+3A=0\end{aligned} \tag{6}$$

Это итоговая система уравнений, алгоритм дальнейших действий зависит от того, какие колебания рассматриваются. В случае свободных колебаний подставляем F=0 и получаем комплексную частоту Ω из условий вырожденности системы, а из неё – действительную частоту и логарифмический декремент затуханий. Для вынужденных колебаний вычисляется A/F – отклик пузырька на акустическую волну при частоте Ω.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Система (6) позволяет получить аналитические зависимости параметров свободных колебаний в неявном виде (уравнение на Ω) и резонансные кривые для вынужденных колебаний в явном виде (отношение A/F). Для иллюстрации далее предположим, что исследуются колебания воздушного пузырька в воде при давлении 1 атм.

На рис. 1 изображены зависимости логарифмического декремента затухания от размера пузырька для всех исследованных механизмов диссипации. Заметим, что при микронных размерах пузырька преобладает вязкая диссипация, акустическая практически незаметна вплоть до миллиметровых пузырей, а для размеров пузырьков от 4 микрон до 4.5 мм преобладает термический механизм диссипации.

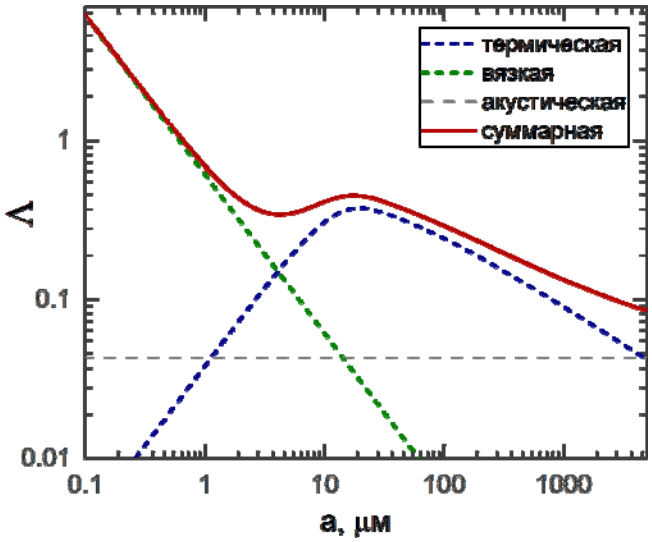


Рис. 1. Сравнение влияния различных механизмов диссипации на логарифмический декремент затухания свободных колебаний.

На рис. 2 изображены кривые отклика пузырька на акустическую волну в зависимости от её частоты. На нижней оси абсцисс отложена частота, а на верхней – соответствующий ей резонансный радиус пузырька. Данные результаты были использованы в [5] для описания условий возможного резонансного дробления пузырька.

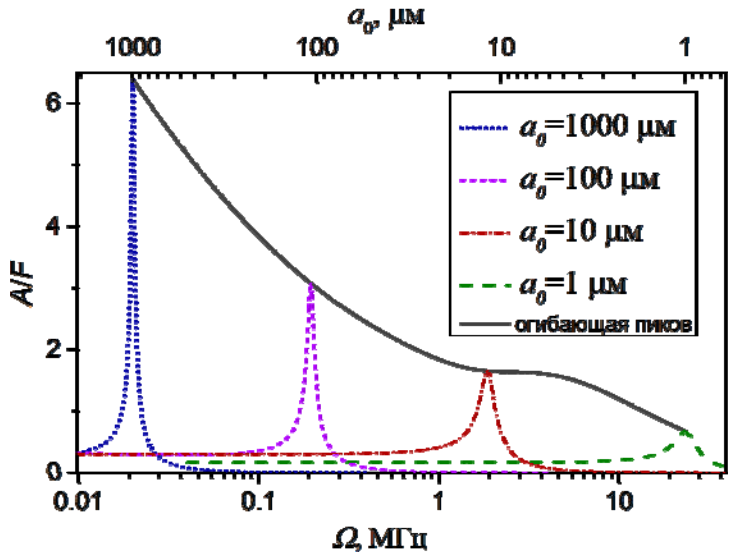


Рис. 2. Отклик пузырька на возбуждающую волну.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-01-00901 и по теме государственного задания (госрегистрация № АААА-А17-117021310382-5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Devin Jr C.* Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water // JASA. 1959. Т. 31. №. 12. С. 1654 – 1667.
2. *Chapman R.B., Plesset M.S.* Thermal effects in the free oscillation of gas bubbles // J. of Basic Engineering. 1971. Т. 93. №. 3. С. 373 – 376.
3. *Prosperetti A.* Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids // JASA. 1977. Т. 61. №. 1. P. 17 – 27.

4. *Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С.* Динамика паровых пузырьков // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 3. С. 59.
5. *Вановский В.В., Петров А.Г.* Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости // Доклады Академии наук. 2012. Т. 444. №. 4. С. 385 – 389.

—— ♦♦♦ ——

ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В ПЛЕНКЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ НА ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Р.Д. Вахитова, Е.И. Могилевский
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: mogilevskiy@mech.math.msu.su

Стекающие жидкие пленки являются основной частью многих устройств, обеспечивающих тепло- и массообмен. Ключевыми параметрами течения, определяющими количественные характеристики обменных процессов являются расход жидкости и площадь свободной поверхности, приходящейся на единицу объема. В классической задаче Капицы [1] о стекающей пленке вязкой жидкости, как и в задаче о стекании пленки неньютоновской жидкости [2], оба этих параметра регулируются толщиной слоя, при этом наблюдается неустойчивость плоскопараллельного течения к длинным волнам. В настоящей работе рассматривается управление течением слоя неньютоновской жидкости с помощью осцилляций удерживающей поверхности. Сдвиговые напряжения, вызванные этими осцилляциями меняют эффективную вязкость, что приводит к изменению средних параметров течения. Рассматривается безволновое течение с плоской свободной границей, изучается его устойчивость к малым длинноволновым возмущениям. Представленные результаты частично опубликованы [3].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть слой неньютоновской жидкости стекает по наклонной плоскости под действием силы тяжести (рис. 1). Твердая поверхность совершает гармонические колебания с частотой ω, двигаясь поступательно. В системе отсчета, связанной с плоскостью на жидкость действует переносная сила инерции.

Рассматриваются плоские течения. Вводится декартова система координат, оси которой направлены вдоль плоскости и перпендикулярно ей в направлении жидкости. Для обезразмеривания в качестве масштаба поперечной координаты используется толщина пленки H, масштаб продольной координаты L будет определен ниже, он зависит от рассматриваемой задачи. Масштабом скорости U является средняя по сечению скорость течения жидкости данного реологического закона с данной толщиной слоя по неподвижной плоскости. Вязкость нормируется на характерное значение μ_c, наблюдаемое для течения данной жидкости с данной толщиной слоя, по неподвижной плоскости.

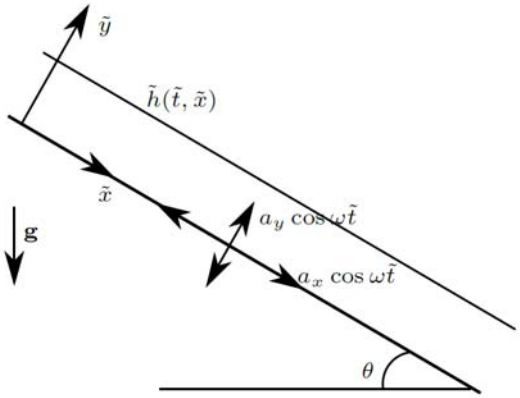


Рис. 1. Схема течения. Тильдами обозначены размерные переменные.

Реология жидкости описывается обобщенно-ньютоновским законом, то есть тензор вязких напряжений пропорционален тензору скоростей деформаций с коэффициентом, зависящим от второго инварианта последнего. При вычислениях используются модель степенной жидкости и модель Карро:

$$\tau_{ij} = 2\mu(I_2)e_{ij},\ I_2 = e_{xx}^2 + 2e_{xy}^2 + e_{yy}^2$$

$$\mu(I_2) = \mu_n (2I_2)^{(n-1)/2} \text{ или } \mu = \mu_0\left(1+\lambda\sqrt{2I_2}\right)^{n-1}$$

Течение описывается уравнениями тонкого слоя: предполагается гидростатическое распределение давления с учетом поверхностного натяжения (коэффициент σ) на свободной поверхности. Общая постановка задачи содержит следующие безразмерные параметры: число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho UH / \mu_c$, число Вебера $\mathrm{We} = \rho U^2 / \sigma$, отношение масштабов длин $\varepsilon = H / L$, а также три параметра колебаний плоскости: отношение амплитуд поперечных и продольных осцилляций $r = a_y / a_x$, безразмерная амплитуда скорости продольных осцилляций $\alpha = \alpha_x \omega / H$ и число Рейнольдса, соответствующее частоте колебаний $\beta = \rho\omega H^2 / \mu_c$.

БЕЗВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ

Безволновым называется плоскопараллельное течение с плоской свободной границей, в котором единственная ненулевая компонента скорости выражается периодической функцией времени, причем ее период совпадает с периодом осцилляций плоскости.

Задача об отыскании характеристик безволнового течения сводится к отысканию периодического решения нелинейного уравнения в частных производных параболического типа с периодической неоднородностью. В случае медленных колебаний ($\alpha \ll 1$), приближенное решение найдено аналитически. Для произвольных параметров колебаний задача решается численно методом установления.

Нелинейная зависимость вязкости от скорости приводит к тому, что продольные осцилляции плоскости изменяют средние параметры течения: при постоянной толщине слоя средний расход увеличивается для псевдопластических жидкостей и уменьшается для дилатантных. Зависимости среднего расхода пленки степенной жидкости от параметров колебаний показаны на рис. 2.

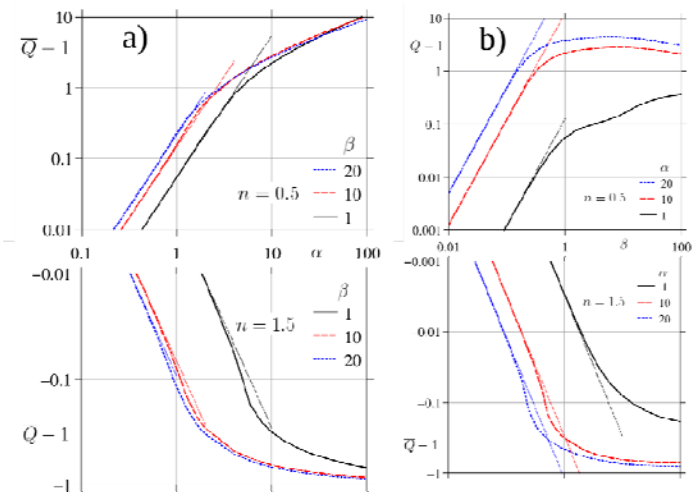


Рис. 2. Зависимость среднего расхода пленки степенной жидкости от амплитуды (колонка a) и частоты (колонка b) осцилляций плоскости. Верхний ряд соответствует псевдопластической жидкости, нижний – дилатантной. Штриховые линии – квадратичная зависимость

Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [4] позволяет сделать вывод, что модель степенной жидкости может применяться для описания течений пленок по осциллирующей плоскости при сравнительно небольших амплитудах колебаний. Для больших значений амплитуд необходимо уточнение реологической модели, например, использование соотношений, включающих производные по времени от тензора скоростей деформаций.

Поперечные осцилляции влияют только на распределение давления.

ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ

Устойчивость безволнового течения рассматривается в длинноволновом приближении методом Капицы–Шкадова, ранее успешно применявшимся к описанию волн на поверхности стекающих пленок произвольной обобщенно-ньютоновской жидкости [2].

Если осцилляции плоскости происходят с достаточно высокой частотой, то имеет место иерархия масштабов времени: характерное время изменения толщины пленки за счет длинноволновых возмущений много больше времени, требуемого для установления безволнового течения, соответствующего заданным параметрам (расход жидкости, толщина пленки), которое, в свою очередь, много больше периода осцилляций. Это дает основания использовать характеристики безволнового течения при выводе уравнений для интегральных соотношений.

Масштаб длин волн и частот волновых возмущений определяется из условия равного вклада вязких, гравитационных и капиллярных сил в формирование течения: $L=\left[\left(\sigma H\right)/\rho g\sin\theta\right]^{1/3}$. Такой выбор позволяет уменьшить число параметров подобия и ввести один параметр подобия δ для интенсивности течения: $m=\rho g H^2\sin\theta/\mu_c U_m=3$ для ньютоновской жидкости.

Неустойчивость сохраняет свой длинноволновой характер: малые возмущения нарастают со временем, если их волновое число меньше определенного значения: $k^2\le k_n^2=s\delta s$. Приведенное волновое число s нейтральных возмущений зависит от реологии и параметров колебаний. При определенной амплитуде колебаний наблюдается полная стабилизация течения по отношению к длинноволновым возмущениям.

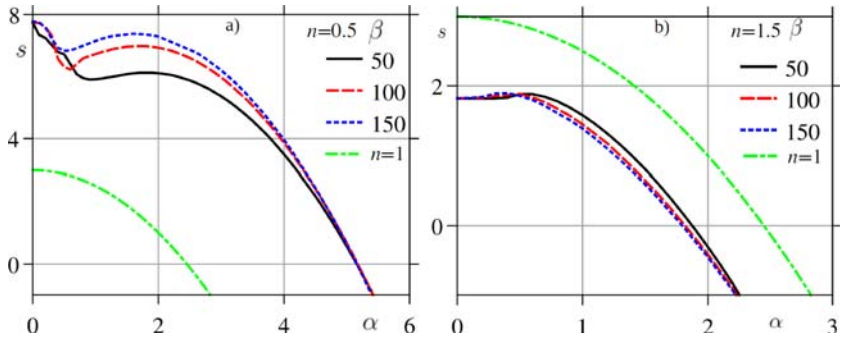


Рис. 3. Зависимость приведенного волнового числа нейтральных возмущений от амплитуды осцилляций плоскости для псевдопластической (а) и дилатантной жидкости. Штрих-пунктирной линией показан результат для ньютоновской жидкости

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена за счет ранта РНФ 18-71-00049.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П.Л., Капица С.П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Часть III. Опытное изучение волнового режима течения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1949. Т.19, N 2. С.105–120.
2. Могилевский Е. И., Шкадов В. Я. Неустойчивость и волны при течении пленки обобщенно-ньютоновской жидкости по вертикальной стенке // Изв. РАН МЖГ. 2010. № 3. С. 43–56.
3. Mogilevskiy E., Vakhitova R. Falling film of power-law fluid on a high-frequency oscillating inclined plane // J. Non-Newt. Fluid Mech. 2019. Vol. 269. P. 28– 36
4. Sobolik V. Film flow of pseudoplastic liquids along an oscillating wall// Rheol. Acta. 1994. V. 33. P. 136–144.

—— ♦♦♦ ——

ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ СОЛЕВОГО KDP РАСТВОРА В ПРОТОЧНО-СМЕСИТЕЛЬНОМ КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ

Н.А. Верезуб, А.И. Простомолотов
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: verezub@ipmnet.ru

В экспериментальных и теоретических исследованиях показано влияние течения раствора на морфологическую ростовую неустойчивость и образование включений. В частности, направление течения потока раствора вблизи границы раствор/кристалл в значительной степени влияет на возникновение морфологической ростовой неустойчивости. Так, если поток направлен против движения ступеней роста, то морфологическая ростовая устойчивость сохраняется. Напротив, течение раствора по направлению движения ступеней приводит к морфологической неустойчивости. В [1] приведены данные по влиянию скорости вращения кристалла на параметры, определяющие морфологическую устойчивость ростовой поверхности и образование включений: перенасыщение раствора вблизи поверхности и «ступенчатый изгиб». Актуально развитие адекватных численных моделей для ис-

следования течения и массопереноса в реальных кристаллизаторах. Такие исследования проведены в [2], где исследовались трехмерные, зависящие от времени течения при росте кристаллов *KDP* и было показано существенное их влияние на рост кристаллов. Расчеты показали, что течение и пересыщение значительно зависят не только от конструкций кристаллизаторов, но и от размеров кристалла, скорости роста и скорости вращения кристалла. Эти исследования были проведены в сопряжении с массообменом на поверхности кристаллизации.

Целью данной работы было выявление особенностей течения и массообмена в растворе вблизи поверхности растущего кристалла, которые могут влиять на локальную (для конкретного места и направления) скорость его роста и образование дефектов. Для исследования выбран математический прототип действующего кристаллизатора.

РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С помощью математического моделирования определяются локальные особенности гидродинамики и массообмена в растворе вблизи поверхности растущего кристалла, которые могут влиять на кристаллографические условия роста кристалла и образование дефектов.

Течение происходит в составной конструкции кристаллизатора, показанной в виде математической модели на Рис. 1. Раствор полностью заполняет контейнер (1), гидродинамические потоки, в котором вызваны втеканием раствора из трубки (2) и его вытеканием через трубку (3), а также действием внутренней вращающейся мешалки (4). На структуру потоков также оказывает влияние форма и расположение модели кристалла (5). Размеры рабочей зоны: $R = 6$ см – радиус, $H = 18.5$ см – высота цилиндрического кристаллизатора. Численное моделирование основано на решении трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса методом контрольных объемов на неструктурированных сетках по программе Gradle®SC/Tetra [3].

Рассмотрим, как влияют различные механизмы движения на структуру течения раствора в кристаллизаторе.

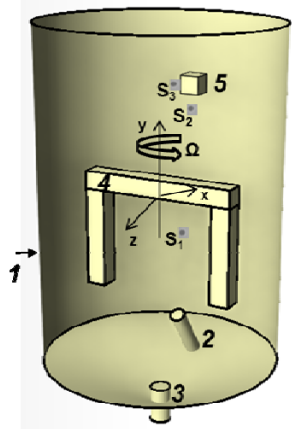


Рис. 1. Математическая модель KDP кристаллизатора.

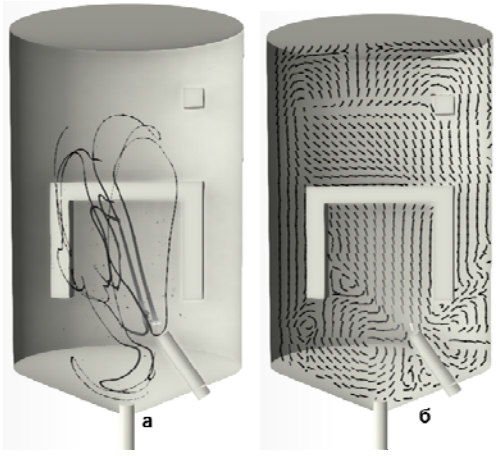


Рис. 2. Траектории течения – а и векторное поле течения – б при работе только насоса.

В случае действия только насоса через трубку (2) закачивается раствор и через трубку (3) он вытекает. Для этого случая на Рис. 2 показаны траектории течения – а и векторное поле течения – б в меридиональном сечении (x,y) при $z = -5.2$ см. Втекание раствора происходит со скоростью $V_{in} = 62.5$ см/с.

Более сложными являются течения при ускоренно-замедленном вращении мешалки: ускорение в одну сторону + 9 рад/с, останов на 2 с, ускорение в другую сторону – 9 рад/с. Для анализа временных изменений течения в область раствора помещены датчики скорости: S_1 с координатами $x = 1$ см и $y = -2$ см, а также S_2 с координатами $x = 2$ см и $y = 4$ см. Из анализа этого варианта следует, что в центральной части контейнера раствор вовлечен в интенсивное вращательное движение, которое в основном способствует его хорошему перемешиванию вблизи вращающейся мешалки. Однако вдали от мешалки существуют только вторичные потоки. Их влияние слабое на массоперенос соли вблизи кристалла. О характере изменений поля скорости можно судить по мгновенным картинам векторного поля скорости на Рис. 3 при ускоренно-замедленном вращении мешалки (+ 9 рад/с, останов на 2 с, – 9 рад/с) в различных сечениях: а – в меридиональном, б – в 3-х поперечных, а также по в – изоповерхности равной концентрации $C/(C_{in} - C_{out}) = 0.5$.

Зарегистрированные колебания модуля скорости приведены на Рис.4 по данным датчика S_1 ($x = 1$ см, $y = -2$ см) и S_2 ($x = 2$ см, $y = 4$ см) при ускоренно–замедленном вращении мешалки: + 9 рад/с, останов на 2 с, – 90 об/мин. Также на Рис. 5 приведены колебания модуля скорости и концентрации соли на датчике S_3 ($x = 2.5$ см, $y = 5$ см) при ускоренно-замедленном вращении мешалки: +9 рад/с, останов на 2 с, –9 рад/с.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Суммируя результаты, можно сказать, что рассмотренный кристаллизатор относится к смесительному типу. За счет ускоренно-замедленного вращения в растворе возникают колебания скорости течения и концентрации *KDP* соли. Наиболее интенсивные изменения структуры течения происходят в области мешалки, сопровождающиеся значительными колебаниями концентрации соли. При удалении от мешалки к кристаллу амплитуда этих колебаний уменьшается. Однако вблизи кристалла происходят периодические изменения вихревой структуры течения раствора. Это способствует лучшему перемешиванию соли, но не является необходимым условием для послойного (не дислокационного) механизма роста KDP кристаллов согласно теории кристаллизации [1].

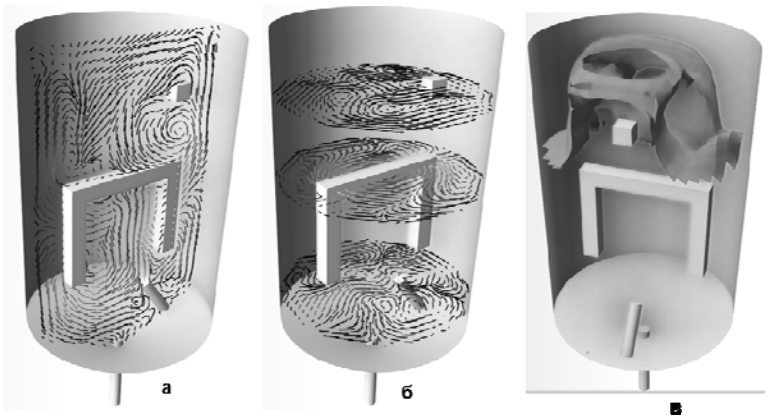


Рис. 3. Мгновенные картины векторного поля скорости при ускоренно-замедленном вращении мешалки в а – меридиональном, б – 3-х поперечных сечениях, в – изоповерхность равной концентрации 0.5.

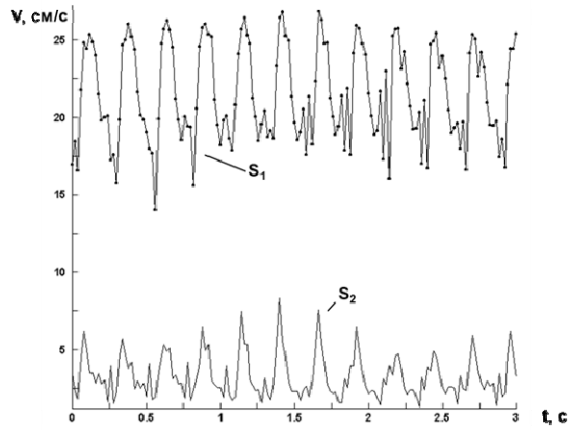


Рис. 4. Колебания модуля скорости на датчике S_1 и S_2 при ускоренно-замедленном вращении мешалки.

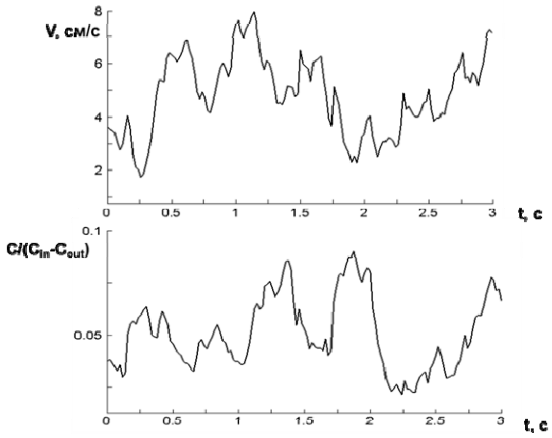


Рис. 5. Колебания модуля скорости и концентрации соли на датчике S_3 при ускоренно-замедленном вращении мешалки.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена в рамках Госзадания: АААА-А17-117021310373-3 при частичной поддержке грантов РФФИ: 18-02-00036, 17-08-00078, 16-29-11785.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Coriell S.R., Murray B.T., Chernov A.A. et al.* The effect of a shear flow on the morphological stability of a vicinal face: Growth from a supersaturated solution // Advances in Space Research. 1998. V. 22, No 8. P. 1553–1558.
2. *Zhou C., Lin M., Hu Z. et al.* Simulation of the flow and mass transfer for *KDP* crystals undergoing 2D translation during growth // J. Crystal Growth. 2016. V. 450. P. 103–118.
3. Программное обеспечение *Gradle®SC/Tetra* на сайте: *www.gradle-cfd.com*.

——— ♦ ♦ ♦ ———

СПЕКТР ЗАТУХАЮЩЕЙ ДВУМЕРНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

И.И. Вигдорович
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: vigdorovich@imec.msu.ru

Исследуется поведение спектра энстрофии затухающей двумерной автомодельной турбулентности при больших волновых числах. Рассматривается затухающее двумерное однородное и изотропное турбулентное течение в автомодельном пределе, который достигается при больших значениях числа Рейнольдса, образованного по времени и кинетической энергии потока, если начальное значение усредненной энстрофии стремится к бесконечности при вязкости, стремящейся к нулю. В этом случае скорость диссипации энстрофии имеет ненулевой конечный предел. Исследуются корреляционная функция поля завихренности и спектральная плотность энстрофии в инерционном интервале расстояний и волновых чисел, где эти функции свободны от влияния вязкости и параметров крупномасштабного течения.

Оказывается, что в затухающей двумерной автомодельной турбулентности инерционный интервал существует в физическом пространстве, но отсутствует в пространстве волновых чисел. Это означает, что турбулентные вихри соответствующего размера не дают вклада в спектральную плотность, а известный закон минус первой степени не выполняется. Спектральная плотность энстрофии при больших волновых числах ведет себя немонотонно – она сначала убывает быстрее, чем по закону минус первой степени [1], а затем, в области диссипации, имеет участок роста и второй максимум [2, 3]. При этом поток энстрофии по спектру на левой границе области диссипации составляет только часть от скорости диссипации энстрофии [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Batchelor G.K.* Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence // Phys. Fluids Suppl. II. 1969. V. 12. P. 233–239.
2. *Vigdorovich I.I.* Enstrophy spectrum in freely decaying two-dimensional self-similar turbulent flow // Phys. Rev. E. 2018. V. 98. 033110.
3. *Вигдорович И.И.* Спектр затухающей двумерной автомодельной турбулентности // Докл. РАН. 2019. Т. 485. № 5. С. 35–39.

—— ♦♦♦ ——

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОМ БАКЕ

Вин Ко Ко[1], А.Н. Темнов[2]
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
e-mail: win.c.latt@gmail.com [1], antt45@mail.ru [2]

В докладе исследованы нелинейные колебания двухслойной жидкости полностью заполняющей ограниченный объём. Приведена постановка задачи о нелинейных колебаниях двухслойной жидкости в баках произвольной формы, и определены гидродинамические коэффициенты дифференциальных уравнений движения. В результате построены области неустойчивости вынужденных колебаний двухслойной жидкости в цилиндрическом баке, а также области параметрического резонанса для различных соотношений плотностей жидкостей.

Постановка задачи. Введем систему координат $Oxyz$, в которой поле массовых сил, действующих на твердое тело с двумя жидкостями, имеет потенциальную функцию

$$U = -\vec{g} \cdot \vec{r},$$

где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения; $\vec{r}$ – радиус-вектор проведенный из точки O, связанной с телом рис. 1. Жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 предполагаются идеальными и несжимаемыми. Обозначим через h_1 и h_2 – глубины каждого слоя жидкости. Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы в невозмущенном положении механической системы тело-жидкости ось Ox была перпендикулярна невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0.

Смоченные поверхности полости обозначим через $S^{(i)}(i=1,2)$, а возмущенную поверхность раздела жидкостей через Γ (см. рис. 1).

Уравнение возмущенной поверхности раздела можно представить в виде, разрешенном относительно координат x

$$\zeta = x - f(y,z,t) = 0 \ . \qquad (1)$$

Относительно величины немалой деформации поверхности раздела жидкости (1) предположим, что квадрат отклонения возмущенной поверхности от невозмущенной f^2 имеет порядок малости ε. Будем при вычислениях удерживать линейные, квадратичные и кубичные члены f, f^2, f^3, т.е. будем пренебрегать величиной ε^2.

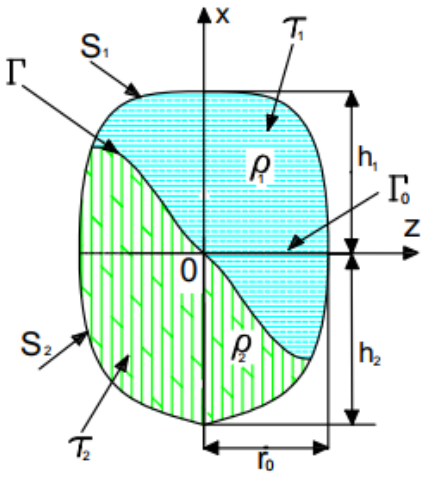


Рис. 1. Система координат и основные обозначения для тела с двухслойной жидкостью

Исследование нелинейных колебаний двух жидкостей может быть описано уравнениями Лапласа для потенциалов скоростей частиц жидкостей

$$\nabla^2\Phi^{(1)} = 0 \text{, в } \tau_1 \text{, } \nabla^2\Phi^{(2)} = 0 \text{, в } \tau_2 \text{,} \qquad (2)$$

а) условиям непротекания на смачиваемых поверхностях

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{d\nu} = 0 \text{, в } S_1 \text{, } \frac{d\Phi^{(2)}}{d\nu} = 0 \text{, в } S_2 \text{,} \qquad (3)$$

(б) кинематическим условиям

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{d\nu} = \frac{d\Phi^{(2)}}{d\nu} \text{ на } \Gamma \text{,} \qquad (4)$$

(в) и динамическим условиям на поверхности раздела

$$\left(\rho_2 \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left[\rho_2(\nabla\Phi^{(2)})^2 - \rho_1(\nabla\Phi^{(1)})^2\right] = (\rho_1 - \rho_2)gx \text{ на } \Gamma \text{.} \qquad (5)$$

Представим потенциалы скоростей каждой жидкости в виде следующей сумме:

$$\Phi^{(k)}(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{\bullet}(t) B_i^{(k)}(x,y,z) \text{, } (k=1,2) \qquad (6)$$

где $\Phi^{(k)}$ – потенциалы скоростей верхней и нижней жидкостей, $B_i^{(k)}$ – функции координат верхней и нижней жидкостей, α_i – обобщенные координаты волновых движений жидкостей на поверхностях раздела *i*-ой гармоники. Здесь и в дальнейшем суммирование по i производится по натуральному ряду чисел от единицы до бесконечности. Верхние индексы параметров (1) и (2) относятся соответственно к верхней и нижней жидкостям. Представим функции $B_i^{(k)}$ в виде разложения по параметрам α_i до второго порядка включительно

$$B_i^{(k)} = B_{i0}^{(k)} + \sum_j \alpha_j B_{ij}^{(k)} + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k B_{ijk}^{(k)} + \ldots; \qquad (7)$$

где функции $B_{i0}^{(k)}, B_{ij}^{(k)}, B_{ijk}^{(k)}$ зависят только от пространственных координат и не зависят от времени [1].

Подставим потенциалы скоростей каждой жидкости в выражения динамических условий (5), преобразуем гидродинамические соотношения, в результате получим уравнения движения поверхности раздела жидкостей в виде

$$\ddot{\alpha}+\sigma^2\alpha+d_1(\alpha^2\ddot{\alpha}+\dot{\alpha}^2\alpha+\alpha\beta\ddot{\beta}+\alpha\dot{\beta}^2)+d_2(\beta^2\ddot{\alpha}+2\beta\dot{\alpha}\dot{\beta}-\alpha\beta\ddot{\alpha}-2\alpha\dot{\beta}^2)=0; \quad (8)$$

$$\ddot{\beta}+\sigma^2\beta+d_1(\beta^2\ddot{\beta}+\dot{\alpha}^2\beta+\alpha\beta\ddot{\alpha}+\beta\dot{\beta}^2)+d_2(\beta^2\ddot{\beta}+2\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta}-\alpha\beta\ddot{\alpha}-2\beta\dot{\alpha}^2)=0; \quad (9)$$

где $\sigma^2=\dfrac{g(N_{11}^{(2)2}-N_{11}^{(1)2})}{\mu_0^*}$, $d_1=\dfrac{(\mu_1^{(2)}-\mu_1^{(1)})}{\mu_0^*}$, $d_2=\dfrac{(\mu_2^{(2)}-\mu_2^{(1)})}{\mu_0^*}$, $\mu_0^*=(\mu_0^{(2)}-\mu_0^{(1)})$.

Исследование устойчивости вынужденных колебаний жидкостей. Начнем рассмотрение задачи о вынужденных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде с простейшего случая, когда в уравнениях движения обобщенные координаты $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ присутствуют только по отдельности. Теоретический анализ указанных процессов проводится в данной работе для цилиндрических полостей на основе нелинейных дифференциальных уравнений (8)–(9) в предположении, что полость совершается заданные движения в направлении оси *Oz* по закону

$$U(t)=S\cos\omega t, \quad (10)$$

где $U(t)$ – скорость заданного движения сосуда. S и ω – амплитуда и частота возмущения. В том случае, когда параметрические колебания в системе не возникают $(\beta\equiv 0)$, вынужденные колебания описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$L_1(\alpha)=\ddot{\alpha}+\sigma^2\alpha+d_1(\alpha^2\ddot{\alpha}+\dot{\alpha}^2\alpha)=\omega^2P\cos\omega t; \quad (11)$$

где $P=\dfrac{S\lambda}{\mu_0^*}$, $\lambda=\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(1)}=\rho_1\pi\int_0^{r_0}r^2Y_{11}dr=\dfrac{\rho_1\pi r_0^3}{\xi_{11}^2}$, $\lambda^{(2)}=\rho_2\pi\int_0^{r_0}r^2Y_{11}dr=\dfrac{\rho_2\pi r_0^3}{\xi_{11}^2}$,

r_0 – характерный размер.

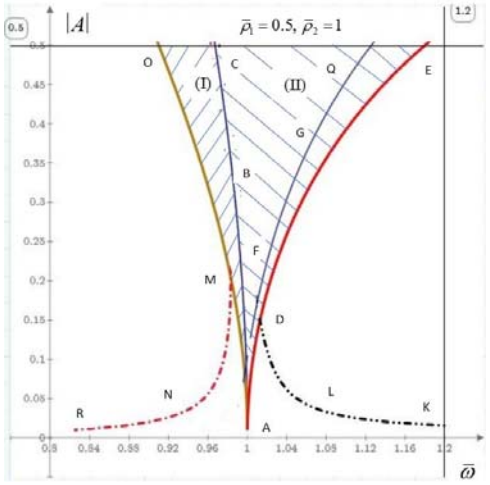


Рис.2. Амплитудно-частотные характеристики и области устойчивости вынужденных колебаний жидкостей в цилиндрическом баке при возбуждении основных гармоник α *при* $\bar{S}=0.005, \bar{h}_1=\bar{h}_2=2$.

Приближенное решение этого уравнения найдем методом Бубнова–Галеркина [2]. Соответствующие решению задачи резонансная кривая представлена на рис. 2. линией ABC. На рис. 2. области I и II являются областями неустойчивости вынужденных колебаний жидкости, происходящих в плоскости действия возмущающей силы. В области II эта неустойчивость обусловлена неустойчивостью тривиального решения $\beta(t) \equiv 0$, т.е. возможно параметрическое возбуждение обобщенной координаты β. Линия FGQ соответствует вращательному движению поверхности раздела жидкостей наблюдаемому в эксперименте[3].

Заключение. В данном докладе исследованы нелинейные эффекты, возникающие в результате взаимодействия жидкостей с жестким сосудом, совершающим гармонические колебания. Наиболее интересным с практической стороны является случай колебаний жидкостей в окрестности самой низкой частоты собственных колебаний поверхности раздела. Здесь наблюдается ряд характерных существенно нелинейных особенностей движения жидкостей, среди которых можно указать на зависимость частоты колебаний от амплитуды, ограниченность амплитуд колебаний в резонансном режиме, подвижность узловых линий поверхности раздела, возникновение своеобразного вращения поверхности раздела в некотором диапазоне частот возмущающей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость; Отв. Ред. В.А. Троценко; АН УССР. Ин-т математики. – Киев: Наук. Думка, 1990.-296 с. – ISBN 5-12-001308-2.
2. *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного сппарата с жидкостью. М., «Машиностроение», 1977, 208 с.
3. *Win Ko Ko, Temnov A. N.* Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, volume **468** (2018) 012031.

—— ♦ ♦ ♦ ——

СТАЦИОНАРНОЕ КОНВЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КВАДРАТИЧНОГО НАГРЕВА ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА ПО ЗАКОНУ НЬЮТОНА–РИХМАНА НА НЕЙ

С.С. Власова
АО «Казанское ОКБ «СОЮЗ»
e-mail: sveta040790@yandex.ru

Рассмотрено стационарное свободно-конвективное движение вязкой несжимаемой жидкости в двумерной постановке в геометрически анизотропной полосе, индуцированное нагревом верхней недеформированной свободной границы и теплопередачей по закону Ньютона–Рихмана на ней (в работе рассматривается четыре вида нагрева). Точное решение четырех рассмотренных краевых задач вычислено в рамках класса точных решений с линейным распределением скоростей по одной из координат (горизонтальной) и с зависимостью коэффициентов от вертикальной координаты. Выявлены закономерности в распределении гидродинамических полей между нагревами, получены оценки безразмерных чисел подобия для четырех видов нагрева, соответствующие противотечениям и застойным (критическим) зонам. Поля распределения температуры и давления зависят от вида нагрева.

Одним из важнейших вопросов современной механики сплошной среды является исследование конвективных движений жидкости, как в природе, так и в технических системах. Уходя в глубь истории, одним из первых исследователей, который подошел научно к вопросу изучения конвекции в природе, можно назвать М.В. Ломоносова. В своем труде, в 1753 году, он привел собственные многолетние наблюдения над явлением тепловой конвекции [1]. Сам же термин «конвекция» был введен в 1834 году англичанином Вильямом Прутом и использовался для описания перемещения тепла в нагретых движущихся жидкостях. В 1888 году Джеймс Томсон экспериментально обнаружил возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости. Особый интерес к исследованию конвективных движений в горизонтальном слое жидкости возник с экспериментальных работ Бенара (1900 – 1901 гг), им было обнаружено, что в равномерно подогреваемом снизу слое жидкости возникает и развивается система конвективных ячеек. Дальнейшее исследование задачи возникновения конвекции в горизонтальном слое для свободных границ при постоянных температурах на этих границах началось с работ Рэлея в 1916 г. [2].

Различают два вида конвекции: естественную (свободную) и вынужденну.

Серьезно к изучению свободной конвекции подошел в своей монографии Остроумов [1], он описал движение жидкости при гравитационной тепловой конвекции в вертикальном канале круглого сечения. Позже Бирихом [3] было найдено точное решение уравнений свободной конвекции при наличии зависимости поверхностного натяжения от температуры.

Явление свободной конвекции для диссипативной несжимаемой жидкости в поле тяготения можно исследовать в рамках модели Обербека–Буссинеска [4, 5]. В данной работе исследуется течение несжимаемой вязкой жидкости в бесконечной полосе, где горизонтальный размер преобладает над вертикальным, в условиях нормальной гравитации. При исследовании будет использовано точное решение Остроумова–Бириха [1, 3] при условиях, когда снизу жидкость ограничена твердой плоскостью, а верхняя граница жидкости свободная, недеформированная и выполняется условие теплообмена по закону Ньютона–Рихмана.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается стационарное течение вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в бесконечном слое глубины h, вызываемое неоднородным нагревом верхней свободной границы с теплопередачей по закону Ньютона–Рихмана на ней в двумерной постановке. Движение жидкости описывается в рамках модели конвекции Обербека–Буссинеска [4, 5]:

$$V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}=\chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),\ V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)$$

$$V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)+g\beta T,\ \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

с граничными условиями в общем размерном виде для четырех видов нагрева:

$$z=-1:\quad V_x=V_z=0;\quad z=0:\quad V_z=0,\quad P=1,\quad T=\frac{\Theta}{2}\left(\pm 1\mp\left(\frac{x}{L}\right)^2\right), \qquad (2)$$

$$-\chi\frac{\partial T}{\partial z}=\alpha T.$$

Решение будем искать в виде полиномов вида:

$$V_x = xu(z),\ V_z = w(z),\ T = T_0(z) + T_{11}(z)\frac{x^2}{2},\ P = P_0(z) + P_{11}(z)\frac{x^2}{2}. \quad (3)$$

Вид полиномов (3) принадлежит к классу, когда скорости линейно зависят по одной из координат. Данный класс точных решений с подобным распределением скоростей впервые предложил Ц.Ц. Линь (C. C. Lin) в своей статье [6] для задач магнитной гидродинамики.

Подставляя класс точных решений (3) в исходную систему (1) и граничные условия (2), получим нелинейную систему, которую в дальнейшем приведем к безразмерному виду с использованием таких безразмерных комплексов подобия, как критерий подобия Грасгофа, Прандтля и Био. Приведение системы к безразмерному виду осуществим нетипичным способом, а с учетом геометрической анизотропии рассматриваемого слоя жидкости, по двум характерным масштабам: поперечному характерному размеру h и продольному характерному размеру l, что является отличием от классических работ. В таком случае существенно расширяется диапазон чисел Грасгофа при дальнейшей линеаризации рассматриваемой безразмерной нелинейной системы. Линеаризация становится возможной при числе Грасгофа обратно пропорциональному квадрату геометрической анизотропии, что позволяет проводить исследование при классических числах Грасгофа порядка несколько сотен, а то и тысяч. Данная оценка для тонких слоев жидкости справедлива как для ламинарных, так и для турбулентных режимов.

Проинтегрировав полученную линейную безразмерную систему, получим общее решение с произвольными постоянными, которые в дальнейшим найдем для четырех краевых задач (2) в рамках класса точных решений (3).

Общее решение принимает следующий вид:

$$T_{11} = C_1 z + C_2, \quad P_{11} = C_1\frac{z^2}{2!} + C_2 z + C_3, \quad u = C_1\frac{z^4}{4!} + C_2\frac{z^3}{3!} + C_3\frac{z^2}{2} + C_4 z + C_5,$$
$$w = -C_1\frac{z^5}{5!} - C_2\frac{z^4}{4!} - C_3\frac{z^3}{3!} - C_4\frac{z^2}{2!} - C_5 z + C_6, \quad T_0 = -C_1\delta^2\frac{z^3}{3!} - C_2\delta^2\frac{z^2}{2!} + C_7 z + C_8, \quad (4)$$
$$P_0 = -2C_1\delta^2\frac{z^4}{4!} - 2C_2\delta^2\frac{z^3}{3!} + \left(C_7 - \delta^2 C_3\right)\frac{z^2}{2} + \left(C_8 - \delta^2 C_4\right)z + C_9.$$

.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

В силу рассмотренных четырех краевых задач получим, что постоянные интегрирования общего решения (4): C_1, C_2, C_4, C_5 совпадают между собой для I и III вида нагрева, II и IV соответственно, отличие между нагревами только в знаках постоянных интегрирования. Таким образом, для полного анализа поля скоростей достаточно проанализировать I и II вид нагрева. В ходе анализа методом локализации корней многочленов выявлено, что для всех четырех рассмотренных способов нагрева противотечения возникают при значениях безразмерных чисел $\mathrm{Bi} \in \left(-10/3; -5/2\right)$, что соответствует условию существования одного корня для вертикальной составляющей скорости внутри рассматриваемого слоя, при значениях безразмерных чисел $\mathrm{Bi} \in \left(-\infty; -10/3\right] \cup \left[-5/2; +\infty\right)$ противотечения внутри рассматриваемого слоя отсутствуют. Отличие между нагревами для поля скоростей в том, что приток и отток жидкости от свободной границы происходит при разных интервалах чисел Био. Для I способа нагрева при $\mathrm{Bi} \in \left(-\infty; -10/3\right]$ жидкость будет оттекать от свободной поверхности, при $\mathrm{Bi} \in \left(-10/3; +\infty\right)$ подтекать к свободной поверхности, для II вида нагрева ситуация про-

тивоположна. Таким образом, для компонент скорости получено, что существование более одной застойной точки внутри рассматриваемого слоя жидкости невозможно. При исследовании компонент завихренности обнаружено, что исследуемое течение является вихревым. Для всех четырех способов нагрева при $\mathrm{Bi} \in (-\infty; -15/4] \cup [-5/2; +\infty)$ наблюдаются четыре незамкнутых вихря, при $\mathrm{Bi} \in (-15/4; -5/2)$ наблюдаются шесть незамкнутых вихрей. Вращение жидкости происходит в противоположные стороны.

При исследовании поля давления для четырех способов нагрева был использован критерий замкнутости изолиний давления, полученный в работе [7] для подобной задачи, но исследуемой при нагреве нижней границы. Данный критерий позволил получить значения безразмерного числа Био, при которых возникают замкнутые линии уровня давления для каждого вида нагрева.

При анализе слагаемых разложения температуры получены оценки, при которых возникает расслоение температурного поля на области разных знаков для каждого вида нагрева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остроумов Г.А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: ГИТТЛ, 1952. 256 с.
2. *Гетлинг А.В.* Формирование пространственных структур конвекции Рэлея–Бенара // Успехи физ. Наук. 1991. Т. 161, №9. С. 1–80.
3. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1966. Том 7. №3. С. 69–72.
4. *Boussinesq J.* Theorie Analytique de la Chaleur, Paris, Gauther –Villars, Vol.2. 1903. 665 p.
5. *Oberbeck A*. Ueber die Warmleitung der Flissigkeiten bei Beriicksichtigung der Stromungen infolge von Temperaturdifferenzen / A. Oberbeck // Ann. Phys. Chem. 1879. V. 7. P. 271–292.
6. *Lin C.C.* Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. Vol. 1. P. 391–395.
7. *Власова С.С., Просвиряков Е.Ю.* Конвективное движение охлаждаемой снизу жидкости по параболическому закону при учете теплообмена на свободной границе // Известия высш. учебн. завед. Авиац. техн. 2016. №4. С. 82–87.

—— ♦ ♦ ♦ ——

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАСХОДА ПИТАТЕЛЬНОЙ ВОДЫ НА ПРОЦЕСС ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОНДЕНСАЦИОННЫХ ГИДРОУДАРОВ

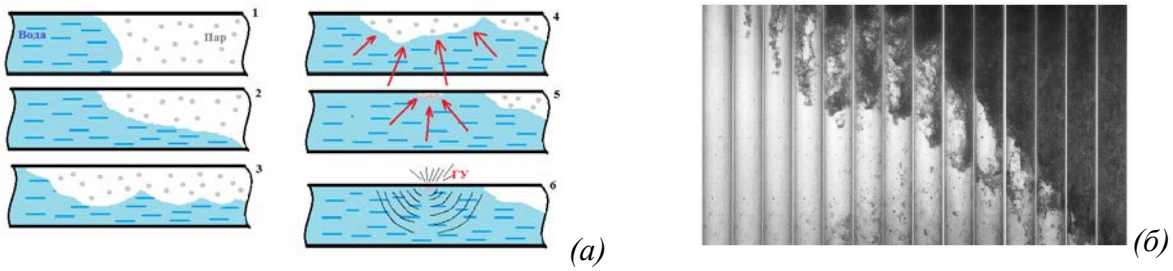
Г.Ю. Волков, О.И. Мелихов, В.И. Мелихов,
С.М. Никонов, А.А. Неровнов, О.Н. Трубкин
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Опыт эксплуатации водо-водяных реакторов указывает на то, что в элементах АЭС могут происходить гидроудары, оказывающие дополнительные воздействия на оборудование. Гидроудары могут возникать, в частности, в системе аварийного газоудаления, в коллекторах и трубном пучке парогенераторов, в трубопроводах питательной воды парогенераторов АЭС с ВВЭР, в деаэрационно-питательной установке АЭС с ВВЭР при пуско-наладочных работах, а также при срабатывании БРУ-А.[1].

Экспериментальные исследования гидроударов (ГУ) проводились в различных научных организациях по всему миру. Созданные экспериментальные установки по-

зволили проводить исследования ГУ в каналах различной геометрии и в широком спектре теплофизических параметров. В то время как классический ГУ, теория которого была разработана ещё в конце XIX в. Н. Е. Жуковским, на данный момент изучен детально, явление конденсационного ГУ и возможность его моделирования по-прежнему оставляют многочисленные вопросы.

Суть конденсационного гидроудара (КГУ) заключается в резкой конденсации парового объема, окруженного недогретой водой. Наиболее вероятны два механизма возникновения условий, при которых возможно явление КГУ. Первый механизм имеет место, когда в горизонтальный трубопровод, соединенный с сосудом, заполненным паром, подается холодная вода (Рис.1(а)). В случае горизонтально-стратифицированного потока при встречном движении воды и пара на межфазной поверхности образуются волны, которые могут привести к появлению замкнутых паровых объёмов, которые вследствие резкой конденсации схлопываются. Схлопывание пузырей приводит к образованию ударной волны. Второй механизм возникновения КГУ наблюдается в случае подачи холодной воды вертикального трубопровода заполненного паром (Рис.1(б)). При определенном расходе воды возможно появление переходного режима с образованием больших паровых пузырей, окруженных холодной водой, быстрая конденсация которых может привести к КГУ.



(а) *(б)*

Рис. 1. (а) – Механизм конденсационного гидроудара в горизонтальной трубе: 1,2 – недогретая до температуры насыщения вода подается в трубопровод заполненный паром; 3 – образование волн на поверхности воды; 4 – появление изолированных паровых объемов; 5 – схлопывание парового объема с сопутствующим гидроударом 6. (б) – Динамика контакта жидкость–пар в вертикальной трубе

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Рабочий участок экспериментальной установки (см. Рис 2.) представляет собой горизонтально расположенную металлическую трубу внутренним диаметром 64 мм, наружным диаметром 76 мм и длиной 3 м. С одного конца труба подключена к патрубку подачи холодной воды с другого к вертикально расположенному баку. Горизонтальная труба оборудована датчиками давления P1 и P2, термопарами T1 и T2. К верхней части бака подключена линия подвода пара. На линии подвода пара находятся датчики давления P0, Ркд и термопары T0 и Ткд. К нижней части сепарационного сосуда подключена линия отвода конденсата. Эта линия используется для опорожнения рабочего участка перед началом каждого режима. Вертикальный бак оборудован уровнемером (Lбак). На верхней образующей горизонтальной трубы находится патрубок отвода пара. Этот патрубок необходим для сброса части пара при прогреве рабочего участка. Клапан, установленный на этой линии отвода пара, перекрывается по окончанию вывода экспериментальной установки на стационарное состояние.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

После вывода экспериментальной установки в стационарное состояние, начиналась подача холодной воды в запаренный горизонтальный участок. В экспериментах

изучалось влияние давления пара в рабочем участке, мощности парогенератора, температуры воды и расхода воды на процесс возникновения гидроударов. Всего было выполнено 36 экспериментальных режима. В каждом режиме наблюдались КГУ. Они начинались после достижения фронтом затекания вертикального бака и заканчивались при полном заполнении рабочего участка. Процесс возникновения КГУ на примере одного из режимов подробно описан в [1].

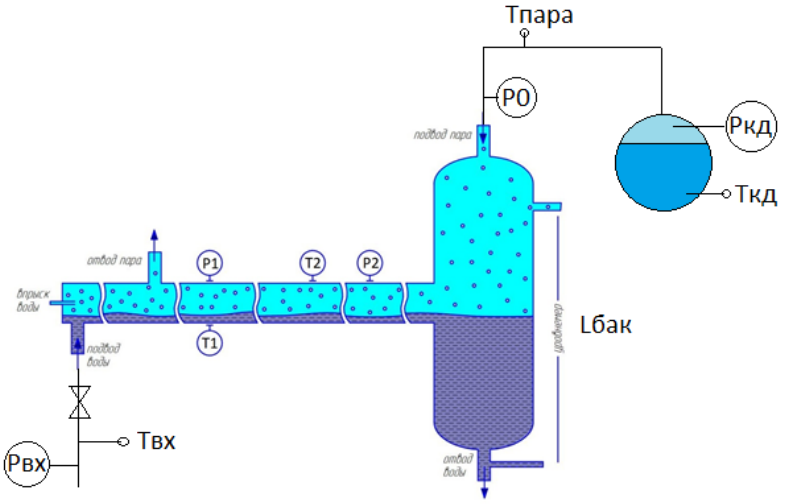


Рис. 2. Принципиальная схема рабочего участка: 1 – Сосуд для подвода пара и отвода конденсата; А – штуцер подвода пара; Б, В – штуцера подвода воды; Г – штуцер отвода пара; Д – штуцер отвода конденсата; Т1, Т2 – термопары измерения температуры воды и пара; Р1, Р2 – датчики измерения давления с частотой записи 1 кГц; У – штуцера уровнемера; Рвх – давление подаваемой холодной воды; Р0 – давление поступающего в СС пара; Квх – клапан пуска холодной воды

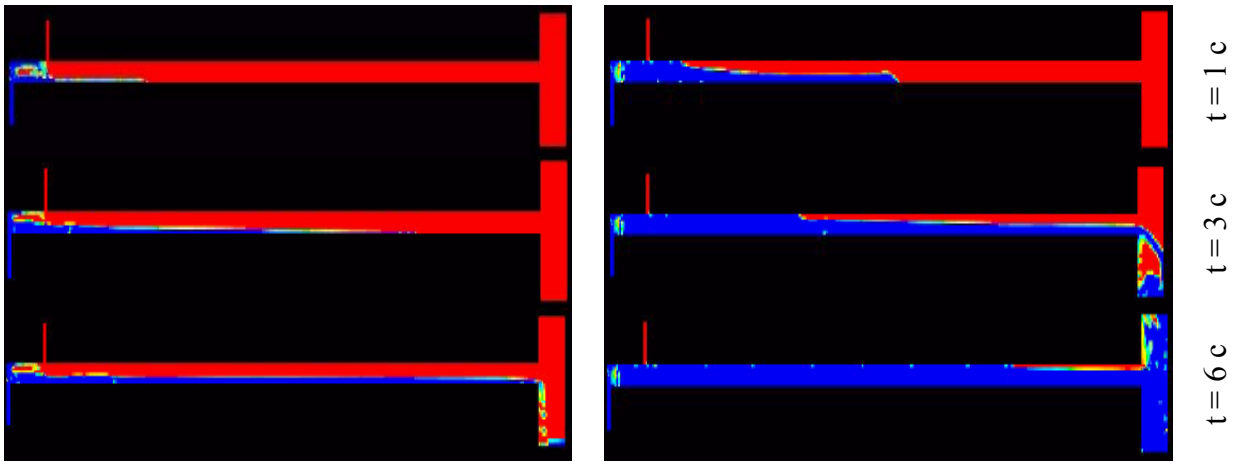
АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАСХОДА ВОДЫ

На первом этапе анализа были проведены расчеты с использованием пакета FLUENT. Исследовался процесс затекания воды в рабочий участок и процесс заполнения вертикального бака. Определялись характерные времена заполнения нижней и верхней частей бака и горизонтального участка. Исследовалось влияние наличия патрубка отвода пара на процесс затекания. Расчеты проводились без учета конденсации. Результаты расчета для расходов 1 и 5 т/ч для трех моментов времени приведены на Рис. 3.

В Таблице 1 приведены результаты обработки показаний датчика давления Р2 для ряда экспериментальных режимов. В таблице приводится количество КГУ в каждом режиме, временной интервал между КГУ $\Delta\tau$, максимальное повышение давления при КГУ относительно начального давления пара в рабочем участке ΔP_{max} и среднее для каждого режима повышение давления при КГУ относительно начального давления ΔP_{med}. Анализ полученных результатов показывает, что в целом (ряд режимов с расходом 5 т/ч не следует рассматривать в силу того, что в них происходит не более двух КГУ) частота КГУ растет с увеличением расхода. Значение максимального и среднего повышения давления от расхода не зависит.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ результатов эксперимента показал, что изменение расхода питательной воды оказывает влияние только на частоту появления КГУ и не влияет на их амплитуду.



G = 1 т/ч *G = 5 т/ч*

Рис. 3. Процесс заполнения рабочего участка (расчет с использованием FLUENT 6.3)

Таблица 1 – параметры КГУ в зависимости от расхода подаваемой воды

№реж	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
G, т/ч	Количество КГУ					ΔP_{max}, бар				
1	6	4	–	3	6	6.556	7.235	–	3.418	10.7
3	4	2	3	2	3	8.417	2.764	12.05	8.326	4.363
5	2	2	2	2	1	6.504	1.902	7.175	1.931	11.65
G, т/ч	Δτ					ΔP_{med}, бар				
1	3.81	4.10	–	4.21	3.74	4.096	4.149		2.435	6.225
3	3.31	3.71	3.52	3.94	3.64	4.058	2.691	5.364	5.548	2.799
5	3.33	4.66	3.43	4.27	–	3.600	1.757	5.357	1.340	11.65
№реж	6	7	8	9(11)	10	6	7	8	9	10
G, т/ч	Количество КГУ					ΔP_{max}, бар				
1	4	6	5	–	3	6.239	2.103	2.636	–	2.289
3	3	3	2	3	3	8.918	1.968	3.378	1.653	1.237
5	2	3	2	3	2	3.036	1.562	1.958	0.866	1.765
G, т/ч	Δτ					ΔP_{med}, бар				
1	4.10	3.68	3.67	–	3.61	3.784	1.579	1.450	–	2.257
3	3.68	3.35	3.86	3.53	3.94	5.703	1.091	2.464	1.327	0.892
5	3.975	3.26	4.01	3.33	4.17	3.004	0.970	1.223	0.629	1.167

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00647).

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Г.Ю., Елкин И.В., Мелихов О.И., Мелихов В.И., Неровнов А.А., Никонов С.М. Анализ эксперимента по конденсационному гидроудару на стенде КГУ. Сборник докладов научной конференции «XX Школа молодых ученых ИБРАЭ РАН 12–13 сентября 2019»

—— ♦ ♦ ♦ ——

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ СТРУЙНО-ПЕРФОРИРОВАННЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ВЛИЯНИЯ СТЕНОК РАБОЧЕЙ ЧАСТИ В ТРАНСЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

А.О. Волкова [1], А.И. Иванов [2], Е.В. Стрельцов [3]
Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского
e-mail: ivanov_a_i@list.ru [1], evg.streltsov@gmail.com [2], a.volkova.mipt@gmail.com [3]

Проведение экспериментов в аэродинамической трубе является одним из основных этапов при проектировании или модернизации летательного аппарата. По этой причине развитие и совершенствование экспериментальной базы является необходимым. В связи с этим, возникает вопрос решения ряда фундаментальных проблем для повышения точности экспериментальных исследований, одной из которых является реализация безындукционного обтекания модели. Существующие методы решения проблемы индукции границ, такие как проницаемые стенки [1,2] или «адаптивные» границы [3,4] в связи с определенными недостатками не позволяют поставить точку в решении данного вопроса. В рамках данной работы исследуется перспективное граничное условие, представляющее собой комбинацию перфорированных стенок и управляемого пограничного слоя [5,6]. Исследование проводилось на базе действующего демонстратора с новым граничным условием на основе аэродинамической установки Т-112 ЦАГИ.

Эффективность использования комбинированных струйно-перфорированных границ была исследована в ходе эксперимента с тестовой моделью ракетной компоновки при числе Маха M = 0.75. В ходе эксперимента были получены основные аэродинамические характеристики модели при разных граничных условиях: сплошные стенки со спойлерами высотой 32 мм, перфорированные панели с коэффициентом проницаемости $f = 2\%$ со спойлерами 32 мм, а также штатные перфорированные панели $f = 23\%$ со спойлерами высотой 10 мм, 20 мм и 32 мм. Угол атаки модели α варьировался в широком диапазоне от –4° до 24°.

Моделирование обтекания модели безграничным потоком с помощью численных методов позволяет получить аэродинамические характеристики модели, которые должны быть также получены при корректном подборе граничных условий в рабочей части аэродинамической трубы. В случае их полного совпадения можно говорить о решении проблемы индукции границ. В рамках данной работы выполнен численный расчет обтекания модели безграничным потоком при M = 0.75 в диапазоне углов атаки α от 0° до 25°. При решении уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS), использовалась модель турбулентности SST. Кроме этого, было проведено численное исследование в различных границах, что позволяет существенно сократить необходимый объем экспериментальных исследований.

На рис. 1 представлены зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки модели при обтекании безграничным потоком и в комбинированных границах с разными параметрами проницаемости. При оптимальной комбинации параметров расхождение величин C_{ya} при α = 4° составило порядка 0.002, а при увеличении угла атаки до 12° – менее 0.004. Анализ поведения других весовых характеристик модели, в том числе коэффициента момента тангажа (рис. 2), также подтвердил существенное уменьшения индукции стенок при использовании комбинированных границ потока.

В результате сравнения полученных данных эксперимента в АДТ и численного исследования, можно заключить, что новый вид границ, представляющий собой комбинацию перфорированных стенок и управляемого пограничного слоя, позволяет эф-

фективно устранить влияние стенок рабочей части АДТ на аэродинамические характеристики модели.

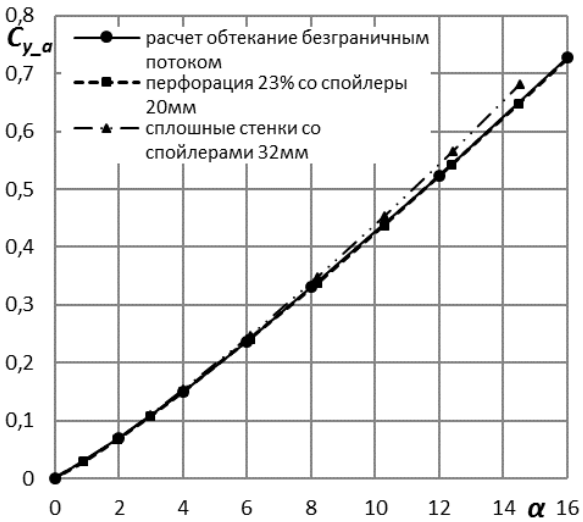


Рис.1 Коэффициент подъемной силы для модели ракетной компоновки при M = *0.75*

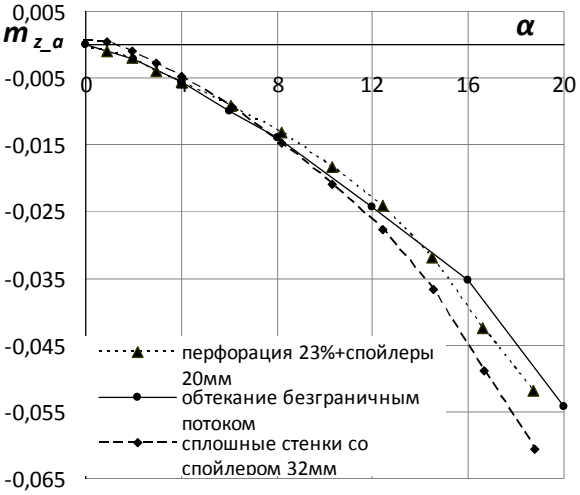


Рис.2 Коэффициент момента тангажа для модели ракетной компоновки

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-00735.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин В.Г., Горский И.П., Ковалев А.П., Христианович С.А. Физические основы околозвуковой аэродинамики // Ученые записки ЦАГИ. – 1974. V. 5, N
2. Иванов А.И. Экспериментальное исследование течения газа вблизи перфорированных стенок трансзвуковой аэродинамической трубы // Ученые записки ЦАГИ. 1987. V. 18, N 3.
3. *Сычев В.В., Фонарев А.С.* Безындукционные аэродинамические трубы для трансзвуковых исследований // Ученые записки ЦАГИ. 1975. V. 1, N 5.
4. Sears W. R. Self-correcting wind tunnels // Aeronautical J.. 1974. V. 78, N 758–759.
5. Sergey L. Chernyshev, Alexander I. Ivanov, EvgenyV.Streltsov, Anastasia O. Volkova, “Numerical and Experimental Research of New Methods for Wall Interference Reduction in Wind Tunnels of Transonic and Low Supersonic Velocities”, 6th European Conference on Computational Mechanics (Eccm 6), 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics (Ecfd 7), 2018.
6. Sergey L. Chernyshev, Alexander I. Ivanov, EvgenyV.Streltsov, Anastasiia O. Volkova, “Application of the combined boundaries to reduce wall interference for NACA 0012 airfoil tests” 31st Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS 2018), 2018.

—— ♦♦♦ ——

ПАДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА СРЕДУ, СОДЕРЖАЩУЮ СЛОЙ МНОГОФРАКЦИОННОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ

Р.Н. Гафиятов
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: gafiyatov@mail.ru

В настоящее время основы механики и теплофизики пузырьковых жидкостей, а также наиболее существенные результаты по изучению волновых процессов в таких средах представлены в монографиях [1–3]. Работа [4] посвящена описанию основных особенностей двухфазных сред пузырьковой структуры. Представлен обзор работ по распространению волн в жидкостях с пузырьками постоянной массы и работ по волновой динамике жидкостей, содержащих пузырьки пара или растворимого газа. Модель распространения плоских волн давления малой амплитуды в смеси жидкости с пузырьками газа представлена в работе [5]. В [6] исследуется распространение акустических волн в плоском случае в многофракционных пузырьковых жидкостях.

В данной работе на основе методики, изложенной в [7], и зависимости волнового числа от частоты возмущений для пузырьковой жидкости, полученной в [6], исследуется задача о наклонном падении акустической волны на многослойный объект, содержащий слой многофракционной пузырьковой жидкости.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Для анализа взаимодействия акустического сигнала с многослойным объектом, схема которого представлена на рис. 1, используется следующая методика расчета. Результатом отражения и прохождения плоской монохроматической волны $\exp\left(iK_*x - i\omega t\right)$ через многослойный объект будут плоские волны $R\exp\left(iK_*x + i\omega t\right)$ и $T\exp\left(iK_*x - i\omega t\right)$, где R и T – соответственно коэффициенты отражения и прохождения волны, которые определяются через импедансы слоев Zi и входные импедансы границ слоев Ziin. Для многослойного объекта, состоящего из 3 слоев, коэффициенты R и T имеют следующий вид:

$$R = \frac{Z_2^{\text{in}} - Z_3}{Z_2^{\text{in}} + Z_3},\ T = \prod_{j=1}^{2}\left(\frac{Z_j^{\text{in}} + Z_j}{Z_j^{\text{in}} + Z_{j+1}}\exp(i\varphi_j)\right),$$

$$Z_j = \frac{\rho_j C_j}{\cos\theta_j},\ Z_1^{\text{in}} = Z_1,\ Z_2^{\text{in}} = \frac{Z_1 - iZ_2\operatorname{tg}\varphi_2}{Z_2 - iZ_1\operatorname{tg}\varphi_2}Z_2,$$

$$\varphi_j = K_j d_j \cos\theta_j,\ \sin\theta_j = \frac{K_3}{K_j}\sin\theta,\ j = 1,2,3.$$

Здесь d_j, K_j – толщина и волновое число j-го слоя, ω – частота возмущений, ρ – плотность. Для однородного слоя волновое число определяется, как $K_j = \omega/C_j$, где C_j – скорость звука в j-ом слое.

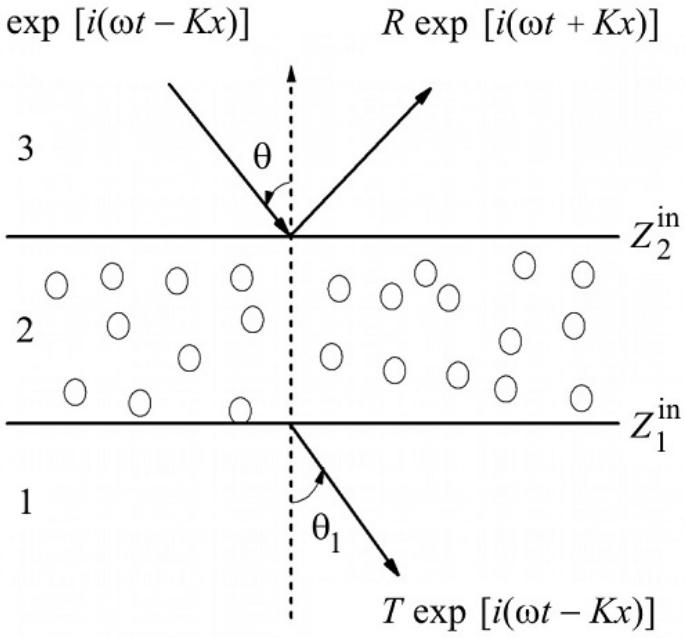


Рис. 1. Схема среды.

Рассмотрено прохождение акустического сигнала сквозь следующую среду: вода – пузырьковая жидкость – вода. Построены кривые коэффициентов прохождения и отражения акустической волны. Показано, что увеличение угла падения приводит к уменьшению коэффициента прохождения и увеличению коэффициента отражения во всем диапазоне частот. Выявлено, что особые дисперсионные и диссипативные свойства слоя пузырьковой жидкости могут сильно влиять на распространение волн в многослойной среде.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых РФ (МК-3497.2018.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч.1,2. М.: Наука, 1987.
2. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТФ, 1983. 238 с.
3. *Temkin S.* Suspension Acoustics: An Introduction to the Physics of Suspensions. New York: Cambridge University Press, 2005. 398 p.
4. *Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С.* Волны в жидкостях с пузырьками // В сб.: Итоги науки и техники, сер. МЖГ. ВИНИТИ. 1982. Т. 17. С. 160–249.
5. *Kerry W. Commander, Andrea Prosperetti.* Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments // J. of the Acoustical Society of America. 1989. V. 85. № 2. P.732.
6. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н.* Акустические волны в многофракционных пузырьковых жидкостях // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 2. С. 250–255.
7. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.

—— ♦♦♦ ——

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА АДИАБАТИЧЕСКОЙ СТЕНКЕ ПРИ НАЛИЧИИ КОНДЕНСИРОВАННОЙ ФАЗЫ

И.В. Голубкина, А.Н. Осипцов
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: giv-mm@mail.ru

Построена математическая модель сверхзвукового обтекания плоской теплоизолированной стенки потоком вязкого теплопроводного газа при наличии конденсированной фазы. Рассматривается диапазон параметров течения, в котором испарением капель в пограничном слое можно пренебречь, при этом учитывается, что внутри капель температура жидкости может быть существенно неоднородной. В результате численного моделирования исследуются режимы с образованием тонкой пленки на поверхности пластины. Найден диапазон определяющих параметров, в котором происходит заметное снижение температуры адиабатической стенки даже при достаточно малых исходных концентрациях жидкой фазы.

В работе представлена задача об обтекании плоской теплоизолированной пластины сверхзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа при наличии капель, образовавшихся в результате скачка конденсации выше по течению. Исследования влияния дисперсной примеси на характер течения и теплообмен в пограничном слое имеют уже значительную историю. Обзор литературы можно найти, например, в [1,2]. В настоящей работе рассматриваются условия, при которых не происходит испарения и конденсации жидкой фазы в пограничном слое. При этом температура капель меняется из-за внешних условий, а поскольку температуропроводность жидкости невысока, то необходимо учитывать запаздывание в прогревании вещества внутри капли. Для этого, наряду с уравнениями двухконтинуальной модели, в каждой точке расчетной области решается уравнение теплопроводности по объему капли. В межфазном обмене импульсом, помимо силы аэродинамического сопротивления капель, учитывается боковая сила Сэфмана [3], обусловленная сдвиговым характером потока вблизи стенки. Под воздействием силы Сэфмана капли выносятся на обтекаемую поверхность, формируя тонкую пленку.

Цель работы – дать количественную оценку снижения равновесной температуры адиабатической стенки благодаря наличию в потоке конденсированной фазы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель течения построена с учетом основных положений теории двухфазного ламинарного пограничного слоя [1] с малой объемной концентрацией капель. Массовая концентрация частиц при этом конечна, но достаточно мала. Дисперсная фаза описывается уравнениями континуума, лишенного собственных напряжений [4]; столкновениями и броуновским движением капель пренебрегается. Для несущей фазы используется модель сжимаемого совершенного теплопроводного газа с постоянными теплоёмкостями.

Декартова система координат (Oxy) связана с началом полубесконечной плоской пластины, ось x совпадает с поверхностью пластины. Подробности вывода системы уравнений двухфазного пограничного слоя с учетом принятых предположений можно найти в [5], здесь приведем итоговую систему в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{1}{\gamma \mathrm{M}^2}\frac{dp_e}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\alpha\mu n_s\left(u-u_s\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=u\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dp_e}{dx}+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right)+(\gamma-1)\mathrm{M}^2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+$$

$$+\frac{2\alpha}{3\,\mathrm{Pr}}n_s\lambda\left(T_{s\omega}-T\right)+\alpha(\gamma-1)\mathrm{M}^2 n_s\mu(u-u_s)^2$$

$$p=\rho T,\ \lambda=\mu=T^{\omega}$$

$$\frac{\partial n_s u_s}{\partial x}+\frac{\partial n_s v_s}{\partial y}=0,\ \ u_s\frac{\partial u_s}{\partial x}+v_s\frac{\partial u_s}{\partial y}=\mu\left(u-u_s\right)$$

$$u_s\frac{\partial v_s}{\partial x}+v_s\frac{\partial v_s}{\partial y}=\mu\left(v-v_s\right)+\kappa\left(u-u_s\right)\sqrt{\mu\rho\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|},$$

$$u_s\frac{\partial T_s}{\partial x}+v_s\frac{\partial T_s}{\partial y}=A\left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T_s}{\partial r}\right),\ A=\frac{2}{9\,\mathrm{Pr}\,\chi B}$$

Индекс s обозначает параметры частиц, ρ, u, v, T, λ, μ, p_e – безразмерные плотность, компоненты скорости, температура, коэффициент теплопроводности, динамическая вязкость газа, давление во внешнем потоке; n_s – числовая концентрация капель, $T_{s\omega}$ – температура поверхности капель, r – радиальная координата, связанная с центром капли. В качестве характерных масштабов взяты параметры невозмущенного потока, характерной продольной длины – стоксовская длина релаксации [4], масштаба поперечной координаты – толщина пограничного слоя.

Определяющие параметры задачи: число Маха M, число Прандтля Pr, коэффициент κ, характеризующий величину силы Сэфмана, относительная массовая концентрация частиц α, отношение коэффициентов теплопроводности фаз B, показатель адиабаты γ, отношение теплоемкостей фаз χ, показатель степени ω.

Граничные условия для приведенной системы уравнений определяются следующим образом: в начальном сечении – однородный равновесный поток; на стенке – условия прилипания для несущей фазы и равенство нулю суммарного теплового потока к поверхности пластины; на верхней границе расчетной области – условия сращивания с внешним плоскопараллельным невозмущенным потоком. Для уравнения теплопроводности – условие непрерывности тепловых потоков на поверхности капли.

В результате выпадения капель на обтекаемой поверхности образуется жидкая пленка. Оценка толщины и скорости движения пленки показала, что ее наличие не влияет на характер межфазного теплообмена вблизи стенки.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для численного интегрирования уравнений двухфазного пограничного слоя используется неявная разностная схема с первым порядком аппроксимации по продольной координате и вторым порядком – по поперечной. Для нахождения распределения переменных u, v, T, u_s, v_s, n_s на следующем слое по x используется метод прогонки. Производные по поперечной координате заменяются центральными разностями, а по продольной координате – направленными разностями.

Для вычисления температуры внутри и на поверхности капель в каждой точке расчетной области решается уравнение теплопроводности, также методом прогонки.

Радиальная координата r используется в качестве переменной прогонки, а в качестве маршевой переменной – продольная координата x.

Численные расчеты проводились для различных значений коэффициента κ и массовой концентрации капель в набегающем потоке α, при этом значения других определяющих параметров фиксированы: M = 3, Pr = 0.72, γ = 1.4, ω = 1, B = 0.04, χ = 4.

На рис. 1(а) показаны профили температур газа и поверхности капель для α=0.03, κ=100. Распределение безразмерной температуры адиабатической стенки T_w вдоль оси x для различных значений определяющих параметров представлено на рис. 1(б). Для сравнения там же приведена равновесная температура стенки в чистом газе. С возрастанием массовой концентрации конденсированной фазы степень охлаждения стенки заметно увеличивается. Например, при начальных значениях массовой концентрации капель около процента наблюдается снижение температуры стенки примерно на 10%,. Кроме того, более интенсивному охлаждению стенки способствует увеличение коэффициента подъемной силы Сэфмана (параметра κ).

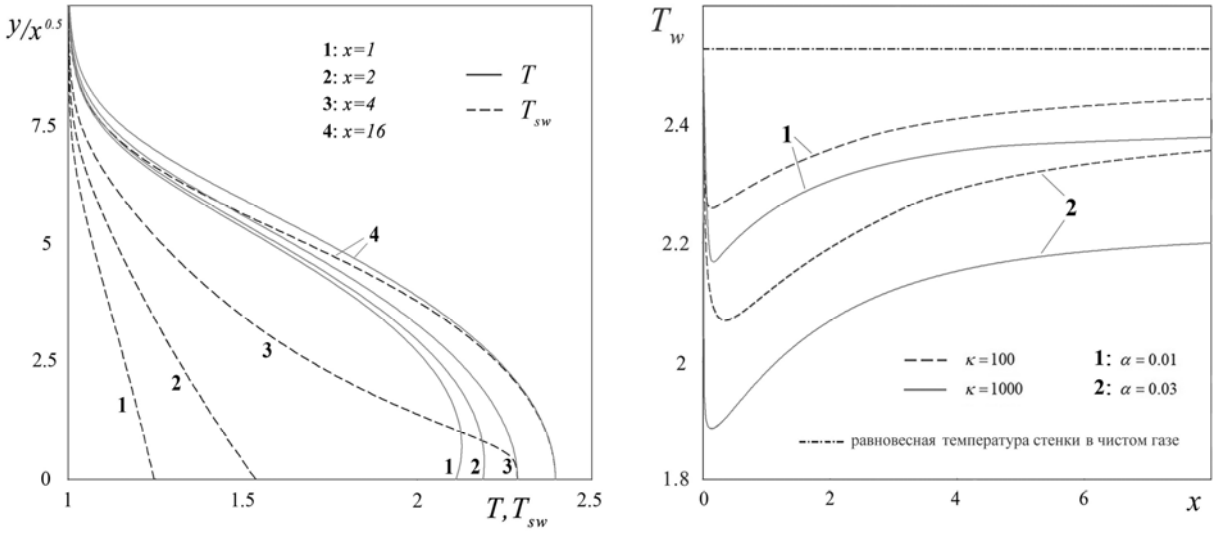


Рис. 1. а) Профили безразмерной температуры несущей фазы T и температуры поверхности капель T_{sw}; б) Распределение равновесной температуры стенки T_w

ВЫВОДЫ

На основании численных расчетов исследована структура газокапельного пограничного слоя на плоской стенке. Для корректного расчета межфазного теплообмена при отсутствии фазовых переходов учтена неоднородность температурного поля внутри капель. Получена количественная оценка снижения равновесной температуры стенки в результате выпадения на нее относительно холодных капель. Установлено, что степень охлаждения стенки существенно зависит от параметров κ и α. Температура стенки тем ниже, чем больше значение силы Сэфмана и чем выше массовая концентрация капель в сверхзвуковом потоке.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по открытому плану МГУ и частично поддержана грантом РНФ № 19-19-00234.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Osiptsov A.N.* Mathematical modeling of dusty-gas boundary layers // Appl. Mech. Rev. 1997. V. 50. P. 357–370

2. *Леонтьев А.И., Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д.* Пограничный слой на пластине в сверхзвуковом газокапельном потоке. Влияние испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 6. С. 910–917.
3. *Saffman P.G.* The lift on a small sphere in a slow shear flow// J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 385. Corrigendum: J. Fluid Mech. 1968. V. 31. P. 628.
4. *Marble F.E.* Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397–446.
5. *Голубкина И.В., Осипцов А.Н.* Влияние примеси неиспаряющихся капель на структуру течения и температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое // Изв.РАН. МЖГ. 2019. № 3. С. 58–69.

—— ♦ ♦ ♦ ——

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

В.А. Гордин [1,2]
[1] *НИУ Высшая школа экономики, e-mail: press@hse.ru*
[2] *Гидрометцентр России, e-mail: hmc@mecom.ru*

Дифференциальные соотношения включают в себя как дифференциальные операторы, так и солверы для краевых задач. Получены формулы компактных разностных аппроксимаций дифференциальных соотношений первого или второго порядка вида $P_1[u] = P_2[f]$. Аппроксимация производится на трехточечных, пятиточечных, шахматных шаблонах. Для реализации, как и в случае классических разностных схем, требуется обращение трехдиагональной (пятидиагональной) матрицы, однако, компактные схемы обеспечивают существенно более высокую точность и 4-й порядок аппроксимации вместо 2-го. Возможны обобщения на случаи переменных коэффициентов, слабо нелинейных уравнений, многомерные задачи.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа была поддержана грантом (18-05-0011) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2016–2017 гг. с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ВОЛНЫ ЛЯВА В СРЕДАХ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

В.А. Городцов, Д.С. Лисовенко
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

При покрытии упругой среды в полупространстве слоем другого материала скользящие вдоль поверхности объемные сдвиговые волны становятся затухающими с удалением от поверхности вглубь полупространства. Такие локализованные в слое и у поверхности полупространства поперечные волны именуют волнами Лява. Дисперси-

онное уравнение линейных волн Лява обязано совместному выполнению краевых условий отсутствия сдвигового напряжения на свободной поверхности покрывающего слоя и равенства смещений и сдвиговых напряжений на границе раздела между этим слоем и упругим полупространством. Дисперсионное уравнение допускает счетное число решений для волн с дисперсией (вследствие выделенного масштаба толщины слоя) с ограничением скорости волн. Оно показывает, что волны Лява быстрее сдвиговых волн в материале покрывающего слоя и медленнее сдвиговых волн в материале полупространства.

Найдено, что для первой моды волн Лява в случае несжимаемого тонкого покрывающего слоя скорость волн сильно увеличивается при отрицательных коэффициентах Пуассона материала в полупространстве. При большой толщине несжимаемого слоя волна очень слабо проникает в полупространство при любом его коэффициенте Пуассона. При отрицательных коэффициентах Пуассона для слоя и полупространства волна Лява в основном локализуется в покрывающем слое при любой его толщине, и слабо проникает в полупространство. Для первой моды волн Лява обнаружен сильный рост максимума одного из сдвиговых напряжений на границе раздела между покрывающим слоем и материалом полупространства с убыванием коэффициентов Пуассона обоих. Для другого сдвигового напряжения имеет место скачок напряжения на границе раздела и менее простая зависимость напряжения от коэффициентов Пуассона с двух сторон от границы раздела.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМех РАН (№ АААА-А17-117021310373).

—— ♦ ♦ ♦ ——

О ПЛОСКОЙ МОЛНИИ ИЛИ О ВЕЕРНОМ СВЕЧЕНИИ У ВЕРШИН ВИСЯЩИХ В ГРОЗОВОМ ОБЛАКЕ ЗАРЯЖЕННЫХ КАПЕЛЬ

А.И. Григорьев, С.О. Ширяева
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

Согласно метеорологическому словарю [1], стр.344: «плоская молния это электрический разряд на поверхности облаков, не имеющий линейного характера и состоящий, по-видимому, из светящихся тихих разрядов, испускаемых отдельными капельками. Спектр излучения плоской молнии полосатый, главным образом из полос азота».

В учебнике по метеорологии Матвеева Л.Т. [2], стр.710, даётся определение: «плоская молния представляет собой суммарный эффект большого числа коронных разрядов на облачных элементах (подобных свечению газа вблизи положительного электрода) вызывающих красноватое бесшумное свечение значительной толщи грозового облака».

Говоря о «светящихся тихих разрядах, испускаемых отдельными капельками» авторы метеорологического словаря имеют в виду феномен реализации неустойчивости заряженной облачной капли по отношению к собственному или индуцированному внешним электрическим полем зарядам [3–4] или к их сумме [5]. Такая неустойчивость сопровождается выбросом в окружающее каплю пространство нескольких сотен дочерних капелек, имеющих радиусы и заряды примерно на два порядка более мелкие, чем у родительской капли, у поверхности которых загорается коронный разряд [6–7]. Это явление подтверждено и экспериментально [8–9].

Термин «веерное свечение» ввёл в научный обиход J. Zeleny в начале прошлого века, когда только начинались исследования электрических разрядов с жидких электродов на основе визуального восприятия [10–11]. Речь шла о форме свечения электрического разряда с поверхности жидкого электрода. В последующие годы выяснилось, что такую форму разряду придают сильно заряженные капельки, эмитируемые жидким электродом в межэлектродное пространство. Эти капельки неустойчивы по отношения к собственному заряду, и распадаются. Напряжённость электрического поля собственного заряда у поверхности такой капельки достаточно велика для зажигания коронного разряда в её окрестности. Свечение этого разряда у вершины жидкого электрода J. Zeleny и назвал «веерным». Совокупность «веерных свечений» у вершин отдельных капелек, составляющих облако и претерпевающих электростатическую неустойчивость, и воспринимается наблюдателем как импульсное беззвучное свечение облаков – «плоская молния».

1. Пусть первоначально сферическая капля несжимаемой электропроводной жидкости с коэффициентом межфазного натяжения σ, массовой плотностью ρ_1, имеющая радиус R и заряд Q, находящаяся в гравитационном поле $\mathbf{g}$ и обдуваемая потоком воздуха со скоростью $\mathbf{U}_0 \| -\mathbf{g}$, помещена в однородное электростатическое поле $\mathbf{E}_0 \| \mathbf{g}$. Заряд капли Q для определённости будем считать отрицательным так, чтобы поле $\mathbf{E}_0$ помогало аэродинамическому полю $\mathbf{U}_0$ удерживать каплю в подвешенном состоянии.

Примем, что в указанных условиях исходная капля (в дальнейшем будем называть её «родительской») принимает сфероидальную в линейном приближении по величине своей стационарной деформации равновесную форму [12]. Примем, что в результате реализации электростатической неустойчивости такой капли она выбрасывает в направлении $-\mathbf{E}_0 \| \mathbf{U}_0$ «дочернюю» капельку с зарядом q и начальным радиусом r. также имеющую в указанных условиях сфероидальную форму.

Отметим, что дочерняя капля выбрасывается с того конца родительской капли, на котором знак индукционного заряда совпадает со знаком собственного, в рассматриваемом случае, согласно сказанному выше, дочерняя капелька будет нести отрицательный заряд, и будет выбрасываться в сторону, противоположную направлению полю сил тяжести, т.е. вверх.

Силу, действующую на каплю со стороны потока воздуха в облаке, в проводимом оценочном (качественном) расчете будем вычислять по формуле Стокса.

Условие неподвижности родительской капли в суперпозиции аэродинамического, электростатического и гравитационного полей запишем в виде:

$$Q \cdot \mathbf{E}_0 + 6\pi R \mu_2 \mathbf{U}_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 \cdot \mathbf{g} \tag{1}$$

где μ_2 – коэффициент динамической вязкости среды (воздуха).

При эмиссии дочерней капельки свободная энергия системы изменяется. Принимая, что температура системы остается неизменной, а также сохраняются полный объем и электрический заряд жидкой фазы, и для изменения энергии системы можно записать:

$$\Delta F \equiv F_f - F_{in} \equiv 4\pi r^2 \sigma \left[\mathrm{A}_2 - \frac{2r\mathrm{A}_1}{3R} \right] + \mathrm{B}_1 \frac{q^2}{2r} - \mathrm{B}_2 \frac{(Q-q)\cdot q}{2R} - \tag{2}$$

$$+\mathrm{K}\frac{(Q-q)q}{R} - E_0 R q \varphi_e(\zeta) + \frac{2\pi r^3 \rho_1 U^2}{3} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g L$$

$$\varphi_e(\zeta) \equiv \frac{\zeta \operatorname{arth}\left(e_1 \dfrac{\zeta-1}{\zeta-e_1^2}\right) - e_1(\zeta-1)}{\left(\operatorname{arth} e_1 - e_1\right)\left(1-e_1^2\right)^{1/3}};\ \mathrm{K} = \frac{\left(1-e_1^2\right)^{1/3}}{e_1} \operatorname{arth}\left(\frac{e_1}{\zeta}\right)$$

$$\mathrm{A_i} = \frac{1}{2\left(1-e_i^2\right)^{1/6}}\left(\left(1-e_i^2\right)^{1/2} + e_i^{-1} \operatorname{arsh} e_i\right);\ \mathrm{B_i} = \frac{\left(1-e_i^2\right)^{1/3}}{e_i} \operatorname{arth}\left(e_i\right)$$

В (2) $E_0 R \cdot \varphi_e(\zeta)$ – электростатический потенциал незаряженной родительской капли, во внешнем однородном электростатическом поле $\mathbf{E}_0$, в центре маленькой капельки, записанный с помощью $\zeta = \left(1 + \xi / a_2^2\right)^{1/2}$ – безразмерного расстояния между каплями в момент разрыва контакта между ними (поверхности родительской капли соответствует $\xi = 0$, или $\zeta = 1$); L – размерное расстояние между вершиной родительской капли и центром дочерней в момент ее отрыва; F_{in} и F_f начальное и конечное значения потенциальной энергии системы.

В (2) первое слагаемое определяет изменение свободной энергии сил поверхностного натяжения системы при эмиссии дочерней капельки; второе и третье – изменение собственной электростатической энергии системы: с учётом зарядов дочерней и родительской капелек; четвёртое даёт энергию электростатического взаимодействия заряда дочерней капельки с остатком заряда родительской капли; пятое слагаемое определяет энергию электростатического взаимодействия заряда дочерней капельки с электрическим полем зарядов, индуцированных в родительской капле полем $\mathbf{E}_0$ (знак «минус» перед этим слагаемым отмечает тот факт, что заряд дочерней капельки отрицателен); шестое – кинетическую энергию дочерней капельки, приобретённую в потоке воздуха (родительская капля по предположению неподвижна относительно земли, а дочерняя, имеющая размеры порядка десятых долей μm [2] практически неподвижна относительно потока воздуха [13], стр.260); последнее слагаемое даёт изменение потенциальной энергии дочерней капельки в гравитационном поле.

При фиксированных линейных размерах родительской и дочерней капель должен существовать минимальный радиус перетяжки r_*, при котором будет иметь место равенство между лапласовской силой в перетяжке $2\pi r_* \sigma$ и веса дочерней капли mg, удерживающих капли вместе, и суммой силы электрического отталкивания родительской и дочерней капель и силы Стокса, действующей на дочернюю капельку со стороны потока воздуха, $6\pi r \mu U_0$, разрывающих контакт:

$$2\pi r_* \sigma + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = E \cdot q + 6\pi r \mu_2 U_0. \qquad (3)$$

Здесь E – напряженность поля суперпозиции собственного заряда родительской капли и индуцированного в ней внешним однородным электростатическим полем в месте нахождения маленькой капельки; r – играет роль характерного линейного поперечного размера отрывающейся капельки.

Выражение (3) представляет собой уравнение для определения расстояния между каплями в момент разрыва перетяжки.

Решая численно указанную систему уравнений, можно найти размеры и заряды эмитированных капелек в зависимости от величины скорости восходящего потока воздуха, аналогично тому, как это делалось в [7]. Расчёты показывают, что при распаде

родительской капли образуется несколько сотен дочерних капелек, размеры и заряды которых на несколько порядков меньше чем у родительской.

Как показывают расчёты дочерняя капелька несёт заряд больший предельного в смысле электростатической устойчивости по отношению к собственному заряду, и спустя некоторое время, которое будет порядка характерного времени реализации электростатической устойчивости, распадётся, но поскольку дочерние капельки и так малы (r порядка десятых долей μm), то наиболее вероятным каналом распада будет их деление на две части.

Сказанное означает, что все дочерние капельки неустойчивы по отношению к собственному разряду и по прошествии характерного времени реализации электростатической неустойчивости распадутся, формируя веерное свечение. Веерным свечение будет в результате электростатического расталкивания облака одноимённо заряженных капелек, поступательно движущихся вдоль внешнего электростатического поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хромов С.П., Мамонтова Л.И. Метеорологический словарь. Л: Гидрометеоиздат, 1974, 568 с.
2. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л: Гидрометеоиздат, 1984, 752 с.
3. Rayleigh (Strutt J.W.) On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity //Phil. Mag. 1882. V.14. P.184–186.
4. Taylor G.I. Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc., London. 1964. V.A280. P.383–397.
5. Dawson G.A. The Rayleigh instability of water drops in the presence of external electric fields// J. Geophys. Res. 1970. V.75. №3. P.701–705.
6. Григорьев А.И., Синкевич О.А. О возможном механизме возникновения огней «св. Эльма» // ЖТФ. 1984. Т.54. Вып. 7. С.1276–1283.
7. Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. The theoretical consideration of physical regularities of the electrostatic dispersion of liquids as aerosols // J. Aerosol Sci. 1994. V.25. №6. P.1079–1091.
8. Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. Shape oscillations and stability of charged microdroplets // Phys. Rev. Lett. 2002. V.89. №8. P.1–4.
9. Grimm R.L., Beauchamp J.L. Dynamics of field-induced droplet ionization: time-resolved studies of distortion, jetting, and progeny formation from charged and neutral methanol droplet exposed to strong electric fields // J. Phys. Chem. B. 2005. V.109. P.8244–8250.
10. Zeleny J. // Proceeding of the Cambridge Philosophical Society. 1914. V.18. Part 1. P.71–83.
11. Zeleny J. // The Physical Review. 1917. V.10. N.1. P.1–6.
12. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // ЖТФ. 1989. Т.59. Вып.6. С.27–34.
13. Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 280 с.

—— ♦♦♦ ——

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ И АКУСТИКИ МНОГОФАЗНЫХ ГАЗОКАПЕЛЬНЫХ И ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕД

Д.А. Губайдуллин
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: gubaidullin@imm.knc.ru

Дан анализ некоторых особенностей и эффектов волновой динамики и акустики газокапельных и пузырьковых сред. Ранее ряд аспектов по этой теме был изучен в [1–32]. Изучено распространение акустических возмущений в парогазовых полидисперсных (с произвольной функцией распределения включений по размерам) капельных и пузырьковых (в том числе с оболочкой вокруг пузырька) средах с фазовыми переходами, а также в смесях жидкости с частицами и пузырьками газа. Представлены математические модели, получены дисперсионные соотношения, изучены высоко- и низкочастотные асимптотики коэффициента затухания, обсуждаются области применимости развитых теорий. Показано хорошее согласие представленных результатов с опубликованными экспериментальными данными других авторов.

Теоретически исследована динамика импульсного возмущения давления в жидкости, содержащей многослойную преграду с пузырьковым слоем. Обсуждается возможность использования пузырьковых метаэкранов для эффективного гашения акустических сигналов. Развита соответствующая теория. Получено хорошее согласие теоретических и экспериментальных данных.

Экспериментально изучены нелинейные колебания аэрозолей и динамика частиц в закрытых и открытых трубах в ударноволновом, переходе к ударноволновом и безударноволновом режимах. Установлена немонотонная зависимость времени осаждения табачного дыма от степени заполнения закрытой трубы при резонансных частотах колебания поршня. Численно исследовано распространение ударных волн в газовзвесях и ударно-волновой разлет газовзвеси в двухкомпонентный газ. Изучено влияние сорта газа на динамику процесса. Представлено хорошее согласие теории и опытных данных.

Исследования выполнено в рамках программы Президиума РАН “Новые вызовы климатической системы Земли”

ЛИТЕРАТУРА

1. Губайдуллин Д.А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Изд-во Казанского математического общества, 1998. 153 с.
2. Gubaidullin D.A., Nigmatulin R.I. On theory of acoustic waves in polydispersed gas–vapor–droplet suspension // Intern. J. Multiphase Flow. 2000. V. 26. № 2. P. 207–228.
3. Губайдуллин Д.А. Сферические и цилиндрические волны малой амплитуды в полидисперсных туманах с фазовыми превращениями // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 85–94.
4. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Уткина Е.А. Акустические волны в двухфракционных смесях газа с паром, каплями и твердыми частицами разных материалов и размеров при наличии фазовых превращений // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 1. С. 83–89.
5. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.А. Распространение малых возмущений в полидисперсной парогазокапельной смеси с полидисперсными частицами при наличии фазовых превращений // Изв. РАН. МЖГ. 2012. №5. С.43–51.
6. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Уткина Е.А. Влияние фазовых превращений на акустику смеси газа с паром, каплями и твердыми частицами // Теплофизика высоких температур, 2011. Т. 49. № 6. С. 942 – 947.

7. Губайдуллин Д.А., Терегулова Е.А., Губайдуллина Д.Д. Распространение акустических волн в многофракционных газовзвесях // Теплофизика высоких температур. 2015. Т.53. №2.
8. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.А. Сферические и цилиндрические волны в парогазовых смесях с полидисперсными частицами и каплями // Теплофизика высоких температур. 2012. Т.50. №5. С.659–664.
9. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Акустические возмущения в смеси жидкости с пузырьками пара и газа // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 2. С. 170–175.
10. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в двухфракционных пузырьковых жидкостях с фазовыми превращениями // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 2. С. 269–273.
11. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых жидкостях // Доклады Академии Наук. 2012. Т.447. №3. С. 284–287.
12. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны разной геометрии в полидисперсных пузырьковых жидкостях. Теория и эксперимент // Доклады Академии наук, 2013. Т. 450. № 6. С. 665 – 669.
13. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Распространение акустических волн в двухфракционных пузырьковых жидкостях с учетом фазовых превращений в каждой из фракций // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 3. С. 91–98.
14. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Гафиятов Р.Н. Акустические волны в многофракционных пузырьковых жидкостях // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. №2.
15. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Динамика импульсных волн в пузырьковых жидкостях. Сравнение теории с экспериментом // Доклады Академии наук, 2014. Т. 456. № 6. С. 662 – 664.
16. Губайдуллин Д.А., Губайдуллина Д.Д., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкостях с полидисперсными пузырьками газа. Сравнение теории с экспериментом // Известия РАН. МЖГ, 2013. № 6. С. 81 – 90.
17. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых средах // ПММ, 2013. Т.77. № 5. С. 743 – 753.
18. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в жидкостях с полидисперсными парогазовыми и газовыми пузырьками // Изв. РАН. МЖГ. 2015. №1.
19. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г, Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование коагуляции аэрозоля в трубе вблизи субгармонического резонанса // Теплофизика высоких температур. 2004. Т.42. С.788–795.
20. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование коагуляции и осаждения аэрозоля в закрытой трубе в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2012. Т.50. №4. С.603–605.
21. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование колебаний аэрозоля в трубах в безударно-волновом режиме вблизи резонанса // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452. № 2. С. 161 – 164.
22. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование колебаний аэрозоля в открытой трубе в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 6. С. 955 – 957.
23. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А. Резонансные колебания аэрозоля в трубе с диафрагмой в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52. № 5. С. 1 – 6.
24. Gubaidullin D.A., Ossipov P.P. Numerical investigation of particle drift in acoustic reso-

nator with periodic shock wave // Applied Mathematics and Computation, 2013. V. 219. P. 4535 – 4544.
25. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в многофракционных пузырьковых жидкостях // Теплофизика высоких температур. 2015. Т.53. №2. С.250–255.
26. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в жидкостях с полидисперсными парогазовыми и газовыми пузырьками // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015.. № 1. С. 67–77.
27. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. Ударно-волновой разлет газовзвесей // Доклады Академии наук 2016. Т. 466. № 4. С. 418 – 421.
28. Гафиятов Р.Н. Губайдуллин Д.А., Губайдуллина Д.Д., Акустические волны разной геометрии в многофракционных пузырьковых жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 1. С. 121–128.
29. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкости с твердыми частицами и пузырьками газа // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 77–83.
30. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Особенности отражения акустических волн от границы или слоя двухфазной среды // Акустический журнал. 2018. Том 64. № 2. С. 162–173.
31. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Щайдуллин Л.Р. Осаждение дыма в открытой трубе вблизи резонанса // Теплофизика высоких температур. 2019. Т.57. №5. С.793–796
32. Gubaidullin D.A., Zaripov R.G., Tkachenko L.A., and Shaidullin L.R. Deposition of polydisperse gas suspensions with nonlinear resonance oscillations in a closed tube // J. Acoustю Soc. America, 2019. 145. P. EL30–EL33.

—— ♦ ♦ ♦ ——

НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ГРАНИЦУ МНОГОФРАКЦИОННОЙ ГАЗОВЗВЕСИ С ПОЛИДИСПЕРСНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Д.А. Губайдуллин, Р.Р. Зарипов
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: gubaidullin@imm.knc.ru, zaripov_rinat.imm@mail.ru

Теории распространения акустических волн в многофазных средах, основанные на механике континуумов представлены в [1, 2]. В настоящее время с некоторыми результатами исследования отражения акустических волн от границы раздела между чистым газом и смесью газа с различными частицами можно ознакомиться в работах [3–5].

В данной работе на основе дисперсионного соотношения для многофракционной полидисперсной газовзвеси полученного в работе [6] и методике [7] исследуется отражение акустических волн от границы многофракционной газовзвеси с полидисперсными частицами.

При наклонном падении акустической волны $\exp[i(\omega t + Kx)]$ из среды 1 на границу раздела среды 2 (Рис. 1) коэффициент отражения R определяется следующей формулой [7]:

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},\ Z_1 = \frac{\rho_1 C_1}{\cos\theta_1},\ Z_2 = \frac{\rho_2 C_2}{\cos\theta_2},\ C_1 \sin\theta_2 = C_2 \sin\theta_1,$$

где θ_1 и θ_2 – углы падения и отражения соответственно, ρ_i – плотность i-ой среды,

C_i – скорость распространения звука в i-ой среде.

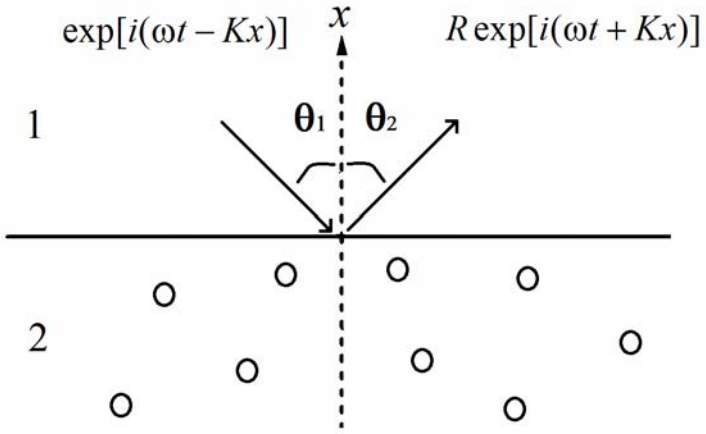


Рис. 1. Схема среды.

Рассмотрим случай, когда среда 1 – воздух, среда 2 – многофракционная полидисперсная газовзвесь. Тогда плотность среды 2 определим в следующем виде

$$\rho_2 = \sum_{i=1}^{M} \alpha_j \rho_j^0$$

здесь α_j – объемное содержание j-ой фракции, ρ_j^0 – истинная плотность j-ой фракции. Скорость распространения звука в многофракционной полидисперсной газовзвеси определим следующей формулой

$$C_2 = \frac{\omega}{K_*},$$

где K_* – комплексное волновое число, которое определим из дисперсионного соотношения [6]:

$$\left(\frac{C_1 K_*}{\omega}\right)^2 = V(\omega) D(\omega),$$

$$V(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^{M} m_j \left\langle \frac{1}{1 - i\omega\tau_{vj}^*} \right\rangle_j, \quad D(\omega) = 1 + (\gamma_1 - 1)\frac{D^0}{1 + D^0},$$

$$D^0 = \sum_{j=1}^{M} m_j \frac{c_{p2j}}{c_{p1}} \left\langle \frac{1}{1 - i\omega\tau_{Tj}^*} \right\rangle_j, \quad \langle h \rangle_j = \frac{\int_{\Delta r_j} N_0^j(r_j) g_0^j(r_j) h_j dr_j}{\int_{\Delta r_j} N_0^j(r_j) g_0^j(r_j) dr_j}, \quad j = \overline{1,M}.$$

Здесь m – массовое содержание, c_p – теплоемкость, N_0 – функция распределения включений по размерам, g_0 – масса частицы или капли, Δr – диапазон изменения радиуса включений. Индекс *1* относится к несущей фазы, *2* к дисперсной фазе j-ой фракции. τ_v^* и τ_T^* – комплексные времена релаксации скорости и температуры соответственно [1], $\langle h \rangle$ – линейный оператор осреднения [2].

Таким образом получена математическая модель, которая определяет отражение

акустической волны от границы раздела между воздухом и многофракционной полидисперсной газовзвеси.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента Российской федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-3497.2018.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч.1. 464 с.
2. *Губайдуллин Д.А.* Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 1998. 153 с.
3. *Ishii R., Matsuhisa H.* Steady reflection, absorption and transmission of small disturbances by a screen of dusty gas // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 259–277.
4. *Шагапов В. Ш., Сарапулова В. В.* Особенности преломления звука при тумане // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т 50, № 6. С. 683–691.
5. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю. В.*, *Зарипов Р.Р.* Влияние фазовых переходов на отражение акустических волн от границы загрязненного тумана // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2018. Т. 160, кн. 3. С. 508–516.
6. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Р.* Акустические волны в многофракционных газовзвесях с полидисперсными включениями // ТВТ. 2019. Т. 57, № 3. С. 444–446.
7. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.

—— ♦ ♦ ♦ ——

МЕТОД ЛИМИТИРУЮЩЕЙ СКОРОСТИ В ЗАДАЧАХ ФОКУСИРОВКИ ЧАСТИЦ В МИКРОФЛЮИДНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Д.А. Губайдуллин, П.П. Осипов, А.А. Абдюшев
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: petro300@rambler.ru

В последнее время значительно возрос интерес к численному моделированию гидродинамических процессов в различных микрофлюидных устройствах, в которых с помощью акустических полей производится фокусировка дисперсных частиц [1,2]. Основными механизмами фокусировки частиц являются акустические течения и собственный дрейф частиц в неоднородных полях [3–6]. Оба механизма наиболее интенсивно проявляются на резонансных частотах. В волновом поле при наличии тонких вязких пограничных слоев около стенок образуются акустические течения, состоящие из пристеночных вихрей Шлихтинга и примыкающих к ним вихрей Рэлея. Учет влияния пограничных слоев на эти течения нетривиален и требует привлечения уравнений Навье–Стокса. В работе [7] обсуждаются основные трудности численного моделирования вторичных течений и дрейфа частиц в устройствах, имеющих криволинейные стенки. Использованы сгущающиеся к границе сетки при расчете акустического течения в резонаторе с гиперболическими стенками. Несмотря на экономию ресурсов, сгущающиеся сетки все же не столь эффективны для устройств, размеры которых намного превосходят толщину вязкого пограничного слоя. Для существенного ускорения расчетов акустического течения в работе [2] предложен интегральный метод учета пограничного слоя на основе теории акустических течений Нюборга, получивший название «метод лимитирующей скорости». Этот метод позволяет достаточно точно рассчитать вихри

Рэлея во внешнем течении, не рассчитывая детально вихри Шлихтинга. Он хорошо работает в случаях, когда толщина акустического пограничного слоя на несколько порядков меньше размеров устройства. Для резонаторов сложной формы заранее неизвестны ни положение, ни интенсивность акустических течений, ни собственный дрейф частиц. Вопросы моделирования фокусировки частиц в устройствах имеющих сложную форму мало изучены.

РАСЧЕТ ВНЕШНЕГО АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В качестве примера, рассмотрена задача о фокусировке стоксовых частиц в плоском квадрупольном резонаторе с гиперболическими стенками. Частицы первоначально распределены равномерно. Расчет внешнего безвихревого движения проводился на основе уравнений неразрывности и Эйлера на многоуровневых декартовых сетках [8, 9]. На четырех прямолинейных границах индуцировались монохроматические несинфазные колебания (рис.1). Для учета акустических течений использовался метод лимитирующей скорости (МЛС) [2].

УЧЕТ АКУСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Согласно методу МЛС влияние пограничного слоя на внешнее поле учитывалось интегрально с помощью лимитирующей скорости. В общем случае установившегося монохроматического поля без проскальзывания на границе для касательной и нормальной скорости газа имеют место соотношения

$U = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, $V = C\cos\omega t + D\sin\omega t$

т.е. колебания скорости в различных ячейках несинфазны. Также могут оказаться несинфазными колебания компонент U и V в одной и той же ячейке.

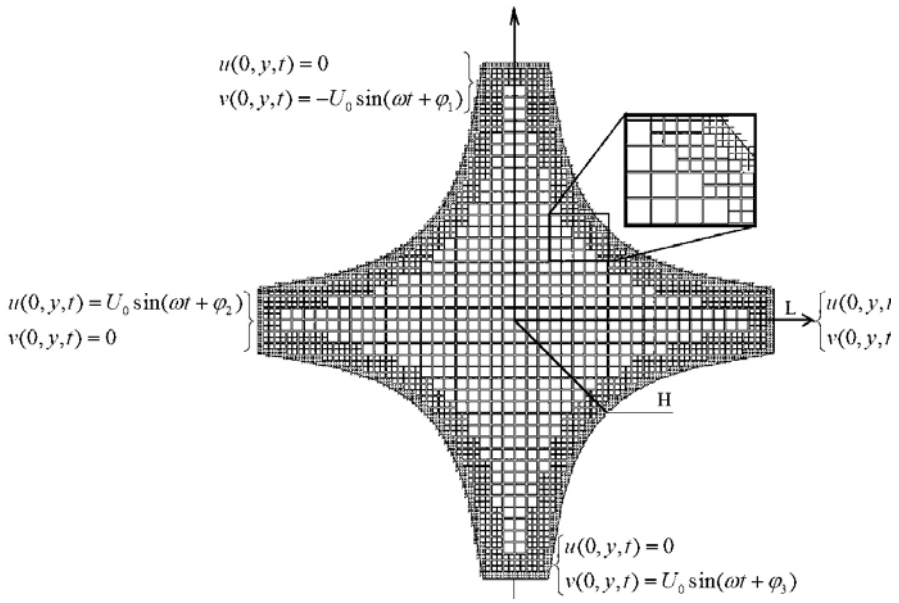


Рис.1. Четырехуровневая сетка в гиперболическом резонаторе

В работе [3] формула Нюборга для лимитирующей скорости обобщена на случай произвольных сдвигов фаз

$$U_L = -(4\omega)^{-1}\left\{3\left(A\frac{\partial A}{\partial s}+B\frac{\partial B}{\partial s}\right)+\left(A\frac{\partial B}{\partial s}-B\frac{\partial A}{\partial s}\right)+2\left(A\frac{\partial D}{\partial n}-B\frac{\partial C}{\partial n}\right)+2H\left(CB-DA\right)\right\},$$

где s, n – касательная и нормаль к границе, H – кривизна границы. Это выражение было взято для интегрального учета пограничного слоя в граничном условии

$U = U_L + A\cos\omega t + B\sin\omega t$.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис.2 представлены распределения группы частиц радиуса $r = 1$ мкм плотностью $\rho_p = 10^3$ кг/м^3 в четыре различных момента времени $t/T = 100, 300, 600, 900$, где $T = 2\pi/\omega$ – период монохроматического поля. В качестве частоты поля бралась первая резонансная частота резонатора ($H = 0.0088$ м, $L = 2H$), соответствующая длине волны равной $\lambda_1 = 3.032\,L$. Всего образуется четыре вихря Рэлея. Частицы собираются в областях вихрей Рэлея, а также вблизи замкнутой линии вокруг центра резонатора. Расчеты по описанной здесь технологии занимают на порядок меньше времени, чем расчеты уравнений Навье–Стокса на сгущающихся к границе сетках [7].

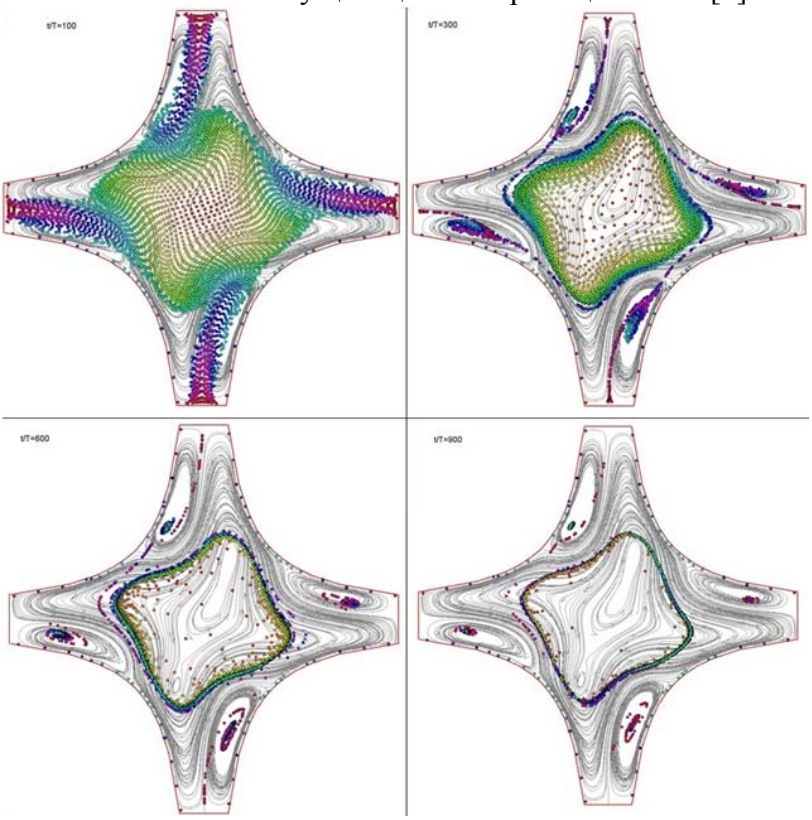


Рис. 2. Фокусировка частиц в четыре различных момента времени при сдвиге фаз между поршнями $\varphi_1 = \pi/2,\quad \varphi_2 = \pi,\quad \varphi_3 = 3\pi/2$

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена в рамках плана работ по программе президиума РАН «Новые вызовы климатических систем Земли».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ley W.H., Bruus H.* Three-Dimensional Numerical Modeling of Acoustic Trapping in Glass Capillaries // Physical review applied. 2017. V.8. № 024020. P. 1–15.
2. *Lei J., Glynne-Jones P., Hill M.* Comparing methods for the modelling of boundary-driven streaming in acoustofluidic devices // Microfluidics and Nanofluidics. 2017. V. 21. № 2. P. 1–11.

3. *Chun P. Lee, Taylor G. Wang.* Near-boundary streaming around a small sphere due to two orthogonal standing waves // J.Acoust.Soc.Am. 1989. V.85. № 3. P. 1081–1088.
4. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред // Москва: «Наука». 1978. Часть I. 464 с. Часть II. 360 с.
5. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технологии // Москва: Изд-во R&C Dynamics. 2008. 712 с.
6. *Gubaidullin D.A., Ossipov P.P.* Numerical investigation of particle drift in acoustic resonator with periodic shock wave //Applied mathematics and computation. 2013. № 219. P. 4535–4544.
7. *Gubaidullin D.A., Osipov P.P., Abdyushev.* Simulation of aerosol distribution in hyperbolic resonator //Applied Mathematical Modelling. 2018. № 62. P. 181–193.
8. *Губайдуллин Д.А., Осипов П.П.* Расчет двумерных течений газа на многоуровневых сетках // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14. С. 451–460.
9. *Ossipov P.* Heuristic algorithm for generating multilevel Cartesian meshes in multidimensional regions with moving boundaries // Applied Mathematics and Computation. 2010. V. 215. P. 3684–3695.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ДРЕЙФ ЧАСТИЦ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НИЖНЕЙ СТЕНКИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

Д.А. Губайдуллин, П.П. Осипов, Р.Р. Насыров
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: nasyrov.ravil@bk.ru

Динамика распределения частиц аэрозоля важна в приложениях, связанных с масс-спектрометрией, ультразвуковыми зондами и технологиями очистки. Микромасштабные акустофлюидные устройства все чаще используются в биологии, медицине и экологии. Эти устройства позволяют повысить эффективность транспортировки, улучшить точность измерений или нанести частицы точно на подложку. Пространственное распределение частиц в каналах может эффективно контролироваться акустическими полями.

В данной работе рассмотрен плоский прямоугольный резонатор, наполненный газом. Стоячая волна индуцируется вращательными колебаниями нижней границы.

ДИНАМИКА ГАЗА

На рис. 1 изображен плоский закрытый резонатор длиной L, шириной H, наполненный вязким газом. В начальный момент времени $t = 0$ начинает колебаться нижняя стенка резонатора $x = 0$.

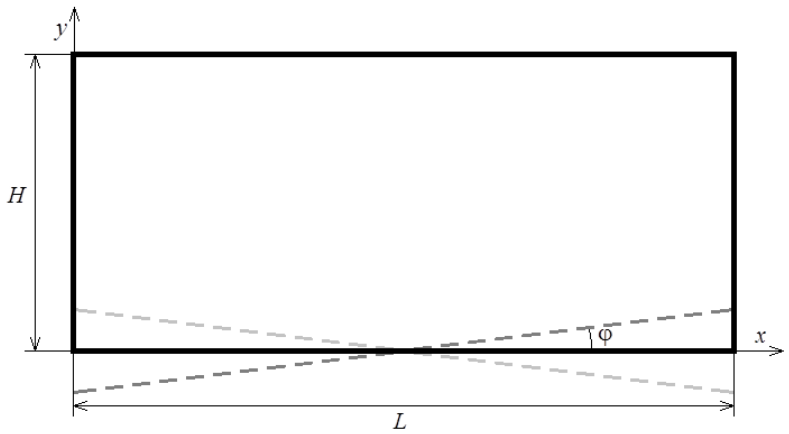


Рис. 1. Область плоского резонатора.

Для описания динамики вязкого сжимаемого газа используются уравнения неразрывности и Навье–Стокса [1]:

$$\mathbf{w}_t + (\mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}})_x + (\mathbf{G} + \tilde{\mathbf{G}})_y = 0,$$

где $\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{Bmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \end{Bmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \end{Bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{F}} = -\begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{G}} = -\begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix}$, ρ – плотность газа, u, v – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости газа, $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$ – тензоры касательного напряжения.

Граничные условиями на стенках резонатора:

на левой $u(0,y,t) = 0$, $v(0,y,t) = 0$, $\dfrac{\partial p}{\partial x}(0,y,t) = 0$;

правой $u(L,y,t) = 0$, $v(L,y,t) = 0$, $\dfrac{\partial p}{\partial x}(L,y,t) = 0$;

верхней $u(x,H,t) = 0$, $v(x,H,t) = 0$, $\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,H,t) = 0$;

нижней $u(x,0,t) = 0$, $v(x,0,t) = -(x - 0.5L)\varphi\omega\sin\omega t$, $\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,0,t) = 0$,

$\varphi = \operatorname{arctg}(0.01H / L)$;

ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ

Для описания движения частицы используется система уравнений, учитывающая только силу лобового сопротивления частицы [2,3]:

$$\frac{dx_p}{dt} = u_p, \quad \frac{dy_p}{dt} = v_p$$

$$\frac{du_p}{dt} = -\frac{u_p - u}{\tau_v}\left(1 + \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_{12}}}{6} + \frac{\mathrm{Re}_{12}}{60}\right), \quad \frac{dv_p}{dt} = -\frac{v_p - v}{\tau_v}\left(1 + \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_{12}}}{6} + \frac{\mathrm{Re}_{12}}{60}\right)$$

где $\mathrm{Re}_{1,2} = \dfrac{2r\rho}{\mu}\sqrt{(u - u_p)^2 + (v - v_p)^2}$ – относительное число Рейнольдса, μ – вязкость газа, τ_v – время релаксации.

Для приведенной выше системы решается задача Коши с заданными начальными

положениями и скоростями частицы. Скорость несущей среды и ее плотность в каждый момент времени берутся из задачи о динамике газа.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Для правильного разрешения пограничных слоев и для ускорения счета генерировалась неравномерная сетка, сгущающаяся к верхней границе резонатора.

На рис. 2 представлены результат численного эксперимента по расчету распределения капель воды радиуса $r = 77 \cdot 10^{-7}$ м в момент времени $t = 2850T$.

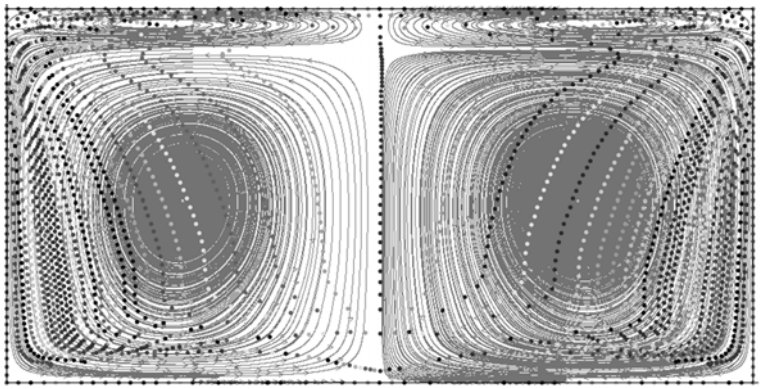


Рис. 2. Распределение частиц в резонаторе.

Рис. 2 показывает, что в результате вращательных колебаний нижней стенки возникают акустические течения в виде двух вихрей Рэлея и двух вихрей Шлихтинга. Поперечные вращательные колебания нижней стенки индуцируют продольную стоячую волну, подобную волне, индуцируемой поршнем на левой стенке [4]. На нижней стенке вихри Шлихтинга не возникают. Результаты показывают, что максимальный перенос частиц происходит в области соприкосновения вихрей Шлихтинга и Рэлея, а скорость дрейфа частиц близка к нулю в узлах и в пучности стоячей волны.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена в рамках плана работ по программе президиума РАН «Новые вызовы климатических систем Земли».

ЛИТЕРАТУРА

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2: Методы расчета различных течений. М.: Мир. 1991. 504 с.
2. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технология. М.: R&C Dynamycs. 2008. 711 с.
3. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука. 1987. Часть I. 464 с.
4. *Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Насыров Р.Р.* Влияние коэффициента увлечения частиц на их распределение в двумерном акустическом резонаторе // ИФЖ. Т. 91. № 3. С. 734–742.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА НА АКУСТИКУ ЖИДКОСТИ С ПОКРЫТЫМИ ОБОЛОЧКОЙ ПУЗЫРЬКАМИ

Д.А. Губайдуллин, Ю.В. Федоров
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: kopperfildd@ya.ru

Покрытые оболочкой пузырьки встречаются во многих областях. В частности, большое применение они нашли в биомедицине, где используются в качестве контрастных веществ для ультразвуковой диагностики [1, 2]. В работе [3] приведено описание нанороботa, способного перемещаться в жидкой среде новым способом. На поверхности устройства прикрепляются пузырьки газа, заключенные в специальные капсулы. Под воздействием ультразвуковых колебаний пузырьки начинают поочередно расширяться и сжиматься, оказывая давление на стенку, к которой они прикреплены. Частота колебаний зависит от размеров пузырьков, и чем ближе она к их резонансной частоте, тем эффективнее происходит движение нанороботa.

Существующие теоретические модели основаны на различных формах записи уравнений колебаний сферических пузырьков с учетом упругости, вязкости поверхностного слоя. В работе [4] получено модифицированное уравнение Релея–Плессета, учитывающее радиальные колебания газового пузырька с вязкоупругой оболочкой конечной толщины в жидкости на основе реологического уравнения Кельвина–Фойгта. Проанализировано влияние параметров оболочки. Впоследствии модель [4] была упрощена на случай, когда толщина вязкоупругой оболочки пузырьков близка к нулю [5]. Найдено теоретически и экспериментально влияние полимерной оболочки микропузырьков на затухание импульсного возмущения. В [6] изучено поведение газовых пузырьков, имеющих упругую оболочку, под действием ультразвука в упругой среде. В линейном приближении получены выражения для амплитуды рассеяния и резонансной частоты колебаний включений. Радиальные колебания газового пузырька в сжимаемой вязкоупругой жидкости исследована в [7]. Показано, что при радиальных пульсациях упругие и вязкие свойства оболочки пузырьков преобладают над вязкоупругими свойствами жидкости.

В настоящей работе представлена математическая модель, определяющая распространение акустической волны в жидкости с покрытыми вязкоупругой оболочкой пузырьками газа с учетом процессов теплообмена между жидкостью, оболочкой и газом. Теплообмен между фазами учтен следующим образом. Выписаны уравнения теплопроводности для газа, оболочки и окружающей пузырек жидкости. Поставлены граничные условия. Для случая колебаний пузырька с малой амплитудой выписаны решения для температур в каждой фазе. Определен тепловой поток. Записана замкнутая система уравнений, определяющая распространение акустической волны в жидкости с покрытыми пузырьками. Получено дисперсионное соотношение. Определены низкочастотные асимптотики фазовой скорости и коэффициента затухания. По результатам данной работы сделаны следующие основные выводы:

1. Показано, что необходимо учитывать теплообмен непосредственно между жидкостью и газом в пузырьках, минуя вязкоупругую оболочку, поскольку ее вклад в теплообмен не существенен.
2. Для пузырьков без оболочки равновесная скорость звука не зависит от частоты возмущений и размера пузырьков, в то время для покрытых пузырьков установлена зависимость равновесной скорости звука от частоты возмущений, размера пузырьков и параметров оболочки.

3. Установлено, что учет вязкоупругой оболочки пузырьков приводит к увеличению резонансной частоты возмущений, что хорошо подтверждается экспериментальными данными.

4. Показано, что коэффициент затухания на низких частотах для рассматриваемой смеси пропорционален квадрату частоты возмущений, равновесной скорости звука и во многом зависит от размера и параметров оболочки пузырьков.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента Российской федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-3497.2018.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goldberg B.B., Raichlen J.S., Editors F.F.* Ultrasound contrast agents. Basic principles and clinical applications. Martin Dunitz, 2001.
2. *Sboros V.* Response of contrast agents to ultrasound // Advanced Drug Delivery Reviews. 2008. V. 60. P. 1117–1136.
3. *Ma X., Wang X., Hahn K., Sanchez S.* Motion control of urea-powered biocompatible hollow microcapsules // ACS NaNo. 2016. V. 10. P. 3597–3605.
4. *Church C.C.* The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 97. № 3. P. 1510–1521.
5. *Hoff L., Sontum P.C., Hovem J.M.* Oscillations of polymeric microbubbles: Effects of the encapsulating shell // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 4. P. 2272–2280.
6. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* Колебания газовых пузырьков в упругих средах // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 603–609.
7. *Khismatullin D.B., Nadim A.* Radial oscillations of encapsulated microbubbles in viscoelastic liquids // Physics of Fluids. 2002. V. 14. № 10. P. 3534–3557.
8. *Lee K.M., Wilson P.S., Wochner M.S.* Attenuation of low-frequency underwater sound using an array of air-filled balloons and comparison to effective medium theory // J. Acoust. Soc. Amer. 2017. V. 142. № 6. P. 3443–3449.

—— ♦♦♦ ——

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.А. Гущин [1], *В.Г. Кондаков* [2]
[1] *Институт автоматизации проектирования РАН, e-mail: gushchin47@mail.ru*
[2] *Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, e-mail: kondakov@ibrae.ac.ru*

В работе представлены результаты исследования задач для течений со свободной поверхностью в двумерном приближении. Для модели слабо сжимаемой среды представлена конечно-разностная схема на основе методики КАБАРЕ [1,2] на смешанной лагранжево-эйлеровой сетке. Преобразование, превращающее сетку в ортогональную прямоугольную область таково, что по горизонтальной оси узлы неподвижны, в изменение узлов происходит вдоль вертикальных граней, таким образом, что сетка по вертикальной оси остается равномерной. Рассматриваются тестовые примеры осцилляций в стакане, взаимодействия пары вихрей со свободной поверхностью, а также взаимодействия потока среды с твердой стенкой. В задаче со осцилляциями в стакане решение

сравнивается с аналитическим решением, полученным в линейном приближении уравнений Навье–Стокса. Численные результаты задач взаимодействия пары вихрей со свободной поверхностью и ундулярной борой сравниваются с результатами полученными по методу МЕРАНЖ [3], монотонной явной конечно-разностной схеме второго порядка по точности, имеющей минимальную схемную вязкость и дисперсию. Целью данной работы является разработка эффективных численных методов решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и исследование с их помощью как стационарных, так и нестационарных волновых движений жидкости.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается следующая модель [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R\rho u}{\partial x}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R\rho\left(Av+(\xi B+C)u\right)}{\partial \xi}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Ru^2}{\partial x}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Ru\left(Av+(\xi B+C)u\right)}{\partial \xi}+\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial p}{\partial x}+(\xi B+C)\dfrac{\partial p}{\partial \xi}\right]=\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Ruv}{\partial x}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Rv\left(Av+(\xi B+C)u\right)}{\partial \xi}+\dfrac{1}{R\rho}\dfrac{\partial p}{\partial \xi}=\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v. \end{cases} \quad (1)$$

где $R=H+\eta, A=\dfrac{1}{R}, B=-AR_x, C=AH_x, D=-AR_t$.

В матричном виде данная система уравнений может быть написана как:

$$R\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi}=\mathbf{Q},$$

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\end{pmatrix}, \mathbf{F}=\begin{pmatrix}R\rho u\\ R(\rho u^2+p)\\ R\rho uv\end{pmatrix}, \mathbf{G}=\begin{pmatrix}\rho v+\mathrm{R}(\xi B+C)\rho u\\ \rho uv+R(\xi B+C)(\rho u^2+p)\\ \rho v^2+R(\xi B+C)\rho uv\end{pmatrix}, \mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{\rho\Delta u}{\mathrm{Re}}\\ \dfrac{\rho\Delta v}{\mathrm{Re}}\end{pmatrix}. \quad (2)$$

Теперь рассмотрим характеристическую форму уравнений. Для этого представим как должны быть модифицированы уравнения с учетом перехода в криволинейную систему координат:

$$\begin{cases} f=f(x,y)=\phi(\chi,\xi) \\ (x,y)\to(\chi,\xi) \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial \phi(\chi,\xi)}{\partial x}=\dfrac{\partial \phi}{\partial \chi}\dfrac{\partial \chi}{\partial x}+\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial \phi(\chi,\xi)}{\partial y}=\dfrac{\partial \phi}{\partial \chi}\dfrac{\partial \chi}{\partial y}+\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}. \end{cases} \quad (3)$$

В нашем случае матрица преобразования выглядит как:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}\dfrac{\partial \chi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \chi}{\partial y} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \phi}{\partial \chi}\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \xi}\end{pmatrix} \quad (4)$$

Вычислим частные производные:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{H'_x}{R} - \frac{\xi R'_x}{R}_x \\ 0 & \frac{1}{H+\eta} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} + (\frac{H'_x}{R} - \frac{\xi R'_x}{R}_x)\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ (H+\eta)^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} + (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ A\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \end{pmatrix}$$

Возьмем уравнение состояния слабо сжимаемой среды и подставим в уравнение неразрывности:

$$\begin{cases} \rho'_t + u\rho'_x + v\rho'_y + \rho u'_x + \rho v'_y = 0, \\ \rho = 1 + p/c^2, \end{cases} \tag{5}$$

$$p'_t + up'_x + vp'_y + \rho c^2(u'_x + v'_y) = 0.$$

Далее объединим это уравнение с уравнениями на импульс без учета производных выше первого порядка:

$$\begin{cases} p'_t + up'_x + vp'_y + \rho c^2(u'_x + v'_y) = 0, \\ u'_t + uu'_x + vu'_y + \rho^{-1}p'_x = 0, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + \rho^{-1}p'_y = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Далее подставляем выражение для производных по формуле преобразования производных в криволинейной системе координат:

$$\begin{cases} p'_t + u\left(p'_x + (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})p'_\xi\right) + vAp'_\xi + \rho c^2(u'_x + (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})\mathrm{u}'_\xi + Av'_\xi) = 0, \\ u'_t + u\left(u'_x + (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})u'_\xi\right) + vAu'_\xi + \rho^{-1}\left(p'_x + (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})p'_\xi\right) = 0, \\ v'_t + u\left(v'_x + (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})\mathrm{v}'_\xi\right)_x + vAv'_\xi + \rho^{-1}Ap'_\xi = 0. \end{cases} \tag{7}$$

В матричной записи получим

$$\boldsymbol{\varphi}'_t + \mathrm{A}_x\boldsymbol{\varphi}'_x + \mathrm{A}_\xi\boldsymbol{\varphi}'_\xi = 0,$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix}, \mathrm{A}_x = \begin{pmatrix} u & \rho c^2 & 0 \\ \rho^{-1} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \mathrm{A}_\xi = \begin{pmatrix} w & (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})\rho c^2 & A\rho c^2 \\ \rho^{-1}(\mathrm{C}+\xi\mathrm{B}) & w & 0 \\ A\rho^{-1} & 0 & w \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$w = Av + (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})u$$

Находим собственные значения матриц из уравнений:

$$\begin{aligned} &\det\left(\mathbf{A}_x - \lambda\mathbf{E}\right) = 0, \\ &\det\left(\mathbf{A}_y - \mu\mathbf{E}\right) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

$$\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + c;$$

$$\mu_1 = w - c\left(A^2 + (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})^2\right)^{1/2}, \mu_2 = w, \mu_3 = w + c\left(A^2 + (\mathrm{C}+\xi\mathrm{B})^2\right)^{1/2}; \tag{10}$$

Как мы видим по два собственных числа имеют постоянный знаки:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \le |u| - c < 0, \lambda_3 \ge c - |u| > 0; \\ &\mu_1 < 0, \mu_3 > 0; \end{aligned} \tag{11}$$

Найдем собственные левые вектора матриц Ax, Ay и составим из них инварианты Римана:

$$I_1 = u - \frac{p}{\rho c}, I_2 = v, I_3 = u + \frac{p}{\rho c};$$
$$J_1 = w - \left(A^2 + (\mathrm{C} + \xi \mathrm{B})^2\right)^{1/2} \frac{p}{\rho c}, J_2 = Au - (\mathrm{C} + \xi \mathrm{B})\,\mathrm{v}, J_3 = w + \left(A^2 + (\mathrm{C} + \xi \mathrm{B})^2\right)^{1/2} \frac{p}{\rho c}; \quad (12)$$

Таким образом характеристическую систему уравнений можно написать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I_k}{\partial t} + \lambda_k \dfrac{\partial I_k}{\partial x} = q_k, \mathrm{k} = \overline{1,3}, \\ \dfrac{\partial J_l}{\partial t} + \mu_l \dfrac{\partial J_l}{\partial \xi} = r_l, l = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (13)$$

СХЕМА КАБАРЕ

Разностная схема:

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\tau} = v_{i,M-1/2}^n - u_{i,M-1/2}^n \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \quad (14)$$

$$R_{i+1/2,j+1/2}^n \frac{\mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{i+1,j+1/2}^n - \mathbf{F}_{i,j+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\mathbf{G}_{i+1/2,j+1}^n - \mathbf{G}_{i+1/2,j}^n}{\xi_{j+1} - \xi_j} = \mathbf{Q}_{i+1/2,j+1/2}^n, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \left(I_1\right)_{i,j+1/2}^{n+1} = 2\left(I_1\right)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \left(I_1\right)_{i+1,j+1/2}^n, \\ \left(I_2\right)_{i,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} 2\left(I_2\right)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \left(I_2\right)_{i-1,j+1/2}^n, (\lambda_2)_{i,j+1/2}^{n+1} > 0 \\ 2\left(I_2\right)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \left(I_2\right)_{i+1,j+1/2}^n, (\lambda_2)_{i,j+1/2}^{n+1} < 0 \end{cases}, \Rightarrow \\ \left(I_3\right)_{i,j+1/2}^{n+1} = 2\left(I_3\right)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \left(I_3\right)_{i-1,j+1/2}^n, \end{cases} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{p}_{i,j+1/2}^{n+1} = \dfrac{\rho c}{2}\left(\left(I_3\right)_{i,j+1/2}^{n+1} - \left(I_1\right)_{i,j+1/2}^{n+1}\right), \\ \mathrm{u}_{i,j+1/2}^{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\left(I_3\right)_{i,j+1/2}^{n+1} - \left(I_1\right)_{i,j+1/2}^{n+1}\right), \\ \mathrm{v}_{i,j+1/2}^{n+1} = \left(I_2\right)_{i,j+1/2}^{n+1}. \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\left(J_1\right)_{i+1/2,j}^{n+1} = 2\left(J_1\right)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \left(J_1\right)_{i+1/2,j+1}^{n}, \\
\left(J_2\right)_{i+1/2,j}^{n+1} = \begin{cases} 2\left(J_2\right)_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} - \left(J_2\right)_{i+1/2,j-1}^{n}, \left(\mu_2\right)_{i+1/2,j}^{n+1} > 0 \\ 2\left(J_2\right)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \left(J_2\right)_{i+1/2,j+1}^{n}, \left(\mu_2\right)_{i+1/2,j}^{n+1} < 0 \end{cases}, \Rightarrow \\
\left(J_3\right)_{i+1/2,j}^{n+1} = 2\left(J_3\right)_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} - \left(J_3\right)_{i+1/2,j-1}^{n},
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
p_{j+1/2,i}^{n+1} = \dfrac{\rho_0 c}{2}\left(\left(J_3\right)_{i+1/2,j}^{n+1} - \left(J_1\right)_{i+1/2,j}^{n+1}\right), \\
\mathrm{w}_n = \dfrac{\left(J_3\right)_{i+1/2,j}^{n+1} + \left(J_1\right)_{i+1/2,j}^{n+1}}{2}, \mathrm{w}_\tau = \left(J_2\right)_{i+1/2,j}^{n+1}, \\
\mathrm{u}_{j+1/2,i}^{n+1} = \dfrac{w_\tau + \dfrac{1}{2}(\mathrm{C} + \xi_{j+1/2}\,\mathrm{B})w_n}{1 + (\mathrm{C} + \xi_{j+1/2}\,\mathrm{B})^2}, \\
\mathrm{v}_{j+1/2,i}^{n+1} = \dfrac{\mathrm{w}_n - (\mathrm{C} + \xi_{j+1/2}\,\mathrm{B})\mathrm{w}_\tau}{1 + (\mathrm{C} + \xi_{j+1/2}\,\mathrm{B})^2}.
\end{cases} \tag{17}
$$

В новой схеме произведена следующая оптимизация, в начальный момент времени производится инициализация двух слоев по времени, а именно консервативные переменные инициализируются на полуцелом шаге по времени $t_{1/2}$, а потоковые величины на нулевом целом шаге по времени t_0. Далее производится расчет нового слоя уровня на новом временном слое. После этого вычисляем все вспомогательные переменные A,B,C,D на узлах и в центрах оси x. Зная все коэффициенты в уравнении для консервативных переменных, вычисляем новое значение на следующем полуцелом шаге $t_{n+1/2}$. Используя интерполяционные соотношения для инвариантов Римана вычисляем новые значения на целом шаге t_{n+1} потоковых переменных по формулам выше.

Поскольку полученная разностная схема является явной, то способ параллельной версии программы допускает произвольную декомпозиции области на связные подобласти из ячеек. Границей между соседними процессами будут служить потоковые переменные. Следовательно, для организации параллельного счета, необходимо передавать в грани приграничных ячеек значения инвариантов Римана приходящих из смежной подобласти. Также важным является предоставление значений уровней для подобласти таким образом, чтобы в нее входили все необходимые массивы для вычисления вспомогательных переменных. Чтобы упростить эту логику, можно на каждом процессе решать задачу вычисления новых значений уровней, что вполне логично, поскольку количество операций на эту процедуру пропорционально только делениям вдоль оси x.

ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

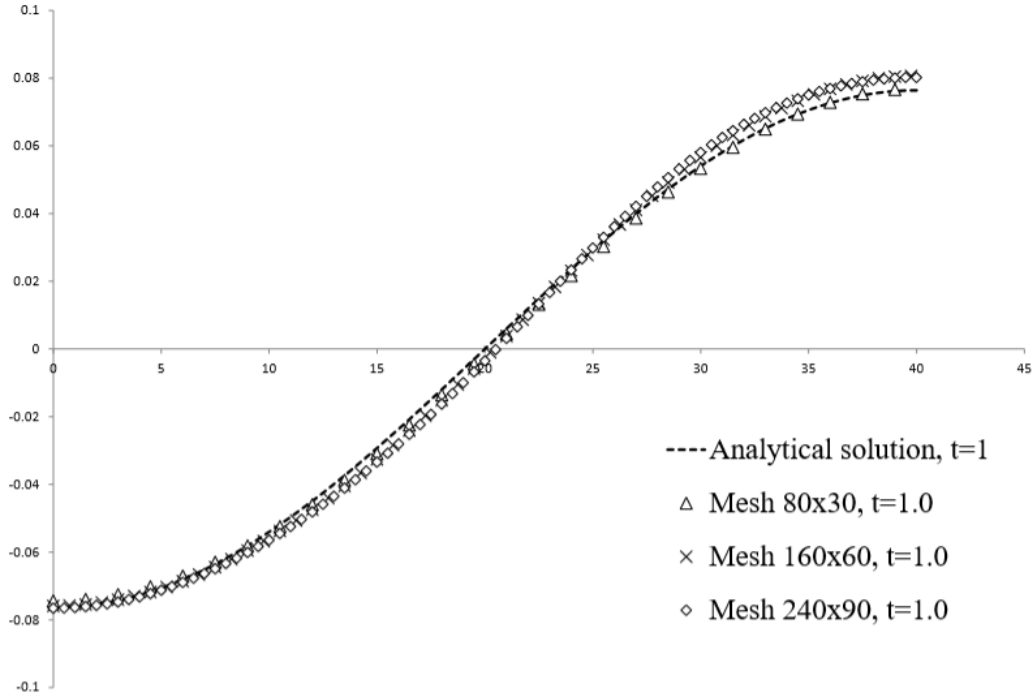


Рис.1. Сеточная сходимость решения в задаче осцилляций в стакане.

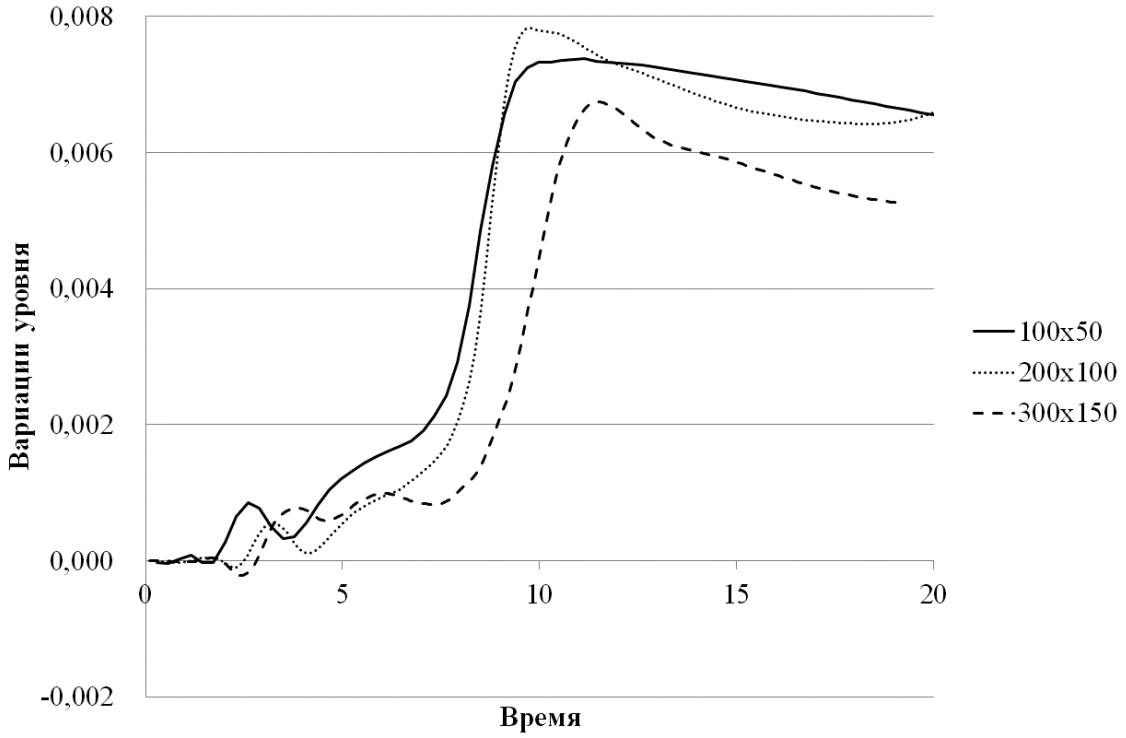


Рис.2.Форма свободной поверхности в центральной точке в задаче со сплывающей парой вихрей. Показано подобие решения на сетках с разным шагом по времени [5].

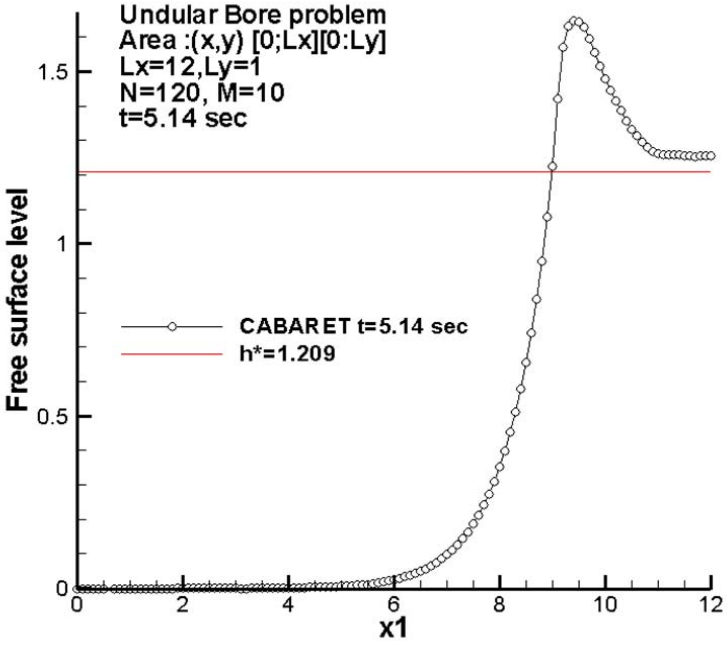


Рис.3. Выход отраженной ундулярной боры от стены справа на аналитически вычисленный уровень $h = 1.209$.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа Гущина В.А. выполнена в рамках госзадания ИАП РАН.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена новая явная конечно-разностная схема для системы преобразованных уравнений Навье–Стокса с учетом произвольной свободной поверхности. Получена дивергентная форма уравнений для уравнений импульса относительно консервативных переменных, а для потоковых переменных была получена характеристическая форма уравнений относительно инвариантов Римана. Проведены тестовые расчеты задач со свободной поверхностью, произведен сравнительный анализ результатов со схемой МЕРАНЖ (SMIF).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы “кабаре” // Матем. моделир. 1998. Т. 10:1. С. 101–116.
2. *Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кондаков В.Г.* Обобщение схемы КАБАРЕ на двумерные ортогональные расчетные сетки // Матем. моделир. 2013. Т. 25:7. С. 103–136.
3. *Gushchin V.A., Konshin V.N.* Computational aspects of the splitting method for incompressible flow with a free surface // Computers & fluids. 1992. V. 21. №. 3. P. 345–353.
4. *Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Коньшин В.Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // ЖВММФ. 1987. Т. 27:4. С. 594–609.
5. *Гущин В.А., Кондаков В.Г.* Обобщение метода КАБАРЕ на случай течений несжимаемой жидкости при наличии свободной поверхности // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. №. 11. С. 75–90.

—— ♦ ♦ ♦ ——

О ДИНАМИКЕ ПЯТЕН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В.А. Гущин, И.А.Смирнова
Институт автоматизации проектирования РАН
e-mail: gushchin47@mail.ru

Изучаем блинообразные пятна турбулентности в океане как следствие взаимодействия внутренних волн или следа движущегося в стратифицированной среде подводного объекта. Получено численное решение задачи изучения динамики стратифицированной жидкости при коллапсе (схлопывании *по вертикали*) пятен с учетом диффузии стратифицирующего компонента – соли [1]. Ранее такая задача была рассмотрена нами без учета диффузии стратифицирующего компонента [2]. За прошедшие 40 лет с момента опубликования работы [2] появились более физичные модели [1] и качественно используемых численных методов улучшилось. В данной работе показано применение одного из таких методов [3] к решению подобных задач.

МАТЕМЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая модель динамики блинообразного пятна турбулентности в стратифицированной жидкости основана на уравнениях Навье–Стокса в приближении Буссинеска. Рассматривается плоская нестационарная задача о течении, возникающем при коллапсе области однородной жидкости A, окруженной устойчиво и непрерывно стратифицированной по плотности (по линейному закону) жидкостью. Течение развивается в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения **g**.

Система уравнений, начальные и граничные условия в безразмерных переменных имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{\mathrm{Fr}} s\frac{\mathbf{g}}{g},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)s = \frac{1}{\mathrm{Sc}\cdot\mathrm{Re}}\Delta s + \frac{v}{C},\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0,$$

$$u = v = 0,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

$$\rho = 1,\ (x, y) \in A,$$

$$\rho = 1 - \frac{y}{C} + s,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash A,$$

$$s = \begin{cases} \dfrac{y}{C}, (x,y) \in A \\ 0, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus A \end{cases}$$

$$u = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad x = 0,$$

где число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_0 R_0^2 N/\mu$, число Фруда $\mathrm{Fr} = R_0 N^2/g$, число Шмидта $\mathrm{Sc} = \mu/\rho_0 k_s$, k_s – коэффициент диффузии соли, $C = \Lambda/R_0$ – отношение масштабов, N – частота Брента–Вяйсяля, R_0 – радиус пятна.

МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ФАКТОРАМ (МЕРАНЖ). КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Для решения поставленной задачи использована последняя версия Метода Расщепления по физическим факторам для исследования течений Несжимаемой Жидкости

(МЕРАНЖ). Конечно-разностная схема имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальную схемную вязкость и дисперсию, монотонность. Схема применима в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда [3]. Используется равномерная сетка ячеек.

Конечно-разностная схема определения неизвестных функций в момент времени $t_{n+1} = (n+1)\cdot\tau$ имеет вид:

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\mathbf{v}^n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v}^n + \frac{1}{\mathrm{Fr}} s^n \frac{\mathbf{g}}{g}, \tag{1}$$

$$\tau \Delta p = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \tag{2}$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\tau} = -\nabla p, \tag{3}$$

$$\frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)s^n + \frac{1}{\mathrm{Sc}\cdot\mathrm{Re}}\Delta s^n + \frac{v^{n+1}}{C}. \tag{4}$$

Сначала в исследуемой области течения задается начальное приближение, удовлетворяющее граничным условиям. Далее на каждом временном шаге схемы выполняется 4 этапа. На I этапе (1) получаем промежуточное поле скорости $\tilde{\mathbf{v}}$, считая, что перенос количества движения осуществляется только за счет диффузии, конвенции и сил плавучести. На II этапе (2) находим поле давления p из решения уравнения Пуассона для промежуточного поля скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ с учетом условия соленоидальности вектора скорости $\mathbf{v}^{n+1}$. На III этапе (3) получаем поле скорости $\mathbf{v}^{n+1}$, считая, что, перенос осуществляется только за счет градиента давления (конвекция и $\mathbf{v}^{n+1}$ диффузия отсутствуют). На IV этапе (4) рассчитывается поле возмущения солености s^{n+1}. Далее вычислительный цикл повторяется до некоторого заданного момента времени либо до выполнения некоторого критерия установления.

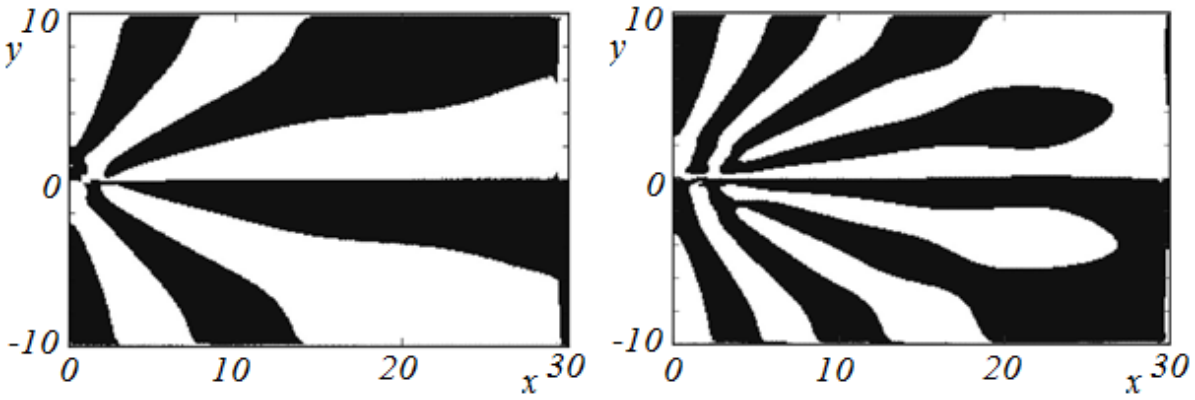
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Расчеты выполнены в прямоугольной области размером $X = 15$, $Y = \pm 5$, с равномерной сеткой ячеек с шагами $h_x = h_y = 0.1$, где $\mu/\rho_0 = 0.01$ см^2/с, $k_s = 1.41\cdot10^{-5}$ см^2/с, $R_0 = 1$, $N = 1$ с$^{-1}$, $T_b = 2\pi/N$ с, $\Lambda = 10$ см, C=10, Re = 100, Fr = 0.1, Sc = 709.2. В качестве граничных условий на верхней, нижней и правой границах расчетной области задано состояние покоя $u = v = s = 0$.

Исследовано влияние размеров пространственной и временной сеток на результаты расчетов: вычисления выполнены при следующих параметрах: **1** – 300×100, h_x=0.05, h_y=0.1, τ=0.005; **2** – 150×200, h_x=0.1, h_y=0.05, τ=0.005; **3** – 300×200, h_x=0.05, h_y=0.05, τ=0.005; **4** – 600×100, h_x=0.025, h_y=0.1, τ=0.0025; **5** – 150×400, h_x=0.1, h_y=0.025, τ=0,0025; **6** – 600×400, h_x=0.025, h_y=0.025, τ=0.0025. Также размеры расчетной области увеличены в два раза, проведены расчеты при 300×200, h_x=0.1, h_y=0.1, τ=0.01 и при 150×100, h_x=0.1, h_y=0.1 для проверки влияния степени удаленности внешних границ на результаты расчетов. Выявлено, что результаты практически не зависят от величины сеточных параметров и размеров области в указанном диапазоне. Изменение линейных размеров пятна со временем происходит не монотонно.

Вычислены поля изменения возмущения солености ds/dx при следующих параметрах: **a)** 150×100, h_x=0.1, h_y=0.1, τ=0.01; **b)** 300×200, h_x=0.05, h_y=0.05, τ=0.005; **c)** 600×400, h_x=0.025, h_y=0.025, τ=0.0025 для t=4; t=10; t=16; t=20. На рис. 1 приведены поля изменения возмущения солености ds/dx. Белый цвет соответствует положительным значениям производной, а черный – отрицательным значениям. Границы раздела между черным и белым цветами полей при заданном уровне y соответствуют значениям ds/dx=0, то есть минимумам и максимумам функции s или гребням и впадинам

внутренних волн. Фактически это линии равной фазы. Из рис. 1 также видно, что со временем линии равной фазы смещаются слева направо, а их наклон по отношению к горизонту уменьшается.



a *b*

Рис. 1. *Поле изменения возмущения солености ds/dx. Область X=30, Y=10. а) t=10; б) t=20.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель динамики пятен в стратифицированной жидкости. Проведены многочисленные тестовые и методические расчеты по изучению влияния сеточных параметров на результаты. Численно выявлено, что развитие пятна происходит несимметрично относительно горизонтальной оси, изменение вертикального размера пятна немонотонно по времени и имеет квазипериодический характер. Приведено сравнение с аналитическими оценками, экспериментальными данными и расчетами других авторов. Хорошее совпадение результатов подтверждает возможность применения данной модели, в том числе для расчета течений жидкости с нелинейной стратификацией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гущин В.А., Миткин В.В., Рождественская Т.И., Чашечкин Ю.Д.*. Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра. // Прикладная механики и техническая физика. 2007. Т. 48, №1, С. 43–54.
2. *Гущин В.А.* Метод расщепления для задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости. // ЖВММФ. 1981. Т. 21, № 4, С. 1003–1017.
3. *Гущин В.А.* Об одном семействе квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации // Мат. моделир. 2016. Т. 28, № 2. С. 6–18.

—— ♦♦♦ ——

РАСЧЕТ МНОГОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР ТЕЧЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Н.Ф. Димитриева [1,2]
[1] *Институт гидромеханики НАНУ, Украина*
[2] *Киевский политехнический институт им. И. Сикорского, Украина*
e-mail: dimitrieva@list.ru

В настоящей работе предложена методика решения одной из наиболее актуальных научных проблем – построению и численной реализации пол-

ных моделей многомасштабной структуры течений неоднородных жидкостей, допускающих прямое сравнение с экспериментом. В поле силы тяжести атмосфера и гидросфера обладает устойчивой стратификацией, где плотность определяется распределениями температуры, давления или концентрации примеси. Вариации плотности обычно малы, однако их градиенты могут быть большими, обеспечивающими заметное влияние на динамику протекающих процессов. Особенно большой интерес вызывают пространственно упорядоченные структуры, обладающие высокой степенью внутренней симметрии.

Изучается обтекание непрерывно стратифицированной жидкостью горизонтального клина с учетом эффектов вязкости и диффузии.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическое моделирование поставленной задачи осуществляется на основе фундаментальной системы уравнений механики неоднородных жидкостей:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho_{00}}\nabla P+\nu\Delta\mathbf{v}-s\mathbf{g}, \qquad \frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla s=\kappa_s\Delta s+\frac{v_z}{\Lambda},$$

$$\nabla\mathbf{v}=0, \qquad \rho=\rho_{00}\left(\exp(-z/\Lambda)+s\right),$$

с граничными условиями

$$\mathbf{v}\big|_{\Sigma}=0, \quad s\big|_{\infty}=0, \quad v_x\big|_{\infty}=U, \quad v_z\big|_{\infty}=0, \quad \left.\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Sigma}=-\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}}+\left.\frac{\partial s}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Sigma}=0.$$

Здесь $S=S_0(z)+s$ – полная соленость, s – ее возмущенная составляющая, ρ_{00} – плотность на горизонте нейтральной плавучести, $\rho_0(z)$ – невозмущенное распределение плотности, которое задается профилем солености $S_0(z)$, $\mathbf{v}=(v_x,v_z)$ – скорость жидкости, где ось *z* направлена вертикально вверх, P – давление за вычетом гидростатического; ν – коэффициент кинематической вязкости; κ_s – коэффициент диффузии соли; *t* – время, **g** – ускорение свободного падения, ∇ и Δ – операторы Гамильтона и Лапласа, **n** – внешняя нормаль к поверхности препятствия $\sum$. Установившееся поля физических переменных течения, индуцированного диффузией на неподвижном теле, служат начальными условиями для задачи обтекания тела потоком непрерывно стратифицированной жидкости [1].

МАСШТАБЫ ЗАДАЧИ

Задача характеризуется набором размерных параметров ($\nu=10^{-6}$ м^2/с, $\kappa_S=1{,}4\cdot10^{-9}$ м^2/с, $g=9{,}8$ м/с^2, $T_b=6{,}3$ с), которые формируют характерные масштабы: времени $t=T_b$, длины (плавучести $\Lambda=\left(d\ln\rho_0/dy\right)^{-1}$,продольного L и поперечного h размеров обтекаемого тела, вязкого $\delta_N^{\nu}=\sqrt{\nu T_b/2\pi}$ и диффузионного $\delta_N^{\kappa_S}=\sqrt{\kappa_S T_b/2\pi}$ микромасштабов) и скорости ($U_N^{\nu}=\sqrt{2\pi\nu/T_b}$ м/с, $U_N^{\kappa_S}=\sqrt{2\pi\kappa_S/T_b}$ м/с и скорость набегающего потока *U*). Скорость источника *U* задает длину гравитационных поверхностных $\lambda_S=2\pi U^2/g$ и внутренних $\lambda_i=UT_b$ гравитационных волн.

Большие линейные масштабы характеризуются исходной стратификацией Λ и

геометрией течения L. Микромасштабы диссипативной природы (δ_N^{ν} и $\delta_N^{\kappa_S}$) определяют поперечные размеры тонкоструктурных компонентов. Компоненты структур с масштабами Прандтля $\delta_U^{\nu} = \nu/U$ и $\delta_U^{\kappa_S} = \kappa_S/U$ выражены в струях и следах.

Как показали комплексные исследования фундаментальных уравнений течений неоднородных сплошных сред в гравитационном поле, включающие лабораторный эксперимент с использованием высокоразрешающего оборудования, высокопроизводительное численное моделирование и теоретический анализ свойств линеаризированных, все компоненты полного решения проявляются в широком диапазоне параметров [1]. Регулярно возмущенные компоненты решений характеризуют волны и вихри макромасштабов. Семейство сингулярно возмущенных компонент описывают сопутствующие тонкоструктурные элементы течений. Волны и вихри в неоднородных средах существуют одновременно и активно взаимодействуют между собой наряду с формирующейся тонкой структурой, которая влияет на перенос вещества, процессы разделения компонент течений, а также повышения локальной концентрации примеси [2, 3].

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Широкий диапазон значений масштабов указывают на сложность внутренней структуры стратифицированного течения, которую необходимо учитывать при разработке методики численного моделирования. Основными критериями для оценки параметров области решения и степени ее пространственной дискретизации являются макромасштабы Λ и L, на основе которых определяются размеры расчетной области, и микромасштабы δ_N^{ν} и $\delta_N^{\kappa S}$, задающие минимальные размеры ячеек расчетной сетки. Проведенные тестовые расчеты с различным измельчением сетки подтвердили необходимость разрешения минимальных масштабов задачи. При проведении расчетов на достаточно грубой сетке вблизи препятствия фиксируются локальные нефизические осцилляции решения, которые при продолжительных вычислениях приводят к накоплению погрешности и остановке счета.

Численное моделирование системы уравнений движения в пакете OpenFOAM проводится методом конечных объемов в декартовой системе координат. Для учета эффектов стратификации и диффузии стандартный решатель icoFoam для однородной жидкости был дополнен новыми переменными (ρ и s) и соответствующими уравнениями для их расчета, а также новыми вспомогательными параметрами (N, Λ, κ_s, $\mathbf{g}$ и др.) [4]. Граничное условие возмущения солености было реализовано с помощью расширенной утилиты funkySetBoundaryField, которая позволяют задавать аналитические выражения для различных физических переменных. Вычисления, проведенные с использованием ресурсов web-лаборатории UniHUB, показали возможность расчета многомасштабных течений в широком диапазоне параметров задачи.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Устойчиво стратифицированная среда, находится в состоянии покоя, если градиенты плотности параллельны линии действия силы тяжести. Прерывание молекулярного потока на непроницаемых границах произвольной формы формирует течения, индуцированные диффузией, которые включают пограничные слои, крупные медленные вихри и диссипативно-гравитационные волны (рис. 1).

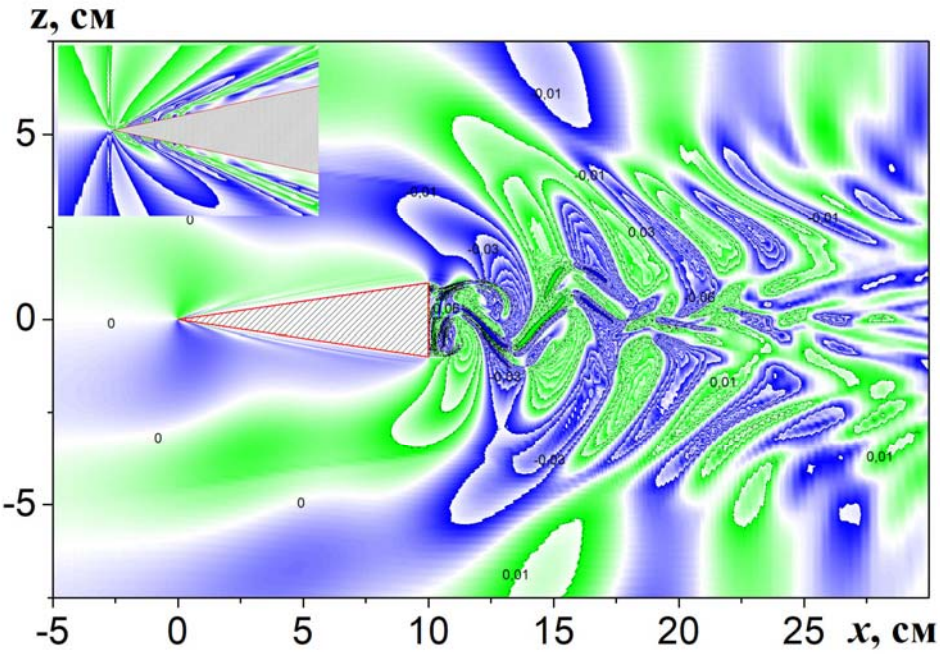


Рис. 1. Продольный градиент возмущения солености $\partial s/\partial x$ при движении клина со скоростью $U = 1$ см/с ($L = 10$ см, $h = 2$ см, $T_b = 6{,}3$ с).

Принципиальное различие от картины обтекания однородной жидкостью наблюдается вблизи острой вершины клина, где проявляются системы периодических структур. Источником внутренних волн служат краевые сингулярности, генерирующие интенсивное вертикальное вытеснение жидкости, что приводит к отклонению от изначального положения нейтральной плавучести и, как следствие, формированию периодических затухающих колебаний жидкости. Устойчивая стратификация обычно характеризуется «тонкой структурой» – последовательностью высокоградиентных прослоек, разделяющих более однородные толстые слои.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнены высокоразрешающие расчеты и анализ свойств нестационарных двумерных стратифицированных течений непрерывно стратифицированной жидкости около клина в практически важном диапазоне параметров. Определены механизмы формирования вихрей в областях больших градиентов плотности в окрестности кромок.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Расчеты проводились с использованием ресурсов web-лаборатории UniHUB.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левицкий В.В., Димитриева Н.Ф., Чашечкин Ю.Д.* Визуализация самодвижения свободного клина нейтральной плавучести в резервуаре, заполненном непрерывно стратифицированной жидкостью, и расчет возмущений полей физических величин, приводящих тело в движение // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 3. С. 414–427.
2. *Dimitrieva, N. F.* Formation of the Vorticity Field of a Stratified Fluid Near a Wedge // In Proceedings Topical Problems of Fluid Mechanics, Prague, 2019 Edited by D.Šimurda and T.Bodnár, P. 69–76.
3. *Димитриева Н.Ф.* Структура стратифицированного течения вблизи горизонтального клина // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 3. С. 404–413.

4. *Димитриева Н.Ф.* Численное моделирование эффектов диффузии в поле силы тяжести // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XV Международной научной конференции, (с. Цей, 15–20 июля 2019), Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2019, с.168–169.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ДИСПЕРСИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НАД БЫСТРОМЕНЯЮЩИМИСЯ УЧАСТКАМИ ДНА БАССЕЙНА

С.Ю. Доброхотов
Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН
e-mail: dobr@ipmnet.ru

В лекции рассматриваются двумерные линейные уравнения, описывающие распространение волн на воде в бассейне с неровным дном, содержащего в том числе быстроменяющиеся участки. Предполагается, что волны порождаются пространственно-локализованными источниками. Рассматриваются как уравнение для длинных волн– волновое уравнение, так и полное (псевдодифференциальное) уравнение, включающее стандартную дисперсию. С математической точки зрения наличие быстроменяющихся участков дна означает наличие быстрых осцилляций в коэффициентах соответствующих уравнений. В принципе, для решения задач такого типа применяются методы осреднения (развитые, в частности, В. Жиковым, О. Олейник, В. Марченко, Е. Хрусловым, Н. Бахваловым, Г. Панасенко, Бенсусаном, Лионсом, Папаниколау), приводящие к некоторым новым осредненным «редуцированным» уравнениям. При этом в случае волнового уравнения редуцированное уравнение имеет структуру, близкую к волновому. Однако, указанные методы работают в том случае, когда длина распространяющихся волн сильно превосходит размеры осцилляций участков дна. В том случае, когда длина распространяющейся волны становится сравнимой с размером осцилляций, указанные методы осреднения не работают, и для исследования таких задач следует использовать методы, известные в квантовой и волновой механики как адиабатическое приближение, подстановка Пайерлса, а также операторное исчисление Фейнмана–Маслова. Применение этих подходов приводит к редуцированным уравнением, содержащим добавочные дисперсионные слагаемые. В лекции обсуждаются указанные методы вывода этих дисперсионных слагаемых для волнового уравнения и в случае полного уравнения теории поверхностных волн – вывод дополнительных к стандартной дисперсии дисперсионных слагаемых. Также обсуждается степень влияния этих «новых» дисперсионных слагаемых на поведение волн, порождаемых начальными локализованными возмущениями.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Лекции основаны на совместных работах с Й. Брюнингом, В. Грушиным, В. Назайкинским, С. Сергеевым и поддержанных грантами РФФИ 14-01-00521, 17-01-00644.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СОПЛОВОЙ ЧАСТИ РАСПЫЛИТЕЛЯ И РЕЖИМА ЕГО РАБОТЫ НА РАЗВИТИЕ СТРУЙ ВПРЫСКИВАЕМОГО ТОПЛИВА

А.Ю. Дунин, П.В. Душкин, С.М. Калинина, П.И. Беляев, В.О. Шацких
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
e-mail: a.u.dunin@yandex.ru

Эксплуатационные характеристики дизеля во многом зависят от организации сгорания топлива, которое определяется процессами его испарения и перемешивания полученной газовой фазы с воздухом.

Значимые резервы улучшения описанных выше процессов заложены в совершенствовании конструкции форсунок путем: оптимизации отношения длины распыливающего канала (отверстия) к его диаметру. Существенное влияние на мелкость распыливания оказывают: место расположения входных кромок распыливающих отверстий распылителя, игла распылителя, т.е. изменение положения запирающей иглы распылителя в процессе впрыскивания.

ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Объектами сравнительных испытаний были распылители: экспериментальный №1, выполненные по схеме рис. 1,а; экспериментальный №2, выполненный по схеме рис. 1,б.

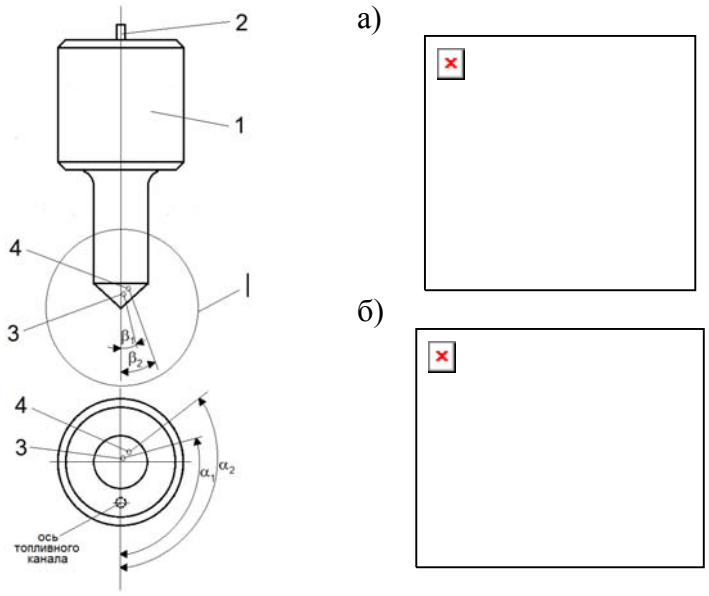


Рис. 1. Схемы экспериментальных распылителей:
а – распылитель №1; б – распылитель №2; 1 – корпус; 2 – запирающая игла; 3, 4 – распыливающие отверстия; 5, 7 – входные кромки распыливающих отверстий; 6 – подыгольный объем; 8, 9 – запирающие конуса корпуса и иглы; 10 – кольцевая проточка на игле

Оба распылителя имеют по два распыливающих отверстия. Входные кромки 5 отверстия 3 находятся в подыгольном объеме, а входные кромки 7 отверстия 4 – на запирающем конусе. При этом в отличие от распылителя №1 конструкция распылителя №2

предусматривает кольцевую проточку 10 на игле 9 (рис. 1,б).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА ВПРЫСКИВАНИЯ И СТРУЙ РАСПЫЛЕННОГО ТОПЛИВА

Программа работ включала определение характеристик впрыскивания и скоростных характеристик топливоподачи, а также предусматривала оценку распределения топлива по распыливающим отверстиям в зависимости от режима работы распылителя.

Скоростные характеристики топливоподачи через исследуемые распылители (рис. 2) оценивались по общепринятой методике. Распылители №1 и №2 попеременно устанавливались в форсунку, в которую топливо нагнеталось топливным насосом высокого давления (ТНВД) модели Bosch PE80D421 по топливопроводу длиной 450 мм при внутреннем диаметре 1,6 мм.

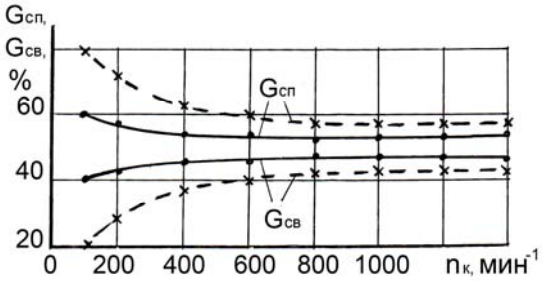


Рис. 2. Скоростные характеристики топливоподачи:
———– распылитель №1; ————– распылитель №2

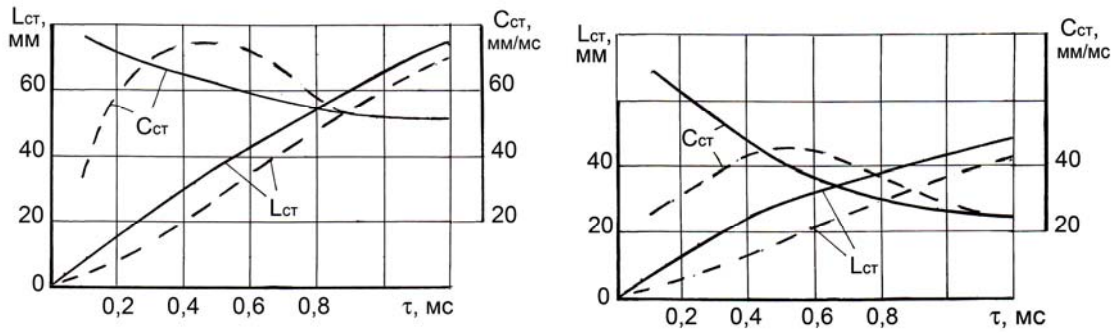
Опыты проводились при фиксированном положении органа управления ТНВД, обеспечивающего одинаковую цикловую подачу $G_ц$ = 47мг при частоте вращения кулачкового вала ТНВД $n_к$ = 1400 мин$^{-1}$. При $n_к$ = 1000 мин$^{-1}$ и $n_к$ = 600 мин$^{-1}$ распылитель №1 обеспечивает соответственно $G_ц$ = 46,0 мг и $G_ц$ = 45,9 мг.

На рис. 2: $G_{сп}$ – количество топлива, поданного через распыливающие отверстия 3 (рис. 1) с входными кромками в подыгольном объеме; $G_{св}$ – количество топлива, поданного через распыливающие отверстия 4 (рис. 1) с входными кромками на запирающем конусе. При этом цикловая подача $G_ц$ – это сумма $G_{сп}$ и $G_{св}$.

Полученные результаты (рис. 2) объясняются различными гидравлическими характеристиками распыливающих отверстий. При максимальных подъемах иглы коэффициенты расхода распыливающих отверстий 3 ($\mu_{сп}$) (рис. 1) и 4 ($\mu_{св}$) отличаются примерно на 10%, а на частичных подъёмах иглы – в 2…3 раза. Впрыскивание топлива на режиме пуска происходит при y < 0,15 мм, поэтому на этом режиме через отверстие первой группы подаётся основная масса топлива.

В качестве параметров струй рассматривались: $L_{стп}$, $C_{стп}$ – пройденное расстояние и скорость переднего фронта для распыливающего отверстия 3 (рис. 1,а) и $L_{ств}$, $C_{ств}$ – пройденное расстояние и скорость переднего фронта для распыливающего отверстия 4 (рис. 1,а). При этом скорости $C_{стп}$ и $C_{ств}$ определялись численным дифференцированием кривой перемещения.

Результаты экспериментальных исследований параметров струй топлива, выходящих из распылителя №1, представлены на рис. 3.



а *б*

Рис. 3. Параметры струй топлива, поданного через распылитель №1:
а – n = 1400 мин$^{-1}$, $G_ц$ = 48 мг; б – n = 600 мин$^{-1}$, $G_ц$ = 46 мг;
————– распыливающее отверстие с входными кромками в подыгольном объеме ($L_{стп}$, $C_{стп}$);
————– распыливающее отверстие с входными кромками на запирающем конусе ($L_{ств}$, $C_{ств}$)

Из полученных результатов видно, что длина топливной струи, впрыскиваемой из распыливающего отверстия с μсп, больше на всех исследованных режимах работы ТС. Так за период времени τ = 1,0 мс, на режиме n = 1400 мин–1, $G_ц$ = 48 мг (рис. 3,а) передний фронт топливной струи отверстия с μсп проходит расстояние, равное 64 мм, а для топливной струи из распыливающего отверстия с μсв эта величина составляет 58 мм, т.е. на 10% меньше. За это же время при $n_к$ = 600 мин$^{-1}$, длины исследованных топливных струй отличаются на 19% (рис. 3,б).

Представленные результаты (рис. 3), а также анализ видеорегистрации показывают, что обе топливные струи начинают своё движение практически одновременно, но с существенно различными скоростями. Так, на режиме n = 1400 мин$^{-1}$, $G_ц$ = 48 мг, в начале подачи топлива (τ = 0,1 мс) средняя скорость $C_{стп}$ превышает значение $C_{ств}$ примерно в 2,3 раза. В дальнейшем скорости выравниваются и при τ > 0,8 мс передние фронты топливных струй, выпущенные из обоих распыливающих отверстий, перемещаются практически с равными скоростями. Аналогичная картина имела место и на других режимах работы ТС, укомплектованной распылителем №1.

Таким образом, экспериментальные распылители №№ 1и 2 (рис. 1) позволяют осуществлять относительную коррекцию развития струй распыленного топлива, ориентированных в различные зоны камеры сгорания дизеля. Это дает возможность для управления процессами раздельно по нескольким зонам камеры сгорания дизеля и улучшать тем самым его экономические и экологические показатели.

ВЫВОДЫ

- Подтверждена возможность перераспределения массовой подачи топлива между распыливающими отверстиями одного распылителя (отверстие №1 в подыгольном объеме и отверстие №2 на запирающем конусе), эффективное проходное сечение которых зависит от расположения их входных кромок.
- Динамика изменения давления в топливопроводе и каналах форсунки при впрыскивании топлива оказывает влияние на перераспределение топлива по распыливающим отверстиям распылителя. Так, на режиме $n_к$ = 1400 мин$^{-1}$ через отверстие №1 подаётся 55% от общей массы топлива $G_ц$. С уменьшением величины $n_к$ до 600 мин$^{-1}$, доля топлива подаваемого через это отверстие увеличивается до 60%.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Научные исследования проводятся при финансовой поддержке Российского научного фонда по соглашению № 19-19-00598 от 23 апреля 2019 г.

—— ♦♦♦ ——

МЕТОДИЧЕСКОЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВПРЫСКИВАНИЯ ТОПЛИВА ПОД ДАВЛЕНИЕМ ДО 300 МПА

П.В. Душкин, А.Ю. Дунин, В.В. Кремнев, С.С. Ховренок, А. Шаган
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
e-mail: levvap@gmail.com

Совершенство смесеобразования в камере сгорания (КС) дизеля, во многом, определяется динамикой струи впрыскиваемого топлива, зависящей как от условий в КС, так и от конструкции топливной системы (ТС). Необходимость повышения энергии впрыскиваемого топлива для улучшения экологических и энергетических показателей дизелей требует создания новых конструкций ТС.

Одно из основных средств разработки ТС – расчетные комплексы, в основе которых находятся законы механики жидкостей, позволяющие с достаточной точностью моделировать впрыскивание топлива. Рабочий процесс дизеля и ТС постоянно усложняется, что повышает требования к качеству математических моделей, совершенствование и проверка которых требует соответствующего методического и технического обеспечения экспериментального исследования явлений, сопровождающих процесс впрыскивания.

В данном докладе представлены результаты разработки элементов методики и оборудования исследовательского стенда для определения гидравлических характеристик процесса впрыскивания топлива с давлением до 300 МПа.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ СТЕНД

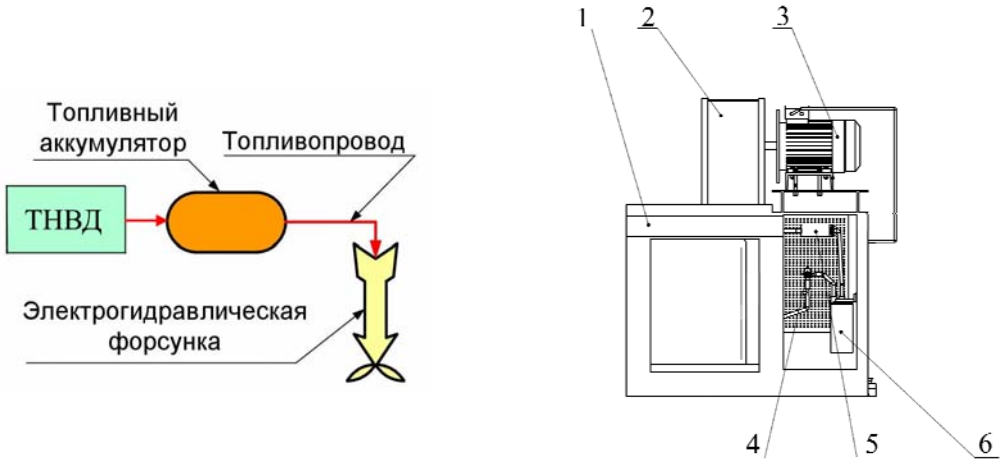
Задачи, решаемые исследовательским стендом:

1. регистрация волновых процессов в линии высокого давления ТС;
2. фотографирование струи впрыскиваемого топлива;
3. регистрация дифференциальной характеристики впрыскивания (изменения массовой скорости впрыскивания топлива) и количества поданного топлива.

Давление в топливном аккумуляторе (рис. 1) создается топливным насосом высокого давления (ТНВД) и может составлять 30…300 МПа. Верхний диапазон давлений ограничен в первую очередь требованиям к надежности элементов стенда. Допустима кратковременная перегрузка до 350…400 МПа. Впрыскивание осуществляется электрогидравлической форсункой (на схеме не указана), соединенной с топливным аккумулятором стальным топливопроводом. Для стенда и топливной системы разработана электронная система управления.

Неотъемлемая часть исследовательского стенда – измерительная система. Возможности разрабатываемого в МАДИ стенда позволяют регистрировать: напряжение и ток (I, рис. 2) активации клапана управления электрогидравлической форсункой, давление в топливном аккумуляторе, давление на топливо проводе на входе в ЭГФ (p, рис. 2), дифференциальная характеристика впрыскивания (qQ/dt на рис. 2).

Для регистрации дифференциальной характеристики (скорость истечения топлива через отверстия распылителя, qQ/dt на рис. 2) разработано устройство, представленное на рис. 3.



а) *б)*

Рис. 1. Структурная схема: а – линия высокого давления; б – стенд: 1 – рама, 2 – кожух муфты, 3 – электродвигатель, 4 – регулятор давления подкачки, 5 – топливоподкачивающий насос, 6 – фильтр тонкой очистки топлива

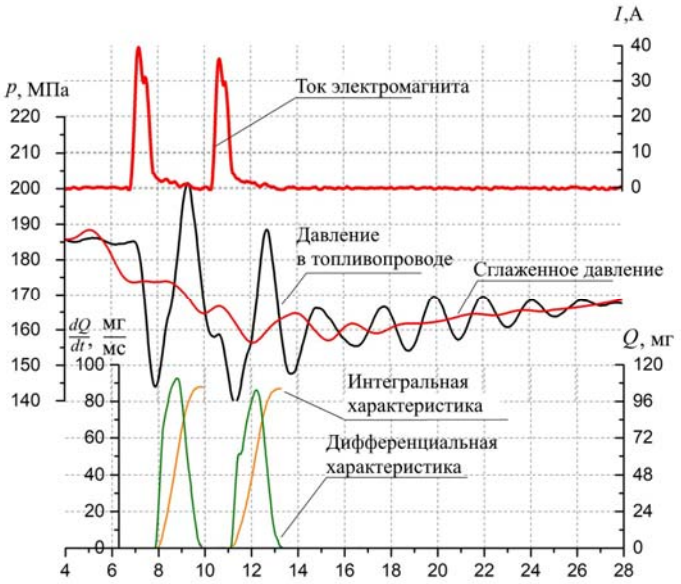


Рис. 2. Получаемые в процессе работы данные: p – давление, I – электрический ток, q – скорость истечения топлива через отверстия распылителя (дифференциальная характеристика), Q – интегральная характеристика

В основе методики работы с устройством находится уравнение [1]:

$$\frac{dQ}{qt} = \frac{A}{c} p,$$

где: dQ/dt– дифференциальная характеристика, A – площадь проходного сечения жиклера на выходе из камеры, с – скорость звука в топливе, p – давление.

Давление измеряется пьезоэлектрическим датчиком 1 (рис. 3). Площадь проходного сечения A определяется диаметром жиклера 3. Диаметр жиклера подбирается таким образом, чтобы максимальное давление в камере впрыскивания соответствовало характерному давлению рабочего процесса дизеля (20…30 МПа). Редукционный клапан поддерживает остаточное давление 1 МПа в рукавах и камере впрыскивания для исключения газовой фазы.

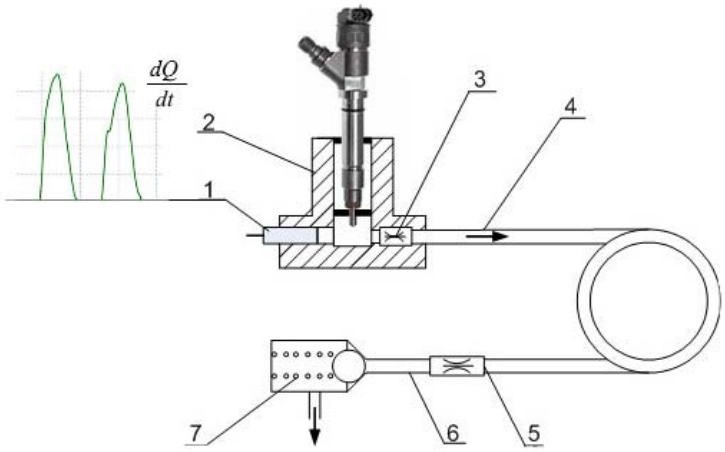
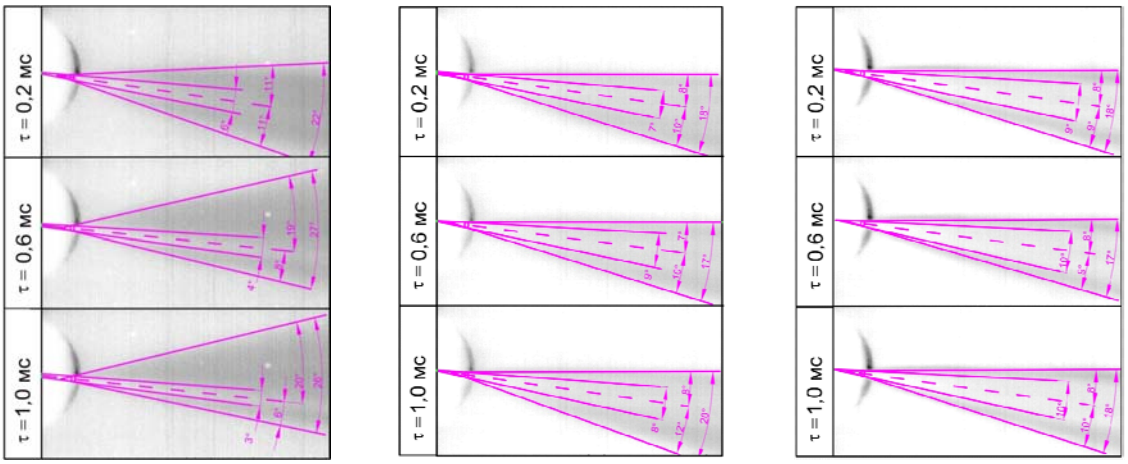


Рис. 3. Устройство регистрации характеристики впрыскивания:
1 – пьезоэлектрический датчик давления, 2 – камера впрыскивания с электрогидравлической форсункой, 3 – основной жиклер, 4 – жёсткий рукав, 5 – переходной фитинг, 6 – гибкий рукав, 7 – редукционный клапан

Важный элемент устройства для регистрации характеристики впрыскивания – длинный жесткий рукав 4, необходимый для измерения скорости звука в топливе.

Ведется работа по формированию установки для фоторегистрации топливных струй. Предварительные результаты представлены на рис. 4.



а) *б)* *в)*

Рис. 4 – фотографии струй впрыскиваемого топлива при давлении в топливном аккумуляторе: а – 50 МПа, б – 150 МПа, в – 250 МПа

Съемка производилась высокоскоростной камерой. Фотографии представляют собой снимки рассеянного на каплях и частичках дизельного топлива света (черный и белый цвета на фотографии инвертированы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bosch, W. The Fuel Rate Indicator: A New Measuring Instrument For Display of the Characteristics of Individual Injection / W. Bosch // SAE International, 1966, 22p

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Научные исследования проводятся при финансовой поддержке Российского научного фонда по соглашению № 19-19-00598 от 23 апреля 2019 г.

—— ♦♦♦ ——

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИКИ ВИХРЕЙ И ТЕЧЕНИЙ В ЧЕРНОМ МОРЕ НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИРКУЛЯЦИИ

О.А. Дымова, С.Г. Демышев
Морской гидрофизический институт РАН
e-mail: olgadym@yahoo.com

Циркуляция в Черном море характеризуется крупномасштабным циклоническим круговоротом, называемым Основным черноморским течением (ОЧТ), которое распространяется вдоль континентального склона. По многолетним данным наблюдений установлено, что ОЧТ ослабевает в теплое время года и усиливается в осенне-зимний период. Между ОЧТ и берегом формируются вихревые структуры различного знака завихренности (преимущественно антициклоны), которые перемещаются по направлению тока ОЧТ. Наиболее интенсивными и долгоживущими вихрями в Черном море являются Севастопольский и Батумский антициклоны. Их размер составляет порядка 100 км, а время жизни в среднем варьируется от 4 до 8 месяцев. Относительно радиуса деформации Россби для Черного моря (около 25 км) эти вихри можно классифицировать как мезомасштабные и квазигеострофические (число Россби < 1). Цепочки прибрежных антициклонических вихрей с размерами порядка 30 км и временем жизни несколько недель, формирующиеся в прибрежных зонах, также являются мезомасштабными.

В работе на основе численной вихреразрещающей модели получены трехмерные поля среднесуточных значений термогидродинамических характеристик, сформировавшихся под воздействием климатического форсинга и квазиреальных атмосферных данных за 2011 и 2016 гг. По результатам численных экспериментов рассчитаны интегральные величины компонентов энергетического цикла в Черном море. Для исследования механизмов изменчивости циркуляции анализируются среднегодовые энергетические циклы, а также скорость трансформации энергии вследствие баротропной и бароклинной неустойчивости.

ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ

Численные эксперименты проведены с использованием вихреразрешающей z-модели Морского гидрофизического института РАН (модель МГИ) [1] с горизонтальным разрешением 1,6 км, что является достаточным для исследования мезомасштабной динамики в Черном море. Модель построена на основе полной системы уравнений термогидродинамики океана, записанной в декартовой системе координат, в приближении Буссинеска, гидростатики и несжимаемости морской воды. Плотность нелинейно зависит от температуры и солености. Возвышение уровня рассчитывается с использованием кинематического условия на свободной поверхности. Потоки тепла, осадки, испарение и касательные напряжения трения ветра задаются в качестве граничных полей на поверхности моря. В модель включено усвоение температуры поверхности моря. Вертикальное турбулентное перемешивание параметризовано с помощью модели турбулентного замыкания Меллора – Ямады. Коэффициенты горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии постоянны. На дне ставятся условия непротекания и отсутствия потоков тепла и соли, трение о дно не учитывается. На твердых боковых участках границы выполняются условия скольжения и непротекания, для температуры и солености задано равенство нулю нормальных производных. На жидких участках границы учитывается сток рек и водообмен через проливы. В начальный момент времени задаются возвышение уровня, температура, соленость и горизонтальные скорости течений. Модель МГИ реализована на сетке "С" с равномерным шагом по горизонтальным координ-

натам. По вертикали выбраны 27 неравномерных z-горизонтов со сгущением в верхнем деятельном слое.

Проведено три численных эксперимента по моделированию циркуляции Черного моря. В первом в качестве атмосферного форсинга использованы среднемесячные климатические данные, во втором и третьем – данные SKIRON за 2011 и 2016 гг., соответственно. Начальные поля для каждого года построены по данным системы диагноза и прогноза гидрофизических полей Черного моря, функционирующей в МГИ. Все эксперименты выполнены сроком на один год, выходными данными являются среднесуточные трехмерные поля температуры, солености, скорости течений и двумерное поле уровня моря на каждые сутки.

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИКИ

Энергетика вод океанских бассейнов складывается из кинетической энергии среднего течения (СКЭ) и вихревой кинетической энергии (ВКЭ), которая формируется флуктуациями скорости течений относительно среднего значения. Стратификация вод определяет потенциальную энергию системы (СПЭ), а отклонение от среднего значения принято называть доступной потенциальной энергией (ДПЭ). Источниками ВКЭ являются пульсации касательных напряжений трения ветра, переход кинетической энергии от среднего течения за счет сдвига скорости и переход потенциальной энергии за счет ДПЭ. Имея поля температуры, солености, зональную и меридиональную компоненты скорости на каждые сутки, мы рассчитали средние за год, а также пульсации (отклонения от среднего на каждые сутки года) полей скорости и плотности. На основе полученных данных для количественных оценок изменения энергетики Черного моря в различные периоды времени были рассчитаны проинтегрированные по объему величины СКЭ, ВКЭ, а также скорости преобразования между ВКЭ и СКЭ (обозначим как c(ВКЭ, СКЭ) и между ВКЭ и ДПЭ (обозначим c(ВКЭ, ДПЭ) для всех экспериментов. Трансформация энергии из СКЭ в ВКЭ обусловлена процессами баротропной неустойчивости, а переход энергии из ДПЭ в ВКЭ – процессами бароклинной неустойчивости. Проинтегрированные по объему величины c(ВКЭ, СКЭ) и c(ВКЭ, ДПЭ) рассчитаны по формулам (15), (17) работы [2]. Для исследования пространственного распределения энергетических характеристик величины ВКЭ, c(ВКЭ, СКЭ) и c(ВКЭ, ДПЭ) были проинтегрированы по вертикали в слое от 0 до 200 м.

Для всех экспериментов были построены диаграммы преобразования энергии, которые иллюстрируют величины и направления среднегодовых потоков, формирующих бюджет полной энергии системы. Получено, что максимальная величина СКЭ наблюдалась при учете климатических данных, минимальная – с данными форсинга за 2016 г. ВКЭ достигала наибольших значений в 2011 г. По расчетам с реальным форсингом СПЭ и ДПЭ превышали климатические значения более чем в два-три раза. Анализ скоростей преобразования энергии показал, что для всех экспериментов среднегодовой поток СКЭ был направлен от среднего течения в вихри. Также для всех экспериментов в среднем за год ДПЭ трансформировалась в ВКЭ. Однако, если в расчете с климатическим форсингом эти два потока были сопоставимы по величине (отличия составили около 16 %), то при реальном атмосферном воздействии соотношения между потоками менялись в несколько раз. В 2011 г. величина c(ВКЭ, СКЭ) почти в 3 раза превышала c(ВКЭ, ДПЭ), тогда как в 2016 г. поток c(ВКЭ, ДПЭ) был почти в 6 раз больше, чем c(ВКЭ, СКЭ).

Анализ карт пространственного распределения ВКЭ показал, что в среднеклиматическом поле максимумы энергии расположены в зонах эволюции Севастопольского и Батумского антициклонов. Также повышенные этой величины наблюдаются у побережья Турции. Источниками ВКЭ служат сдвиги скорости среднего течения в районе Се-

вастопольского антициклона и около Анатолийского побережья. Приток энергии за счет ДПЭ локализован в зонах интенсификации мезомасштабных антициклонов. Количественно для среднеклиматических данных интегральные величины c(ВКЭ, СКЭ) и c(ВКЭ, ДПЭ) близки. Это свидетельствует о том, что мезомасштабная изменчивость среднеклиматической циркуляции обусловлена совместным влиянием как бароклинной, так и баротропной неустойчивости течений.

Для экспериментов с реальным форсингом зоны максимальных значений ВКЭ локализованы в абиссальной части моря в 2011 г., при этом для 2016 г. выявлено отсутствие повышенных значений ВКЭ в юго-восточном углу моря. Как показал анализ скоростей течений и карт приводного ветра уменьшение ветрового воздействия в 2016 г. по сравнению с 2011 г. привело к ослаблению ОЧТ, а мезомасштабные вихри, формировавшиеся у Анатолийского побережья летом 2016 г., оказывали слабое влияние на Батумский антициклон. В результате чего Батумский антициклон был гораздо слабее, имел меньший радиус и меньшее время жизни по сравнению с данными за 2011 г.

Анализ скорости преобразования ВКЭ в 2011 г. показал, что для западной части моря ВКЭ возрастала преимущественно за счет притока от среднего течения. Для юго-восточной части потоки энергии за счет преобразования ДПЭ и СКЭ в ВКЭ были близки по величинам и изменялись в пределах $3 - 4 \cdot 10^{-3}$ Вт/м^2. В 2016 г. величина c(ВКЭ, СКЭ) уменьшилась примерно в 3 раза по сравнению с данными за 2011 г. и увеличение ВКЭ происходило преимущественно за счет интенсификации обмена между ВКЭ и ДПЭ в западной части абиссальной зоны Черного моря.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для трех периодов (климатический год, 2011 и 2016 гг.) были сопоставлены параметры энергетических характеристик, полученных по результатам численного моделирования циркуляции Черного моря. Установлено, что под влиянием гладкого среднеклиматического ветра в Черном море формировалась наиболее мощная и устойчивая струя ОЧТ и энергия среднего течения была максимальной по результатам трех экспериментов. Мезомасштабная вихревая активность была сосредоточена преимущественно в зонах Севастопольского и Батумского антициклонов и была обусловлена совместным влиянием как бароклинной, так и баротропной неустойчивости течений.

В экспериментах с реальным форсингом выявлено увеличение ВКЭ по сравнению с климатическими данными, при этом зоны максимумов сместились в центральную часть моря. Использование реального быстро меняющегося ветра привело к ослаблению среднего течения, в результате чего наблюдалось интенсивное меандрирование струи, нарушение целостности ОЧТ и формирование циклонических и антициклонических вихрей в абиссальной части. Анализ интегральных величин энергии и скорости преобразования энергии показал, что в 2011 г. рост ВКЭ был обусловлен преимущественно притоком от среднего течения за счет баротропной неустойчивости, а в 2016 г. наибольший вклад в ВКЭ давал поток от ДПЭ вследствие интенсификации процессов бароклинной неустойчивости.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0827-2019-0003.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демышев С.Г.* Численная модель оперативного прогноза течений в Черном море // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 137 – 149.

2. *Von Storch J.-S. et al* An Estimate of the Lorenz Energy Cycle for the World Ocean Based on the 1/10° STORM/NCEP Simulation // J. of Physical Oceanography. 2012. V. 42. No. 12. P. 2185 – 2205.

—— ♦♦♦ ——

СРАВНЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ОПУСКАНИЯ ВОД ПО ГЛАДКОМУ И ШЕРОХОВАТОМУ НАКЛОННОМУ ДНУ В ПРИДОННОМ ЭКМАНОВСКОМ СЛОЕ

Д.Н. Елкин[1], А.Г. Зацепин [1], Л.И. Саловатова [2]
[1] Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
[2] Московский физико-технический Институт
e-mail: dmelkin@mail.ru[1]

На вращающейся вокруг своей оси Земле, морские вдольбереговые прибрежные течения, достигающее дна моря, формируют придонный экмановский слой (ПЭС), в котором перенос воды происходит перпендикулярно направлению течения и влево от него (в Северном полушарии). В случае – даунвеллингового вдольберегового течения [1], в ПЭС происходит перенос воды от берега и ее опускание по склону дна. При наличии устойчивой стратификации, достигая определенной глубины, менее плотная вода в ПЭС останавливается и конвективным образом перемешивается с вышележащими водами. Ранее процесс опускания вод в ПЭС при наличии даунвеллингового вдольберегового течения исследовался в условиях гладкого дна [2]. Вместе с тем, морское дно обычно бывает шероховатым.

Цель данной работы – изучение динамики даунвеллингового вдольберегового течения и связанного с ним ПЭС на шероховатом наклонном дне при наличии и в отсутствии плотностной стратификации.

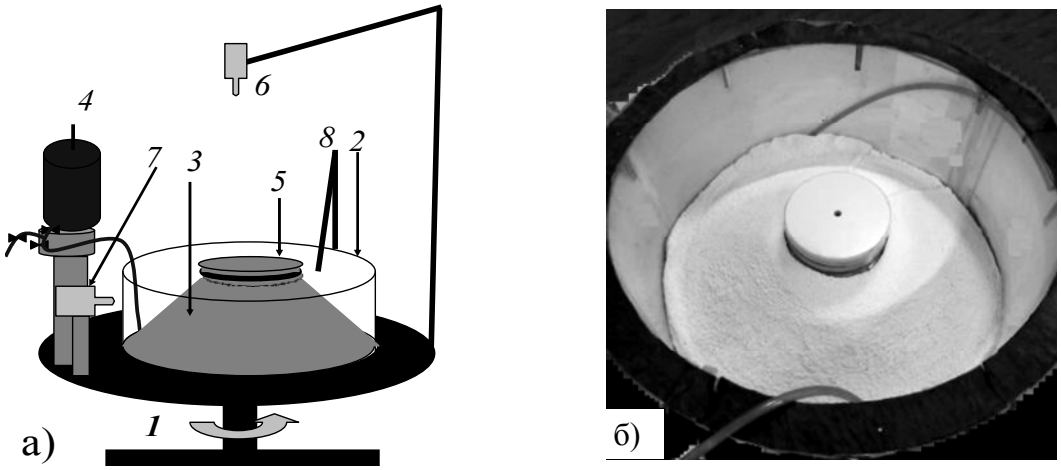


Рис. 1. а) вращающаяся платформа (1), бассейн, который заполняется жидкостью плотности ρ_0 (2), усеченный конус покрытый мелкими шариками (3), сосуд Мариотта который заполняется подкрашенной жидкостью плотности ρ_1 (4), щелевой источник массы и плавучести, через который подкрашенная жидкость поступает на поверхность конуса, и образует антициклоническое осесимметричное прибрежное течение (5), видеокамера (6), боковая видеокамера (7), Устройство для измерения профилей электропроводности (солености) воды (8); б) фото лабораторной установки.

Эксперименты проводились в цилиндрическом бассейне, и расположенном на вращающейся платформе. В центре бассейна установлен усеченный конус с нижнем основанием на дне. Боковая поверхность конуса покрыта ковриком вышитым биссером – мелкими шариками, создающими шероховатость наклонного дна. В центре верхнего основания усеченного конуса сделано отверстие, соединенное шлангом с сосудом Мариотта. Над верхним основанием расположен пустотелый цилиндр с щелью – кольцевой источник, через который из сосуда Мариотта подается вода в бассейн. Перед началом опыта бассейн заполнялся водой плотностью ρ_0 до уровня кольцевого источника. Сосуд Мариотта заполнялся водой плотностью ρ_1, подкрашенной красителем. Поступающая в бассейн вода образовывала вокруг источника вдольбереговое антициклоническое течение. Из-за трения течения о дно в возникал ПЭС, в котором происходило опускание воды. Вид прибрежного течения и ПЭС снимался сверху и сбоку видеокамерами. Для измерения профилей солености воды в бассейне, используется одноэлектродный датчик электропроводности, расположенный на координатном устройстве, перемещающем датчик вниз и вверх в автоматическом режиме. Для определения скорости течения на поверхность воды помещались бумажные пелетки. Опыты проводились при различных значениях скорости вращения платформы, расхода источника и размера шероховатости дна (Рис.1). При этом использовалось два размера шероховатости (диаметра шариков): 1,9 и 3,9 мм.

В случае ($\rho_1 \approx \rho_0$) подкрашенная жидкость, поступавшая из источника на поверхность конуса, изначально образовывала антициклоническое осесимметричное баротропное прибрежное течение, расширявшееся радиально. Однако через некоторое время ширина слоя подкрашенной жидкости и связанного с ним прибрежного течения практически переставала расти, несмотря на продолжавшийся приток жидкости из источника. Стабилизация положения фронта подкрашенной жидкости была обусловлена формированием в вязком ПЭС потока с расходом $Q_e \approx Q$, распространяющегося вниз по склону и выходящего со временем далеко за пределы фронтальной зоны баротропного слоя подкрашенной жидкости. При этом прибрежное течение также достигает стационарного состояния и его стрежень (максимум азимутальной скорости) располагается на внешней границе баротропного слоя подкрашенной жидкости (Рис.2а,б). Было установлено, что с ростом размера шероховатости скорость опускания воды в ПЭС убывает, скорость течения на поверхности убывает, ширина течения убывает, а толщина придонного погранслоя – возрастает.

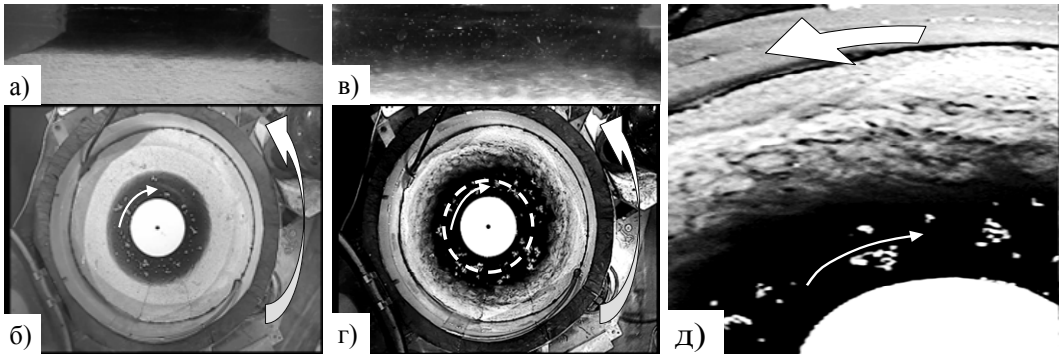


Рис. 2. а,б) Баротропный случай ($\rho_1 \approx \rho_0$); а) боковой вид; б) вид сверху структуры фронтального течения и ПЭС; в,г,е) Бароклинный случай ($\rho_1 < \rho_0$): в) боковой вид; г) вид сверху структуры фронтального течения и ПЭС; д) трехмерные конвективные структуры крупным планом. Пунктир – внешняя фронтальная граница прибрежного течения вне области хребта. Толстая стрелка – направление вращения платформы. Тонкая стрелка – направление прибрежного течения.

В случае небольшого различия плотности вод ($\rho_1 < \rho_0$), наклонный фронт течения достигал поверхности конуса и формировался ПЭС с опусканием менее плотной воды вниз по склону. Со временем, ПЭС испытывал конвективную неустойчивость: в нем формировались валиковые структуры, вытянутые в азимутальном направлении. Затем они распадались на трехмерные вихревые структуры, в которых подкрашенная вода ПЭС медленно поднималась вверх, вплоть до свободной поверхности жидкости. На Рис. 2в,г,д показана структура течения при небольшом отличии плотности воды в источнике от воды в бассейне. При этом на Рис. 2в боковой вид течения. На Рис. 2г общий вид течения (вид сверху): видно невязкое ядро прибрежного течения как темное кольцо подкрашенной жидкости вокруг источника, а на периферии видны вихревые элементы конвекции, порожденной конвективной неустойчивостью ПЭС. А на Рис. 2д показан сегмент бассейна с фронтальным течением и вихревыми элементами конвекции, где элементы конвекции – это небольшие вихревые течения подкрашенной жидкости.

Шероховатость дна значительно интенсифицировала процесс конвекции по сравнению с гладким дном. Интенсификация конвекции происходила, главным образом, за счет увеличения толщины придонного экмановского слоя, которое, в свою очередь приводило к росту числа Релея – критерия развития конвекции. Поскольку эта толщина входит в число Релея в кубической степени, ее увеличение на 25 процентов вызывает его почти двукратное увеличение.

Во время некоторых опытов производились зондирования водной среды микродатчиком электропроводности. Датчик равномерно опускался вниз, а затем поднимался вверх и на каждой глубине показывал значение электропроводности. Используя зависимость солености от электропроводности можно рассчитать соленость на глубине, и построить зависимость солености от глубины (Рис. 3).

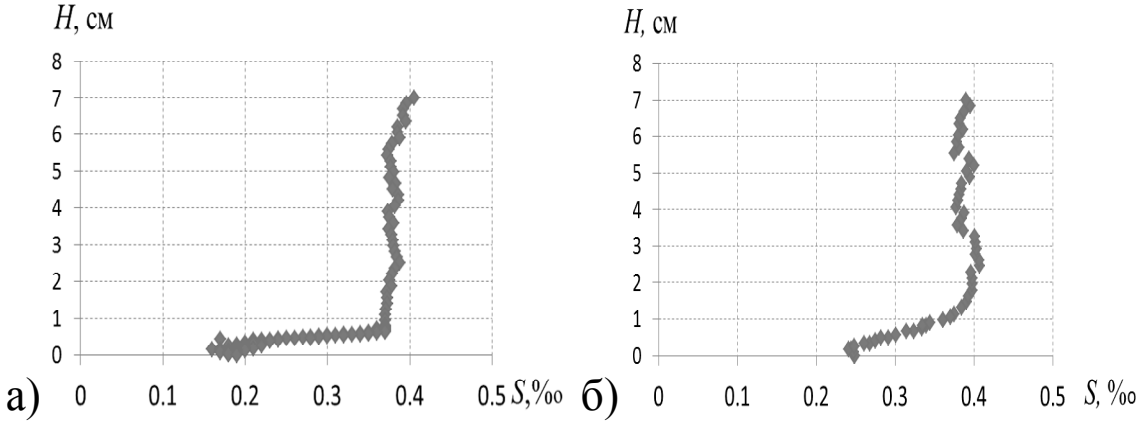


Рис. 3. Профиль солености – зависимость измеренной датчиком солености от глубины H, где H расстояние, отсчитываемое от дна а) гладкое дно; б) дно с шероховатостью d = 1.9 мм.

При большом различии плотности вод ($\rho_1 << \rho_0$), наклонный фронт течения не достигал поверхности конуса, и опускания более легкой жидкости в ПЭС, как на гладком, так и на шероховатом дне не происходило. Из-за этого при работающем источнике масса жидкости, заключенная внутри области прибрежного течения, росла непрерывно, и положение его фронта не стабилизировалось: происходило его радиальное распространение.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена в рамках госбюджетной темы 0149-2019-0004 и при финансовой поддержке гранта РФФИ № 17-05-00381.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журбас В.М., Ох И.С., Парк Т. Роль бета-эффекта в угасании вдольбереговой бароклинной струи, связанной с преходящим прибрежным ап- и даунвеллингом: численные эксперименты // Океанология. 2006. Т. 46. № 2. С. 189–196.
2. *Елкин Д.Н., Зацепин А.Г., Подымов, О.И., Островский А.Г.* Опускание вод в экмановском слое, образованном прибрежным даунвеллинговым течением над наклонным дном // Океанология. 2017. Т. 57. № 4. с. 531–537.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ КОНТАКТНОМ РАЗРУШЕНИИ ПРЕСНОВОДНОГО ЛЬДА

В.П. Епифанов
Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН
email: evp@ipmnet.ru

Исследуются нелинейные волновые явления в пресноводном льде непосредственно при различных видах механических испытаний (растяжение, сжатие, изгиб, индентирование, медленный удар, интенсивная пластическая деформация и экструзия). Условия проведения экспериментов имитируют реальные процессы, например, взаимодействие льда с ледостойкими платформами, а также ледокола с ледяным покровом и подвижку ледников. Учитываются специфические особенности льда как материала. Рассмотрена генерация упругих волн и их влияние на процесс деформационных изменений структуры, включая эффекты, создаваемые наложением фронтов сходящихся волн. С помощью комплексного подхода, основанного на применении методов физической акустики, микро и макроскопии, фрактометрии, исследована эволюция изменения структуры льда и его механических, реологических и прочностных свойств. Предложены модели, учитывающие деформационные изменения структуры льда в процессе механических испытаний, и выполнена их верификация. Приведены результаты измерений акустических спектров горных ледников и сопоставлены с закономерностями, выявленными в лабораторных исследованиях. Полученные теоретические и экспериментальные результаты обобщены применительно к влиянию волновых процессов при контактном разрушении конструкционных материалов на результаты механических испытаний и перенос полученных результатов на свойства этих материалов.

Nonlinear wave phenomena in freshwater ice are investigated directly at different types of mechanical tests (stretching, compression, bending, indentation, slow impact, intense plastic deformation and extrusion), the conditions of experiments simulate real processes, for example, the interaction of ice with ice-resistant platforms, as well as icebreaker with ice cover and glacier movement. The specific features of ice as a material are taken into account. The influence of the scale factor and the geometry of the samples are estimated. The generation of elastic waves in and their influence on the process of deformation changes in the structure, including the effects created by overlapping fronts of converging waves, is considered. The evolution of changes in the structure of ice and its mechanical, rheological and strength properties is studied using an integrated approach based on the methods of physical acoustics, mi-

cro and macroscopy, fractometry. The models taking into account the deformation changes of the ice structure in the process of mechanical tests are proposed and verified. The results of measurements of acoustic spectra of mountain glaciers are presented and compared with the patterns revealed in laboratory studies. The obtained theoretical and experimental results are generalized with respect to the influence of wave processes in contact destruction of structural materials on the results of mechanical tests and the transfer of the results to the properties of these materials.

ВВЕДЕНИЕ

Многие природные явления и широкий круг практических приложений в Арктике связаны с контактным разрушением льда [1]. Особенностью такого разрушения является формирование промежуточного слоя [2], механические (прочностные и реологические) свойства которого определяют процессы движения и разрушения больших масс льда [3]. Однако исследовать прочностные и реологические свойства льда в промежуточном слое прямыми традиционными методами оказывается задачей не простой, например, в придонных слоях ледников. Поэтому приходится прибегать к физическому моделированию контактного разрушения льда и разрабатывать подходы, основанные на комплексном применении современных физических методов. Например, с помощью электромагнитной и акустической эмиссии в принципе можно дистанционно изучать кинетику пластического деформирования и разрушения льда [4,5].

В последнее время разрабатывается новое направление исследований, состоящее в экспериментальном изучении кинетики процессов метаморфизма льда, подвергнутого интенсивной пластической деформации, особенно когда структура льда формируется не только в результате гидростатического сжатия и сдвига, но и под действием высокоскоростной пластической деформации. Формирование вторичных текстур под действием импульсов напряжений в экспериментальной механике горных пород имеет общий характер. Именно волновой характер импульсов напряжений позволяет передавать внешние воздействия через промежуточный слой вглубь материалов при их контактном разрушении.

Пресноводный лёд имеет низкий предел упругости (0,34МПа при –5,4°С). Поэтому считается, что во льду локальные пластические деформации происходят с момента приложения нагрузки. Особенностью пластической деформации любых твёрдых тел, особенно это проявляется на примере льда, является их прерывистый (квантовый) характер. Нелинейные волновые явления (акустическая и электромагнитная эмиссия) в пресноводном льде проявляются при различных видах механических испытаний. Особый интерес представляют исследования интенсивной пластической деформации, в которых имитируются реальные процессы контактного разрушения льда. Установление связи между микро- и макроскопическими характеристиками льда позволяет изучать механизмы деформирования.

В результате полигонизации, дробления и режеляционной перекристаллизации формируется мелкокристаллическая структура льда, динамическая вязкость которой на несколько порядков меньше, чем у исходной (первичной) его структуры. Исследование эволюции структуры непосредственно в процессе механических испытаний имеет как фундаментальное, так и прикладное значение, поскольку даёт основу для понимания механизмов сверхпластичности льда и для решения практических задач. Последнее определяется, например, важностью исследования процессов разрушения глубинных горных пород, для целей ледовой навигации, устойчивости нагруженной ледяным полем опоры или ледостойкой платформы, повышения эффективности противолавинных предупредительных спусков, оптимизации и управления процессами разрушения льда.

Применению метода электромагнитной эмиссии (ЭМЭ) для изучения контроля

роста кристаллов, и плавления и процессов трещинообразования во льду посвящено большое количество публикаций, например [6].

Продолжая эти исследования, мы ставим своей целью количественное определение деформационных изменений структуры льда непосредственно при сдвиге в условиях высокого гидростатического давления с помощью метода электромагнитной эмиссии. Колебания пластического течения представляют собой серию элементарных сдвигов одних элементов структуры деформируемого объёма относительно других. Пластическое течение пресноводного льда имеет волновую природу. Каждое колебание включает в себя периодические элементарные акты релаксации напряжений. Их собственная частота определяется свойствами подвижных элементов структуры и термодинамическим состоянием.

Рассмотрим эксперименты, в которых проявляется волновой характер (природа) пластической деформации льда:

1. Волновые эффекты в матрице Лаваля: формирование конуса, седла, и струи (сходящиеся фронты волн).
2. Формирование пластической (промежуточной) области при ударе шарового индентора о ледяную пластину.
3. Формирование кольцевой трещины и оперяющих трещин в эксперименте с отражением волн от донной грани ледяного куба при индентировании и влияние формы поверхности нагружения.
4. Акустическая эмиссия при испытании льда на сжатие и времена релаксации при хрупком разрушении и ползучести. Процессы трещинообразования при сжатии (первые трещины, берега которые ориентированы ортогонально сжимающей силе).
5. Электромагнитная эмиссия и медленные волны (медленные времена релаксации).
6. Изменение направления фронта волны, сначала бегущей по контуру цилиндрического образца, на радиальное направление в испытаниях на растяжение.
7. Формирование макроскопической зоны вблизи кончика трещины и волновая динамика роста магистральной трещины при «плоском» разрушении (разрушение плоского образца с боковым надрезом), фигуры на поверхности разрушения.
8. Явление stik-slip при движении льда по подложке, включая режимы блокового и вязкого истечения льда из отверстия.
9. Стоячие волны в опытовом бассейне и их влияние на локальную прочность льда в ледяном поле.

С помощью комплексного подхода, основанного на применении методов физической акустики, микро- и макроскопии, фрактометрии исследована эволюция изменения структуры льда и его механических, реологических и прочностных свойств.

1. Волновые эффекты в матрице Лаваля: формирование конуса, седла, и струи (*сходящиеся фронты волн*)

Установлено формирование зон повышенной пластичности льда при наложении фронтов упругих волн в матрице Лаваля: отражение от конфузора и пресс-штемпеля с эллиптической формой рабочей части (рис. 1)

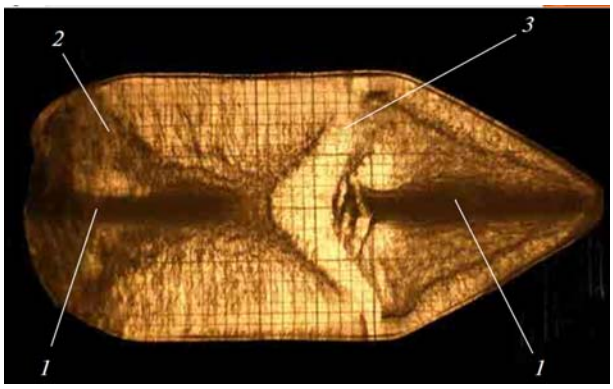


Рис. 1. Волновые процессы в матрице Лаваля;
текстура льда в поляризованном свете:
1 – струя, 2 – конус, 3 – седло

Источником волн является когерентное излучение при пластической деформации самого льда. Высокоскоростная пластическая деформация при сдвиге и гидростатическом сжатии (10^{10} Па) формируют струю 1, конус 2 и ядро сжатия 3. Волновую природу наблюдаемого явления подтверждает отражение от стенок камеры и наложение фронтов волн. Отметим, что деформации в пучностях подобны течению жидкости. Динамическая вязкость льда снижается до 20 МПа·с при –17°С, что на несколько порядков ниже, чем динамическая вязкость исходной структуры. Однако наблюдаемые эффекты обусловлены не плавлением, а пластической деформацией. Подтверждением этому является увеличение коэффициента трения до 0,18–0,4 при прочности соединения льда с подложкой 2,3 МПа. Практическое применение – кумулятивный эффект, формирование объёмных образцов со структурой промежуточного слоя в сходящихся фронтах волн.

2. Волновые процессы при медленном ударе (*расходящиеся фронты волн*)

Рассмотрено формирование пластической области при медленном ударе, расходящийся фронт волны). Автоколебания при ударе. Волновые процессы при медленном ударе (рис. 2): а – схема удара шара по ледяной плите, б – зависимости мгновенной силы (линии 1–7) от глубины осадки при начальных скоростях соударения 0,48 (1), 0,59(2), 0,83(3), 0,99(4), 1,4(5), 1,87(6) и 2,23 (7) м/с.

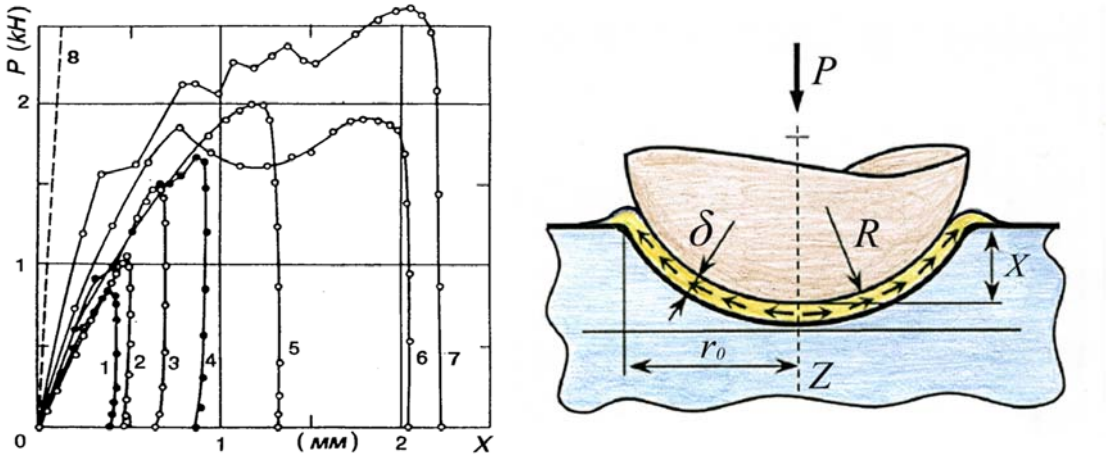


Рис. 2. Зависимости мгновенной силы (линии 1–7) от глубины осадки
при различных начальных скоростях соударения и схема удара шара по ледяной плите

Особого внимания заслуживает формирование промежуточного слоя и течение льда при меньших значениях осевой силы (кривая 6), которое сопровождается прерывистостью деформирования (кривая 7). Причиной уменьшения вязкости льда является интерференция, т.е. наложение волн. Прерывистость является фундаментальным свойством больших деформаций (впервые обнаружена МакРейнольдсом, медленная волна). Установлено, что свойства промежуточного слоя определяют физическое подобие в семействе кривых.

Определяющее уравнение – полукубическая парабола отражает деформационные изменения структуры льда (формирование промежуточного слоя). Уравнение может быть представлено в форме записи, характерной для модели Глена. Принципиальное отличие в том, что в рассматриваемом случае коэффициенты уравнения получены из осциллограмм удара (мгновенных ускорений), которые в интегральном виде характеризуют реакцию льда на удар.

На основании результатов разработано измерительное устройство «пенетрометр» (рис.3). Внутри шарового индентора размещён пьезоакселерометр, сигнал с которого поступает на процессор измерительного блока. Точность измерения среднего контактного давления 5%, воспроизводимость на однородном материале 1%. Измеряемые величины отображаются на индикаторе, вмонтированном в корпус пенетрометра.

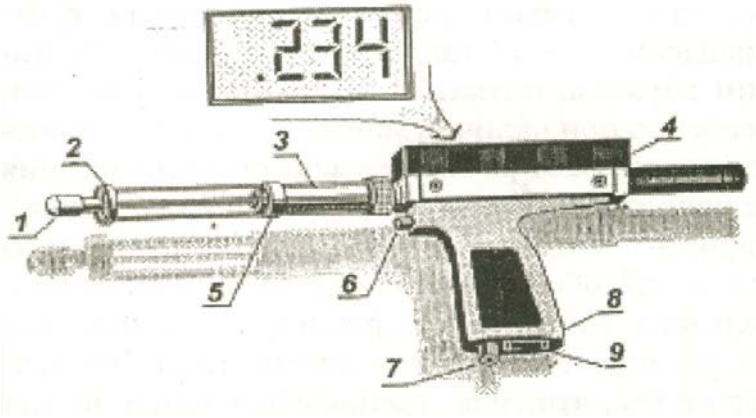


Рис. 3. Портативное средство измерения твёрдости. Обозначения: 1 – индентор, 2 – опорная шайба, 3 – ствол, 4 – корпус, 5 – ограничитель, 6 – кнопка спуска, 7 – фиксатор, 8 – рукоятка, 9 – электровыключатель

3. Влияние стоячих волн на локальную прочность моделированного ледяного поля

Рассматриваются два сценария влияния стоячих волн на прочностные свойства льда, лежащего на поверхности жидкости: в процессе намораживания ледяного поля и в результате потери устойчивости, которая вызвана обжатием по стенкам бассейна из-за расширения воды при замораживании. Полученные экспериментальные профили твёрдости ледяного поля свидетельствуют о формировании периодических текстур, характерных для волнового процесса. Показано, что в обоих случаях возникающие в бассейне стоячие волны изменяют прочностные характеристики ледяного покрова (рис. 4).

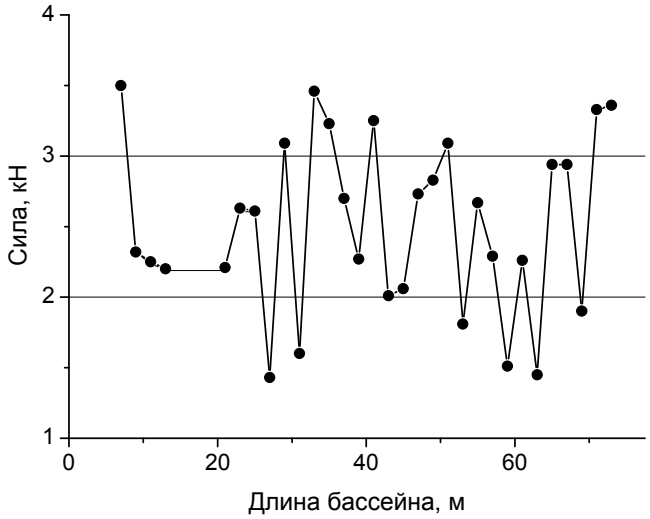


Рис. 4. Зависимость силы сопротивления моделированного льда пенетрации наконечником крестообразной формы от координаты точки измерений в продольном профиле ледового бассейна

Практическое значение полученных результатов: методики измерений, учитывающие специфические свойства льда, включая волновой характер пластических деформаций. Определяющее реологическое уравнение. Перспектива: обратная связь – воздействие импульсов напряжений на процесс разрушения (управление процессом разрушения) и эксперименты по упрочнению льда, влиянию высокомолекулярных добавок, армирования, присутствие дефектов и масштабного фактора на прочность льда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров И.Б.* Проблемы моделирования природных и антропогеннных процессов в арктической зоне Российской Федерации // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 7. С. 103–136.
2. *Епифанов В.П.* Влияние промежуточного слоя на прочность соединения льда с подложкой // ДАН. 2017. Т. 472. № 1. С. 27–32.
3. *Епифанов В. П.* Тектоническая структура и распределение скоростей в придонных слоях ледников // Вестник Кольского научного центра РАН. 2018. — № 3 (10). С. 141–147.
4. *Епифанов В.П.* Влияние импульсов напряжений на структуру льда в промежуточном слое // ДАН. 2018. Т. 479. № 6. С. 629–633.
5. *Шибков А.А., Желтов М.А., Королёв А.А.*. Растущий лёд – источник электромагнитного излучения // Вестник ТГУ. 2001. Т.6. № 2. С. 162–169.
6. *Сурков В.В.* Электромагнитные эффекты при землетрясениях и взрывах. 2000. М.: МИФИ. С. 1–36.

—— ♦♦♦ ——

АКУСТИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ КОНТРОЛИРУЕМОМ УДАРНОМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ УПРУГИХ ВОЛН В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕРЖНЯХ

В.П. Епифанов, С.В. Нестеров
Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: evp@ipmnet.ru

Известно, что динамическое деформирование и разрушение твёрдых тел сопровождается акустическими и электромагнитными эффектами, зависящими от масштабов разрушений, интенсивности внешних воздействий и ряда других факторов. Однако не уделялось должного внимания контролю энергии внешнего механического импульса, его длительности воздействия, форме и другим факторам. Поэтому в представленной работе акустические и электромагнитные эффекты исследуются количественно. Стержни в данном случае рассматриваются как простая физическая модель, допускающая наиболее ясную интерпретацию волновых явлений, происходящих в сложных средах. В качестве примера практического применения полученных теоретических и экспериментальных результатов рассматривается задача о дистанционном обнаружении локального повреждения трубопровода. Разработан и изготовлен макет источника акустической эмиссии, имитирующий естественные повреждения трубопровода, и портативная измерительная акустическая линия. Использован сосуд высокого давления, с управляемым клапаном, открывающим отверстие для сброса вязких жидкостей при достижении в сосуде заданного гидростатического давления. Выполнены тестовые исследования акустических спектров и электромагнитных спектров разрушения мембраны. Полученные результаты свидетельствуют о перспективности выбранного направления исследований.

Основы теории моделирования локального повреждения трубопровода с помощью физических методов изложены в работах [1,2]. Соответственно экспериментально изучаются амплитудно-частотные характеристики сигналов акустической и электромагнитной эмиссии (АЭ и ЭМЭ), которые возникают при частичном повреждении трубопровода и утечке транспортируемой жидкости из трубопровода в песок и суглинок. Элемент трубопровода рассматривается как активный диполь, помещенный в пористую среду, который излучает упругие волны. Процесс формирования локального разрушения в трубопроводе моделируют с помощью твердотельного аккумулятора давления (ТАД), помещенного в пористую среду, и акустической измерительной линии.

Изучаются закономерностей акустических и электромагнитных спектров, которые генерируют два процесса: собственно локальное разрушение стенки трубы и взаимодействия незатопленной струи жидкости с пористой средой для выявления мест разрушения и механизмов этих процессов. В лабораторных условиях проверяется возможность выполнения акустического контроля непосредственно на трассе функционирующего трубопровода без изменения технологического процесса. В процессе физического моделирования определяют функциональность выбранных характеристик, по которым обнаруживают локальные дефекты, оценивают границы применения методики, требования к аппаратуре, оптимальный уровень эффективности и надежности методики обнаружения дефектов. Решается обратная задача: по установленным в модельных экспериментах тестовым спектрам АЭ определяют источник излучения. Методика обнаружения может реализоваться на трассе функционирующего трубопровода дистанционно, без изменения технологического процесса.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ И ОБОРУДОВАНИЕ

Элемент трубопровода моделировали разборной матрицей, которая состояла из двух секций. Первая, загрузочная секция выполнена в виде канала диаметром D = 57 мм; вторая секция – в виде сужающегося канала (конфузора) с углом при вершине конуса 2γ = 60° (рис. 1).

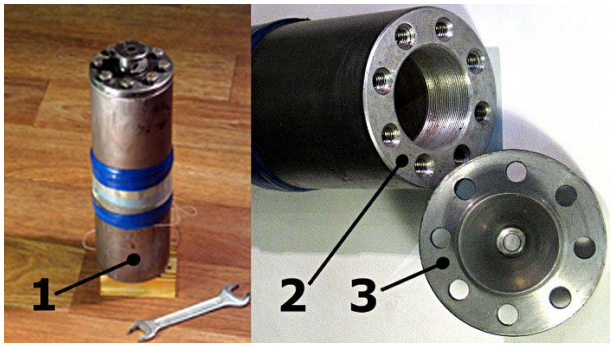


Рис. 1. Схема устройства матрицы:
I – сборка II –цилиндрическая секция; III –конфузор;

Выбранная схема моделирования позволяет рассматривать общие случаи контактного взаимодействия элемента трубопровода с грунтом. После термостатирования матрицу со льдом помещали между плитами пресса типа П-50 с номинальной силой 0,5 МН. Осевая сила передавалась на лёд через шаровую опору и пресс-штемпель. Скорость перемещения траверсы – 0,32 мм/с. В процессе нагружения измеряли осевую силу, смещение пресс-штемпеля, регистрировали спектры сигналов акустической эмиссии, температуру льда и время. Пьезоэлектрические датчики типа KD91 и KB10 крепили к стенке матрицы. Характеристики измерительной акустической линии приведены в работе [3].

Полученные результаты сравнивали с данными акустических измерений при использовании твёрдотельного аккумулятора давления (ТАД). Твердотельный аккумулятор давления представляет собой малогабаритный сосуд высокого давления, в крышке которого помещена мембрана (диаметр 10 мм), управляемо разрушающаяся при достижении заданного давления. Размеры ТАД: диаметр 270 мм, длина 0,6 м.

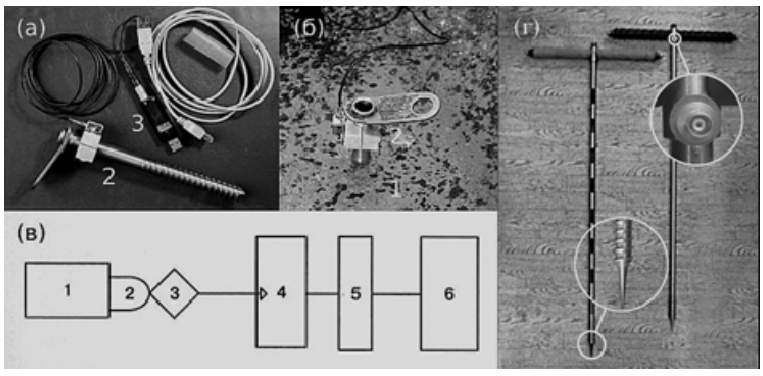


Рис. 2. Измерительная акустическая линия для полевых измерений: а,б – комплект аппаратуры (ноутбук не показан): 1, 2 – акустический волновод с жестко закрепленным пьезоэлектрическим датчиком, 3 – предусилитель с электрическим кабелем; в – блок-схема измерительной линии (1 – волновод, 2 – пьезодатчик, 3 – предусилитель, 4 – акустическая плата, 5 – монитор, 6 – блок памяти); г – акустические волноводы (выделены места крепления пьезоакселерометра и высокочастотного разъема)

Измерительная акустическая линия состояла из пьезоэлектрического датчика, жестко закрепленного на стальном ледобуре, предусилителя и цифровой платы типа CEFC (размещена в планшете). Элементы измерительной акустической линии связаны между собой электрическим кабелем. На рисунке 2 показан комплект акустической измерительной линии для полевых измерений акустических спектров

Ледобур (рис. 2г) вворачивали в грунт на глубину до 70 см, задавали требуемый уровень усиления измерительной линии. Акустические параметры (частота, амплитуда и длительность сигнала) записывали на жесткий диск планшета. Для работы в полевых условиях создан портативный аналог измерительной акустической линии, который состоит из волновода длиной ~ 1 м, жестко скрепленного с пьезоэлектрическим приемником, предусилителя, соединительных кабелей и компьютера.

Рабочий диапазон частот измерительной акустической линии от 15 Гц до 20000 Гц. В качестве чувствительных элементов использованы пьезоакселерометры типа KD 910 или КВ10, жестко закрепленные на ТАДе и на волноводах, размещенных в пористой среде на фиксированном расстоянии от источника излучения.

На рисунке 3 показан спектр акустических колебаний, создаваемых незатопленной струей воды. По шкале абсцисс отложена частота, кГц; на шкале ординат — амплитуда импульса. Всплеск на частоте ~ 15 кГц соответствует собственной частоте резонирующих пузырьков воздуха, являющихся источником излучения.

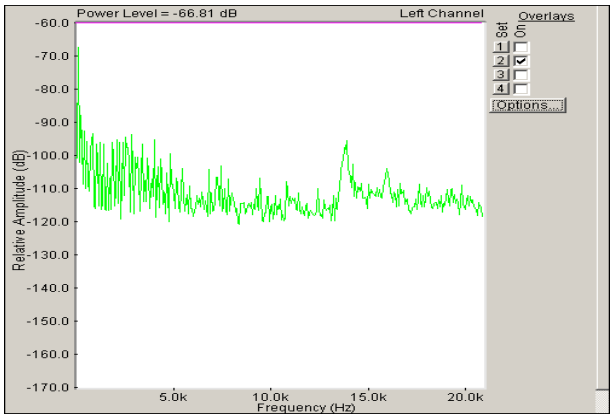


Рис.3. Спектрограмма спектра акустической эмиссии, возбуждаемой струей, истекающей из поврежденного трубопровода в грунт

На рисунке 4 представлена спектрограмма акустической эмиссии в момент нарушения целостности мембраны ТАД (в координатах амплитуда–частота– время).

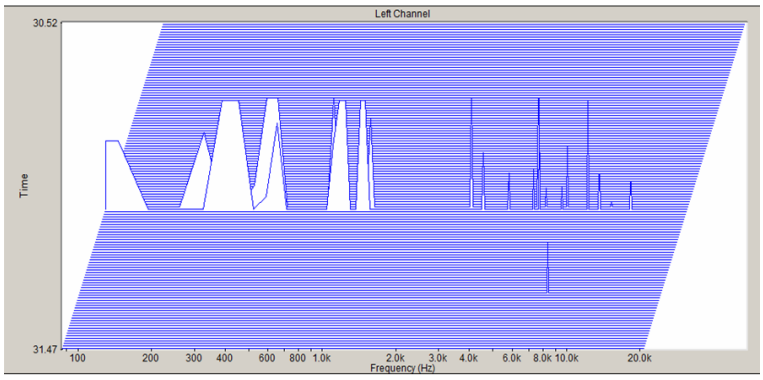


Рис. 4. Спектрограмма акустической эмиссии в момент разрушения мембраны ТАД

Для расшифровки акустических спектров предложена теоретическая модель, основанная на использовании уравнения гармонического осциллятора и цепочечной модели и устанавливающая связь эффективного размера (радиуса) подвижного элемента структуры почвы, его собственной резонансной частоты, плотности и жесткости связи элементов структуры [3].

Истечение льда после разрушения мембраны (рис. 5).

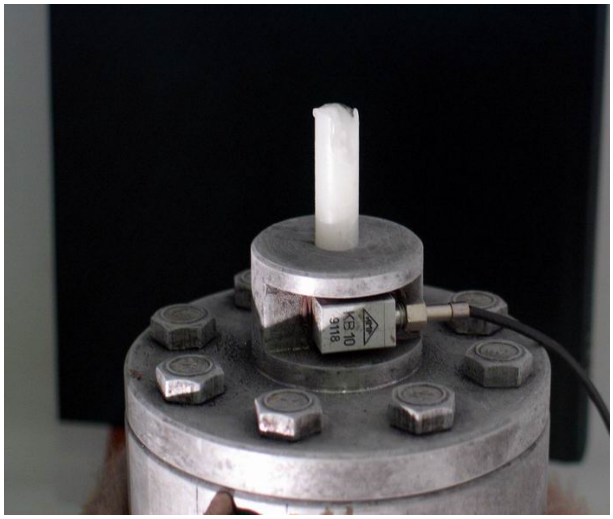


Рис. 5. Истечение льда из ТАД после разрушения мембраны

Сигнал электромагнитной эмиссии, генерируемый при разрушении мембраны, показан на рис. 6.

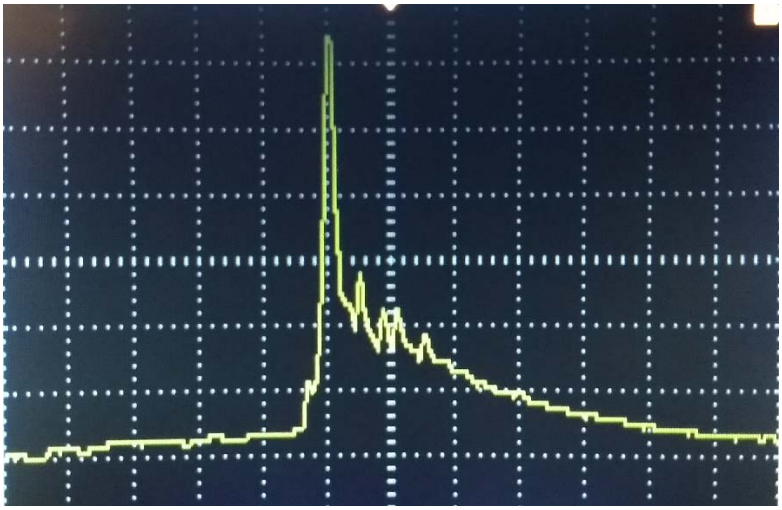


Рис. 6. Сигнал ЭМЭ при разрушении мембраны. Масштаб 5В/5мс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Исследованы акустические и электромагнитные эффекты контролируемого ударного воздействия на металлические стержни.

2. Определен модовый состав сигнала акустической и электромагнитной эмиссии разрушения ТАД, имитирующий элемент трубопровода.

3. Показана возможность дистанционной регистрации разрушения трубопровода по параметрам АЭ и ЭМЭ и определены требования к измерительной акустической линии, предназначенной для выявления локальных нарушений трубопровода.

Полученные данные могут быть использованы при разработке дистанционной методики обнаружения повреждений трубопровода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В. Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 123–133.
2. *Кузнецов Н.С., Тарасюк П.С.* Использование теории гидродинамического шума для поиска утечек жидкости в подземных трубопроводах // Контроль. Диагностика. 2000. № 6. С. 6–14.
3. *Епифанов В.П.* Физическое моделирование режимов движения ледников // Лед и снег. 2016. Т. 56. № 3. С. 333–344.

—— ♦ ♦ ♦ ——

НЕКОРРЕКНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

В.Ф. Журавлёв
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: Zhurav@ipmnet.ru

Понятие корректной постановки начальной и краевой задачи для уравнений в частных производных было введено Адамаром. Он же и привел первый пример некорректной постановки задачи для конкретного уравнения в частных производных. Между тем примеров некорректной постановки задачи в любых разделах механики много.

Адамар и некоторые его последователи считали, что некорректная постановка задачи лишена физического смысла, и такие задачи не следует ставить.

В настоящей работе приведено несколько примеров некорректных постановок задач. Показано, что если задача имеет прикладной характер, то преодоление некорректности в математическом плане может помогать в улучшении конструкции на практике, что может оправдывать изучение некорректных задач.

1. Определение корректной постановки задачи. Задача механики называется *корректно поставленной*[1,2]*, если:*

1. Решение этой задачи существует.
2. Это решение единственно.
3. При малом изменении параметров изучаемой модели, начальных и краевых условий, решение также меняется мало.

2. Пример отсутствия решения (тормозная колодка [3]**).**

Рассмотрим механизм, изображённый на Рис.1. Тормозная колодка, шарнирно прикреплённая к основанию в точке O', прижимается силой P к диску, имеющему свободу вращения вокруг точки O''. Диск при поднятой колодке может свободно вращаться с произвольной угловой скоростью в любом направлении. Пусть колодка опущена и взаимодействует с диском силой нормальной реакции $N \geq 0$ и силой сухого трения по Кулону F:

$$0 \leq F \leq fN \qquad (1)$$

Требуется найти величину нормальной реакции N, которая по постановке задачи отрицательной быть не может.

Приведём решение этой задачи, как оно приводится в многочисленных источниках, посвящённых тормозной колодке.

Уравнение равновесия колодки (уравнение моментов вокруг точки O'):

$$-Fh + (N - P)l = 0 \tag{2}$$

Предположим, что диск вращается в положительном направлении. Тогда

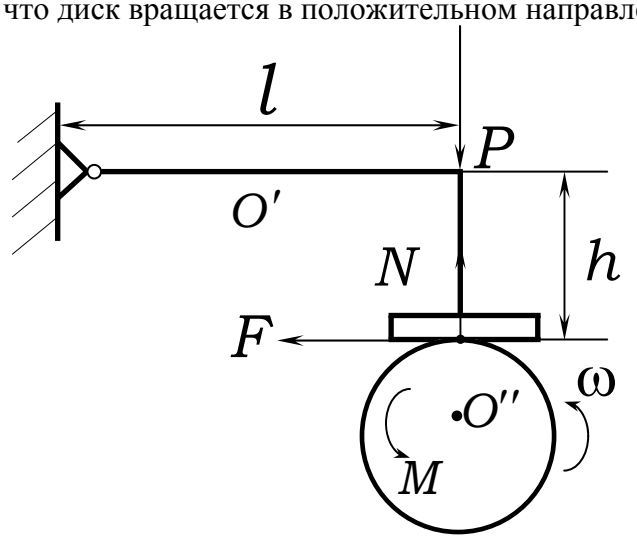


Рис. 1

$$F = fN \tag{3}$$

и, подставляя (3) в (2), находим искомую реакцию:

$$N = \frac{Pl}{l - fh} \tag{4}$$

Это решение имеет смысл, если $l - fh > 0$. Если же

$$l - fh < 0, \tag{5}$$

то реакция отрицательна, что невозможно, поскольку связь между колодкой и диском односторонняя. Получается, что для каких-то соотношений параметров задачи реакцию определить нельзя. Это ставит под вопрос применимость законов механики для этого случая. Именно так и характеризовал ситуацию Пенлеве, когда говорил, что законы сухого трения противоречат законам механики [4]. Позиция Пенлеве была подвергнута критике Феликсом Клейном [там же]. Последователи Пенлеве неизменно описывают возникшую проблему, как «парадоксальную».

Между тем представленное выше решение является ошибочным. Ошибка состоит в том, что прежде, чем предполагать, что вращение диска возможно и использовать выражение (3), следовало установить, когда такое условие справедливо и не противоречит законам трения.

Приведём правильное решение.

Наряду с (2) рассмотрим и уравнение равновесия диска:

$$M - FR = 0 \tag{6}$$

где $R-$ радиус диска. Из уравнений (2) и (6) находим искомую реакцию:

$$N = P + \frac{Mh}{Rl} \tag{7}$$

В отличие от (4) реакция (7) определена при любых значениях параметров. Рассмотрим, в частности «подозрительный» случай (5). Разделим обе части равенства (7) на F:

$$\frac{N}{F} = \frac{P}{F} + \frac{h}{l} > \frac{P}{F} + \frac{1}{f} \tag{8}$$

При получении неравенства (8) использовано неравенство (5). Выполним теперь инверсию неравенства (8):

$$\frac{F}{N} < \frac{Ff}{fP+F} < \frac{Ff}{F} = f\,, \tag{9}$$

что означает $F < fN$, а это есть условие (1) того, что диск неподвижен.

Тормозная колодка (Рис.1) при условии $l > fh$ притормаживает вращающийся диск, при условии же (5) этот механизм играет роль *клинового стопора.* Клиновый стопор механический аналог полупроводника: при $\omega > 0$ вращение диска невозможно из-за эффекта заклинивания пары диск-колодка, при $\omega \le 0$ заклинивания нет, вращение возможно с любой скоростью.

Во всех случаях выражение для нормальной реакции имеет вид (7). Попытки преодолеть заклинивание увеличением момента M могут привести только к поломке механизма при превышении реакцией N предела прочности конструкции.

Ничего «парадоксального» в поведении тормозной колодки нет, вопреки мнению Пенлеве и некоторых его последователей, нет и противоречия между законами механики и законами трения.

2. Пример нарушения корректности из-за невыполнения второго условия в определении Адамара (нет единственности)

Чаще всего решение бывает неединственным в так называемых обратных задачах механики. Это такие задачи, когда искомые переменные и заданные меняются местами. Например, в задачах теории колебаний прямая задача может состоять в нахождении спектра колебаний при заданных параметрах колебательной системы. В обратной задаче по заданному спектру требуется найти параметры системы, для которых у неё будет этот спектр.

Обзор результатов в этой области можно в [5].

Для нас наибольший интерес представляют задачи, в которых при сколь угодно малом изменении параметров задачи решение меняется сильно и, часто, даже качественно.

3. Пример Адамара некорректной постановки задачи, когда решение не является непрерывно зависящим от параметров[1]**.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

со следующими данными[1]:

$$u(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = A_n \sin ny,$$

где n – очень большое число, а A_n – функция, которая очень мала, когда n становится очень большим (например, $A_n = 1/n$). Эти данные как угодно близки к нулю. Однако такая задача Коши имеет решение

$$u = \frac{A_n}{n} \sin ny \operatorname{sh} nx,$$

которое очень велико, вследствие неограниченного роста $\operatorname{sh} nx$ каким бы ни было n.

Пример, приведённый Адамаром выбран им из области краевых задач математической физики. Между тем некорректные (в смысле Адамара) постановки задач нередко встречаются в любой области механики. Ниже приводятся три примера.

---

[1] Этот пример приведён Адамаром впервые на конгрессе швейцарского математического общества в Цюрихе (1917).

Примеры некорректных задач из других областей.

*Пример 1***.** Рассмотрим тонкую упругую невесомую балку, одним концом вставленную без зазора в горизонтальную щель в стенке (Рис.2). На другом конце балки имеется груз массы m, на который по вертикали действует сила тяжести. В щели нет трения, и балка может свободно перемещаться в горизонтальном направлении (обобщённая координата x). В этой задаче требуется узнать, будет ли меняться x, если $x(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0$. Проще говоря, вылезет ли она из щели с нулевой начальной скоростью?

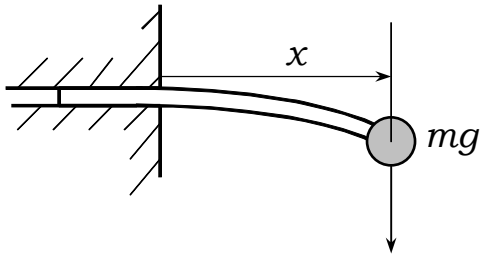


Рис. 2

Будем решать эту задачу двумя методами.

*Метод Ньютона***.** Все действующие в этой модели силы имеют нулевую проекцию на ось x. Горизонтальная проекция реакции заделки равна нулю:

$$R_x = 0$$

поэтому положение равновесия $x \equiv const$ является безразличным. Ответ: балка остаётся неподвижной.

*Метод Лагранжа***.** Вычислим потенциальную энергию балки, состоящую из энергии её деформированного состояния и из потенциальной энергии груза массы m. В сумме получаем:

$$\Pi = -\frac{(mg)^2 x^3}{6EJ}$$

Потенциальная энергия системы есть монотонно убывающая функция x, ни при каком x, не равном нулю, равновесие невозможно. Горизонтальная составляющая реакции равна:

$$R_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{(mgx)^2}{2EJ} > 0$$

Силовой подход к решению задачи оказался противоречащим энергетическому подходу. В чём дело?

*Разрешение парадокса***.** Вернёмся к методу Ньютона, однако на этот раз учтём наличие неизбежного зазора $\Delta \neq 0$ между стенками щели и балкой (Рис.3). В этом случае, реакция щели в угловой точке направлена по нормали к балке в точке контакта и её проекция на ось x не равна нулю. Пользуясь методами сопротивления материалов, нетрудно вычислить величину этой проекции: $R_x = (mg(x+\delta))^2 / (2EJ),$, где: $mgx\delta^2 / (6EJ)$. Устремляя к нулю Δ, находим:

$$\lim_{\Delta \to 0} R_x(\Delta) = \frac{(mgx)^2}{2EJ}$$

что в точности совпадает с выражением, полученным методом Лагранжа.

Таким образом, выясняется, что при силовом подходе (метод Ньютона) предел горизонтальной составляющей реакции щели не совпадает со значением этой реакции в

предельной точке: $\lim\limits_{\Delta\to 0} R_x(\Delta) \neq R_x(0)$ (Рис.4). Решение рассматриваемой задачи силовым методам для нулевого зазора является некорректным по Адамару. Учёт сколь угодно малого зазора приводит к изменению решения на конечную величину.

Заметим, что вертикальная составляющая реакции при $\Delta \to 0$ стремится к бесконечности: $R_y(\Delta) \to \infty$. Два реализованных подхода к решению в методе Ньютона отражают два взгляда в математике на понятие "бесконечность" − *актуальная бесконечность* (Кантор), и *потенциальная бесконечность* (Кронекер) [6]. Актуальной бесконечности соответствует задача в случае $\Delta = 0$, а предел $\Delta \to 0$ реализует понятие потенциальной бесконечности. В методе Лагранжа различий в этих подходах не возникает.

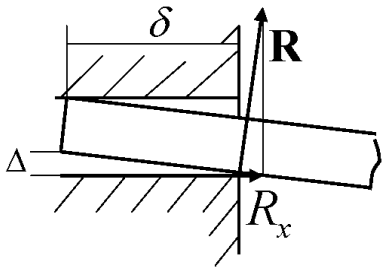


Рис. 3.

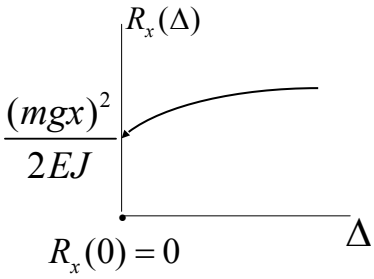


Рис. 4.

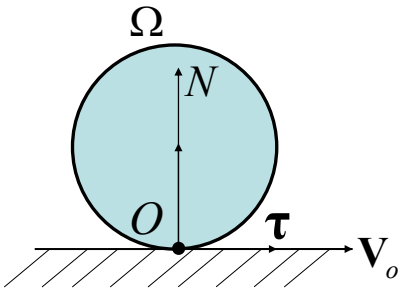


Рис. 5

Пример 2. Задача Кориолиса [7] (Рис.5). Рассматривается динамика весомого шара на горизонтальной плоскости при наличии сил сухого трения. Вектор силы трения в точке O подчиняется условиям

$\boldsymbol{\tau} \neq 0 \Rightarrow$

1. *Если* $\Omega \neq 0$, *то* $\mathbf{V}_0 \neq 0$.

2. *Если* $\Omega = 0$, *то* $\mathbf{V}_0 \neq 0$ *при условии* $fN - |\boldsymbol{\tau}| < 0$

В начальный момент в точке контакта шар проскальзывает со скоростью V_0 и имеет угловую скорость верчения вокруг нормали в точке контакта – ω. Требуется определить, когда проскальзывание закончится и шар перейдёт в режим чистого качения. Решение, найденное Кориолисом в предположении точечного контакта таково: угловая скорость верчения не изменяется: $\omega \equiv const$, а проскальзывание в точке имеет место в течение промежутка времени: $T = 2V_0 / (7fg)$, где f есть коэффициент сухого трения по Кулону, а g – ускорение свободного падения.

Решение этой задачи в форме Кориолиса является некорректным по Адамару, поскольку учёт сколь угодно малого, но отличного от нуля пятна контакта, приводит к радикальным изменениям в решении [8,9]. Так выясняется, что верчение и скольжение заканчиваются одновременно, и время до обнуления соответствующих скоростей равно:

$$T\big|_{\varepsilon\neq 0} \simeq \frac{32u_0R^2}{15\pi fg\varepsilon^2}$$

где $u_0 = \omega R$, а R есть радиус шара. Сколь угодно малая величина ε представляет собой радиус пятно контакта.

В этом примере, в отличие от предыдущего, сколь угодно малое изменение условий некорректно поставленной задачи приводит к сколь угодно большому изменению в решении (Рис.6).

Пример 3. Задача о флаттере [10,11]**.** Не вдаваясь в детали вывода уравнений колебаний двумерной упругой системы при наличии циркулярных сил, приведём эти уравнения к следующей простейшей форме, учтя дополнительно и диссипативные силы $F_x = h_1\dot{x},\ F_y = h_2\dot{y}$:

$$a\ddot{x} + h_1\dot{x} + x + ey = 0$$

$$b\ddot{y} + h_2\dot{y} + y - ex = 0$$

В задачах об аэроупругих колебаниях элементов оперения самолётов диссипативные силы часто не учитываются в силу их малости в сравнении с упругими и аэродинамическими силами. На Рис.7 изображена зависимость максимальной по модулю вещественной части характеристических корней изучаемой системы дифференциальных уравнений от коэффициента e, представляющего циркулярные силы. Эти силы, монотонно возрастающие с ростом скорости набегающего потока, характеризуют скоростной напор. Сплошной линией представлена зависимость без учёта диссипативных сил и пунктирной линией с учётом этих сил. При стремлении $(h_1, h_2) \to 0$ пунктирная линия непрерывно вливается в сплошную. При этом точка пересечения её с осью абсцисс определяет границу области устойчивости. Положение этой точки в пределе зависит от характера стремления к нулю диссипативных коэффициентов, и оно может быть в любом месте отрезка $(0, e_{cr}^0)$. Таким образом, какой бы малой ни была диссипация, она меняет предел устойчивости на конечную величину. Это и означает, что постановка задачи об исследовании устойчивости без диссипативных сил некорректна по Адамару. Исчезающее малая диссипация может устойчивую систему превратить в неустойчивую. При этом предел величины e_{cr}^h, определяющей границу области устойчивости по совокупности переменных $(h_1, h_2) \to 0$, не существует, поскольку частичные пределы не совпадают. Так, если $h_1 = ah,\ h_2 = bh$ и $h \to 0$, то $e_{cr}^h \to e_{cr}^0$. Если же по одной координате диссипация много больше, чем по другой, например $h_1 = h,$ а $h_2 = h^3$ то при $h \to 0\ \ e_{cr}^h \to 0$.

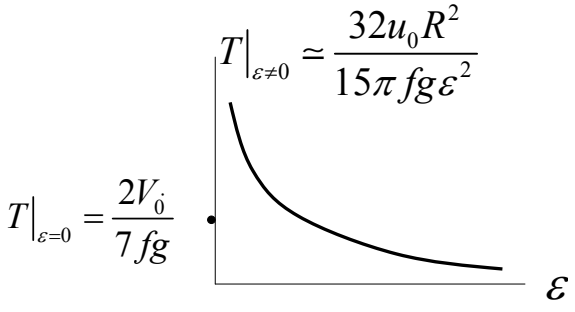


Рис. 6.

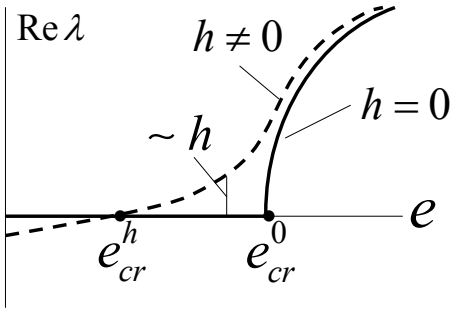


Рис. 7

В этом примере видно, что анализ причин некорректности по Адамару рассмотрения задачи с отсутствием диссипации позволяет при конструировании системы вводить искусственно диссипацию так, чтобы максимально приблизить границу неустойчивости к точке e_{cr}^0 (максимально достижимая область устойчивости). Следует также заметить, что если $e \in (e_{cr}^h, e_{cr}^0)$ то неустойчивость носит "мягкий" характер, поскольку вещественная часть корня имеет порядок h. Если же $e > e_{cr}^0$ то неустойчивость носит "взрывной" характер, поскольку вещественная часть корня уже не является малой.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №14-19-01633).

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
3. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Парадоксы Пенлеве и динамика тормозной колодки// ПММ. 1995.Т.59.№3. С. 366–375.
4. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
5. Глэдвилл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. Москва–Ижевск, НИЦ РХД, 2008. 607 с.
6. Медведев Ф.А. Ранняя история аксиомы выбора. М.: Наука, 1982. 305 с.
7. Кориолис Г. Математическая теория явлений биллиардной игры. ЛКИ, 2007. 240 с.
8. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.519 с.
9. Журавлёв В.Ф. Динамика тяжёлого однородного шара на шероховатой плоскости. Изв. РАН //МТТ, №6, 2006.
10. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. М.: Физматлит. 2009. 399с.
11. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1967. 420с.

—— ♦♦♦ ——

РАСЧЕТ КАРТИНЫ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ТЕЧЕНИЯ В РЕЖИМАХ ГЕНЕРАЦИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН И СПУТНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

Я.В. Загуменный
Институт гидромеханики НАНУ, Украина
e-mail: zagumennyi@gmail.com

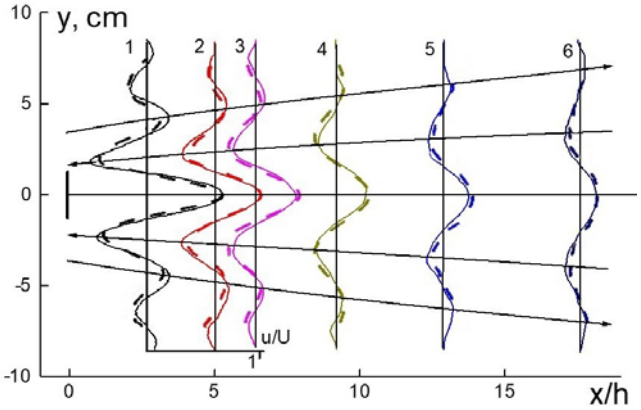
Картина обтекания тела потоком жидкости зависит от множества факторов, включая диссипативные свойства и характер стратификации среды, форма, размеры, угол атаки и качество поверхности обтекаемого тела, скорость и состояние набегающего потока, влияние внешних динамических факторов и др.

Экспериментальные исследования обтекания тел различной формы, активно проводимые в аэродинамических трубах, гидравлических бассейнах и каналах [1], а в последнее время и в стратифицированных бассейнах [2], позволили установить ряд важных свойств картины ламинарного и вихревого обтекания, определить действующие на тело силы и моменты в широком диапазоне влияющих параметров. Теневая визуализация картин стратифицированных течений совместно с измерением профилей скорости с помощью плотностных меток выполнены в работах [3] в режиме интенсивной генерации присоединенных внутренних волн и спутных вихревых структур равномерно движущимся цилиндром или наклонной пластиной. Важной особенностью данных исследований является наличие в картинах течения высокоградиентных прослоек – лигаментов, разграничивающих отдельные компоненты течения [4].

Математическое моделирование обтекания препятствий на первых порах прово-

дилось на основе приближенных методов анализа, в частности, с применением теории пограничного слоя для простейших форм обтекаемого тела [5], однако по мере развития вычислительной техники и методов программирования стало возможным выполнение расчетов обтекания препятствий на основе системы фундаментальных уравнений с учетом более сложных свойств среды и влияния внешних динамических факторов. Была изучена структура и динамика стратифицированных течений около неподвижной и равномерно движущейся горизонтальных пластин в линейной и полной нелинейной постановках [6–8]. Подробный обзор работ по аналитическим и численным исследованиям картины вихревого обтекания пластины в широком диапазоне углов атаки приведен в [9].

а)



б)

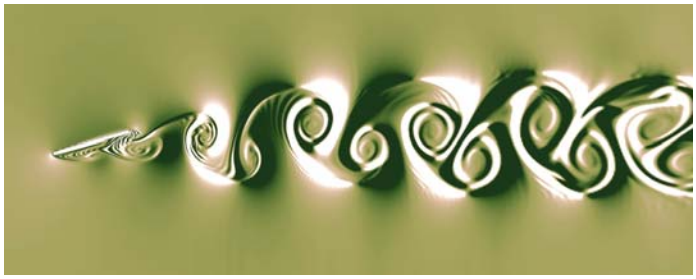
Рис. 1. Совмещенные теневая (верхняя половина изображения) и рассчитанная (нижняя половина) картины течения около вертикальной пластины (а) и профили скорости на различных расстояниях перед пластиной (б): 1–6 – x/h = 2.7; 5.1; 6.4; 9.2; 13.1; 17.5 (сплошная линия – эксперимент, пунктирная – расчет): $h = 2.5$ см; $T_b = 12.5$ с; $U = 0.26$ см/с; $Fr = 0.21$.

В данной работе представлены результаты высокоразрешающего численного расчета опережающих возмущений, внутренних присоединенных волн, спутных вихревых структур и тонкой структуры в картине стратифицированного течения около вертикальной и наклонной пластин, а также приведены сравнения полученных численных результатов с данными выполненных экспериментальных исследований с использова-

нием теневых инструментов.

Численное моделирование задачи выполнено с использованием собственных решателей в рамках вычислительного пакета OpenFOAM на основе системы уравнений механики несжимаемой непрерывно стратифицированной жидкости, включающей уравнение переноса импульса с учетом гравитационной силы в приближении Буссинеска, уравнение диффузии, неразрывности и замыкающее линеаризованное уравнение состояния [10]. Лабораторная визуализация течений выполнена с помощью теневого прибора ИАБ-458 на стенде ЛПБ УИУ «ГФК ИПМех РАН» с использованием вертикальной щелевой осветительной диафрагмы и плоского вертикального ножа Фуко [3]. Изменения освещенности пропорциональны вариациям горизонтальной компоненты градиента коэффициента преломления, который, в свою очередь, прямо пропорционален возмущению плотности в случае использования водного раствора поваренной соли для создания стратификации.

а)



б)

Рис. 2. Сравнение теневого изображения (коэффициент преломления света) (а) и рассчитанной картины (горизонтальная компонента градиента плотности) (б) стратифицированного течения около наклонной пластины: $L = 2.5\,см$, $T_b = 7.6\,с$, $\alpha = -16^\circ$ $U = 3.6\,см/с$.

Структура стратифицированного течения около препятствия может существенно меняться в зависимости от скорости его движения, начиная от многоуровневых циркуляционных течений, индуцированных диффузией, которые возникающих при нарушении молекулярного потока на непроницаемом неподвижном препятствии [7], до сложных нестационарных вихревых и тонкоструктурных режимов при сравнительно больших числах Рейнольдса, когда все компоненты течения вовлечены в сложное нелинейное взаимодействие [9]. Выделяются характерные режимы течения, в которых преобладают те или иные структурные компоненты, такие как вихри, являющиеся общими элементами для всех типов жидкостей, а также внутренние волны, опережающие возмущения и тонкие прослойки, характерные для стратифицированных сред.

В режиме интенсивной генерации внутренних волн (Рис. 1) в течении отчетливо выделяется опережающее возмущение, состоящее из заблокированной жидкости непо-

средственно перед телом и нестационарных внутренних волн, плавно переходящих в присоединенные волны позади препятствия, и спутный след (Рис. 1, а). Амплитуды опережающих возмущений уменьшаются с удалением от препятствия, а их фазовые поверхности постепенно отклоняются от горизонтального положения, что подтверждается рассчитанными и измеренными экспериментально с помощью плотностных меток профилями скорости (Рис. 1, б).

Формы фазовых поверхностей присоединенных внутренних волн отклоняются от полуокружностей в окрестности плотностного следа, где они увлекаются средним течением. Периодические изменения структуры и толщины плотностного следа, а также формирование семейства волокнистых высокоградиентных структур – лигаментов, являются следствием активного взаимодействия следа с присоединенными внутренними волнами, на гребнях и впадинах которых локализованы экстремумы его высоты.

В режиме интенсивной генерации спутных вихревых структур (Рис. 2) длина внутренней волны становится соизмеримой с размером области наблюдения и наиболее сильные структурные изменения наблюдаются в спутном следе за препятствием, где формируются типичные вихревые элементы типа вихревых диполей за телом и «вихревых пузырей» в зонах дивергенции фазовых поверхностей внутренних волн. На оболочках вихревых элементов и в областях взаимодействия разномасштабных компонентов вихревого течения между собой и с поверхностью препятствия формируется разнообразие многослойных тонко структурных элементов течения.

Качественно расчеты и наблюдения картин течения, включающих опережающие возмущения, систему внутренних волн, след с тонкими структурами и вихрями, хорошо согласуются между собой. Однако расчеты позволяют не только анализировать геометрию течения, но и оценивать значения физических величин (плотности, скорости, давления и их градиентов) во всем пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ananda G.K., Sukumar P.P., Selig M.S.* Measured aerodynamic characteristics of wings at low Reynolds number // Aerospace Science and Technology. 2015. V. 4. P. 392–406.
2. *Chashechkin Yu.D.* Schlieren Visualization of a Stratified Flow around a Cylinder // J. of Visualization. 1999. V.1. No. 4. P. 345–354.
3. *Chashechkin Yu.D., Mitkin V.V.* A visual study on flow pattern around the strip moving uniformly in a continuously stratified fluid // J. of Visualization. 2004. V. 7. No. 2. P. 127–134.
4. *Chashechkin Yu.D.* Waves, Vortices and Ligaments in Fluid Flows of Different Scales // Physics & Astronomy International J.. 2018. V. 2. No. 2. P. 105–108.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. Москва: Наука. 1974. 712 с.
6. *Загуменный Я.В., Чашечкин Ю.Д.* Тонкая структура нестационарного течения, индуцированного диффузией на неподвижной пластине // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 3. С. 100–117.
7. *Бардаков Р.Н., Миткин В.В., Чашечкин Ю.Д.* Тонкая структура стратифицированного течения около пластины // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 6. С. 77–91.
8. *Chashechkin Yu.D., Zagumennyi Ia.V.* Formation of waves, vortices and ligaments in 2D stratified flows around obstacles // Physica Scripta. 2019. V. 94. No. 5. 054003.
9. *Теймурян А., Хачисевки Х., Яздья С.Г.* Срыв вихрей с плоской пластины. Обзор // Механика жидкости и газа. 2018. № 2. С. 40–49.
10. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical Physics. Hydromechanics. Pergamon Press. 1987.

—— ♦♦♦ ——

КАРТИНА ВСПЛЕСКА НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

А.Ю. Ильиных
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: ilynykh@ipmnet.ru

Процессам, возникающим при погружении капель в глубокую жидкость, посвящено большое число аналитических, численных и экспериментальных работ. В большинстве трудов рассматриваются однородные или смешивающиеся жидкости. Динамика течений, генерируемых взаимодействием несмешивающихся жидкостей, исследована в меньшей степени, однако представляет научный и технический интерес.

Картина распределения вещества капли в случае смешивающихся и несмешивающихся жидкостей существенно различается. При взаимодействии смешивающихся веществ окрашенное вещество капли концентрируется в тонких волокнах – лигаментах, разделенных веществом принимающей жидкости, и формирующих линейчатый и сетчатый рисунок [1].

Динамика растекания несмешивающихся жидкостей определяет экологические последствия утечек различных масел и нефтепродуктов в природных условиях и эффективность многих химических и биохимических технологических процессов. На контактных поверхностях капель воды с нефтью развиваются бактерии, которые в природных условиях, способствуют самоочищению водоемов [2]. Особое внимание уделяется изучению течений, вызванных падением капель нефти в воду и капель воды в нефть при нормальной и повышенной температуре для усовершенствования технологии тушения пожаров [3], а также разработки профилактических мер, препятствующих быстрому возгоранию [4].

Проведены исследования влияния толщины и состава нефтяной пленки на форму и размеры венца, количество и распределение по размерам капелек брызг, перенос нефти в толщу жидкости и выброс мелких капелек при комнатной температуре [5]. Основное внимание уделялось процессам переноса горючего вещества при контакте разнородных сред, отличающихся значениями коэффициента поверхностного натяжения и вязкости [6].

Цель данной работы – экспериментальное изучение картин распределения вещества при погружении капель водного раствора чернил в подсолнечное масло.

Картины распределения капель водного раствора ализариновых чернил (концентрация 20:1 и 50:1) диаметром 0.2 и 0.5 см, свободно падающих в подсолнечное масло, исследовались методами макрофотосъемки и высокоскоростной видеосъемки на стендах ЭСП и ТБП, входящих в комплекс уникальных установок УСУ "ГФК ИПМех РАН". Диапазон высот падения составил от 25 до 65 см (режим формирования кумулятивной струи для капель воды, падающих в воду) в неподвижный слой подсолнечного масла (глубина $h_l = 2$ см).

При сохранении общих компонентов (каверны, венца, капиллярных волн, всплеска) картины течения усложняются наличием дополнительной поверхности раздела несмешивающихся жидкостей. В начале процесса наиболее быстрым компонентом течения является тонкий двойной слой – непрерывная (сплошная) граница контакта жидкостей, сплошность которого нарушается при спадании венца. Выброшенные с зубцов венца капельки всегда содержат обе контактирующие жидкости, как и в случае смешивающихся сред.

Чернила быстрее сбегают по внутренней поверхности венца, чем погружается его верхняя кромка, и при падении капель диаметром $D = 0.5$ см с высоты $H = 40$ см и более в диффузном распределении вещества капли сперва образуются разрывы (рис.

1а), а затем войды – пустые области, разделенные тонкими волокнами чернил. На более позднем этапе (рис. 1б, в) волокна распадаются на отдельные капли, различные по размерам. Их образование происходит по тому же сценарию, что и при отрыве капли от маточной жидкости под действием силы тяжести [7]: в начале образуется утонченная перемычка, один конец которой продолжает утончаться и отрывается от капли. Затем начинает утончаться второй участок. Перемычка полностью отрывается и стягивается в каплю меньшего диаметра. Минимальные диаметры капелек составляют 0.02, максимальные – 0.8 мм.

Капли меньшего диаметра или падающие с меньшей высоты стекают с поверхности короны плавно, без образования войд.

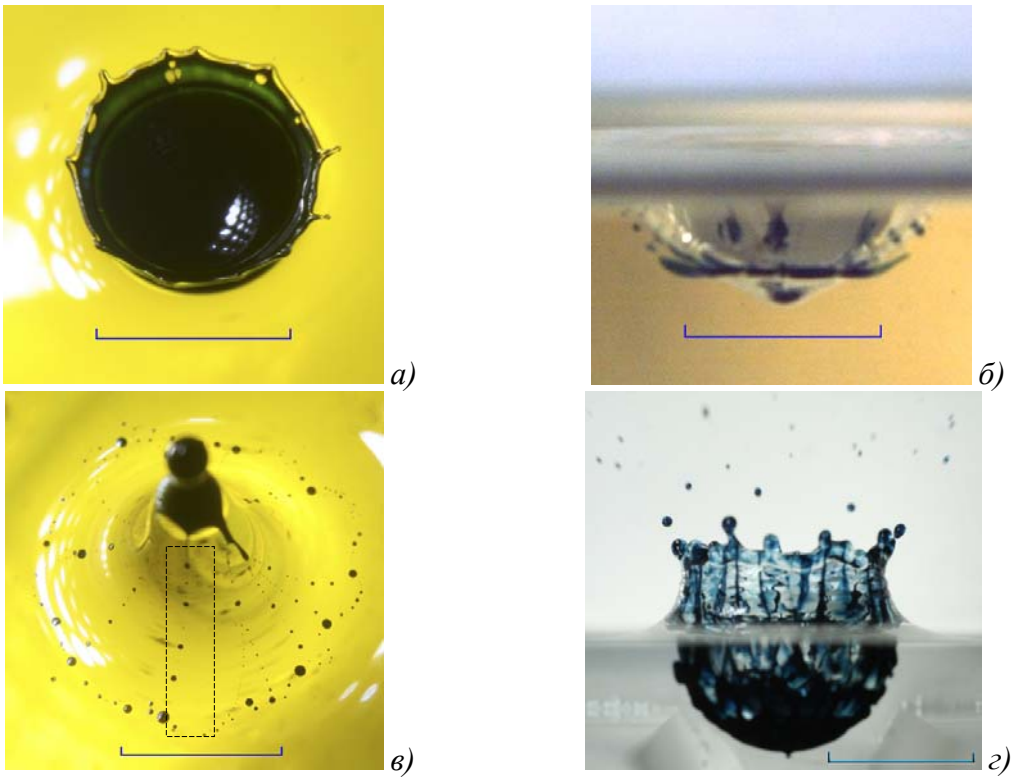


Рис. 1. Геометрия каверны и распределение окрашенной жидкости капли (раствора чернил) по поверхности: а – в) чернила в масле: г) – капля раствора чернил погрузилась в воду. Длина маркера на всех фотографиях – 1см

Для сравнения картина растекания капли чернил по поверхности каверны в воде (смешивающиеся жидкости) приведена на рис. 1г. Окрашенная жидкость на поверхности венца, покрытой семейством капиллярных волн, собирается в окрашенные тонкие волокна – лигаменты, которая доходит до вершин зубцов. Во вторичных каплях идентифицируются обе жидкости (капли и принимающая).

Проведенные опыты показывают, что важную роль в динамике и структуре течения играет "двойной слой" – гладкая контактная поверхность, к которой с одной стороны примыкает принимающая жидкость, а с другой – капли. Соприкасающиеся жидкости разделены гладким двойным слоем неразделимых воды и масла. Чернила скользят по внутренней поверхности двойного слоя, масло подтекает к его внешней поверхности. Именно этот слой движется наиболее быстро, и его наружная кромка на всех стадиях подходит к шеврону венца. Двойной слой теряет сплошность при образовании войдов и разделяющих волокон.

Заключение. Отличительная черта распределения чернил в масле от аналогичного распределения в чистой воде – формирование сплошного двойного слоя вместо дискретного на контактных границах жидкостей. Отмечено геометрическое подобие течения вещества капли в воздухе (при формировании венца) и в масле (картина растекания капли по дну каверны). Распределение вещества на более поздних этапах, формы каверны и всплеска существенно зависят от высоты (скорости) падения капли: с увеличением высоты на поверхности короны образуются войды, окантованные тонкими волокнами вещества капли, которые затем разделяются на мелкие капли.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19- 00598 "Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью").

ЛИТЕРАТУРА

1. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Полосчатые структуры в картине распределения вещества капли по поверхности принимающей жидкости // Доклады РАН. 2018. Т. 481. № 2. С. 145–150.
2. Meckenstock R. U., et al. Water droplets in oil are microhabitats for microbial life // Science. 2014. V. 345. P. 673–675.
3. Wang X.S., Liao G.X., Qin J., Fan W.C. Experimental Study on Effectiveness of Extinction of a Pool Fire with Water Mist // J. Fire Sci., 2002. V. 20. P. 279–295.
4. Grant G., Brenton J., Drysdale D. Fire Suppression by water sprays // Prog. Energy. Combust. Sci. 2000. V. 26. P. 79–130.
5. Murphy D. W., Li C., d' Albignac V., Morra D., Katz, J. Splash behaviour and oily marine aerosol production by raindrops impacting oil slicks // J. Fluid Mech. 2015. V. 780. P. 536–577.
6. Meckenstock R. U., et al. Water droplets in oil are microhabitats for microbial life // Science. 2014. V. 345. P. 673–675.
7. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Трансформации перемычки в процессе отрыва капли // ПМТФ. 2016. № 3. С. 16–31

—— ♦♦♦ ——

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРОВЫХ ВЗРЫВОВ ПРИ ПОПАДАНИИ ДИСПЕРГИРОВАННОГО ОХЛАДИТЕЛЯ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЙ РАСПЛАВ

А.Ш. Исхаков
Национальный исследовательский университет «МЭИ», e-mail: iskhakovas@mpei.ru
В.И. Мелихов, О.И. Мелихов
АО «Электрогорский научно-исследовательский центр по безопасности АЭС»
С.Е. Якуш
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, e-mail: yakush@ipmnet.ru

Одним из возможных последствий запроектной аварии с плавлением активной зоны ядерного реактора является паровой взрыв – физическое явление, наблюдающееся при контакте двух жидкостей, температура одной из которых (расплава) значительно превышает температуру кипения другой (охладителя). Испарение более летучей жидкости при этом может протекать взрывным образом и сопровождаться возникновением

мощной ударной волны, являющейся существенным фактором опасности аварии [1]. В связи с этим исследование паровых взрывов применительно к анализу безопасности атомных электростанций ведется на протяжении нескольких десятилетий. Основное внимание ученых до недавнего времени было сосредоточено на исследовании паровых взрывов в режимах, когда капли расплава (горячий металл, кориум) находятся в охладителе (воде): проведены экспериментальные исследования [2], на основе которых разработаны математические модели [3], позволившие в лучшей мере понять кинетику данного явления. В последние годы все больший интерес вызывает исследование паровых взрывов в стратифицированной конфигурации [4] и в конфигурации, когда несущей фазой является расплав, а охладитель присутствуют в нем в качестве дисперсных включений (обратная конфигурация) [5, 6]. Стратифицированная конфигурация возникает при растекании расплава по дну бассейна, в то время как возникновение обратной конфигурации характерно, например, для аварии с разрывом труб парогенератора в реакторах с жидкометаллическими теплоносителями. В данной работе приводятся результаты численного моделирования паровых взрывов в режимах, когда расплав является непрерывной несущей фазой, а вода присутствует виде дисперсной фазы. В качестве инструмента используется модифицированный расчетный код VAPEX-D, который ранее был апробирован для моделирования паровых взрывов в «классической» конфигурации (охладитель – несущая фаза, расплав – дисперсные капли) [7].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ VAPEX-D

Математическая модель VAPEX-D рассматривает в осесимметричной постановке четыре фазы: вода, расплав, фрагменты расплава и газовая фаза (пар и неконденсируемые газы). Для каждой из фаз записываются уравнения неразрывности, импульса и энергии, а также уравнение сохранения объема [8]. Для описания взаимодействия расплава с водой используется модель микровзаимодействий [9], предполагающая, что образующиеся при дроблении капель расплава мелкие фрагменты мгновенно смешиваются с находящейся рядом водой, которая сразу же испаряется, и образуется гомогенная равновесная среда (фрагменты расплава и окружающий их пар). Остальная часть воды, находящаяся «далеко» от фрагментов, не участвует в микровзаимодействии. Для замыкания системы дифференциальных уравнений используются корреляции для описания межфазного обмена массой, импульсом и энергией в зависимости от режима течения многофазного потока [8]. Для рассмотрения режимов течения, когда расплав является несущей фазой (объемная доля $\alpha_f \geq 0{,}7$), используется модифицированная карта режимов течения (рис. 1, φ – объемное паросодержание пароводяной смеси) и, соответственно, замыкающие соотношения [8].

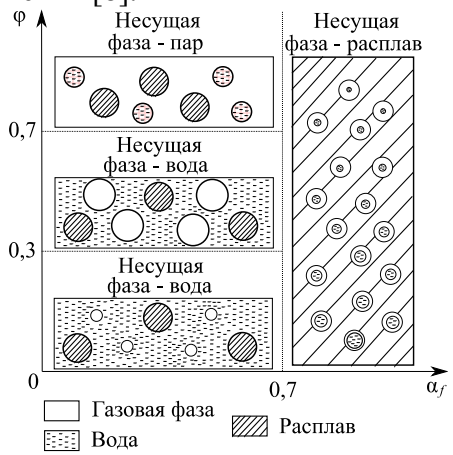
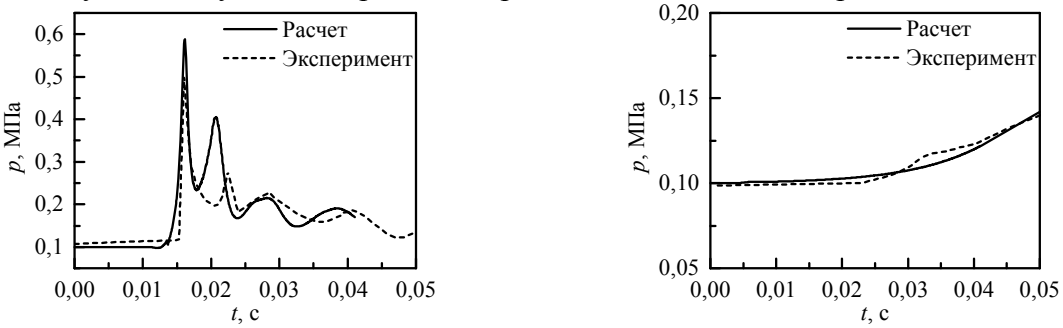


Рис. 1. Модифицированная карта режимов течения.

ВАЛИДАЦИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО КОДА VAPEX-D

В работе [6] приведены результаты экспериментов, в которых вода подавалась под поверхность расплава в хрупкой стеклянной колбе, которая разбивалась о наконечник, расположенный на дне сосуда. Тем самым объем воды оказывался под расплавом. Происходило быстрое вскипание воды и измерялись динамические характеристики взаимодействия. В качестве расплава использовался сплав Bi 60%–Sn 20%–In 20% с плотностью 8500 кг/м^3 и температурой плавления 352 К. Данные эксперименты использованы для валидации расчетного кода VAPEX-D с расширенной картой режимов течения. На рис. 2 представлены зависимости давления от времени в объеме расплава и в газовой подушке, полученные при моделировании одного из экспериментов.

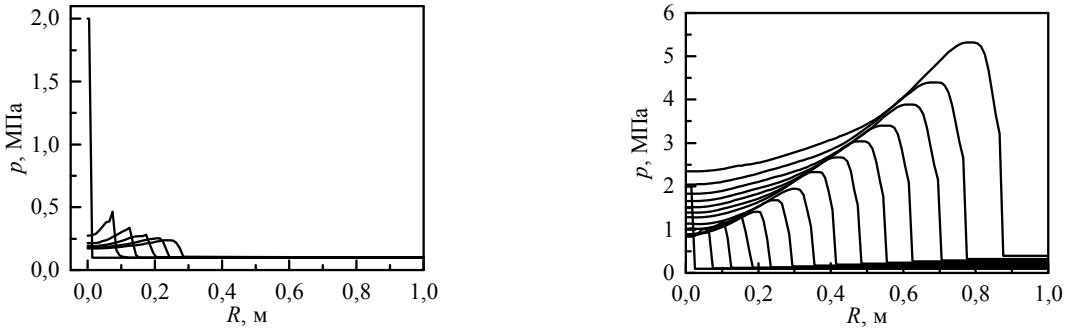


а) *б*)

Рис. 2. Динамика давления в расплаве (а) и в газовой подушке (б).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРОВОГО ВЗРЫВА

Моделирование распространения волны термической детонации в смеси расплав–пар–вода осуществлялось в расчетной области 1×1 м на сетке, содержащей 20×20 ячеек. В нижней части расчетной области задавалась квазигомогенная смесь «капли воды внутри паровых пузырей в расплаве», в средней части – расплав, в верхней – газовая подушка. В центре сосуда задавалось избыточное давление (триггер) для инициирования взрывного взаимодействия. Поскольку в рассматриваемой системе прямой контакт расплава и воды невозможен ввиду наличия устойчивой паровой прослойки (капли в состоянии насыщения окутана паром в паровом пузыре), то единственным возможным механизмом распространения волны детонации является тонкая фрагментация пароводяных дисперсных включений. Расчеты показали, что механизмы фрагментации, заложенные в математической модели (полуэмпирические корреляции), не являются достаточными для распространения волны термической детонации по смеси при любых сочетаниях объемных долей воды и пара и волна давления, идущая от триггера, затухает (рис. 3*а*). Для исследования возможности распространения волны термической детонации при малых коэффициентах теплоотдачи, характерных для пленочного кипения (100–200 Вт/(м^2·К)), консервативно увеличена скорость фрагментации капель воды – вместо фрагментации по критическому числу Вебера, введена модель фрагментации капель при фрагментации паровых пузырей, согласно которой диаметр капель оценивается по объемному паросодержанию этих пузырей. В этой модели предполагается, что при дроблении пузыри «захватывают» капли воды в соответствии с объемным паросодержанием. Расчеты показали, что согласно такой модели возможно распространение волны термической детонации – см. рис. 3*б*, где профили давления построены через каждые 2 мс, $\alpha_f = 0{,}70$, $\varphi = 0{,}90$, $T_{f0} = 800$ К.



а) *б*)

Рис. 3. Затухание волны давления (а) и распространение волны термической детонации с искусственно увеличенной скоростью фрагментации (б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приводятся результаты моделирования паровых взрывов в условиях, когда несущей фазой является расплав, а вода с паром присутствуют в качестве дисперсных включений. В условиях, когда возможен прямой контакт воды и расплава (вода имеет недогрев до температуры насыщения) получено распространение волн термической детонации, в то время как в условиях устойчивого пленочного кипения (температура контакта расплав–вода превышает минимальную температуру устойчивого пленочного кипения) возникновение парового взрыва может быть обусловлено только тонкой (искусственно завышенной) фрагментацией капель воды.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-19-00289).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов Е.В.* Физические аспекты явления парового взрыва. Препринт ИАЭ-5450/3. М., 1991. 96 с.
2. *Shen P. et al.* Corium behavior and steam explosion risks: A review of experiments // Annals of Nuclear Energy. 2018. 121. P. 162–176.
3. *Yuen W.W., Theofanous T.G.* The prediction of 2D thermal detonations and resulting damage potential // Proc. CSNI Specialists Meeting on FCI, Santa Barbara, Jan. 5–8, 1993. P. 233–250.
4. *Kudinov P. et al.* Premixing and steam explosion phenomena in the tests with stratified melt-coolant configuration. Nucl. Eng. Des. 2017. 314. P. 182–197.
5. *Sibamoto et al.* Small-scale experiment on subcooled water jet injection into molten alloy by using fluid temperature-phase coupled measurement and visualization // J. Nucl. Sc. Techn. 2007. 44 (8). P. 1059–1069.
6. *Cheng S. et al.* An experimental study on local fuel-coolant interactions by delivering water into a simulated molten fuel pool // Nucl. Eng. Des. 2014. 275. P. 133–141.
7. *Мелихов В.И. и др.* Взрывное взаимодействие расплава с водой. Моделирование кодом VAPEX-D // ТВТ. 2002. 40 (3). С. 466–474.
8. *Исхаков А.Ш.* Определение динамических воздействий на внутренние конструкции парогенератора реакторной установки с ТЖМТ при разрыве теплообменной трубки: дис. канд. техн. наук. НИУ «МЭИ». Москва. 2019.
9. Chen X. et al. On the constitutive description of the microinteractions concept in steam explosions // Nucl. Eng. Des. 1997. 177. P. 303–319.

—— ♦♦♦ ——

ПОДАВЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ СЛОЕМ ПЛАВАЮЩИХ ЧАСТИЦ

В.А. Калиниченко
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
МГТУ им. Н.Э. Баумана
e-mail: kalin@ipmnet.ru

Обсуждаются результаты экспериментов по исследованию влияния слоя сферических частиц положительной плавучести на подавление процесса разрушения и регуляризацию стоячей гравитационной волны на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде. Проводится сравнение со случаем стоячих гравитационных волн на свободной поверхности однородных жидкостей, вязкость которых существенно отличается – вода и растительное масло.

В экспериментах использовались сферические частицы (полистирол, плотность 1.04 – 1.06 г/см^3, диаметр 0.6 см), плавающие на поверхности водного раствора поваренной соли (плотность 1.11 г/см^3). Толщина слоя частиц изменялась от 1 до 3.5 см при неизменной общей глубине $h =$ 15 см рассматриваемой двухслойной жидкости (рис. 1). Возбуждение поверхностных гравитационных волн осуществлялось посредством параметрического резонанса при вертикальных колебаниях сосуда (L=50 см, W=4 см) с жидкостью. Двумерные волновые движения жидкости исследовались в режиме основного резонанса Фарадея – частота колебаний сосуда Ω в два раза превышает частоту ω возбуждаемых волн.

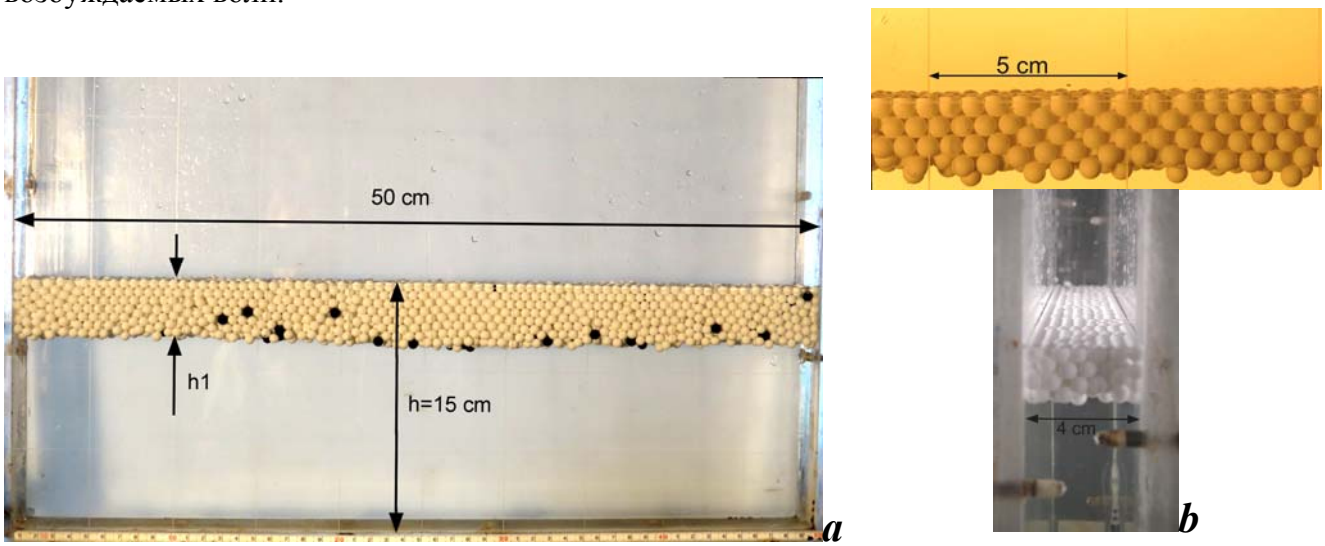


Рис. 1. (a) «Двухслойная жидкость» в прямоугольном сосуде (h_1 = 3.5 см). (b) Начальное размещение частиц в слое h_1 = 2.5 см (вид спереди и сбоку) – гексагональная упаковка *монодисперсных сферических частиц*

В экспериментах наблюдались регулярные и разрушающие волны. Если для регулярных волн профиль периодичен во времени и симметричен относительно вертикальной плоскости, проведенной через пучность волны, то в случае разрушающихся волн Фарадея со свободной поверхности жидкости срываются отдельные капли (рис. 2, *a*). Для воды и водного раствора соли как однородных жидкостей предельная крутизна достигала величины $\Gamma = H / \lambda \sim 0.22$ (H – высота волны, $\lambda = L$ – длина волны для второй волновой моды).

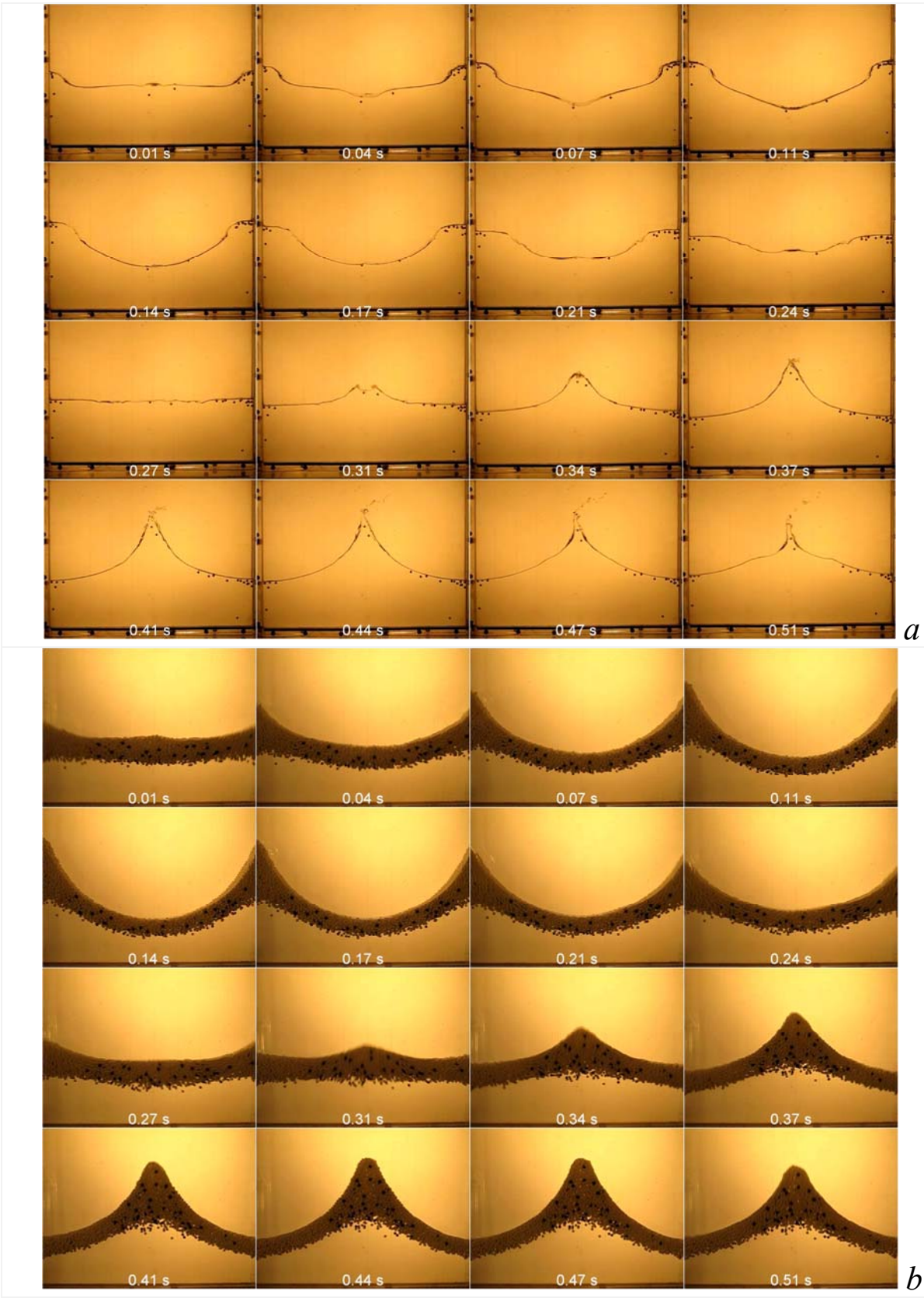


Рис. 2. Разрушающаяся волна на свободной поверхности солевого раствора (Ω = 21.83 c^{-1}) (a) и (b) регулярная волна на свободной поверхности «двухслойной жидкости», образованной слоем плавающих частиц и водным раствором соли (Ω =20.69 c^{-1}, H =17.1 см, h_1 =3.5 см); результаты видеосъемки 120 к/с

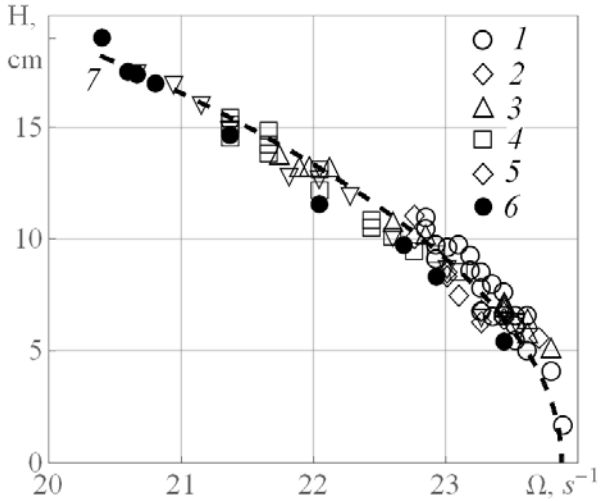


Рис. 3. Резонансные зависимости $H(\Omega)$ регулярных гравитационных волн Фарадея на свободной поверхности воды и водного раствора соли (1, 2) и исследуемой «двухслойной жидкости» (3–6 – h_1 = 1.1, 1.8, 2.8 и 3.6 см); 7 – расчетная зависимость $H(\Omega)$

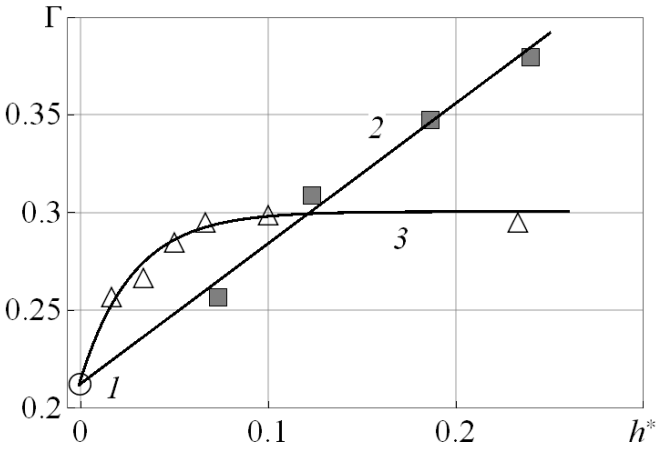


Рис. 4. Зависимость предельной крутизны регулярных волн от толщины слоя частиц: 1 – вода/раствор соли; 2 – слой плавающих частиц; 3 – баротропная волна в системе двух несмешивающихся жидкостей растительное масло – вода (изменение h_1 = 0.25–7.5 см слоя масла)

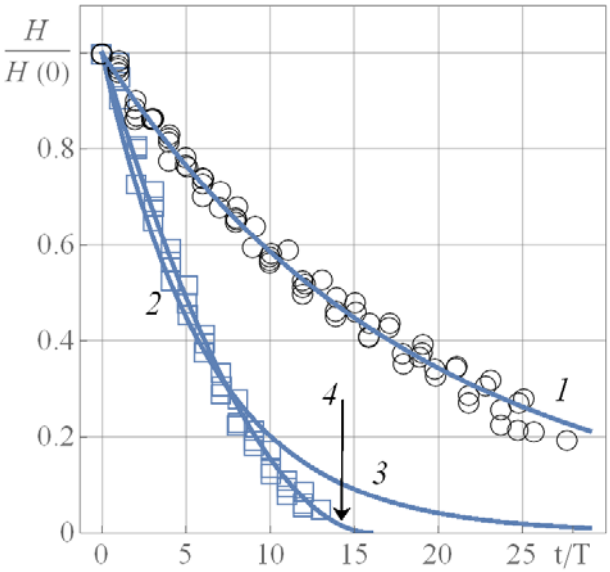


Рис. 5. Амплитудная кривая затухающих волн на свободной поверхности однородной (1) и «двухслойной» (2) жидкостей: 1 – вода и раствор соли, декремент δ = 0.06; 2 – слой частиц h_1 = 2.8 см; 3 – экспоненциальное затухание с декрементом δ = 0.166; 4 – неэкспоненциальное затухание вида $(1 - z/16)^{1.9}$, $z = t/T$

В настоящих экспериментах слой частиц положительной плавучести помещался на свободную поверхность воды и оценивался эффект регуляризации разрушающейся стоячей гравитационной волны – рис. 2, *b*.

В экспериментах в качестве интегральной волновой характеристики использовались резонансные зависимости высоты регулярной волны $H(\Omega)$ – рис. 3. Показано, что увеличение толщины слоя позволяет достичь предельной крутизны $\Gamma = H/\lambda \sim 0.38$ –

рис. 4.

Наличие верхнего слоя в виде суспензии частиц положительной существенно увеличивает диссипативные характеристики рассматриваемой колебательной системы (рис. 5), причем наблюдается неэкспоненциальный характер затухания волновых движений жидкости. Взаимодействующие между собой и с сосудом частицы определяют аномальное затухание и изменяют динамику волнового движения жидкости – наблюдается регуляризация волн с подавлением процесса их разрушения в виде струйного выброса из гребня и последующего его распада.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

—— ♦♦♦ ——

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАРКЕРОВ ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ СЛОЖНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Р.И. Каныгин, И.И. Каныгин, Е.Е. Мешков, И.А. Новикова
Саровский физико-технический институт – филиал НИЯУ МИФИ
e-mail: Kanygin.roman@gmail.com

Исследования в гидродинамике, начиная с О.Рейнольдса, тесно связано с разработкой методов визуализации течений. На базе гидродинамической лаборатории СарФТИ с 2013 года ведется разработка методов визуализации потока.

- Метод маркеров – течение визуализируется твердыми шариками полистирола, плотность которых ~ρ воды. Данный метод служит для определения скорости потока и визуализации его течений.
- Метод «жидких ниток» – течение визуализируется при помощи тонких струй, окрашенных $KMnO_4$, плотность которых близка к плотности жидкости.
- Метод «ниспадающей завесы» – течение визуализируется при помощи множества примыкающих друг к другу тонких струй, окрашенных $KMnO_4$.

Эти методы были использованы при исследовании следующих задач:

4. обтекание [1–2].
5. всплывающий цилиндр в воде [3].
6. всплывающий пузырь в воде [4].

В этих случаях исследовались, главным образом, двумерные течения. В последнее время начата разработка методики исследования сложных трехмерных течений. В этом случае течение снимается с помощью двух камер, образующих между собой угол 90^0, синхронно, затем полученные данные с двух камер компилируются в программе OriginPro7.0 и представляются в виде 3D графиков.

Эта методика начала применяться для регистрации течения в виде всплывающих маленьких пузырьков и течения, возникающего при подъеме водяного пузыря в растворе соли [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bashurin V.P.,. Budnikov I.N,. Hatunkin V.Yu, Klevtsov V.A., Ktitorov L.V., Lazareva A.S., Meshkov E.E., Novikova I.A., Pletenev F.A., Yanbaev G.M.*. Wind or water turbine power augmentation using the system of guiding surfaces // Physica Scripta, Volume 91,Number 4 // http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/91/4/044002.

2. *Башурин В.П., Будников И.Н., Клевцов В.А., Ктиторов Л.В., Лазарева А.С., Мешков Е.Е., Новикова И.А., Плетенёв Ф.А., Федоренко Я.В., Янбаев Г.М.* «Гидродинамический стенд» //ЖТФ, 2015, т.85, №7, сс.149–150.
3. Власов К.О., Долинский В.Ю., Мешков Е.Е., Новикова И.А.. «Разработка метода исследования двумерного течения около всплывающего полого цилиндра» // XLIII международная (звенигородская) конференция по физике плазмы и термоядерному синтезу, г.Звенигород 8–10 февраля 2016г.
4. *Meshkov E.E., Novikova I.A.* «Visualization of some unstable fluid flows by means of solid and liquid markers» // Abstracts of Sixth International Conference Turbulent Mixing and Beyond 14–18 August, 2017, Trieste, Italy, p. 104.
5. Kanygin R.I., Kashcheev A.D., Kudryavtsev A.Y., Meshkov E.E., Novikova I.A. The stability of the dome of a liquid bubble rising in a dense liquid // Physica Scripta Vol. 93 Num. 2 2018 // https://doi.org/10.1088/1402-4896/aa9abc

—— ♦ ♦ ♦ ——

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ НЕЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ И ГЕНЕРАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДИПОЛЬНОГО ТИПА

Н.Ю. Колбнева
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru

Известно, что потери механической энергии ускоренно движущегося заряда идут на излучение электромагнитных волн [1]. С подобной ситуацией можно столкнуться при капиллярных осцилляциях заряженной поверхности внутриоблачной капли [2].

Согласно мультипольным представлениям интенсивность излучения системы ускоренно движущихся зарядов состоит из суперпозиции дипольной, квадрупольной и магнитно-дипольной компонент [3]. Разделение общего излучения на мультипольные компоненты ведется по малому параметру δ – квадрату отношения радиуса капли к длине излучаемой волны. Порядок величины этого параметра $\delta \sim 10^{15}$. При этом дипольное излучение обнаруживается в расчетах первого порядка малости по δ, квадрупольное – второго.

Для определения электрических моментов проводятся электрогидродинамические асимптотические расчеты по гораздо большему малому параметру ε – отношению амплитуды осцилляций к радиусу капли.

В работе [4] найдена в расчетах первого порядка малости по ε возникающая при капиллярных осцилляциях незаряженной капли во внешнем электростатическом поле дипольная компонента электромагнитного излучения.

В настоящей работе в аналитических асимптотических расчётах второго порядка малости по ε проведено исследование дипольного излучения незаряженной электропроводной капли, совершающей нелинейные осцилляции конечной амплитуды во внешнем электростатическом поле.

ФИЗИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается незаряженная капля радиуса R идеальной несжимаемой, идеально проводящей жидкости с массовой плотностью ρ, коэффициентом поверхностного натяжения σ, помещенная в однородное электростатическое поле напряженностью $\vec{E}_0$.

Под действием внешнего электрического поля капля вытягивается в сфероид [2], на полюсах капли появляются разноименные индуцированные заряды.

Вследствие теплового движения молекул жидкости на поверхности капли генерируется капиллярное волновое движение фиксированной амплитуды $\varepsilon \equiv \max \xi(\theta)/R$ ($\xi(\theta,t)$ – капиллярное волновое возмущение поверхности капли).

Индуцированные внешним электростатическим полем заряды распределяются по возмущённой капиллярным волновым движением поверхности проводящей капли.

Капля моделируется диполем с точечными зарядами, разнесенными на определенное расстояние по оси симметрии.

Величины индуцированных зарядов определяются в виде:

$$q_{\pm}(\vec{r},t) = \int\limits_{S_{1,2}} dq_{\pm}(\vec{r},t) = \int\limits_{S_{1,2}} \nu(\vec{r},t)\, dS_{1,2} \qquad (1)$$

$$S_1 \equiv \left[r = r(\theta,t);\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right];\ S_2 \equiv \left[r = r(\theta,t);\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right].$$

Этим зарядам поставлены в соответствие равновеликие точечные заряды, которые поместили на оси симметрии сфероида в положениях эффективных центров положительного и отрицательного зарядов:

$$\vec{R}_{q_{\pm}}(t) = \frac{1}{q_{\pm}} \int\limits_{S_{1,2}} \vec{r}\, dq_{\pm} = \frac{1}{q_{\pm}} \int\limits_{S_{1,2}} r\, \vec{e}_r\, dq_{\pm} \qquad (2)$$

При капиллярных осцилляциях поверхности сфероида осциллируют величина эффективного индуцированного заряда и расстояние между центрами эффективных индуцированных зарядов. В результате получен «эффективный» диполь:

$$\vec{d}(t) = q_{+}(t)\left(\vec{R}_{q_{+}}(t) - \vec{R}_{q_{-}}(t)\right) \qquad (3)$$

который осциллирует и излучает при этом электромагнитные волны в соответствие с известным выражением:

$$I = \frac{2}{3c^3}\left(\frac{d^2\vec{d}(t)}{dt^2}\right)^2 \qquad (4)$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение возмущенной поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре масс капли представлено в виде:

$$r(\theta,t) = r\left(\theta\right) + \xi(\theta,t)$$

где равновесная форма капли с точностью до квадрата эксцентриситета e^2 совпала с уравнением вытянутого сфероида:

$$r(\theta) = R\left(1 + e^2 \frac{1}{3} P_2\left(\cos\theta\right)\right); \quad e^2 = \frac{E_0^2 R}{16\pi\sigma}$$

Электрогидродинамическая формулировка задачи состоит из основных уравнений электрогидродинамики с граничными условиями:

$$\frac{d\vec{V}(\vec{r},t)}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P(\vec{r},t); \qquad \operatorname{div}\vec{V}(\vec{r},t) = 0;$$

$$\Delta\Phi(\vec{r},t) = 0;$$

$$r \to 0:\ V(\vec{r},t) \to 0;$$

$$r \to \infty:\ \Phi(\vec{r},t) \to -E_0 r\cos\theta; \tag{5}$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta,t):$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{V},\nabla)F = 0, \quad F(\vec{r},t) \equiv r - r(\theta,t) - \xi(\theta,t)$$

$$P(\vec{r},t) + P_E(\vec{r},t) = P_\sigma(\vec{r},t),\ \Phi(\vec{r},t) = \Phi_S(t)$$

$$P(\vec{r},t) = P_0 - \rho\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho(\nabla\psi)^2,\ P_E(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2,\ P_\sigma(\vec{r},t) = \sigma\,\mathrm{div}\,\vec{n},\ \vec{n} = \nabla F / \left|\nabla F\right|_{F=0},$$

Для замыкания выписанной системы введены дополнительные условия:

$$\int_V dV = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad \int_V \vec{r}dV = 0;\ V = [0 \le r \le r(\theta) + \xi(\theta,t);\ 0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_S (\vec{n},\nabla\Phi)dS = 0;\ S = [r = r(\theta) + \xi(\theta,t),\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi] \tag{6}$$

и заданы начальные условия:

$$t = 0:\ \xi(\theta) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon\sum_{j\in\Xi} h_j P_j(\mu),\ \sum_{j\in\Xi} h_j = 1,\ \ \varepsilon \ll 1,\ \frac{\partial\xi(\theta)}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

В задаче использована модель потенциального движения жидкости в капле: $\vec{V}(\vec{r},t) = \nabla\psi(\vec{r},t)$, где $\psi(\vec{r},t)$ – гидродинамический потенциал скорости движения жидкости.

Поле индуцированных в капле зарядов характеризуется потенциалом $\Phi(\vec{r},t)$.

В задаче имеются два малых параметра: e^2 и ε. Расчеты задачи проведены с сохранением слагаемых $\sim\varepsilon^2$ и $\sim e^2\varepsilon$, поэтому для определённости положено $e^2 \sim \varepsilon$, сводя таком случае задачу к одному малому параметру ε.

Решение задачи найдено в рамках теории возмущений методом многих временных масштабов путем разложения функций $\xi(\theta,t)$, $\psi(\vec{r},t)$, $\Phi(\vec{r},t)$ по малому параметру ε с точностью до второго порядка. При этом искомые функции зависят не просто от t, а от разных его масштабов, определенных через малый параметр ε: $T_m \equiv \varepsilon^m t$. Поскольку $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, то разложение для электрического потенциала ведется по полуцелым степеням параметра ε с точностью до порядка 5/2.

Подставляя в (5)–(6) разложения искомых функций по ε, выделены задачи для последовательного определения поправок к неизвестным функциям.

В аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости по ε найдено капиллярное волновое возмущение равновесного сфероида, найден вектор нормали к возмущенной поверхности капли, найдено аналитическое выражение поверхностной плотности индуцированного заряда на возмущенной волновым движением поверхности сфероидальной капли, на основе (1)–(3) определено аналитическое выражение для величины индуцированного внешним полем диполя, изменяющегося со временем при капиллярных осцилляциях. Подставляя его в (4), получено, что при начальном возбуждении двух колебательных мод (второй и третьей) при характерном внутриоблачном поле $E_0 = 0.17$ СГСЭ (50 В/см), предполагая, что все капли имеют одинаковый размер, интенсивность дипольного излучения уединенной капли составила $I \sim 2\cdot 10^{-30}$ эрг/с.

Показано, что интенсивность дипольного излучения, создаваемого нелинейными осцилляциями незаряженной капли во внешнем электростатическом поле, по порядку величины совпадает с интенсивность дипольного излучения, найденного в расчетах

первого порядка малости по ε [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. Ч. 2. М.: Наука. 1996. 320 с.
2. *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. №6. С. 1344–1347.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука. 1973. 504 с.
4. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю.* Асимптотический расчет интенсивности дипольного электромагнитного излучения от осциллирующей в электростатическом поле незаряженной капли // Электронная обработка материалов. 2017. Т. 53. №4. С. 28–38.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ОСРЕДНЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ ЖИДКОСТЬ – ПОРИСТАЯ ЗОНА ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЯХ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ

Е.А. Колчанова
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
e-mail: kolchanovaea@gmail.com

Изучается осредненное конвективное течение, которое генерируется под воздействием вибраций в подогреваемом снизу горизонтальном слое однокомпонентной жидкости, частично заполненном пористой средой, в условиях микрогравитации. Задаются высокочастотные малоамплитудные вибрации продольного направления. Определен порог устойчивости квазиравновесного состояния жидкости при изменении отношения толщин слоев. Получены два вида валов разной длины волны.

Классическая конвекция в отсутствие вибраций представляет собой подъёмно-опускное течение, которое возникает пороговым образом при достижении критического числа Рэлея в горизонтальном слое жидкости или насыщенной жидкостью пористой среды, подогреваемом снизу в поле силы тяжести. Это течение приводит к перемешиванию жидкости и усилению теплопереноса по сравнению с теплопроводным механизмом передачи энергии в жидкости. В двухслойной системе «жидкость – пористая зона» возможны два вида течений: коротковолновые валы, локализующиеся преимущественно в слое жидкости над пористой средой, и длинноволновые валы, проникающие в поры [1, 2].

При микрогравитации конвективное перемешивание ослаблено или вообще отсутствует. В связи с этим эффективным механизмом тепломассопереноса в таких условиях может служить термовибрационная конвекция. Вибрации оказывают влияние на неоднородную по плотности жидкость и вызывают ее осредненное течение. В монографии [3] определен порог возникновения осредненной термовибрационной конвекции в слое однородной жидкости с твердыми теплопроводными границами, а в работе [4] – изучена конвекция в пористом слое, насыщенном жидкостью.

Представленная работа является продолжением диссертации автора и посвящена исследованию осредненной термовибрационной конвекции в двухслойной системе

«жидкость – пористая зона» под действием вибраций высокой частоты и малой амплитуды в условиях микрогравитации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается горизонтальный слой однокомпонентной жидкости, который частично заполняется однородной пористой зоной, насыщенной той же жидкостью (рис. 1). Пористая среда формирует двухслойную систему, совершающую продольные колебания с высокой частотой и малой амплитудой. Система подогревается снизу и находится в условиях микрогравитации. Поры среды не деформируются под действием вибраций.

В качестве пористой среды выбрана система стеклянных шаров, насыщенная водой. Шары закреплены. Их диаметр в 10 раз меньше толщины пористого слоя. Параметры системы «вода – стеклянные шары» задают следующие константы: пористость $m = 0.40$, безразмерная проницаемость (число Дарси) $\mathrm{Da} = 10^5$, отношение теплопроводностей $\kappa = 1.5$ и теплоемкостей $b = 0.68$ пористой среды и жидкости, число Прандтля для пористой среды $\mathrm{Pr}_m = 3.2$.

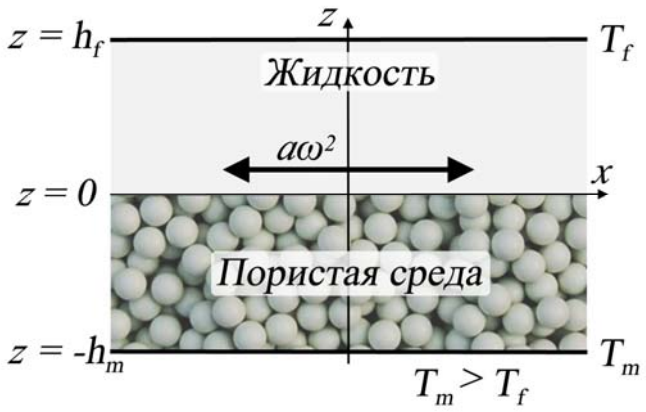


Рис. 1. Неоднородно нагретая двухслойная система «жидкость – пористая зона» под воздействием продольных вибраций в условиях микрогравитации.

Движение жидкости в каждом слое описывается уравнениями термовибрационной конвекции, полученными на основе метода осреднения [3, 4]. Период вибрации предполагаем малым по сравнению с характерными тепловыми и гидродинамическими временами задачи. Изучается устойчивость квазиравновесия жидкости [3]. Под квазиравновесием понимается состояние жидкости, при котором в системе нет осредненной конвекции, а имеются лишь высокочастотные пульсации поля скорости. Температура при этом в слоях линейно растет по направлению к нижней границе пористого слоя. На рис. 2 изображены равновесные профили пульсационного течения в моменты времени, соответствующие разным частям периода вибрации. В состоянии квазиравновесия жидкости скорость течения имеет продольную компоненту.

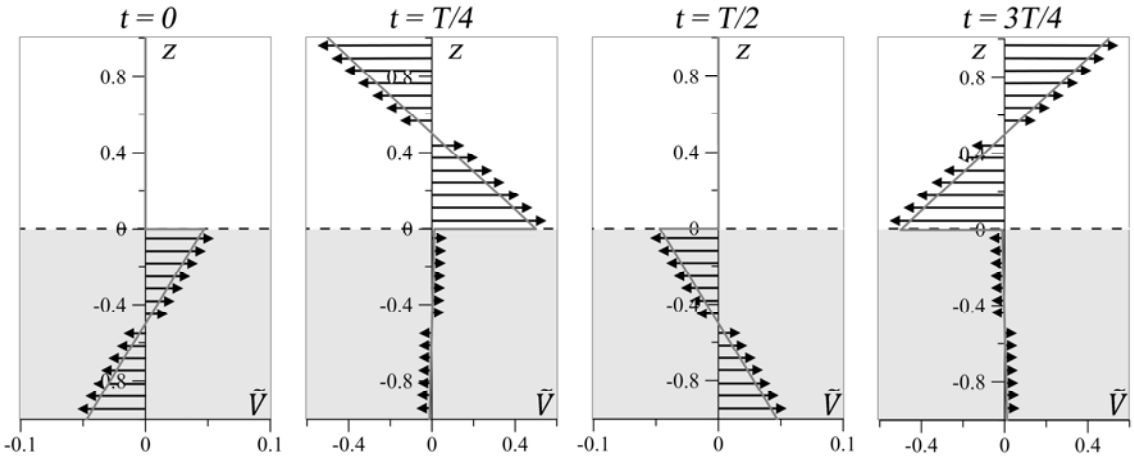


Рис. 2. Профили продольной пульсационной скорости в состоянии квазиравновесия жидкости в моменты времени, соответствующие частям периода вибрации.

Под действием высокочастотных вибраций определенной амплитуды и частоты в описанной неоднородно нагретой системе возникает осредненное конвективное течение. В работе находится граница устойчивости квазиравновесия жидкости при изменении отношения толщин жидкого и пористого слоев $d = h_f / h_m$. Численное решение конвективной задачи получается с помощью метода стрельбы.

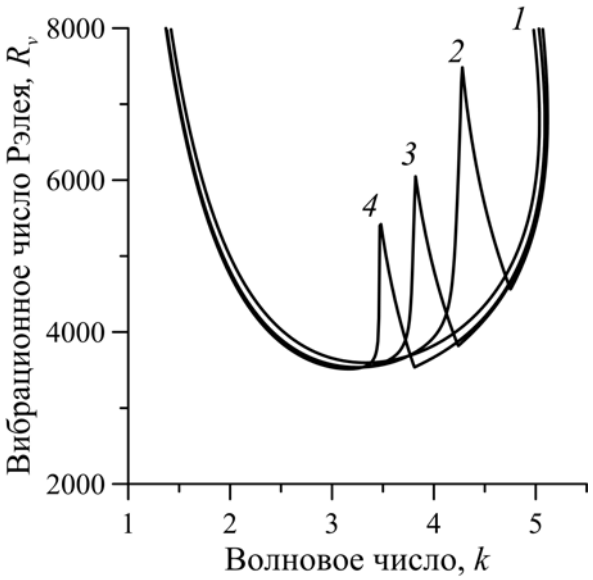


Рис. 3. Нейтральные кривые устойчивости квазиравновесия жидкости при изменении отношения толщин слоев d: 0.05 (кривая 1), 0.70 (кривая 2), 0.80 (кривая 3), 0.90 (кривая 4).

РЕЗУЛЬТАТЫ

Осредненная конвекция жидкости генерируется при превышении критического порогового значения вибрационного числа Рэлея $R_v = (\beta a \omega \Theta)^2 K / 2\nu_f \chi_{eff}$, где a, ω – амплитуда и частота вибрации, β – коэффициент объемного расширения жидкости, ν_f – вязкость, Θ – перепад температуры на пористом слое, K – проницаемость пористой среды, χ_{eff} – эффективная температупроводность среды.

На рис. 3 приводится семейство нейтральных кривых, построенных при различных значениях отношения толщин слоев. Видно, что в случае отношения толщин жидкого и пористого слоев $d > 0.50$ кривые могут иметь два минимума, соответствующие двум видам возмущений квазиравновесия с разными длинами волн.

Бимодальный характер нейтральных кривых связан локализацией осредненного течения в жидкостном слое или его проникновением в поры среды.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-00067).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hirata S.C., Goyeau B., Gobin D.* Stability of thermosolutal natural convection in superposed fluid and porous layers // Transport in Porous Media. 2009. V. 78. P. 525–536.
2. *Kolchanova E., Lyubimov D., Lyubimova T.* The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid // Transport in Porous Media. 2013. V. 97. P. 25–42.
3. *Gershuni G.Z., Lyubimov D.V.* Thermal Vibrational Convection. N.Y.: Wiley, 1998. 358 p.
4. *Зеньковская С.М., Роговенко Т.Н.* Фильтрационная конвекция в высокочастотном вибрационном поле // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, № 3. С. 22–29.

——— ♦ ♦ ♦ ———

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В АТМОСФЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С МОДЕЛЬНЫМИ ВЕТРОУСТАНОВКАМИ

К.Б. Кошелев [1], *С.В. Стрижак* [2]
Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН
e-mail: koshelevkb@mail.ru [1], strijhak@yandex.ru [2]

Изучение параметров течения в Атмосферном Пограничном Слое (АПС) с учетом влияния стратификации среды, орографии местности, движения частиц важно с точки зрения изучения аэрофизических процессов при проектировании ветропарков и оценки их эффективности на территории РФ [1,2]. Для моделирования процессов в атмосферном пограничном слое характерно использование вихреразрешающего моделирования с использованием различных моделей для подсеточной турбулентной вязкости [3,4]. Известно, что для работы ветропарков характерно условия существования нейтральной и устойчивой стратификации. Полученные результаты расчета для АПС могут быть использованы в качестве начальных данных для моделирования параметров ветропарка.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Библиотеки SOWFA в рамках открытого пакета OpenFoam 2.4.0 использовалась для выполнения расчетов течения в атмосферном пограничном слое и в модельном ветропарке. В решателе ABLSolver использовалась вихреразрешающая модель для уравнений неразрывности и движения в форме приближения Буссинеска, уравнения для потенциальной температуры [5,6]. Крупномасштабные вихревые структуры рассчитыва-

лись при помощи интегрирования фильтрованных уравнений. Мелкие вихри, размер которых не превышал шага расчетной сетки, моделировались с помощью лагранжевой динамической модели Смагоринского для подсеточной вязкости. Аппроксимация слагаемых в исходных уравнениях была выполнена со вторым порядком точности по времени и пространству. Полученная система алгебраических уравнений решалась итерационным методом сопряженных градиентов с предобуславливателем для скорости, давления, температуры, тензора напряжений и параметров для модели турбулетности. В ходе расчета были получены поля осредненных и пульсационных величин. На базе решателя ABLSolver разработан новый решатель ABLSolverP для моделирования движения частиц в атмосферном пограничном слое, на базе решателя pisoFoamTurbine.ALM создан решатель partpisoFoamTurbine.ALM для моделирования движения частиц в области с работающими ветроэлектрическими установками (ВЭУ). Модификация решателей заключалась в добавлении модели кинематического облака частиц. В данной реализации решателей были добавлены слагаемые, учитывающие движение частиц и их взаимодействие с воздушным потоком [7]. Тепловое взаимодействие пока не учитывалось.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пространственная область представляла собой прямоугольный параллелепипед с размерами 3000×1020×3000 метров, на верхней границе которого использовалось граничного условия проскальзывания, а на боковых границах – циклическое граничное условие. Для значения скорости на входе расчетной области задавался потенциальный профиль скорости, для задания скорости на поверхности использовалась модель пристеночной функции согласно теории подобия Монина–Обухова. Значение температуры на входе задавалось постоянным до определенной высоты и далее возрастало по линейному закону. Величина напряжения сдвига на поверхности определялась по модели U. Schumann. Начальные условия для случая нейтрального пограничного слоя задавались следующими: скорость ветра $U0 = 8$ м/с с направлением 270 градусов, высота до которой задана средняя скорость $U0 = 100$ м, начальная потенциальная температура внизу 300K и сверху 305K, начальное значение подсеточной турбулентной кинетической энергии 0.1 $м^2$ /$с^2$, градиент потенциальной температуры 0.003 K/м. Для случая "нейтральный" задавалось отсутствие теплового потока. В качестве частиц рассматривались твердые частицы песка. Типичная плотность песка задавалось равной 2550 кг/м3. В нижеприведенном примере модель ввода частиц – модель сечения. В расчетную область вводилось 100 кг частиц за 10 секунд со скоростью ввода 10 частиц в секунду и собственной скоростью 8 м/с. Диаметр частиц задавался фиксированным $2.5 \cdot 10^{-4}$ метра.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Вычисления выполнялись в пространственной области на расчетных сетках 150×150×51 и 300×102×300 в течение 20000 секунд [6]. Выбран характерный вариант – "нейтральный" для моделирования состояния АПС. Шаг по времени для данной задачи в Эйлерово–Лагранжевой постановке пришлось уменьшить в 5 раз по сравнению с аналогичной задачей без частиц. Положение частиц при «установившемся» режиме течения приведено на Рисунке 1. Оказалось, что частицы под влиянием конкурирующих сил тяжести и турбулентной диффузии занимали примерно нижнюю треть пространственной области в АПС.

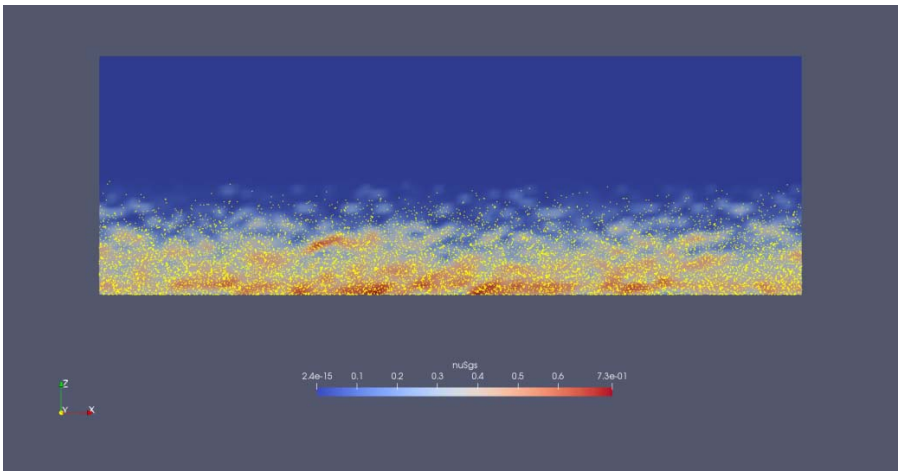


Рис.1. Положение частиц при «установившемся» течении на фоне турбулентной вязкости.

На Рисунке 2 показано положение частиц в модельном ветропарке с 14 ВЭУ в момент времени t=7.4 секунда. Для оценки распределения частиц по высоте были построены графики. На Рисунке 3 для примера с АПС красным цветом показано распределение частиц по высоте с диаметром 25 мкм, а синим цветом – с диаметром 50 мкм. Как видно особой разницы в распределение частиц по высоте нет, так как частиц относительно мало и на турбулентность они не влияют. Там, где заканчивается влияние турбулентности (выше примерно чуть более 400 м) все частицы под действием силы тяжести опускаются ниже. Влияние силы тяжести наблюдается на всех высотах. Расчеты проводились на вычислительном кластере ИСП РАН на 24–72 ядрах.

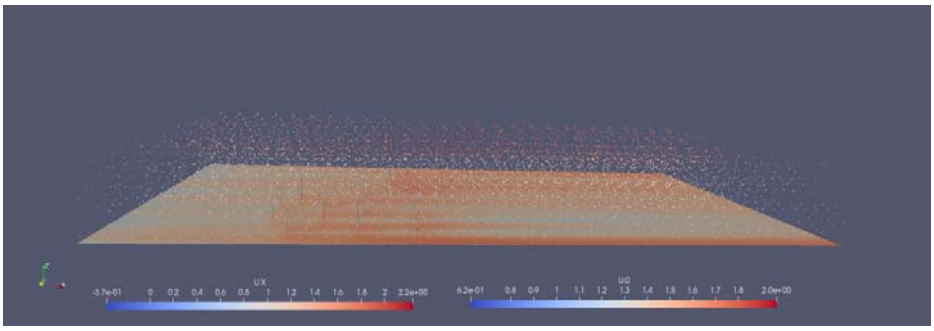


Рис. 2. Положение частиц в ветропарке в момент *времени t=7.4 секунды.*

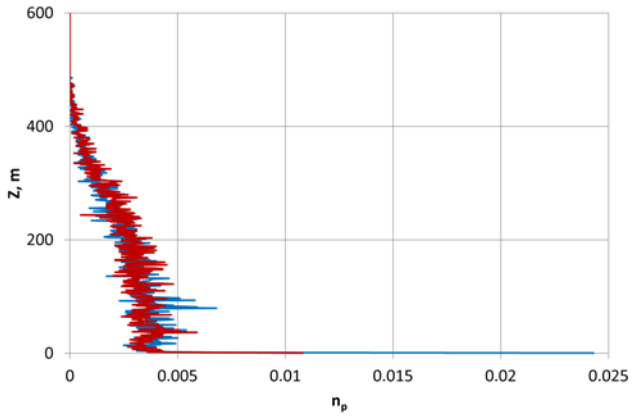


Рис. 3. Распределение частиц разного диаметра по высоте АПС.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-07-01391).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лыкосов В.Н., Глазунов А.В., Кулямин Д.В., Мортиков Е.В., Степаненко В.М.* Суперкомпьютерное моделирование в физике климатической системы: учебное пособие. – М.: Изд.-во Московского университета, 2012. 408 с.
2. *Зилитинкевич С.С.* Атмосферная турбулентность и планетарные пограничные слои. – М.: Физматлит, 2014. 252 с.
3. *Moeng C., Sullivan P.* A large-eddy simulation model for the study of planetary boundary layer turbulence. // J. Atmos Sci., 1994, V. 51, P. 999–1022.
4. *Beare R. J., MacVean M. K. et al.* An intercomparison of large-eddy simulations of the stable boundary layer // Boundary-Layer Meteorology. 2006. v. 118, P. 247–272.
5. *Churchfield, M. J., Lee. S., Michalakes, J., Moriarty. P. J.* A numerical study of the effects of atmospheric and wake turbulence on wind turbine dynamics. // J. of Turbulence, 2012, v. 13(14), P. 1–32.
6. *Tellez-Alvarez J., Koshelev K., Strijhak S., Redondo J.M.* Simulation of turbulence mixing in the atmosphere boundary layer and analysis of fractal dimension // Physica Scripta. 2019. Vol. 94. # 064004.
7. *Алоян А.Е.* Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере / Курс лекций. – М.: ИВМ РАН, 2002. 201 с. – ISBN 5-901854-05-5.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЛНОВОЙ СТРУКТУРЫ ПОТОКА НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОСТЬ–ЖИДКОСТЬ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ВЫХОДНОМ КАНАЛЕ Т-МИКРОМИКСЕРА, ПРИ НАЛОЖЕНИИ ВНЕШНИХ ПУЛЬСАЦИЙ

А.Ю. Кравцова, П.Е. Янко, М.В. Кашкарова, Б.Р. Шарифуллин, А.В. Бильский
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН
e-mail: Kravtsova.Alya@gmail.com

Проведено экспериментальное исследование потока жидкости в Т-образном микроканале в случае реализующихся стационарных режимов течения при наложении внешнего периодического воздействия. Произведено CFD-моделирование течения с помощью пакета STAR CCM+. Обнаружено образование гидродинамической волны, распространяющейся вдоль выходного канала. Длина волны имеет тенденцию к уменьшению с увеличением частоты внешнего возмущения. Показано, что максимальная амплитуда волны достигается при частоте внешнего возмущения 1000 Гц.

Развитие высокоточной техники и медицины выдвигает новые требования к миниатюризации устройств. Все большую значимость приобретают эффективные и ресурсосберегающие системы, основанные на микроэлектромеханических технологиях. Микромиксеры используются для проведения химических реакций, при производстве лекарственных препаратов и в биологической промышленности, поэтому исследование различных режимов течения и способов интенсификации смешения жидкостей в них является на сегодняшний день важной задачей.

Исследование структуры потока и процессов смешения в Т-образном микромиксере выполнялось различными авторами [1–5]. Глубокое исследование структуры пото-

ка в Т-микроканале для чисел Рейнольдса от 5 до 600 проведено в работе Минакова с соавторами [6]. Авторы показали, что при числах Рейнольдса больших 240 поток становится периодическим, более 400 – квазипериодический. Рассчитана частотная характеристика пульсаций скорости для различных режимов потока. Установлено, что для некоторых режимов течения наблюдается выделенная частота пульсаций, имеющая наибольшую амплитуду. Исследование возможности управления потоком и эффективностью перемешивания жидкости путем подачи импульсного потока на входы Т-микроканала приведено в работах [7–10] для узкого диапазона чисел Рейнольдса 0,3÷10 и частот внешнего возбуждения менее 200 Гц. Также, показана монотонная зависимость эффективности перемешивания от числа Струхаля. Однако, исследование возбуждённого потока жидкости в микроканале в широком диапазоне частот возбуждения и чисел Рейнольдса остаётся малоизученным вопросом.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Для получения характеристик потока в работе использовался метод лазерной индуцированной флуоресценции с микронным разрешением (μLIF) инвертированный в микроскоп (Carl Zeiss Axio Observer.Z1) [11]. На предметном столике микроскопа устанавливается Т-образный микроканал. Постоянный расход жидкости в канале задается шприцевым насосом фирмы KD Scientific с двумя выходами. Для создания внешних возмущений на каждом из входов в микроканал, разработана и собрана уникальная система возбуждения потока на пьезоэлектрическом актюаторе, детальное описание которой представлено в работе Кравцовой и Мешалкина 2017 г. [12]. На один вход микроканала подается дистиллированная вода, на другой – дистиллированная вода с красителем Родамин 6G, растворяющимся на молекулярном уровне. Концентрация раствора составляет 724 мг красителя на литр воды. Освещение потока в микроканале осуществляется импульсным Nd:Yag лазером, длительность импульса 10 нс, энергия 25 мДж, длина волны 532 нм [13]. Излученный красителем свет в красном диапазоне длин волн отражается дихроичным зеркалом на CCD-камеру с разрешением 2048×2048 пикселей. Полученные изображения обрабатываются на персональном компьютере с помощью программного пакета «ActualFlow». На основе полученных экспериментальных мгновенных полей концентрации рассчитывается эффективность перемешивания методом сегрегации Дэнквертса [14].

РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследования были проведены для реализующихся в случае невозбужденного потока стационарных режимов течения в Т-образном микроканале, характеризующиеся безразмерном параметром – числом Рейнольдса. Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = U_0 D_h / \nu$, рассчитывалось по среднерасходной скорости в канале смешения U_0, гидравлическому диаметру прямоугольного выходного канала D_h = 160 мкм и кинематической вязкости ν, значение которой бралось с учетом температуры помещения. Частота внешних пульсаций f варьировалась в диапазоне от 0 до 1100 Гц с шагом 100 Гц. Пульсации создавались в одинаковой фазе на обоих входах Т-микроканала.

Обнаружено, что при воздействии на поток внешних пульсаций, возникает периодическая волновая структура на границе жидкость–жидкость. Динамика гидродинамической волны, распространяющейся вдоль выходного канала, полученная с фазовым сдвигом времени Δt = 0,125 мс, показана на рис. 1. Частота внешнего воздействия составляет 1000 Гц. Для этого случая скорость волны составляет 0,992 м/с. Граница раздела жидкость–жидкость в выходном канале описывается уравнением: $y = 3{,}3 \cdot \sin(1000t - 1008.06x)$, где x – координата вдоль оси выходного канала, мкм; y – отклонение положения границы от оси, мкм; и t – время, с. Волна имеет стационарное

положении при фиксированной фазе внешнего воздействия. Число Струхаля составляет 0,24. Также в работе проведено исследование возбужденного потока используя программный пакет STAR CCM+. Накладываемые пульсации моделировались с помощью функций поля для расхода во входных каналах. Положение границы раздела сред с красителем и без, полученной при моделировании полностью повторяют экспериментальные результаты.

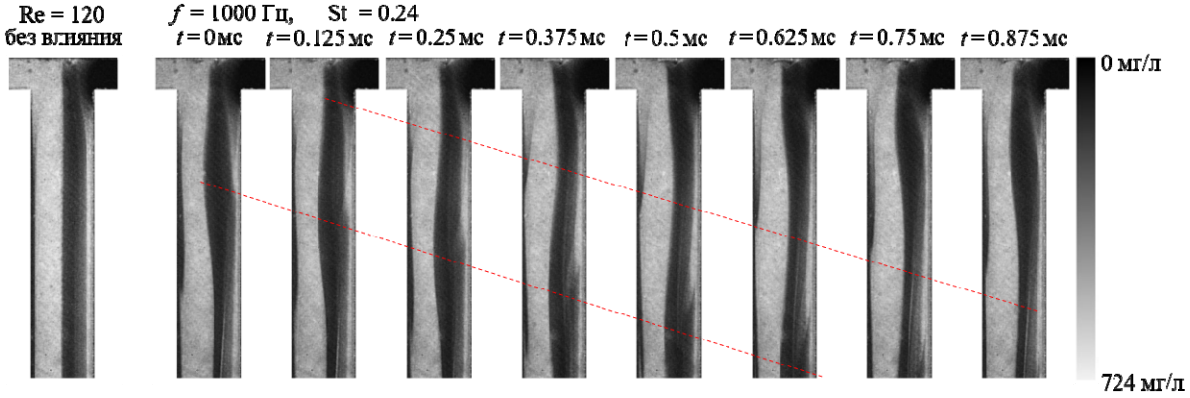


Рис. 1. Мгновенное поле концентрации для невозбужденного потока Re = 120 и реализующаяся в потоке волновая структура при частоте внешнего воздействия f = 1000 Гц.

Таким образом, было обнаружено образование гидродинамической волны, распространяющейся вдоль выходного канала. Длина волны имеет тенденцию к уменьшению с увеличением частоты внешнего возмущения. Показано, что максимальная амплитуда волны достигается при частоте внешнего возмущения 1000 Гц. Получено хорошее согласование результатов моделирования и экспериментальных данных. На основе полученных мгновенных полей концентрации показано, что частота волнового движения на границе жидкостей с точностью до 6% совпадает с частотой наложенных внешних пульсаций расхода. Показано, что перемешивание остается преимущественно диффузионном и его эффективность увеличивается, по сравнению с невозбужденным потоком, за счет увеличения межфазной границы.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-79-10217).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Engler M., Kockmann N., Kiefer T., Woias P.* Numerical and experimental investigations on liquid mixing in static micromixers // Chemical Engineering J.. 2004. V. 101. P. 315 – 322
2. *Wong S.H., Ward M.C.L., Wharton C.W.* Micro T-mixer as a rapid mixing micromixer // Sensors and Actuators B. 2004. V. 100. P. 359 – 379
3. *Dreher S., Kockmann N., Woias P.* Characterization of Laminar Transient Flow Regimes and Mixing in T-shaped Micromixers // Heat Transfer Engineering. 2009. V. 30. № 1. P. 91 – 100
4. *Hoffmann M., Rabiger N., Schluter M., Blazy S., Bothe D., Stemich C., Warnecke H.-J.* Experimental and Numerical Investigations of T-Shaped Micromixers // 11th Europ. Conf. on Mixing. Bamberg, Germany. 2003. P. 269 – 276
5. *Mariotti A., Galletti C., Mauri R., Salvetti M.V., Brunazzi E.* Steady and unsteady re-

gimes in a T-shaped micro-mixer: Synergic experimental and numerical investigation // Chemical Engineering J.. 2018. V. 341. P. 414 – 431
1. *Minakov A., Rudyak V., Dekterev A., Gavrilov A.* Investigation of slip boundary conditions in the T-shaped microchannel // Int. J. Heat Fluid Flow. 2013. V. 43. P. 161 – 169
6. *Glasgow I., Lieber S., Aubry N.* Parameters Influencing Pulsed Flow Mixing in Microchannels // Anal. Chem. 2004. V. 76. № 16. P. 4825 – 4832
7. *Goullet A., Glasgow I., Aubry N.* Dynamics of Microfluidic Mixing Using Time Pulsing // Discret. Contin. Dyn. Syst. 2005. V. 2005. № April. P. 327 – 336
8. *Ma Y., Sun C.-P., Fields M., Li Y., Haake D. A., Churchil B. M., Ho C.-M.* An unsteady microfluidic T-form mixer perturbed by hydrodynamic pressure // J. Micromechanics Microengineering. 2008. V. 18. № 4. P. 45015
9. *Mao W.B., Xu J.L.* Micromixing enhanced by pulsating flows // Int. J. Heat Mass Transf. 2009. V. 52. № 21 – 22. P. 5258 – 5261
10. *Kravtsova A.Yu., Ianko P.E., Kashkarova M.V., Bilsky A.V.* Investigation of the perturbation flow in a T-microchannel using the LIF technique // J. of visualization. 2019. V. 22. № 5. P. 851 – 855
11. *Kravtsova A., Meshalkin Yu.* Influence of perturbance frequency on intensity of mixing of fluids in microchannel devices // EPJ Web of Conferences. XIV All-Russian School-Conference of Young Scientists with International Participation “Actual Problems of Thermal Physics and Physical Hydrodynamics”. 2017. V. 159. P. (00028)-5.
12. *Янко П.Е., Мешалкин Ю.Е., Кравцова А.Ю.* Детализация структуры потока с периодическим внешним возбуждением в микроканале Т-типа // Материалы двадцать пятой Всероссийская научной конференции студентов-физиков и молодых учёных (ВНКСФ-25). 2019. С. 502 – 503
13. *Dankwerts P.V.* The definition and measurements of some characteristics of mixtures // Appl. Sci. Res. 1952. P. 279 – 296

—— ♦ ♦ ♦ ——

ПРОСТЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С УПРОЧНЕНИЕМ

А.Г. Куликовский, А.П.Чугайнова
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
e-mail: anna_ch@mi-ras.ru

Изучаются простые одномерные волны (волны Римана) в несжимаемой анизотропной упругопластической среде. Показано, что существуют два типа этих волн: быстрые и медленные, скорости которых различны всюду за исключением отдельных точек на плоскости компонент напряжения. Считается, что среда нелинейная и задана упругими свойствами, а также условиями образования пластических деформаций. Найдены скорости характеристик, несущих волны Римана. Изучена эволюция простых волн и условия их опрокидывания.

Исследован вид ударной адиабаты и условий эволюционности в зависимости от параметров модели.

—— ♦ ♦ ♦ ——

УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ДИФФУЗОРЕ

С.А. Кумакшев
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: kumak@ipmnet.ru

Для задачи Джеффри–Гамеля исследована эволюция основного одномодового стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре. Показан переход одномодового течения к многомодовым режимам (у которых скорость потока меняет знак в зависимости от угла раствора).

Рассмотрим классическую задачу Джеффри–Гамеля в случае диффузорного течения [1–3]. Жидкость имеет плотность ρ и динамическую вязкость μ; ее плоское движение происходит в области $\Omega = \{(r,\theta) : r > 0, |\theta| < \beta\}$, где r, θ – полярные координаты, β – угол полураствора ($0 < \beta \le \pi$). На стенках диффузора $r > 0$, $\theta = \pm\beta$ выполняются условия прилипания, а при $r = 0$ течение имеет особенность типа источник постоянной мощности $Q < 0$. Система допускает два безразмерных параметра: угол раствора 2β и число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho Q / \mu$ ($\mathrm{Re} < 0$), что недостаточно для полного обезразмеривания уравнений движения [3–7]. Имеется автомодельное решение, для которого поле скоростей радиально

$$v_r = -\frac{Q}{r} V(\theta), \quad v_\theta \equiv 0 \tag{1}$$

и автоматически удовлетворяет условию несжимаемости для произвольной гладкой функции $V(\theta)$. Компоненты тензора скоростей деформаций v и напряжений σ равны

$$v_{rr} = -v_{\theta\theta} = \frac{Q}{r^2} V(\theta), \; v_{r\theta} = -\frac{Q}{2r^2} V'(\theta); \; \sigma_{rr;\theta\theta} = -p \pm \frac{2\rho Q^2}{r^2\,\mathrm{Re}} V(\theta), \; \sigma_{r\theta} = -\frac{\rho Q^2}{r^2\,\mathrm{Re}} V'(\theta) \tag{2}$$

Величины (1), (2) определяются неизвестными функциями профиля скорости V и давления p, для которых имеют место соотношения (следствие уравнений Навье–Стокса [3])

$$V'' + 4V - \mathrm{Re} V^2 = C = \mathrm{const}; \quad p = \frac{\rho Q^2}{2r^2\,\mathrm{Re}} (C - 4V). \tag{3}$$

На безразмерную функцию $V(\theta)$ налагаются дополнительные требования: условия прилипания жидкости на границе и интегральное условие постоянства расхода

$$V(\pm\beta) = 0, \qquad \int_{-\beta}^{\beta} V(\theta) d\theta = 1. \tag{4}$$

С помощью приведенных соотношений требуется определить неизвестные $V(\theta)$ и $C = V''(\pm\beta)$ для произвольных значений $\mathrm{Re} < 0$ и $0 < \beta \le \pi$, что представляет трудную аналитическую и вычислительную проблему. Неявное решение многомерной нелинейной краевой задачи посредством эллиптических функций на основе первого интеграла уравнения (3) не позволяет проводить эффективные высокоточные расчеты. Используемые в научной литературе подходы (например [8, 9]) связаны, как правило, с игнорированием интегрального условия (4) и фиксацией значения $V(0) = V_0$. Это сущест-

венно искажает смысл и постановку классической задачи Джеффри–Гамеля [1–7]. Полученная система трансцендентных уравнений относительно трех неизвестных постоянных интегрирования при решении вызывает вычислительные трудности.

Эффективное высокоточное решение нелинейной краевой задачи (3), (4) проводится с помощью численно-аналитического метода [10], основанного на модифицированном алгоритме Ньютона и процедуре продолжения по параметрам. Исходная краевая задача записывается в терминах нормированных профиля скорости y, аргумента x, неизвестных параметров γ, λ и известных параметров a, b

$$y(x) = 2\beta V(\theta),\ x = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\beta} + 1\right),\ 0 \le x \le 1,\ a = 4\beta,\ b = 2\beta \mathrm{Re},\ \lambda = 8\beta^3 C,\ \gamma = y'(0) \quad (5)$$

Интегральное условие (4) учитывается посредством неизвестной функции $z(x)$, характеризующей исток. В результате получается задача Коши для y, z с неизвестными γ, λ, нахождение которых осуществляется учетом конечных условий

$$y'' + a^2 y - b y^2 = \lambda,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \gamma,\ z' = y - 1,\ z(0) = 0;\ y(1) = z(1) = 0 \quad (6)$$

Требуется найти параметры γ, λ как функций известных величин a, b. Проще сперва определять γ, λ продолжением по параметру $b \le 0$ при фиксированном значении параметра a, $0 < a \le 2\pi$, т.е. угла β, $0 < \beta \le \pi/2$, поскольку решение задачи (7) строится в явной аналитической форме для $b = 0$ ($\mathrm{Re} = 0$). Затем искомая функция y после подстановки найденных величин $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ получается численным интегрированием задачи Коши (7).

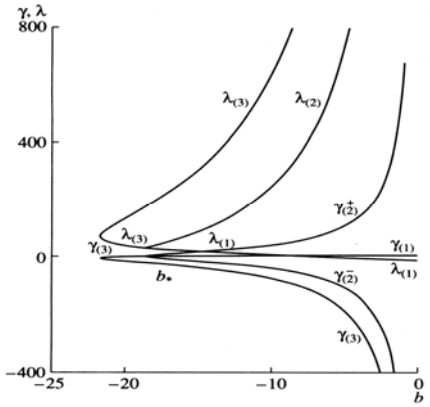


Рис. 1. Кривые зависимости $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ и точки бифуркации b_*, b^* для $\beta = 10^\circ$ ($\pi/18$), отвечающие течениям: основному одномодовому ($\gamma_{(1)}, \lambda_{(1)}$), двухмодовым ($\gamma^{\pm}_{(2)}, \lambda_{(2)}$) и трехмодовым ($\gamma_{(3)}, \lambda_{(3)}$).

На рис. 1 приведены зависимости $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ для величины угла $\beta = 10^\circ$. Установлено, что функция $\gamma = \gamma_{(1)}(b) > 0$ и достигает нулевого значения в критической точке $b_* \approx -18.8$, отвечающей вырождению основного одномодового течения. При дальнейшем уменьшении $b < b_*$ величина $\gamma < 0$ и убывает, а течение становится трехмодовым, т.е. содержит участки стока и истока. При $b < b^*$ решения данного типа становятся невозможными, так как кривые $\gamma_{(3)}(b)$. $\lambda_{(3)}(b)$ в этой точке имеют вертикальные касательные, что отвечает точке поворота (рис. 1).

Продолжением вправо по параметру b, с помощью аналогичного подхода уста-

навливается существование второй ветви трехмодовых течений для значений $b^* < b < 0$. Для $b^* < b < b_*$ установлено существование не менее двух типов трехмодовых течений с сильно различающимися характеристиками. На рис. 2 представлены кривые 1, 2 для трехмодового профиля скорости $y(x)$ при $b = -21$; они симметричны относительно биссектрисы. Таким образом, для значений $b_* < b < 0$ установлено существование и определены взаимные переходы течений трех типов: основного одномодового, двухмодовых и трехмодового, см. рис. 1. Примеры таких профилей скорости $y(x)$ при $b = -10$ представлены на рис. 3. В результате расчетов проведен анализ сложной картины бифуркации течений, происходящих на сравнительно небольшом интервале $0 \geq b \geq -25$ ($0 \geq \mathrm{Re} \geq -72$ для $\beta = 10°$). На его основе можно исследовать механизм перестройки течений при изменении числа Re, на неограниченном полуинтервале $b < 0$ и для произвольных величин угла раствора $0 < 2\beta \leq 2\pi$.

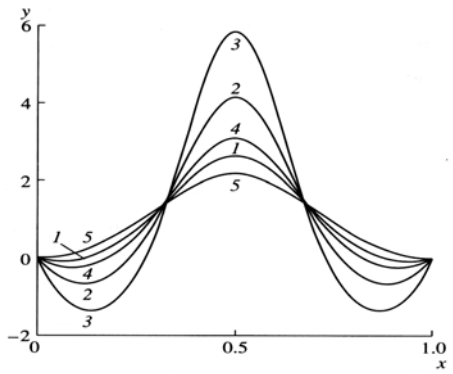


Рис. 2. Трехмодовые течения: кривые 1, 2 для $b = -21$, кривые 3, 4 для $b = b_*$ и b^*; кривая 5 –одномодовое течение $b = b_*$

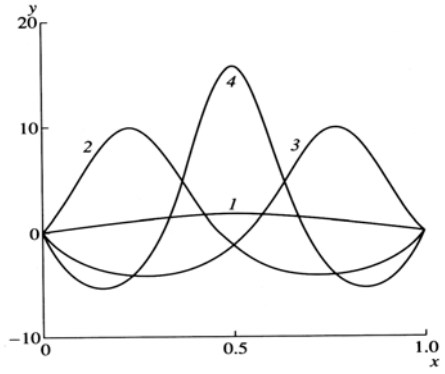


Рис. 3. Профили скорости одномодового (1), двух двухмодовых (2, 3) и трехмодового (4) течений для $b = -10$

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ АААА-А17-117021310387-0) и частично поддержана грантами РФФИ №№ 17-01-00538, 18-01-00812, 17-08-00742.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G.B. Jeffery.* The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Phil. Mag. 1915. Ser. 6. V. 29. № 172. P. 455–465.
2. *G. Hamel.* Spiralformige Bewegungen zahen Flussigkeiten // Jahres.- ber. Deutsch. Math. Ver., 1917. Bd. 25. S. 34–60.
3. *Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе.* Теоретическая гидромеханика. Ч.2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
4. *Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев.* Бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре // Докл. РАН, 2004. Т. 396. № 4. С. 480–484.
5. *Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев.* Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. С. 25–36.
6. *Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев.* Многомодовая бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре// Докл. РАН, 2004. Т. 399. № 5. С. 620–624.
7. *Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев.* Бифуркация многомодовых течений вязкой жидко-

сти в плоском диффузоре// ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 431–441.
8. *Дж. Бэтчелор.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
9. *K. Millsaps, K. Pohlhausen.* Thermal distributions in Jeffery–Hamel flows between non-parallel plane walls // J. Aeronaut. Sci. 1953. V. 2. № 3. P. 187–196.
10. *Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев, С.В. Нестеров.* Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 723–741.

——— ♦ ♦ ♦ ———

ПУЛЬСАЦИИ КОНВЕКТИВНОГО ПОТОКА ОТ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА – НЕПРЕРЫВНОГО ОПТИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

С.Ю. Лаврентьев, Н.Г. Соловьев, А.Н. Шемякин, М.Ю. Якимов
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: yakimov@lantanlaser.ru

Оптические разряды как способ генерации и поддержания непрерывной (НОР) или импульсно-периодической (ИПОР) плазмы с высокой плотностью диссипации энергии все шире применяются для решения различных задач [1–2].

Уже в первых экспериментах по НОР [1] были зарегистрированы автоколебания плазмы, связанные с термогравитационной конвекцией [3]. Неустойчивость конвективного потока порождает пульсации скорости потока, вызывающие небольшие регулярные колебания яркости и положения плазмы, затрудняющие ее применение в качестве стабильного источника излучения большой яркости. О природе этой неустойчивости в литературе нет единого мнения [3–7], что затрудняет выработку методов по ее преодолению.

В данной работе на основе наблюдений теневой картины области нагретого газа вокруг НОР с высоким временным и пространственным разрешением выявляются физические механизмы, обусловливающие наблюдаемую экспериментальную зависимость частоты пульсаций от давления [7].

В работе [7] было проведено исследование относительно небольших (менее 1%) пульсаций яркости плазмы непрерывного оптического разряда в составе излучателя экспериментальной модели лазерно-плазменного источника широкополосного излучения ЛПИ-50 [2], в котором плазма поддерживалась двумя диодными лазерами с длиной волны $\lambda = 0.97$ мкм при мощности излучения $P_l = 2\times26$ Вт. Лучи лазеров, сфокусированные с параметром фокусировки $f/3.5$, пересекались под углом 60° в районе перетяжек. Плазма поддерживалась в зоне пересечения лучей в кварцевой колбе с ксеноном при повышенном давлении.

Наблюдение пульсаций проводилось при различных давлениях ксенона $p_{Xe} = 15\div40$ бар (с учетом нагрева газа в замкнутом объеме в процессе работы). Пульсации яркости излучения записывались на цифровой осциллограф в виде сигнала фотоэлектронного умножителя (ФЭУ). На вход ФЭУ с помощью ахроматической линзы проецировалось увеличенное изображение излучающей плазмы. При этом на фотокатод попадало только излучение центральной области плазмы, остальное отсекалось диафрагмой с отверстием малого диаметра.

Временные диаграммы пульсаций излучения преобразовывались в частотные спектры пульсаций с помощью быстрого преобразования Фурье. Было обнаружено, что основная частота пульсаций, соответствующая на спектре максимуму узкого пика, увеличивается с давлением и составляет, соответственно, $\nu_{15} = 40$ Гц, $\nu_{30} = 47$ Гц, $\nu_{40} =$

53 Гц (индекс – давление в бар), мало меняясь при изменении мощности лазерного излучения.

Для выяснения причин появления колебаний плазмы была проведена скоростная (до 800 кадров в секунду) видеосъемка динамики теневого изображения окрестностей плазмы. Схема получения теневого изображения с использованием излучения самой плазмы в качестве точечного источника показана на рис. 1. Излучение плазмы направлялось сферическим зеркалом обратно, проходило через стенки кварцевой колбы и зону разряда, затем с помощью линзового объектива четкое изображение границы зоны горячего газа, окружающего плазму, создавалось в увеличенном виде на рассеивающем транспаранте, с которого производилась съемка методом обратной проекции.

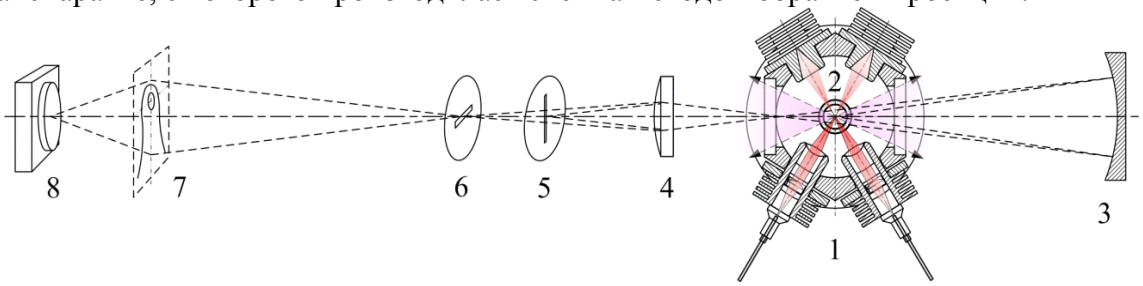


Рис. 1. Схема получения теневого изображения. 1 – излучатель ЛПИ-50; 2 – кварцевая колба с плазмой; 3 – сферическое зеркало; 4 – объектив; 5,6 – щелевые диафрагмы; 7 – экран обратной проекции; 8 – камера.

Для того чтобы отделить, насколько возможно, излучение, отразившееся от сферического зеркала и прошедшее через область горячего газа вокруг НОР, то есть излучение, дающее теневое изображение, от прямого излучения плазмы, использовался астигматизм, возникающий после повторного прохождения излучением стенок колбы. В месте расположения астигматических фокусов устанавливались щелевые диафрагмы, пропускающие искаженное излучение и, в основном, отсекающие прямое излучение плазмы. Этот прием позволил получить контрастное изображение, в котором границы области нагретого газа представлены линией, соответствующей максимуму градиента коэффициента преломления, возникающего на границах горячего и холодного газа.

На рис. 2 представлены кадры, полученные для случая $p_{Xe} = 20$ бар. На представленных кадрах и видеосъемке в целом можно наблюдать последовательные циклы роста области прогретого газа вокруг НОР, имеющего резкую границу, соответствующую области быстрого прогрева до температуры резкого падения коэффициента преломления (2÷3 кК). Зона прогрева приблизительно сферической формы с минимальным радиусом около 0.65 мм увеличивается примерно вдвое за 13 мс, затем образовавшаяся область горячего газа всплывает вверх со скоростью тепловой конвекции. Диаметр зоны прогрева вокруг НОР при этом уменьшается до минимального и цикл повторяется. Весь процесс занимает 23 мс, что соответствует частоте пульсаций яркости 44 Гц.

На кадрах рис. 2, соответствующих временным меткам в диапазоне 0÷6 мс, зона нагретого газа диаметром 2.6 мм, как будет видно далее, представляющая собой тороидальный вихрь, начинает движение вверх, после чего в ближайшей окестности НОР остается вновь формирующийся вихрь диаметром 1.3 мм. На кадрах 8÷14 мс всплывающий вихрь поднимается со скоростью выше 150 мм/с, расширяясь в диаметре от 1.5 до 1.9 мм. На этом этапе видны границы между холодным и горячим газом, выявляющие направление и скорость движения газа на границе вихря, в значительно превышающую скорость его всплывания. На кадрах 15÷20 мс вновь сформировавшийся вихрь горячего газа вокруг НОР, расширившись до диаметра 2.5 мм, начал всплывание.

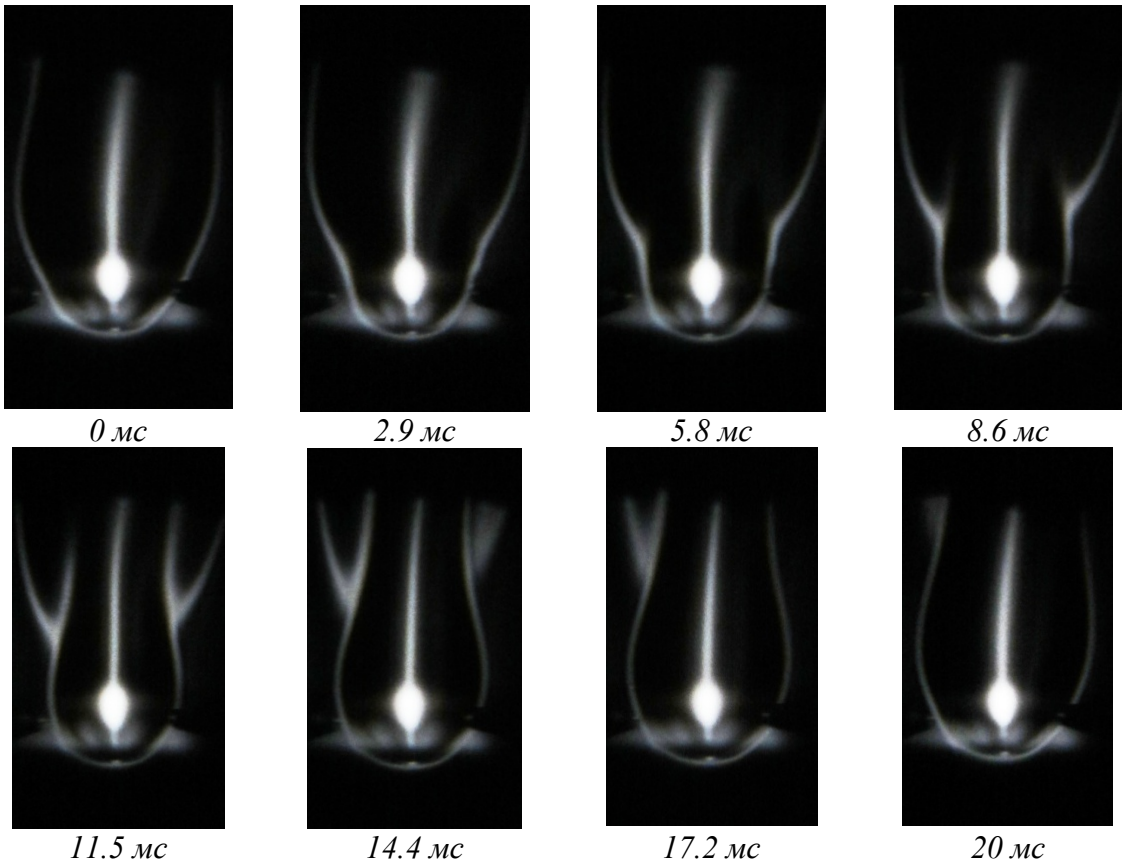


Рис. 2. Последовательные кадры скоростной съемки теневых изображений области нагретого газа, окружающей НОР, показывающие формирование конвективного потока, его движения вверх, расширение и отделение тороидального вихря в течение одного периода пульсации (0–23 мс). Яркое пятно немного ниже центра кадра – НОР. Яркая вертикальная полоса в середине и слабая горизонтальная полоса внизу – проекции щелей. Размер кадра 2.9×5.1 мм^2.

Расширение нагретого газа вокруг плазмы НОР происходит за счет тепловой части энергии лазерного излучения, диссипирующей в плазме. В типичных условиях эксперимента мощность лазерного излучения была в 1.5–2 раза выше, чем порог поддержания плазмы. При этом плазма поглощала около 50% падающего на нее лазерного излучения, половина которого переизлучалась в виде широкополосного излучения, а оставшаяся часть представляла собой тепловую компоненту Q.

По мере расширения области нагретого газа вокруг НОР радиусом r (считаем фронт сферическим) ее расширение замедлялось. Считая, что вся тепловая энергия переносится от центрального источника к нижней полусфере фронта нагретой области за счет теплопроводности и конвекции, скорость расширения $V_t(r)$ можно выразить как

$$V_t(r) = \frac{QM}{2\pi C_p r^2 \rho(T_1)(T - T_1)} \qquad (1)$$

где M – атомная масса Xe, C_p – теплоемкость Xe, $\rho(T_1)$ – плотность Xe при температуре T_1, T – средняя температура горячего газа на фронте. В это рассмотрение не включен конкретный механизм переноса тепла внутри нагретой области. Оценки показывают, что в перенос тепла вносят существенный вклад как теплопроводность, так и конвекция. По отдельности они не способны обеспечить наблюдаемую скорость переноса тепла. Скорость всплывания сферической области горячего газа радиусом r растет с ра-

диусом в соответствии с известной формулой $V_c(r) = \sqrt{2rg}$, где g – ускорение свободного падения. За условие стационарной конвекции, достигаемое при $r = r_0$, можно принять равенство $V_t(r_0) = V_c(r_0)$, откуда следует, что r_0 слабо зависит от остальных параметров.

Как следует из данных рис. 2, отрыв вырастающих последовательно пузырей горячего газа происходит при увеличении их радиуса от первоначального r_0 приблизительно вдвое, до $2r_0$. Отсюда частоту отрыва ν можно выразить как скорость фронта $V_t(2r_0)$ деленную на длину $2r_0 - r_0 = r_0$:

$$\nu = \frac{V_t(2r_0)}{r_0} \tag{2}$$

Расчет с параметрами, соответствующими Рис. 2, дает для p_{Xe} = 15÷140 бар значения ν_p = 41÷50 Hz, близкие к экспериментальным.

Таким образом, наблюдаемая картина колебаний яркости плазмы и области термогравитационной конвекции вокруг НОР отвечает следующей физической картине. С установлением равновесного радиуса волны прогрева газа вокруг НОР на оси симметрии, тем не менее, зона прогрева продолжает расти в стороны за счет избытка тепла, которое конвективный поток, установившийся вблизи оси, отводит в том числе в стороны за счет возникновения тороидального вихря внутри зоны нагретого газа. По мере расширения области нагретого газа скорость ее всплывания увеличивается, и по достижении определенного размера тороидальный вихрь нагретого газа периодически поднимается из окрестности НОР, что приводит к пульсации скорости конвективного потока и соответствующим колебаниям плазмы НОР.

Формулы (1), (2) легко свести к виду, хорошо известному из теории и практики вспыхивающих или мерцающих пламён [8–10]:

$$\nu = \frac{V_t(2r_0)}{r_0} \tag{3}$$

Если заменить в (3) $2r_0$ на D, где D – диаметр пламени, получится известный закон подобия для мерцания пламён, описанный в [8–10] и многих других работах, охватывающих широкий диапазон размеров пламён и частот мерцания. Пульсации конвективного факела от НОР также укладываются в этот закон подобия, отличаясь более высоким давлением газа, меньшим диаметром конвективного факела и соответственно более высокими частотами пульсации.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена частично по теме государственного задания (№ гос.рег. АААА-А17-117021310370-2) и проекта РФФИ 18-01-00534 А.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Генералов Н.А., Зимаков В.П., Козлов Г.И., Масюков В.А., Райзер Ю.П.* Экспериментальное исследование непрерывно горящего оптического разряда // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. В. 4(10). С. 1434–1446.
2. *Зимаков В.П., Кузнецов В.А., Лаврентьев С.Ю., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Шилов А.О., Якимов М.Ю.* Новые возможности применения оптических разрядов в аэрофизическом эксперименте // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т. 17. В. 2. http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-2/articles/653/
3. *Райзер Ю.П., Суржиков С.Т.* Непрерывный оптический разряд в условиях тепловой гравитационной конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989, №4. С. 125–129.
4. *Махвиладзе Г.М., Селезнева И.К.* О тепловой устойчивости стационарной волны

оптического разряда // ПМТФ, 1981, №5, с. 61–67.
5. *Барановский А., Муха З., Перадзыньский З.* Неустойчивость непрерывного оптического разряда в газах// Успехи механики. 1978. Т. 1(3/4). С. 125–147.
6. *Герасименко М.В., Козлов Г.И., Кузнецов В.А.* Механизм стабилизации и осцилляций плазмы непрерывного оптического разряда // Письма в ЖТФ, 1980. Т. 6(8). С. 485–489.
7. *Зимаков В.П., Лаврентьев С.Ю., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Якимов М.Ю.* Пространственная и временная нестабильность оптических разрядов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2018. Т.19, В.4. http://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-4/articles/754/
8. *Cetegen B. M., Ahmed T. A.* Experiments on the periodic instability of buoyant plumes and pool fires // Combustion and Flame. 1993. V. 93 P. 157–184.
9. *Xia Xi, Zhang Peng.* Flickering of buoyant diffusion flames: a vortex dynamics revisit // 2018. arXiv:1803.10400v1 [physics.flu-dyn]
10. *Boettcher P., Menon S., Ventura B., Blanquart G., Shepherd J.* Cyclic Flame Propagation in Premixed Combustion // J. of Fluid Mechanics. 2013. V. 735 P.176–202.

—— ♦♦♦ ——

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ИНДУЦИРОВАННОГО ДИФФУЗИЕЙ НА НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В.В. Левицкий, А.М. Чуприков
Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: levitski@ipmnet.ru

Интерес к изучению диффузионных эффектов обусловлен распространенностью пограничных стратифицированных течений, которые формируются в озерах, водохранилищах, морях и океанах даже в отсутствие действия внешних силовых факторов. Особое внимание уделяется изучению склоновых течений в атмосфере, где скорость ветра может достигать больших значений на ледниках и в глубоких горных долинах.

В данном исследовании изучается течение, индуцированное диффузией на наклонной поверхности, в однородно стратифицированной жидкости.

Однородно стратифицированная жидкость – это жидкость, в которой имеется расслоение по плотности с высотой (*стратификация*), которое непрерывно [1]. Такое состояние является устойчивым равновесием [2].

Из условия "не проникновения" жидкости в стенки $\upsilon_n\big|_\zeta = 0$ следует, что линии равной плотности должны подходить к граничной поверхности перпендикулярно. Если стенки наклонены по отношению к вертикали, то, чтобы выполнялось условие "не проникновения" у стенок, изоплеты плотности начнут отклоняться от горизонтального положения и легкие частицы жидкости будут вдавлены в более тяжелые [3]. Гидростатическое давление в точке на наклонной стенке будет меньше, чем на той же самой глубине в теле жидкости, следовательно, жидкость вблизи стенки будет стремиться продвигаться вверх вдоль нее, пока силы вязкости не уравновесят гидростатическое давление. Ограниченная диффузия будет вызывать движение больших масс в однородно стратифицированной жидкости. Нарушение условия горизонтальной однородности распределения давления и формирует в поле гравитационных или кориолисовых сил специфические медленные течения даже в отсутствие внешних дестабилизирующих факторов [4].

Ясно, что в бассейне с наклонными стенками однородно стратифицированная

жидкость не пребывает в состоянии статического равновесия, и неизбежно возникает конвективное движение. Скорости, порожденные в этом случае, малые, по крайней мере, когда вода стратифицирована солью [5].

Эксперимент проводился в лабораторном бассейне ТСТ-1 из состава «ГФК ИПМех РАН». В бассейн была помещена пластина под углом 45° к горизонту. Пластина имеет отверстие диаметром 1мм, куда вставлена металлическая трубка того же диаметра, в которой находится порошок флюоресцина. Отверстие герметично закрыто до начала эксперимента. После чего Бассейн заполнялся стратифицированным раствором NaCl, с периодом плавучести T_b=6.3 с, методом непрерывного вытеснения. Когда бассейн был заполнен, и жидкость внутри него устоялась, удалялось покрытие и краситель начинал диффундировать в окружающую жидкость. Фотофиксация распространения краски велась несколько суток и производилась на фотоаппарат Canon EOS 5D Mark II с периодом съёмки 30 минут. Также проводилась фотосъемка теневых картин методом «щель–нож Фуко» с помощью теневого прибора ИАБ-458 (апертура прибора составляла 230 мм).

В стратифицированной жидкости при откупоривании отверстия краска прижата к пластине и распространяется вверх вдоль пластины вследствие течения индуцированной диффузии, что наблюдается в течение всего эксперимента (Рис. 1).

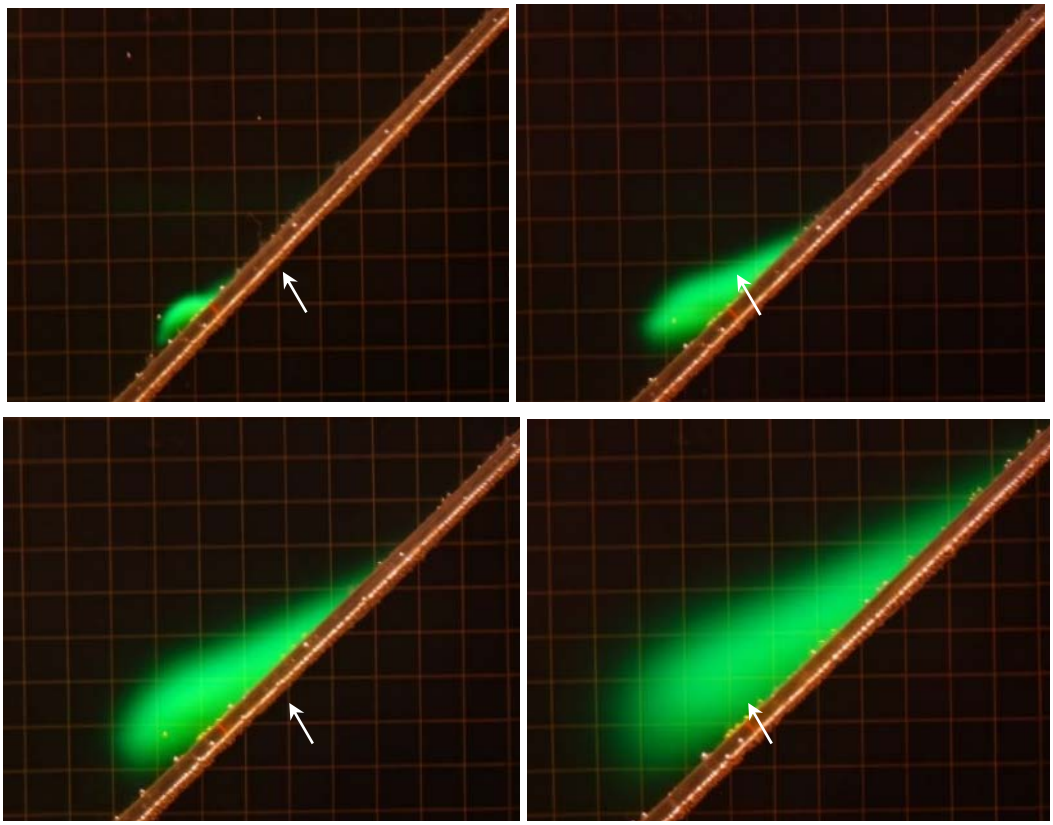


Рис.1. Распространение краски вдоль наклонной поверхности в стратифицированной жидкости. Маркер обозначает источник.

На приводимых фотографиях видно, что распространения краски вдоль наклонной поверхности идет значительно быстрее, чем по нормали к ней. Также виден разрыв между пластиной и «оголовком» распространяющейся краски (Рис 2), что обусловлено притоком неокрашенной жидкости снизу вдоль плоскости, индуцированным диффузией.

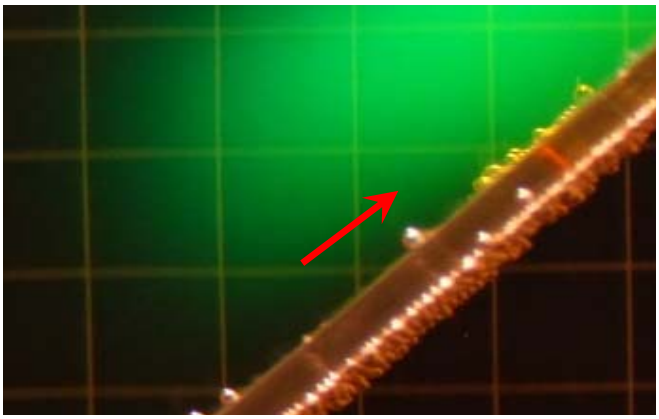


Рис.2. Подток «чистой» жидкости при распространении краски вдоль наклонной поверхности в стратифицированной среде.

По полученным результатам была прослежена эволюция распространения краски в стратификации на наклонной поверхности, а также измерены геометрические параметры в различные моменты времени и прослежены временные зависимости.

В однородной жидкости при откупоривании отверстия краска прижата к пластине и распространяется вниз вдоль пластины (Рис. 3).

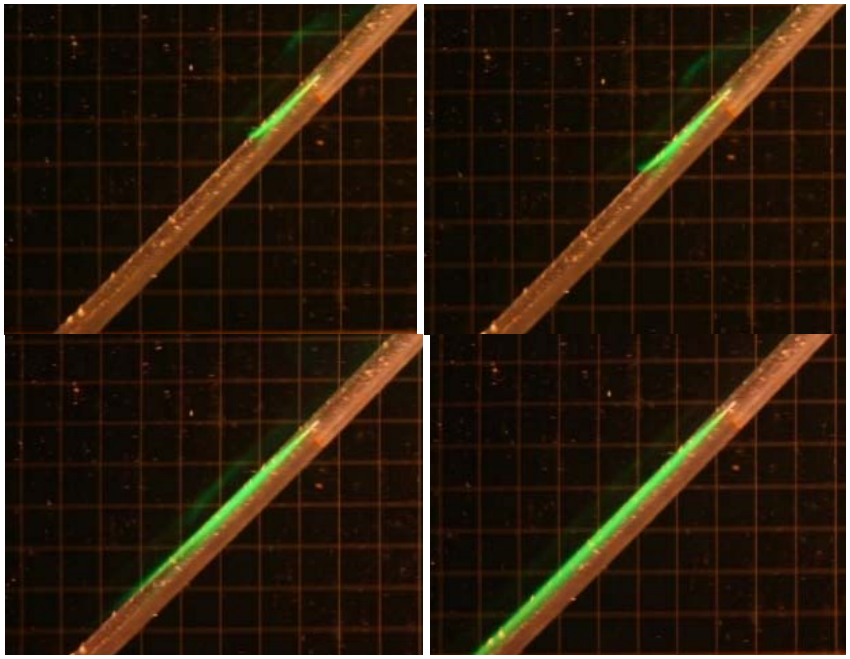


Рис.3. Распространение краски вдоль наклонной поверхности в пресной воде.

Как и ожидалось, в однородной жидкости (пресная вода) краска стекает вниз вдоль наклонной пластины под действием силы тяжести. Никаких течений, тянущее краску вверх, не наблюдается.

На Рис.4 представлены теневые фотографии распространения краски в стратифицированной среде.

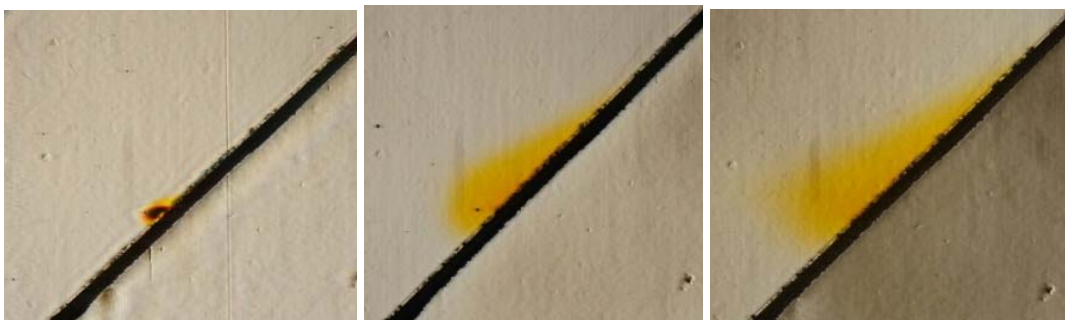


Рис. 4. Теневые картины течения вдоль наклонной плоскости в стратифицированной жидкости.

На теневых картинах также прослеживается более значительное распространение краски вдоль наклонной плоскости, чем перпендикулярное. Больший промежуток времени между снимками нагляднее демонстрирует влияние течения на распространение краски вдоль пластины.

Были получены графики зависимостей распространения краски в направлении течения индуцированное диффузией и отдаления краски в перпендикулярном направлении к поверхности над отверстием от времени (Рис.5).

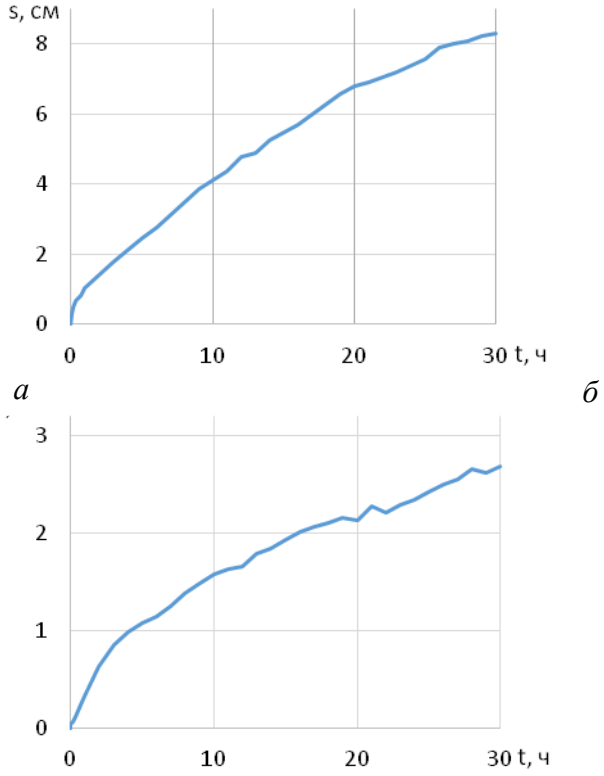


Рис.5. График зависимости от времени:
а) – длины области окрашенной жидкости вдоль пластины,
б) высоты окрашенной области по нормали к пластине.
Период плавучести $T_b = 6.3$ *с.*

В данной работе была разработана методика наблюдения течения, индуцированного диффузией, на наклонной плоскости в непрерывной стратифицированной жидкости. Были проведены эксперименты и прослежена эволюция течения. Определены геометрические параметры. Период плавучести T_b определялся по изменению теневой картины от следа тонущего кристалла NaCl.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 19-19-00598). Эксперименты проведены на Стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика // Теоретическая физика: т.VI (3-е изд., перераб. М.:Наука. Гл. ред.физ-мат.лит.,1986.-736с.).
2. *Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е., Васильев Е.В., Байдулов В.Г., Бардаков Р.Н., Кисточкин А.В., Миткин В.В., Степанова Е.В.* Механика свободных стратифицированных течений // Препринт ИПМех РАН. № 876. Москва, 2008г. С.127.
3. *Чашечкин Ю. Д., Загуменный Я. В.* Структура течения, индуцированного диффузией на наклонной пластине // Доклады РАН. 2012. Т. 444, № 2, с. 165–171.
4. *Chashechkin Yu.D., Zagumennyi Ia.V.* The structure of convective flows driven by density variations in a continuously stratified fluid // Physical Scripta. 2013. 014034.
5. *Загуменный Я. В., Чашечкин Ю. Д.* Тонкая структура нестационарного течения, индуцированного диффузией на неподвижной пластине // Механика жидкости и газа. 2013. № 3. С. 99– 117.

—— ♦♦♦ ——

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ СТРУКТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ НА ВЕТРОВОЙ ВЫНОС ЧАСТИЦ

Е.А. Малиновская
Институт физики атмосферы им.А.М. Обухова РАН
e-mail: elen_am@inbox.ru

Аридные территории являются источниками минерального аэрозоля, выносимого под воздействием ветра с подстилающей поверхности. Оценки интенсивности выноса возможны с использованием моделей переноса пыли [1]. Сам механизм ветрового выноса аэрозоля на опустыненных территориях, несмотря на уже длительную историю исследований, остается недостаточно изученным [2–8]. Наиболее активен ветровой вынос оказывается на тех участках, где происходит формирование барханов и движение песков [1]. Устойчивость частиц песка к воздействию воздушного потока определяется местом их отложения на эоловой структуре [9], что связано с особенностями обтекания и микрофизики их выноса с поверхности [9]. Мгновенные скорости потока влияют на реализацию того или иного типа движения частицы: перекатывание, смещение, подъем [10]. Это приводит к изменению локальных характеристик поверхности и формированию на микромасштабах вторичных течений – типа струй и вихрей с вертикальной и горизонтальной осью [11]. При интенсификации турбулентности с увеличением скорости ветра и нагреве поверхности возникают вертикальные потоки и вихри, сообщающие больший импульс частицам, достаточный для их подъема на большую высоту.

Песчаные частицы при различных расстояниях между ними частично или полностью погружены в ламинарный подслой [2], что влияет на шероховатость. Параметр шероховатости z_0 и коэффициент сопротивления C_f связаны между собой, так как z_0 зависит от величины динамической скорости u_* [5]. В [12] на основе модели и спутниковых данных о рельефе нескольких эоловых структур для области наветренного склона увеличение динамической скорости при движении вверх от подножья до вершины составляет 0,015 м/с для эоловых структур высотой порядка 10 м, 0,02 м/с для 70 м,

0,17 м/с, если выше 80 м. Соответственно, параметр шероховатости и сопротивление возрастают при приближен к вершине. При этом на вершине эоловой структуры отмечается устойчивость к воздействию ветра [9]. За вершиной при изменении наклона плоскости поверхности ближе к подветренному склону расположена область струйного усиления ветра. Неоднородности на поверхности являются теми областями, в которых наблюдаются более активные изменения структуры самой поверхности при ветровом выносе. При этом условия устойчивости и неустойчивости к ветровому воздействию требуют систематизации. Для проведения натурных или лабораторных экспериментов желательно наличие набора результатов предварительного моделирования.

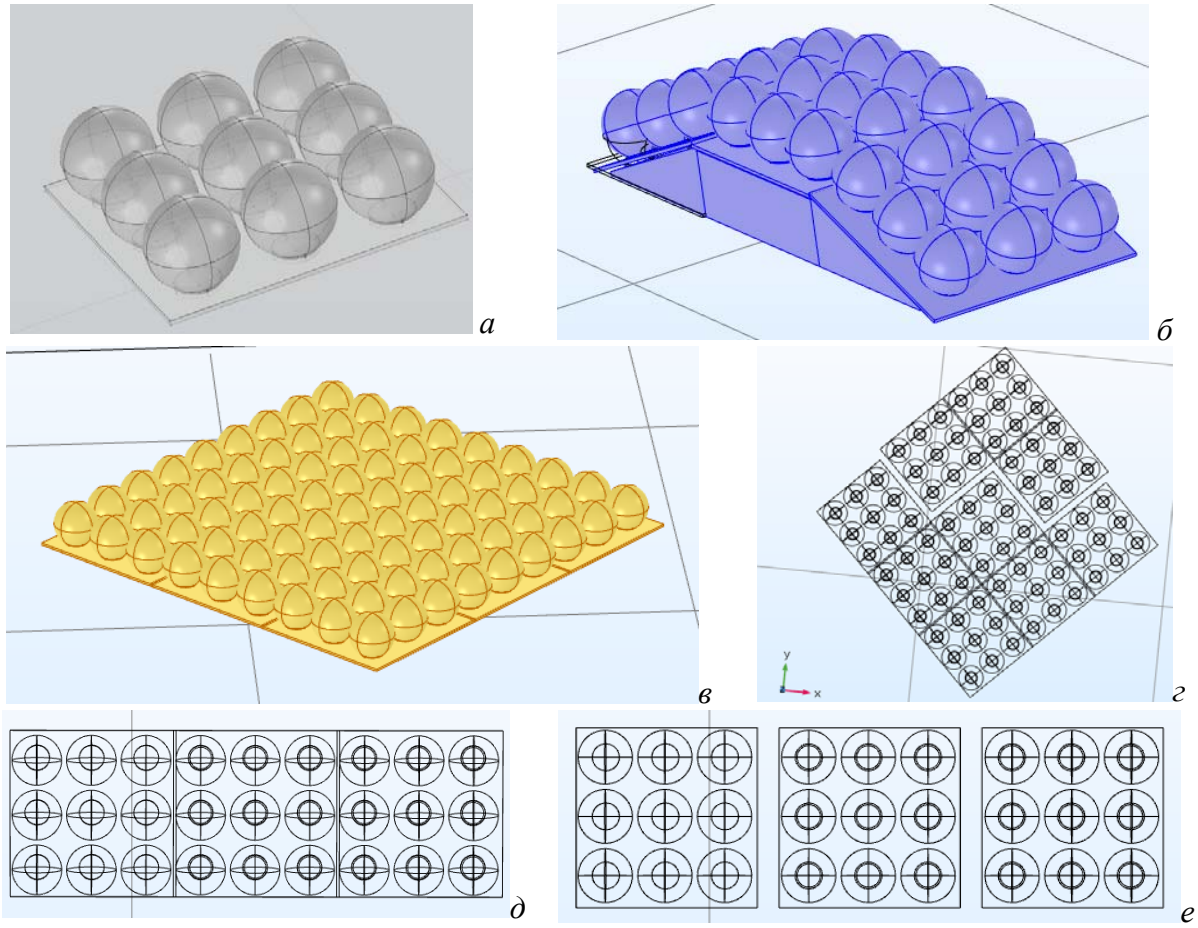


Рис. 1. 3D-моделирование геометрии обтекаемой поверхности (а – блок из 9 шарообразных частиц, б – три блока частиц, повернутых относительно друг друга, в – 9 блоков частиц, развернутых под углом 45 ° к направлению движения воздуха, г – 9 блоков частиц под углом в 45 ° с каналом внутри)

В настоящем исследовании для анализа влияния особенностей структуры поверхности на характеристики ветрового выноса используется турбулентная $k-\varepsilon$ модель обтекания частиц. Элементы, моделирующие частицы, представляют собой поверхности, состоящие из сфер, присоединенных к цилиндрам с целью минимизации проблем с расхождением ошибок в геометрии и расчетной сетки в областях контактов. Частицы объединены в блоки по 9 элементов (рис.1а), из которых строится поверхность с различной ориентацией в пространстве (рис. 1б, 1в). Проводится исследование влияния неоднородностей в структуре поверхности (наличие неодинаковых расстояний между частицами) при различном взаимном расположении и наличии изменений в расстояни-

ях между ними (рис.1 г, е) на характер обтекания и изменение подъемной силы. Расстояние между поверхностями взаимодействующих частиц в слое на одном уровне D: $D \approx (0.07 - 0.11)d$ (d – средний размер частиц песка) определено с использованием расчетного оценочного значения порозности, близкого к наблюдаемому в природе. Сложная поверхность, составленная из множества частиц, требует более детальной прорисовки вычислительной сетки вблизи. В связи с этим использовалась возможность построения много уровневой сетки средствами утилиты snappyHexMesh, доступной в открытом пакете OpenFoam (рис.2).

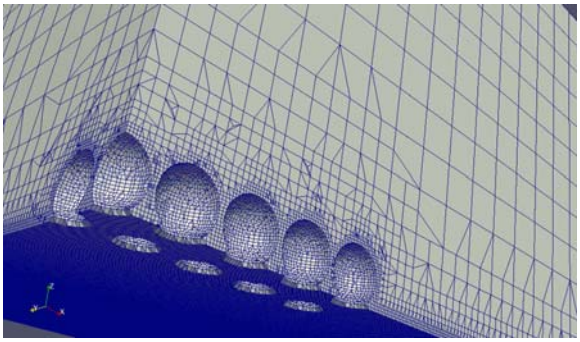


Рис. 2. Адаптивная разностная схема

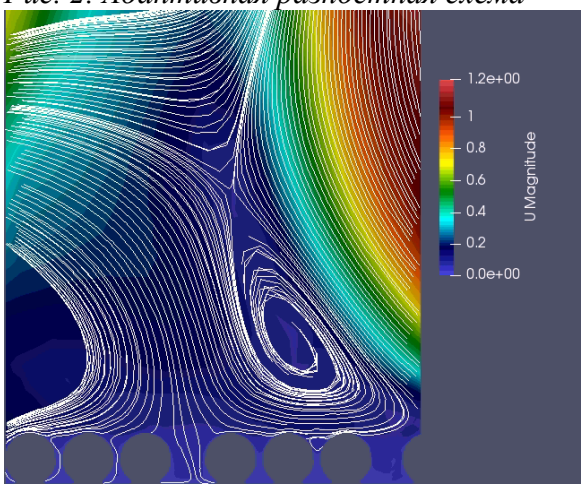


Рис.3.Скорости обтекаемого потока вблизи поверхности

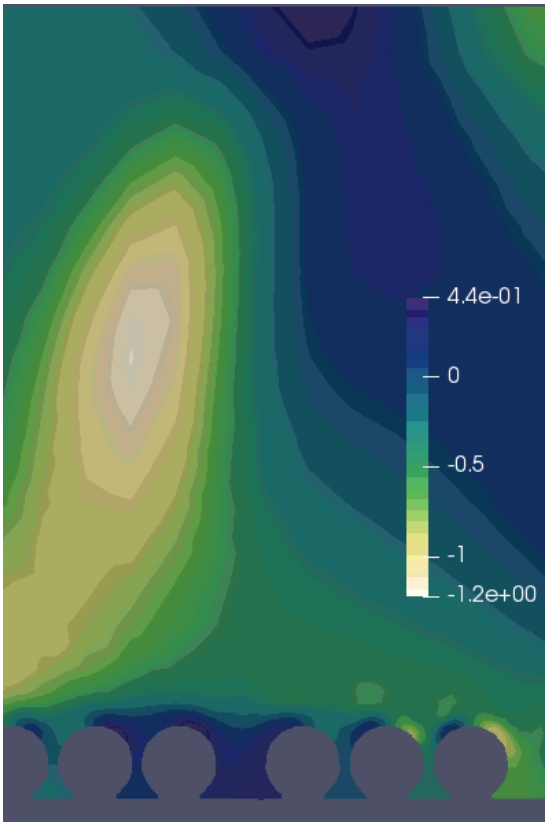


Рис.4. Увеличение разности давления при обтекании частиц с различными типами неоднородных элементов структуры

Изменение расстояния между блоками частиц на 50, 100 и 150 мкм при прямой ориентации частиц по направлению к потоку или изменение угла между плоскостями поверхностей блоков приводит к появлению неоднородностей в первоначальной структуре. В таких областях отмечается повышение скорости обтекающего потока от 0,05 м/с при отрыве от поверхности на стыке двух блоков и снижение давления. Увеличение при этом разностей давления дает рост начальной скорости выноса частицы из слоя. Разность значений давления для точек вокруг частицы, определяющая выталкивающую силу, увеличивается также и при движении по направлению потока над поверхностями частиц. Относительное увеличение составляет около 10% от величины разности. При наличии неоднородностей в виде увеличенного расстояния между поверхностями частиц или изменения угла наклона плоскости происходит скачок изменения разности давления на 10–30%. Все эти факторы указывают на то, что песчаная поверхность под постоянным воздействием ветра представляет собой чередование квазирегулярных областей, в которых профицит разности давления снизу и сверху частицы преобладает

над силой тяжести. Как следствие, появляются области с различной вероятностью ветрового выноса, за счет чего происходит возникновение ряби.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Автор выражает благодарность О.Г. Чхетиани за полезные консультации и обсуждения. Исследование выполнено при частичной поддержке программы Президиума РАН №12 (проект КП19-270).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Закарин Э.А.* и др. ГИС-технология мониторинга и моделирования пыльных бурь //Гидрометеорология и экология. 2010. №. 3. С. 8–20.
2. *Greeley R., Iversen D.J.* Wind as geological process of Earth, Mars and Titan. New York: Cambridge University press, 1985. 333 p.
3. *Ivanov V.K., Matveev A.Ya., Tsymbal V.N., Yatsevich S.Ye.* Radar investigations of the aeolian sand and dust transporting manifestations in desert areas // Telecommunications and Radio Engineering. 2015. V. 74. No. 14. P. 1269–1283.
4. Почвозащитное земледелие. Под общ. ред. А.И. Бараева. М., «Колос», 1975. 304 с.
5. *Chamberlain A.C.* Roughness length of sea, sand, and snow //Boundary-Layer Meteorology. 1983. V. 25. №. 4. P. 405–409.
6. *Горчаков Г.И., Карпов А.В., Копейкин В.М., Злобин И.А., Бунтов Д.В., Соколов А.В.* Экспериментальное и теоретическое исследование траекторий сальтирующих песчинок на опустыненных территориях // Оптика атм. и океана. 2012. Т. 25. № 6. С. 501–506.
7. *Гендугов В.М., Глазунов Г.П.* Ветровая эрозия почвы и запыление воздуха. М.: Физматлит. 2007 г. 238 с.
8. *Семенов О.Е.* Экспериментальные исследования кинематики и динамики пыльных бурь и поземков // Труды КазНИГМИ. 1972. Вып. 49. С. 2–31.
9. *Малиновская Е.А.* Трансформация эоловых форм рельефа при ветровом воздействии // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. №. 1. С. 54–64.
10. *Malinovskaya E., Gorchakov G., Chkhetiani O., Karpov A.* About the quasi-periodical variations of particles saltation // EGU2019-3693-1 https://meetingorganizer.copernicus.org/EGU2019/EGU2019-3693-1.pdf
11. *Chou Y. J., Fringer O. B.* A model for the simulation of coupled flow bed form evolution in turbulent flows // J. of geophysical research. 2010. V. 115. C10041.
12. *Малиновская Е. А.* Модель формирования ветрового эолового склона // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. №2. С. 218–228.

—— ♦♦♦ ——

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЕКТРОВИХРЕВОМ ТЕЧЕНИИ В ПОЛУСФЕРИЧЕСКОМ КОНТЕЙНЕРЕ В ВИДЕ БЫСТРОСХОДЯЩЕГОСЯ РЯДА

К.Ю. Малышев, Е.А. Михайлов
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
e-mail: kmalyshev08102@mail.ru
И.О. Тепляков
Объединенный институт высоких температур РАН, e-mail: igor.teplyakov@mail.ru

Электровихревые течения (ЭВТ) играют важную роль в различных электрометаллургических процессах, таких как электросварка, электрошлаковый или электродуго-

вой переплав металлов. ЭВТ возникают при прохождении неоднородного электрического тока через проводящую среду (такую, как жидкий металл) и его взаимодействии с собственным магнитным полем.

Одни из первых экспериментальных и теоретических работ, посвященных изучению электровихревых течений, проводились в Институте физики Латвийского университета в 1970–90х гг. [1]. Кроме того, важно отметить эксперименты, проводимые в Магнитогорском государственном техническом университете имени Г.И.Носова [2], пермском Институте механики сплошных сред [3], а также Объединенном институте высоких температур в Москве [4]. В изучение ЭВТ в теоретическом аспекте значительный вклад был внесен Созоу и Пикерингом [5], построившими аналитические решения для ряда модельных задач. В последнее время изучение ЭВТ происходит преимущественно с использованием численных методов, что не всегда способствует пониманию характера процессов, происходящих в проводящей жидкости.

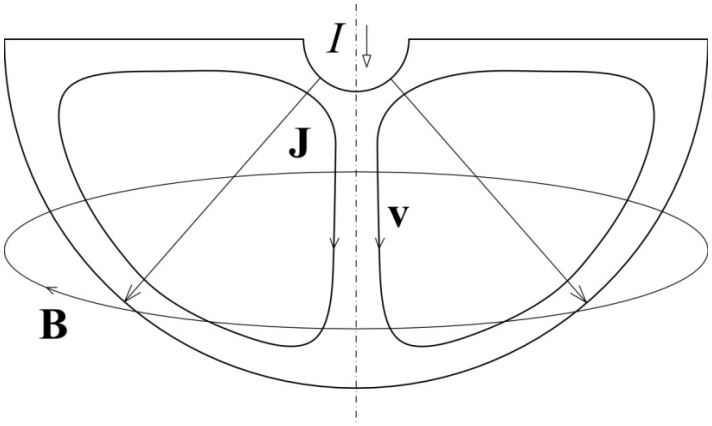


Рис. 1. Схема электровихревого течения в полусфере.

Особый интерес представляет задача о возникновении электровихревого течения в полусферическом контейнере (рис. 1), при распространении электрического тока от центрального электрода (также полусферической формы) к внешней поверхности сосуда.

Попытка построения аналитического решения задачи об электровихревом течении при учёте конечного размера внутреннего электрода была предпринята ранее Михайловым и Тепляковым [6]. Тем не менее, стоит отметить, что решение в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа в полушаровом слое выглядит достаточно громоздко, а старшая гармоника хорошо описывает поведение кинематических параметров лишь на достаточно большом расстоянии от центра сосуда. В случае внутренних областей необходимо брать достаточно много слагаемых, что заметно усложняет процесс решения. В настоящей работе решение задачи из [6] представлено в виде быстросходящихся рядов по собственным функциям специального дифференциального оператора, характеризующего нашу задачу и полученное представление решения выражается достаточно простыми формулами. Также применённый подход позволяет решить краевую задачу, содержащую нелокальные условия на границе.

Задача решается с использованием т.н. стоксова приближения. Оно характеризуется тем, что течение считается достаточно медленным и установившимся, поэтому можно пренебречь инерционной частью уравнения Навье – Стокса. Кроме того, удобно представить решение с помощью векторного потенциала скорости $\boldsymbol{\psi}$ ($\mathbf{v} = \mathrm{rot}\boldsymbol{\psi}$) и завихренности $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\mathbf{v}$. Ввиду осевой симметрии задачи нетрудно показать, что основную роль в решении играют тороидальные компоненты данных векторов, поэтому

можно с большой точностью считать, что $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_\phi$, $\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e}_\phi$. Тогда, измеряя все величины в безразмерных единицах (так, расстояния измеряются в радиусах внешней полусферы R, т.е. $r < 1$; скорости – в единицах $IR^{-2}\mu_0^{1/2}\rho^{-1/2}$, где I – ток, распространяющийся от центрального электрода), уравнения можно представить в форме [6]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)-\frac{\omega}{r^2\sin\theta}=\frac{A(\cos\theta-1)}{r^4\sin\theta};$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)-\frac{\psi}{r^2\sin\theta}=-\omega;$$

где $A=\frac{1}{2}I\pi^{-2}\eta^{-1}\mu_0^{1/2}\rho^{-1/2}$ характеризует электровихревое течение. В качестве граничных условий можно выбрать следующие [6]:

$$\psi\big|_{r=1}=\psi\big|_{r=a}=\psi\big|_{\theta=\pi/2}=\omega\big|_{r=1}=\omega\big|_{r=a}=\omega\big|_{\theta=\pi/2}=0.$$

Нетрудно получить решение этой задачи в виде рядов Фурье по функциям $P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)$ [7], с коэффициентами, зависящими от r. Тогда, выражение для завихренности имеет вид:

$$\omega(r,\theta)=A\sum_{l=1}^{\infty}R_l(r)P_{2l}^{(1)}(\cos\theta),$$

где

$$R_l(r)=\frac{(-1)^l(4l+1)(r^{2l}(a^{2l-1}-1)+r^{-2}(1-a^{4l+1})+r^{-2l+1}(a^{4l+1}-a^{2l-1}))}{2^{2l}(l!)^2(a^{4l+1}-1)(16l^4+16l^3-4l^2-4l)}.$$

Полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно [7], причём весьма быстро. Далее нетрудно найти аналитическое решение задачи при нелокальных граничных условиях для завихренности (рассмотрены разностные условия Тома [8] соответствующие условиям прилипания на границе) на поверхностях внутреннего и внешнего электродов:

$$\omega\,|_{r=1}=-\frac{2}{h^2}\psi\,|_{r=1-h},\omega\,|_{r=a}=-\frac{2}{h^2}\psi\,|_{r=a+h}$$

для произвольного значения параметра h, что может представлять самостоятельный интерес. Возможно построение решения и при некоторых других вариантах постановки граничных условий. Полученные результаты согласуются с результатами численного моделирования [9]: для получения приемлемого результата достаточно первых нескольких слагаемых ряда Фурье, причём для векторного потенциала достаточно удержать только два первых слагаемых.

На рис. 2 представлена зависимость радиальной скорости на оси от радиуса для различных видов граничных условий. Видно, что граничное условие твердой стенки реализуемое условиями Тома логичным образом приводит к снижению интенсивности течения по сравнению с условиями Дирихле.

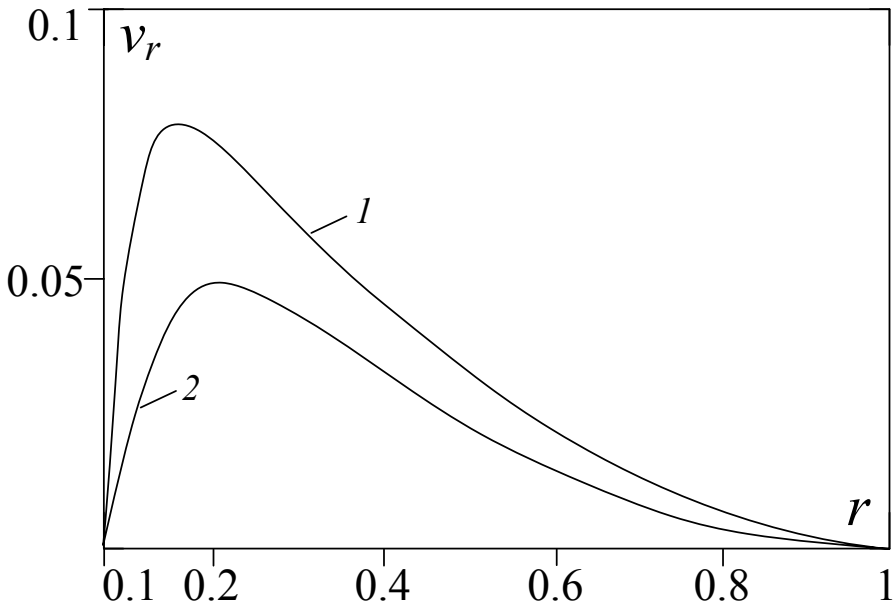


Рис. 2. Зависимость радиальной скорости на оси от радиуса.1 – граничные условия Дирихле, 2 – граничные условия Тома со значением параметра $h = 1/100$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В.* Электровихревые течения. Рига: Зинатне. 1985.
2. *Ячиков И.М., Портнова И.В., Ларина Т.П.* Исследование на физической модели поведения токонесущей жидкости в ванне ДППТ под действием внешнего вертикального магнитного поля // Известия ВУЗов. Черная металлургия, Т. 61. № 1. С. 28–34.
3. *Хрипченко С.Ю.* Электровихревые течения в каналах МГД-устройств. Екатеринбург: УрО РАН. 2009.
4. *Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О.* К вопросу о закрутке осесимметричных электровихревых течений // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 47. № 6. С.927 – 929.
5. *Sozou C., Pickering W.M.* Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in a hemispherical container // J. Fluid. Mech. 1976. V. 73. P. 641–650.
6. *Михайлов Е.А, Тепляков И.О*. Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоксовом приближении // Вестник Моск. ун – та. Физ.Астрон. 2018. № 3. С. 39 – 44.
7. *Тихонов А.Н.*, *Самарский А.А*. Уравнения математической физики. М.: Издательство МГУ. 1999.
8. *Weinan E., Liu J. G.* (1996) Vorticity Boundary Condition and Related Issues for Finite Difference Schemes, J. of Computational Physics,124, 368–382.
9. *Михайлов Е.А, Тепляков И.О. Федотов И.А.* Определение критического тока, необходимого для возникновения разряда при электровихревом течении в жидком металле // УЗФФ. 2019. № 3. С. 193601-1 – 193601-5.

—— ♦♦♦ ——

ПОПРАВКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ВИХРЕВОГО СЛОЯ, ПОЗВОЛЯЮЩАЯ КОРРЕКТНО УЧИТЫВАТЬ ВЛИЯНИЕ ВИХРЕЙ ВБЛИЗИ ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И.К. Марчевский[1,2], В.С. Морева[2], К.С. Кузьмина[1,2], И.А. Солдатова[1]
[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
[2] Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН
e-mail: kuz-ksen-serg@yandex.ru

При моделировании течений вихревыми методами ключевую роль играет точность удовлетворения граничного условия на обтекаемой поверхности. Граничное условие прилипания может быть записано в виде граничного интегрального уравнения относительно неизвестной интенсивности вихревого слоя, который моделирует генерируемую на поверхности завихренность [1]. В данной работе рассматривается вопрос численного решения граничного интегрального уравнения при моделировании двумерных течений вязкой несжимаемой среды вокруг профилей.

Для решения граничного интегрального уравнения с помощью подхода Галеркина разработаны расчетные схемы различной точности и вычислительной сложности [2]. Решение в этих схемах представляется в виде кусочно-постоянного, кусочно-линейного либо кусочно-квадратичного распределения по панелям, аппроксимирующим границу профиля, которые могут быть как прямолинейными, так и криволинейными. Однако тот факт, что вихревой элемент в области течения оказывает существенное влияние на точное решение на участке профиля, который находится вблизи них, приводит к тому, что использование упомянутых схем приводит к большой погрешности, поскольку они не учитывают эту специфику поведения решения. Для решения данной проблемы предлагается использовать подход, аналогичный процедуре аддитивного аналитического выделения особенности решения с помощью известного частного решения для кругового профиля.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И ПОДХОД ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим следующее интегральное уравнение, выражающее граничное условие прилипания на профиле [1]:

$$\int_0^L \frac{(\vec{r}(s)-\vec{r}(\sigma))\cdot\vec{n}(s)}{2\pi\left|\vec{r}(s)-\vec{r}(\sigma)\right|^2}\gamma(\sigma)d\sigma-\frac{\gamma(s)}{2}=\underbrace{-\int_S \frac{(\vec{r}(s)-\vec{\xi})\cdot\vec{n}(s)}{2\pi\left|\vec{r}(s)-\vec{\xi}\right|^2}\Omega(\vec{\xi})dS_\xi-\vec{V}_\infty\cdot\vec{\tau}(s)}_{f(s)},\ s\in[0,L] \quad (1)$$

где s – натуральный параметр вдоль границы профиля, L – длина границы профиля, S – область течения, $\gamma(s)$ – искомая интенсивность вихревого слоя, $\vec{n}(s)$ и $\vec{\tau}(s)$ – векторы внешней нормали и касательной к границе профиля соответственно, $\Omega(\vec{\xi})$ – завихренность в области течения, $\vec{V}_\infty$ – скорость набегающего потока. Данное уравнение имеет бесконечно много решений, поэтому обычно вводится дополнительное условие для выделения единственного решения:

$$\int_0^L \gamma(s)ds=\Gamma, \quad (2)$$

где Γ – циркуляция поля скоростей вдоль контура, задающего границу профиля.

Ограниченность ядра уравнения (1) позволяет применить процедуру Галеркина к его решению. Поделим границу профиля на N частей, называемых обычно панелями,

концы которых соответствуют значениям натурального параметра s_i, $i = 0,\ldots,N$, где $s_0 = 0$, $s_N = L$; i-я панель соответствует интервалу $[s_{i-1}, s_i]$. Вводим семейства базисных функций:

$$\phi_i^0(s) = \begin{cases} 1, & s \in [s_{i-1}, s_i], \\ 0, & s \notin [s_{i-1}, s_i]; \end{cases}$$

$$\phi_i^1(s) = \begin{cases} \dfrac{s(\vec{r}) - s(\vec{c}_i)}{L_i}, & s \in [s_{i-1}, s_i], \\ 0, & s \notin [s_{i-1}, s_i]; \end{cases}$$

$$\phi_i^2(s) = \begin{cases} 4\left(\dfrac{s(\vec{r}) - s(\vec{c}_i)}{L_i}\right)^2 - \dfrac{1}{3}, & s \in [s_{i-1}, s_i], \\ 0, & s \notin [s_{i-1}, s_i]. \end{cases}$$

Приближенное решение будем искать в виде

$$\gamma(s) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{q=0}^{2} \gamma_i^q \phi_i^q(s),$$

где неизвестные коэффициенты γ_i^q могут быть найдены из условия ортогональности невязки уравнения (1) проекционным функциям:

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{q=0}^{2} \gamma_j^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \psi_i^p(s) ds \int_{s_{j-1}}^{s_j} Q(s,\sigma) \phi_j^q(\sigma) d\sigma - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{2} \gamma_i^q \int_{s_{i-1}}^{s_i} \psi_i^p(s) \phi_i^q(s) ds =$$

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \psi_i^p(s) f(s) ds, \quad i = 1,\ldots,N, \quad p = 0,\ldots,m. \tag{3}$$

Дополнительное условие (2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{p=0}^{2} \gamma_i^p \int_{s_{i-1}}^{s_i} \phi_i^p(s) ds = \Gamma. \tag{4}$$

Вычисление интегралов, входящих в уравнения (3)–(4), будем осуществлять по методике, описанной в работе [3] и позволяющей учитывать криволинейность профиля.

КОРРЕКЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

В случае моделирования потенциального течения такие схемы обеспечивают первый, второй и третий порядок точности определения интенсивности вихревого слоя соответственно. Однако на практике в области течения присутствует множество вихревых элементов, которые моделируют распределение завихренности. Тестовые расчеты показывают, что получить численное решение, достаточно близкое к точному, невозможно в случае присутствия вихревых элементов, расположенных на расстоянии меньше 50% размера панели от профиля. Такая проблема может быть решена путем коррекции численного решения с помощью известного частного. Точное решение для интенсивности вихревого слоя для случая кругового профиля радиуса R в присутствии вихря интенсивности Γ_g, расположенного в точке $\vec{r}_g$, имеет следующую форму [3]:

$$\tilde{\gamma}(s) = \Gamma_g \left(\frac{\vec{r}(s) - \vec{r}_g}{2\pi |\vec{r}(s) - \vec{r}_g|^2} - \frac{\vec{r}(s) - \vec{r}^m}{2\pi |\vec{r}(s) - \vec{r}^m|^2} + \frac{\vec{r}(s) - \vec{r}^c}{2\pi |\vec{r}(s) - \vec{r}^c|^2} \right) \cdot \vec{n}(s),$$

где $\vec{r}_c$ – центр окружности, $\vec{r}_m = \vec{r}_c + \dfrac{R^2}{|\vec{r}_g - \vec{r}^c|^2}$ – координаты вихревого элемента, симметрично отраженного относительно соприкасающейся окружности. Теперь для вихря, расположенного в окрестности k-й панели, мы предполагаем, что эта панель может быть представлена в виде дуги соприкасающейся окружности радиуса $R_k = \kappa_k^{-1}$. Тогда можно учесть влияние этого вихря, явно введя в численное решение дополнительное слагаемое:

$$\gamma(s) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{q=0}^{m}\gamma_i^q\varphi_i^q(s) + \sum_{k=k_b}^{k_f}\tilde{\gamma}_k(s)\varphi_k^0(s).$$

Здесь

$$\tilde{\gamma}_k(s) = \Gamma_g\left(\frac{\vec{r}(s)-\vec{r}_g}{2\pi|\vec{r}(s)-\vec{r}_g|^2} - \frac{\vec{r}(s)-\vec{r}_k^m}{2\pi|\vec{r}(s)-\vec{r}_k^m|^2} + \frac{\vec{r}(s)-\vec{r}_k^c}{2\pi|\vec{r}(s)-\vec{r}_k^c|^2}\right)\cdot\vec{n}_k(s)$$

является добавочным слагаемым, которое определяет влияние системы отраженных вихрей на k-й панели, $\vec{r}_k$ – центр соприкасающейся окружности, $\vec{n}_k(s)$ – единичный вектор нормали для соприкасающейся окружности; $k_b \ldots k_f$ – диапазон номеров панелей, для которых реализована процедура коррекции.

Для такого представления решения описанный выше подход Галеркина остается применимым, но вместо уравнений (3) теперь получаем следующую систему:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{q=0}^{m}\gamma_j^q\int_{s_{i-1}}^{s_i}\psi_i^p(s)ds\int_{s_{j-1}}^{s_j}Q(s,\sigma)\phi_j^q(\sigma)d\sigma - \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{m}\gamma_i^q\int_{s_{i-1}}^{s_i}\psi_i^p(s)\phi_i^q(s)ds =$$

$$= -\sum_{\substack{k=k_b,\\ k\neq i}}^{k_f}\int_{s_{i-1}}^{s_i}\psi_i^p(s)ds\int_{s_{k-1}}^{s_k}Q(s,\sigma)\tilde{\gamma}_k(\sigma)d\sigma + \sum_{\substack{k=k_b,\\ k\neq i}}^{k_f}\int_{s_{i-1}}^{s_i}\psi_i^p(s)f_g(s)ds +$$

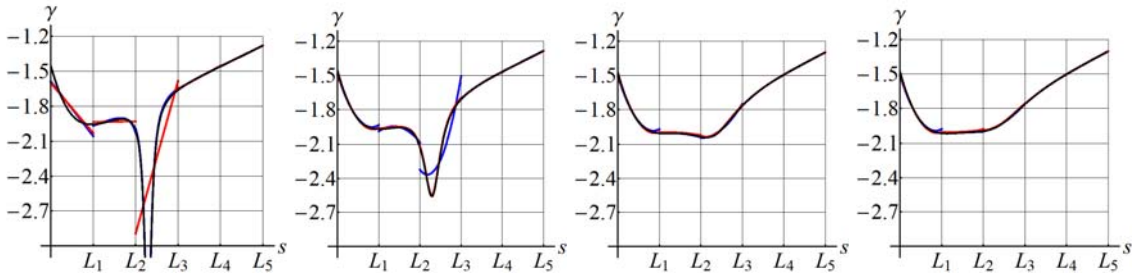
$$+\int_{s_{i-1}}^{s_i}\psi_i^p(s)f_v(s)ds, \quad i=1,\ldots,N, \quad p=0,\ldots,m.$$

Дополнительное условие (2) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{p=0}^{2}\gamma_i^p\int_{s_{i-1}}^{s_i}\phi_i^p(s)ds = \Gamma - \sum_{k=k_b}^{k_f}\int_{s_{k-1}}^{s_k}\tilde{\gamma}_k ds.$$

Для вычисления всех интегралов, возникающих в правой части, можно использовать квадратурные формулы Гаусса, а также приближенные аналитические выражения.

На рис. 2 показаны результаты расчетов для модельной задачи об обтекании эллиптического профиля с соотношением полуосей 2:1 в присутствии вихря вблизи границы, полученные с помощью схем без коррекции и с коррекцией. Видно, что решение, полученное по схеме с коррекцией, обеспечивает более высокую точность решения.



а *б* *в* *г*

Рис. 3: Точное решение (черная сплошная линия), численное решение без коррекции (синяя пунктирная) и численное решение с коррекцией (красная сплошная). Вихревой элемент удален от границы профиля на 10%, 25%, 50% и 100% размера панели (а, б, в, г соответственно)

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-31-20045.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H., Ingber M.S.* Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations. SANDIA report. SAND96-0583, UC-700, 1996. 52 p.
2. *Soldatova I.A., Marchevsky I.K., Kuzmina K.S.* Accurate solution of the boundary integral equation in 2D Lagrangian vortex method at flow simulation around curvilinear airfoils // Proceedings of VI International Conference on Particle-Based Methods (Particles 2019), Spain, Barcelona, 27–30 October, 2019.
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. 688 с.

—— ♦ ♦ ♦ ——

LI-ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ LIUTEX (RORTEX)

П.В. Матюшин
Институт автоматизации проектирования РАН, Москва
e-mail: pmatyushin@mail.ru

За последние годы китайские ученые сделали большой шаг в визуализации актуальной пространственной вихревой структуры течений жидкости и газа, введя векторную функцию **Li** (Liutex или Rortex) [1–3], показывающую ось и величину минимальной угловой скорости актуального вращения жидкости в данной точке течения. Так **Li**-визуализация выбрасывает сдвиговую компоненту из популярных *Q*- и β-визуализаций вихрей, оставляя только чисто вращательную компоненту, где *Q – второй инвариант* характеристического уравнения для тензора градиента скорости $\mathbf{v}_{i,j}$, β – *мнимая часть комплексно-сопряженных* собственных значений $\mathbf{v}_{i,j}$ [4]. С другой стороны, **Li**-визуализация требует дальнейшего осмысления и сравнения с экспериментами. В настоящей статье приводятся алгоритм нахождения функции **Li** и сравнение **Li**-, β- и **ω**-визуализаций для 2D и 3D течений стратифицированной вязкой жидкости около тел конечных размеров, где **ω** = rot **v** – *завихренность*.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИИ Li (LiuTEX или RORTEX)

1. Зафиксируем некоторую точку M в поле течения и исследуем, как ведут себя линии тока в декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ с началом в этой точке. В окрестности этой точки (0, 0, 0) в линейном приближении можно записать систему *обыкновенных дифференциальных уравнений* $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \vec{\mathbf{v}} \approx \mathbf{v}_{i,j}\vec{\mathbf{x}}$. **Если** два собственных значения тензора $\mathbf{v}_{i,j}$ *комплексно-сопряженные* ($\sigma = \alpha + i\beta$, $\bar{\sigma} = \alpha - i\beta$, $\beta > 0$), то вещественный собственный вектор **r**, соответствующий третьему (вещественному) собственному числу σ_3, предположительно, должен быть осью вращения жидкости в точке M и **тогда Li** = $Li\cdot\mathbf{r}$, **иначе Li = 0**. Осталось определить скалярную функцию *Li*.

2. Пусть $\mathbf{v}_{i,j} = \begin{bmatrix} \upsilon_1 & \upsilon_7 & \upsilon_8 \\ \upsilon_4 & \upsilon_2 & \upsilon_9 \\ \upsilon_5 & \upsilon_6 & \upsilon_3 \end{bmatrix}$, тогда рассчитаем следующие определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \upsilon_2 - \sigma_3 & \upsilon_9 \\ \upsilon_6 & \upsilon_3 - \sigma_3 \end{vmatrix};\ \Delta_y = \begin{vmatrix} \upsilon_1 - \sigma_3 & \upsilon_8 \\ \upsilon_5 & \upsilon_3 - \sigma_3 \end{vmatrix};\ \Delta_z = \begin{vmatrix} \upsilon_1 - \sigma_3 & \upsilon_7 \\ \upsilon_4 & \upsilon_2 - \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

Пусть $\Delta_{\max} = \max\left(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\right)$. Тогда

если $\Delta_{\max} = \Delta_x$, то

$$r_{1x} = 1,\ r_{1y} = \left(\upsilon_5\cdot\upsilon_9 - \upsilon_4\left(\upsilon_3 - \sigma_3\right)\right)\Big/\Delta_x,\ r_{1z} = \left(\upsilon_4\cdot\upsilon_6 - \upsilon_5\left(\upsilon_2 - \sigma_3\right)\right)\Big/\Delta_x;$$

если $\Delta_{\max} = \Delta_y$, то

$$r_{1y} = 1,\ r_{1x} = \left(\upsilon_6\cdot\upsilon_8 - \upsilon_7\left(\upsilon_3 - \sigma_3\right)\right)\Big/\Delta_y,\ r_{1z} = \left(\upsilon_5\cdot\upsilon_7 - \upsilon_6\left(\upsilon_1 - \sigma_3\right)\right)\Big/\Delta_y;$$

если $\Delta_{\max} = \Delta_z$, то

$$r_{1z} = 1,\ r_{1x} = \left(\upsilon_7\cdot\upsilon_9 - \upsilon_8\left(\upsilon_2 - \sigma_3\right)\right)\Big/\Delta_z,\ r_{1y} = \left(\upsilon_4\cdot\upsilon_8 - \upsilon_9\left(\upsilon_1 - \sigma_3\right)\right)\Big/\Delta_z.$$

Отнормировав вектор $\mathbf{r}_1$, *мы получим вектор* **r**. Если $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r} < 0$ (где $\boldsymbol{\omega} = (\upsilon_6 - \upsilon_9,\ \upsilon_8 - \upsilon_5,\ \upsilon_4 - \upsilon_7)$), то мы поменяем направление **r** на противоположное, чтобы сделать $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r} > 0$.

3. Повернем систему координат (x, y, z) в (x_n, y_n, z_n) так, чтобы ось z_n была сонаправлена с **r**, тогда

$$\mathbf{v}_{n,i,j} = \begin{bmatrix} \upsilon_{n1} & \upsilon_{n7} & 0 \\ \upsilon_{n4} & \upsilon_{n2} & 0 \\ \upsilon_{n5} & \upsilon_{n6} & \upsilon_{n3} \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{v}_{i,j}\mathbf{N}^T.$$

4. В [1] найден критерий локального вращения жидкости вокруг оси z_n: $\dfrac{\partial U_n}{\partial y_n}\cdot\dfrac{\partial V_n}{\partial x_n} < 0$, который, к сожалению, зависит от поворота системы координат (x_n, y_n, z_n) вокруг оси z_n. (Ибо условия $\beta > 0$ еще не достаточно для того, чтобы было вращение жидкости.) Повернем систему координат (x_n, y_n, z_n) на угол θ, получив систему координат (x_m, y_m, z_m), тогда

$$\mathbf{v}_{m,i,j} = \mathbf{M}\mathbf{v}_{n,i,j}\mathbf{M}^T,\ \text{где}\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{\partial V_m}{\partial x_m} = \mathbf{v}_{m,2,1} = \frac{\partial y_m}{\partial x_m \partial t} = \dot{\theta} = \Omega = \frac{\gamma}{2}\cdot\sin\left(2\theta + \phi\right) + \frac{\omega_{zn}}{2}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial U_m}{\partial y_m} = \mathbf{v}_{m,1,2} = \frac{\partial x_m}{\partial y_m \partial t} = \dot{\theta} = \Omega_- = \frac{\gamma}{2}\cdot\sin\left(2\theta+\phi\right) - \frac{\omega_{zn}}{2},$$

где $\omega_{zn} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r} > 0$ (см. шаг 2),

$$\omega_+ = \frac{\partial V_n}{\partial x_n} + \frac{\partial U_n}{\partial y_n},\ \gamma = \sqrt{\omega_+^2 + \delta^2},\ \delta = \frac{\partial V_n}{\partial y_n} - \frac{\partial U_n}{\partial x_n},\quad \operatorname{tg}\phi = \frac{\omega_+}{\delta}.$$

Следовательно, критерий вращения: $4\dfrac{\partial U_m}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial V_m}{\partial x_m} = \left(\gamma\cdot\sin\psi\right)^2 - \omega_{zn}^2 < 0 \Rightarrow$ **Если** $\omega_{zn}{}^2 > \gamma^2$, то $Li \equiv 2\cdot\Omega_{\min} = \omega_{zn} - \gamma$, иначе $Li = 0$. Таким образом, *Li* определяется как *минимальная угловая скорость* вращения жидкости в окрестности точки *M*.

5. Чтобы не тратить время на расчет элементов тензора $\mathbf{v}_{n,i,j}$, в [3] была введена явная формула

$$Li = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r} - \sqrt{(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})^2 - 4\beta^2} \tag{2}$$

из которой следует, что изоповерхности $\beta = 0$ и $Li = 0$ совпадают (см. рис. 1*б–в*).

6. **Вывод формулы (2).** Т.к. жидкость вращается по квазиэллиптической траектории (см. (1)), то существуют $\Omega_{\min} = (\omega_{zn} - \gamma)/2$ и $\Omega_{\max} = (\omega_{zn} + \gamma)/2$. Тогда

$\omega_{zn} = \Omega_{\max} + \Omega_{\min}$, $\gamma = \Omega_{\max} - \Omega_{\min}$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \Omega = \frac{\Omega_{\max} - \Omega_{\min}}{2}\cdot\sin\left(2\theta+\phi\right) + \frac{\Omega_{\max} + \Omega_{\min}}{2}.$$

Найдем среднюю угловую скорость вдоль квазиэллиптической траектории

$$\left\langle\Omega\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{\theta}\,d\theta = \frac{\Omega_{\max} - \Omega_{\min}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin\left(2\theta+\phi\right)d\theta + \frac{\Omega_{\max} + \Omega_{\min}}{2} = \tag{3}$$

$$= \frac{\Omega_{\max} + \Omega_{\min}}{2} = \frac{\omega_{zn}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}}{2}$$

Таким образом, ω_{zn} (*проекция завихренности* на $\mathbf{r}$) – *это усредненная по пространству угловая скорость вращения жидкости* около точки M.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что β – *это усредненная по времени угловая скорость вращения жидкости* около точки M*, т.е.*

$$\beta \approx \frac{2\pi}{T_n},\quad T_n = \int_0^{T_n} dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\dot{\theta}}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{B\sin\left(2\theta+\phi\right)+C} = \int_{0.5\phi}^{2\pi+0.5\phi}\frac{d\psi}{B\sin\left(2\psi\right)+C},$$

где $B = \dfrac{\gamma}{2}, C = \dfrac{\omega_{zn}}{2}$.

Если выразить $\sin(2\psi)$ через $\operatorname{tg}(\psi)$ и сделать две последовательные замены переменных ($k = \operatorname{tg}(\psi)$, $dk = d\psi/(\cos\psi)^2$ и $q = k + B/C$), тогда (если $E = \Omega_{\max}$, $F = \Omega_{\min}$)

$$T_n = \frac{1}{C}\int\frac{dk}{k^2 + 2kB/C + 1} = \frac{1}{C}\int\frac{dq}{q^2 - (B/C)^2 + 1} = \frac{1}{C}\int\frac{dq}{q^2 + G^2} = \frac{1}{CG}\operatorname{arctg}\left(\frac{q}{G}\right)$$

где $G = \dfrac{2\sqrt{EF}}{E+F}$.

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{EF}}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\psi + \frac{E-F}{E+F}\right)\right)\Bigg|_{0.5\phi}^{2\pi+0.5\phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{EF}} = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \beta = \sqrt{EF} = \sqrt{\Omega_{\max}\cdot\Omega_{\min}} \tag{4}$$

Решение системы уравнений (3–4) приводит к квадратному уравнению относительно $\Omega_{\min}$. Далее, вспоминая, что $Li = 2\cdot\Omega_{\min}$, приходим к формуле (2).

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

Для математического моделирования пространственных (3D) течений линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости около тел конечных размеров на суперкомпьютерах МСЦ РАН решается обезразмеренная система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска (5) при помощи метода МЕРАНЖ [5].

$$\frac{\partial S}{\partial t}+(\vec{\mathbf{v}}\cdot\nabla)S=\frac{2}{\mathrm{Sc\,Re}}\Delta S+\frac{\mathrm{v}_x}{2A};\ \frac{\partial\vec{\mathbf{v}}}{\partial t}+(\vec{\mathbf{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{v}}=-\nabla p+\frac{2}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{\mathbf{v}}+\frac{A}{2\,\mathrm{Fr}^2}S\frac{\vec{g}}{g};\ \nabla\cdot\vec{\mathbf{v}}=0 \qquad (5)$$

где $\mathbf{v}=(v_x,\ v_y,\ v_z)$ – скорость, p – давление за вычетом гидростатического, S – возмущение солености, $\mathrm{Fr}=U/(N\cdot d)$ – внутреннее число Фруда, $\mathrm{Re}=U\cdot d/\nu$ – число Рейнольдса, $A=\Lambda/d$ – отношение масштабов, где U, d – характерные скорость и вертикальный размер тела, ν – коэффициент кинематической вязкости, N, $T_b=2\cdot\pi/N$, $\Lambda=g/N^2$ – частота, период и масштаб плавучести жидкости, g – ускорение свободного падения, $\mathrm{Sc}=\nu/k_s$ – число Шмидта ($\mathrm{Sc}=709.22$), k_s – коэффициент диффузии соли.

СРАВНЕНИЕ *Li*-, β- и ω-ВИЗУАЛИЗАЦИЙ ДЛЯ 2D И 3D ТЕЧЕНИЙ (рис. 1)

При умеренных числах Re *Li*- и β-визуализации очень мало отличаются друг от друга (рис. 1). При этом, завихренность не способна выделить рециркуляционную зону за телом (рис. 1*а*). На рис. 1*а–в* лок. максимумы функций ω и β, β и *Li* в первой полуволне впадин [4] отстоят друг от друга на $0.24\cdot d$ и $0.09\cdot d$, соответственно ($\omega_{max}=2.15$; $\beta_{max}=0.84$; $Li_{max}=0.83$). На рис. 1*в,е* при $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}<0$ $Li\equiv\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}+\sqrt{(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})^2-4\beta^2}$.

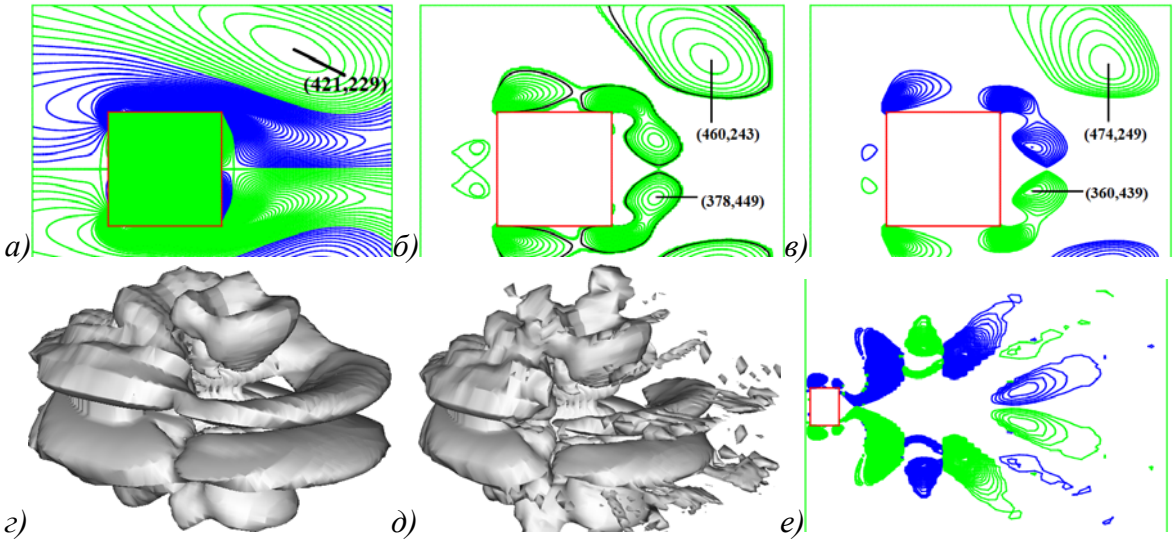


Рис. 1. Течения около квадратного цилиндра (d = 170 пикс.) (установившееся) (а–в) и диска (при $1.5\cdot T_b$) (г–е) при Re = 50, Fr = 0.3 [4]: а–в, е) изолинии ω с δω = 0.2 (а), β с δβ = 0.1 (б), Li с δLi = 0.1, 0.001 (в, е) (более светлые (зеленые) линии соответствуют ω ≥ 0, β ≥ 0, Li > 0); г–д) изоповерхности β = 0.005 (г) и Li = 0.003 (д).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tian S., Gao Y., Dong X., Liu C.* Definition of vortex vector and vortex // J. Fluid Mech. 2018. 849. P. 312 – 339.
2. *Liu C., Gao Y., Tian S., Dong X.* Rortex – a new vortex vector definition and vorticity tensor and vector decompositions // Phys. Fluids. 2018. 30. 035103.
3. *Wang Y., Gao Y., Liu J., Liu C.* Explicit formula for the Liutex vector and physical meaning of vorticity based on the Liutex-Shear decomposition // J. of Hydrodynamics. 2019. V. 31. No. 3. P. 464 – 474.
4. *Матюшин П.В.* Процесс формирования внутренних волн, инициированный началом движения тела в стратифицированной вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 83 – 97.
5. *Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Коньшин В.Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычислительной математики и математич. физики. 1987. Т. 27. № 4. С. 594 – 609.

—— ♦♦♦ ——

ФОРМИРОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЗА ДЛИННЫМ ЦИЛИНДРОМ ПРИ ЕГО ПРОДОЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ

П.В. Матюшин
Институт автоматизации проектирования РАН
e-mail: pmatyushin@mail.ru

Гравитационная и сдвиговая неустойчивости на нашей планете приводят к образованию сложных вихревых структур в океане и атмосфере. В настоящей работе при помощи математического моделирования пространственных отрывных течений линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости около цилиндра с диаметром d, равномерно двигающегося в горизонтальном направлении вдоль своей оси симметрии z справа налево со скоростью U, проводится сравнение этих структур для установившихся течений короткого ($l/d = 0.76$) и длинного цилиндров ($l/d = 5$) (рис. 1–3) и описывается процесс формирования этих вихревых структур.

Для реализации этого математического моделирования на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН) решалась система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска (1) при помощи метода МЕРАНЖ с явной гибридной конечно-разностной схемой для аппроксимации конвективных членов уравнений (второй порядок аппроксимации, монотонность) [1]. Пусть безразмерная плотность течения $\rho(x, y, z)$ равна $(1 - x/(2A) + S(x, y, z))$, где x – обезразмеренная на $d/2$ вертикальная координата равномерно движущейся декартовой системы координат (x, y, z), связанной с телом, S – обезразмеренное возмущение солености, $A = \Lambda/d$ – отношение масштабов, $\Lambda = g/N^2$, N, $T_b = 2\cdot\pi/N$ – масштаб, частота и период плавучести, g – ускорение свободного падения. Решается следующая система уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{\mathbf{v}}\cdot\nabla)S = \frac{2}{\mathrm{Sc\,Re}}\Delta S + \frac{\mathrm{v}_x}{2A};\ \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{v}} = -\nabla p + \frac{2}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{\mathbf{v}} + \frac{A}{2\,\mathrm{Fr}^2}S\frac{\vec{g}}{g};\ \nabla\cdot\vec{\mathbf{v}} = 0 \quad (1)$$

где $\mathbf{v} = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ – скорость, p – давление за вычетом гидростатического, $\mathrm{Fr} = U/(N\cdot d)$ – внутреннее число Фруда, $\mathrm{Re} = U\cdot d/\nu$ – число Рейнольдса, ν – коэффициент кинематической вязкости, $\mathrm{Sc} = \nu/k_s$ – число Шмидта ($Sc = 709.22$), k_s – коэфф. диффузии соли.

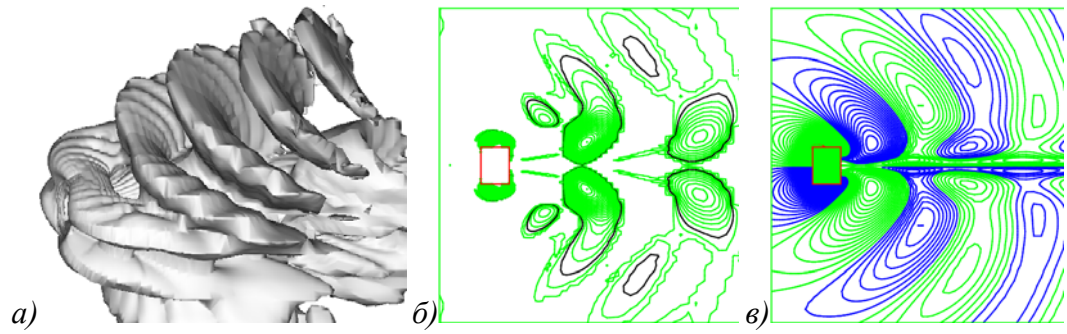


Рис. 1. Установившееся со временем течение около цилиндра длиной $l = 0.76 \cdot d$ при $Fr = 0.5$, $Re = 50$, $T = 11.46$: а) вихревая структура (изоповерхность $\beta = 0.01$); б–в) изолинии $\beta > 0$ с шагом 0.01 (б) и возмущения солености S с шагом 10^{-5} (в) в вертикальной плоскости x–z (изолинии $S < 0$ – синие (более темные)).

Для визуализации пространственных вихревых структур рассчитанного течения в центре каждой ячейки расчетной сетки определяется функция β следующим образом: если собственные значения тензора градиента скорости комплексно-сопряженные, то β присваивается их мнимая часть, иначе β = –1 [2]. (β > 0 – это усредненная по времени угловая скорость вращения жидкости в рассматриваемой ячейке сетки.) Далее строятся изоповерхности β > 0 (рис. 1*а*). На рис. 1*в* для Fr = 0.5, Re = 50, $T = 11.46$, $l/d = 0.76$ в вертикальной плоскости x–z при $x > 0$ мы видим 5 полос, цвет которых чередуется (где T – время, обезразмеренное на T_b). Зеленая полоса у цилиндра соответствует вихревому течению около цилиндра. Другие две зеленые полосы соответствуют полуволнам гребней. Оставшиеся две синие полосы – полуволнам впадин [3–5]. На рис. 1*а* при $l/d = 0.76$ мы видим одну боковую внутреннюю волну и две верхние внутренние волны над ней. Черные изолинии на рис. 1*б* соответствуют β = 0.02.

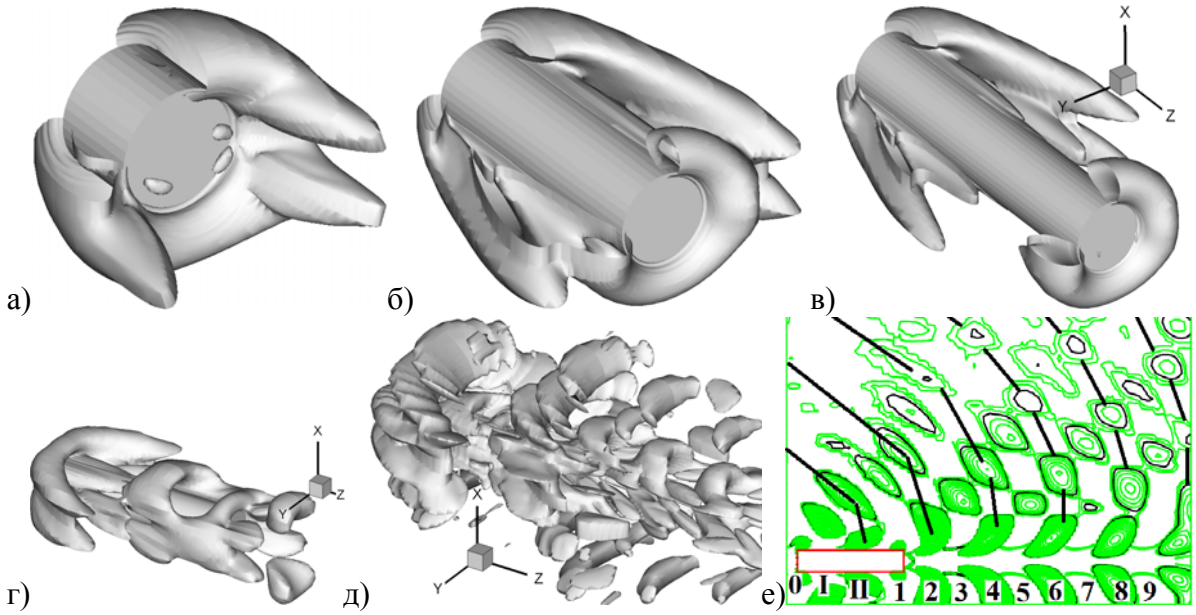


Рис. 2. Установившиеся течения около цилиндра при Re = 50: а–е) Fr = 1, 1, 1, 0.5, 0.5, 0.5; $l/d = 0.76$, 3, 5, 5, 5, 5; а–д) $\beta = 0.1$, 0.1, 0.1, 0.08, 0.01; е) изолинии $\beta > 0$ с шагом 0.002 в пл. x–z (черные отрезки показывают линии гребней).

При увеличении l боковые волны раздваиваются на боковые волны у переднего и у тыльного торцов цилиндра (рис. 2*а–в*, где l/d увеличивается с 0.76 до 5 при Fr = 1, ко-

гда длина волны $\lambda/d = 2\pi \cdot \mathrm{Fr} = 6.28 > 5$). При $\mathrm{Fr} = 0.5$ $\lambda/d = \pi < 5$, что приводит к появлению еще и полуволны гребней у поверхности цилиндра на расстоянии $3.5 \cdot d$ от переднего торца цилиндра (рис. 2*г*).

В [4] подробно описывается процесс формирования внутренних волн при $l/d = 0.76$ и $x > 0$ – сначала между тыльным торцом цилиндра и местом его импульсного старта Q формируются две горизонтальные вихревые нити, трансформирующиеся в ножки шпилькообразной вихревой петли (правый конец рис. 3*в*), головная часть которой расположена правее точки Q. (Вертикальная черная прямая на рис. 3*а* проходит через точку Q.) Далее над Q периодически в течение $0.5 \cdot T$, формируются деформированные вихревые кольца, левые половины которых преобразуются во внутренние полуволны (рис. 1), заполняющие пространство между тыльным торцом цилиндра и местом его импульсного старта Q. При этом правые половины колец утончаются со временем под давлением новорожденных правых полуколец, давящих на них сверху. Уже сформировавшиеся внутренние волны продолжают передвигаться со скоростью U, практически не изменяясь со временем, как вагоны поезда, прикрепленные к локомотиву (цилиндру). Тот же самый процесс формирования внутренних волн (индуцированных диффузией) наблюдается и около покоящегося цилиндра при $T < 20$ [5].

На рис. 3*а–б* при $\mathrm{Fr} = 0.5$, $\mathrm{Re} = 50$ сравниваются картины мгновенных линий тока в вертикальной плоскости x–z для $l/d = 0.76$ и 5 при $T = 0.35$ и 0.32. Если правее тыльного торца картины течения примерно одинаковы – видны формирующая первая полуволна впадин (цифра «1» на рис. 3*а*) и головная часть шпилькообразной вихревой петли (цифра «–1») [4], то над цилиндром картины течения различны – конвективная ячейка «0» при $l/d = 0.76$ однородна, а при $l/d = 5$ разделена на ячейку, примыкающую к переднему торцу цилиндра, и на оставшуюся часть. В результате, вихревая структура правее переднего торца отчасти похожа на вихревую петлю правее тыльного торца цилиндра.

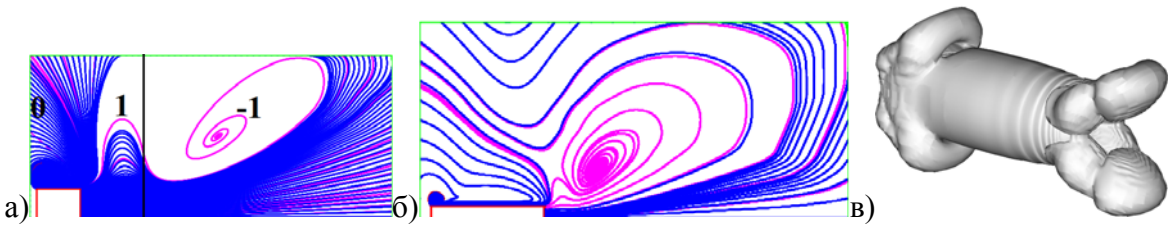


Рис. 3. Течения около цилиндра (Fr = 0.5, Re = 50): а–в) $T = 0.35, 0.32, 0.32$; $l/d = 0.76, 5, 5$; линии тока в пл. x–z при $x > 0$ (а–б) и изоповерхность $\beta = 0.005$ (в).

На рис. 3*б* за время $T = 0.32$ цилиндр с $l/d = 5$ сдвинулся на $\Delta z = d$ вправо. Поэтому на рис. 3*б* можно мысленно прочертить вертикальную линию, проходящую через место П старта переднего торца цилиндра. При $l/d = 5$ и $T < 1.3$ над П также формируются деформированные вихревые кольца, левые половины которых преобразуются в полуволны. Таким образом, для длинного тела механизм формирования волн усложняется. Здесь «вступает в игру» трансформация течения над точкой П. При $l/d = 0.76$ точки П и Q стоят рядом и «играют в одну игру», а при $l/d = 5$ они «играют в похожие игры, но на разных концах поля». В результате, при $T = 36.29$ над телом наблюдаются две полуволны (I и II), сформировавшиеся над П при $T < 3$, и $2 \cdot T$ полуволн, сформировавшихся над точкой Q. Процесс формирования над П более сложен в силу того, что он пересекается с процессом трансформации первой полуволны впадин (№ 1 на рис. 2*е*). Для установившегося течения при $l/d = 5$ (по сравнению с $l/d = 0.76$) полуволны состоят уже из нескольких конвективных ячеек, а расположение ячеек напоминает шахмат-

ную доску (рис. 2*д–е*). На рис. 2*д* над передней половиной тела видна 3D-структура полуволн I и II и части первой полуволны впадин, а над следом – полуволны гребней № 2, 4 и впадин № 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Коньшин В.Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27. № 4. С. 594 – 609.
2. *Гущин В.А., Матюшин П.В*. Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. № 6. С. 1049 – 63.
3. *Матюшин П.В*. Эволюция течения стратифицированной вязкой жидкости при начале движения тела // Научный журнал «Процессы в геосредах». 2016. № 4 (9). С. 333 – 343.
4. *Матюшин П.В*. Процесс формирования внутренних волн, инициированный началом движения тела в стратифицированной вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 83 – 97.
5. *Матюшин П.В*. Эволюция течения, индуцированного диффузией на диске, погруженном в стратифицированную вязкую жидкость // Журнал «Математическое моделирование». 2018. Т. 30. № 11. С. 44 – 58.

—— ♦ ♦ ♦ ——

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ЯЧЕЙКЕ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

К.В. Моисеев [1,2], В.С. Кулешов [1,2]

[1] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[2] Уфимский государственный нефтяной технический университет

В работе численно исследуется эффекты обусловленные зависимостью коэффициента теплопроводности жидкости от температуры на процесс свободной конвекции жидкости, в плоской ячейке подогреваемой снизу. Изучаются профили температуры, компонент вектора скорости жидкости, а также интегральные и локальные коэффициенты теплоотдачи в различных сечениях ячейки. Для коэффициента теплопроводности рассмотрены линейная, экспоненциальная и нелинейная функции температуры.

Свободно-конвективные течения встречаются на различных масштабах. От океанических течений, систем отопления и кондиционирования, до микрожидкостных устройств, в основе которых лежат теплообменные процессы, в частности, конвективные амплификаторы [1], устройства охлаждения для микроэлектроники и т.д. Свободная конвекция среды, теплофизические параметры которой не зависят от температуры, на данный момент времени, хорошо изучены теоретически и экспериментально. Тем не менее, например, для жидкости содержащей наночастицы неоднородность теплофизических параметров по температуре может быть очень существенной, более того особенности поведения таких жидкостей при свободной конвекции практически не изучены и представляют большой научный и практический интерес. Так особенности конвективных течений жидкости с температурной аномалией вязкости изучались в работах

[2–10], выявлены области существования стационарных и колебательных режимов течений жидкостей с квадратичной и гауссовой функцией температуры изучена теплоотдача на изотермических границах и интегральный теплообмен в области течения. В данной работе коэффициент теплопроводности рассматривается как линейная, экспоненциальная и гауссова функции температуры.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система уравнений естественной конвекции жидкости с коэффициентом теплопроводности зависящим от температуры, при предположении простого калорического уравнения (c_p = const>0, c_p – изобарная теплоёмкость) может быть записана в приближение Обербека Буссинеска [11]:

$$\rho_0\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu_0\cdot\frac{\partial}{\partial x_l}\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)\right\}+(\rho-\rho_0)g\delta_{i2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_j\frac{\partial T}{\partial x_j}=\frac{1}{c_p\rho_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\kappa(T)\frac{\partial T}{\partial x_j}\right),\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$$

здесь u_i – i-ая составляющая вектора скорости; x_i – пространственная координата; t – время; T_0, ρ_0 – значения температуры и плотности в невозмущенном состоянии p – отклонение от гидростатического давления; μ_0 – динамическая вязкость жидкости; g – ускорение свободного падения; δ_{i2} – символ Кронекера; $\kappa(T)$ – коэффициент теплопроводности как функция температуры; индексы i, j и l в плоском случае принимают значения 1 и 2. Рассмотрим конвективное течение жидкости в квадратной полости со стороной L, вертикальные стенки которой имеют различную температуру, причем $T_H > T_C$, а горизонтальные границы считаются адиабатическими. В настоящей работе для коэффициента теплопроводности рассматривается следующие функции температуры:

$$k(T)=k_0\left(1+B\left(\frac{T-T_0}{T_H-T_C}\right)\right),$$

$$k(T)=k_0\cdot A\cdot e^{B\left(\frac{T-T_0}{T_H-T_C}\right)},\ k(T)=k_0\cdot A\cdot e^{B\left(\frac{T-T_0}{T_H-T_C}\right)^2},$$

здесь k_0 – коэффициент теплопроводности в невозмущённом состоянии A, B – параметры функции коэффициента теплопроводности жидкости.

Введем следующие характерные масштабы: линейный размер области L; скорость $u=\sqrt{g\beta_T L\Delta T}$; время $t = L / u$; давление $p = \rho_0 u^2$. Тогда перезапишем исходную систему уравнений тепловой конвекции в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ra}}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_l}\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)\right\}+\delta_{i2}\theta,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u_j\frac{\partial\theta}{\partial x_j}=(\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Ra})^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\kappa(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right),$$

$$k(\theta)=A+B\theta,\ k(\theta)=A\cdot e^{B\theta},\ k(\theta)=A\cdot e^{B\theta^2},$$

где θ – безразмерная температура, определяемая как:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_H - T_C},\ T_0 = \frac{1}{2}\left(T_H + T_C\right).$$

Параметры Pr и Ra – безразмерные числа Прандтля и Рэлея соответственно.

Зададим безразмерные начальные условия в виде: $u_i\big|_{t=0} = 0$ и $\theta\big|_{t=0} = 0$, а граничные условия:

$$u_i\big|_{x=0,1;y=0,1} = 0,\ \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0,\ \theta\big|_{y=0} = \theta_H = \frac{1}{2},\ \theta\big|_{y=1} = \theta_C = -\frac{1}{2}.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Для численного решения системы уравнений математической модели, применяется метод контрольного объема и алгоритма SIMPLE [12], модифицированного до второго порядка аппроксимации нестационарных членов и применением кубических сплайнов для вычисления физических величин на гранях контрольного объема, для граничных условий также используется схема второго порядка аппроксимации.

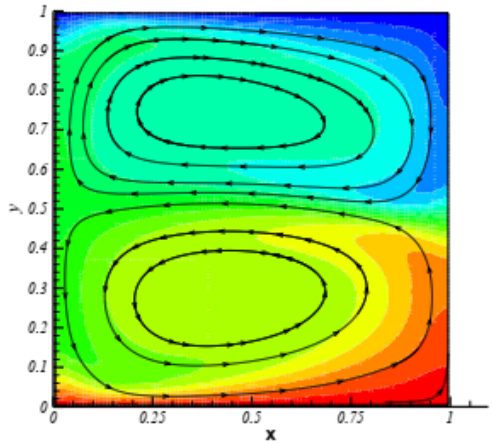


Рис. 1. Поле температуры и линии тока, A=1, B=1.5.

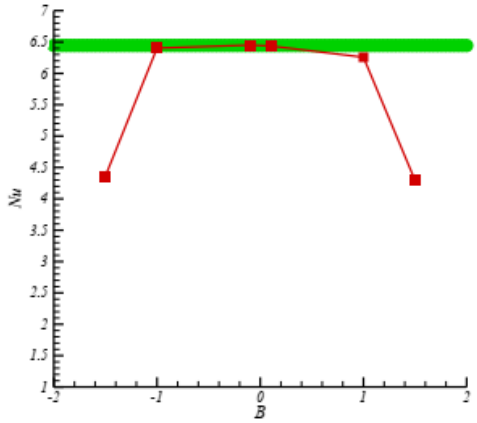


Рис. 2. Средние числа Нуссельта в ячейке при различных значениях параметра B

На Рис. 1. представлены поле температуры и линии тока при значении параметров неоднородности A=1 и B=1.5, видно, что картина течения в ячейке имеет два характерных конвективных вала, в отличие от течения для жидкости с постоянной вязкостью, для которой в ячейке наблюдается один конвективный вал. Также наблюдаются большие градиенты температуры на правой теплоизолированной стенке ячейки, обусловленные конвективным течением. Средние числа Нуссельта в ячейке при различных

значениях параметра B приведены на Рис. 2. Отметим, что теплоотдача в ячейке слабо зависит от знака параметра B и в основном определяется его величиной, то есть не зависит от знака производной функции коэффициента теплопроводности по температуре. Отметим, что для вязкости жидкости знак производной функции вяз по температуре кости имеет определяющее значение и влияет картину течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе численно исследованы особенности течения, а также интегральные и локальные коэффициенты теплообмена в центральном вертикальном, центральном горизонтальном сечениях и на изотермических границах ячейки. Для коэффициента теплопроводности жидкости зависящего от температуры рассмотрены функции двух параметров.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена частично при поддержке гранта РФФИ № 17-41-020576 р_а и частично при финансировании государственного задания № 0246-2019-0052.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moiseev K.V., Volkova E.V., Urmancheev S.F.* Effect of Convection on Polymerase Chain Reaction in a Closed Cell // Procedia IUTAM. – 2013. – V. 8. – P. 172–175.
2. *Ильясов А.М., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф.* Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII. № 4 (24). С. 51–59.
3. *Моисеева Е.Ф., Малышев В.Л., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф.* Влияние способа подвода тепла на характер течения при конвекции Рэлея–Бенара // Вестник УГАТУ. 2011. Т. 15. № 4 (44). С. 154–158.
4. *Кулешов В.С., Моисеев К.В.* Численное моделирование конвективных течений аномально термовязкой жидкости // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20. № 2 (72). С. 74–80.
5. *Кулешов В.С., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф.* Периодические струтуры при конвекции аномально термовязкой жидкости // Вестник БашГУ. 2017. Т. 22. №2. С. 297–302.
6. *Кулешов В.С., Моисеев К.В., Хизбуллина С.Ф., Михайленко К.И, Урманчеев С.Ф.* Особенности конвективных течений аномально термовязкой жидкости. // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. №5. С. 16–26.
7. *Моисеев К.В., Хизбуллина С.Ф., Бахтизин Р.Н., Урманчеев С.Ф., Кулешов В.С., Алфёров А.В.* Математические модели термогравитационной конвекции неоднородной жидкости. // Нефтегазовое дело. 2017. Т. 15. №2. С. 165–170.
8. *Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Mikhaylenko K.I., Urmancheev S.F.* Convective Flows of Anomalous Thermoviscous Fluid // Mathematical Models and Computer Simulations (2018) 10(4): 529–537.
9. *Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Urmancheev S.F.* Isolated Regimes in the Convection of an Anomalous Thermoviscous Liquid // Fluid Dynamics, 2019, Vol. 54, Suppl. 7, P. 84–91.
10. *В.С. Кулешов, К.В. Моисеев, С.Ф. Урманчеев* Изолированные режимы течений при конвекции аномально термовязкой жидкости в плоской ячейке //ПММ, 2019, № 3, с. 460–470
11. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
12. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.

—— ♦ ♦ ♦ ——

НЕСТАНДАРТНЫЕ КАУСТИКИ В АСИМПТОТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И НАБЕГА НА БЕРЕГ ДЛИННЫХ ВОЛН В ОКЕАНЕ

В.Е. Назайкинский
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
e-mail: nazay@ipmnet.ru

Возникновение, распространение и набег на берег длинных волн в океане рассматривается во многих работах (см., например, монографии [1, 2]). Одной из важных моделей является система уравнений мелкой воды в бассейне переменной глубины $D(x)$, $x=(x_1,x_2)$, в некоторой ограниченной области Ω, граница которой задается уравнением $D(x)=0$. Мы рассмотрим получающееся из линеаризованной системы уравнений мелкой воды двумерное волновое уравнение для возвышения свободной поверхности $\eta(x,t)$ со скоростью $c(x)=\sqrt{gD(x)}$ (где g – ускорение свободного падения). Описание волн цунами в поршневой модели (отвечающей мгновенной вертикальной подвижке дна над сейсмическим источником) приводит к задаче Коши для этого уравнения вида

$$\eta_{tt}-\langle\nabla,c^2(x)\nabla\rangle\eta=0,\quad \eta|_{t=0}=\eta^0(x),\quad \eta_t|_{t=0}=0.$$

Мы предполагаем, что $D(x)$ – гладкая функция в замыкании области Ω; при этом $D(x)>0$ в области Ω, а на ее границе $\partial\Omega$ выполнены условия $D(x)=0$ и $\nabla D(x)\neq 0$. Вместо классических граничных условий Дирихле или Неймана (которые в данном случае не приводят к корректной задаче из-за вырождения на границе), на функцию $\eta(x,t)$ налагается требование конечности интеграла энергии

$$J^2(t)=\frac{1}{2}(\nabla\eta,c^2(x)\nabla\eta)+\frac{1}{2}\|\eta_t\|^2<\infty,$$

где скалярное произведение и норма берутся в пространстве $L^2(\Omega)$. Начальные условия выбираются в виде

$$\eta^0(x)=V\left(\frac{x-x_0}{l}\right),$$

где $x_0\in\Omega$ – местоположение источника, $V(y)$ – быстро убывающая функция, определяющая его форму, а l – линейные размеры источника (который предполагается малым сравнительно с характерным линейным размером L самого бассейна). В такой задаче естественно искать решение в виде асимптотики по малому параметру $\mu=l/L$. (Предполагая, например, что $l=50$ км и $L\geq 1000$ км, получим $\mu\leq 1/20$.)

В лекции будет описана конструкция асимптотических решений этой задачи. Она основана на модификации [3] канонического оператора Маслова [4] для уравнений, вырождающихся на границе области, основанной на конструкции нестандартного фазового пространства, отвечающего таким уравнениям [5], на квантовании Фока канонических преобразований [6] и на представлении локализованных асимптотических решений через канонический оператор [7, 8].

Лекция основана на результатах, полученных в результате совместной работы с С. Ю. Доброхотовым, А. Ю. Аникиным, Д. С. Миненковым, А. А. Толченниковым и Б. Тироцци [9–12].

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ
Работа поддержана РНФ, проект 16-11-10282.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
2. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде: математическая теория и приложения. – М.: Иностранная литература, 1959. 618 с.
3. *Назайкинский В.Е.* Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению // Матем. заметки. 2014. Т. 96. № 2. С. 261 – 276.
4. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. 292 с.
5. *Назайкинский В.Е.* Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области // Матем. заметки. 2012. Т. 92. № 1. С. 153 – 156.
6. *Фок В.А.* О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике // Вестн. ЛГУ. Сер. Матем. Мех. Астроном. 1969. Т. 16. С. 67 – 70.
7. *Dobrokhotov S.Yu., Shafarevich A.I., Tirozzi B.* Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations // Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15. N. 2. P. 192 – 221.
8. *Назайкинский В.Е.* О представлениях локализованных функций в R^2 каноническим оператором Маслова // Матем. заметки. 2014. Т. 96. № 1. С. 88 – 100.
9. *Dobrokhotov S.Yu., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E., Tirozzi B.* Chap. 3 in: Theory and Applications in Mathematical Physics. – Singapore: World Scientific, 2015. P. 29 – 47.
10. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Толченников А.А.* Равномерная асимптотика граничных значений решения линейной задачи о набеге волн на пологий берег // Матем. заметки. 2017. Т. 101. № 5. С. 700 – 715.
11. *Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Простые асимптотики обобщенного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и их приложения в линейной задаче о набеге длинных волн на берег // Матем. заметки. 2018. Т. 104. № 4. С. 483 – 504.
12. *Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Asymptotic solutions of the wave equation with degenerate velocity and with right-hand side localized in space and time // Журн. матем. физ., анал., геом. 2018. Т. 14. № 4. С. 393 – 405.

—— ♦ ♦ ♦ ——

СЕДИМЕНТАЦИЯ С ДИФФУЗИЕЙ В ДВУМЕРНЫХ ЯЧЕЙКАХ С НАКЛОННЫМИ СТЕНКАМИ

В.В. Неверов, В.В. Шелухин
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
e-mail: Neverovvladim@gmail.com

В работе приводится вывод математической модели двухфазной жидкости, основанный на общих термодинамических принципах. Показано, законы сохранения согласованы с законами термодинамики и инвариантны относительно преобразований Галилея. Численно решена задача об оседании частиц в двумерной ячейке с вертикальными и наклонными стенками.

Получены решения, согласованные с эффектом Бойкотта. Численно исследована сходимость метода.

На основе термодинамических принципов выводится новая математическая модель двухфазной суспензии. В основе подхода лежит метод, предложенный Л.Д. Ландау и И.М. Халатниковым [1] для описания течения сверхтекучего гелия. Такой же подход применялся в работе [2] при выводе модели суспензии с учетом вращения частиц. Показано, что в полученной модели законы сохранения и реологические соотношения согласованы с законами термодинамики. В частности, к числу реологических соотношений относится обобщенный закон Фика для массовой концентрации твердой фазы.

СЕДИМЕНТАЦИЯ В ДВУМЕРНОЙ ЯЧЕЙКЕ

На основе полученной модели численно решалась задача о конвективной седиментации в сосудах с вертикальными и наклонными стенками. Исследование проводилось для случая, когда каждая из фаз является сжимаемой. Как правило, в известных публикациях по седиментации используются приближения малого проскальзывания фаз (модель «дрейфа») [3], либо используются упрощающие предположения для исключения второго уравнения импульса [4]. В данной работе решается полная система уравнений двухскоростного континуума.

Важной особенностью модели является то, что уравнение баланса массовой концентрации частиц опирается на обобщенный реологический закон Фика для потока концентрации. В этом законе кроме диффузии и гравитационной мобильности, учитываются термодиффузия и бародиффузия. Кроме того, поток концентрации зависит от градиента относительной кинетической энергии. Теоретический анализ показал, что такой обобщенный закон Фика также согласуется с законом производства энтропии. Несмотря на то, что уравнение для баланса концентрации содержит диффузионные члены, связанные с давлением и относительной кинетической энергией, значения концентрации остаются в физических пределах между нулем и единицей – Рис.1.

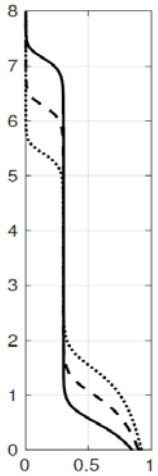
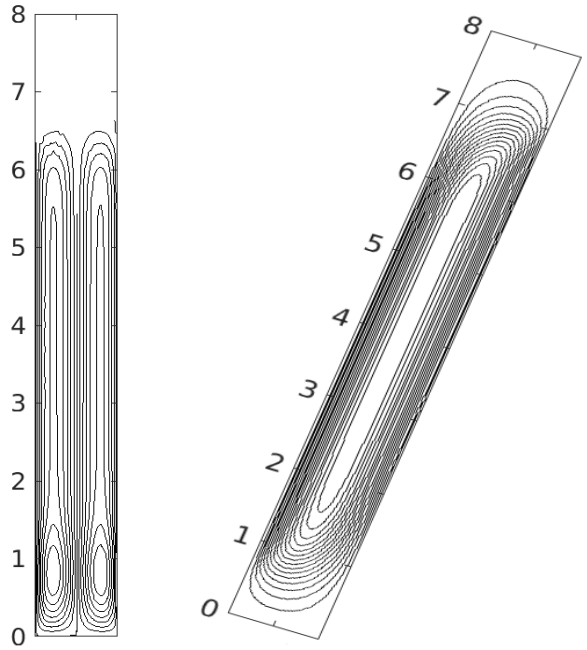


Рис. 1. Усредненный по ширине ячейки профиль массовой концентрации в зависимости от высоты для различных моментов времени (вертикальная ячейка)



а) *б)*

Рис. 2. Линии тока средней скорости суспензии в а) – вертикальной, б) – наклонной ячейках.

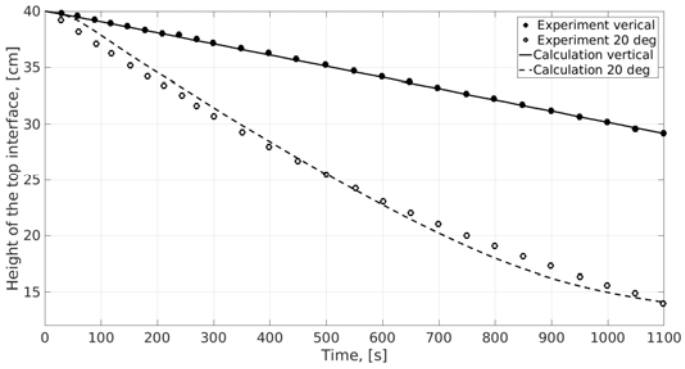


Рис. 3. Сравнение расчетной высоты «грязной» жидкости с экспериментом, для вертикальной и наклонной ячеек.

В качестве теста решалась задача седиментации в ячейке с наклонными стенками. Оказалось, что эффект Бойкотта (A.Boycott, 1920) может быть установлен в рамках предложенной модели, т. е. седиментация в такой ячейке проходит быстрее, чем в вертикальной. Показано, что линии тока средней скорости течения в наклоненной и вертикальной ячейках отличаются – Рис. 2., т.е. эффект Бойкотта обусловлен не только геометрическим фактором (Ponder, Nakamura&Kuroda), но и конвективным движением суспензии. Сравнение расчетов с лабораторными данными из работы [3], показало хорошее совпадение численного решения с экспериментом – Рис. 3.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации №14.W03.31.0002.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халатников И.М.* Теория сверхтекучести. М.: Наука. 1971.
2. *Shelukhin V.V.* Thermodynamics of two-phase granular fluids. // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2018. Т. 262 С. 25 – 37
3. *Acrivos A., Herbolzheimer E.* Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined walls. // J. of Fluid Mechanics. 1979. Т. 92. С. 435 – 457
4. *Невский Ю.А., Осипцов А.Н.* Медленная гравитационная конвекция дисперсных систем в областях с наклонными границами. // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. №2. С. 65 – 81.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В ОБЪЕДИНЕННОЙ МОДЕЛИ ВАН ДЕР ПОЛЯ – РЭЛЕЯ

С.В. Нестеров [1], В.Г. Байдулов [1,2]
[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
[2] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
e-mail: bayd@ipmnet.ru

В монографии [1] описан волновой твердотельный гироскоп, физической основой которого является твердотельный резонатор, изготовленный из высококачественного кварца. В резонаторе возбуждаются незатухающие стоячие волны, которые и позволяют превратить этот резонатор в гироскоп. Для того чтобы гироскоп мог функционировать достаточно продолжительное время, колебания резонатора должны поддерживаться все время эксплуатации с постоянной амплитудой и частотой. Ранее был подробно рассмотрен автоколебательный режим резонатора. Имеются два детально изученных дифференциальных уравнения, описывающих возникновение и существование установившихся колебаний постоянной амплитуды и периода.

Уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{u} - \varepsilon\left(1 - u^2\right)\dot{u} + u = 0 \tag{1}$$

Здесь u и $\dot{u}$ – смещение и скорость осциллятора, ε – создаваемый специальным устройством коэффициент обратной связи, обеспечивающий подачу энергии от внешнего постоянного источника.

Уравнение Рэлея

$$\ddot{u} - \varepsilon\left(1 - \dot{u}^2\right)\dot{u} + u = 0 \tag{2}$$

где u, $\dot{u}$ и ε – имеют тот же смысл, как и в уравнении Ван дер Поля.

Основные математические результаты, относящиеся к уравнениям Ван дер Поля и Рэлея, состоят в том, что тривиальное решение $u = \dot{u} = 0$ неустойчиво, однако существует периодическое решение с постоянной амплитудой и периодом $T(\varepsilon)$. Это периодическое решение асимптотически устойчиво, однако оно не оказывается одночастотным. Для улучшения гироскопических свойств резонатора необходимо, чтобы колебания описывались устойчивыми одночастотными периодическими решениями. Было предложено объединить уравнения (1) и (2) следующим образом

$$\ddot{u} - \varepsilon\left(1 - \dot{u}^2 - u^2\right)\dot{u} + u = 0 \tag{3}$$

Действительно, полагая $u = A\cos t$, при $A = 1$ получаем точное решение уравне-

ния (3) с периодом $T = 2\pi$.

Для осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{u} = -f(u),\ f(-u) = -f(u) \tag{4}$$

которое имеет интеграл энергии

$$E = \frac{\dot{u}^2}{2} + \Pi,\ \Pi = \int_0^u f(u)du \tag{5}$$

Для систем с обратной связью (диссипацией) уравнение (3) может быть в случае потенциальной энергии Π обобщено в виде

$$\ddot{u} - \varepsilon(1 - aE)\dot{u} + f(u) = 0 \tag{6}$$

где ε – коэффициент обратной связи, a – постоянный коэффициент, который показывает, до каких пор может расти энергия осциллятора, чтобы отрицательное сопротивление уменьшилось до нуля.

Дифференцируя энергию (5), найдем

$$\frac{dE}{dt} = \dot{u}\left(\ddot{u} + f(u)\right) = \varepsilon(1 - aE)\dot{u}^2 \tag{7}$$

Таким образом, видим, что энергия осциллятора будет постоянной, если

$$E = a^{-1} \tag{8}$$

Нами получено аналитически в конечном виде уравнение предельного цикла на фазовой плоскости

$$\frac{1}{a} = \frac{\dot{u}^2}{2} + \Pi$$

Полагая $\dot{u} = y$, $u = x$, найдем

$$y^2 + \Pi = \frac{1}{a} \tag{9}$$

Если положить $y = 0$, то величина амплитуды определяется уравнением

$$\frac{1}{a} - \Pi = 0 \tag{10}$$

Здесь по умолчанию предполагается, что при заданном коэффициенте a существуют два конечных корня уравнения (10). Для определения периода колебаний воспользуемся уравнением (5), полагая $E = 1/a$. Имеем

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{2\left(\frac{1}{a} - \Pi(u)\right)}} = \frac{T}{2} \tag{11}$$

Примеры.

1. Рассмотрим автоколебательную систему, состоящую из маятника и электромеханического устройства, обеспечивающего согласно вышесказанному обратную связь между постоянным источником питания и маятником. Такая автоколебательная система при произвольных углах отклонения маятника от вертикального положения описывается уравнением (здесь используются безразмерные переменные)

$$\ddot{u} - \varepsilon(1 - aE)\dot{u} + \sin u = 0,\quad u(0) = 0,\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \tag{12}$$

Здесь $E = \frac{\dot{u}^2}{2} + (1 - \cos u)$, a – коэффициент, ограничивающий рост отрицательного сопротивления. Тогда уравнение предельного цикла имеет вид

$$\frac{\dot{u}^2}{2}+\left(1-\cos u\right)=\frac{1}{a} \tag{13}$$

На фазовой плоскости $y=\dot{u}$, $x=u$ уравнение предельного цикла записывается так

$$y^2+2\left(1-\cos u\right)=\frac{2}{a} \tag{14}$$

Численное интегрирование задачи Коши (12) при различных значениях начальных данных показывают, что все фазовые траектории притягиваются к предельному циклу (13) (Рис. 1).

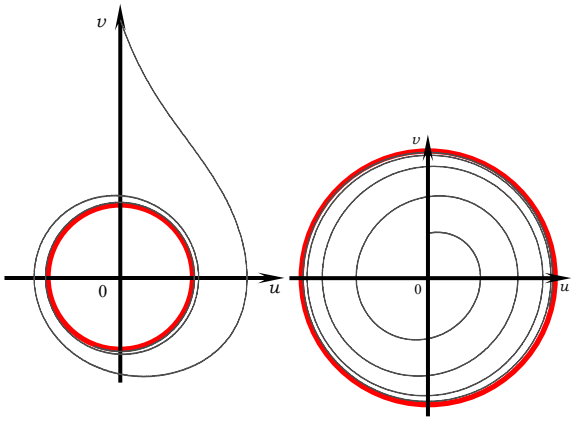


Рис. 1.

2. Автоколебательная система вида

$$\ddot{u}-\varepsilon\left(1-aE\right)\dot{u}+u^5\exp\left(bu^6\right)=0;\quad a=1,\ \varepsilon=0.25,\ b=2$$

$$E=\frac{\dot{u}^2}{2}+\frac{1}{6b}\left(\exp\left(bu^6\right)-1\right)$$

Результаты

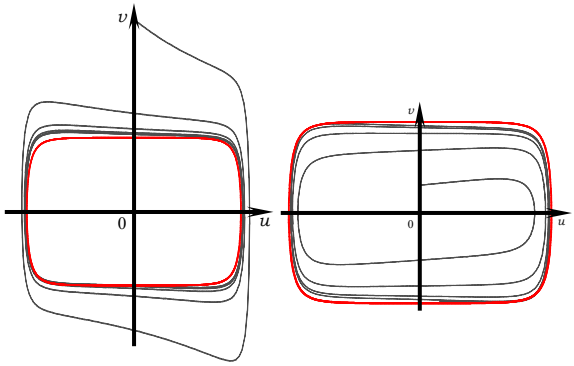


Рис. 2.

3. Автоколебательная система вида

$$\ddot{u}-\varepsilon\left(1-aE\right)\dot{u}+u\exp\left(bu\right)=0;\quad a=1,\ \varepsilon=0.25,\ b=0.98$$

$$E=\frac{\dot{u}^2}{2}+\left(\frac{u}{b}-\frac{1}{b^2}\right)\exp\left(bu\right)+\frac{1}{b^2}$$

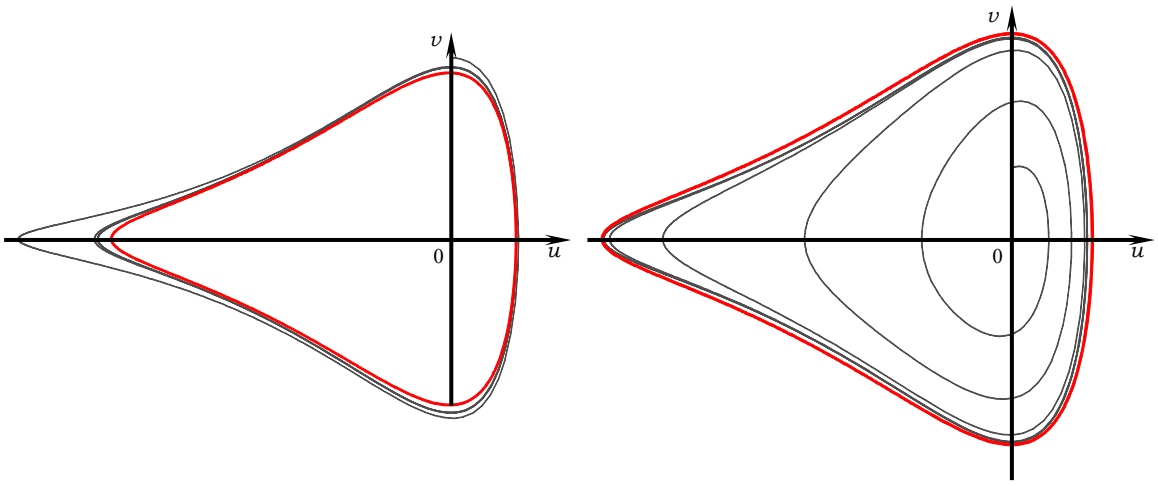


Рис. 4.

Приведенные примеры показывают, что выделенный класс автоколебательных систем позволяет находить предельные циклы с помощью простых аналитических вычислений. При этом определяются амплитуды колебаний и их периоды. Если создать такие электромеханические устройства, которые обеспечивают обратную связь, описываемую нелинейным сопротивлением $-\varepsilon(1-aE)\dot{u}$, то можно, например, сконструировать на основе примера 1 высокоточный маятниковый гравиметр.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по темам государственных заданий № АААА-А17-117021310385-0 и АААА-А17-117021310381-8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

—— ♦♦♦ ——

МЕТОД УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ В ЗАДАЧЕ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

С.В. Нестеров [1], Л.Д. Акуленко [1,2], В.Г. Байдулов [1,2]
[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
[2] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
e-mail: bayd@ipmnet.ru

Пусть дана задача Штурма – Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+\left[\lambda r(x)-q(x)\right]u=0,\quad 0<x<1 \tag{1}$$

$$u(0)=u(1)=0 \tag{2}$$

Функции $0<p(x)\le p_1$; $0<r_0\le r(x)<r_1$ достаточно гладкие и могут быть определены на более широком интервале $0\le x\le +a$. Требуется найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (2).

Оценка сверху первого собственного числа

$$\lambda_1 \le \lambda_1^* = \int_0^1 \left[p(x)\psi'^2 + q\psi^2 \right] dx \Big/ \int_0^1 r(x)\psi^2\, dx$$

где $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Получение оценок снизу оказывается более сложной задачей, решение которой в рамках метода ускоренной сходимости сформулирована в виде следующей программы дейсвтий:

1. Найти критерий близости λ_1 и λ_1^*.
2. Дать коструктивный метод получения оценки снизу λ_{1*} ($\lambda_{1*} \le \lambda_1 \le \lambda_1^*$).
3. Построить процедуру уточнения собственных чисел и собственных функций.
4. Построить процедуру уточнения собственных чисел и собственных функций с любой наперед заданной точностью.
5. Получить последующие собственные числа λ_2, λ_3, … и функции φ_2, φ_3, …
6. Перенести результаты на краевые условия второго и третьего рода.
7. Распространить предложенный метод (метод ускоренной сходимости) на классческие задачи Штурма – Лиувилля.

Овновные этапы выполнения программы представлены в докладе. Реализация метода излагается на примерах решения задач механики, гидродинамики, акустики и т.д.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по темам государственных заданий № АААА-А17-117021310385-0 и АААА-А17-117021310381-8.

——— ♦ ♦ ♦ ———

О ВЛИЯНИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И РАСХОД ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А.Д. Низамова[1], В.Н. Киреев[2], С.Ф. Урманчеев[1]
[1] Институт механики им.Р.Р.Мавлютова УФИЦ РАН
e-mail: adeshka@yandex.ru, said@anrb.ru
[2]Башкирский государственный университет, e-mail: kireev@anrb.ru

Потери напора в потоке жидкости вызываются гидравлическим сопротивлением следующих видов: местные потери и сопротивления по длине. Местные сопротивления обусловлены изменениями скорости потока по величине или направлению, а сопротивления по длине – силой трения. Источником потерь во всех случаях является вязкость жидкости, которая влияет на режим течения жидкости [1–4]. Потери напора при местных гидравлических сопротивлениях для жидкости с постоянной вязкостью определяются формулой Вейсбаха [5]. Однако для режима ламинарного потока нельзя пренебрегать изменением вязкости, и формулы для определения коэффициента гидравлического сопротивления, строго говоря, не применимы. В этом случае этот коэффициент может быть определен только экспериментально [6] или с использованием более сложной формулы [7].

Системы промышленного кондиционирования и автономного отопления зданий требуют поддержания в помещениях заданной температуры, что достигается применением низкозамерзающих жидкостей – антифризов, хладагентов, теплоносителей. В качестве незамерзающей жидкости в последние годы широко применяются водные растворы гликолей – этиленгликоля и пропиленгликоля. Благодаря меньшей плотности

пропиленгликоля по сравнению с этиленгликолевыми теплоносителями и дополнительно смазывающему эффекту, на его прокачку требуется меньший расход электроэнергии.

В настоящей работе рассмотрен ряд задач о влиянии теплового воздействия на гидравлическое сопротивление и расход течения термовязких жидкостей в каналах с постоянным и переменным сечениями.

Предварительно была рассмотрена задача о течении нагретого водного раствора пропиленгликоля (45%) в плоском канале с охлаждаемыми стенками. Течение жидкости происходит под действием перепада давления $\Delta P = P_{in} - P_{out}$.

Математическая модель процесса в безразмерном виде состоит из следующих уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right],$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T)\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right],$$

с граничными условиями

$u(-1) = u(1) = 0$, $v(-1) = v(1) = 0$, $T(-1) = T(1) = 0$,

где u, v – продольная и поперечная скорости, p – давление, T – температура, Re, Pe – числа Рейнольдса и Пекле, $\mu = e^{-T}$ – приближенная зависимость вязкости раствора на некотором интервале температуры.

Представленные выше уравнения математической модели были решены численно с помощью исходного компьютерного кода на основе метода конечных объемов и алгоритма SIMPLE [8].

В результате расчетов определено, что распределение вязкости делится на области с низким и высоким значениями. Жидкость, втекая в канал, имеет высокую температуру и, соответственно, наименьшее значение вязкости. Затем, при охлаждении в области стенок канала её вязкость увеличивается в соответствии с зависимостью вязкости от температуры. Поэтому, поля скоростей формируются в условиях неоднородного распределения поля вязкости. Таким образом, сложившееся распределение и определяет непуазейлевский характер течения: скорость вблизи стенок уменьшается, а в ядре потока увеличивается. В результате профиль скорости имеет вытянутую форму.

Далее была решена задача о течении жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры. В этом случае высоковязкая область локализуется в пространстве и образует вязкий барьер. При этом расход жидкости увеличивается до тех пор, пока формирующаяся структура не оказывает существенного влияния на характер течения. Следует отметить, что в этом процессе значительную роль играет кондуктивная теплопроводность жидкости, которая и определяет продольный размер вязкого барьера.

После формирования вязкого барьера скорость течения замедляется, а расход жидкости при этом резко уменьшается (АВ на Рис. 1). Примерно к моменту времени $t = 20$ вязкий барьер принимает свою характерную конфигурацию (Рис. 2, А).

Далее на протяжении длительного времени расход продолжает незначительно уменьшаться (ВС на Рис. 1), что связано с увеличением области, занимаемой вязким барьером (Рис. 2, В и С), вплоть до установления равновесного термогидродинамического состояния. Оно определяется конвективным и кондуктивным переносом тепла,

при котором перемещение вязкого барьера прекращается, а расход становится минимально возможным и соответствует степени взаимодействия вязкого барьера со стенками канала. При этом продольный размер высоковязкой области оказывается максимальным.

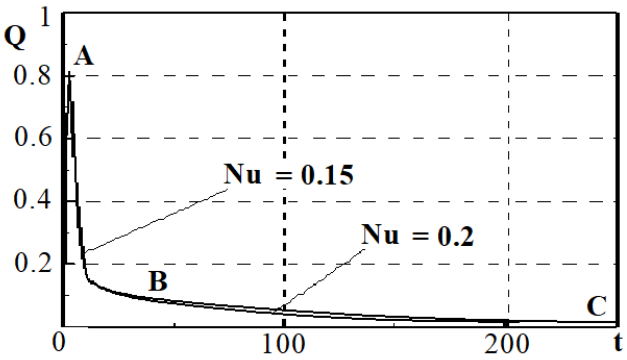


Рис. 1. Зависимость относительного расхода от времени для $0.15 \le Nu < 0.3$

На следующем этапе исследований рассмотрено течение в канале со ступенчатым сужением сечения с целью определения изменения гидравлического сопротивления термовязких жидкостей в условиях интенсивного теплообмена.

Таким образом, в настоящей работе показано, что с помощью теплового воздействия можно регулировать коэффициент гидравлического сопротивления течения термовязкой жидкости в охлаждаемом канале.

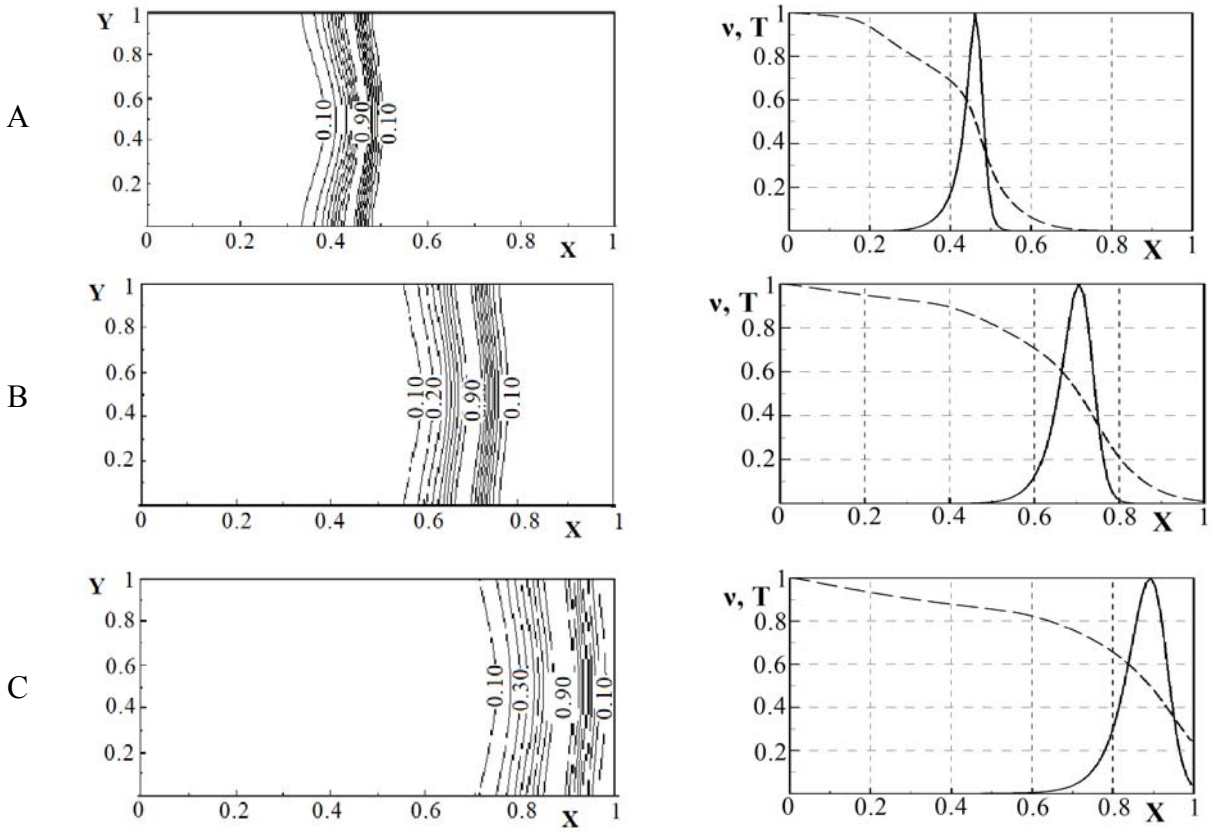


Рис. 2. Распределение вязкого барьера в канале в различные моменты времени: A – t = 20, B – t = 60, C – t = 250. Справа на рисунках – распределение вязкости (сплошные линии) и распределение температуры (пунктирные линии) вдоль оси канала.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследования А.Д. Низамовой и С.Ф. Урманчеева выполнены при финансовой поддержке Проекта «Гидродинамические эффекты в многофазных и термовязких средах при волновом и тепловом воздействии» 2019–2022 гг. (№ 0246-2019-0052). Исследование В.Н. Киреева проводилось при финансовой поддержке АН РБ (договор 40/10) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-41-020999-р_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н.* О влиянии температурной зависимости вязкости на течение жидкости // Нефтегазовое дело. 2004. № 2. С. 287–295.
2. Urmancheev S.F., Kireev V.N. The transient flow of liquid with non-monotonous temperature dependent viscosity in a plane channel // AIP Conference Proceedings 1906, 200009. 2017.
3. *Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F.* The hydraulic resistance of thermoviscous liquid flow in a plane channel with a variable cross-section // IOP Conf. Series: J. of Physics: Conf. Series. 2019. № 1158. 032014. doi:10.1088/1742-6596/1158/3/032014.
4. Деменок С.Л. Теплообмен и гидравлическое сопротивление в трубах и каналах // Н-Пром Бюро. С.-Петербург. 2012. 285 с.
5. *Идельчик И.Е.* Гидравлические сопротивления. Физико-химические основы. М.: Государственное энергетическое издательство, 1954. 351 с.
6. *Альтшуль А.Д.* Гидравлические сопротивления. М.: Недра. 1982. 224 с.
7. *Юрьев А.С.* и др. Справочник по расчетам гидравлических и вентиляционных систем // С.-Петербург. 2001. Р. 1154.
8. *Patankar S.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemishere Publishing Corporation. 1980. p. 199.

—— ♦♦♦ ——

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ МЕНИСКА НА ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАПОЛНЕННОЙ СМАЗКОЙ

Т.В. Низкая, Е.С. Асмолов, О.И. Виноградова
Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН

В последние годы, в связи с бурным развитием микрофлюидики, большой интерес вызывает течение жидкости вблизи текстурированных поверхностей, углубления которых заполнены сторонним веществом. Классическим примером являются супергидрофобные поверхности, способные, за счет своей гидрофобности, удерживать воздух в углублениях текстуры. Однако веществом, заполняющим текстуру, может быть не газ, а специальная смазочная пропитка. Предполагается, что пропитанные смазкой поверхности (liquid–infused surfaces) могут быть более устойчивыми в эксплуатации, так как, в отличие от газа, смазочный материал не растворяется в жидкости [1]. С другой стороны, поверхностное натяжение между двумя жидкостями намного меньше, чем между жидкостью и газом, что упрощает деформацию мениска при перепаде давлений и может привести к вытеснению последней [2]. Кроме того, вязкостью смазки в этом случае пренебречь уже нельзя и при построение теоретических моделей необходимо рассматривать течение смазки в углублениях текстуры [3]. Несмотря на все более широкий интерес к таким поверхностям, вопрос об их гидродинамических свойствах остается не до конца изученным. В докладе мы рассмотрим влияние вязкости смазки и формы мениска на скорость течения жидкости и эффективную длину скольжения заполненной смазкой поверхности.

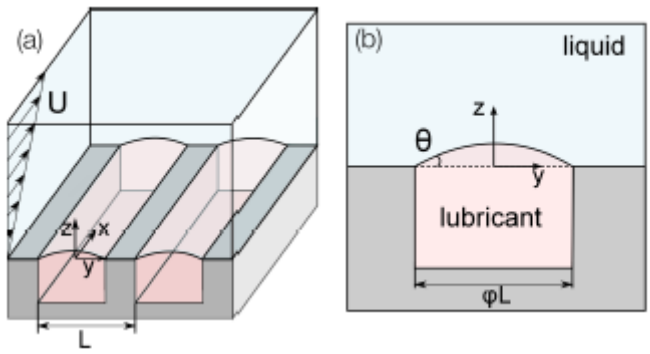


Рис. 1. Схема поверхности с продольными бороздками, заполненными смазочным материалом (а), форма мениска при неравенстве давлений в жидкости и смазке (б).

Рассмотрим твердую поверхность с периодическим массивом глубоких (отношение глубины к ширине больше 1) параллельных бороздок, заполненных смазкой произвольной вязкости. Вдали от поверхности задано сдвиговое течение в направлении, параллельном бороздкам. При неравенстве гидростатического давления в смазке и в жидкости межфазная граница искривляется и возникает мениск цилиндрической формы, который можно охарактеризовать углом выступания θ (см. рис. 1). Мы рассмотрим влияние деформации мениска на течение жидкости вблизи описанной поверхности, в предположении, что деформация мениска мала и угол $\theta << 1$ является малым параметром задачи.

При малых числах Рейнольдса течение жидкости и смазки описываются уравнениями Стокса. Для решения двухфазной задачи при малом угле выступания θ и произвольном отношении вязкостей μ мы раскладываем поля скоростей и давления в жидкости и смазке в ряд по θ и удерживаем первые два члена разложения. Условия непрерывности скоростей и касательных напряжений на границе раздела сред сносятся на плоскую границу $z=0$, так что расчетные области остаются прямоугольными и для решения уравнений можно использовать метод рядов Фурье. Ранее было показано [4], что для плоского мениска двухфазную задачу можно свести к однофазной задаче для жидкости с граничными условиями специального вида. Такой же прием мы используем и для вычисления поправки первого порядка по θ.

На масштабах больших периода текстуры поверхность можно охарактеризовать с помощью эффективной длины скольжения – параметра, связывающего среднюю скорость жидкости на поверхности со средней скоростью сдвига:

$$b_{eff} = \left. \frac{\langle u \rangle}{\langle \partial_z u \rangle} \right|_{z=0}$$

На рис. 2 показаны зависимости эффективной длины скольжения от основных параметров задачи: видно, что вязкость смазки оказывает существенное влияние на длину скольжения, тогда как влияние формы мениска незначительно.

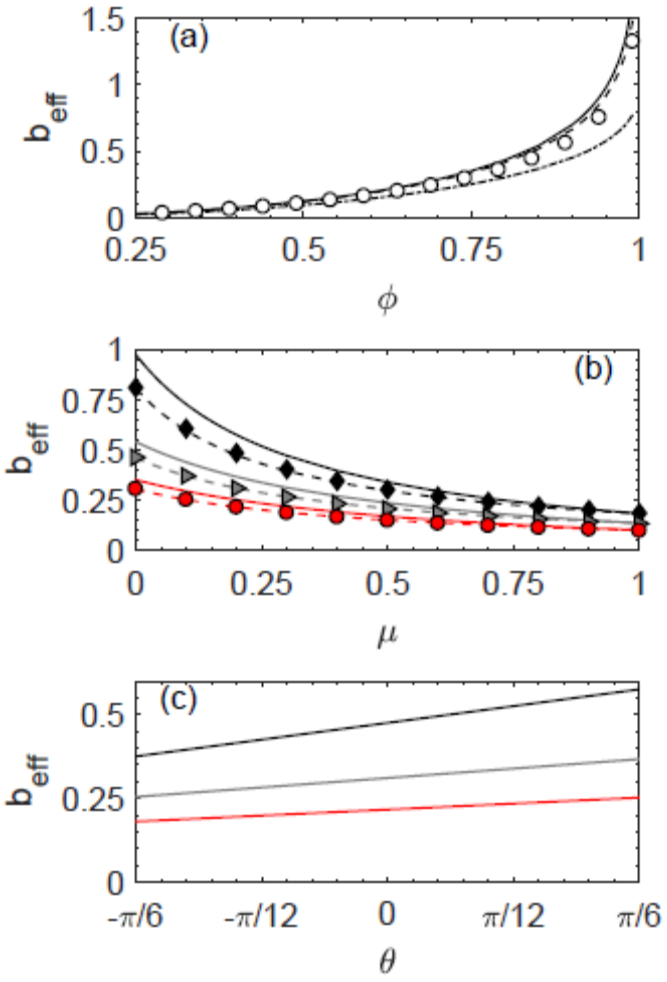


Рис. 2. Зависимость эффективной длины скольжения от основных параметров задачи: (a) от отношения ширины бороздки к периоду текстуры φ при θ=π/6 *и μ=0, 0.02, 0.2 (сплошная линия, пунктир, штрих-пунктир) (b) от отношения вязкостей смазки и жидкости μ при φ=0.9, 0.75, 0.5 (сверху вниз, сплошные линии соответствуют* θ=π/6, *пунктирные –* θ=0*), (c) от угла выступания мениска* θ *при φ=0.9, 0.75, 0.5 (сверху вниз).*

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00729.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kim P. et al.* Liquid-infused nanostructured surfaces with extreme anti-ice and anti-frost performance // ACS NaNo. 2012. V. 6. №. 8. P. 6569–6577.
2. *Wexler J.S., Jacobi I., Stone H.A.* Shear-driven failure of liquid-infused surfaces // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 114. №. 16. P. 168301.
3. *Ng C.O., Chu H.C.W., Wang C.Y.* On the effects of liquid–gas interfacial shear on slip flow through a parallel-plate channel with superhydrophobic grooved walls // Phys. Fluids. 2010. V. 22. №. 10. P. 102002.
4. *Nizkaya T.V., Asmolov E.S., Vinogradova O.I.* Gas cushion model and hydrodynamic boundary conditions for superhydrophobic textures // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. №. 4. P. 043017.

—— ♦♦♦ ——

ПОГЛОЩЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ТОНКИМ СЛОЕМ ВЯЗКОЭЛАСТИЧНОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ СРЕДЫ

А.А. Никифоров
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: anikiforov1@yandex.ru

Полное поглощение энергии падающей волны на экранируемой поверхности требует решения двух проблем: необходимость сведения к нулю как проходящих волн, так и отраженных. Акустического экранирования можно легко добиться, используя достаточно толстые звукопоглощающие покрытия. Однако на практике часто требуется, чтобы это покрытие было как можно тоньше и легче. Поэтому интересно рассмотреть возможность использования пузырьковых экранов в качестве сверхтонких противогидролокационных покрытий. Присутствие небольшого по объему количества пузырьков существенно увеличивает сжимаемость среды, при этом плотность пузырьковой среды сохраняется близкой к значению плотности несущей фазы. Кроме того, колеблющаяся пузырьковая среда обладает сильными диссипативными свойствами. В [1] представлены результаты теоретического и экспериментального изучения воздействия акустических метаэкранов на акустические волны ультразвуковых или звуковых частот, падающих из воздуха. Экраны состояли из слоя воздушных пузырьков в воде или воздушных пузырьков, внедренных в мягкий эластичный материал. Было показано, что такие метаэкраны в различных условиях могут быть использованы как для подавления, так и для усиления акустических волн на границе раздела вода/воздух, а также для достижения повышенной абсорбции энергии волн. Эта работа получила развитие в [2], где экспериментально показано, что с помощью пузырькового метаэкрана, то есть тонкого слоя газовых пузырьков в упругом материале, может быть достигнуто акустическое суперпоглощение в широком диапазоне частот. Для анализа волновых процессов в пузырьковой жидкости используется односкоростная схема пузырьковой жидкости, учитывающая основную особенность такой среды – радиальную инерцию и вязкость жидкости [3]. В большинстве моделей, реализуемых в рамках континуального подхода, несущая среда рассматривается как идеальная, а вязкость учитывается лишь в процессах взаимодействия между несущей средой (жидкостью) и невесомыми включениями (газовыми пузырями). В [4] дано развитие теоретической модели в рамках континуального подхода [3], описывающей динамику акустических волн в полидисперсной вязкоэластичной пузырьковой среде с учетом межфазного теплообмена. Целью настоящей работы является теоретическое описание экспериментальных результатов [2], с использованием разработанной континуальной модели вязкоэластичной пузырьковой среды [4].

В рамках допущений континуального подхода [3], в системе координат, связанной с невозмущенной средой, записывается линеаризованная система уравнений движения вязкоэластичной пузырьковой среды. Из условия существования у этой системы уравнений нетривиального решения в виде плоских прогрессивных волн для возмущений параметров пузырьковой среды $\psi' = A_\psi \exp[i(K_* x - \omega t)]$ ($\psi = v, p, n \ldots$, A_ψ – амплитуда возмущение параметра) получается следующая зависимость комплексного волнового числа K_* от частоты возмущений ω [4]:

$$\left(\frac{K_*}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{C_f^2} + \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{4\pi\alpha_{l0} Q \rho_{l0} R N(R)}{3\gamma_g p_0 + (4G_l - \omega^2 \rho_{l0}^{\circ} R^2 - i4\mu_l) S} dR,$$

$$C_f = C_l / \alpha_{l0},\ S = \frac{Q}{1 - i\omega t_A},\ Q = 1 + 3(\gamma_g - 1)(y \cdot \coth(y) - 1) / y^2,$$

$$t_a = R / (C_l(\alpha_{g0})^{\beta}),\ y = \sqrt{-i\omega R_0^2 / \kappa},\ \beta = \frac{1}{6}.$$

Здесь: $K_* = K + iK_{**}$ – комплексное волновое число (K_{**} – линейный коэффициент затухания, фазовая скорость определяется как $C_p = \omega / K$), C_l – скорость звука в несущей жидкости, ρ°, ρ – истинная и средняя плотности, γ_g – показатель адиабаты газа, κ_g – коэффициент температуропроводности газа в пузырьках, α – объемное содержание, $N(R)$ – функция распределения пузырьков газа по размерам, R – радиус пузырька, G_l – модуль сдвига и μ_l – динамическая вязкость жидкости.

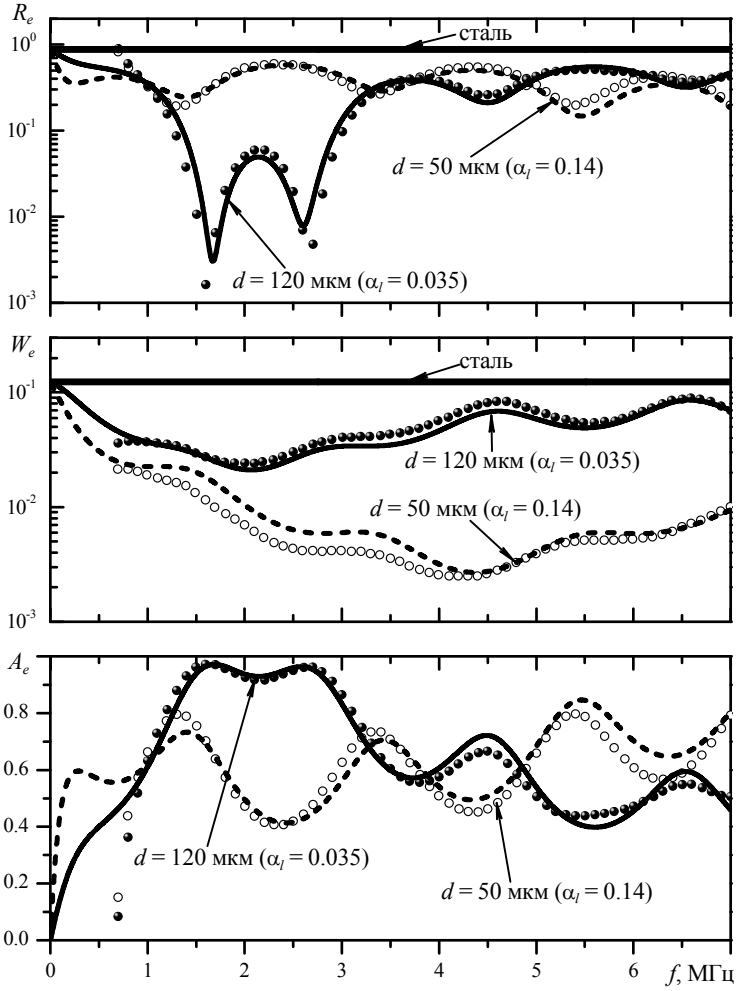


Рис. 1. Энергетические коэффициенты отражения, прохождения и поглощения в сравнении с экспериментом [2] для двух вариантов распределения пузырьков (d – расстояние между пузырьками по данным [2]).

В работе [2] представлены результаты экспериментальных измерений для частотных зависимостей энергетических коэффициентов отражения, прохождения и поглощения акустических волн при их взаимодействии со стальной пластиной, покрытой метаэкраном – тонким слоем (толщиной $D = 230$ мкм) упругой несущей среды с внедренными в нее воздушными пузырьками. В качестве несущей среды использовался

полидиметилсилоксан (PDMS RTV-615) – материал из силиконового каучука с добавлением отвердителей. Для определения коэффициентов отражения, прохождения и поглощения рассматривается следующая проблема: на слой толщиной D, заполненном средой 2 (пузырьковая среда), плоская монохроматическая волна вида $\sim\exp\left[i\left(K_3 x-\omega t\right)\right]$ падает из среды 3. Согласно [5], в результате появляется волна $\sim R\exp\left[i\left(K_3 x-\omega t\right)\right]$, отраженная в среду 3, и волна $\sim W\exp\left[i\left(K_1 x-\omega t\right)\right]$, переданная в среду 1. Здесь K_j – волновое число j-й среды ($K_2 = K_*$), R, W – коэффициенты отражения и прохождения волны [5], которые определяются импедансами Z_j ($Z_j = \rho_j^{\circ} C_j$) двух полубесконечных сред 1 и 3 и слоя 2.

Рис. 1 позволяет сравнить результаты расчетов по предложенной модели с использованием полученного дисперсионного соотношения (сплошные и штриховые линии) с результатами эксперимента [2] (точки). Выполнены два варианта расчетов, отличающихся расстоянием между пузырьками, а значит и их объемным содержанием ($d = 50$ мкм, $\alpha_l = 0.14$ и $d = 120$ мкм, $\alpha_l = 0.035$). Интересно, что максимальное поглощение энергии акустических волн достигается не для наибольшего объемного содержания пузырьков. Важным для данной задачи является взаимосвязанность основных параметров слоистой структуры – толщины экранирующего пузырькового слоя, физических свойств несущей среды этого слоя, размеров пузырьков и их объемного содержания. Сравнение расчетов по развитой модели вязкоэластичной пузырьковой среды, основанной на континуальном подходе с данными экспериментов, показало достоверность расчетов по развитой модели при описании современных экспериментальных данных. При этом предложенная модель не требовала дополнительной настройки при описании эксперимента.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследование выполнено при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН №20: «Новые вызовы климатической системы Земли».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bretagne A., Tourin A., Leroy V.* Enhanced and reduced transmission of acoustic waves with bubble meta-screens // Applied Physics Letters. 2011. V. 99. N. 22. 221906.
2. Leroy V., Strybulevych A., Lanoy M., Lemoult F., Tourin A., Page J.H. Superabsorption of acoustic waves with bubble metascreens // Physical Review B. 2015. V. 91. 020301(R).
3. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
4. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А.* Акустические волны в вязкоупругих пузырьковых средах // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. № 1. С.150 – 153.
5. *Бреховских Л.М.*, *Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 412 с.

—— ♦ ♦ ♦ ——

О ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА, ВЫЗВАННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А.А. Очиров[1], *Д.Ф. Белоножко*[2]
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
e-mail: otchirov@mail.ru [1], belonozhko@mail.ru [2]

Начало истории изучения влияния плёнки поверхностно-активного вещества (ПАВ) на распространение волн вдоль поверхности жидкости теряется в глубине веков. Если же говорить о теории этого явления, то ее основы были заложены в середине прошлого века в работах нашего соотечественника В.Г. Левича [1]. Наиболее часто цитируемые на настоящий момент результаты по теоретическому и экспериментальному исследованию этого явления получены в 60–70-х годах прошлого столетия [2 – 3]. Все эти классические результаты опираются на линейную теорию волн малой амплитуды. Интересно, что даже в этом приближении динамика волнового движения поверхности жидкости, покрытой пленкой ПАВ, оказывается весьма неординарной. На поверхности реализуются два типа волновых движений: капиллярно-гравитационные волны (они реализуются как с пленкой ПАВ, так и без нее) и сильно затухающие со временем волны Марангони (волны, обусловленные сжатиями и растяжениями упругой пленки ПАВ). В зависимости от концентрации ПАВ, описанные типы волновых движений определенным образом влияют друг на друга. В частности, имеется концентрация ПАВ, при которой частоты обоих типов движений сравниваются, а декремент затухания капиллярно-гравитационных волн достигает максимума [2]. В работе [4] был исследован характер перераспределения ПАВ на поверхности возмущенной волновым движением вязкой жидкости в зависимости от степени упругости этой пленки. В настоящей работе детализируются выводы работы [4] и рассматривается влияние поверхностного электрического заряда на характер перераспределения ПАВ.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим идеально проводящую вязкую жидкость, на горизонтальную поверхность которой нанесена пленка ПАВ с равновесной концентрацией Γ_0 и поверхностный электрический заряд с равновесной поверхностной плотностью κ_0. Значение поверхностной плотности электрического заряда докритическое в смысле реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля (апериодической неустойчивости по отношению к избытку электрического заряда). Пусть жидкость обладает плотностью ρ, кинематической вязкостью ν и занимает в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ полупространство $z<0$. Таким образом, ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести $\vec{g}$, а горизонтальная плоскость Oxy расположена вдоль равновесной поверхности жидкости. Будем считать, что вдоль поверхности жидкости в направлении оси Ox распространяется периодическая бегущая волна, вызывающая локальные изменения концентрации ПАВ $\Gamma=\Gamma(x,t)$, которые, в свою очередь, будут приводить к локальным изменениям коэффициента поверхностного натяжения $\gamma=\gamma(\Gamma)$. В результате на поверхности формируется распределение касательных напряжений, заметно влияющих на динамику волнового движения. Для простоты расчетов будем считать движение независящим от горизонтальной координаты y. В этом случае математическая формулировка задачи по определению поля скоростей, электрического потенциала и концентрации ПАВ запишется следующим образом:

$$z<\xi:\ \frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\vec{U}+\vec{g};\ \nabla\cdot\vec{U}=0 \tag{3}$$

$$z>\xi:\ \Delta\Phi=0 \tag{4}$$

$$z=\xi:\ \frac{\partial\xi}{\partial t}+u\frac{\partial\xi}{\partial x}=v;\ \Phi=0 \tag{5}$$

$$p-2\rho\nu\left(\vec{n}\cdot\left(\vec{n}\cdot\nabla\right)\vec{U}\right)+\frac{\left(\nabla\Phi\right)^2}{8\pi}=-\frac{\gamma}{\left(1+\left(\partial_x\xi\right)^2\right)^{3/2}}\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{6}$$

$$-\rho\nu\left(\ \left(\vec{\tau}\cdot\left(\vec{n}\cdot\nabla\right)\vec{U}\right)+\left(\vec{n}\cdot\left(\vec{\tau}\cdot\nabla\right)\vec{U}\right)\ \right)+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\partial_x\xi\right)^2}}\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\frac{1}{1+\left(\partial_x\xi\right)^2}\left(\frac{\partial\left(\Gamma\mathrm{u}\right)}{\partial x}+\left(\Gamma\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial z}+\frac{\partial\left(\mathrm{v}\Gamma\right)}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\Gamma\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial z}\right)=0 \tag{8}$$

$$z\to-\infty:\ \mathrm{u}\to 0;\ \mathrm{v}\to 0 \tag{9}$$

$$\vec{n}=\left(-\frac{\partial\xi}{\partial x}\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_z}\right)\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2};\ \vec{\tau}=\left(\overrightarrow{e_x}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\overrightarrow{e_z}\right)\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2}$$

Здесь $u\equiv u(t,x,z)$ и $v\equiv v(t,x,z)$ – компоненты поля скоростей $\vec{U}\equiv\vec{U}(t,x,z)=u\overrightarrow{e_x}+v\overrightarrow{e_z}$ в жидкости; $\overrightarrow{e_x}$ и $\overrightarrow{e_z}$ – орты осей Ox и Oz; $\xi\equiv\xi(t,x)$ – обусловленное волновым движением отклонение поверхности жидкости от равновесного состояния $z=0$; $p\equiv p(t,x,z)$ – давление внутри жидкости; Φ – электрический потенциал над поверхностью жидкости; $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – соответственно орты нормали и касательной к искаженной волновым движением поверхности жидкости.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Задача (1) – (7) решалась методом разложения по малому параметру, имеющему смысл амплитуды волнового движения. Анализ задачи первого порядка малости по амплитуде волны показывает, что на поверхности вязкой жидкости, покрытой плёнкой ПАВ, существует два типа волновых движений: капиллярно-гравитационные волны и волны Марангони. Последние связаны с распространением сжатия и растяжений вдоль плёнки ПАВ. Для каждой длины волны существует такое значение упругости плёнки ПАВ, при котором совпадают круговые частоты разнотипных волновых движений (Марангони и капиллярно-гравитационного). Примечательно, что именно при этом характерном значении упругости достигается максимальный декремент затухания капиллярно-гравитационных волн (декременты затухания волн Марангони существенно выше декрементов затухания капиллярно-гравитационных волн).

В результате решения задачи (1) – (7) были получены несколько громоздкие, но вполне пригодные для расчетов аналитические выражения, позволяющие рассчитать смещение максимумов концентрации ПАВ по отношению к положению максимумов отклонения поверхности от равновесного положения. Выяснилось, что характер перераспределения ПАВ существенно зависит от упругости (концентрации) плёнки ПАВ. При малых значениях упругости плёнки вещество ПАВ в основном оказывается сконцентрировано вблизи горбов волнового движения. С увеличением упругости вещество перемещается вдоль склона волны, следующего за горбом и при достижении упругостью плёнки характерного значения (при котором сравниваются круговые частоты волн

Марангони и капиллярно-гравитационных волн и максимален декремент затухания капиллярно-гравитационного движения) вещество оказывается сконцентрировано вблизи середины склона волны. Дальнейшее увеличение упругости (концентрации) плёнки ПАВ смещает максимум концентрации ближе ко впадине волны. Влияние поверхностного электрического заряда характеризуется следующим образом: увеличение модуля поверхностной плотности приводит к уменьшению упругости плёнки ПАВ.

Таким образом, положение максимумов концентрации позволяет судить об эффективности демпфирования капиллярно-гравитационного волнового движения плёнкой ПАВ. В случае, если максимум концентрации ПАВ располагается вблизи горба волнового движения, капиллярно-гравитационные волны гасятся слабо и усилить эффект демпфирования волн можно путем увеличения концентрации ПАВ. Если максимум концентрации ПАВ находится вблизи середины гребня, следующего за горбом волны, это означает, что для данного типа ПАВ достигнут максимальный эффект гашения капиллярно-гравитационных волн. В этом случае, как уменьшение, так и увеличение концентрации ПАВ приведет к уменьшению декремента затухания капиллярно-гравитационной волны. Усиление эффекта возможно только за счет изменения используемого ПАВ на другое. Расположение максимума концентрации вблизи впадины волны говорит о том, что можно усилить эффект гашения волн, уменьшив концентрацию ПАВ. Расчеты показали, что увеличение поверхностной плотности электрического заряда корректирует все выражения в сторону уменьшения степени выраженности всех вышеперечисленных эффектов.

ВЫВОДЫ

Выявлена взаимосвязь между положением максимума концентрации плёнки ПАВ и эффективностью гашения капиллярно-гравитационных волн. Показано, что поверхностный электрический заряд ослабляет влияние ПАВ на динамику волнового движения поверхности. Результаты могут быть использованы при мониторинге степени влияния ПАВ на волновое движение, распространяющееся по поверхности жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИФМЛ, 1959.
2. *Lucassen J., Hansen R. S.* Damping of waves on monolayer-covered surfaces: I. Systems with negligible surface dilational viscosity // J. Colloid and Interface Sci. 1966. V. 22. № 1. P. 32–44.
3. *Lucassen J., Hansen R. S.* Damping of waves on monolayer-covered surfaces: II. Influence of bulk-to-surface diffusional interchange on ripple characteristics //J. of Colloid and Interface Science. – 1967. – Т. 23. – №. 3. – С. 319–328.
4. *Белоножко Д. Ф., Очиров А. А.* О взаимном влиянии волнового движения и характера распределения поверхностно-активного вещества //Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2018. – Т. 82. – №. 1. – С. 47–51.

—— ♦ ♦ ♦ ——

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВОЙНОЙ ДИФФУЗИИ: НОВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В.О. Ощепков, Е.А. Мошева, А.И. Мизев
Институт механики сплошных сред УрО РАН
e-mail: oshchepkov.v@icmm.ru

В работе исследуется структура и эволюция конвективного течения, которое формируется в системе двух смешивающихся жидкостей вследствие неустойчивости двойной диффузии. Впервые данный тип неустойчивости был обнаружен в океанологии, где ввиду разной скорости диффузии тепла и массы, возникало конвективное движение в виде «соляных пальцев». В зависимости от направления градиентов тепла и солености различают конвекцию двойной диффузии (DD) и конвекцию двойного слоя (DLC). Теоретическое описание данного явления впервые предложил Stern M.E. в работе [1]. Экспериментальные исследования данной неустойчивости изначально проводились в системе, состоящей из стратифицированного соленого раствора, в условиях постоянного градиента температуры [2–4]. Но ввиду сложности его поддержания позднее была предложена другая модельная ситуация, в которой тепло было заменено вторым растворенным веществом. Таким образом, большинство лабораторных исследований были проведены в двухслойной системе, компоненты которой изначально были равномерно распределены в разных слоях и диффундировали навстречу друг другу, тогда как в изначальной постановке задачи диффузия компонент была сонаправлена.

В настоящей работе представлены результаты исследований конвективной неустойчивости в постановке, ранее не рассмотренной ни экспериментально, ни теоретически. Оба компонента системы растворены в одном из слоев устойчиво стратифицированной по плотности двухслойной системы и сонаправленно диффундируют во второй слой, состоящий из чистого растворителя. Важно отметить, что в такой постановке формирование неустойчивости возможно в случае, когда коэффициенты концентрационного расширения растворенных компонент отличаются по знаку (то есть компоненты вносят разный по знаку вклад в изменение плотности раствора при изменении их концентрации).

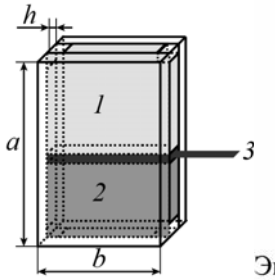


Рис. 1(а). Ячейка Хеле-Шоу

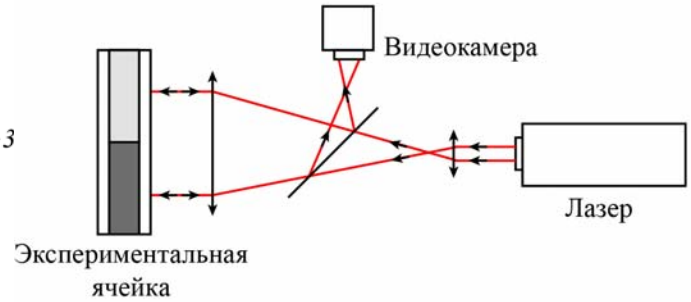


Рис. 1(б). Схема интерферометра Физо

Эксперименты выполнены в ячейке Хеле-Шоу, схема которой представлена на Рис. 1(а). Ячейка образована двумя плоскопараллельными стёклами с полупрозрачным зеркальным покрытием, разделёнными вставками, задающими внутренние размеры полости 10.0×5.0×0.12 см^3 (a – высота, b – ширина, h – толщина). В боковых стенках ячейки сделаны горизонтальные пазы, в которые вставляется свободно движущаяся заслонка, разграничивающая слои системы до начала эксперимента. Ввиду малого значения коэффициента диффузии используемых веществ ($\approx 10^{-5}$) линии концентрации оказываются «вмороженными» в объём среды, что позволяет визуализировать возникаю-

щее конвективное течение и качественно исследовать его структуру с помощью интерферометра Физо, схема которого приведена на Рис. 1(б).

В роли рабочих жидкостей были использованы водные растворы одноатомных спиртов и ацетона, коэффициент концентрационного расширения которых отрицательный $\beta < 0$. И водные растворы ряда веществ, KOH, $CuSO_4$, сахар, $NaNO_3$, коэффициент концентрационного расширения которых положительный $\beta > 0$.

В качестве управляющих параметров задачи были выбраны: соотношение коэффициентов диффузии:

$$\delta = D_л / D_m,$$

где $D_л$ – коэффициент диффузии компонента с $\beta < 0$; D_m – коэффициент диффузии вещества с $\beta>0$. И соотношение приращений плотностей слоёв:

$$R_\rho = \Delta\rho_л / \Delta\rho_m,$$

где $\Delta\rho_л = \rho_{воды} - \rho_л$, $\Delta\rho_m = |\rho_{воды} - \rho_m|$, $\rho_л$ – плотность раствора вещества с $\beta < 0$; ρ_m – плотность раствора вещества с $\beta > 0$. Таким образом, устойчивость двухслойной системы была исследована в следующих возможных ситуациях:

1) $R_\rho > 1$ и $\delta > 1$ – оба компонента растворены в верхнем слое, легкий диффундирует быстрее тяжелого;

2) $R_\rho > 1$ и $\delta < 1$ – оба компонента растворены в верхнем слое, тяжёлый диффундирует быстрее легкого;

3) $R_\rho < 1$ и $\delta > 1$ – оба компонента растворены в нижнем слое, легкий диффундирует быстрее тяжелого;

4) $R_\rho < 1$ и $\delta < 1$ – оба компонента растворены в нижнем слое, тяжёлый компонент диффундирует быстрее легкого.

Неустойчивость двойной диффузии была обнаружена для каждой ситуации. Характерная структура возникающего конвективного движения представлена на Рис. 2.

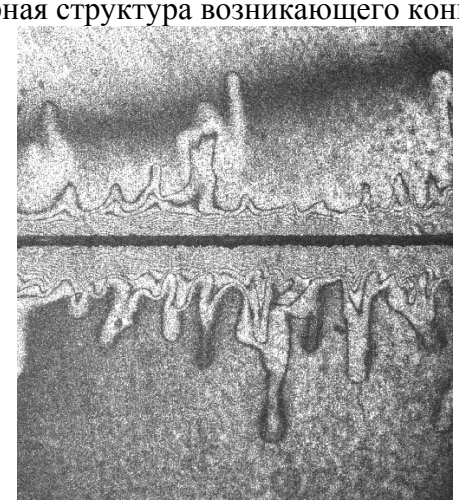


Рис. 2(а). Конвекция двойной диффузии

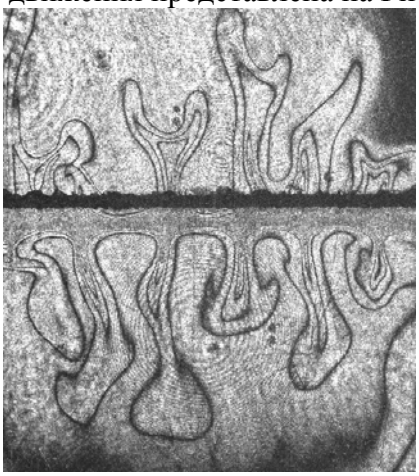


Рис. 2(б). Конвекции двойного слоя

Обнаружено, что конвекция двойной диффузии (Рис. 2(а) развивается при $R_\rho > 1$ и $\delta > 1$ (случай 1), $R_\rho < 1$ и $\delta < 1$ (случай 4). Конвекция двойного слоя (Рис. 2(б) развивается при $R_\rho < 1$ и $\delta > 1$ (случай 3), $R_\rho > 1$ и $\delta < 1$ (случай 2). Все результаты экспериментов можно представить в виде карты устойчивости в координатах δ–R_ρ (Рис. 3). На карте выделены области параметров, при которых наблюдается конвекция двойной диффузии или конвекция двойного слоя. Показано, что интенсивность возникающего конвективного течения максимальна при $R_\rho \to 1$. По мере изменения этого параметра в бо́льшую или меньшую сторону, что физически означает рост стабилизующего влияния устойчиво стратифицированного компонента, интенсивность конвекции уменьшается. В конечном счете, в случае конвекции двойной диффузии, это приводит к тому, что не-

устойчивость вообще не формируется. Область устойчивости на карте заштрихована. Заметим, что граница устойчивости описывается законом $\delta=(R_\rho)^{2/3}$, которая была предсказана ранее для системы «соль–тепло» [5].

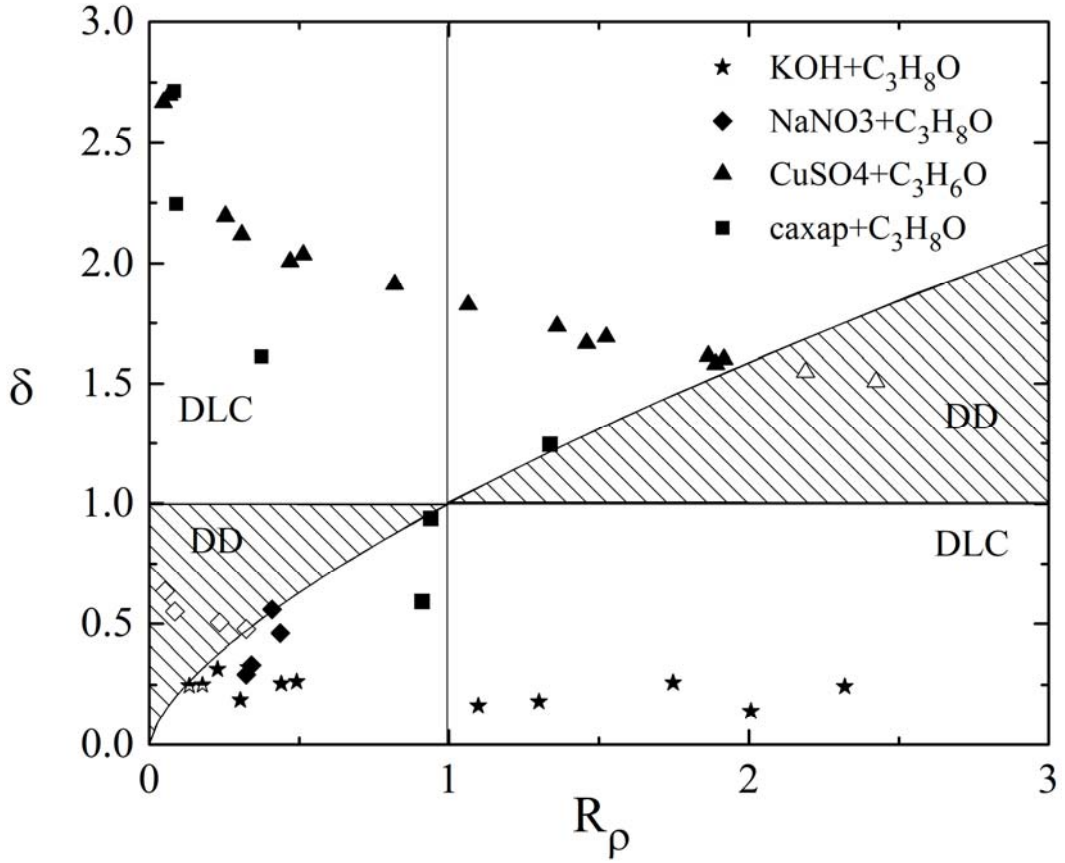


Рис. 3. Карта устойчивости.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 19-01-00621.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stern, M. E.* The “salt-fountain” and thermohaline convection //Tellus. – 1960. – Т. 12. – №. 2. – С. 172–175.
2. *Turner, J. S., Stommel H.* A new case of convection in the presence of combined vertical salinity and temperature gradients //Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1964. – Т. 52. – №. 1. – С. 49.
3. *Turner, J. S.* Double-diffusive phenomena //Annual review of fluid mechanics. – 1974. – Т. 6. – №. 1. – С. 37–54.
4. *Turner, J. S.* The behavior of a stable salinity gradient heated from below //J. of Fluid Mechanics. – 1968. – Т. 33. – №. 1. – С. 183–200.
5. *Huppert H. E., Manins P. C.* Limiting conditions for salt-fingering at an interface //Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts. – Elsevier, 1973. – Т. 20. – №. 4. – С. 315–323.

—— ♦♦♦ ——

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОЙ СРЕДЕ

С.И. Перегудин, Э.С. Перегудина, С.Е. Холодова
Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: s.peregudin@spbu.ru
Санкт-Петербургский горный университет, e-mail: ehllina-peregudina@yandex.ru
Санкт-Петербургский университет информационных технологий, механики и оптики, e-mail: kholodovase@yandex.ru

В представленном исследовании проводится построение математической модели динамики пространственных крупномасштабных квазигеострофических движений во вращающемся слое идеальной несжимаемой электропроводящей жидкости переменной глубины при произвольных значениях магнитного числа Рейнольдса с учетом эффектов диффузии магнитного поля, что является логическим продолжением результатов, изложенных в [1, 2], где проводящая среда характеризуется большими значениями магнитного числа Рейнольдса.

Полученные результаты могут быть использованы в астрофизике и геофизике, например, при изучении процессов, происходящих в недрах звезд и жидком ядре Земли, и, кроме того, могут быть применены при определении магнитогидродинамических параметров морской среды, при оценке характеристик источника волновых возмущений по исходным данным об электромагнитном поле, индуцированном соответствующим гидродинамическим волнением, содержащим важную информацию о геофизических характеристиках шельфовой зоны, что, несомненно, представляет собой важный аспект знаний для морских геологоразведочных изысканий и исследований, актуальных в связи с добычей энергоресурсов.

В общем случае магнитные силовые линии частично переносятся потоком жидкости и частично диффундируют через нее. Этот общий случай и рассматривается в представленном исследовании, то есть, задача решается при произвольных значениях магнитного числа Рейнольдса, причем построение математической модели производится на основе полной системы уравнений магнитной гидродинамики, при этом учитываются инерционные силы в уравнениях движения, которыми в известных исследованиях с применением теории быстрого вращения пренебрегается; в предельном случае бесконечно больших значений магнитного числа Рейнольдса полученные результаты могут быть приведены к известным и полученным ранее.

С помощью введения вспомогательных операторов и функций исследуемая система уравнений в частных производных может быть приведена к одному скалярному уравнению в частных производных, для которого возможно построение точного аналитического решения, как решения задачи о малых возмущениях. Доказывается, что в случае воздействия внешнего магнитного поля, параллельного оси вращения жидкого слоя с конечными значениями магнитного числа Рейнольдса, имеет место процесс затухания магнитного поля.

При достаточно больших значениях магнитного числа Рейнольдса доказано существование периодического процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холодова С.Е., Перегудин С.И.* Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. СПб. Изд–во СПбГУ. 2009. 455 с.
2. *Холодова С.Е.* Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 5. С. 882–898.

—— ♦♦♦ ——

ОБ ОБРУШЕНИИ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

А.Г. Петров
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: petrovipmech@gmail.com
Н.Д. Байков
НИИСИ РАН
e-mail: baikov_nd@rambler.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоская задача численного моделирования движения и обрушения периодических капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости конечной глубины, а также образования на ней всплесков. Жидкость предполагается несжимаемой, а ее движение потенциальным. Пусть уровень дна задан уравнением $y = -h$, где h обозначает глубину жидкости, а период волны вдоль горизонтальной оси равен 2π. В силу периодичности при решении задачи достаточно ограничиться рассмотрением области S, заключенной между дном, свободной поверхностью L, а также двумя вертикальными прямыми $x = 0$ и $x = 2\pi$ (рис. 1).

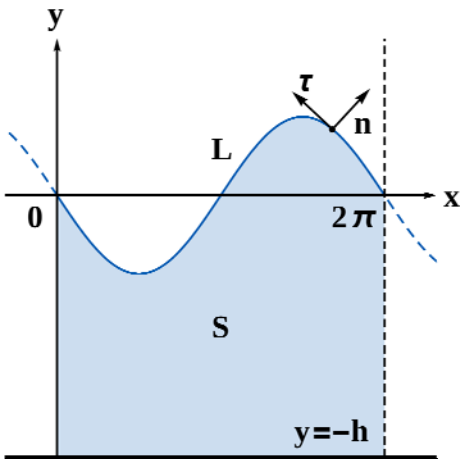


Рис. 1. Форма области

При описании потенциальных течений удобно пользоваться методом граничных элементов, который позволяет свести вычисления к одномерной границе области, понизив тем самым размерность задачи [1]. Деформация свободной границы в этом случае может быть найдена с помощью нормальной компоненты скорости, которая вычисляется как $V = \partial\Psi / \partial s$, где Ψ – это функция тока. Для вычисления функции тока используется интегральное уравнение

$$\pi\Psi(M,t) = \left[A\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial s} \right) + B\Psi \right](M,t)$$

В приведенном уравнении Φ обозначает потенциал течения, а A и B – интегральные операторы, действие которых на интегрируемую функцию F в точке границы $M \in L$ задается по формулам

$$[AF](M) = -\int_L G(M,M')F(M')ds',$$

$$[BF](M)=\int_L \frac{\partial G}{\partial n'}(M,M')\big(F(M')-F(M)\big)ds'.$$

Здесь G обозначает функцию Грина, которая вычисляется по следующей формуле:

$$G(M,M')=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{2\big(\cosh(y'-y)-\cos(x'-x)\big)}{1-2E\cos(x'-x)+E^2}\right],\quad E=\exp\left(-y-y'-2h\right)$$

Основная трудность при работе с интегральным уравнением для функции тока связана с тем, что интегральный оператор A имеет логарифмическую особенность. Для ее учета в численном алгоритме предлагается сводить вычисления к использованию специальных квадратурных формул для периодических функций [2]:

$$\int_0^l F(x)\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{l}(x-x_i)\right)\right|dx\approx\frac{l}{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha\big(|i-j|\big)F(x_j),\quad x_i=\frac{li}{N},$$

$$\alpha(m)=-\left(\ln 2+\frac{(-1)^m}{N}+\sum_{k=1}^{M-1}\frac{1}{k}\cos\frac{2\pi km}{N}\right),\quad M=N/2,$$

$$m=0,1,2,\ldots,N.$$

Главной особенностью приведенных квадратурных является тот факт, что для гладких периодических функций порядок аппроксимации растет экспоненциально с увеличением количества точек сетки N. При этом сохраняется устойчивость квадратурной формулы.

Изменение потенциала на свободной границе позволяет контролировать интеграл Коши–Лагранжа. При этом давление p на свободной границе полагается равным нулю.

Формально этого минимального набора уравнений достаточно для построения численного алгоритма. Стоит также отметить, что касательная скорость точек сетки на свободной границе не влияет на форму этой границы, что позволяет задавать в численном алгоритме касательные скорости точек сетки U_i независимо от скоростей жидкости. Это используется для повышения устойчивости алгоритма: за счет использования специальной техники удается контролировать распределение точек сетки на свободной границе и повышать их плотность на участках с большой кривизной.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Примеры численных расчетов с помощью предлагаемого численного алгоритма изображены на рис. 2–4. Рис. 2 соответствует расчету обрушения прогрессивной волны при скачкообразном изменении глубины [3]. На рис. 3 изображен численный расчет задачи об обрушении волны, изучавшейся в работах Лонге–Хиггинса [4].

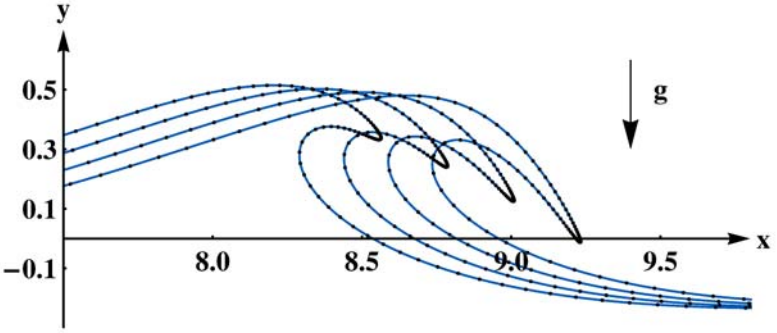


Рис. 2. Обрушение волны при скачкообразном изменении глубины

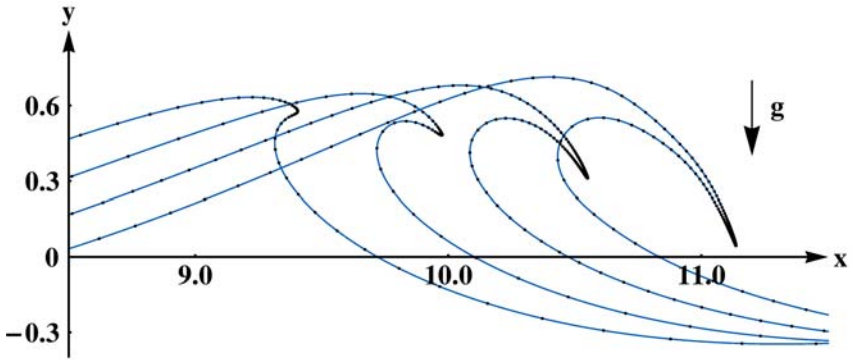


Рис. 3. Обрушение волны под действием внешнего давления

Рис. 4. Двумерный аналог опыта Покровского

В качестве еще одного применения численного алгоритма можно привести расчет формы кумулятивных струй, которые образуются на свободной поверхности жидкости при всплесках. Примером такой задачи является опыт профессора Покровского [5]. Пример расчета для двумерного аналога опыта Покровского изображен на рис. 4.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации АААА-А17-117021310382-5)

ЛИТЕРАТУРА

1. Baikov N.D., Petrov A.G. Numerical simulation of unsteady capillary-gravity waves // Doklady Physics. 2018. V. 63. № 10. P. 430–434.
2. *Петров А.Г.* Численные схемы без насыщения для периодических функций // ДАН. 2018. Т. 481. № 4. С. 362–366.
3. *Peregrine D.H.* Breaking waves on beaches // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 149–178.
4. *Longuet-Higgins M.S., Cokelet E.D.* The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation // Proc. R. Soc. Lond. A. 1976. V. 350. P. 1–26.

5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука. 1977. С. 407.

—— ♦ ♦ ♦ ——

РЕГИСТРАЦИЯ КАПЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ И СОПУТСТВУЮЩИХ ЗВУКОВЫХ ПАКЕТОВ

А.А. Пискотин
Научно исследовательский ядерный университет "МИФИ"
e-mail: aapiskotin@gmail.com

Исследования быстро меняющейся структуры течений, возникающих в неподвижной жидкости после погружения свободно падающей капли и сопутствующих акустических пакетов, которые начались еще в начале прошлого века, заметно активизировались в последние годы, что объясняется растущим числом практически важных приложений [1]. Совершенствование техники регистрации и обработки данных позволяет выделить и проанализировать новые важные детали структур даже в хорошо изученных компонентах течений – растущем всплеске [2] и первичном импульсе акустического сигнала [3]. Цель данной работы – экспериментальное изучение условий и устойчивости процесса генерации акустических пакетов в формирующихся течениях.

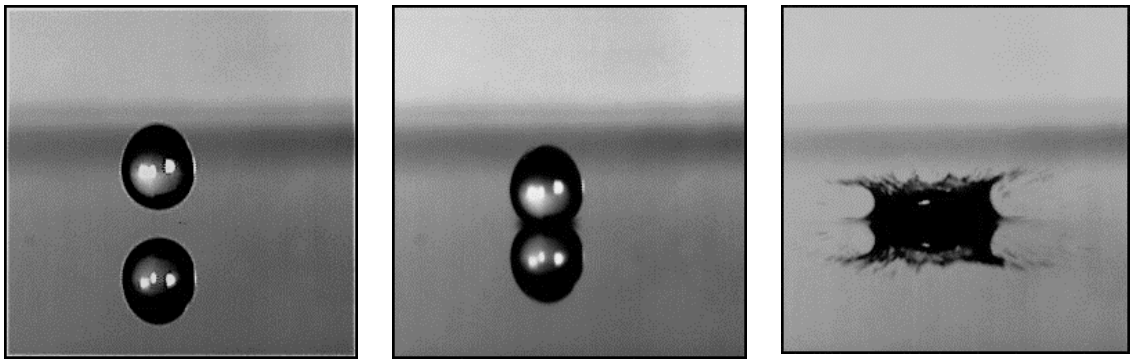
Исследования быстро меняющейся структуры течений, возникающих в неподвижной жидкости после погружения свободно падающей капли и сопутствующих акустических пакетов, которые начались еще в начале прошлого века, заметно активизировались в последние годы, что объясняется растущим числом практически важных приложений [1]. Совершенствование техники регистрации и обработки данных позволяет выделить и проанализировать новые важные детали структур даже в хорошо изученных компонентах течений –растущем всплеске [2] и первичном импульсе акустического сигнала [3]. Цель данной работы – экспериментальное изучение условий и устойчивости процесса генерации акустических пакетов в формирующихся течениях.

Опыты выполнены на стенде ЭСП, входящем в комплекс Уникальных исследовательских установок «ГФК ИПМех РАН» [3]. Картина возмущений свободной поверхности освещалась двумя световыми головками макроосветителя KL 2500 и регистрировалась высокоскоростной камерой Optronis CR3000x2(размеры матрицы и пикселя – 13.57x13.68 мм и 8 мкм, максимальный размер изображения 3 Мпкс, предельная скорость съемки 100 000 к/с). Акустические сигналы регистрировались гидрофоном ГИ-51(полоса 0.002-100 кГц) Синхронизация данных оптических и контактных измерений выполнялась при помощи схемы IPM01012 и специализированного программного обеспечения.

Изображение возмущений свободной поверхности в момент падения капли, представленной на рис. 1.

Подлетающая капля, имеющая форму овоида, с главной осью, направленной вертикально, представлена на рис. 1.а. Из области первичного контакта настильно вылетают тонкие струйки (рис. 1.б). В дальнейшем над поверхностью жидкости, с верхней кромки которой вылетает новая серия капель (рис. 1.в).

В синхронно зарегистрированных вариациях акустического давления, представленных на рис. 2. В момент контакта капли с жидкостью (рис 1.б) наблюдается высокочастотный импульс, который сменяется глубокой депрессией и новым подъемом, связанным с прохождением стенки венца над гидрофоном. После длительной паузы (порядка ~0.2 с) регистрируется акустический пакет с частотой заполнения. После затухания первого пакета образуется более интенсивный второй, существующий меньшее время.



а) t=0.0628 с *б) t=0.0631 с* *в) t=0.06388 с*

Рис. 1. Снимки с камеры в момент падения капли.

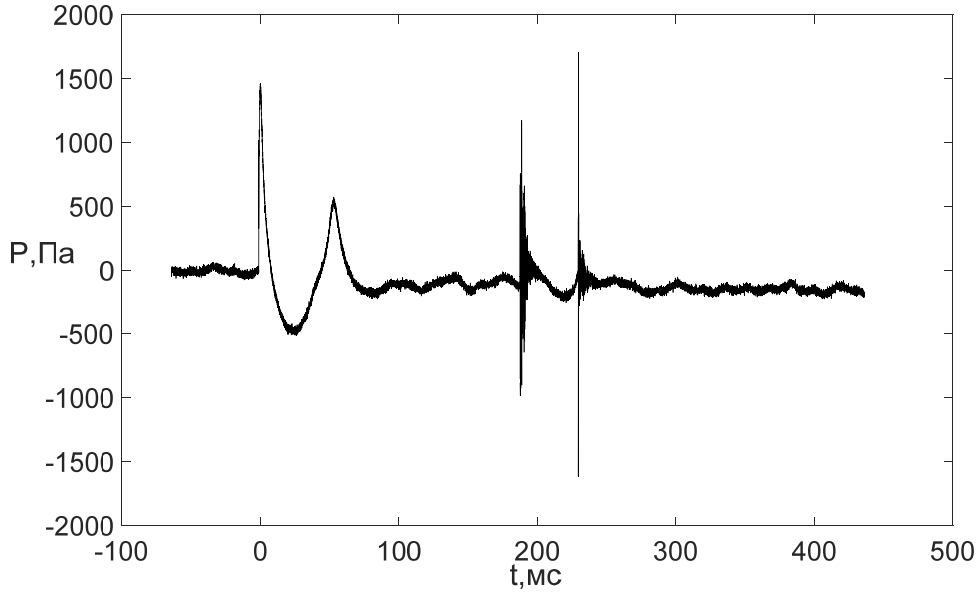


Рис. 2. Акустический сигнал, полученный в эксперименте

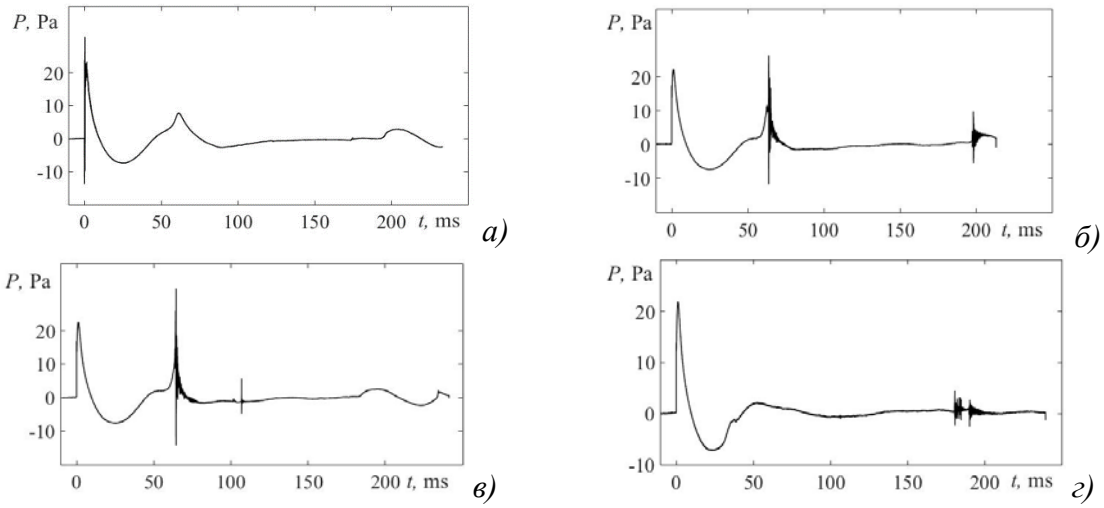


Рис. 3. Набор фонограмм, сопровождающих импакты капель (D = 0.5 см, U = 4 м/с) в глубокой воде

В наборе аудиограмм последовательных опытов при неизменных условиях, показанных на рис. 3, всегда представлен ударный импульс, образующийся при первичном контакте капли со свободной поверхностью. Низкочастотный звуковой пакет характеризуется большой изменчивостью и может включать два разделенных выраженных импульса (рис. 3.а), два близко следующий пакета (рис. 3.в), так и группу слабых импульсов с большой задержкой (рис. 3.г).

Изменчивость акустического пакета отражает сложность и нестационарность гидродинамических процессов, сопровождающихся излучением звука.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Опыты выполнены на стенде ЭСП УИУ «ГФК ИПМех РАН». Работы проведена при финансовой поддержке РНФ (проект 19-19-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. Prosperetti A.; Oguz H.N. The impact of drops on liquid surfaces and the underwater noise of rain. *Annual Review of Fluid Mechanics.* 1993. V. 25. P. 577-602.
2. Чашечкин Ю.Д. Визуализация тонкой структуры возмущений поверхности жидкости течениями, вызванными упавшей каплей // ПММ. 2019. Т. № 3. С. 393-403.
3. Прохоров В. Е. Влияние молекулярных эффектов на излучение звука при низкоскоростном столкновении капли с поверхностью воды // ЖЭТФ. 2018. Т. 153. Вып. 4. С. 584–589.
4. Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере («ГФК ИПМех РАН): http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#equip.

—— ♦♦♦ ——

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ДЕКРЕМЕНТА КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ С УПРУГИМ ПЛОСКИМ ДНИЩЕМ

А.А. Пожалостин, Д.А. Гончаров
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Предлагаемая Вашему вниманию работа представляет собой приближенное решение указанной краевой задачи при следующих допущениях:

1. Колебания жидкости считаются осесимметричными и малыми.
2. Упругое плоское днище считается идеальной плоской мембраной.
3. Жидкость полагается маловязкой., а ее вязкость пропорциональна первой степени скорости частиц жидкости, как это было принято в некоторых работах [1].

В связи с последним допущением на первом этапе решения задачи потенциал скорости Ф определяется для случая идеальной жидкости, а ее движение считается потенциальным.

При решении этой краевой задачи также использованы результаты [3, 4]. Частотное уравнение представляет собой выражение, левая часть которого есть мероморфная функция с бесконечным числом простых полюсов.

При построении логарифмического декремента колебаний упругого бака с жидко-

стью использован подход Кулона– Гельмгольца [1].

В дальнейшем учитывается только первый тон собственных колебаний системы. Применяя метод академика К.С. Колесникова [5] получим, используя найденный потенциал скоростей Ф механический аналог (МА) системы [5]. Уравнение движения системы принимает вид :

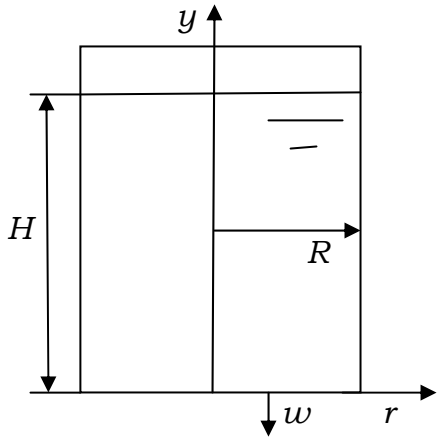


Рис. 1

Дифференциальное уравнение для МА – линейного осциллятора будет [7] :

$$m_1^0\ddot{s} + b\dot{s} + c_1^0 = 0 \qquad (1)$$

где $b = \mu m_1^0$, μ приведенный коэффициент демпфирования системы. Используя функцию Рэлея [1] получим

$$b = \int_0^R \mu\Phi_1(x=0)\omega_1 2\pi r\,dr$$

где Φ_1 – функция потенциала скорости [3], ω_1 – прогиб мембраны [3], m_1^0 и c_1^0 – приведенная масса и приведенная жесткость системы 1-го тона соответственно. Так как $2n = b/m_1^0$ коэффициент затухания, и он равен $n^2 = (2\pi/T_1)^2 - (2\pi/T_{1,э})^2$, то логарифмический декремент колебаний системы ϑ будет равен $\vartheta = nT_1$. В формуле для n $T_{1,э}$ – период колебаний бака с реальной вязкой жидкостью, определяется экспериментально, как например, [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Курс теоретической механики. под ред. К.С. Колесникова., ред.МГТУ 2017.-С 509.
2. Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофизические исследования.1969. № 3 (45) С.87–97.
3. Балабух Л.И. Некоторые точные решения задачи о колебаниях жидкости в упругих оболочках // Тр. V Всес. конф.по теории пластин и оболочек. М.: 1965.
4. Лейбензон Л.С. О натуральных колебаниях плотины, подпирающей реку Сб. тр. т1, М., изд. АН СССР, 1951.
5. Колесников К.С. Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде., м., изд. МВТУ, 1964.
6. Гончаров Д.А., Пожалостин А.А. Экспериментальный метод определе ния коэффициента демпфирования разделителя двухфазной жидкости баке // 5-я межд. школа ученых 2014 : Сб. трудов М.: 2014. С.139–142

7. Пожалостин А.А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде // Изв. вузов. Авиатехника. 1963.№3 С.25 32.

—— ♦ ♦ ♦ ——

КООРДИНАТНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ, УРАВНЕНИЯ РИМАНА, СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД СХЕМА ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ И КОРРЕКЦИЯ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ПРИ РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ БАРОКЛИННОЙ АТМОСФЕРЫ

Д.Я. Прессман
Гидрометцентр России
e-mail: pressman@mecom.ru

Представлены 1) конечно-разностная аппроксимация 3D системы нефильтрованных уравнений динамики идеальной атмосферы, основанная на сеточно-характеристическом методе (СХМ) и схеме переменных направлений, и 2) коррекция разностного решения с помощью интегральных законов сохранения массы, энергии и импульса. СХМ применен к уравнениям Римана, полученным после координатного расщепления уравнений исходной системы. Приведены примеры расчета потока, ограниченного сверху материальной поверхностью постоянного давления, движущегося над периодическим по горизонтальным координатам рельефом.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ОПИСАНИЕ НАБЛЮДАЕМЫХ СТАДИЙ ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

В.Г. Приймак
Институт физики атмосферы им. А.М.Обухова РАН
e-mail: vgpriymak@mail.ru

Проводится прямое численное моделирования когерентных структур в переходных течениях вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе. Течение в трубе является модельным для широкого круга сдвиговых течений с докритическим переходом к турбулентности. Математическая модель включает в себя уравнения Навье–Стокса, периодические граничные условия для скорости вдоль оси трубы, параллельные версии спектральных алгоритмов и программную модель CUDA. В расчетах используются массивно-параллельные сопроцессоры – GPU NVIDIA Tesla C2075 и K80.

В экспериментальных [1–3], численных [4–7], теоретических [8] и обзорных [8,9] работах (список неполон) установлено, что при числах Рейнольдса $1760 \le \mathrm{Re} \le 2700$, определенных по средней скорости U и диаметру трубы D, течение в трубе становится пространственно неоднородным с нерегулярным чередованием ламинарных участков и турбулентных пятен – клубов (puffs) и пробок (slugs). Клубы представляют собой локализованные области возмущений, которые сохраняют длину при перемещении вниз по потоку; пробки, как правило, возникают в процессе деления клубов при бльших Re и имеют резко выраженные границы.

В работе описываются долгоживущие турбулентные структуры – квазиравновесные клубы – в диапазоне $2000 \le \mathrm{Re} \le 2200$ с помощью нестационарных решений урав-

нений Навье–Стокса, которые интегрируются на очень больших интервалах времени вплоть до $8\times10^4\ \frac{D}{\overline{U}}$. Расчеты проведены как при постоянном расходе жидкости через поперечное сечение трубы, так и при фиксированном перепаде давления вдоль ее оси; наибольший период в осевом направлении составляет $240\pi R$, $R = D/2$. Значительные времена интегрирования позволяют описать свойства нестационарных решений уравнений Навье–Стокса, имеющих протяженный статистически стационарный этап развития.

Исследование продолжает работы [4,7] и ставит целью изучение деталей пространственно-временного поведения и внутренней структуры изолированных и взаимодействующих клубов. Показано, что при одном и том же Re, в зависимости от начальных условий, можно реализовать режимы течения с различным средним градиентом давления. Другими словами, при данном Re в области ламинарно-турбулентного перехода существуют различные равновесные долгоживущие нестационарные решения уравнений Навье–Стокса. Полученные численные решения имеют различное число статистически неразличимых турбулентных клубов на единицу длины трубы и заполняют промежуточную область между ламинарным и турбулентным режимами (рис. 1).

Турбулентный клуб представляет собой область возмущений ламинарного течения, которая движется вниз по потоку со скоростью U (или немного меньшей). Пространственно-временную структуру и характер движения клуба мы изучаем, используя объективный критерий определения границы между клубом и окружающим его ламинарным потоком. На рис.2 область клуба ограничена линиями уровня продольной компоненты скорости $\left|\frac{u-U_0}{U_0}\right| > 10^{-2}$, где $U_0(z) = u_{CL}\left(1-\left(z/R\right)^2\right), -R \le z \le R$ – локальная скорость течения Пуазейля; черным закрашена область клуба где $u > U_0$, темно серым – где $u < U_0$, светло серый цвет соответствует ламинарному течению.

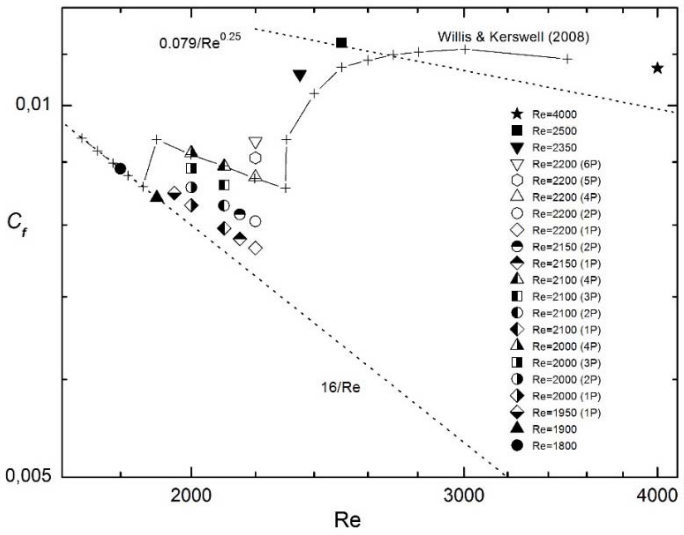


Рис. 1. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса. Верхняя и нижняя линии – закон сопротивления Блазиуса и ламинарный режим соответственно. Точки в диапазоне $1800 \le \mathrm{Re} \le 2500$ *отвечают долгоживущим численным решениям уравнений Навье–Стокса, описывающим статистически стационарные стадии когерентных структур. Цифры в скобках после значения* Re *указывают на число клубов в вычислительной области.*

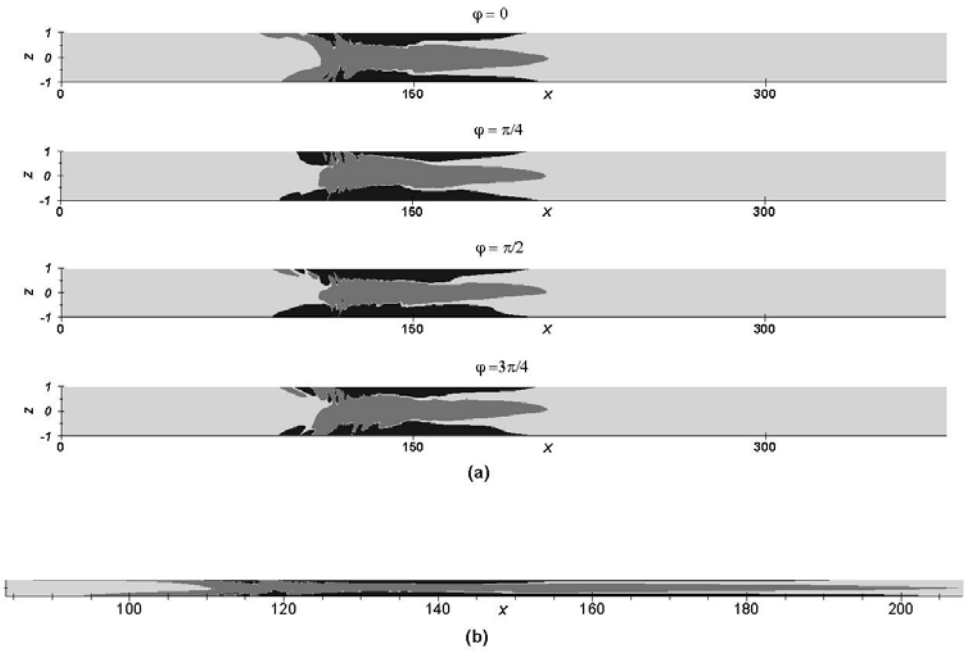


Рис. 2. (a) Линии уровня мгновенных значений продольной компоненты скорости в четырех осевых сечениях трубы, отвечающих различным азимутальным углам φ; расчет Re = 2000(1P)*; направление течения – слева направо. Показана полная длина* $120\pi R$ *вычислительной области с уменьшением масштаба в 10.5 раз по оси трубы. (b) Часть вычислительной области (фрагмент длиной* 12_4R *) демонстрирует истинное соотношение пространственных масштабов турбулентного клуба в радиальном и продольном направлениях.*

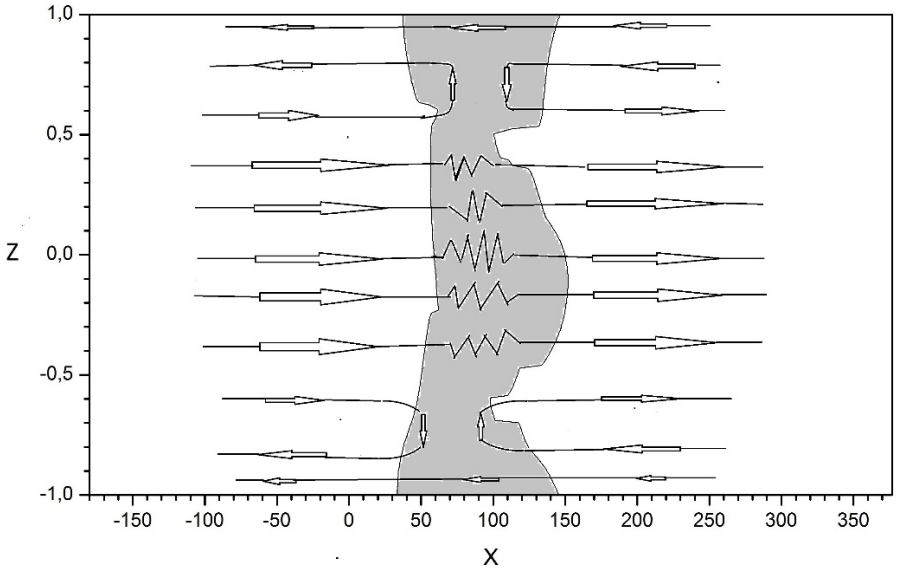


Рис. 3. Траектории частиц жидкости (схема) в системе отсчета, движущейся вниз по потоку со скоростью турбулентного клуба. Направление течения – слева направо; Re = 2000 *; область клуба закрашена серым.*

Задняя и передняя границы клуба хорошо идентифицируются с помощью указанного критерия, причем передний фронт имеет выраженный трехгорбый профиль (рис. 2). Исследование методом жидких маркеров потоков жидкости у границ клуба позво-

лили обнаружить характерные возвратные течения относительно его границ (см. рис. 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in parallel channels // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1883. V. 174. P. 935 – 982.
2. Nishi M., Unsal B., Durst F., Biswas G. Laminar-to-turbulent transition of pipe flows through puffs and slugs // J. Fluid Mech. 2008. V. 614. P. 425 – 446.
3. Mukund V., Hof B. The critical point of the transition to turbulence in pipe flow // J. Fluid Mech. 2018. V. 839. P. 76 – 94.
4. Priymak V.G., Miyazaki T. Direct numerical simulation of equilibrium spatially localized structures in pipe flow // Phys. Fluids. 2004. V. 16. P. 4221 – 4234.
5. Moxey D., Barkley D. Distinct large-scale turbulent-laminar states in transitional pipe flow // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2010. V. 107. P. 8091 – 8096.
6. Avila K., Moxey D., de Losar A., Avila M., Barkley D., Hof B. The onset of turbulence in pipe flow // Science. 2011. V. 333. P. 192 – 196.
7. Priymak V.G. Direct numerical simulation of quasi-equilibrium turbulent puffs in pipe flow // Phys. Fluids. 2018. V. 30. 064102.
8. Barkley D. Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe // J. Fluid Mech. 2016. V. 803. P1.
9. Manneville P. On the transition to turbulence of wall-bounded flows in general, and plane Couette flow in particular // European J. of Mechanics – B/Fluids. 2015. V. 49 (Part B). P. 345 – 362.
10. Willis P., Kerswell R.R. Coherent structures in localized and global pipe turbulence // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. 124501.

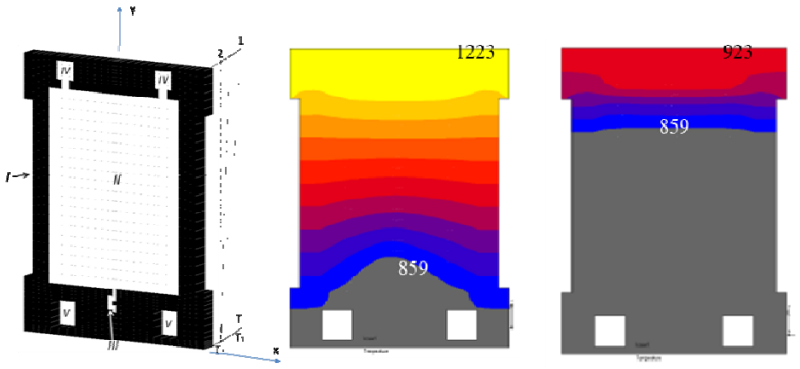
—— ♦ ♦ ♦ ——

ОСОБЕННОСТИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ КРИСТАЛЛОВ В ПАКЕТЕ ЯЧЕЕК ХЕЛЕ-ШОУ

А.И. Простомолотов, Н.А. Верезуб,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: prosto@ipmnet.ru

Задача состоит в исследование физико-химических процессов в новой модификации метода Бриджмена в виде процесса «кассетной» кристаллизации, используемого для выращивания из расплава термоэлектрического (ТЭ) поликристалла на основе теллурида висмута. Актуальность исследования связана с изучением и устранением основного недостатка процесса «кассетной» кристаллизации, которым является неустойчивость роста поликристалла. Она проявляется в виде дендритного роста. В этом случае возникает химическая и фазовая микронеоднородность, которая не только отрицательно сказывается на степени однородности термоэлектрических параметров, но и на механических свойствах получаемых пластин, приводя к их разрушению в процессе вырезания из них элементов термобатарей.

Рассмотрена формулировка задачи теплопереноса для отдельной кассеты, представляющей ячейку Хеле-Шоу, которая показана на Рис. 1а.



а *б* *в*

Рис. 1. Кристаллизационная кассета: а – графитовый корпус (I), расплав (II), затравка (III), отверстия для заливки расплава (IV) и для сборки кассет в блоки (V); б – изотермы (K) в кассете в начале и в – конце процесса кристаллизации.

Согласно приведенной схеме, кассета состоит из графитового корпуса I, в котором имеется ряд полостей: основная полость с кристаллизующимся расплавом II, полость для зародыша кристалла III, каналы для заливки расплава IV и отверстия для сборки кассет в блоки V. Исходный расплав заполняет кассету между двумя узкими пластинами из графита, вдоль которых создается градиент температур. Преимущество данного метода заключается в том, что возможно использовать одновременно большое количество щелевых прослоек между графитовыми пластинами и тем самым получать большое количество ТЭ пластин за один цикл кристаллизации.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель физико-химических процессов в кассете учитывает процесс кристаллизации материала и температурные зависимости его свойств: плотности $\rho(T)$, теплопроводности $\lambda(T)$ и кинематической вязкости жидкости $\nu(T)$.

Предполагается, что между кристаллом (твердой фракцией) и расплавом (жидкой фракцией) существует промежуточная фракция – двухфазная зона при значениях температуры, больших температуры солидуса T_S и меньших температуры ликвидуса T_L. В двухфазной зоне задается линейное изменение доли жидкой фракции:

$$\beta = (T - T_S)/(T_L - T_S)$$

Сплавы кристаллизуются в интервале температур между ликвидусом T_L и солидусом T_S, а наличие интервала кристаллизации $\Delta T = T_L - T_S$ является причиной того, что фронт кристаллизации представляет собой (в отличие от задачи Стефана) двухфазную зону, состоящую из дендритных кристаллов и расплава. При одном и том же составе (концентрации) температура затвердевания сплава отличается от температуры его плавления.

Затвердевание сплава наблюдается в интервале температур ΔT и учитывается введением в уравнение теплопроводности источника тепла. Для твердой фракции и области кристаллизации при $T < T_L$ уравнение теплопереноса записывается в следующем виде:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda \nabla T) + \rho Q \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

где C – теплоемкость, $Q = \beta \times L$ – объемный источник в двухфазной зоне от скрытой теплоты кристаллизации L; ψ – объемная доля твердой фазы в двухфазной зоне, которая определяется кинетикой роста кристаллов, которая при малом переохлаждении расплава рассчитывается по равновесной диаграмме его состояния. Тогда:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}.$$

В практических расчетах полагают:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{T_L - T_S}$$

После введения эффективной удельной теплоемкости сплава:

$$C_{eff}(T) = \begin{cases} C_L(T), & T > T_L \\ C_S(T_S) + Q/(T_L - T_S), & T_S < T < T_L \\ C_S(T), & T < T_S \end{cases}$$

Тогда уравнение теплопроводности для затвердевающего сплава в двухфазной зоне записывается в виде:

$$\rho C_{eff}\frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda \nabla T)$$

Для жидкой фракции уравнение теплопереноса и уравнения движения жидкости в приближении Буссинеска записываются в следующем виде:

$$\rho C_L[\frac{\partial T}{\partial t} + (V\nabla)T] = div(\lambda \nabla T)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla)V = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu \Delta V - g\beta_T \delta T, \qquad divV = 0$$

Здесь: V – вектор скорости, P – давление, g – вектор гравитации, β_T – коэффициент объемного расширения, δT – характерная разность температур в расплаве.

ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ОХЛАЖДЕНИЯ КАССЕТЫ И КОНВЕКЦИИ.

Расчеты выполнены по программе *CrystmoNet* [1]. Теплофизические свойства взяты из [2,3,4]. Для графита: теплопроводность λ = 73.4 Вт/м×K, теплоемкость C = 1500 Дж/кг×K и плотность $\rho = 2.0\times10^3$ кг/м^3. Для теллурида висмута: плотность $\rho_S = 7.69\times10^3$ и $\rho_L = 7.85\times10^3$ кг/м^3, коэффициенты теплопроводности $\lambda_S = 2.9$ и $\lambda_L = 6.3$ Вт/м×K и теплоемкости $C_S = 173$ и $C_L = 179$ Дж/кг×K, коэффициент теплового расширения расплава $\beta_T = 2.8\times10^{-4}$ K^{-1}, теплота кристаллизации в двухфазной зоне $L = 1.35\times10^5$ Дж/кг. Динамическая вязкость расплава $\mu = 1.57\times10^{-3}$ кг/м×с. Процесс кристаллизации рассчитывался при $T_L = 859$ и $T_S = 857$ K, выбранных по диаграмме состояния системы Bi_2Te_3 – Sb_2Te_3 [5].

Согласно схеме, приведенной на Рис. 1а, в начальный момент исходный расплав полностью заполняет полости кассеты в условиях поддержания заданного вертикального градиента температуры при минимальной температуре на дне и максимальной – на верхней поверхности кассеты. T_1 – начальная и T_2 – конечная температуры, соответствующие показанным линейным температурным профилям на боковой стенке кассеты в начале, середине и конце процесса кристаллизации. В начальный момент градиент температуры должен обеспечивать температуру кристаллизации в окрестности расположения зародыша кристалла III. Однако в последующие моменты мощность внешнего нагревателя постепенно снижается и температурный градиент уменьшается. Это вызывает перемещение фронта кристаллизации снизу вверх в полости II. Выполненное математическое моделирование теплового поля в процессе кристаллизации позволило выявить особенности изменения формы фронта кристаллизации в процессе отвердевания расплава.

Два фрагмента распределения изотерм (в начале и конце процесса кристаллизации) показаны на Рис. 1б и Рис. 1в. Можно отметить, что из-за особенностей "кассетной" конструкции и характера подвода тепла по мере отвердевания расплава форма фронта кристаллизации меняется от сильно выпуклой к практически плоской.

При определенных технологических условиях в кассете может возникать дендритная кристаллизация, вызванная действием тепловой гравитационной конвекции. Значительное и быстрое снижение мощности нагревателя приводит к формированию неустойчивого вертикального температурного градиента с немонотонным вертикальным изменением температуры в кассете, что создает условия для возникновения асимметричных конвективных движений, которые оказывают существенное влияние на искривление фронта кристаллизации и создают предпосылки дендритного роста. В частности, возникают два несимметричных вихря, вызванных тепловой гравитационной конвекцией, при существенно немонотонном боковом подводе тепла. Их асимметрия обусловлена некоторыми малыми конструктивными отличиями кассеты справа и слева. Важным является то, что возникающая интенсивная конвекция значительно изменяет тепловое поле как в объеме расплава, так и вблизи фронта кристаллизации, способствуя его искривлению.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена в рамках Госзадания: АААА-А17-117021310373-3 при частичной поддержке грантов РФФИ: 18-02-00036, 17-08-00078.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prostomolotov A., Ilyasov H., Verezub N. CrystmoNet* remote access code for Czochralski crystal growth modelling // Science and Technology. 2013. V. 3. No 2A. P. 18–25.
2. *Магомедов Я.Б., Гаджиев Г.Г., Омаров З.М.* // Фазовые переходы, упорядоченные состояния и новые материалы. 2013. № 9. С. 1–5.
3. *Глазов В.М.* Жидкие полупроводники. 1967. 246с.
4. *Пашинкин А.С., Михайлова М.С.* Анализ термодинамических функций твердого теллурида висмута // Изв. Вузов. Электроника. 2015. Т. 20. № 2. С. 198–200.
5. *Caillat T. et al.* Study of the Bi–Sb–Te ternary phase diagram // J. of Physics and Chemistry of Solids. 1992. Т. 53. №. 2. С. 227–232.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ КАПЛИ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПРИ ЕЕ УДАРЕ О ВОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

В.Е. Прохоров
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: prohorov@ipmnet.ru

Излучение звука при столкновении капли с поверхностью жидкости – один из интереснейших эффектов, который активно исследуется в интересах фундаментальной науки и различных практических приложений. Природа излучения двояка – в начальной стадии доминирует ударная компонента, обусловленная сверхзвуковым расширение контактного контура [1], образуемым донным сегментом капли с поверхностью, а на последующих стадиях (десятки миллисекунд после контакта) – вступает в действие резонансное звучание воздушных пузырей, отрывающихся от подводных каверн [2,3]. Второй вид излучения не отличается высокой повторяемостью и стабильностью параметров – размеры отрывающихся пузырей, а также их количество, заметно разнятся от опыта к опыту, и в результате сильно различаются параметры излучаемых звуковых пакетов – частота, амплитуда, длительность [4].

Ударный звуковой импульс устойчиво появляется при каждом столкновении, при условии, что конечная скорость капли превышает пороговое значение, определяемое

поверхностным натяжением и вязкостью [5].

Однако даже при поддержании ключевых условий эксперимента – высоты падения, размеры сопла – амплитуда ударного звукового сигнала непостоянна [6].

Одна из возможных причин – изменчивость формы капли при подлете к поверхности. Во время падения капля осциллирует по форме [7], и к моменту контакта становится несферической, принимая вид правильного овоида с произвольной ориентированной осью [6], или более сложные формы. Непосредственно перед ударом дно капли поджимается под влиянием воздушной подушки, что дополнительно искажает форму донного сегмента. В итоге контактирующая с поверхностью форма дна капли существенно отличается от сферической, к тому же и сама поверхность деформируется вглубь жидкости, так что геометрия контакта далека от модели "сфера–плоскость". В теории ударное излучение звука традиционно рассматривают для капли строго сферической формы, либо, как исключение, в виде правильного овоида [8].

В настоящей работе исследуется – теоретически и экспериментально – влияние формы капли на амплитуду ударного звукового импульса при столкновении свободно падающей капли с водной поверхностью в практически важном случае, когда подводный приемник излучения находится точно линии падения капли. При данной геометрии существенно упрощается экспериментальная проверка.

Капля радиуса R падает вертикально на свободную водную поверхность, имея в момент контакта скорость U. Приемник звука – гидрофон расположен на глубине z. Физические свойства капли и подстилающей поверхности одинаковы.

Решение волнового уравнения для потенциала скорости получено в виде $p = P_a + P_s$, где $P_a = \rho RM \cdot a \cdot \left[\sqrt{1 + t' + z'^2} - (1 + z') \right]$, $P_s = \rho Uc / \sqrt{1 + t' + z'^2}$, где ρ – плотность, $M = U / c$ – число Маха, c – скорость звука, $t' = t / t_c$ и $z' = z / z_c$ – безразмерное время и дистанция, $t_c = RM / 2c$, Здесь $a < 0$ – величина торможения капли во время акустического излучения – обычно считается пренебрежимо малой, что влечет $P_a \ll P_s$ и в качестве ударного импульса принимается P_s [1]. При естественных скоростях соударения $(M \ll 1)$ ударный импульс в размерной нотации сводится к простому выражению

$$p = B \cdot P_s = B \cdot \rho U^2 R / z \qquad (1)$$

где B – эмпирическая постоянная, учитывающая затухание, обусловленное ограниченностью полосы гидрофона.

Основная трудность экспериментальной проверки (1) – неизвестное значение радиуса R, который фактически представляет собой локальное значение обратной кривизны донного сегмента капли в точке контакта. Для измерения радиуса необходима высокоскоростная видеосъемка, синхронизированная с реакцией гидрофона на удар капли.

Эксперименты выполнены на стенде ЭСП из состава гидрофизического комплекса "ГФК ИПМех РАН". Для видеонаблюдения использовалась камера "Optronis CR3000x2", акустическое давление измерялось гидрофоном ГИ800-13, у которого полоса частот $2 - 10^5$ Гц, неравномерности 6 дБ, чувствительность 200 мкВ/Па. Высота падения капли оставалась неизменной ($H =$ 122 см), однако скорость менялась от 3.5 до 4 м/с, оставаясь ниже баллистической величины $\sqrt{2gH} = 4.9$ м/с.

Локальный радиус измерялся по ширине μ и высоте δ области минимально возможного пересечения оригинального и зеркального изображений капли (рис. 1) согласно $R = \left(\mu^2 + \delta^2\right) / 2\delta$.

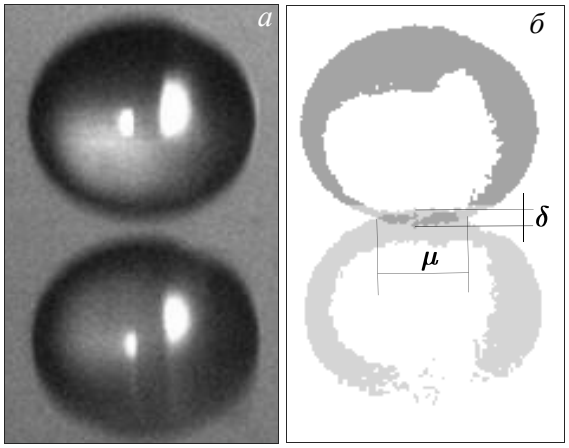


Рис. 1. Схема измерения локального радиуса кривизны. Оригинальное и зеркальное изображения капли (а) и их пересекающиеся контуры (б).

За скорость соударения принималась скорость движения центра капли, осредненная по нескольким видеокадрам непосредственно перед столкновением.

Изменчивость формы капли наглядно показывают видеокадры на рис. 2. К моменту контакта капля принимает вид овоида с вертикальной или горизонтальной осью.

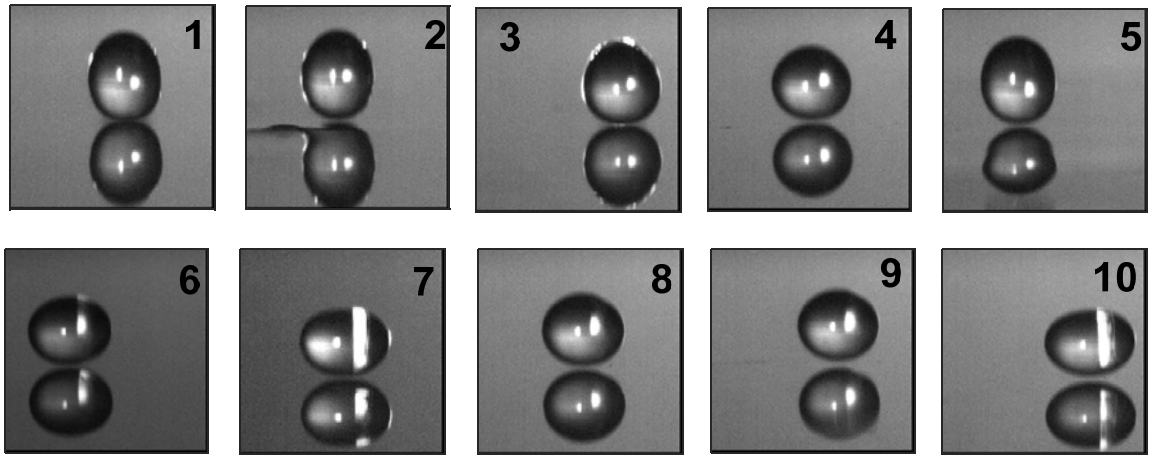


Рис. 2. Видеокадры капли перед приводнением. Цифры – номера опытов.

Непостоянство формы влечет за собой измечивость локального радиуса R и, как следует из (1), звукового давления. На рис. 3, *а* значения давления p_{ex} на выходе гидрофона в функции скорости соударения U показаны в той же последовательности, что и кадры на рис. 2. Удлиненные формы (1–3, 5) с малыми радиусами придонного сегмента сопровождаются низкими значениями p_{ex}. Напротив, для промежуточных и сплюснутых форм (4, 6–10) наблюдаются заметно повышенные давления.

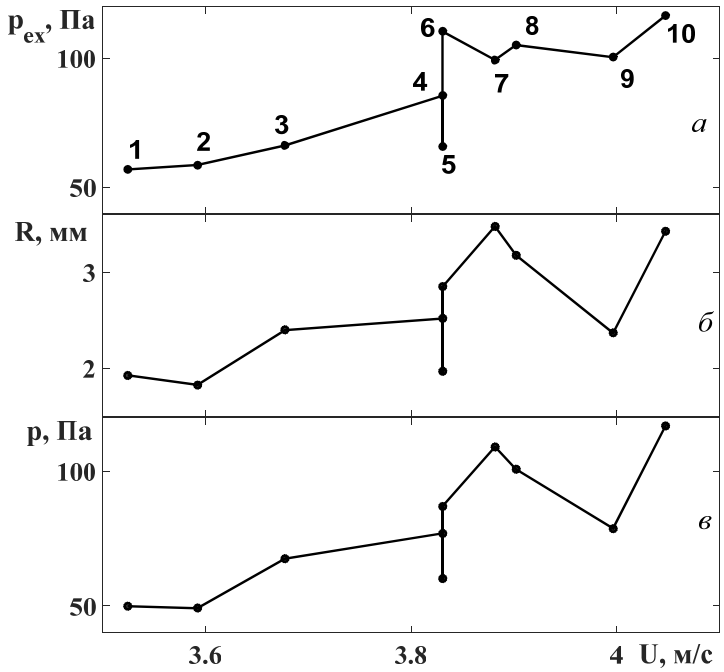


Рис. 3. Акустическое давление (а), локальный радиус капли (б), давление согласно (1) при $B = 1/8$ *(в).*

Экспериментальная зависимость радиуса кривизны (рис. 3, *б*) и теоретического звукового давления (1) (рис. 3, *в*) в целом отслеживают график $p_{ex}(U)$, включая точки 4–6, в которых зафиксирована неизменная скорость.

Таким образом, в при повторных столкновениях капли о воду в условиях постоянной геометрии опыта наблюдаются значительные флуктуации амплитуды ударного звукового давления. Доминирующий фактор – сильная изменчивость формы капли в процессе падения, из-за чего к моменту соударения ее локальный радиус в точке контакта значительно меняется от опыта к опыту. Нестабильность формы капли порождает и дополнительный влияющий фактор – заметные изменения скорости столкновения.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310378-8) и частично поддержана грантом РФФИ №18-05-00870.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guo Y.P., Williams J.E. A theoretical study on drop impact sound and rain noise. J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 345–355.
2. Prosperetti A.,Oguz H.N. The impact of drops on liquid surfaces and the underwater noise of rain. Annu. Rev. Fluid Mech. 1993. V. 25. P. 577–602.
3. Прохоров В.Е., Чашечкин Ю.Д. Излучение последовательности звуковых пакетов при падении капли на водную поверхность. ДАН. 2012. Т.443. № 1. С. 48–52.
4. Прохоров В.Е., Чашечкин Ю.Д. Динамика излучения подводного звука при падении капли в жидкость. ДАН. 2012. Т.443. № 6. С. 686–691.
5. Прохоров В.Е. Влияние молекулярных эффектов на излучение звука при низкоскоростном столкновении капли с поверхностью воды. ЖЭТФ. 2018. Т. 153. № 4. С. 584–589.
6. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Структура первичного звукового сигнала при столкновении свободно падающей капли с поверхностью воды. ЖЭТФ. 2016. Т.

149. вып. 4. С. 864–875.
7. Прохоров В.Е., Чашечкин Ю.Д. Динамика отрыва одиночных капель в воздушной среде. Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 4. С. 109–118.
8. Howe M.S., Hagen N.A. On the impact noise of a drop falling on water. J. of sound and vibration. 2011. V. 330. P. 625–635.

—— ♦ ♦ ♦ ——

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ КАПЛИ ВОДЫ С НЕБОЛЬШИМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

А.Н. Рожков, А.И. Федюшкин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail:rozhkov@ipmnet.ru, fai@ipmnet.ru

Столкновение капли жидкости с твердым телом при больших числах Рейнольдса и Вебера рассмотрено в рамках предположения о невязком течении. Деформация капли во время столкновения описывается универсальным образом, то есть отсутствует зависимость от каких-либо материальных констант и может быть представлена исключительно кинематическими функциями. Предложено моделировать деформацию капли как импульсное истечение жидкости из точечного источника с заданными функциями скорости и расхода, так называемыми универсальными функциями истечения. На основе численного моделирования построен приближенный вид этих универсальных соотношений. Они предсказывают монотонное уменьшение скорости истечение жидкости со временем и зависимость расхода от времени с максимумом. Сравнение численных предсказаний на базе универсальных функций истечения с экспериментальными данными показывает качественное согласие.

СТОЛКНОВЕНИК КАПЛИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

Столкновение капли жидкости с препятствием, как с жидким, так и с твёрдым (см., например, [0–3]) – неисчерпаемый источник разнообразных гидродинамических явлений, актуальных для практических приложений и развития классической физики. Простейший вариант столкновения – удар капли по небольшому диску (рис. 1). Такая конфигурация исключает влияние вязкости и есть модель падения невязкой капли на гидрофобную поверхность. В результате удара формируется круглая жидкая плёнка (ламелла), ограниченная краевой струёй (жидким тором), которая сначала расширяется, а затем схлопывается. Для случая на рис. 1 весь процесс занимает 5 мс.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

На основе численного решения уравнений Навье–Стокса для двухфазной системы «воздух–жидкость» с разными свойствами проведено моделирование растекания капель жидкости, падающих на твердую поверхность. Математическое моделирование проведено для разных диаметров капель от d_i=0.5 до d_i=4 мм, скоростей от v_i=1 м/сек до v_i=3.87 м/сек, свойств и углов смачивания, что соответствовало диапазонам числа Вебера We =50–800 и числа Рейнольдса Re=70–2 10^3. Диаметр твердого препятствия (диска) был равен d_t=2 мм – для капель с диаметром d_i<2 мм и d_t=4 мм – для капель с диаметром d_i>2 мм. Рис. 2 представляет пример такого расчёта.

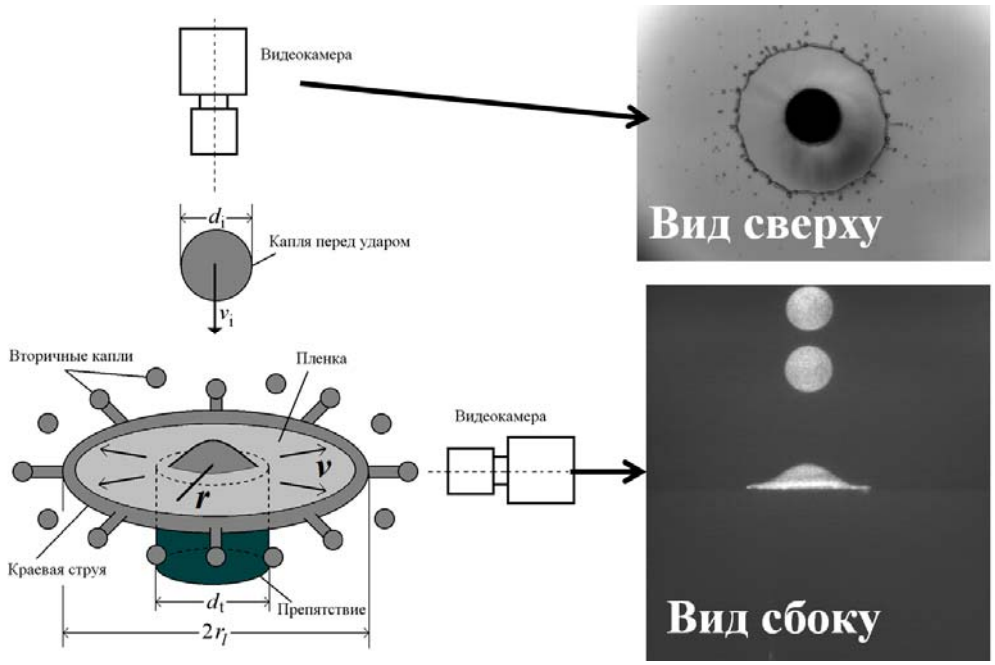


Рис. 1. Схема соударения капли жидкости с небольшим твёрдым диском. Фотографии справа соответствуют условиям удара: диаметр капли d_i=2.67 мм, скорость v_i=3.87 м/с, число Вебера $We_i=\rho v_i^2 d_i/\gamma$=550, плотность ρ=1000 кг/м^3, поверхностное натяжение γ=0.072 Н/м, диаметр диска d_t=4.0 мм. Вид сбоку – суперпозиция трёх последовательных кадров.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ СТРУКТУРА КАПЛИ

Эволюция капли при ударе обеспечивается двумя чрезвычайно простыми движениями: 1) радиальным движением частиц воды в ламелле, 2) навстречу бежит волна разрушения ламеллы (краевая струя в виде жидкого тора). Процесс управляется конкуренцией капиллярных сил и сил инерции.

Движением частиц воды в ламелле может быть представлено, как баллистическое движение частиц воды, истекающих из точечного источника с определённым законом изменения скорости и расхода. В безразмерных переменных течение в ламелле носит универсальный характер $V(T,Y)$, $Q(T,Y)$, где $V=v/v_i$, $Q=q/(\pi d_i^2 v_i/6)$, $Y=r/d_i$, $T=t/(d_i/v_i)$, t – время, r – радиальная координата (рис. 1), v – скорость течения в ламелле, v_i – скорость капли перед ударом, q – локальный расход, т.е. расход через контур радиуса r, ρ – плотность жидкости, d_i – диаметр капли перед ударом). Течение в ламелле не зависит от параметров жидкости [3].

На рисунке 3 линиями показаны зависимости изменения $V(T,Y)$, $Q(T,Y)$, полученные численно для различных реализаций v_i=3.87 м/с, d_i=1÷4 мм, ρ=70÷1000 кг/м^3, γ=0÷0.07 Н/м. Данные свидетельствуют, что все кривые укладываются на единые поверхности $V(T,Y)$, $Q(T,Y)$, независимо от значений параметров v_i, d_i, ρ, γ.

Локальные величины $V(T,Y)$ и $Q(T,Y)$ определяются функциональными зависимостями [3]:

$V(T,Y)=V_s(T_s)$, $Q(T,Y)=Q_s(T_s)/(1+Y\mathrm{d}/\mathrm{d}T_s(1/V_s(T_s)))$, $Y=(T-T_s)V_s(T_s)$,

где индекс «s» указывает, что данные величины относятся к точечному источнику истечения (Y_s=0). Зная функции истечения $V_s(T_s)$, $Q_s(T_s)$ можно рассчитать течение в ламелле.

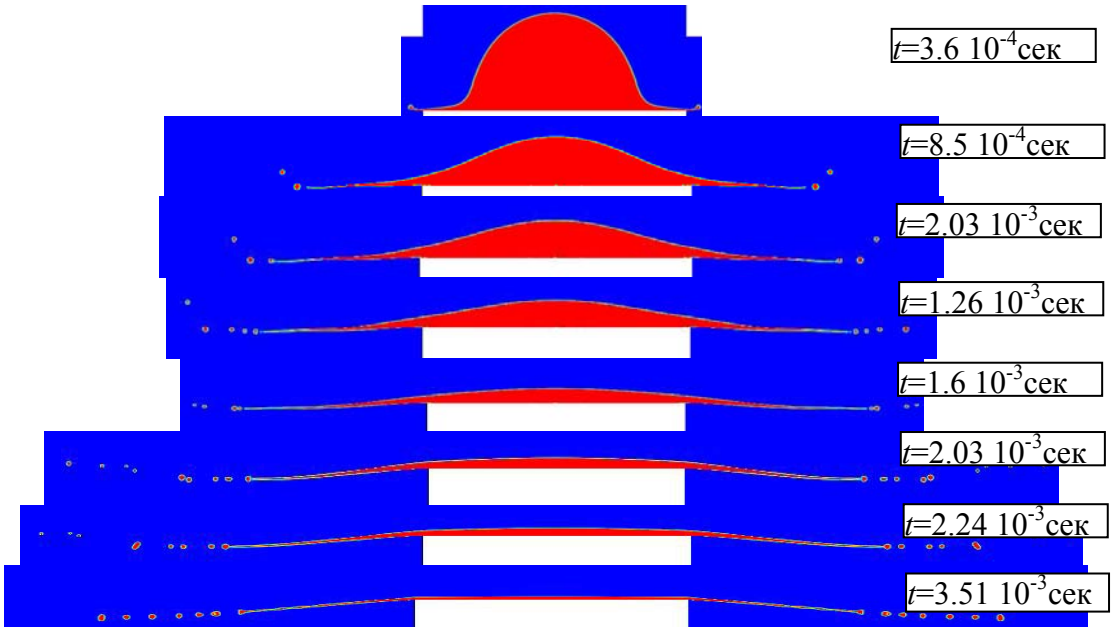


Рис. 2. Распределение фракции воды при падении на твердую поверхности в виде диска «мишени» и растекании капли (d_i=3.89 мм, v_i=3.83 м/сек, We=792, Re=1500) для разных моментов времени (от $t=3.6\ 10^{-4}$ до $t=3.51\ 10^{-3}$сек)

Соотношения показывают, что жидкий элемент, который истёк из точечного источника в момент времени T_s, приходит в точку Y в момент времени T с той же самой скоростью V_s, но с уменьшенным локальным расходом $Q(T,Y)$, если скорость истечения V_s уменьшается во времени. Уменьшение $Q(T,Y)$ вызвано радиальным растяжением жидкого элемента в процессе его движения в ламелле.

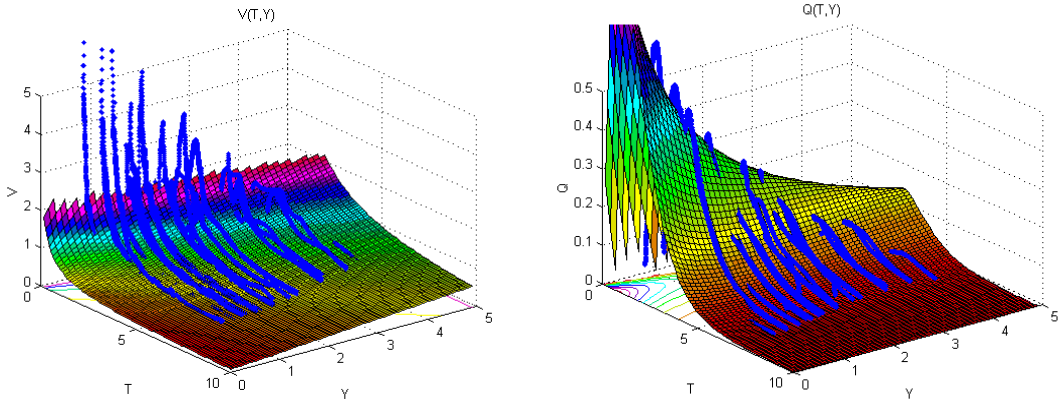


Рис. 3. Скорость $V=v/v_i$ и локальный расход $Q=q/(\pi d_i^2 v_i/6)$ как функции радиальной координаты $Y=r/d_i$ и времени $T=t/(d_i/v_i)$.

В первом приближении кривые $V(T,Y)$ и $Q(T,Y)$ могут быть аппроксимированы простыми зависимостями, если положить, что истечение из точечного источника описывается как $V_s=V_0/(1+T_s/\Theta_1)$, $Q_s=\Theta_2^{-1}(T_s/\Theta_2)\exp(-T_s/\Theta_2)$, где V_0=2.3, $\Theta_1\approx\Theta_2\approx$0.4. (Множитель Θ_2^{-1} обеспечивает сохранение массы капли при ударе $\int_0^\infty Q_s(T_s)\mathrm{d}T_s=1$) На рис. 3 найденные зависимости представлены поверхностями. Зависимости $V(T,Y)$, $Q(T,Y)$ позволяют рассчитать траектории движения краевой струи (жидкого тора) и тем самым предсказать эволюцию капли при ударе о препятствие. Для невязкой жидкости решения описывают соударения капли с сильно гидрофобной поверхностью (контактный угол 180°).

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bazilevsky A.V., Rozhkov A.N.* Letter: Dome-shaped splashes generated by the impact of a small disk on a sessile water drop // Physics of fluids. 2018. V. 30. P. 101702-1 – 101702-4.
2. *Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д.* Гидродинамика погружающейся капли: линейчатые структуры на поверхности венца // Известия РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 152–164.
3. *Rozhkov A., Prunet-Foch B., Vignes-Adler M.* Dynamics of a liquid lamella resulting from the impact of a water drop on a small target // Proc. R. Soc. Lond. 2004. V. A 460, P. 2681–2704.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА КАЧЕСТВА РЕЧНОЙ ВОДЫ

О.М. Розенталь
Институт водных проблем РАН

Описан циклически-волновой характер изменения состава и свойств речных вод, указывающий на наличие эффекта долговременной памяти в соответствующих временных рядах. Эффект заключается в том, что текущие значения контролируемых показателей в большой степени зависят от их прошлых значений. Установлена связь долговременной памяти и персистентности с показателем Хёрста и фракталами исследованных рядов. Продемонстрирована возможность количественного оценивания эффекта долговременной памяти для управляемого водопользования.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ МАНИПУЛЯТОРА В ВОДНОЙ СРЕДЕ

Л.Б. Рулева
ФГБУ науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: ruleva@ipmnet.ru

Оптимизировано движение манипулятора робота Универсал для воздушной и водной сред. Использован метод модального управления. Приведены графики параметров движения манипулятора при значительном увеличении возмущающего момента при интегрировании уравнений в форме Коши. Показано улучшение качества переходных процессов манипулятора при применении указанного метода.

В ИПМех РАН имеется робот Универсал, работа которого в воздушной среде описана в [1]. Управление движением манипулятора робота в воздушной сред в виде электрической схемы изложено в патенте [2]. Предлагается расширить возможности робота Универсала для работы в водной среде, полагая увеличение возмущающего момента манипулятора 10^3 раз в соответствии с соотношением плотностей сред: воздуха и морской воды. Покажем, что применение метода модального управления [3] позволит увеличить точность позиционирование манипулятора под водой.

Движение манипулятора [1] описывается обыкновенными дифференциальными

уравнениями

$$LR^{-1}\dddot{\varphi}+\ddot{\varphi}+(kn)^2(I_*R)^{-1}\dot{\varphi}=-kn(I_*R)^{-1}U \quad ,(1)$$

где

φ – угол поворота звена манипулятора;

$I_* = I + I_0 n^2$ – суммарный момент инерции звена манипулятора;

$L,\ R$ – коэффициенты индуктивности и сопротивления электродвигателя;

k – коэффициент пропорциональности между током и электромагнитным моментом;

U – управляющее напряжение.

Преобразованное уравнение объекта исследования представлено в виде:

$$\Delta\ddot{\varphi}(t)+RL^{-1}\Delta\dot{\varphi}(t)+(kn)^2(I_*\,\mathrm{L})^{-1}\Delta\varphi(t)=\int k_B M_B-\gamma\Delta U \quad (2)$$

где управляющее напряжение, в дальнейшем будет построено в соответствии с методикой оптимального управления [2], а оптимизированные параметры скорости позиционирования и возмущающий момент могут быть определены в текущем времени.

Для этого дифференциальное уравнение объекта [2] записанное в векторах состояния собственного движения и управления

$$\frac{\mathbf{dX}}{\mathbf{dt}}=\mathbf{AX}+\mathbf{BU}$$
$$\mathbf{Y}=\mathbf{CX} \quad ,(3)$$

необходимо дополнить матрицами наблюдаемости и управляемости.

Уравнения, записанные в форме Коши имеют вид:

$$\dot{X}1=X2$$
$$\dot{X}2=M-\frac{R}{L}X2-\frac{(kn)^2}{I_*L}X1-(p_1X3+p_2X4)$$
$$\dot{X}3=X4+k_1(X1-X3)$$
$$\dot{X}4=X5-\frac{R}{L}X4-\frac{(kn)^2}{I_*L}X3-(p_1X3+p_2X4)+k_2(X1-X3)$$
$$\mathrm{X5}=\mathrm{k}_3(X1-X3)$$
; (4)

где коэффициенты управления p и наблюдающего устройства k выбраны по известным стандартным формам с желаемыми динамическими свойствами. Корни полученной новой системы уравнения расположены в желаемой области на фазовой плоскости. Анализ устойчивости характеристического полинома новой системы уравнений показал ее увеличение более, чем в два раза.

Получены графики переходных процессов робота «Универсал» [1] с увеличенным в 10^3 раз возмущающем моментом при переходе манипулятора в водную среду без оптимизации (рис.1а) и с оптимизацией (рис.1б).

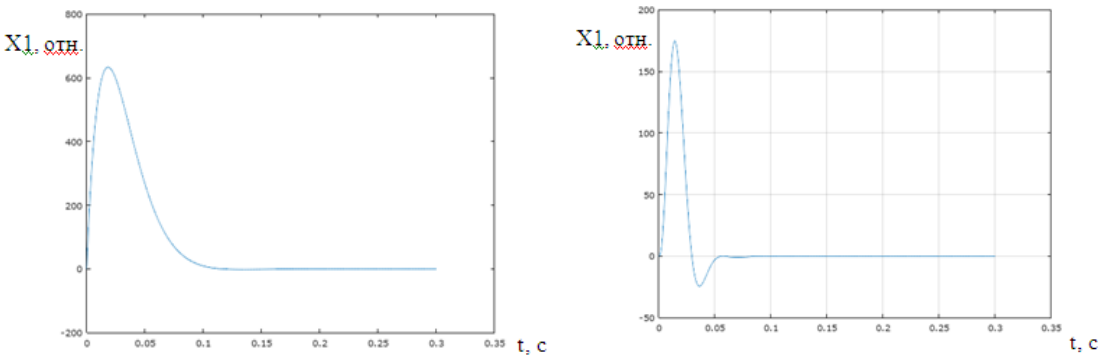


Рис. 1. Переходные процессы без оптимизации а) и с оптимизацией б)

Интегрирование уравнений объекта (4) методом Рунге–Кутта без наблюдающего устройства и с применением наблюдающего устройства показали снижение амплитуды перерегулирования в 4 раза и снижение времени переходного процесса в 2 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.:Наука.1989. 368 с.
2. Градецкий В.Г., Рулев Г.К., Рулева Л.Б. Патент № 2701459. Устройство управления манипулятором робота». Опубликовано 26.09.19. Б.И.№ 27.
3. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение. 1976. 184 с.

——— ♦ ♦ ♦ ———

СИЛЫ ВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ИХ КОНТАКТА

Ш.В. Сандуляну
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Московский физико-технический институт
e-mail: shtefan.sanduleanu@gmail.com

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается взаимодействие двух сферических пузырьков переменных радиусов при движении вдоль линии центров в вязкой жидкости в приближении Стокса. Течение жидкости предполагается осесимметричным. Центры сфер расположены на оси z имея координаты $z_1, z_2\,(z_1 > z_2)$, скорости центров равны $u_1 = -\dot{z}_1, u_2 = \dot{z}_2$ и направленные на встречу друг друга (рис. 1). Скорости изменения радиусов равны $\dot{R}_1, \dot{R}_2$ соответственно. Расстояние между центрами сфер $r = z_1 - z_2$, расстояние между поверхностями сфер (зазор) $h = r - R_1 - R_2$. Цель данной работы найти вязкие силы действующие на сферы как линейные функции скоростей $u_1, u_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2$ коэффициенты при которых зависят от радиусов сфер и расстоянию между ними R_1, R_2, r.

Ввиду геометрии задачи целесообразно перейти к бисферическим координатам (ξ, ζ, θ):

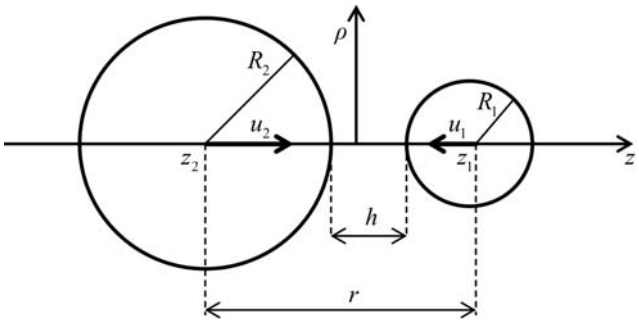


Рис. 1. Постановка задачи

$$x=\frac{c\sin\zeta\cos\theta}{\cosh\xi-\cos\zeta},\quad y=\frac{c\sin\zeta\sin\theta}{\cosh\xi-\cos\zeta},\quad z=\frac{c\sinh\xi}{\cosh\xi-\cos\zeta}.$$

Поверхность первой сферы задается уравнением $\xi=\tau_1$, а второй $\xi=-\tau_2$, где

$$\tau_1=\operatorname{arccosh}\frac{r^2+R_1^2-R_2^2}{2rR_1},\quad \tau_2=\operatorname{arccosh}\frac{r^2-R_1^2+R_2^2}{2rR_2},\quad c=\sqrt{\left(r^2-R_1^2-R_2^2\right)^2-4R_1^2R_2^2}\ /\ 2r.$$

Следуя работе [1] целесообразно искать решение задачи с помощью функции тока Стокса ψ в бисферических координатах которая должно удовлетворять уравнению [1]

$$\Phi^4(\psi)=0,\Phi^2=\frac{\cosh\xi-\mu}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left((\cosh\xi-\mu)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\left((\cosh\xi-\mu)\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\right),\mu=\cos\zeta$$

ФУНКЦИЯ ТОКА В БИСФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Функцию тока следует искать в виде [1]

$$\psi=\left(\cosh\xi-\cos\zeta\right)^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}U_n(\xi)C_n^{-1/2}(\cos\zeta),$$

$$U_n(\xi)=a_n\cosh(n-3/2)\xi+b_n\sinh(n-3/2)\xi+c_n\cosh(n+1/2)\xi+d_n\sinh(n+1/2)\xi,$$

где $C_n^{-1/2}(\mu)$ – полиномы Гегенбауера.

Коэффициенты a_n,b_n,c_n,d_n следует искать из граничных условий на поверхностях сфер при $\xi=\tau_1$ и $\xi=-\tau_2$.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

На границах нормальная составляющая скорости жидкости v_n и скорость поверхности пузырька u_n должны совпадать.

В общем случае на границах сфер относительная скорость жидкости связана с тангенциальным напряжением [2]

$$\sigma_\tau\big|_{\xi=\tau_1}=\beta_1(v_\tau-u_\tau)\big|_{\xi=\tau_1},\quad \sigma_\tau\big|_{\xi=-\tau_2}=\beta_2(v_\tau-u_\tau)\big|_{\xi=-\tau_2},$$

где $\beta_1=\mu_l/\lambda_1$ и $\beta_2=\mu_l/\lambda_2$ – коэффициенты скольжения. Следует отметить, что в зависимости от $\beta_{1,2}$ можно выделить три разных случая: 1) $\beta_{1,2}=\infty$ – случай прилипания на границе, 2) $\beta_{1,2}=0$ – случай нулевого тангенциального напряжения и 3) $\beta_{1,2}\neq 0,\infty$ – общий случай проскальзывания. Для нахождения a_n,b_n,c_n,d_n правые и левые части граничных условий следует раскладывать по полиномам Гегенбаера. В первых двух случаях из четырех граничных условий удается явным образом найти a_n,b_n,c_n,d_n, в

третьем же случае возникает рекуррентная система для a_n, b_n, c_n, d_n которую следует решить численно.

ВЯЗКАЯ СИЛА

В работе [1] для вязкой силы было получено выражение

$$F_{\mu_l} = \pi\mu_l \int \rho^3 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\Phi^2(\psi)}{\rho^2}\right) ds,$$

где n наружная нормаль поверхности сферы, ds – элемент меридиана, μ_l – вязкость жидкости, интеграл берется по меридиану соответствующей сферы. Подставляя общий вид функции тока, были получены выражения для вязких сил для любых расстояний между сферами

$$F_{\mu_l 1} = -\mu_l \frac{8\pi c\dot{R}_1}{\sinh^2\tau_1} + \frac{2\sqrt{2}\pi\mu_l}{c}\sum_{n=2}^{\infty} a_n + b_n + c_n + d_n,$$

$$F_{\mu_l 2} = \mu_l \frac{8\pi c\dot{R}_2}{\sinh^2\tau_2} + \frac{2\sqrt{2}\pi\mu_l}{c}\sum_{n=2}^{\infty} a_n - b_n + c_n - d_n.$$

ГЛАВНЫЕ АСИМПТОТИКИ ВЯЗКИХ СИЛ

Для случая прилипания, подставляя a_n, b_n, c_n, d_n в формулы для сил была получена следующая асимптотика вблизи контакта

$$F_{\mu_l 1} \approx -F_{\mu_l 2} \approx -6\pi\mu_l \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1+R_2)^2}\frac{\dot{h}}{h} - 6\pi\mu_l \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\ln\frac{R_1}{h}\frac{R_1^2 + 7R_1R_2 + R_2^2}{5(R_1+R_2)^2}\dot{h} -$$

$$-6\pi\mu_l \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\ln\frac{R_1}{h}\left(\frac{R_2(2R_1+R_2)}{(R_1+R_2)^2}\dot{R}_1 + \frac{R_1(2R_2+R_1)}{(R_1+R_2)^2}\dot{R}_2\right) + O(1).$$

Для постоянных радиусов результат согласуется с [3,4].

Для случая нулевого тангенциального напряжения было получено

$$F_{\mu_l 1} \approx -F_{\mu_l 2} \approx -2\pi\mu_l \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\ln\frac{R_1}{h}\dot{h} + O(1).$$

Для постоянных радиусов асимптотика согласуется с [5].

Для случая проскальзывания ввиду того, что в явном виде не удается разрешить рекуррентную систему уравнений для a_n, b_n, c_n, d_n, асимптотическое разложение удалось найти с помощью теории тонкого слоя. Вклад в вязкую силу от $\dot{h}$ равен

$$F_{\mu_l} = -3\pi\mu_l\dot{h}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^2 \left(\varphi(x, X_1, X_2) + \varphi(x, X_2, X_1)\right) + O(1),$$

$$\varphi(x, X_1, X_2) = -X_1 + X_1\frac{X_1 - 3X_2}{X_1 - X_2}\left(1 + \frac{X_1}{x}\right)\ln\left(1 + \frac{x}{X_1}\right),$$

$$X_{1,2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}}{6\lambda_1\lambda_2},\ x = \frac{1}{h},$$

что согласуется с [6], а при $\lambda_1 = \lambda_2$ совпадает с соответствующим результатом из [7].

Вклад от $\dot{R}_1$ равен

$$F_{\mu_l} = -2\pi\mu_l \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\left(\frac{3R_2(2R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^2} \ln\left(\frac{R_1 R_2}{h(R_1 + R_2)} \right) + \Phi(x, X_1, X_2) + \Phi(x, X_2, X_1) \right) \dot{R}_1 + O(1)$$

$$\Phi(x, X_1, X_2) = \frac{R_2}{2(R_1 + R_2)} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(X_1 - X_2)\lambda_1\lambda_2} \left(1 + \frac{X_1}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{X_1}\right) +$$

$$+ \frac{3R_2(2R_1 + R_2 - R_2 X_1 / x)(3X_2 - X_1)}{4(R_1 + R_2)^2 (X_1 - X_2)} \left(\left(1 + \frac{X_1}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{X_1}\right) - 1 \right)$$

Вклад от $\dot{R}_2$ получается перестановкой индексов 1 на 2. При устремлении же $\lambda_1 \to 0, \lambda_2 \to 0$ имеется согласие со случаем прилипания. При устремлении $\lambda_2 \to 0$ и $R_2 \to \infty$ при $\dot{R}_2 = 0$ получаем полное совпадение с [8]. Тем самым результаты полученные в данной работе обобщают ранее полученные результаты других авторов.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310382-5) и частично поддержана грантом РФФИ № 17-01-00901.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stimson M., Jeffery G. B.* The motion of two spheres in a viscous fluid // Proceedings of the Royal Society of London. Series A 1926. – Т. 111. – №. 757. – С. 110–116.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат. 1947. С. 928.
3. *Cooley M. D. A., O'neill M. E.* On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere //Mathematika. – 1969. – Т. 16. – №. 1. – С. 37–49.
4. *Jeffrey D. J.* Low-Reynolds-number flow between converging spheres //Mathematika. – 1982. – Т. 29. – №. 1. – С. 58–66.
5. *Зинченко А. З.* К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. №. 5. С. 955 – 959.
6. Зинченко А. З. Расчет близкого взаимодействия капель с учетом внутренней циркуляции и эффектов скольжения // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. №. 4. С. 759 – 763
7. *Hocking L. M.* The effect of slip on the motion of a sphere close to a wall and of two adjacent spheres // J. of Engineering Mathematics. 1973. Т. 7. №. 3. С. 207 – 221.
8. *Michelin S. et al.* Viscous growth and rebound of a bubble near a rigid surface // J. of Fluid Mechanics. 2019. Т. 860. С. 172 –199.

—— ♦ ♦ ♦ ——

КОЛЕБАНИЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА КАК ПАРАМЕТР, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

П.В. Сафронов, Э.А. Савастенко, А.В. Кудинова, Н.А. Терехов, Г.О. Прохоров
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
e-mail: pavel_safronov@mail.ru

Достижение действующих и перспективных требований к выбросам вредных веществ с отработавшими газами двигателей внутреннего сгорания, а также высоких энергетических показателей и потребительских качеств автомобилей невозможно без адаптивного управления рабочим процессом двигателя. Адаптивное управление становится возможным только при наличии параметров обратной связи, для чего в электронную систему управления двигателем дополнительно включают специальные датчики (лямбда-зонд, датчик детонации), по сигналам которых корректируют базовую программу управления. Однако далеко не все важнейшие параметры работы двигателя могут быть прямо или косвенно проконтролированы по сигналам обратной связи, например, индикаторный момент. С применением моментного управления силовой установкой этот параметр занял ключевое положение. Он необходим не только для расчета параметров циклового наполнения, топливоподачи, но также и для работы множества других функций (например, противотолчковая функция, круиз-контроль). Следовательно, ошибка в оценке индикаторного момента приведет к ошибкам в работе этих функций, что проявится в ухудшении энергетических и экологических показателей автомобиля и в снижении его потребительских качеств [1].

ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА НА БОРТУ АВТОМОБИЛЯ

Проблема измерения нагрузки в эксплуатационных условиях заключается, главным образом, в сложности и стоимости аппаратуры. Обычно величина передаваемого момента определяется по величине закрутки специального торсионного вала, соединяющего коленчатый вал двигателя с потребителем мощности. Для определения величины деформации вала используют различные датчики (тензодатчики, индуктивные и т.д.). Ввиду значительной длины деформируемой части вала, он не всегда может быть установлен на автомобиле по компоновочным ограничениям. Более компактный датчик крутящего момента получается при использовании обратного эффекта Видемана, заключающегося в изменении магнитных свойств материала при его скручивании. Такие датчики с успехом применяются для спортивных и мелкосерийных автомобилей. Определение крутящего момента по давлению в цилиндре двигателя (прямого или косвенного индицирования) также пока не находит широкого применения в автомобилестроении, т.к. это решение является дорогостоящим и менее надежным по сравнению с непосредственным измерением крутящего момента [4]. Рассмотренные способы определения крутящего момента можно отнести к силовым, т.к. они предполагают регистрацию силовых воздействий. Чувствительные элементы таких измерительных систем подвержены действию механических и термических нагрузок. Это вызывает изменение их характеристик во времени, в результате чего появится дополнительная погрешность измерений.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ИНДИКАТОРНОГО КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

В последние время в мире ведутся активные работы по определению или оценке параметров рабочего цикла двигателя на основе анализа мгновенной частоты вращения коленчатого вала. Определение взаимосвязи между изменением мгновенной частоты вращения и параметрами тепловыделения в каждом цилиндре позволит решить различные задачи, связанные с адаптивным управлением силовой установкой по измеренному значению давления газов в цилиндре. Проведенный анализ литературных источников показал, что мгновенная частота вращения коленчатого вала используется в основном в качестве вспомогательного параметра, дополняющего информацию силовых датчиков, благодаря чему удается повысить точность определения крутящего момента при одновременном снижении сложности и стоимости измерительной аппаратуры. Поскольку поршневой двигатель является машиной циклического действия, то его крутящий момент также изменяется циклически, т.е. его изменение носит периодический характер. Как любая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, крутящий момент может быть разложен в ряд Фурье:

$$M_{кр}(\varphi) = M_0 + M_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} + \gamma_1\right) + M_2 \sin\left(2\left(\frac{2\pi}{T}\right) + \gamma_2\right) + \ldots + M_k \sin\left(k\left(\frac{2\pi}{T}\right) + \gamma_k\right)$$

где φ – угол поворота коленчатого вала двигателя; T – период изменения функции $M_{кр}(\varphi)$; γ_k – начальная фаза k-го момента; M_0 – средний крутящий момент; M_k – амплитуда k-й гармонической составляющей момента.

В ряде работ показано, что между средним индикаторным давлением и амплитудами гармонических составляющих крутящего момента существует взаимосвязь [4, 5]. Наиболее сильно эта взаимосвязь проявляется у гармоник низших порядков и носит линейный характер.

Гармонические составляющие низших порядков от возмущающих газовых сил, действуя в одном направлении для всех цилиндров, не вызывают деформацию коленчатого вала, но являются преобладающими компонентами частотного спектра частоты вращения коленчатого вала. Исследования показывают, что между гармоническими составляющими мгновенной частоты вращения и индикаторными показателями двигателя существует взаимосвязь.

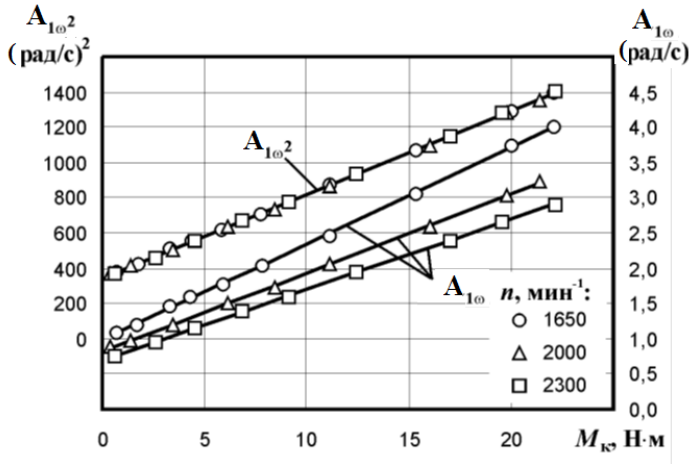


Рис. 1. Зависимость амплитуды первой гармоники частоты вращения от эффективного крутящего момента на различных скоростных режимах работы двигателя

Результаты исследования, приведенные в литературе [4], показывают наличие

взаимосвязи между средним индикаторным давлением p_i и амплитудой главной гармоники низшего порядка, которая здесь и далее обозначается как А1 и называется первой гармоникой. Период изменения этой гармоники равен периоду изменения крутящего момента двигателя. Каждому скоростному режиму соответствует своя зависимость $A1 = f(p_i)$.

Графики на рис. 1 иллюстрируют наличие взаимосвязи между нижней гармоникой частоты вращения и крутящим моментом. Также в литературных источниках [2,3] показано, что амплитуда первой гармоники квадрата мгновенной угловой скорости коленчатого вала одноцилиндрового двигателя не зависит от частоты вращения. Для многоцилиндровых двигателей такая особенность несправедлива ввиду наличия наложения одновременно протекающих тактов. Величина первой гармоники частоты вращения может быть применена для определения нагрузки двигателя в адаптивных системах управления при построении алгоритмов оптимизации энергетических показателей. При этом не потребуется сложных и дорогостоящих датчиков, измеряющих силовые параметры работы двигателя. Главные его преимущества – отсутствие необходимости изменений в конструкции силового агрегата и применения дополнительных датчиков; наличие связи с индикаторным крутящим моментом. В литературных источниках представлены данные о взаимосвязи величины первой гармоники частоты вращения и величины среднего индикаторного давления, в основном для дизелей. В нашем случае критерий будет применяться для двигателей с искровым зажиганием (ДсИЗ). Поскольку способы регулирования мощности дизелей и ДсИЗ различны, это может наложить отпечаток на эту связь. Кроме того, в некоторых двигателях диск синхронизации является частью демпфера крутильных колебаний и сопрягается с коленчатым валом через резиновый демпфирующий элемент, что может привести к искажению результатов измерения мгновенной частоты вращения. Поэтому задачей исследования ставилась проверка применимости величины первой гармоники частоты вращения для оценки влияния на него перечисленных факторов.

ВЫВОДЫ

1. Проведенные экспериментальные исследования показывают возможность применения первой гармоники неравномерности частоты вращения для оценки крутящего момента двигателей с искровым зажиганием.
2. Использовать диск синхронизации с резиновым демпфером крутильных колебаний для оценки крутящего момента по величине первой гармоники неравномерности частоты вращения допустимо на частотах вращения до 2000 $мин^{-1}$.
3. Разброс величины амплитуды первой гармоники неравномерности частоты вращения на разных передачах составляет менее 1%. Поэтому влиянием трансмиссии на расчет кинематического критерия нагрузки на двигатель можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов, П.В. Кинематические критерии для адаптивного управления поршневым двигателем внутреннего сгорания / П.В. Абрамов, В.В. Эфрос, А.С. Игошев; ВлГУ // Материалы X Междунар. научно-практич. конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы совершенствования поршневых двигателей». - Владимир, 2005.
2. Moro, D. In-Cylinder Pressure Reconstruction Based on Instantaneous Engine Speed Signal / D. Moro, D.N. Cavina, F. Ponti // Transactions of the ASME. - S.l., 2002.
3. Powertrain Torsional Model Development for On-Board Indicated Torque Estimation / F. Ponti, G. Serra, S. Lupo // SAE World Congress. - Detroit, Michigan, 2008.
4. Сафронов, П.В. Оценка крутящего момента двигателя по внутрицикловой вариации угловой скорости коленчатого вала на автомобиле / П.В. Сафронов, Е.А. Пер-

шутин, И.В. Алексеев, И.Е. Иванов, С.Н. Богданов // Вестник Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ). – 2012. – № 1 (28). – С. 50–56.
5. Савастенко, Э.А. Снижение степени неравномерности крутящего момента в ДВС / Э.А. Савастенко, И.А. Никишин, С.Н. Девянин // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. – 2010. – № 3. – С. 99–106.

—— ♦ ♦ ♦ ——

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФРАГМЕНТАЦИИ ВЗВОЛНОВАННОЙ ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ОБРАЗОВАНИЯ КАПЕЛЬ БРЫЗГ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕТРА В ЛАБОРАТОРНЫХ УСЛОВИЯХ

Д.А. Сергеев, А.А. Кандауров, Ю.И. Троицкая, О.С. Ермакова
Институт прикладной физики РАН
e-mail: daniil@appl.sci-nnov.ru

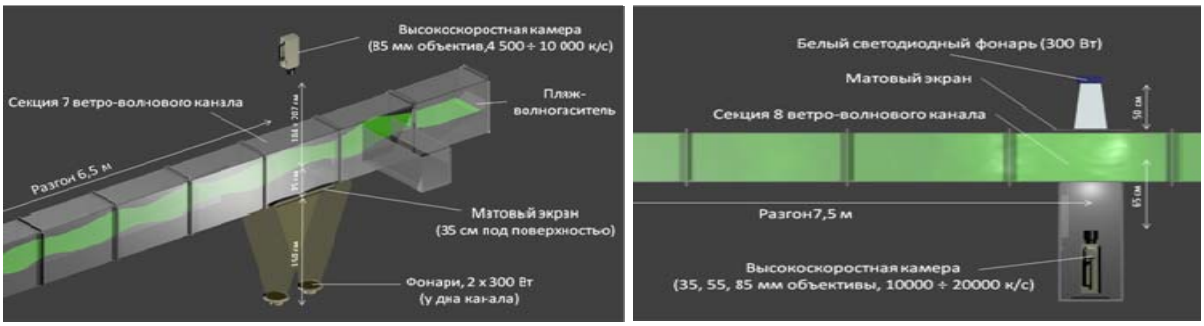
Работа посвящена исследованию процессов генерации брызг в рамках лабораторного моделирования взаимодействия атмосферы и океана в пограничных слоях. По результатам экспериментов на Ветро–волновом канале Большого Термостратифицированного бассейна ИПФ РАН, с помощью высокоскоростной видеосъемки и теневого метода визуализации предложена классификация явлений, приводящих к генерации брызг, и выявлен доминирующий механизм – фрагментация за счет дробления bag-breakup или русскоязычный термин "парашют".

Морские брызги представляют собой капли воды с размерами от 10 нм до нескольких миллиметров, инжектируемые с морской поверхности в результате обрушений волн в прибрежной зоне или при сильных ветрах. Крупные капли с размерами от 10 мкм до единиц миллиметров после вылета с поверхности воды оседают в океан под действием силы тяжести, обеспечивая, таким образом, прямой обмен массой, теплом и импульсом между атмосферой и океаном. В частности, в последнее время считается, что потоки явного и скрытого тепла, связанные с брызгами, могут иметь решающее значение в развитии штормов и тропических ураганов. Однако, в оценке этих эффектов остаются значительные неопределенности, связанные с тем, что потоки определяются плохо изученными величинами: количеством брызг различных размеров, вылетающих с поверхности, и их начальными скоростями. Так, эмпирическая функция генерации брызг, которая характеризует распределение брызг по размерам, вылетающих с единицы поверхности в единицу времени, в разных наблюдениях может отличаться на шесть порядков (см. сводку экспериментальных данных в [1]). Такие неопределенности связаны как с трудностями проведения измерений в натурных условиях в условиях шторма, так и с недостаточной изученностью механизмов генерации брызг. Поэтому в настоящей работе исследование процессов генерации брызг выполнялись в условиях лабораторных

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРМЕНТА

Для исследования, классификации и оценки эффективности механизмов генерации брызг были проведены эксперименты с использованием высокоскоростной видеосъемки на Ветро–волновом канале Большого термостратифицированного бассейна ИПФ РАН. Канал воздушного потока сечением 0,4×0,4 м имеет длину над водной поверхностью 10 м, максимальная скорость воздушного потока в канале, приведенная к

высоте 10 м, составляет 40 м/с. Подробное описание этой установки, принципов создания и управления воздушным потоком в ней приведено. Для характеристики приводного пограничного слоя использовалась динамическая скорость трения u_*, определяемая через вертикальный турбулентный поток импульса: $F_M = \rho_{air} u_*^2$, где ρ_{air} – плотность воздуха. В моделях океан–атмосфера F_M связан с динамической скоростью через коэффициент аэродинамического сопротивления $C_D = u_*^2 / U_{10}^2$, здесь U_{10} – скорость ветра на высоте 10 м. В экспериментах динамическая скорость трения варьировалась от 0,9 до 1,5 м/с, что соответствует скорости ветра U_{10} в натурных условиях от 20 до 40 м/с. Видеосъемка осуществлялась с двух ракурсов: вид сбоку при скорости съемки 10000 кадров/с и вид сверху при 4500 кадров/с. Подробное описание эксперимента можно найти в [2].



(*а*) (*б*)

Рис. 1. Общая схема эксперимента (а) конфигурация съемки вида сверху на взволнованную поверхность (б) конфигурация при съемке вида сбоку на взволнованную поверхность.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Теневые фотографии типичных событий, приводящих к генерации капель, показаны на Рис. 1 (а–в), и можно предложить их следующую классификацию.

1) Дробление жидких "пальцев" (Рис. 2а).

В работе [4] было обнаружено, что в районе гребней обрушающихся волн развиваются небольшие выступы воды, которые затем растягиваются в «пальцы» и разрываются на капли. В наших наблюдениях дробление каждого такого объекта приводит к генерации одной–двух капель диаметрами несколько миллиметров.

2) Разрыв подводных пузырей (Рис. 2б).

Подводные пузыри, формирующиеся у гребней обрушающихся волн, всплывают из-за положительной плавучести и разрываются при достижении поверхности воды, генерируя брызги. Детальная модель этого явления была разработана в [3]. До последнего времени это явление считалось основным механизмом генерации брызг. Однако, наши видеозаписи неожиданно продемонстрировали его сравнительно низкую эффективность: только около 5% наблюдаемых больших подводных пузырей достигало поверхности и лопалось с образованием брызг.

3) Дробление типа "парашют" (Рис. 2в).

Это явление начинается с появления мелкомасштабного возвышения водной поверхности, затем развивающегося в «микропарус», который затем раздувается в «парашют», представляющий собой мембрану из водной пленки, окруженную более толстым «ободком», и разрывается, образуя сотни брызг. В инженерной гидродинамике [4] этот механизм известен как режим дробления жидкости в газовом потоке типа "парашют". Ранее такой режим генерации брызг в лабораторном канале был описан в [5], однако

его значимость в ураганных условиях не обсуждалась. На основе анализа скоростного видео была оценена эффективность обнаруженных механизмов. Для этого по результатам обработки более 2 миллионов отдельных кадров были определены количества событий (жидких "пальцев", разрывов подводных пузырей и "парашютов"), происходящих в единицу времени на единице площади.

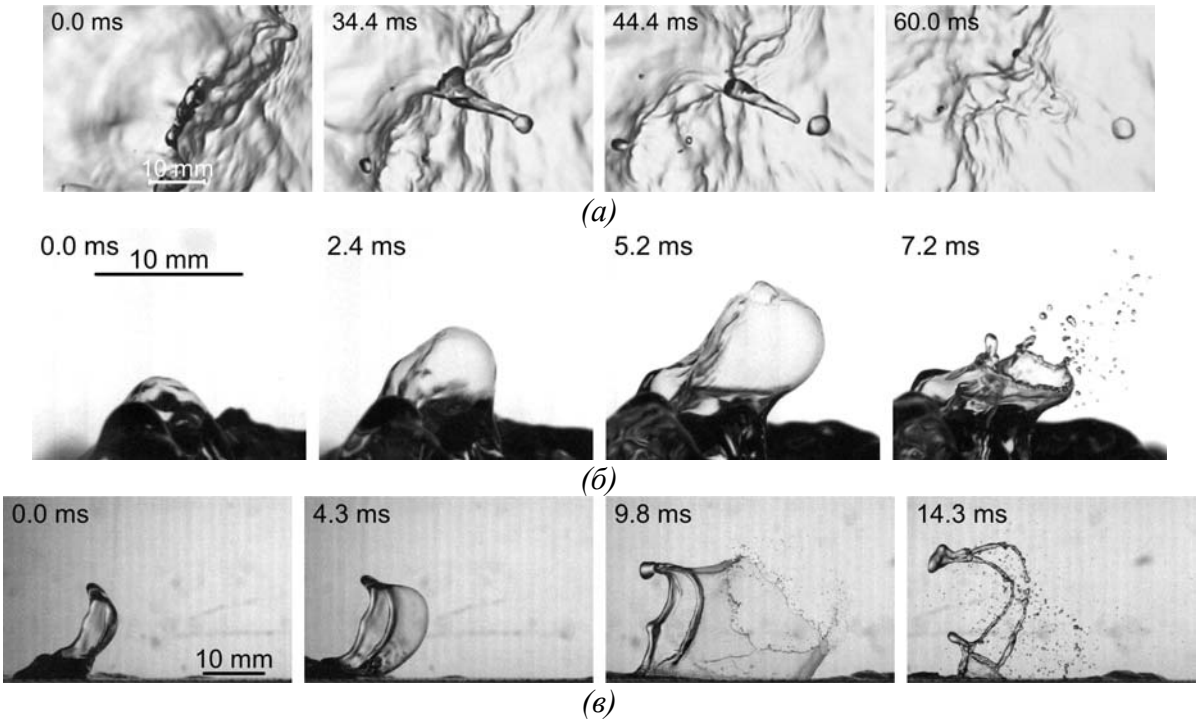


Рис. 2. Фотографии событий, сопровождающих генерацию брызг (а): верхний ряд фотографий – дробление жидких "пальцев" (вид сверху); средний ряд фотографий – разрыв подводных пузырей (вид сбоку); нижний ряд фотографий – формирование и разрыв «парашюта» (вид сбоку); б – среднее количество типичных событий генерации капель в единицу времени на единицу площади в зависимости от u_*: открытые кружки – разрывы подводных пузырей, открытые треугольники – жидкие "пальцы", черные кружки – "парашюты"; сплошная линия – зависимость, полученная на основе распределения Гиббса (уравнение (4)).

Было показано, что при u_* < 1 м/с все три механизма имеют почти равную эффективность, но при u_* > 1 м/с количество разрывов подводных пузырей отстает от числа жидких "пальцев" и "парашютов". Учитывая, что дробление жидких "пальцев" дает 1–2 капли, а дробление типа "парашют" дает десятки капель на каждое событие, можно сделать вывод, что этот последний механизм является абсолютно доминирующим. Заметим, что активация данного механизма происходит при динамической скорости трения ветра примерно 0.9 м/с, соответствующей скорости ветра на высоте 10 м – примерно 20 м/с.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Проведение экспериментов было поддержано проектом РНФ 19-17-00209, разработка алгоритмов обработки изображений была поддержана проектом РФФИ № 18-55-50005 и грантом президента МК-3184.2019.5, теоретический анализ выполнен при поддержке проектов РФФИ № 18-35- 20068, 18-05-00265, 18-35-00658, 19-05-00249.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreas E.L., A review of the sea spray generation function for the open ocean, in Atmosphere–Ocean Interactions, V. 1 edited by W. Perrie, WIT Press. Billerica. Mass. 2002. P. 46.
2. *Troitskaya Yu.I., Sergeev D.A., Kandaurov A.A., Baidakov G.A, Vdovin M.A., Kazakov V.I. //* J. Geophys. Res. 2012. V. 117. P. NC00J21.
3. *Koga M.* // Tellus. 1981. V.33. P. 552–563
4. *Lhuissier H., Villermaux E.* // J. Fluid Mech. 2012. V. 696. P. 5–44.
5. *Veron F., Hopkins C., Harrison E., Mueller J.A. //*Geophys. Res. Lett. 2012. V.39. P.L16602.
6. *Gelfand B.E.*// Prog. Energ. Combust. Sci. 1996. V. 22. P.201–265.

—— ♦♦♦ ——

ОСОБЕННОСТИ СГОРАНИЯ ПРИРОДНОГО ГАЗА В ГАЗОВЫХ ДВИГАТЕЛЯХ И ГАЗОДИЗЕЛЯХ

В.В. Синявский, А.В. Вакуленко, А.В. Гонтюрев, А.В. Кригульский, А.Н. Диваков
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
e-mail: sinvlad@mail.ru

Применение природного газа в двигателях внутреннего сгорания актуально, поскольку его разведанные запасы на планете значительно больше, чем нефти, стоимость газового топлива почти вдвое ниже, чем нефтяного, а токсичность выбросов по сравнению с дизелями заметно снижается. Также заметно уменьшаются выбросы CO2 как в связи с меньшим содержанием углерода в метане (российский природный газ содержит до 98% метана), так и с меньшим расходам природного газа по сравнению с дизельным топливом.

Применяются два метода конвертации дизелей для работы на природном газе: газовый двигатель с воспламенением газовоздушной смеси от свечи зажигания и газодизель. В обоих случаях нужно принимать меры для учета специфики сгорания природного газа в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания (ДВС).

ОБЩИЕ ОСОБЕННОСТИ СМЕСЕОБРАЗОВАНИЯ И СГОРАНИЯ МЕТАНА В ДВС

Более высокое октановое число по сравнению с бензином (доходящее до 120), что позволяет повысить степень сжатия в газовых двигателях при бездетонационной работе и, соответственно, увеличить мощность и топливную экономичность.

Газ хуже перемешивается с воздухом, чем мелкие капли жидкого топлива, поэтому в газовом двигателе необходимо применять специальные меры для получения гомогенной газовоздушной смеси после впрыска газа во впускную систему, а также часто увеличивать вихревую скорость движения воздушного заряда в цилиндре.

Концентрационные пределы воспламенения метана значительно шире, чем бензина, поэтому газовый двигатель в отличие от бензинового, может работать с значительно большим коэффициентом избытка воздуха, доходящим до 1,7 при обычном смесеобразовании и превышающем 2,0 при использовании форкамеры [1], что позволят разрабатывать газовые двигатели, работающие на бедной смеси.

В газодизелях способность дизельного топлива поджигать газовоздушную смесь

зависит от общей площади капель впрыскиваемого топлива. Поэтому чем меньше размер капель, тем меньше можно сделать запальную порцию дизельного топлива и, соответственно, больше будет доля замещения дизельного топлива газом. Размеры капель уменьшаются при увеличении давления впрыскивания топлива. Поэтому для уменьшения запальной порции дизельного топлива необходимо увеличивать давление впрыскивания, что достигается применением топливных систем высокого давления, например систем Common Rail [2].

Газовый двигатель может работать на стехиометрической и бедной газовоздушной смеси. В первом случае улучшается воспламенение и стабильность горения смеси, снижается вероятность детонации, повышается мощность двигателя, имеется возможность использовать трехкомпонентный нейтрализатор, применяемый на бензиновых двигателях [3]. Однако из-за стехиометрической смеси значительно возрастает температура газа перед турбиной, что ограничивает возможность форсирования двигателя наддувом, возрастает тепловая напряжённость деталей, снижается топливная экономичность и увеличиваются выбросы оксидов азота.

Газовый двигатель, работающий на бедной смеси, не имеет указанных выше недостатков, однако в нем сложнее организовать стабильное сгорание газовоздушной смеси, больше вероятность детонации и приходится устанавливать специальный нейтрализатор для снижения выбросов несгоревшего метана.

Газодизели можно разделить на классический газодизель, в котором впрыскивается большая доля дизельного топлива (порядка 20% на полной нагрузке и 100% на холостом ходу) [4], и двухтоплиный двигатель, в котором топливной системой высокого давления впрыскивается малая порция дизельного топлива только для воспламенения газа (порядка 5% на полной нагрузке и 33% на холостом ходу). В последнем случае запальная порция дизельного топлива используется только для воспламенения газа и после окончания сгорания дизельного топлива газ продолжает гореть по тому же механизму, что и в газовом двигателе. Поэтому в двухтопливном двигателе возможна детонация [5]. Кроме того, если оставить в двухтопливном двигателе форсунки от штатного дизеля, из-за малого количества проходящего через форсунки охлаждающего их дизельного топлива они могут выходить из строя. Поэтому желательно использовать в двухтопливном двигателе форсунки меньших размеров, но тогда он уже не сможет работать как дизель при отсутствии газа.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В МАДИ дизель Камминс-КАМА (6ЧН 10,7/12,5) был конвертирован в газодизель. Величины запальной порции дизельного топлива (ДТ) и вредных выбросов (CO2 и NOx) при трех частотах вращения и двух нагрузках (100% и примерно 35%) представлены на рис. 1 [6]. Были разработаны системы питания природным газом и электронного управления с использованием программного комплекса расчета показателей газового двигателя [7].

Достигнут тот же эффективный КПД, что и у базового дизеля (максимальное значение 0,43), малая порция запального дизельного топлива и существенное снижение токсичных выбросов. На 100% нагрузки и примерно 35% нагрузки, средняя запальная порция дизельного топлива составила, соответственно 5,6 и 8,8%, выбросы CO_2 уменьшились в среднем в 1,15 и 1,47 раза, а NO_x – в 1,52 и 7,4 раза.

Для конвертации дизеля КАМАЗ-7409 (8ЧН12/12) в газовый двигатель, в МАДИ были разработаны системы питания природным газом и электронного управления. Снижена степень сжатия базового дизеля. Поскольку часть впускаемого воздуха замещалась газовым топливом, для получения такой же мощности, что у базового дизеля, использовались другие турбокомпрессоры, обеспечивающие большее давление надду-

ва. На двигатель устанавливался нейтрализатор. В результате удалось получить те же мощностные параметры, что у базового дизеля, и заметное снижение выбросов [8].

По сравнению с базовым дизелем, у газового двигателя полностью отсутствуют выбросы сажевых частиц, выбросы оксидов азота NO_x уменьшились с 3,4 до 1,74 г/(кВт·ч), т.е. в 2 раза, выбросы CO уменьшились с 1,5 до 0,485 г/(кВт·ч), т.е. в 3,1 раза. Выбросы HC увеличилась на 18%, что может быть связано как с недостаточно совершенным процессом сгорания газа, так и с выбросом небольшого количества метана с продувочным воздухом в период перекрытия клапанов.

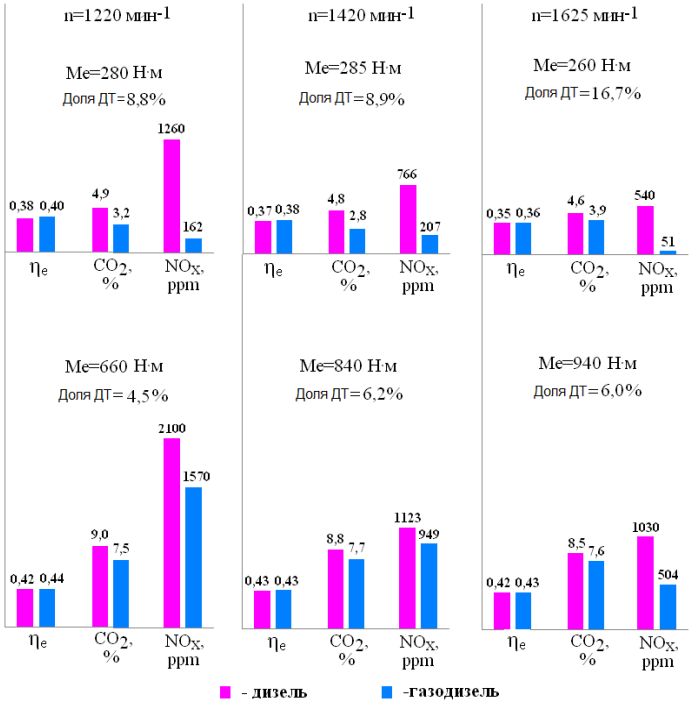


Рис. 1. Сравнение токсичных выбросов дизеля и газодизеля Камминс КАМА

ВЫВОДЫ

1. Разработаны системы питания и электронного управления газовым двигателем и газодизелем, обеспечивающие хорошее сгорание природного газа в цилиндрах.
2. Выполнена конвертация дизеля Камминс-КАМА в газодизель. Достигнут тот же эффективный КПД, что и у базового дизеля. На 100% и примерно 35% нагрузки, средняя запальная порция дизельного топлива составила, соответственно 5.6 и 8.8%, выбросы CO2 уменьшились в 1.15 и 1.47 раза, а NO_x – в 1.52 и 7.4 раза.
3. Выполнена конвертация дизеля КАМАЗ в газовый двигатель и получены те же мощностные показатели, что у базового дизеля, снижение выбросов CO в 3.1 раза, NOx в 2 раза и нулевые выбросы сажевых частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Klausner J., Lang J., Trapp C. *J624* – Der weltweit erste Gasmotor mit zweistufiger Aufladung // MTZ – Motortechnische Zeitschrift Ausgabe. 04. 2011.
2. Леонов И., Марков В., Свяжин К., Тихонов А.. Особенности применения газа в дизелях // АвтоГазоЗаправочный комплекс + Альтернативное топливо. – 2019. №6 (48). с. 31–32.
3. Лукшо В.А. Комплексный метод повышения энергоэффективности газовых двигателей с высокой степенью сжатия и укороченными тактами впуска и выпуска. Дис. … докт. техн. наук, Москва, 2015. 365 с.

4. Кудрявцев А., Ломашов В. Белазы XXI века с газодизелями семейства ДМ // АвтоГазоЗаправочный комплекс + Альтернативное топливо. 2010, № 3 (51), с. 3–6.
5. Ghazi a. Karim. Dual-Fuel Diesel engines, 2015, CRC Press, 287 p
6. Shatrov, M. G., Sinyavski, V. V., Dunin, A. Y., Shishlov, I. G., Vakulenko, A. V., Method of conversion of high- and middle-speed diesel engines into gas diesel engines // Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering. 2017. Vol. 15. No 3. pp. 383–395.
7. Хачиян А. С., Синявский В. В., Шишлов И. Г., Карпов Д. М. Моделирование параметров и характеристик двигателей, питаемых природным газом // Транспорт на альтернативном топливе. 2010. No 3 (15). сс.14–19
8. Хачиян А.С., Кузнецов В.Е., Водейко В.Ф,, Шишлов И.Г. Результаты разработки газовых двигателей в МАДИ (ГТУ) // Автозаправочный комплекс + Альтернативное топливо, № 3 (21), 2005, сс. 37–41.

——— ♦ ♦ ♦ ———

О РАСПАДЕ ЖИДКОСТИ НА КАПЛИ В ИСКРИВЛЕННЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ СТРУЯХ

Г.М. Сисоев, Ю.Д. Шихмурзаев
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
e-mail: g.m.sisoev@mail.imec.msu.ru
University of Birmingham, e-mail: y.d.shikhmurzaev@bham.ac.uk

Исследуется течение струи несжимаемой жидкости, вытекающей из источника, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. Приводятся общая постановка задачи и ее упрощенная модель в случае тонкой струи. Для тонкой струи определяется траектория, изучается механизм линейной неустойчивости, проводятся расчеты нелинейной задачи вплоть до распада на капли.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Течение закрученной капиллярной струи моделируется уравнениями Эйлера для несжимаемой жидкости в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси,

$$\nabla\mathbf{v} = 0,\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}\times\left(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}\right)$$

где $\mathbf{v}$ и p – скорость и давление в жидкости, ρ – плотность жидкости, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, t – время. В используемой криволинейной неортогональной системе одной из координат является длина вдоль некоторой базовой кривой, проходящей внутри струи, а двумя другими – полярные радиус η и угол θ в нормальной плоскости к базовой кривой. Уравнения движения удобно переписать в проекциях на трёхгранник Френе для базовой линии $R(\xi)$, так что касательный вектор τ, нормаль n и бинормаль b описываются уравнениями Френе.

Постановка задачи также включает кинематическое и динамическое условия на поверхности струи $f(\mathbf{r},t) = 0$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точек поверхности,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f = 0,\ p = \sigma\kappa_s$$

Здесь κ_S – кривизна поверхности струи, и σ – коэффициент поверхностного натяжения.

В безразмерном виде задача содержит три параметра подобия: число Вебера $\mathrm{We} = \rho U^2 H / \sigma$, число Фруда $\mathrm{Fr} = U / \sqrt{gl}$ и число Россби $\mathrm{Rb} = U / (\Omega L)$, где U и H – характерные скорость и радиус струи, и L – характерная кривизна базовой кривой.

Детальная постановка задачи может быть найдена в [1].

ТРАЕКТОРИЯ ТОНКОЙ СТРУИ

В случае тонкой струи, чей радиус мал по сравнению с характерной кривизной базовой линии ($H \ll L$), уравнения и граничные условия могут быть существенно упрощены.

В этом приближении траектория струи совпадает с базовой кривой, которая находится из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, следующих из уравнений движения, уравнений Френе и условия нормировки для натурального параметра ξ. Примеры расчета траекторий продольных скоростей (правый рисунок) показаны на Рис. 1.

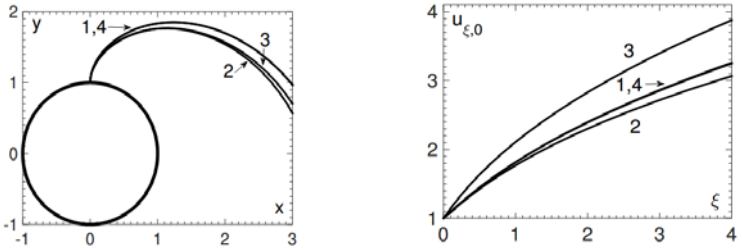


Рис. 1. Траектории (левый рисунок) и продольные скорости (правый рисунок) струив в следующих случаях: 1 – $We = 10,\ Rb = 1,\ Fr^2 = 25,$ 2–$We = 5,\ Rb = 1,\ Fr^2 = 25,$ 3–$We = 10,\ Rb = 0.8,\ Fr^2 = 25,$ 4–$We = 10,\ Rb = 1,\ Fr^2 = 6.25.$

РАСПАД СТРУИ НА КАПЛИ

Как и в случае течения струи в отстутствие внешних массовых сил распад закрученной струи определяется механизмом неусточивости Рэлея. Анализ линейной устойчивости закрученной искривленной струи [2] демонстрирует аналогию с распадом вертикальной падающей струи [3]. В обоих случаях наличие внешней массовой силы, т.е. центробежной силы или силы тяжести, ведет к изменению характеристик неустойчивых возмущений вдоль струи.

При рассмотрении волн, чья длина мала по сранению с характерным радиусом кривизны траектории струи, но велика по сравнению с ее толщиной, выводится одномерная нелинейная модель для нестационарных возмущений в струе [1,2]. Одномерная модель используется в численных расчетах нелинейного режима развития возмущений и изучении распада струи на капли. В области течения вблизи точки распада струи применяется метод конечных элементов для решения задачи в полной постановке.

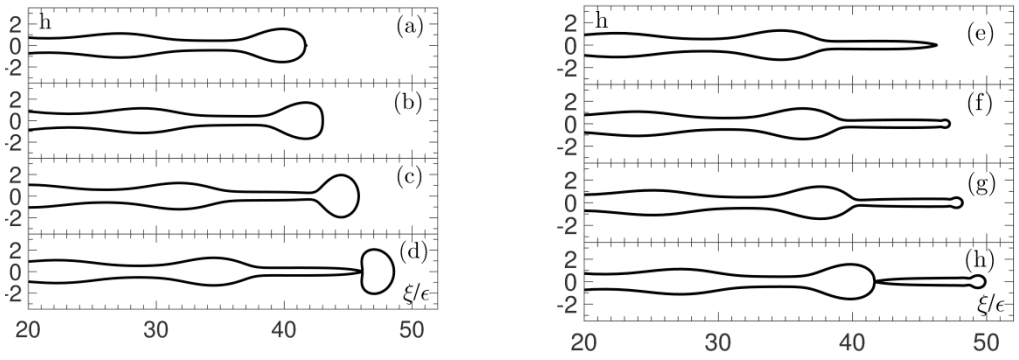


Рис. 2. Распад струи в случае 1 на Рис.1 при малом возмущении радиуса струи в начальном сечении. Панели (a)–(h) соответствуют моментам времени $t = 0,1.7,3.3,5.0,5.0,6.1,7,3,8.5$ *в интервале цикла формирования основной и вторичной капли.*

Результаты вычислений проказывают, что для возмущений заданной частоты, генерируемых в начальном сечении струи, происходит увеличение их длины вдоль траектории с последующим формированием локализованных возмущений и распадом струи. Показано, что суммарный объем формирующихся основной и вторичной капель может быть аппроксимирован линейной функцией радиуса основной (невозмущенной) струи в точке распада. Показаны сценарии формирования основных и вторичных капель (Рис.2).

Развитые модели и численные методы были использованы для анализа диспергирования жидкости с помощью вращающегося диска [4].

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований в рамках проекта 17-01-00057 и Engineering and Physical Sciences Research Council (Великобритания) в рамках проекта EP/K028553/1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shikhmurzaev Y.D., Sisoev G.M.* Spiralling liquid jets: verifiable mathematical framework, trajectories and peristaltic waves // J. of Fluid Mechanics. 2017. V. 819. P. 352–400.
2. *Li Y., Sisoev G.M., Shikhmurzaev Y.D.* On the breakup of spiralling liquid jets // J. of Fluid Mechanics. 2019. V. 862. P.364–384.
3. *Le Dizès S., Villermaux E.* Capillary jet breakup by noise amplification // J. of Fluid Mechanics. 2017, V.810. P. 281–306.
4. *Li Y., Sisoev G.M., Shikhmurzaev Y.D.* Spinning disk atomization: Theory of the ligament regime // Physics of Fluids. 2018. V. 30. 092101.

—— ♦♦♦ ——

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО КОНВЕКТИВНОМУ НАГРЕВУ МОДЕЛИ МАРСИАНСКОГО СПУСКАЕМОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С.Т. Суржиков
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: surg@ipmnet.ru

Выполнено расчетное исследование экспериментальных данных по конвективному нагреву лобовой поверхности модели спускаемого аппарата Mars Science Laboratory (MSL) при ее пространственном обтекании в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса. Показано, что использование алгебраических моделей турбулентности Болдуина–Ломакса и модели смешения Прандтля совместно с усредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса позволяет получить удовлетворительное согласие с экспериментальными и расчетными данными других авторов.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Э.В. Теодорович
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: teodor@ipmnet.ru

Сформулированная в работе [1] теорема об эквивалентности статистической динамики классической системы некоторой квантовой теории поля позволяет использовать при построении статистической теории турбулентности мощные математические методы, развитые для описания квантованных полей вне рамок теории возмущений. В квантовой теории поля подобный подход был предложен Ю. Швингером [2], положившим в основу построения теории квантованных полей метод характеристического (производящего) функционала, получившего для него уравнение в функциональных (вариационных) производных, решение которого представимо в виде функционального интеграла (континуального интеграла, интеграла по траекториям), соответствующего усреднению классической величины по квантовым флуктуациям (см. [3]). В применении к теории турбулентности авторы в основном ограничивались формулировкой задачи в терминах характеристического функционала [4,5]. В данной работе приводится дальнейшее развитие указанного подхода.

Характеристический функционал является обобщением понятия характеристической функции при описании случайных величин на случай случайных полей.

Случайные величины. Пусть имеется набор случайных величин a_n и задана вероятность P_n обнаружить в наборе величину a_n. Среднее значение случайной величины $< a >$ определяется формулой

$$< a >= \Sigma_n a_n P_n ,$$

а среднее значение функции от a_n формулой

$$< F(a) >= \Sigma_n F(a_n) P_n$$

Назовем характеристической функцией $\Phi(\eta)$ величину

$$< \exp\{i\eta a\} >= \Sigma_n \exp\{i\eta a_n\} P_n$$

Тогда

$$< a >= \frac{d}{id\eta}\Phi(\eta)\,|_{\eta=0}$$

и для среднего значения функции от a_n

$$< F(a) >= F\left[\frac{d}{id\eta}\right]\Phi(\eta)\,|_{\eta=0}$$

Поле случайных скоростей. В основе статистического описания турбулентного поля скоростей лежит уравнение Навье–Стокса (УНС) для несжимаемой жидкости при наличии внешней случайной и регулярной силы.

Далее с целью упрощения записи для совокупности координат пространственно-временной точки и номеров компонент вектора будем использовать цифровые обозначения $\{r_1, t_1, \alpha_1\} \equiv 1$, согласно которым $u_{\alpha_1}(r_1, t_1) \equiv u(1)$. Также будет подразумеваться интегрирование по пространственно-временным переменным и суммирование по индексам компонент с повторяющимися цифровыми обозначениями (правило Эйнштейна), т.е.

$$u(1)v(1) \equiv \Sigma_{\alpha_1}\int u_{\alpha_1}(r_1, t_1)v_{\alpha_1}(r_1, t_1)dr_1 dt_1$$

Когда векторные или тензорные индексы выписываются явно, цифровые обозначения будут относиться только к пространственно-временным переменным. В указанных обозначениях УНС представимо в виде (более подробно см. [7,8])

$$L^{(0)}(1,2)u(2) + 12V(1\,|\,2,3)u(2)u(3) = L[u] = X(1) + f(1) \qquad (1)$$

Внешняя случайная сила $X(1)$, являющаяся аналогом силы Ланжевена в теории случайных процессов, моделирует возникновение стохастичности за счет развития неустойчивости крупномасштабных течений жидкости. Для этой силы принимается, что она подчиняется центрированному нормальному распределению с парной корреляционной функцией $D^{(0)}(1,2)$.

Пространственное распределение поля скоростей в заданный момент времени $u(r,t)$ назовем реализацией поля скоростей, при этом статистическое описание турбулентных пульсаций поля скоростей подразумевает задание плотности вероятности различных реализаций поля скоростей $P[u(r,t)]$.

В теории случайных полей характеристическим (производящим) функционалом случайного поля скоростей назовем величину

$$\Phi[\eta] = \int d[u]P[u]\exp\{i\eta\cdot u\}(2)\ \eta\cdot u \equiv \int dr dt\eta(r,t)\cdot u(r,t)$$

которую можно рассматривать как функциональный аналог Фурье-образа функции распределения плотности вероятности случайных величин. В формуле (2) усреднение по реализациям поля скоостей $u(1)$ согласно УНС (1) соответствует усреднению по реализациям внешней случайной силы $X(1)$.

Средние значения функции случайных полей (статистические моменты, усредненные функции отклика на внешнее воздействие и др.) вычисляются путем выполнения операции функционального (вариационного) дифференцирования согласно формуле

$$< F[u(r,t)] >= F\left[\frac{\delta}{i\delta\eta(r,t)}\right]\Phi(\eta)\,|_{\eta=0} \qquad (3)$$

Далее выполним переход к новым функциональным переменным

$$\hat{\eta}(1) = \delta \ln \Phi[\eta, f] i\delta\eta(1), \quad \hat{f}(1) = \delta \ln \Phi[\eta, f] i\delta f(1) \tag{4}$$

При $\eta \to 0$ получим $\hat{\eta}(1) \to < u(1) >$.

Переход к новым функциональным переменным осуществляется с помощью функционального преобразования Лежандра путем введения нового функционала

$$\Psi[\hat{\eta}, \hat{f}] = -\ln \Phi[\eta, f] + i\eta\hat{\eta} + if\hat{f} \tag{5}$$

В этом случае

$$\delta\Psi i\delta\hat{\eta}(1) = \eta(1), \quad \delta\Psi i\delta\hat{f}(1) = f(1)$$

$$\frac{\delta\hat{\eta}(1)}{i\delta\eta(2)} = \frac{\delta^2 \ln \Phi}{i\delta\eta(1) i\delta\eta(2)} = C(1,2), \quad \frac{\delta\hat{f}(2)}{\delta\eta(1)} = \frac{\delta\hat{\eta}(1)}{\delta f(2)} = G(1,2) \tag{6}$$

где $C(1,2)$ – парная корреляционная функция (дисперсия) поля скоростей, функция $G(1,2)$ описывает откпик среднего поля скорости в пространственно-временной точке 1 на действие силового источника, локализованного в точке 2, иными словами, является функцией (тензором) Грина.

Рассмотрение вторых функциональных производных функционала Ψ по полям $\hat{\eta}$ и $\hat{f}$ позволяет ввести две новые функции.

$$D(1,2) = \frac{\delta^2\Psi}{i\delta\hat{f}(1) i\delta\hat{f}(2)} \tag{7}$$

которая интерпретируется как корреляционная функция эффективных случайных сил, возникающая при учете переноса импульса турбулентными пульсациями скорости, а

$$G^{-1}(1,2) = \frac{\delta^2\Psi}{i\delta\hat{f}(1)\delta\hat{\eta}(2)} \tag{8}$$

интерпретируемая как обратная функция Грина, определенная соотношением $G^{-1}(1,1')G(1',2) = \delta(1-2)$. (Отметим, что производные функционала Ψ только по полям $\hat{\eta}$ равны нулю, что следует из анализа диаграмм теории возмущений). Обратная функция Грина учитывает поправки к вязкости жидкости за счет эффектов перемешивания и может быть записана в виде

$$G^{-1}(1,2) = [G^{(0)}(1,2)]^{-1} - \Sigma(1,2)$$

где $[G^{(0)}(1,2)]^{-1} = L^{(0)}(1,2)$ – функция Грина линейной задачи. Уравнение (11) можно переписать в виде

$$G(1,2) = G^{(0)}(1,2) + G^{(0)}(1,1')\Sigma(1',2')G(2',2) \tag{9}$$

Это уравнение является аналогом уравнения Дайсона в квантовой теории поля, а величина Σ – аналогом "оператора собственной энергии". Вычисление смешанной производной дает

$$\delta^2\Psi\delta\eta(2)\delta\hat{f}(1) = i\frac{\delta f}{\delta\eta} = \delta\hat{\eta}(3)\delta\eta(2)\delta^2\Psi\delta\hat{\eta}(3)\delta\hat{f}(1) + \delta\hat{f}(3)\delta\eta(2)\delta^2\Psi\delta\hat{f}(3)\delta\hat{f}(1) = 0 \tag{10}$$

Уравнение (10) примет вид $C(1,1')G^{-1}(1',2) - G(1,1')D(1,'2) = 0$ или

$$C(1,2) = G(1,1')G(2,2')D(1',2'), \quad D(1,2) = \frac{\delta^2\Psi}{i\delta\hat{f}(1) i\delta\hat{f}(2)} \tag{11}$$

Это уравнение имеется в работе Швингера [2], а в статистической теории турбулентности уравнение (9) впервые было получено Уайлдом [6] путем анализа рядов теории возмущений с использованием техники Фейнмановских диаграмм.

До сих пор УНС не было использовано, а рассматривались только соотношения,

вытекающие из возможности статистического описания системы в терминах характеристического функционала. Функционал $\Psi[\hat{\eta},\hat{f}]$ поля скоростей, подчиняющегося уравнению (1), является решением уравнения в функциональных производных [8,9]

$$L^{(0)}(1,2)\hat{\eta}(2)+12V(1\,|\,2,3)\left[\hat{\eta}(2)\hat{\eta}(3)+\frac{\delta\hat{\eta}(3)}{i\delta\eta(2)}\right]=\frac{\delta\Psi}{i\delta\hat{f}(1)}+iD^{(0)}(1,2)\hat{f}(2) \tag{12}$$

Действие на уравнение (12) операторами функционального дифференцирования $\delta/i\delta\hat{\eta}$ и $\delta/i\delta\hat{f}$ позволяет получить представления для величин Σ и D

$$\begin{aligned}&\Sigma(1,2)=-V(1\,|\,2,3)\eta(3)+\\&+V(1\,|\,3,4))\left[G(3,3')C(4,4')\Gamma(3'\,|\,4',2)-12G(3,3')G(4,4')\Gamma(3',4'\,|\,2)\right]\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&D(1,2)=D(0)(1,2)+\\&+V(1\,|\,3,4)\left[G(3,3')C(4,4')\Gamma(2,3'\,|\,4')-12G(3,3')G(4,4')\Gamma(2,3',4')\right]\end{aligned} \tag{14}$$

где были введены три новые функции

$$\begin{aligned}&\Gamma(1\,|\,2,3)=\frac{\delta^3\Psi}{\delta\hat{f}(1)i\delta\hat{\eta}(2)i\delta\hat{\eta}(3)}=\frac{\delta G^{-1}(1,2)}{i\delta\hat{\eta}(3)}=V(1\,|\,2,3)-\frac{\delta\Sigma^{(1)}(1,2)}{i\delta\hat{\eta}(3)}\\&\Gamma(1,2\,|\,3)=\frac{\delta^3\Psi}{\delta\hat{f}(1)\delta\hat{f}(2)i\delta\hat{\eta}(3)}=\frac{\delta D(1,2)}{i\delta\hat{\eta}(3)}=\frac{\delta G^{-1}(1,2)}{\delta\hat{f}(3)}=-\frac{\delta\Sigma^{(1)}(1,2)}{\delta\hat{f}(3)}\\&\Gamma(1,2,3)=\frac{\delta^3\Psi}{\delta\hat{f}(1)\delta\hat{f}(2)\delta\hat{f}(3)}=\frac{\delta D^{(1)}(1,2)}{\delta\hat{f}(3)}\end{aligned} \tag{15}$$

называемые в диаграммной технике вершинами и интерпретируемые в квантовой теории поля как величины, описывающие соответственно процессы слияния двух квантов в один, распад одного кванта на два и порождение трех квантов внешним полем (вершины первого, второго и третьего типов). На необходимость учета вершин всех трех типов впервые было указано в работе [1](см. также [7, 8]). Из формул (13)–(14) можно видеть, что формула для $D^{(1)}$ может быть получена если в формуле для $\Sigma(1)$ сделать замену $\Gamma(3'\,|\,4',2)\to\Gamma(2,3'\,|\,4')$ и $\Gamma(3',4'\,|\,2)\to\Gamma(2,3',4')$.

Функциональная формулировка позволяет исключить из системы вершины второго и третьего типов, выразив их через вершину первого типа [9] и в результате формулы для Σ и D примут вид.

$$\Sigma(1,2)=-V(1\,|\,2,3)\eta(3)+\frac{3}{2}V(1\,|\,3,4))G(3,3')C(4,4')\Gamma(3'\,|\,4',2) \tag{16}$$

$$D(1,2)=D^{(0)}(1,2)+\frac{3}{2}V(1\,|\,3,4)C(3,3')C(4,4')\Gamma(2\,|\,3',4') \tag{17}$$

Воспользовавшись низшим приближением теории возмущений для вершины $\Gamma(1\,|\,2,3)\approx V(1\,|\,2,3)$ получим замкнутую систему уравнений для величин, описывающих статистические свойства турбулизованной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Martin, P. C., Siggia, E. D., Rose, H. A., Statistical dynamics of classical systems. Phys. Rev. A, 1973, Vol. **8**, No.1, pp.423–437.
2. Schwinger J. On the Green's functions of quantized fields. Part 1. Proc.Nat. Acad. Sci., USA. 1951, Vol. **37** pp.452–455.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука. 1984.

4. Hopf, E., Statistical hydrodynamics and functional calculus. J. Ratl. Mech. Anal., 1952, Vol.1, pp.87–123.
5. Lewis, R. M., Kraichnan, R. H., A Space-Time Functional Formalism for Turbulence. Comm. on Pure and Appl. Math., 1962, Vol. XV, pp.397–411.
6. Wyld, H. W., Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid. Ann. Phys., 1961, Vol. 14, pp.143–165.
7. Теодорович, Э.В. Применение методов теории поля и ренормализеционной групы для описания развитой турбулентности. Успехи механики. 1990. **13**, N 1, сс.81–121
8. Теодорович, Э.В. Диаграммные уравнения теории развитой турбулентности. Теор. и Мат. Физ. 1994. **101**, N 1, сс.26–37.
9. Теодорович, Э.В. О функциональной формулировке статистической теории турбулентности и метод скелетных диаграмм Фейнмана. ПММ. 2019. **83**, № 5–6, сс.769–786.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ДИНАМИКА ТАБАЧНОГО ДЫМА ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ОТКРЫТОЙ ТРУБЕ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА

Л.А. Ткаченко
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: luda_tkacnenko@inbox.ru

В настоящее время важной является проблема удаления взвешенных в воздухе мелкодисперсных включений промышленного происхождения. Воздействие акустической волны в ограниченных объемах, особенно вблизи резонансных частот, способствует более эффективному осаждению таких включений [1]. Исследования по волновой динамике дисперсных сред являются актуальными как с теоретической, так и с прикладной точек зрения [2, 3]. Ранее изучена коагуляция капель и частиц аэрозолей [4–6] с диаметрами 1–10 мкм при нелинейных колебаниях в закрытой трубе на первой собственной частоте в ударно-волновом режиме. Также экспериментально исследованы ускоренная коагуляция и осаждение капель мелкодисперсного аэрозоля ди-этил-гексил-себакат с диаметром капель 0.863 мкм в трубах с различными условиями на концах в безударно-волновом, ударно-волновом и переходном режиме колебаний вблизи резонансных частот [7–14]. В [15] изучено влияние степени заполнение закрытой трубы табачным дымом на время осаждения его частиц при резонансных колебаниях. В представленной работе изучается динамика табачного дыма в частично заполненной открытой трубе при нелинейных колебаниях на первой собственной частоте.

Колебания внутри вертикальной кварцевой трубой длиной L_0 = 0.918 м создавались плоским поршнем диаметром $2R$ = 0.1 м при помощи виброгенератора марки TIRAvib S 5220/LS фирмы TIRA. Пассивный конец трубы оставлялся открытым. Управление и контроль вибростендом осуществлялись через компьютер посредством пьезоэлектрического IEPE акселерометра марки 4513 фирмы Bruel & Kjaer и контроллера типа VR9500 фирмы Vibration Research Corporation. В качестве рабочей среды использовался табачный дым. Давление среды измерялось пьезоэлектрическим датчиком давления модели 8530C-15 фирмы Bruel & Kjaer, сигнал с которого подавался на трехканальный мостовой усилитель напряжения ENDEVCO модель 136 фирмы Bruel & Kjaer и далее регистрировался на цифровом осциллографе модели DSO 3062A фирмы Agilent Technologies. Видеосъемка процесса осаждения табачного дыма велась на камеру Canon EOS 650D, которая располагалась на штативе, перпендикулярно трубе на расстоянии 0.5 м от неё. Для получения четкой и контрастной картины за трубой устанав-

ливался черный экран. Измерение светопроницаемости табачного дыма производилось люксметром марки АТТ-1505 фирмы Актаком. В качестве источника света использовался белый светодиод. Он размещался так, чтобы луч света проходил через трубу сквозь дым и попадал в центр светочувствительного датчика люксметра. Данные с люксметра подавались на компьютер через интерфейс RS-232 и обрабатывались специальной программой АТТ-1006.

Эксперименты проводились при заполнении дымом трубы на различную высоту: на четверть её длины, половину, три четверти и полностью. Во всех случаях табачный дым запускался в трубу с одинаковой начальной числовой концентрацией $N_0 = 7\times10^8$ частиц/см^3. Данная начальная числовая концентрация соответствует малым объемному $\alpha = 5.02\cdot10^{-5}$ и массовому $m = 0.058$ содержаниям частиц табачного дыма в трубе [2]. Создавались синусоидальные колебания на первой собственной частоте $\nu = 90.3$ Гц с амплитудами смещения поршня $l = 0.375$ мм, 0.75 мм и 1.5 мм, включалась видеосъемка и регистрация данных с люксметра. При указанных амплитудах возбуждения происходило искажение формы волны давления среды, но ударные волны не возникали, что соответствовало переходному режиму колебаний [14].

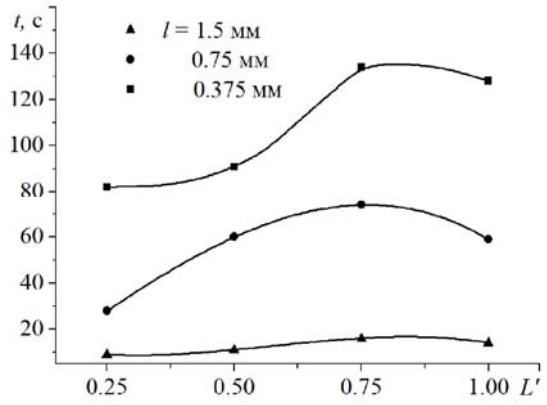


Рис. 1. Зависимость времени осаждении табачного дыма от высоты заполнения трубы на первой собственной частоте ν = 90.3 Гц. Сплошная линия – полиномиальная аппроксимация.

Рассмотрим результаты экспериментальных исследований. После запуска колебаний и достижения первой собственной частоты начиналось движение дыма в виде вихрей и происходило осаждение дыма на стенках трубы. Визуализация процесса показала, что для всех случаев вихри образовывались внутри трубы. Только при полном заполнении часть дыма из верхней части трубы выбрасывалась в окружающее пространство. Такое движение дыма обусловлено вторичными течениями, возникающими в трубе при нелинейных колебаниях, в виде тороидальных вихрей [16]. Они занимают практически всю длину трубы, а вблизи поршня и на открытом конце трубы имеются участки вихрей с направлением движения противоположным направлению движения основных вихрей. Таким образом, на дым, заполняющий трубу частично, оказывал влияние только основной вихрь, и частицы двигались только внутри трубы, а при полном заполнении, за счет участка вихревого движением вблизи открытого конца, часть дыма в верхней части трубы выбрасывалась в окружающую среду. Числовая концентрация частиц табачного дыма со временем монотонно уменьшается, что связано с осаждением их на стенках трубы. Когда колебания отсутствуют, естественное осаждение в трубе заканчивается примерно за 3000 с – это в десятки раз медленнее, чем при наличии колебаний. Ускоренное осаждение дыма в трубе при наличии колебаний, как уже говори-

лось выше, обусловлено вторичными течениями в виде вихрей, вовлекающих в движение частицы. С увеличением амплитуды смещения поршня возрастает интенсивность колебаний, соответственно увеличиваются амплитуда колебаний давления и скорость вихревого движения, что ведет к более быстрому уменьшению числовой концентрации. При этом для всех исследуемых амплитуд смещения поршня форма волны давления среды близка к синусоидальной.

По проделанным экспериментам определялось время осаждения дыма от высоты заполнения для разных амплитуд смещения поршня (рис. 1). Обнаружена немонотонная зависимость времени осаждения табачного дыма от степени заполнения трубы. Например, для амплитуды смещения поршня l = 1.5 мм минимальное время осаждения дыма (9 секунд) имело место в наименее заполненной трубе, где наблюдался существенный выброс в свободную часть трубы. Несколько медленнее происходило осаждение в трубе, заполненной дымом на половину (11 секунд) и на три четверти (16 секунд). При этом при полностью заполненной трубе время осаждения снова ускоряется (14 секунд). Это связано с тем, что при полном заполнении, часть дыма в верхней части трубы выбрасывается в окружающую среду. Изменение амплитуды смещения поршня оказывает значительное влияние на время осаждения дыма, так для вдвое меньшей амплитуды смещения поршня l = 0.75 мм эти значения равны уже 28 с, 60 с, 74 с и 59 с, соответственно.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследование выполнено при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН №20: «Новые вызовы климатической системы Земли».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медников Е.П.* Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 263 с.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
3. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технология. М.: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 712 с.
4. *Гуляев А.М., Кузнецов В.М.* Коагуляция аэрозолей под действием периодических ударных волн // Акустический журнал. 1962. Т. 8. № 4. С. 473 – 475.
5. *Temkin S.* Droplet agglomeration induced by weak shock waves // Phys. Fluids. 1970. V. 13. P. 1639 – 1641.
6. *Shuster K., Fichman M., Goldshtein A., Gutfinger C.* Agglomeration of submicrometer particles in weak periodic shock waves // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 5. P. 1802 – 1805.
7. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р., Ткаченко Л.А.* Экспериментальное исследование коагуляции аэрозоля в трубе вблизи субгармонического резонанса // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42. № 5. С. 788 – 795.
8. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А.* Экспериментальное исследование коагуляции и осаждения аэрозоля в закрытой трубе в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 4. С. 603 – 605.
9. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А.* Экспериментальное исследование колебаний аэрозоля в трубах в безударно-волновом режиме вблизи резонанса // Доклады академии наук. 2013. Т. 452. № 2. С. 161 – 164.
10. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А.* Экспериментальное исследование колебаний аэрозоля в открытой трубе в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 6. С. 955 – 957.
11. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А.* Резонансные колебания аэрозоля в

трубе с диафрагмой в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52. № 6. С. 921 – 926.
12. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р.* Экспериментальное исследование коагуляции и осаждения газовзвеси в закрытой трубе при переходе к ударно-волновому режиму // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. № 3. С. 484 – 486.
13. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А.* Экспериментальное исследование резонансных колебаний аэрозоля в трубах в режиме перехода к ударным волнам // Доклады академии наук. 2017. Т. 475. № 3. С. 273 – 276.
14. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р. Динамика аэрозоля в открытой трубе при колебаниях различной интенсивности вблизи резонанса // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. № 1. С. 145 – 147.
15. *Gubaidullin D.A., Zaripov R.G., Tkachenko L.A., Shaidullin L.R.* Deposition of Polydisperse Gas Suspensions with Nonlinear Resonance Oscillations in a Closed Tube // The J. of the Acoustical Society of America. 2019. V. 145. № 1. P. EL30 – EL33.
16. Ткаченко Л.А., Сергиенко М.В. Резонансные колебания газа в открытой трубе в безударно-волновом режиме // Акустический журнал. 2016. Т. 62. № 1. С. 44 – 51.

—— ♦♦♦ ——

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ТВЁРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ГАЗОВОЙ ВЗВЕСИ ТВЁРДЫХ ЧАСТИЦ

Д.А. Тукмаков
ИММ обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru

Многие явления и процессы, протекающие в естественной природе и технике, связаны с движением сплошных сред, являющихся неоднородными по своим механическим и физико-химическим свойствам, в связи с этим одним из важных разделов современной механики жидкости и газа является динамика неоднородных сред [1–6]. При этом экспериментальное исследование динамических процессов в неоднородных средах в ряде случаев затруднено, и изучение данных сред требуют создания математических моделей.

Математическая модель применённая в данной работе включает в себя уравнения движения несущей среды и фракций дисперсной фазы. Одним из наиболее важных параметров дисперсной компоненты неоднородной смеси являлась «средняя плотность» – представляющая собой произведение объемного содержания дисперсной компоненты на физическую плотность материала дисперсной фазы. Физическая плотность материала дисперсных включений в процессе течения многофазной среды не изменяется. При этом объемное содержание является функцией временной и пространственных переменных.

Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье–Стокса [7,8] для сжимаемого теплопроводного газа, при этом в отличие от уравнений динамики однородной среды в правых частях уравнений находятся слагаемые отвечающие за межфазное силовое взаимодействие и теплообмен :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho_1\ u_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_1\ u_1^2+p-\tau_{xx}\right)+\frac{\partial}{\partial\ y}\left(\rho_1 u_1 v_1-\tau_{x y}\right)=-\sum_{i=2}^{m}F_{xi}+\sum_{i=2}^{m}\alpha_i\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_1 u_1 v_1-\tau_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_1 v_1^2-\tau_{yy}\right)=-\sum_{i=2}^{m}F_{yi}+\sum_{i=2}^{m}\alpha_i\frac{\partial p}{\partial y},, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(e_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[e_1+p-\tau_{xx}\right]u_1-\tau_{xy}\,v_1+\lambda\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left[e_1+p-\tau_{yy}\right]v_1-\tau_{xy}\,u_1+\lambda\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)=$$

$$=\sum_{i=2}^{m}Q_i-\sum_{i=2}^{m}\left|F_{ix}\right|(u_1-u_i)-\sum_{i=2}^{m}\left|F_{iy}\right|(v_1-v_i)+\sum_{i=2}^{m}\alpha_i\left(\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{xx}=\mu\left(2\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{2}{3}D\right),\ \tau_{yy}=\mu\left(2\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{2}{3}D\right),\ \tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right),\ D=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Динамика *i*-ой фракции дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности, уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения энергии; записанными с учетом теплообмена и обмена импульсом с несущей средой:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i u_i^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i)=F_{i x}-\alpha_i\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_i v_i^2\right)=F_{yi}-\alpha_i\frac{\partial p}{\partial y}\ ,$$

$$\frac{\partial(e_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i)+\frac{\partial}{\partial y}(e_i v_i)=-Q_i\ ,$$

$$\rho_i=\alpha_i\ \rho_{i0},\ \ e_i=\rho_i C_{vi}T_i,$$

$$F_{x\,i}=\frac{3}{4}\frac{\alpha_i}{(2r_i)}C_d\,\rho_i\sqrt{(u_1-u_i)^2+(v_1-v_i)^2}\,(u_1-u_i)+\alpha_i\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)+$$

$$+0.5\alpha_i\rho_i\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_i}{\partial t}-u_i\frac{\partial u_i}{\partial x}-v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right),$$

$$F_{iy}=\frac{3}{4}\frac{\alpha_i}{(2r)}C_d\,\rho_1\sqrt{(u_1-u_i)^2+(v_1-v_i)^2}\,(v_1-v_i)+\alpha_i\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+0.5\alpha_i\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{\partial v_i}{\partial t}-u_i\frac{\partial v_i}{\partial x}-v_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)-\rho_i g,$$

$$V_i=[u_i,v_i],i=1,...n;C_{d\,i}=\frac{24}{\mathrm{Re}_{i1}}+\frac{4}{\mathrm{Re}_{i1}^{0.5}}+0.4,\ ,$$

$$M_{i1}=\left|\bar{V}_1-\bar{V}_i\right|/c\ ,\ \mathrm{Re}_i=\rho_1\left|\bar{V}_1-\bar{V}_i\right|2r/\mu,\ \mathrm{Pr}=\gamma\ C_p\mu/\lambda$$

Здесь p, ρ_1, u_1, v_1 –давление, плотность, декартовы составляющие скорости несущей среды в направлении осей x и y соответственно; T_1, e_1 –температура и полная энергия газа; параметры i-ой фракции дисперсной фазы ρ_i, T_i, e_i, u_i, v_i – «средняя плотность»,

температура, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости дисперсной фазы в направлении осей *x*, *y*. Температура несущей среды находится из уравнения $T_1=(\gamma-1)(e_1/\rho_1-0.5(u_1^2+v_1^2))/R$, где R – газовая постоянная несущей фазы. Внутренняя энергия взвешенной в газе *i*– ой фракции дисперсной фазы определяется как $e_i=\rho_i C_{pi} T_i$, где C_{pi} – удельная теплоемкость единицы массы вещества, фракции дисперсной фазы. Тепловой поток между газом и *i*-ой фракцией твердой компоненты смеси описывается следующим образом $Q_i=\alpha_i^T 4\pi r_i^2(T_1-T_i)n_i=6\alpha_i Nu_i\lambda_t(T_1-T_i)/(2r_i)$ где α_i^T коэффициент теплообмена на поверхности частицы – несущая среда. Здесь n_i, r_i –концентрация и радиус частиц *i*-ой фракции твёрдой фазы газовзвеси. Число Нуссельта определяется с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительных чисел Маха, Рейнольдса и от числа Прандтля:

$$Nu_i = 2\exp(-M_{i0}) + 0.459\,\mathrm{Re}_i^{0.55}\,\mathrm{Pr}^{0.33},\ 0 < M_{i0} < 2,\ 0 < Re_{i0} < 10^5. \quad (3)$$

Система уравнений (2)–(3) решалась с помощью явного конечно-разностного метода Мак-Кормака [7].

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ (номер гранта МК-3497.2018.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд Б.Е., Губанов А.В., Медведев Е.И., Цыганов С.А. Ударные волны при разлете сжатого объема газовзвеси твёрдых частиц//ДАН СССР. 1985, Т.281, №5-С.1113–1116.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1 Наука, 1987.–464с.
3. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003, 284 с.
4. Тукмаков А.Л. Численное моделирование колебаний монодисперсной газовзвеси в нелинейном волновом поле. // ПМТФ. 2011.Т.52. №2. С.36–43.
5. Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. Численное моделирование динамики волновых систем на основе явной схемы Мак-Кормака // Известия вузов. Проблемы энергетики, 2012. № 5–6. С. 3 – 10.
6. Тукмаков Д.А. Теоретическое исследование релаксации интенсивности скачка давления на фронте ударной волны в газовзвеси // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии, 2019, № 3, С.3–11.
7. Fletcher C.A. Computation Techniques for Fluid Dynamics, Springer-Verlang, Berlin et al., 1988, 502 P.
8. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 336 С.

—— ♦ ♦ ♦ ——

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА УСТАНОВКЕ ПГВ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА С ПОМОЩЬЮ КОДА STEG

Тунг Тхань Ле, В.И. Мелихов
Национальный исследовательский университет «МЭИ», e-mail: ga.mo.bk@gmail.com
А.А. Неровнов, С.М. Никонов
АО «Электрогорский научно-исследовательский центр по безопасности АЭС»

Парогенераторы (ПГ) горизонтального типа используются на российских атомных станциях с реакторами, охлаждаемыми водой (ВВЭР) [1]. Отличительной особенностью горизонтальных ПГ является неравномерное парообразование в объеме ПГ и, как следствие этого, неравномерный расход пара вдоль поверхности испарения. Поэтому для выравнивания расхода пара применяются погруженные дырчатые листы (ПДЛ), обладающие большим гидравлическим сопротивлением, что способствует более равномерному распределению пара. В настоящее время используются ПДЛ с равномерной перфорацией. Однако для повышения выравнивающей способности было предложено разработать ПДЛ с неравномерной перфорацией: в зоне максимальной паровой нагрузки использовать листы с меньшей степенью перфорации, а в зонах с умеренной паровой нагрузкой – листы с большей степенью перфорации. В связи с этим в ЭНИЦ (Электрогорск, Московская обл.) была построена испытательная установка ПГВ, представляющая собой двумерную модель верхней части горизонтального ПГ. В данной работе проводится анализ экспериментов с помощью расчетного кода STEG.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ КОДА STEG

Математическая модель, разработанная для кода STEG, основана на нестационарных трехмерных уравнениях механики двухфазных сред [2]. Для воды (фаза 1) и пара (фаза 2) формулируются законы сохранения массы, количества движения и энергии, которые дополняются замыкающими соотношениями, описывающими межфазное взаимодействие. Детальное описание полуэмпирических корреляций для силы межфазного трения, использующихся в коде STEG, приводится в [3].

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ ПГВ

Экспериментальная модель представляет собой поперечную “вырезку” натурного парогенератора ПГВ-1000, размещенную вдоль горизонтальной оси сосуда высокого давления диаметром 1670 мм, рис.1. Длина нижней части модели 2450 мм, ширина модели 100 мм. Вертикальные размеры модели приняты равными натурным. Основные технические характеристики стенда: давление пара – 7 МПа; расход пара – от 4. до 8 т/ч.

Сепарационная схема модели включает в себя ПДЛ, размещенный в нижней части модели, и пароприемный дырчатый щит (ППДЩ), расположенный в верхней части модели и имеющий степень перфорации 4.5%. Использовались два варианта ПДЛ: с равномерной (6 %) и неравномерной (4% и 8%) перфорацией.

Для моделирования неравномерности паровой нагрузки в ПГ паровой раздающий коллектор был разделен с помощью перегородки на “горячую” и “холодную” половины с раздельной подачей греющего пара.. В нижней части модели расположен имитатор трубного пучка, состоящий из трех рядов трубок наружным диаметром 16 мм.

Измеряются значения истинного объемного паросодержания под и над ПДЛ на “горячей” и “холодной” сторонах (φ_1–φ_4), а также за закраиной (φ_5), а также перепад давления ПДЛ по его длине в четырех точках (Δp_1, Δp_2, Δp_3, Δp_4).

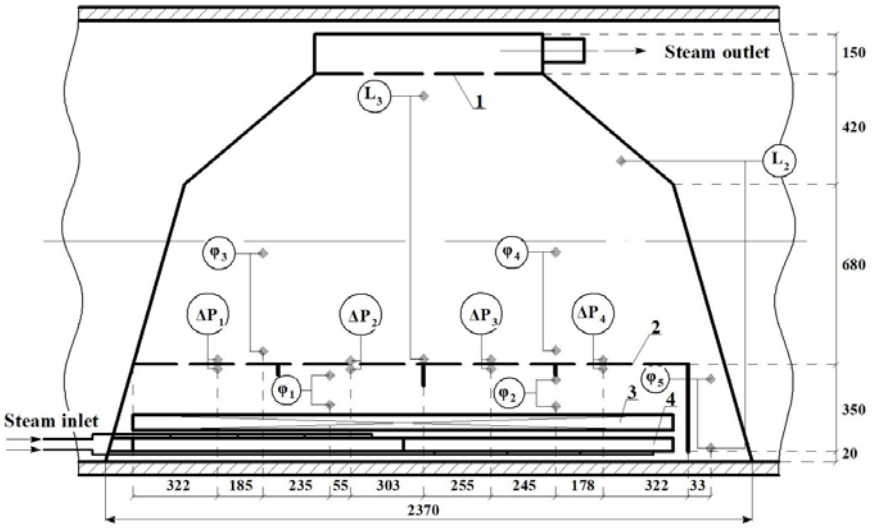


Рис. 1. Установка ПГВ. 1 – ППДЩ, 2 – ПДЛ, 3 – трубный пучок, 4 – паровой коллектор

Экспериментальная установка работает следующим образом. При заданном значении уровня пар подается в коллектор, расположенный в нижней части модели. Из коллектора пар барботирует через имитатор трубного пучка и поступает в пространство под ПДЛ. В пространстве под ПДЛ пар растекается и через отверстия в ПДЛ поступает в двухфазный слой над ПДЛ и далее в паровой объем модели. В паровом объеме пар сепарируется, поступает через отверстия ППДЩ в коллектор и далее в сбросной трубопровод модели. Вода, вынесенная паром через отверстия ПДЛ отводится в закраину между корпусом модели и закраиной ПДЛ.

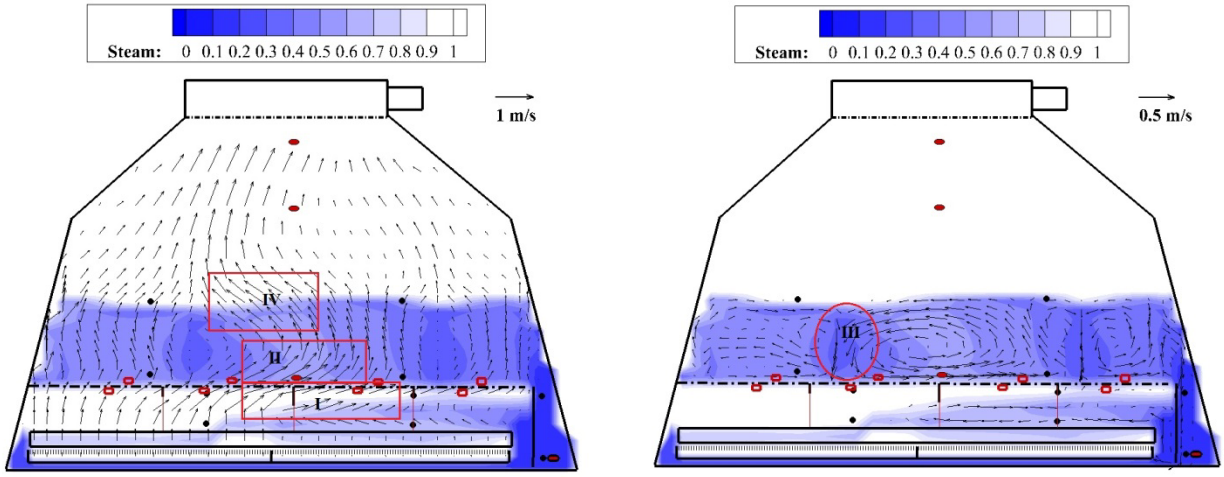
АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТОВ КОДОМ STEG

Были выполнены четыре серии экспериментов: 1) серия "1:1" (равномерная подача пара по длине установки, расход пара менялся в диапазоне 4–8 т/ч, 2) серия "3:1" (неравномерная подача пара: на горячую сторону 5,3 т/ч, а на холодную – 1,8 т/ч), 3) серия "2:0" (сильно неравномерная подача пара: 4 т/ч на горячую сторону, а на холодную – 0), 4) серия "0:2" (сильно неравномерная подача пара: 0 на горячую сторону, а на холодную – 4 т/ч).

Предварительные расчеты исходной версией кода STEG показали плохое совпадение с экспериментальными данными. Как выяснилось наибольшее влияние на результаты оказывает модель силового межфазного взаимодействия. В результате проведенных исследований было установлено, что наилучшее совпадение с экспериментами получается при использовании различных моделей в трех характерных зонах установки, а именно, выше ПДЛ – модель [4], в зоне трубного пучка – модель [5] и в зоне между трубным пучком и ПДЛ – модифицированная модель [5] с увеличенным коэффициентом межфазного трения.

Рассмотрим наиболее важные для практики эксперименты серии "3:1". Распределение паросодержания и приведенная скорость пара и воды показаны на рис.2. Качественная картина течения пароводяной смеси одинакова для ПДЛ с равномерной и неравномерной перфорацией. Массовый расход пара из "горячей" стороны коллектора в три раза превышает расход пара из "холодной" стороны. В соответствие с этим под ПДЛ слева находится практически чистый пар, а правой части присутствует достаточно много воды. Благодаря гидравлическому сопротивлению ПДЛ часть пара с левой "горячей" стороны перетекает под ПДЛ направо на "холодную" сторону (зона I). В результате значительная часть пара протекает на холодной половине вблизи границы с горя-

чей половиной – зона II. Этому способствует также наличие "куска" воды над "горячей" половиной ПДЛ (зона III). На горячей половине выходит меньшее количество пара через ПДЛ. Однако после барботажа через двухфазный слой над ПДЛ значительное количество пара с холодной стороны возвращается опять на горячую половину – зона IV. Видно, что вблизи ППДЩ расход пара на горячей половине больше, чем на холодной, т.е. полного выравнивания расхода пара не происходит.



а) *б)*

Рис. 2. Распределение паросодержания и скорости пара (а) и воды (б)

Сравнение рассчитанных и измеренных значений паросодержания в этих экспериментах показывает достаточно хорошее совпадение (<8%). Для перепадов давления на ПДЛ совпадение несколько хуже (<15%), что объясняется сложной негомогенной структурой ("куски" воды) двухфазного слоя, образующегося на ПДЛ, небольшие смещения этих "кусков" в продольном направлении заметно влияют на величину перепада давления.

С помощью кода STEG были рассчитаны все четыре серии экспериментов и установлены качественные закономерности протекания двухфазных процессов. Погрешности расчетов паросодержания ограничивались 15–20%, а перепадов давления на ПДЛ - 40–50%. Наибольшие погрешности, как и ожидалось, наблюдались при расчетах экспериментов с сильно неравномерной подачей пара (серии "2:0" и "0:2"), в которых формировалась сложная двумерная картина течения двухфазного пароводяного потока в установке.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержки Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № 18-08-01159.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трунов Н.Б., Логвинов С.А., Драгунов Ю.Г.* Гидродинамические и теплохимические процессы в парогенераторах АЭС с ВВЭР // М.: Энергоатомиздат, 2001. С. 318.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. // М.: Наука, 1987. С.464.
3. *Melikhov, V.I., Melikhov, O.I., Parfenov, Yu.V. and Nerovnov, A.A.* Simulation of the thermal-hydraulic processes in the horizontal steam generator with the use of the different interfacial friction correlations // Science and Technology of Nuclear Installations. 2011. Vol. 2011. Article ID 181393, 9 pages. https://doi:10.1155/2011/181393.
4. TRACE V5.0. Theory Manual. Field Equations, Solution methods and Physical models. 2007. U.S. Nuclear Regulation Commission, Washington.

5. *Simovic Z.R., Ocokoljic S., Stefanovic V.D.* Interfacial friction correlations for the two-phase flow across tube bundles. Int. J. Multiphase Flow. 2007. Vol.33. No 2. P.217–226. https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.08.003.

—— ♦♦♦ ——

О ВОЗМОЖНОМ МЕХАНИЗМЕ МИГРАЦИИ РАКОВЫХ КЛЕТОК

С.Ф. Урманчеев[1], А.Д. Низамова[1], В.Н. Киреев[2]
[1] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, e-mail: said@anrb.ru
[2] Башкирский государственный университет, e-mail: kireev@anrb.ru

Вопрос о механизме клеточной миграции возникает, прежде всего, в связи с проблемой метастазирования опухоли. Безусловно, это очень сложный процесс, который обусловлен большим количеством факторов химической и биологической природы. Среди весьма значительного числа публикации по моделированию клеточной миграции отметим серию публикаций, в которых ключевым автором можно назвать профессора Алекса Могильнера. В частности это работы [1] – [3], посвященные детальному анализу физико-химических процессов в процессе перемещения клеток и построению кинетических моделей, определяющие миграцию. При многочисленных достоинствах этих и многих других работ в этой области следует указать и на тот факт, что перемещение клетки может осуществляться благодаря возникновению течения жидкости в окрестности клетки благодаря изменению поверхностного натяжения в окружении поверхностно-активных веществ, которыми могут служить питательные субстраты или иные аттрактанты. Таким образом, возникает задача о концентрационно-капиллярной конвекции [4]. Для анализа формирования потока жидкости, обусловливающего перемещение клетки, рассмотрим задачу о плоской капле, помещенной в жидкость, содержащую неравномерно распределенный субстрат.

В итоге придем к формулировке задачи об установившемся течении на границе раздела двух жидкостей в присутствии питательного субстрата или аттрактанта. Будем при этом считать, что одна из жидкостей сосредоточена в плоской капле, а другая – окружает её (рис. 1). Плоскость x_1ox_2 сопоставим со срединной поверхностью плоской капли. Субстрат распределен в верхней жидкости и обладает свойствами поверхностно-активного вещества. Примем, что его концентрация линейно возрастает в направлении оси x_1.

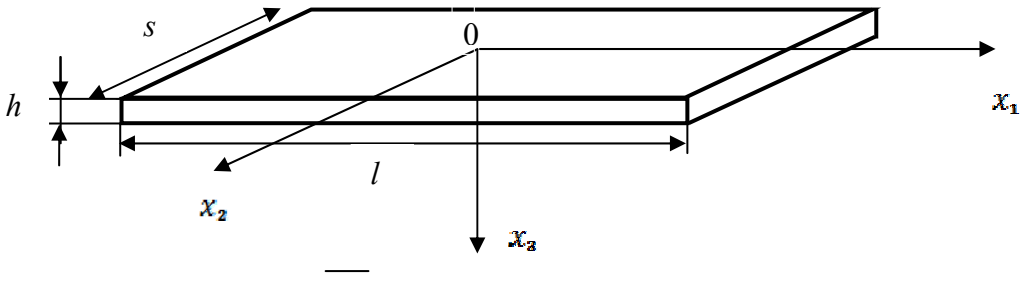


Рис. 1. Схема модели «жидкая капля»

Запишем уравнения движения жидкостей при наличии градиента концентрации субстрата, в окружающей жидкости вдоль координаты x_1. В декартовой системе координат уравнения установившегося движения для несжимаемых жидкостей в векторной форме имеют вид:

$$\left(\vec{v}^{(i)} \cdot \nabla\right)\vec{v}^{(i)} = -\frac{1}{\rho}\nabla p^{(i)} + \mu^{(i)}\Delta\vec{v}^{(i)} + \vec{F}^{(i)} \quad (1)$$

где $(i) = (1), (2)$ – индекс, обозначающий, соответственно, верхнюю и нижнюю жидкости; $\vec{v}^{(i)} = v_k^{(i)}\vec{e}_k$ – вектор скорости жидкости, $\vec{F}^{(i)} = F_k^{(i)}\vec{e}_k$ – вектор массовых сил. $k = 1, 2, 3$ – здесь по индексу k производится суммирование.

Условие не сжимаемости жидкостей:

$$\mathbf{div}\,\vec{v}^{(i)} = 0 \quad (2)$$

Геометрические параметры плоской капли таковы, что его высота существенно меньше длины и ширины, то есть: $h \ll l, s$. Все преобразования, таким образом, будут осуществляться при условии $\frac{h}{l} \ll 1$; $\frac{h}{s} \ll 1$. Любыми изменениями вдоль оси x_2 пренебрежем.

Таким образом, для области достаточно удаленной от стенок капли, что естественно имеет смысл для нижней жидкости, полагаем: $v_2^{(1)} = v_2^{(2)} = 0$.

Отметим и следующее неравенство:

$$\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x_1} \ll \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x_3} \quad (3)$$

Будем считать, что внутри капли выполняется следующее условие, характеризующее замкнутость течения в объеме капли:

. (4)

Очевидно, что на некотором удалении от капли возмущения в окружающей каплю жидкости затухают так, что:

$$x_1, x_3 \to \infty : v_1^{(1)} \to u,$$

где u – скорость перемещения капли.

$$x_3 = \pm\frac{h}{2} : v_1^{(1)} = v_1^{(2)},\ v_3^{(1)} = v_3^{(2)} = 0 \quad (5)$$

На поверхности капли выполняется также условие:

$$x_3 = \pm\frac{h}{2} : \frac{\partial\sigma}{\partial x_1} = -\mu\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x_3} \quad (6)$$

Анализ системы уравнений (1)–(2) с граничными условиями (5), (6) и принятыми допущениями (3), (4) позволил получить оценку для скорости перемещения капли:

$$u \sim \frac{h\left|\frac{\partial\sigma}{\partial C}\,\mathbf{grad}\,C\right|}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}}.$$

Полученная формула аналогична соответствующему соотношению в термокапиллярной конвекции. Она позволяет сделать вывод о возможности перемещения клетки в направлении увеличения концентрации питательного субстрата. Однако для её корректного применения необходимо экспериментальное определение зависимости поверхностного натяжения от концентрации субстрата.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследования А.Д. Низамовой и С.Ф. Урманчеева выполнены при финансовой поддержке Проекта «Гидродинамические эффекты в многофазных и термовязких средах при волновом и тепловом воздействии» 2019–2022 гг. (№ 0246-2019-0052). Исследование В.Н. Киреева проводилось при финансовой поддержке АН РБ (договор 40/10) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-41-020999-р_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Mogilner A., Edelstein-Keshet L. Regulation of ActinDynamics in Rapidly Moving Cells: A Quantitative Analysis // Biophysical J.. 2002. Vol. 83. Pp. 1237–1258.
2. Mogilner A., Verzi D.W. A simple I-D Physical Model for the Growing Nematode Sperm Cell // J. Stat. Phys. 2003. 110 (3–6). Pp. 1169–1189.
3. Rubinstein B., Jacobson K., Mogilner A. Multiscale two-dimensional modeling of a motile simple-shaped cell // Multiscale Model Simulation. 2005. 3 (2). Pp. 413–439.
4. Зуев А.Л., Костарев К.Г. Концентрационно-капиллярная конвекция вблизи поверхности пузырька в горизонтальном слое неоднородного раствора жидкостей // Конвективные течения. Сборник научных трудов. Пермь. 2003. С. 123–139.

——— ♦ ♦ ♦ ———

ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА КОНВЕКЦИЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

А.И. Федюшкин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: fai@ipmnet.ru

В данной работе представлены результаты численного решения задачи о тепловой конвекции несжимаемой жидкости в вытянутом по горизонтали слое с боковым подводе тепла при различных граничных условиях и числах Прандтля. Данная задача характеризуется тремя безразмерными числами Рэлея (Ra), Прандтля (Pr) и отношением сторон слоя (L/H>>1), а также граничными условиями и отличается от задачи Рэлея–Бенара тем, что конвективное течение теряет устойчивость при сколь угодно малом значении числа Рэлея [1]. Задача о конвекции воды в горизонтальном слое с теплоизолированными горизонтальными границами была численно исследована в работах [1, 2]. В данной работе будут рассмотрены установившиеся ламинарные течения. Показаны особенности конвективных течений в длинных горизонтальных слоях, связанные с изменением конвективной устойчивости течений, то есть с образованием устойчивой (или неустойчивой) вертикальной температурной стратификации, которая создается только тепловой конвекцией (без учета солености) при определенных значениях чисел Рэлея, Прандтля и граничных условиях [3]. Схема геометрии, граничные условия и структура течения при малых числах Рэлея показана на рис.1. На рис.2 показаны изолинии функции тока и изотермы для случая $Ra=2\ 10^5$, Pr= 5,8, L/H=12.71, где структура течения еще имеет одновихревой характер, хотя изотермы поля температуры уже искривлены конвективным течением, профиль скорости отличен от параболического и величина градиента температуры по длине слоя переменна.

Особенности стационарных течений могут заключаться в образовании упорядоченной крупномасштабной многоячейковой структуры с определенным волновым числом и периодом, например, таких как показано на рис.3, либо в образовании различных стационарных горизонтальных слоистых структур течения с противотоками внутри слоя (циркуляционные течения направленные навстречу основному), как на рис.4. Причинами особенностей течений с противотоками являются, во-первых, нелинейный характер зависимости скорости течения от температуры, во-вторых, образование устойчивой стратификации температуры по вертикали слоя и в-третьих, влияние торцевых стенок. Следует отметить сложный характер данных течений в тонких пограничных слоях около вертикальных стенок с наличием стационарных вторичных вихрей, которые также входят в структуру формирования горизонтальных противотоков. Устойчи-

вая по вертикальная температурная стратификация (создаваемая конвекцией) с увеличением числа Рэлея увеличивается, что способствует затягиванию ламинарного стационарного режима данных течений вплоть до значений числа Рэлея равного $Ra=10^9$ (вычисленному по малому размеру H).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе получены результаты для различных значений чисел Рэлея ($0<Ra<10^{10}$), Прандтля ($10^{-2}<Pr<16$), удлинений ($1<L/H<20$) и типов граничных условий. На боковых стенках были заданы постоянные значения температуры T_1 и T_2 ($T_1<T_2$), для скорости – условие прилипания. На горизонтальных стенках были рассмотрены случаи следующих граничных условий: для скорости – условие прилипания или условие проскальзывания (свободная поверхность), для температуры – условие теплоизоляции (рис.2, 4), либо задана температура (рис.3). На рис. 2 – 6 представлены результаты для слоев с удлинением равным L/H=12.71.

Численное решение уравнений Навье–Стокса осуществлялось двумя независимыми численными методами: конечноразностным (МКР) и методом контрольных объемов (МКО). Результаты расчетов, полученные разными методами, сравнивались между собой, а также сравнивались с экспериментальными данными [1 – 3], расхождение экспериментальных и расчетных локальных значений скорости и температуры не превосходило 2–3%.

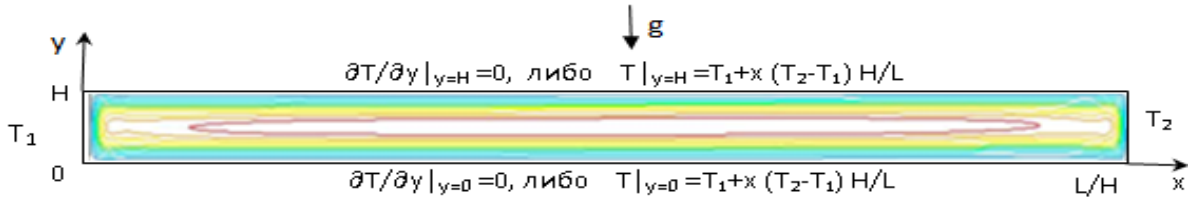


Рис.1. Схема расчетной области, граничные условия и изолинии функции тока одновихревого течения при малом числе Рэлея.

РЕЗУЛЬТАТЫ

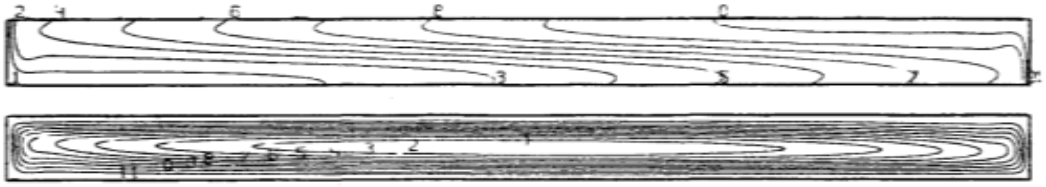


Рис. 2. Изотермы (вверху) и изолинии функции тока (внизу) при $Ra=2\ 10^5$, $Pr= 5.8$, $(\partial T/\partial y|_{y=0,\ H=0}=0)$

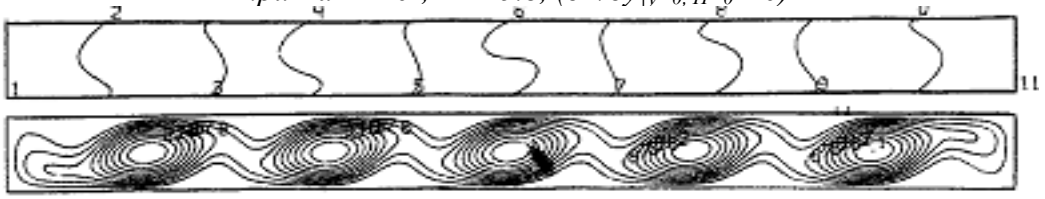


Рис. 3. Изотермы (вверху) и изолинии функции тока (внизу) при $Ra=2\ 10^5$, $Pr= 0.01$, $(T|_{y=0,\ y=H}=T_1+x\ (T_2-T_1)\ H/L)$.

При числах Прандтля меньше единицы толщина температурного слоя становится больше динамического, а при фиксированном профиле температуры на горизонтальных границах структура течения приобретает многоячейковый характер, как изображено на рис.3. Вертикальный профиль температуры вследствие конвективного течения около горизонтальных стенок приобретает неустойчивый характер, что влечет на изменение

одноячеистой структуры течения на многоячеистую. Ячеистая структуры течения влияет на распределение температуры в центре слоя вдоль горизонтали – она от холодного торца к нагретому торцу увеличивается с периодическими колебаниями, отслеживающими структуру течения.

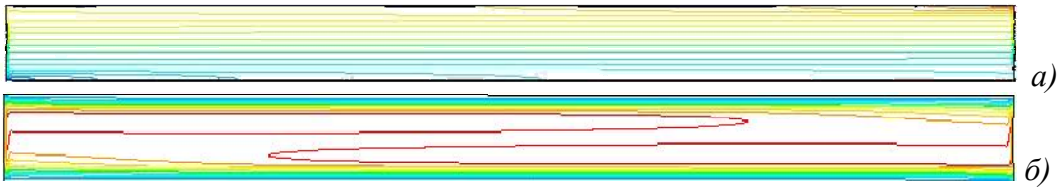


Рис. 4. Изотермы (а) и изолинии функции тока (б) при Ra=5.8 10^8, Pr= 5.8, $(\partial T/\partial y|_{y=0,\ H=0}=0)$

Влияние числа Рэлея на структуру течения при одинаковых параметрах можно увидеть, сравнив результаты моделирования для воды при Ra=2 10^5 (рис.2) и при Ra=5.8 10^8 (рис.4, 5). При Ra=2 10^5 течение имеет одновихревую структуру, которая начинает меняться при Ra>10^6 с образованием противотоков внутри слоя. При увеличении числа Рэлея интенсивность и количество вторичных течений в центре слоя (противотоков) увеличивается.

В данной работе также приведены результаты для горизонтального слоя со свободной верхней границей для разных чисел Прандтля и Рэлея. На рис. рис. 5. и рис. 6 представлены изотермы (а) и изолинии функции тока (б) для Ra=1.7 10^7 и Pr=0.1. На рис. 6 представлен случай со свободной верхней границей без термокапиллярной конвекции (число Марангони Ma=0). Свободная верхняя граница влияет на диагональную симметрию течения и распределения температуры, но не влияет на образование встречных течений внутри слоя.

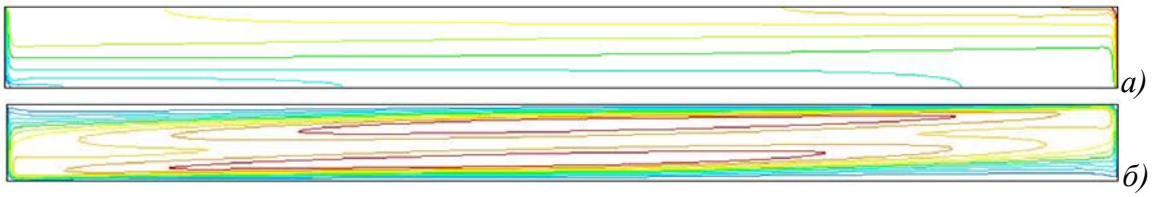


Рис. 5. Изотермы (а) и изолинии функции тока (б) при Ra=1.7 10^7, Pr=0.1, $(\partial T/\partial y|_{y=0,\ H=0}=0)$

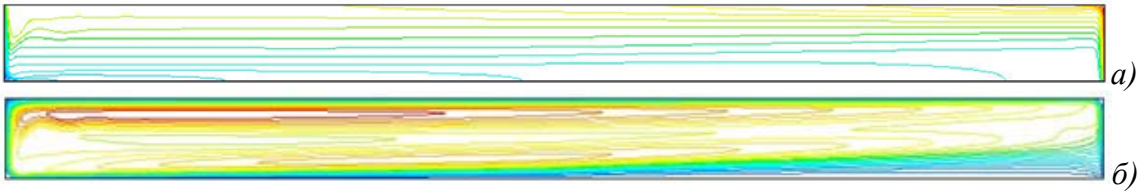


Рис. 6. Изотермы (а) и изолинии функции тока (б) при Ra=1.7 10^7, Pr=0.1, (верхняя граница свободная, Ma=0), $(\partial T/\partial y|_{y=0,\ H=0}=0)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано сильное влияние числа Прандтля и типа граничных условий на структуру и характеристики конвективного течения. Характеристики и структуры стационарных ламинарных течений могут существенно отличаться от решений, не учитывающих нелинейные зависимости характеристик течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полежаев В.И., Белло М.С., Верезуб Н.А., Дубовик К.Г., Лебедев А.П., Никитин С.А., Федюшкин А.И.* Конвективные процессы в невесомости. / -М., -Наука, 1991. -240с.
2. *Кирдяшкин А.Г., Полежаев В.И., Федюшкин А.И.* Тепловая конвекция в горизонтальном слое при боковом подводе тепла. // ПМТФ, -1983, -№ 6. -С. 122–128.
3. *Федюшкин А.И., Пунтус А.А.,* Нелинейные особенности ламинарных течений жидкости на Земле и в невесомости. // Труды МАИ, -№ 102, -С. 1–20, -2018

—— ♦♦♦ ——

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ ЖИДКОСТЕЙ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К.А. Хохрякова [1], Е.В. Колесниченко [2]
[1] Институт механики сплошных сред УрО РАН
[2] Пермский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: bca@icmm.ru

На свободной поверхности жидкого слоя конечной глубины распространяются гравитационно-капиллярные волны, а в магнитных жидкостях – при наличии магнитного поля – еще и магнитокапиллярные. Если магнитное поле будет периодически меняться во времени, то и на свободной поверхности магнитной жидкости будет возбуждаться периодическое движение. Это движение приобретает резонансный характер при совпадении характеристик возбуждаемой магнитным полем поверхностной волны с временными и пространственными характеристиками вынуждающей силы. Наличие у слоя магнитной жидкости свободной (и межфазной) поверхности обусловливает влияние пространственных характеристик системы, таких как диаметр кюветы и толщина слоя жидкости, на резонансную частоту.

Наличие еще одного механизма генерации волн на поверхности жидкости как инструмент управления поверхностью может оказаться хорошим средством для моделирования в лабораторных условиях различных волновых процессов в жидкостях, происходящих под действием гравитационных или иных ускорений. Использование жидкой подложки для слоя магнитной жидкости открывает перспективы, связанные с изучением различных типов неустойчивости равновесия и течения жидкостей в системах со свободной/межфазной поверхностью [1]. Наличие у слоя феррожидкости двух деформируемых границ, во-первых, резко снижает величину критической напряженности магнитного поля, при которой слой разрушается, превращаясь в упорядоченную систему капель или многоугольных фигур, эволюционирующих по мере изменения интенсивности, частоты и направления магнитного поля [2]. Во-вторых, сложение возмущений от обеих деформируемых поверхностей ведет к интерференции двух возникающих рельефов, что, в свою очередь, обусловливает появление новой колебательной моды, и как следствие возникновение автоколебаний в системе [3].

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Двухслойная система жидкостей создавалась в стеклянной кювете в виде короткого широкого вертикального цилиндра. Толщина слоя и подложки определялись по массе заливаемых в кювету жидкостей. Толщина жидкой подложки в несколько раз превышала толщину слоя феррожидкости во избежание касания последней дна кюветы под действием магнитного поля. В ходе опыта кювета помещалась на горизонтальную

площадку в центре системы двух коаксиально вложенных друг в друга катушек Гельмгольца, каждая из которых представляла собой две соосные кольцевые обмотки, расположенные параллельно друг другу на расстоянии, равном среднему радиусу обмоток. Для организации осцилляций слоя феррожидкости использовалось линейно-поляризованное переменное магнитное поле вида $H(t) = H_0 \cos(2\pi\nu t)$. Для этого обмотки катушек Гельмгольца подключались к генератору сигналов специальной формы через усилитель постоянного тока. Изображение слоя феррожидкости регистрировалось цифровыми видеокамерами со стороны его свободной и межфазной поверхностей. Визуализация рельефа поверхности слоя выполнялась при помощи кругового светодиодного источника света.

В эксперименте использована магнитная жидкость в виде коллоида магнетита в керосине, стабилизированного олеиновой кислотой (плотностью $\rho = 1.4$ г/см^3, поверхностным натяжением $\sigma = 24.3$ мН/м, намагниченностью насыщения $M_s = 50$ кА/м, начальной магнитной восприимчивостью $\chi_0 = 5.2$). В качестве жидкой подложки был выбран перфтороктан (плотностью $\rho = 1.7$ g/cm^3, поверхностным натяжением $\sigma = 13.6$ dyne/cm). Опыты выполнены при температуре жидкостей и окружающей среды (23 ± 1)°C.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Ранее в работе [2] было показано, что устойчивая двухслойная система «феррожидкость – перфтороктан» становится неустойчивой при некоторой критической напряженности H_c постоянного во времени и пространстве (т.е. однородного) вертикального магнитного поля. Относительно небольшая толщина слоя и отсутствие специального демпфирования экспериментальной установки создают условия для возникновения возмущений свободной и межфазной поверхности феррожидкости в виде гравитационно-капиллярных волн. Как известно, давление в любой точке магнитной жидкости пропорционально напряженности магнитного поля в ней [5]. При периодическом изменении напряженности поля свободная поверхность магнитной жидкости, как поверхность постоянного давления, будет представлять из себя систему холмов и впадин, соответствующих максимуму и минимуму магнитного поля. Изменение магнитного поля во времени вызывает соответствующие изменения поверхности в виде бегущих или стоячих волн.

а *б* *в* *г*

Рис. 1. Волны на свободной поверхности слоя феррожидкости на жидкой подложке при амплитуде напряженности магнитного поля $H_0 = 0.9\ H_c$ и частоте ν, Гц: 1 (а); 4 (б); 7 (в); 8 (г). Диаметр кюветы D = 59,4 мм

В отличие от статической неустойчивости Розенцвейга, вызывающей стационарный рельеф поверхности, задача в данной постановке становится динамической. При включении осциллирующего поля вследствие действия пондеромоторной периодически меняющейся силы происходит отклик слоя магнитной жидкости, выражающийся в периодических колебаниях поверхности. На свободной поверхности слоя феррожидкости возникает осесимметричная волна с максимальной амплитудой в центре кюветы (рис. 1). При определенной частоте колебаний ν и амплитуде напряженности магнитного поля H_0

волна становятся стоячей, причем частота, при которой она формируется, уменьшается с ростом толщины жидкой подложки. При этом длина образовавшейся стоячей волны уменьшается с ростом частоты осцилляций напряженности магнитного поля.

Для случая стационарного однородного поля была получена зависимость критической напряженности магнитного поля H_c, при которой происходит распад слоя на упорядоченную систему капель, для нескольких типов феррожидкостей различной толщины (от 1 до 5 мм) в кюветах различного диаметра (рис. 2). Величина критической напряженности, приводящей к разрушению сплошного слоя, увеличивается с ростом его толщины. Возрастание магнитной восприимчивости феррожидкости ведет к снижению величины критической напряженности поля. В то же время значение H_c очень слабо зависит от диаметра кюветы, что позволяет проводить сопоставление со случаем полубесконечного слоя.

В случае вертикально осциллирующего поля было обнаружено, что при некоторых значениях управляющих параметров: амплитуды напряженности поля H_0 и частоты ν – двухслойная система переходит из режима стоячих волн в состояние неустойчивости, сопровождающееся нарушением сплошности слоя феррожидкости (рис. 3.). Исследование в переменном магнитном поле было проведено для толщин феррожидкости h = 2,5–3,5 мм, соответствующих критерию устойчивости двухслойной системы жидкостей в отсутствие внешних воздействий [1]. Выделенная на рис. 3 область соответствует диапазону значений амплитуды переменного магнитного поля H_0 равной H_c стационарного поля для выбранных толщин слоя феррожидкости (см. рис. 2).

При малых частотах осцилляций поля неустойчивость слоя наступает при значениях $H_0 < H_c$, что указывает на дестабилизирующее действие поля в области частот 1–3 Гц. В диапазоне частот 3–5 Гц слой теряет устойчивость при значениях $H_0 \approx H_c$; далее с ростом частоты распад слоя феррожидкости происходит при значениях $H_0 > H_c$, т.е. наблюдается стабилизирующий эффект осцилляций поля на устойчивость всей системы в целом.

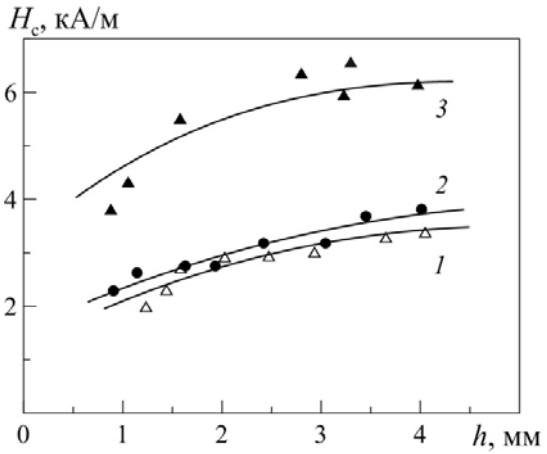


Рис. 2. Критическая напряженность H_c статического магнитного поля в зависимости от толщины слоя феррожидкости h с различной начальной магнитной восприимчивостью χ_0: 2,0 (3); 7,0 (1, 2). D, мм: 59,4 (1, 3); 89,0 (2)

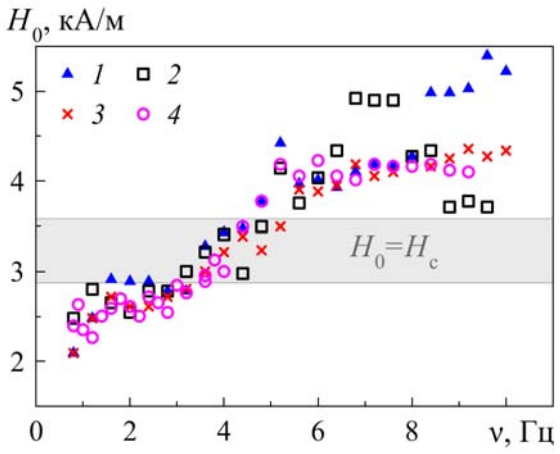


Рис. 3. Карта устойчивости слоя феррожидкости на жидкой подложке в зависимости от амплитуды напряженности переменного магнитного поля H_0 и частоты ν для слоя феррожидкости толщиной h, мм: 3,5 (1), 3,0 (2), 2,8 (3), 2,5 (4)

ЛИТЕРАТУРА

1. K.A. Bushueva, K.G. Kostarev. Behavior of a ferrofluid layer with stable surface rupture subjected to a tangential magnetic field // Fluid Dynamics. 2011. Vol. 46, N. 5. P. 707–714.
2. C.A. Bushueva. Drop structures formed by ferrofluid in the uniform magnetic field // Magnetohydrodynamics. 2013. Vol. 49, No. 3–4. P. 598–602.
3. C.A. Khokhryakova (Bushueva), K.G. Kostarev, A.V. Lebedev, M.O. Denisova. Ferrofluid layer lying on perfluorooctan substrate under the action of vertically oscillating magnetic field The effect of an oscillating vertically oriented magnetic field on the ferrofluid layer located on a perfluorooctane substrate // Magnetohydrodynamics Vol. 54 (2018), No. 1–2, P. 39–44.
4. R.E. Rosensweig. Ferrohydrodynamics. Cambridge et al., 1985.
5. Э.Я. Блум, М.М. Майоров, А.О. Цеберс. Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989. 387 с.

—— ♦♦♦ ——

ВОЛНЫ, ЗАХВАЧЕННЫЕ БЕРЕГАМИ И ОСТРОВАМИ, И БИЛЬЯРДЫ С ПОЛУЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ

А.В. Цветкова
Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского
e-mail: annatsvetkova25@gmail.com

В работе рассматривается спектральная задача

$$\langle \nabla, D(x)\nabla\psi(x)\rangle = -\omega^2\psi(x),\ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^2,$$

где область Ω имеет гладкую границу, при этом $D(x)\in C^\infty(\overline{\Omega}): D(x)>0, x\in\Omega$, $D(x)=0, \nabla D(x)\neq 0, x\in\partial\Omega$.. Такой волновой оператор возникает при изучении волн, захваченных берегом, функция $D(x)$ определяет глубину водоема. Мы предполагаем, что область Ω является либо внешностью круга, что соответствует острову в океане, либо внутренностью круга, что соответствует ограниченному водоему, либо круговым кольцом, что соответствует острову в ограниченном водоеме.

В работе построены асимптотические собственные функции при больших ω, которые могут быть выражены через модифицированный канонический оператор Маслова [1]. Эти собственные функции связаны с аналогами торов Лиувилля интегрируемых геодезических потоков с метрикой, определяемой гамильтонианом $D(x)|p|$, и вырождающейся на границе области. Эта задача отличается от задачи для интегрируемых двумерных бильярдов [2], поскольку импульсные компоненты траекторий на таких торах уходят на бесконечность на границе области. Мы называем такие системы бильярдами с полужесткими стенками.

Доклад основан на совместной работе с А.Ю. Аникиным, С. Ю. Доброхотовым и В. Е. Назайкинским.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 16-11-10282).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Простые асимптотики обобщенного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и их приложения в линейной задаче о набеге длинных волн на берег // Математические заметки. 2018. Т. 104. Вып. 4. С. 483 – 504.
2. *Матвеев В.С.* Асимптотические собственные функции оператора, отвечающие лиувиллевым метрикам, и волны на воде, захваченные донными неоднородностями // Математические заметки. 1998. Т. 64. Вып. 3. С. 414 – 422.

—— ♦♦♦ ——

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОНВЕКТИВНОГО ФАКЕЛА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА «ЖИДКОСТЬ–ПОРИСТАЯ СРЕДА»

К.Б. Циберкин
Пермский государственный национальный исследовательский университет
e-mail: kbtsiberkin@psu.ru

Задачи о структуре ламинарных течений жидкости, смежных с пористой средой, и процессах тепломассообмена в них находят широкий спектр приложений, в частности, при разработке топливных ячеек, проточных аккумуляторов, систем охлаждения, оптимизации затвердевания расплавов и переносе веществ в биологических тканях [1]. В связи с этим, актуальной является задача о структуре конвективного течения, развивающегося над локализованным источником тепла, расположенным на границе раздела жидкости и пористой среды (рис. 1). В настоящей работе исследуется структура профиля скорости и устойчивость конвективного факела, поскольку различные режимы течения могут отличаться большим разбросом интенсивности теплообмена на границе.

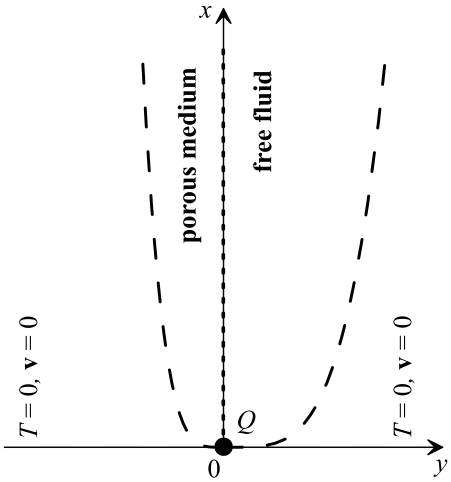


Рис. 1. Схематическое изображение структуры конвективного факела над точечным источником на границе раздела жидкости и пористой среды; боковые границы системы удалены на бесконечность

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Течение однородной жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса, фильтрация в пористой среде – уравнением Дарси–Бринкмана; конвективная сила плавучести даётся приближением Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta_T \mathbf{g} T,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0,$$
$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + \frac{(\mathbf{v}_p\cdot\nabla)\mathbf{v}_p}{\varphi^2} = -\frac{1}{\rho}\nabla P_p - \frac{\nu}{K}\mathbf{v}_p + \nu\Delta\mathbf{v}_p - \beta_T \mathbf{g} T_p, \quad (1)$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v}_p = 0,$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_p$, P, P_p – скорость течения и давление в жидкости и пористой среде, соответственно, ρ – плотность жидкости, ν – кинематическая вязкость, K, φ – проницаемость и пористость пористой среды, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, β_T – коэффициент объёмного теплового расширения жидкости. На границе раздела потоков поставлены условия непрерывности скорости и баланса различных компонент тензора вязких напряжений [1]:

$$\mathbf{v} = \varphi\mathbf{v}_p,\ P - 2\nu\rho\frac{\partial v_y}{\partial y} = P_p - 2\nu\rho\frac{\partial v_{p,y}}{\partial y},\ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_{p,x}}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Задача (1)–(2) в приближении пограничного слоя допускает автомодельное преобразование на основе степенных зависимостей температуры и функции тока от координат, и приводится к системе ОДУ:

$$\xi = \left(\frac{9g\beta_0\Theta}{25\nu\chi}\right)^{1/4}\frac{y}{x^{2/5}},\quad K = K_0 x^{4/5},\quad T = \Theta x^{-3/5} q(\xi),\quad \psi = \frac{5}{3}\chi\left(\frac{9g\beta_0\Theta}{25\nu\chi}\right)^{1/4} x^{3/5} f(\xi),$$
$$\frac{1}{5\,\mathrm{Pr}}\left(f'^2 - 3ff''\right) = \frac{3}{5}f''' + q,\qquad q'' + (fq)' = 0,$$
$$\frac{1}{5\,\mathrm{Pr}\,\varphi^2}\left(f_p'^{\,2} - 3f_p f_p''\right) = \frac{3}{5}f_p''' + q_p - \frac{f_p'}{\mathrm{Da}_0\,\mathrm{Ra}^{1/2}},\qquad q_p'' + (f_p q_p)' = 0. \quad (3)$$

СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ

На рис. 2 показан результат расчёта профиля скорости течения на основе автомодельных уравнений (3). Рис. 3 изображает структуру стационарного конвективного течения над точечным источником при однородной проницаемости пористой среды (рис. 3а) и неоднородной проницаемости, растущей вдоль границы раздела по линейному закону (рис. 3б), рассчитанную в ходе прямого численного моделирования:

$$K(x) = K_0(1 + x). \quad (4)$$

Моделирование проведено с использованием конечно-разностного алгоритма, реализующего схему с разностями против потока. Оно выполняется в рамках нестационарной модели с начальными условиями, отвечающими нулевой скорости течения, и расчёт производится до момента установления стационарного течения. В неоднородной пористой среде развивается выраженный пограничный слой, ширина которого растёт по степенному закону, тогда как в случае однородной среды происходит интенсификация течения в чистой жидкости.

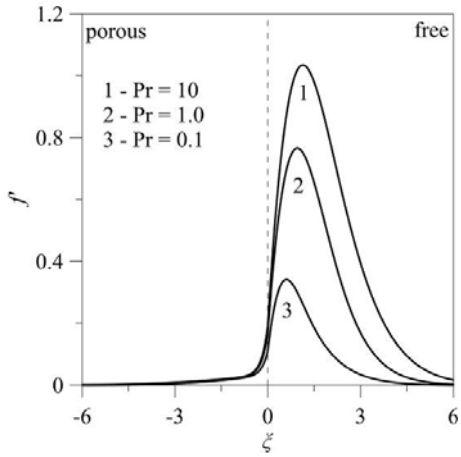
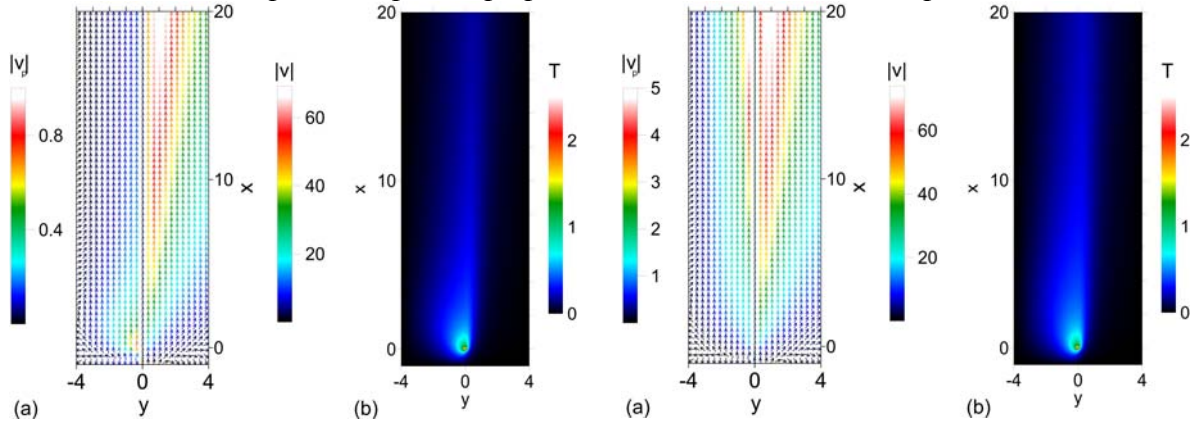


Рис. 2. Конвективное течение над точечным источником на границе раздела жидкости и пористой среды при различных значениях числа Прандтля



(а) *(б)*

Рис. 3. Прямое моделирование структуры конвективного факела: (а) – однородная проницаемость; (б) – проницаемость линейно растёт вдоль границы

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

С применением метода стрельбы с частичной ортогонализацией производится анализ линейной устойчивости течения в конвективном факеле. Используется приближение «локально-плоских» волн, в котором продольная координата играет роль медленно изменяющегося параметра. Основываясь на известных результатах о структуре нейтральных кривых для конвективного факела [2] и стационарных течений в двухслойных системах [3,4], следует ожидать конкуренции нескольких мод неустойчивости. Для конвективного факела в однородной жидкости и течения в вертикальном плоском слое характерно проявление т.н. гидродинамической и температурно-волновой мод. Первая связана с развитием вихревых структур вблизи оси симметрии потока, а вторая – с возникновением бегущих волн температуры. В двухслойных системах гидродинамические механизмы неустойчивости имеют два возможных проявления. При высокой проницаемости пористой среды возможно развитие крупномасштабных вихрей, полностью охватывающих систему, и слабо подверженных влиянию сил вязкого трения. При низкой проницаемости, напротив, усиливается вклад большой величины сдвиговых напряжений, и неустойчивость развивается вблизи границы раздела подобно механизму Кельвина–Гельмгольца. Соответственно, для конвективного факела, развивающегося вблизи границы жидкости и пористой среды, следует ожидать реализации нейтральных кривых с двумя и даже тремя минимумами, соответствующими каждому описанному механизму.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-00057)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nield D.A., Bejan A.* Convection in porous media. – Berlin: Springer, 2017. 988 p.
2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.,* Непомнящий *А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
3. *Camporeale C., Mantelli E., Manes C.* Interplay among unstable modes in films over permeable walls // J. of Fluid Mechanics. 2013. V. 719. P. 527–550.
4. *Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Baydina D.T., Kolchanova E.A., Tsiberkin K.B.* Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium // Physical Review E.2016. V. 94, 013104.

——— ♦ ♦ ♦ ———

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕГКОЙ ЖИДКОСТИ НАД ТЯЖЕЛОЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г.Г. Цыпкин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: tsypkin@ipmnet.ru

В работе исследуется устойчивость поверхности раздела, когда легкая жидкость находится над тяжелой в пористой среде. Рассматриваются два различных случая, соответствующие неподвижной и подвижной поверхности раздела в невозмущенном состоянии. Определены условия, при которых положение легкой жидкости над тяжелой является неустойчивым. Рассмотрено приложение к движению грунтовых вод.

В последние годы возрастает интерес к задачам фильтрации воды в почвах и грунтах, что обусловлено ухудшением экологической обстановки во многих регионах Земли. Испарение, изменение уровня подземных вод приводит к переносу растворенной примеси, а в засушливые периоды вызывает засоление почв и экологические катастрофы [1]. Натурные наблюдения показывают, что засоление грунтов может быть связано с неустойчивостью поверхности раздела вода – воздух. В результате неустойчивости происходит разрушение плоской поверхности раздела с последующим дроблением на несвязанные водонасыщенные подобласти. Если вода содержит растворенную соль, то в результате испарения таких изолированных подобластей концентрация соли возрастает, вплоть до образования отдельных включений соли в твердом состоянии.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Рассмотрим слой грунта, моделируемый пористой средой, толщины L, контактирующий с атмосферой на поверхности $z = 0$ и расположенный над высокопроницаемым водоносным горизонтом $z = L$. На некоторой глубине $z = h$ существует поверхность, являющаяся уровнем грунтовых вод, которая отделяет водонасыщеную область от области, насыщенную влажным воздухом. Уровень грунтовых вод зависит от интенсивности испарения, давления воды в водоносном горизонте и капиллярного давления. В общем случае, в зависимости от физико-химических свойств пористой среды, капиллярное давление может изменяться с глубиной. Неподвижность поверхности раздела обеспе-

чивается балансом между подтоком вода из высокопроницаемого слоя и испарением на поверхности раздела. Если температура атмосферного воздуха достаточно высока, то его влажность может превышать влажность насыщения в грунте. Тогда реализуется режим конденсации, когда пар конденсируется на поверхности раздела, а образующаяся вода поступает в водоносный горизонт.

В области, насыщенной смесью воздуха и водяного пара, справедливо уравнение диффузии пара, а в водонасыщенной области выполняются уравнения фильтрации. На поверхности раздела действует закон сохранения массы H_2O с учетом известной величины насыщенности пара на границе. Стационарные решения в областях подставляются в условия на поверхности раздела и приводят к соотношению для определения h.

Исследование устойчивости проводились методом нормальных мод, когда возмущения искомых функций имеют вид $f \sim \exp(\Sigma t + i K x)$. Анализ полученного дисперсионного соотношения показал, что испарение является стабилизирующим фактором, а наличие капиллярного давления может привести к неустойчивости поверхности раздела. Неустойчивость возникает, если капиллярное давление в смачиваемом грунте убывает с глубиной, а в несмачиваемом – возрастает. Переход к неустойчивости происходит при всех волновых числах одновременно. В случае нейтральной среды, с нулевым капиллярным давлением, поверхность раздела всегда устойчива.

В режиме конденсации стационарное решение имеет два действительных корнях h_1 и h_2, соответствующие различным положениям поверхности раздела h. При изменении параметров задачи может происходить сближение корней с последующим слиянием. В этом случае решение задачи перестает существовать. Характерная бифуркационная диаграмма представлена на рис. 1.

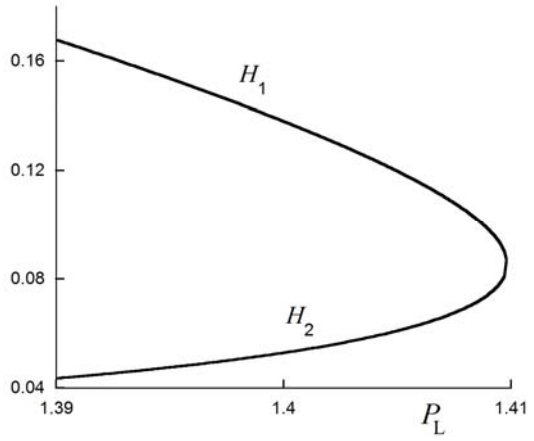


Рис. 1. Значения корней H=h/L стационарного уравнения в зависимости от давления в водоносном горизонте.

Из дисперсионного уравнения следует, что в режиме конденсации одно решение, соответствующее меньшей глубине, всегда неустойчиво. Другое решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Найдены два сценария развития неустойчивости. Первый сценарий качественно аналогичен переходу к неустойчивости при испарении. Во втором случае происходит сближение и слияние двух решений. Тогда, в сверхкритической области решение стационарной задачи перестает существовать. При слиянии решений дисперсионная кривая устойчивого решения касается оси $\Sigma=0$ и потеря устойчивости происходит при нулевом волновом числе (рис. 2). Последний сценарий, аналогичный рассмотренному в [2], реализуется также в нейтральной среде с нулевым капиллярным давлением.

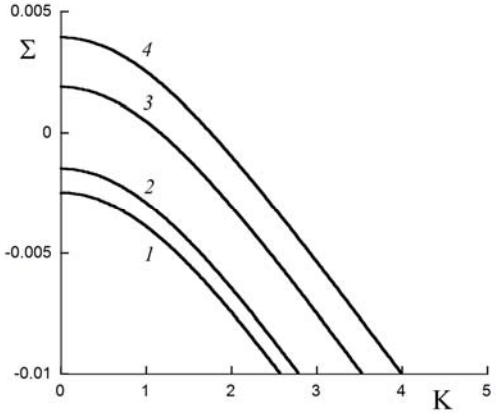


Рис. 2. Дисперсионные кривые, иллюстрирующие потерю устойчивости при слиянии корней.1 и 2 – устойчивое решение, 3 и 4 – неустойчивое при двух значениях давления в водоносном горизонте.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

При резком изменении давления P_L в высокопроницаемом водоносном горизонте происходит изменение уровня грунтовых вод, и течение в невозмущенном состоянии становится нестационарным. Рассмотрим случай, когда слой грунта имеет относительно высокую проницаемость. Тогда процессами испарения и конденсации можно пренебречь и рассматривать задачу перераспределения давления в квазистационарном приближении. Действуя аналогичным образом, как и в случае неподвижной границы, определяем закон движения поверхности раздела $z = Z(t)$.

Устойчивость относительно малых возмущений исследуется обобщенным методом нормальных мод, задавая возмущения поверхности раздела и давления в виде [3], соответственно, $\delta\eta = \eta'(t)\exp(iKx)$ и $\delta P = P'(z)\eta'(t)\exp(iKx)$. Для амплитуды $\eta'(t)$ выведено обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее ее эволюцию со временем. Условие роста возмущений получено в виде неявной функции, зависящей от давления в водоносном горизонте, капиллярного давления и его градиента, толщины слоя грунта и положения поверхности раздела.

Анализ уравнения для амплитуды показал, что в случае смачиваемого грунта поверхность всегда устойчива. Неустойчивость возникает в несмачиваемом грунте при предельно низких значениях давления в водоносном горизонте.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 16-11-10195.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rose D. A., Konukcul F., Gowing J. W.* Effect of watertable depth on evaporation and salt accumulation from saline groundwater // Aust. J. Soil Res. 2005. V. 43. P. 565–573.
2. *Ильичев А. Т., Цыпкин Г. Г.* Неустойчивости однородных фильтрационных течений с фазовым переходом // ЖЭТФ. 2008. Т. 134. Вып. 4(10). С. 815–830.
3. *Shargatov V.A., Il'ichev A.N., Tsypkin G.G.* Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 83. P. 552 – 561.

—— ♦ ♦ ♦ ——

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГИДРОДИНАМИКИ ИМПАКТА КАПЛИ

Ю.Д. Чашечкин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: chakin@ipmnet.ru

Распространенность капель в природных и промышленных условиях, многообразие взаимообусловленных гидродинамических процессов, доступность объекта изучения объясняют устойчиво растущий интерес к изучению импакта капли – последовательности процессов, следующих за падением капли в жидкость. Активно развиваются и фундаментальные исследования каскада дефинитных короткоживущих процессов, и прикладные, ориентированных на оптимизацию широкого круга технологических процессов, как традиционных, основанных на капельных технологиях в металлургии, химической и биохимической промышленности, так и новых, включающих проблемы оптимизации плоской и современной объемной печати, широкого круга охладителей для земных и космических условий, борьбы с туманами и обледенением летательных аппаратов. Следует также отметить гуманитарный аспект интереса к каплям в образовании, музыке, поэзии, культуре в целом.

Как постановка задач, так и проведение исследований импакта капель – сложная научная задача. В теоретическом описании не решен вопрос математического представления процессов исчезновения границ в одной части течения и появления в другой, механизмов формирования и эволюции тонкой структуры, существование которой было отмечено еще в первых наблюдениях картин течений "невооруженным глазом" в середине XIX века. Открытые позднее тонкие эффекты излучения звуковых пакетов и световых импульсов пузырьками, сопровождающих гидродинамические процессы, также нуждаются в теоретическом обосновании. Отсутствие математических моделей затрудняет формулировку обоснованных требований к инструментам, методикам и условиям выполнения эксперимента, удовлетворяющих критериям полноты.

Основу работ Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН по капельной тематике составляет система фундаментальных уравнений механики неоднородных жидкостей – уравнений переноса вещества, импульса и энергии (с учетом внутренней) с физически обоснованными начальными и граничными условиями [1]. Классификация традиционных структурных компонентов течений – волн, лигаментов (тонкослойных 2D оболочек и 3D волокон) и вихрей проведена по результатам анализа полной системы с учетом условия совместности в линейном и слабонелинейном приближении [2]. Масштабный анализ фундаментальной системы позволяет сформулировать требования к методике экспериментальных исследований, позволяющей наблюдать наиболее крупномасштабные и различать тонкоструктурные компоненты, сформулировать условия согласованности пространственных и временных метрологических характеристик инструментов [3]. Опыты проводятся на стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН", позволяющих проводить фото и видео регистрацию общей картины течений в различных проекциях [4], измерять параметры гидродинамических и акустических процессах в контактирующих средах – атмосфере и гидросфере во всех фазах процесса: отрыва капли, ее осцилляций при свободном падении, частичного распада в момент контакта с принимающей жидкостью, растекания, образования всплеска, генерации звуковых пакетов и капиллярных волн [5–7].

При первичном контакте капли с поверхностью жидкости происходит уничтожение свободных поверхностей контактирующих сред и образуется «двойной слой» слившихся сред, в котором заключена освободившаяся доступная потенциальная поверхностная энергия. Расширяющийся «двойной слой» формирует «эжекту» – тонкий

наклонный диск, с вершин зубцов которого радиально вылетают быстрые струйки – спайки (Рис. 1, *а*). С кончиков струек последовательно выбрасываются быстрые мелкие капельки, скорость движения которых постепенно падает, а диаметр увеличивается (Рис. 1, *б*, *в*). Некоторые капельки попадают даже на поверхность погружающейся капли [8].

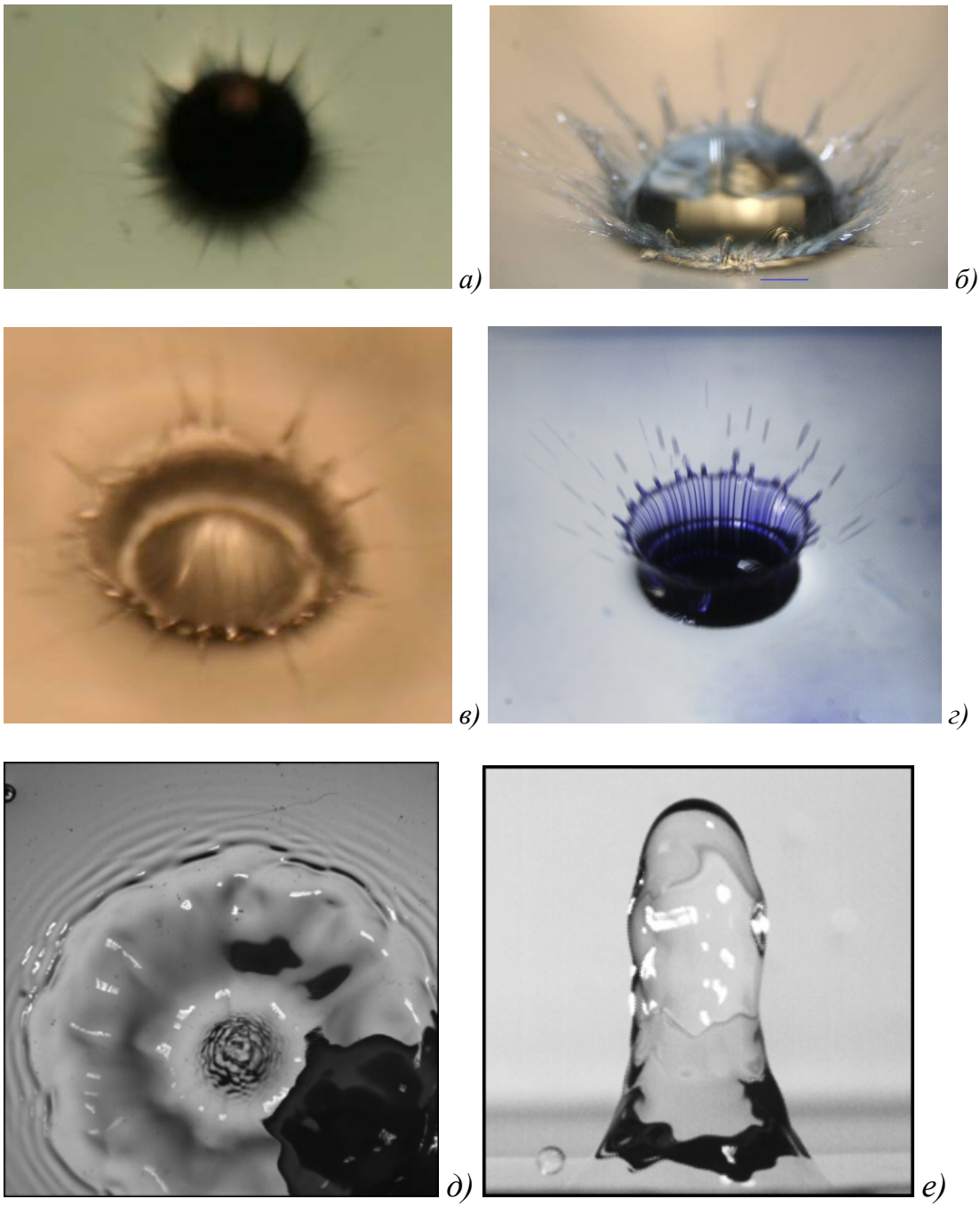


Рис. 1. Структурные компоненты течений, вызванных падением капли в покоящуюся жидкость: а) – эжекта, спайки, брызги; б) – стримеры и волны на поверхности капли; в) – остаток капли, каверна, венец, стримеры, брызги; г) – венец, стримеры, брызги, д) – растущий всплеск, ложбина с провалами, остатки венца и капиллярные волны; е) – возмущенная боковая поверхность растущего всплеска

По мере погружения капли область слияния отстает от стенки каверны, останавливается и начинает ускоренно возвращаться к центру каверны. В этой фазе одновременно с уничтожением свободной поверхности капли идет процесс увеличения площади дна каверны и свободной поверхности принимающей жидкости, в котором поглощается часть энергии механического движения.

Однако во всех случаях на дне каверны формируются тонкие струйки – лигаменты, которые упираются в кромку венца и создают на ней выступающие зубцы. С вершин зубцов вытягиваются новые струйки – стримеры, более толстые, чем спайки (Рис. 1, *г*). С вершин стримеров также вылетают капельки, размер которых постепенно увеличивается, как и угол наклона траекторий к горизонту. На последней стадии стенки каверны искажаются тонкими поперечными струйками с вихревыми оголовками – вторичными лигаментами. От внешней оболочки венца расходится система кольцевых гравитационно-капиллярных волн. Венец и волны разделяет тонкий кольцевой лигамент, вид и динамическое состояние которого определяет форму фазовых поверхностей волн.

С прекращением поступления вещества после полного погружения капли рост венца прекращается и наступает фаза его распада и погружения в жидкость, в которой начинает формироваться всплеск – обратная (кумулятивная) струйка, толщина которой сравнима и даже превышает диаметр падающей капли. В этой фазе центр выглаженной ложбины вновь покрывается выступающими спайками (Рис. 1, *д*). На форму быстро эволюционирующей поверхности всплеска влияют как крупномасштабные процессы, так и остатки высокоэнергетического «двойного слоя» в толще жидкости (Рис. 1, *е*). Окрашенная жидкость капли на данной стадии собирается на вершине всплеска и в системе вихревых петель – лигаментов, образующих достаточно регулярные радиальные структуры в толще и на поверхности центральной ложбины. В зависимости от условий экспериментов с вершины всплеска может вылетать как одна капля, так и последовательность из нескольких капель, изолированных или связанные в четки.

Погружение всплеска и выброшенных капель приводит к формированию новой каверны и заостренных впадин в остатках ложбины. Падение вторичных капель всплеска на взволнованную поверхность приводит к образованию новых газовых полостей сложной формы. Некоторые из них отрываются нерегулярными течениями в центре области импакта и начинают излучать акустические пакеты в широком диапазоне частот. Наблюдаемая частота заполнения отдельных звуковых пакетов согласуется с рассчитанной по формулам Рэлея – Минаэрта для сферического пузырька.

Падающие в воду капли всплеска образуют новые каверны конической формы, схлопывание которых сопровождается формированием сравнительно тонких и высоких стримеров, выбрасывающих системы более мелких капелек со своих вершин. Погружающиеся стримеры и капельки способствуют образованию новых каверн и газовых полостей, отрыв которых сопровождается генерацией дополнительных звуковых пакетов. Параметры акустической картина отражают сложность динамики отдельных газовых полостей, которые могут соприкасаться, сливаться, разрываться на фрагменты и сливаться вновь под действием интенсивных тонкоструктурных течений около каверны и остатков венца

На всех стадиях эволюции изучаемого течения распределение вещества капли в принимающей жидкости сохраняет тонковолокнистую структуру, в которой геометрия, положение и форма отдельных волокон непрерывно видоизменяются в соответствии с характером более медленных и крупных компонентов течений [9]. На последней стадии медленных течений часть вещества капли остается в тонком слое на свободной поверхности, а часть – в форме остатков каскада вихревых колец в толще жидкости, где медленно размывается процессами молекулярной диффузии.

На начальном этапе слияния капли с покоящейся принимающей жидкостью определяющее влияние на перенос вещества оказывает процесс уничтожения свободной поверхности между контактирующими жидкостями, при котором доступная потенциальная поверхностная энергия преобразуется в другие формы – возмущения температуры, давления и механическое движение в тонком слое контакта жидкостей (двойном слое).

Толщина энергонасыщенного слоя медленно увеличивается под действием процессов молекулярной диффузии импульса. Слой деформируется и переносится крупномасштабными течениями. При погружении каждой новой капли образуется новый «двойной слой», обновляется все семейство быстро затухающих тонкоструктурных компонентов.

Проведенные опыты показали важную роль энергии, скорость передачи которой меняется по мере эволюции течения. Изменение скорости переноса энергии обусловлено особенностями физического строения жидкостей, в которых кинетическая и потенциальная энергия распределены по всему объему и характеризуются удельными значениями. Доступная потенциальная поверхностная энергия, компонент внутренней энергии, обусловленный поверхностным натяжением, сосредоточена в приповерхностном слое толщиной порядка молекулярного кластера. В неоднородной среде с большими градиентами концентрации неравномерно распределен и химический потенциал, величина которого пропорциональная концентрации отдельного компонента. Связь внутренней энергии и термодинамических потенциалов в целом с термодинамическими переменными проанализирована в [10]. Учет всех компонентов энергии в системе фундаментальных уравнений механики неоднородных жидкостей позволяет без привлечения дополнительных гипотез и констант строить модели сложных течений, составляющие основу согласованных методик лабораторного и численного моделирования [1, 2].

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 19-19-00598). Опыты проведены на стендах УИУ «ГФК ИПМех РАН».

ЛИТЕРАТУРА

1. Chashechkin Yu. D. Differential fluid mechanics – harmonization of analytical, numerical and laboratory models of flows // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Springer Ser. V. 40. 2016. – 328 p. P. 61–91. DOI: 10.1007/978-3-319-23564-6-5.
2. Chashechkin Yu.D. Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves // Math. Model. Nat. Phenom. 2018. Vol. 13. No. 2. P. 1–29. https://doi.org/10.1051/mmnp/2018020
3. Чашечкин Ю.Д. Эволюция тонкоструктурного распределение вещества свободно падающей капли в смешивающихся жидкостях // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 3. С. 66 – 74. DOI: 10.1134/S0001433819020026
4. Hydrophysical complex for modeling hydrodynamic processes in the environment and their impact on underwater technical objects, as well as the distribution of impurities in the ocean and atmosphere (UEF “HPC IPMech RAS) site: http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#aboutESP (2019).
5. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Трансформации перемычки в процессе отрыва капли // Прикладная механика и техническая физика. 2016. № 3. С. 16–31. DOI: 10.15372/PMTF20160303
6. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Поверхностные колебания свободно падающей капли идеальной жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Том 54. № 2. с. 206–212. DOI: 10.7868/S0003351518020095.

7. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Акустика и гидродинамика удара капли о водную поверхность // Акустический журнал. 2017. Т. 63. No. 1. С. 38–49. DOI: 10.1134/S1063771016060038
8. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Капиллярные волны на поверхности погружающейся в жидкость капли // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 4, с. 548–554. DOI: 10.1134/S1028335815120022
9. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Полосчатые структуры в картине распределения вещества капли по поверхности принимающей жидкости // Доклады РАН. 2018. Т. 481. № 2. DOI: 10.1134/S1028335818070066
10. Wright D. G., Feistel R., et. al. Numerical implementation and oceanographic application of the thermodynamic potentials of liquid water, water vapour, ice, seawater and humid air – Part 2: The library routines // Ocean Sci. 2010. V. 6. P. 695–718. www.oceansci.net/6/695/2010/. DOI:10.5194/os-6-695-2010.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ – “СТАРОЕ – НОВОЕ” ПОКОЛЕНИЕ РАЗРЕШИМЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕЧЕНИЙ

Ю.Д. Чашечкин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: yulidch@gmail.com

Достижения классической механики жидкостей, ориентированной на изучение, описание и прогнозирование эволюции течений жидкостей, газов и плазмы, используются во многих разделах науки и техники, которые в свою очередь служат источниками новых задач, методов и инструментов. Особо следует отметить влияние вычислительной техники, как непосредственное в качестве инструмента анализа сложных задач, так и опосредованное в различных формах. Логическую основу механики составляет:

Математика:

Аксиоматическая наука о принципах выбора содержания символов, правил операций и критериев их точности.

Современная техника наблюдений позволила твердо установить, что *все природные системы*, начиная с космических с масштабами в сотни световых лет и до наноразмерных, как и течения в промышленных установках, характеризуются тонкой структурой, проявляющейся в существовании высокоградиентных границ, разделяющих области с относительно однородными распределениями параметров, содержащими выраженные волокна. Универсальность факта существования структур ставит перед рациональной гидродинамикой задачу описания механизмов их формирования, оценки влияния на динамику происходящих процессов. Модели разрабатываются в приближении сплошной среды на основе принципов Г. Галилея в представлении Дж. К. Максвелла: «При изучении физического явления вначале необходимо определить характеризующие его величины, затем привести математические соотношения между ними, чтобы составить теорию явления, исследования которой следует провести методами математики и логики без привлечения данных эксперимента (что удается далеко не всегда), а затем сравнить полученные результаты с данными специально поставленных опытов ….» [1].

В современной механике жидкостей описание свойств среды базируется на анализе термодинамических потенциалов. Производные базовой величины – потенциала Гиббса – определяют физические параметры среды – плотность ρ, давление P, темпе-

ратуру T, концентрацию растворенных веществ или взвешенных частиц S_i. теплоемкость и другие [2]. Связи между параметрами, которые рассчитываются в статистической физике, объединяющей квантово-механическое и макроскопические описания среды [3], или находятся эмпирически, образуют наборы уравнений состояния $A(\mathbf{x})$. Течения, вызывающие изменения сплошной среды – характеризуются полями собственных **независимых** физических величин скалярной и векторной природы $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, которые также описываются непрерывными функциями координат $\mathbf{x}$ и времени t.

В качестве параметров течений используются сохраняющиеся величины – удельная масса (плотность) среды $\rho(\mathbf{x}, t)$, и ее компонентов $S_i(\mathbf{x}, t)$, локальные значения импульса $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ и полной энергии $E_t(\mathbf{x}, t)$. Указанные величины являются наблюдаемыми, то есть допускают оценку погрешности одновременно с определением своего значения, поскольку связаны «жесткими» соотношениями с эталонными величинами – стандартами длины, времени и массы.

Определение:

Течения жидкостей (газов, плазмы) – внутренне присущие или вынужденные потоки импульса и энергии, вызывающие самосогласованные изменения параметров состояния сплошной среды.

Изменения величин описывает система фундаментальных уравнений в частных производных – неразрывности (Даламбера), переноса импульса (типа уравнений Навье – Стокса), энергии (Фурье) и вещества (Фика)– аналогов фундаментальных законов сохранения с физически обоснованными начальными и граничными условиями [4, 5]. Симметрии фундаментальной системы соответствуют базовым принципам физики [6].

Скорость среды (кинематический параметр течения) – **ненаблюдаема**. Значения скорости определяются косвенно, в предположении сохранения функциональных соотношений, положенных в основу ее расчета. На самом деле функциональные связи скорости с другими величинами изменяются в силу влияния ряда факторов (изменений атомно-молекулярного состава вещества, различных формы энергии – внутренней, кинетической, потенциальной), зависимости коэффициентов от параметров движения, внутренней структуры среды, и ряда других факторов, что объясняет неопределимость величины скорости жидкости с гарантированной оценкой погрешности.

Особое влияние на динамику и структуру течений оказывают процессы переноса энергии. Кинетическая энергия непосредственно характеризует динамику среды. Внутренняя энергия учитывает влияние большого числа процессов, обусловленных атомно-молекулярным строением вещества. Все компоненты энергии непосредственно связаны между собой. Темп изменения энергии, зависящий от параметров среды и свойств изучаемых явлений, характеризуется рядом временных масштабов. Характерное время τ переноса энергии достаточно большое в диссипативных (диффузионных) процессах $\tau^D = L^2/\kappa$; более короткое в течениях (потоках) сред со скоростью U, здесь $\tau^U = L/U$, L – характерный масштаб; специальное в волновых процессах с групповой скоростью c_g – $\tau^\omega = L/c_g$, которое может быть и малым (в быстрых акустических), и большим в медленных волнах; и наиболее коротким в прямых атомно-молекулярных взаимодействиях (например, при освобождении доступной потенциальной поверхностной или химической энергии). Вопросы взаимодействия вещества с постоянными и переменными электромагнитными полями ниже рассматриваться не будут.

Дифференциальные уравнения (УрЧП), описывающие изменения базовых физических величин в течениях жидкостей и газов, известны еще с XIX века, и в полном объеме приведены в первом издании [4], вышедшем в 1944 г. Как показывают резуль-

таты группового анализа, симметрии систем фундаментальных уравнений соответствуют базовым принципам физики в отличие от других конститутивных (теории турбулентности) и редуцированных (теории волн или вихрей) моделей [5]. Однако анализ свойств полных решений, полученных с учетом условия совместности, задержался и впервые был проведен совсем недавно [5, 6].

Классификация базовых структурных компонентов течений, включающие семейство *лигаментов* и *волны*, отражает свойства полных решений линеаризованной системы фундаментных уравнений [6]. Число базовых функций, составляющих полные решения, построенные с учетом условия совместности, определяется рангом полной системы, порядком ее линеаризованной версии или степенью характеристического (дисперсионного) уравнения. Ранг системы зависит от вида уравнения состояния, связывающего различные термодинамические величины, то есть от полноты учета физических свойств среды, плотность которой не является постоянной. Течения определяются как процессы временной изменчивости картин полей базовых (плотность, импульс, энергия) и производных (скорость, смещения изолиний и др.) физических величин. Полные решения позволяют проводить расчет **всех** физических характеристик течений и среды без привлечения дополнительных гипотез, параметров процессов и констант. В силу различия физической природы физических величин картины их полей не являются масштабно подобными и могут существенно различаться.

Лигаменты – компоненты всех течений, формирующихся из состояния покоя, нестационарных и периодических, – тонкоструктурные оболочки, прослойки и волокна, поперечные масштабы которых δ определяются диссипативными свойствами среды (коэффициентами кинематической вязкости ν, температуропроводности κ_T или диффузии κ_S) и характерными значениями временной изменчивости – временем установления процесса ΔT, частотой волны ω или скоростью переноса импульса и энергии U: $\delta_T^{\nu} = \sqrt{\nu \Delta T}$, $\delta_{\omega}^{\nu} = \sqrt{\nu / \omega}$, $\delta_U^{\nu} = \nu / U$. Лигаменты, минимальное число которых определяется видом уравнения состояния и равно четырем в случае учета переменности плотности, а также шести при учете теплопроводности и увеличивается до восьми при учете диффузии, описываются группой сингулярно возмущенных решений фундаментальной системы [6].

Волна определяется как периодический процесс, в котором параметры локальной временной изменчивости физических полей (частота ω) и мгновенной пространственной структуры (волновое число $\mathbf{k}$ или длина волны λ) связаны функциональным (дисперсионным) соотношением $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{kA}, ...)$, которое может включать и амплитуды возмущений $\mathbf{A}$. Волны описываются группой регулярно возмущенных решений фундаментальной системы.

В силу сложности внутренней структуры, обусловленной множественностью сосуществующих компонентов, пространственно-временные масштабы которых связаны иррациональными отношениями, все течения *нестационарны*.

Реальные течения описываются системами нелинейных уравнений [4, 5]. Уже в приближении слабой нелинейности все компоненты нелинейно взаимодействую между собой и порождают новые, включающие и долгоживущие вихри.

Вихри – продукты нелинейных взаимодействий базовых компонентов – лигаментов и волн, – нестационарные компонент течений с относительно высоким значением завихренности $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$. В вихре свободные твердые тела в толще или на поверхности жидкости переносятся потоком и одновременно вертятся вокруг собственной оси, а компактные «жидкие частицы» в них расщепляются лигаментами на различимые волокна.

При учете переменности плотности система фундаментальных уравнений разре-

шима во всем диапазоне параметров. Приближение актуально постоянной плотности приводит к вырождению и переопределенности системы уравнений в силу кратности сингулярно возмущенных решений. В приближении идеальной жидкости система становится недоопределенной.

Следует подчеркнуть, что и сами уравнения, и их полные решения являются параметрически и масштабно инвариантными – не зависящими от значений начальных и граничных условий, определяющих относительную выраженность тех или иных структурных компонентов. Факт наблюдаемой сильной зависимости структуры и динамики течений от макроскопических параметров обусловлен многообразием механизмов передачи энергии немеханической природы (с соответствующими временными параметрами), изменениями вида уравнения состояния (например, при фазовых переходах), и рядом других факторов.

Наблюдения тонкой структуры волн, вихрей, струй, следов, других структурных компонентов и ее эволюции проводятся на стендах Уникальной научной установки «ГФК ИПМех РАН» [7]. Наиболее распространенным среди них являются лигаменты, для существования которых необходимы диссипация, стратификация (а реальные среды всегда расслаиваются в поле массовых сил (гравитационном) в силу разноплотности частиц) и изменений внешних условий или внутреннего состояния среды.

Лигаменты наблюдаются и в наиболее медленных течениях, к числу которых относятся и течения, индуцированные диффузией на топографии, и в наиболее быстрых, например, при ударе капли. Лигаменты наблюдаются возле непроницаемого препятствия в толще или на твердой границе покоящейся непрерывно стратифицированной жидкости в поле силы тяжести [8]. С началом движения прослойки индуцированных диффузией течений у границ тел утончаются, отрываются и образуют в толще жидкости высокоградиентные поверхности раздела областей распространения волн и вихревых компонентов спутных течений.

Выраженную тонкую структуру имеют пучки внутренних волн в толще непрерывно, стратифицированной жидкости с произвольным распределением плотности. Учет лигаментов позволяет решать весь комплекс задач генерации, распространения, отражения, нелинейного взаимодействия пучков внутренних волн от твердой стенки или критического слоя [9], результаты которых хорошо согласуются с данными независимо выполненных опытов [10].

В качестве примера приводятся сравнения наблюдений и численных расчетов картин течений, образующихся при движении различных тел (пластина, цилиндр, сфера) в стратифицированных жидкостях и газах (современная вычислительная техника позволяет рассчитывать поля физических величин течений в полной нелинейной постановке). Общая геометрия течений, картины присоединенных внутренних волн хорошо согласуются между собой и с данными независимо выполненных расчетов. Также согласуются расчеты тонкой структуры течений для четырех видов жидкостей – стратифицированных сильно- и слабо, и однородных (потенциально, когда вариации плотности настолько малы, что не могут быть зафиксированы существующей аппаратурой) и актуально (плотность тождественно постоянна).

Примером сильного влияния слабой стратификации служит катастрофа симметрии поперечного сечения плотностного следа за сферой, движущейся равномерно в горизонтальной плоскости в непрерывно стратифицированной жидкости – осесимметричный след в однородной (сечение – круг) сменяется призматическим (сечение – прямоугольник) в непрерывно стратифицированной жидкости. Эксперименты [11] инициировали проведение расчетов сопротивления тела, геометрии спутного течения и волновых полей, обзор которых приведен в [12]. Исследования обтекания сферы продолжаются.

Заметную роль играют лигаменты в картине конвективных течений при боковом нагреве стратифицированной жидкости, над точечным и линейным источниками тепла, как в экспериментах [13], так и расчетах, на основе системы фундаментальных уравнений [14], результаты которых хорошо согласуются между собой, а также в вихревых течениях [15]. Результаты исследований тонкой структуры и расчетов картин обтекания полосы [16], гидродинамики импакта капли [17] обсуждаются в отдельных докладах, входящих в программу конференции.

Дальнейшее изучение лигаментов, связывающих особенности атомно-молекулярных процессов с макроскопическими свойствами сплошных сред, позволит улучшить и качественное и количественное описание течений с учетом химических, биологических и электромагнитных процессов в движущихся жидкостях, газах и плазме.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598). Эксперименты выполнены на стендах УИУ «ГФК ИПМех РАН».

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J.C. Remarks on the Mathematical Classification of Physical Quantities // Proc. L. Math. Soc. 1871. V. 3, S. 1–3. P. 224–233.
2. Feistel R. Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean Sci. 2018. V. 14. P. 471–502. 2018 https://doi.org/10.5194/os-14-471-2018).
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 т. Том 5. Часть 1 Статистическая физика Т.5, Ч.1, Изд. 6, стер. 2018. 616 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика: т.VI. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. 736 с.
5. Chashechkin Yu. D. Differential fluid mechanics – harmonization of analytical, numerical and laboratory models of flows. P. 61–91. // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Springer Series “Computational Methods in Applied Sciences” V. 40. 2016. 328 p. P. 61–91. DOI: 10.1007/978-3-319-23564-6-5.
6. Chashechkin Yu.D. Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves // Math. Model. Nat. Phenom. 2018. Vol. 13. No. 2. P. 1–29. https://doi.org/10.1051/mmnp/2018020
7. Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере («ГФК ИПМех РАН): http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#equip.
8. Димитриева Н.Ф., Чашечкин Ю.Д. Тонкая структура стратифицированного течения около неподвижного и медленно движущегося клина // Океанология. 2018. Т. 58, № 3. С. 358–368. DOI: 10.7868/S0030157418030024.
9. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1998. Т. 39. № 5. С. 88 98. doi:10.1007/BF02468043
10. Paoletti M. S. and H. L. Swinney, Propagating and evanescent internal waves in a deep ocean model // J. Fluid Mechanics. 2012. V. 706. P. 571–583. doi: 10.1017/jfm.2012.284
11. Сысоева Е.Я., Чашечкин Ю.Д. Вихревые системы спутного стратифицированного течения за сферой // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1991. № 4. С. 82–90.
12. Voisin B. Lee waves from a sphere in a stratified flow // J. Fluid Mech. 200. V. 574. P.

273–315 c. doi:10.1017/S0022112006004095
13. Чашечкин Ю.Д., Попов В.А. Методы лабораторного моделирования конвективных процессов в неоднородных системах в условиях нормальной и пониженной гравитации // Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. М.: Наука. 1982. С. 119–146.
14. Sabbah C., Pasquetti R., Peyret R., Levitsky V., Chashechkin Y.D. Numerical and laboratory experiments of sidewall heating thermohaline convection // International J. of Heat and Mass Transfer. 2001. V. 44. No. 14. 2681–2697.
15. Чашечкин Ю.Д., Степанова Е.В. Формирование одного спирального рукава из центрального пятна маркирующей примеси на поверхности составного вихря // Доклады АН. 2010. Том 430. № 3. С. 330–333.
16. Chashechkin Yu.D., Zagumennyi Ya.V. The 2D flow around tilted plate // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences, 2019, No. 4, P. 73–88. DOI: 10.18698/1812-3368-2019-4-73-88
http://vestniken.ru/catalog/phys/condph/885.html
17. Чашечкин Ю.Д. Визуализация тонкой структуры возмущений поверхности жидкости течениями, вызванными упавшей каплей // Прикладная математика и механика 2019, том 83, № 3. С. 403–412. DOI: 10.1134/S0032823519030032.

——— ♦ ♦ ♦ ———

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ: ЛАБОРАТОРНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Ю.Д. Чашечкин [1], Я.В. Загуменный [2]
[1] Институт проблем механики РАН, e-mail: yulidch@gmail.com
[2] Институт гидромеханики НАН Украины, e-mail: zagumennyi@gmail.com

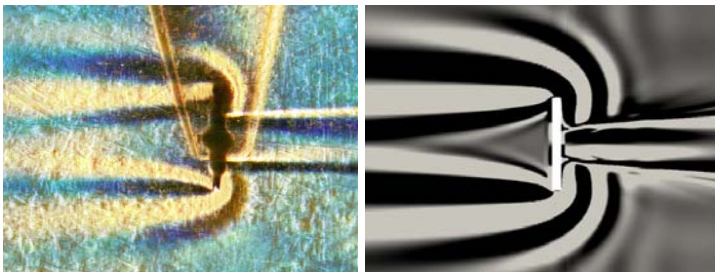
Исследования обтекания пластины – традиционный объект экспериментальных и теоретических исследований в гидро- и аэродинамике в силу фундаментальности задачи и важности практических приложений. Уже в первых систематических исследованиях, начатых еще в конце 19 века, была изучена зависимость картины течения и характера действующих на препятствие сил от многих параметров, в частности размеров пластины, ее углового положения, скорости набегающего потока жидкости или газа постоянной плотности [1].

Во второй половине прошлого века, в связи с повышением интереса к динамике окружающей среды – атмосферы и океана – номенклатура изучаемых сред расширилась, в число исследуемых факторов было включено численное моделирование и экспериментальное изучение влияния стратификации, естественно присутствующей в окружающей среде [2]. Теневая визуализация картин стратифицированных течений в режиме интенсивной генерации присоединенных внутренних волн равномерно движущимся цилиндром и плоской пластиной при различных углах атаки наряду с измерениями вертикального профиля горизонтальной компоненты скорости течения в опережающем возмущении с помощью плотностных меток выполнены в [3]. Важная особенность картин течения – наличие высокоградиентных прослоек была использована для согласованной оптической и акустической визуализации картины течения позади вертикальной пластины [4].

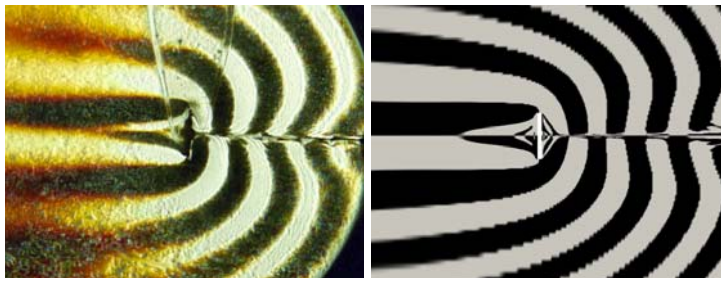
Расчет картины течения за вертикальной пластиной с использованием уравнений турбулентности показал хорошее качественное и количественное согласие с результатами наблюдений картин внутренних волн [5], однако в силу особенности постановки

задачи, тонкие структуры, наблюдаемые в эксперименте, не были визуализированы в численном решении. Численное моделирование картины ламинарного обтекания вертикальной пластины выполнено в [6], эволюция слабо стратифицированного потока проанализирована числено в [7] в пренебрежении влиянием внутренних волн. В последние годы, в рамках современных версий теории турбулентности, моделируется обтекание и сплошных, и перфорированных пластин как в традиционной двумерной [8], так и более полной трехмерной постановке [9]. Однако методики расчетов на основе теорий турбулентности не позволяют идентифицировать тонкую структуру течений неоднородных жидкостей, отчетливо визуализируемую классическими теневыми инструментами [3, 4] и изучать ее влияние на динамику течений.

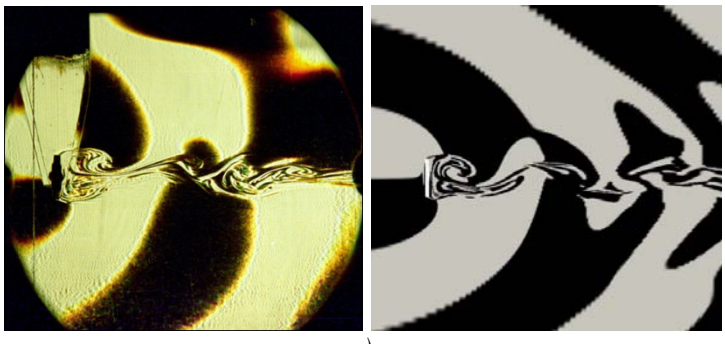
Целью данной работы является разработка методики высокоразрешающего численного расчета тонкой структуры и внутренних волн в картине стратифицированного течения около вертикальной пластины и сравнение результатов визуализации полученных решений с данными выполненных исследований теневыми инструментами.



а)



б)



в)

Рис. 1. Сравнение теневого изображения (коэффициент преломления света) и рассчитанной картины (горизонтальная компонента градиента плотности) стратифицированного течения около вертикальной пластины ($h = 2.5$ см, $T_b = 12.5$ с)*:* $(а - в) - U = 0.03; 0.18; 0.75$ см/с

Математическое моделирование задачи проводится на основе системы уравнений механики несжимаемой непрерывно стратифицированной жидкости, включающей уравнение переноса импульса с учетом гравитационной силы в приближении Буссинеска, уравнение диффузии, неразрывности и замыкающее линеаризованное уравнение состояния [10]. Задача решается путем прямого численного моделирования методом конечного объема с использованием вычислительного пакета OpenFOAM, в рамках которого разработаны собственные решатели для расчета стратифицированных течений, библиотеки динамических расчетных сеток, позволяющие согласовывать перемещение узлов сетки в соответствии с движением препятствия, а также специальные утилиты для обработки и визуализации результатов численных расчетов [11].

Лабораторная визуализация течений выполнена с помощью теневого прибора ИАБ-458 на стенде ЛПБ УИУ «ГФК ИПМех РАН» с использованием вертикальной щелевой осветительной диафрагмы размером 10х12 мм и плоского вертикального ножа Фуко [12]. Изменения освещенности пропорциональны вариациям горизонтальной компоненты градиента коэффициента преломления. Цветовая окраска обусловлена выраженной дисперсией света в такой среде [13].

Для водного раствора поваренной соли, использованного для создания стратификации, коэффициент преломления, визуализируемый в лабораторных опытах, связан линейным соотношением с величиной горизонтальной компонентой градиента плотности, рассчитываемой в численном моделировании. Сравнение данных расчетов и высокоразрешающих наблюдений картин стратифицированных течений показывает хорошее, как качественное, так и количественное, согласие результатов (Рис. 1).

В ползучем течении при медленном движении тела выражены опережающие (наклонные лучи) и присоединенные позади тела внутренние волны, а также ограничивающие плотностной след лигаменты, отстоящие на некотором расстояние от кромок пластины (Рис. 1, а). Заметное отставание области спутного следа от кромок донной части препятствия объясняется значительным влиянием стратификации, которая для данного режима течения существенно ограничивающей вертикальный размер возмущений.

С ростом скорости вертикальный размер следа растет и область контакта подходит к кромкам. В режиме интенсивных волновых возмущений представлены и волны, и обширное семейство лигаментов, образующих тонкослоистый след (Рис. 1, б). Причем и в расчетах, и опытах визуализируется тонкая структура опережающего возмущения, указывающая на существование лигаментов как позади, так и впереди тела. В экспериментах фазовые поверхности присоединенных внутренних волн деформируются спутным течением несколько сильнее, чем в расчетах, расщепленная картина тонкослоистых возмущений выражена более контрастно.

С дальнейшим увеличением скорости несколько меняется общая структура течения (фазовые поверхности внутренних волн наклоняются в сторону движения тела, меняется геометрия тонкоструктурных прослоек) и степень выраженности отдельных компонентов (Рис. 1, в). Наиболее сильные структурные изменения наблюдаются в спутном следе за телом, где формируются типичные вихревые элементы типа вихревых диполей за телом и «вихревых пузырей» в зонах дивергенции фазовых поверхностей внутренних волн. В данном случае сравнительно больших скоростей движения пластины размер примыкающего донного вихря превышает высоту препятствия.

Таким образом, в нестационарном течении в различной степени представлены все его компоненты, включая медленно эволюционирующие – поля присоединенных и опережающих волн, и быстро меняющиеся – тонкоструктурные прослойки (лигаменты) и их наборы – вихри, которые активно взаимодействуют между собой и со средним течением.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа одного из авторов (Ю.Д.Чашечкин) частично поддержана программой Президиума РАН № №1.2.49 «Взаимодействие физических, химических и биологических процессов в Мировом океане» и средствами государственного бюджета по госзаданию № АААА-А17-117021310378-8. Эксперименты выполнены на стенде ЛПБ УНУ «ГФК ИПМЕХ РАН».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary Layer Theory. Springer-Verlag: Berlin. 2017.
2. *Turner J.C.* Buoyancy Effects in Fluids. Cambridge University Press. 1973.
3. *Chashechkin Yu.D., Mitkin V.V.* A visual study on flow pattern around the strip moving uniformly in a continuously stratified fluid // J. of Visualization. 2004. V. 7. No. 2. P. 127–134.
4. *Prokhorov V.E., Chashechkin Yu.D.* Visualization and acoustic sounding of the fine structure of a stratified flow behind a vertical plate // Fluid Dynamics. 2013. V. 48. No. 6. P. 722–733.
5. *Houcine H. et. al.* Numerical modeling of the generation of internal waves by uniform stratified flow over a thin vertical barrier // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 2012. V. 68. P. 451–466.
6. *Castro P., Cliffe K.A., Norgett M.J.* Numerical predictions of the laminar flow over a normal flat plate // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 1982. V. 2. P. 61–88.
7. *Chernyshenko S.I., Castro I.P.* High-Reynolds-number weakly stratified flow past an obstacle // J. Fluid Mechanics. 1996. V. 317. P. 155–178.
8. *Castro I.P.* Wake characteristics of two-dimensional perforated plates normal to an airstream // J. Fluid Mechanics. 1971. V. 46. P. 599–609.
9. *Basnet K., Constantinescu G.* Effect of a bottom gap on the mean flow and turbulence structure past vertical solid and porous plates situated in the vicinity of a horizontal channel bed // Physical review fluids. 2019. V. 4. 044604.
10. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theoretical Physics. Hydromechanics. Pergamon Press. 1987.
11. *Chashechkin Yu.D., Zagumennyi Ia.V.* Formation of waves, vortices and ligaments in 2D stratified flows around obstacles // Physica Scripta. 2019. V. 94. No. 5. 054003.
12. Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере (УИУ «ГФК ИПМех РАН») (2018): http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#aboutESP.
13. *Chashechkin Yu.D.* Schlieren visualization of a stratified flow around a cylinder // J. of Visualization. 1999. V.1. No. 4. P. 345–354.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СЛЕДА ЗА СВОБОДНО ПАДАЮЩИМ РАСТВОРЯЮЩИМСЯ КРИСТАЛЛОМ

А.М. Чуприков
Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН

В природных условиях и технологических аппаратах жидкости бывают однородными и неоднородными, и неоднородность определяется частотой плавучести. Перенос вещества в природных средах сопровождается неоднородным распределением концентрации во времени и пространстве. Одной из научных задач является исследование

всплывающих газовых пузырьков [1]. Всплывание газовых пузырьков и погружающихся тел имеет фундаментальное значение.

Выполнено большое количество экспериментальных исследований падения для тел не изменяющих свою форму. С развитием технологий и защиты экологии интерес сопровождается изучением растворимых тел, такие как соль. В момент падения изменяется как характер движения самих тел, так и их геометрия следов. При малых числах Рейнольдса (меньше 200) тело опускается равномерно и близко к прямолинейной траектории. В стратифицированной среде падение тел сопровождается возникновением внутренних волн, что служит для определения солености стратификации [2].

В данном исследование изучается эволюция вихревой системы, образующейся в следе падающего кристалла соли в однородной и стратифицированной средах. Цель данной работы – визуализация картины течений и определение основных параметров эволюционирующего следа за растворяющимся кристаллом соли.

Распределение частоты плавучести (частоты свободных внутренних колебаний) – важнейшая характеристика стратифицированных сред, которая заметно влияет на структуру гидродинамических и гидроакустических полей.

$\Lambda = \left| d \ln \rho / dz \right|^{-1}$ – формула нахождения масштаба плавучести,

$N = \sqrt{g / \Lambda}$ – связь частоты плавучести с масштабом плавучести,

$T_b = 2\pi N$ – связь между периодом плавучести и частотой плавучести [3].

Опыты выполнены в лабораторном бассейне ТСТ-1 из состава «ГФК ИПМех РАН». Бассейн заполнялся однородной пресной водой, однородным и стратифицированным раствором NaCl, с периодом плавучести $T_b = 6.3c$, методом непрерывного вытеснения. В бассейн вручную бросались кристаллы соли и сахара различных размеров. Проводилась съемка теневых картин методом «щель –нож Фуко» с помощью теневого прибора ИАБ-458(апертура прибора составляет 230мм). Фото- и видеофиксация падения кристаллов и эволюция вихревой системы в следе падения с течением времени производилась на фотоаппарат Canon EOS 5D Mark II, время наблюдения за эволюцией следа составляет 0,5–3 минуты.

В данной работе была разработана методика наблюдения за падением кристаллов и эволюцией вихревой системы в следе падения, проведены эксперименты и прослежена эволюция. Определены геометрические параметры. Определена скорость падения кристаллов. Период плавучести T_b определялся по изменению теневой картины от следа тонущего кристалла NaCl.

На рисунках 1–3 представлены эволюции следов падения растворимого кристалла в пресной воде при различных размерах кристаллов, в порядке их увеличения соответственно. Габаритные размеры рассматриваемой области 18 см×3 см.

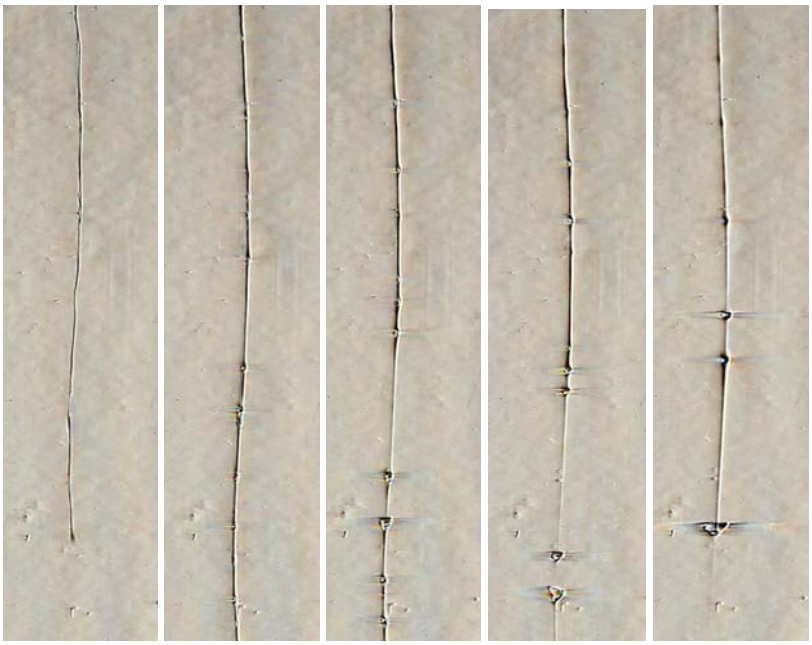


Рис. 1. Эволюция следа падения, близкого к прямолинейному (свободное падение кристалла NaCl в пресной воде).

На данной серии фотографий мы наблюдаем эволюцию следа за падением кристалла NaCl при числах Рейнольдса меньше 200. Скорость падения кристалла υ_k = 10,1 см/с. След падения близок к прямолинейному. В следе образуются структуры, движущиеся повышенных градиент, которые представляют интерес для изучения

Рис. 2. Эволюция винтового следа (падение кристалла NaCl) в пресной воде.

На данной серии фотографий мы наблюдаем эволюцию следа за падением кристалла NaCl при числах Рейнольдса близким к 200. Скорость падения кристалла υ_k = 13,7 см/с. След падения имеет винтовой характер. В следе образуются структуры с повышенным градиентом также, как и в случае «прямолинейного» падения.

Рис. 3. Эволюция следа неоднородного падения более крупного кристалла NaCl в пресной воде.

На данной серии фотографий наблюдается эволюцию следа за падением кристалла NaCl при числах Рейнольдса больше 200. Скорость падения кристалла υ_k = 16,8 см/с. След падения имеет неоднородный характер.

На рисуннах 4–5 представлены эволюции следов падения растворимого кристалла в стратифицированной жидкости. Период влавучести стратификации T_b = 6,3 с.

Рис. 4. Эволюция следа винтового падения кристалла NaCl в стратифицированной жидкости с возникновением внутренних волн.

На данной серии фотографий мы наблюдаем эволюцию следа за падением кристалла NaCl при числах Рейнольдса близким к 200. След падения имеет винтовой характер, а также возникают внутренние волны около следа. В следе не наблюдаются структуры с повышенным градиентом, как в случае с пресной водой. Габаритные размеры рассматриваемой области 18 см×3 см.

Рис. 5. Эволюция следа падения кристалла NaCl в стратифицированной жидкости с возникновением хорошо выраженной вихревой системы, а также внутренних волн.

На данной серии фотографий мы наблюдаем эволюцию следа за падением кристалла NaCl при числах Рейнольдса больше 200. След падения имеет неоднородной характер с хорошо выраженной вихревой системой, что представляет собой интерес для изучения, а также возникают внутренние волны около следа. Габаритные размеры рассматриваемой области 18 см * 4 см.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 19-19-00598). Эксперименты проведены на Стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН".

ЛИТЕРАТУРА

1. Chashechkin Y. D., Kistovich Yu.V., Smirnov S.A. Linear generation theory of 2D and 3D periodic internal waves in a viscous stratified fluid // Environmetrics. 2000. V. 12. P. 57–80.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика // Теоретическая физика: т.VI (3-е изд., перераб.-М.:Наука. Гл. ред.физ-мат.лит.,1986. С.736.).
3. Смирнов С.А., Чашечкин Ю.Д., Ильиных Ю.С. Высокоточный метод измерения профиля периода плавучести // Измерительная техника. 1998. № 6. С. 15–18.

—— ♦♦♦ ——

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗА НА ОСИ ОТКРЫТОГО ТОРЦА ТРУБЫ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА

Л.Р. Шайдуллин
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
e-mail: liqn@mail.ru

Изучению особенностей движения газа или жидкости посвящено большое количество работ, необходимых для увеличения эффективности существующих и для создания новых перспективных приложений в вибротехнике, трубопроводных системах. При теоретическом изучении резонансных колебаний газа в открытой трубе возникают значительные трудности, вызванные различными эффектами нелинейного волнового поля у выходного сечения трубы [1]. В работах [2, 3] подробно исследовано поле мгновенных скоростей в осевом и радиальном направлениях в области открытого торца трубы в режиме образования периодических ударных волн с амплитудами от 0.1 до 0.4 бара. Ранее было получено, что скорость газа в пульсирующей струе во внешнем волновом поле может достигать 150 м/с и выше [2, 4]. Выявлены различные нелинейные эффекты при распространении волн в трубе с концевыми насадками [3, 5]. Внешнее волновое поле исследуется в работе [6]. Течение газа вблизи открытого конца и вихревое движение рассматривается в работе [7]. Существуют исследования по измерению скоростей акустического поля в каналах при генерации нелинейных стоячих волн, где было показано хорошее соответствие теоретических данных с экспериментальными результатами метода PIV [8] и метода LDV при $30 \le \mathrm{Re} \ge 120$ [9]. В продолжении [10] в работе проводятся теоретические и экспериментальные исследования поля скоростей течения газа в окрестности открытого торца трубы при вынужденных продольных колебаниях газа вблизи резонансной частоты.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для теоретического описания гармонических колебаний газа, возбуждаемых поршнем с амплитудой смещения $l << L_0$, в длинной цилиндрической трубе ($L_0/R >> 1$, $\mathrm{Sh} = \omega R/V < 1$, где $L_0 = 0.918$ м, $R = 0.1$ м) рассматривалась система гидродинамических уравнений. Решение системы в первом (акустическом) приближении искались при помощи метода возмущений. В результате экспериментальных исследований были получены осциллограммы с эпюрами давления газа для различных частот возбуждения при переходе через резонанс. На резонансе $\nu = 90.3$ Гц давление принимает максимальное значение, амплитуда достигает значения 0.02 бар, крутизна переднего фронта становится больше заднего, однако форма волны остается непрерывной. Сравнение теоретической зависимости и экспериментальных данных для скорости газа от частоты возбуждения вблизи резонансной частоты на оси трубы во внешнем волновом поле вблизи среза трубы ($x = 0.005$ м) показало, что с увеличением частоты от до-резонансного режима колебаний наблюдается быстрый рост средней скорости до максимального значения в резонансе. За резонансом при дальнейшем увеличении частоты значения скорости также быстро уменьшаются. В области до-резонансных и после резонансных частот теория и эксперимент хорошо согласуется, однако с приближением к резонансу теоретические значения становятся выше опытных. Это связано с влиянием вихреобразований [1] у открытого торца трубы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально и теоретически исследована скорость истечения газа на оси открытого торца трубы при вынужденных продольных колебаниях газа вблизи резо-

нансной частоты. В окрестности открытого торца в зоне с фазами выброса и всасывания происходит резкое падение скорости на оси трубы, что связано с вихревым движением при истечении колеблющегося газа из трубы. Далее происходит увеличение до максимального значения 11 м/с и при удалении на 0,1 м от открытого конца наблюдается монотонное уменьшении в силу рассеяния ядра струи и структуры потока.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Исследование выполнено при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН №20: «Новые вызовы климатической системы Земли».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ilgamov M.A., Zaripov R.G., Galiullin R.G., Repin V.B.* Nonlinear oscillations of gas in a tube // Appl. Mech. Rev. 1996. Vol. 49. № 3. P. 137–154.
2. *Васильев Л.С., Зарипов Р.Г., Магсумова А.Т., Сальянов О.Р.* Экспериментальное исследование внешнего волнового поля у открытого конца // Инженерно-физический журнал. 1991. Т. 61. № 5. С. 714–716.
3. *Зарипов Р.Г.* Нелинейные колебания газа в открытой трубе // Акустический журнал. 1977. Т. 23. Вып. 3. С. 378–383.
4. *Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р., Пермяков Е.И.* Нелинейные резонансные колебания газа в трубе с открытым концом // Акустический журнал. 1996. Т. 42. № 6. С. 769–772.
5. *Stuhltrager, E., Thomann H.* Oscillation of a gas in an open-ended tube near resonance // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 1986. Vol. 37. № 3 P.155–175.
6. *Tkachenko L. A., Galiullin R. G.* Influence of the open end geometry on resonance oscillations of a gas in a tube // Russian Aeronautics (Iz.VUZ). 2010. Vol. 53. №. 1. P. 45–50.
7. Betchov R. Non-linear oscillations of the column of a gas // J. Phys. Fluids. 1958. Vol.6. №6. P.205–212.
8. *Nabavi M., Siddiqui K., Dargahi J.* Measurement of the acoustic velocity field of nonlinear standing waves using the synchronized PIV technique // Experimental Thermal and Fluid Science. 2008. Vol 33. P. 123–131.
9. *Reyt I., Moreau S., Bailliet H., Valière J-C.* Experimental study of acoustic streaming in a high level standing wave guide: Influence of mean temperature and higher harmonics distribution // Nonlinear acoustics State of the Art and Perspectives AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1474. P. 83–86.
10. *Губайдуллин, Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р.* Вынужденные продольные колебания газа в открытой трубе вблизи резонансной частоты возбуждения // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 6. С.1537–1542.

—— ♦ ♦ ♦ ——

ИССЛЕДОВАНИЕ В СЛАБОНЕЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ КРИТИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПРИ ИСПАРЕНИИ ВОДЫ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В.А. Шаргатов [1,2], Ю.А. Богданова [1,2], С.В. Горкунов [1,2]
[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
[2] Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"
e-mail: shargatov@mail.ru

Рассматривается класс течений в пористой среде, которые подвергаются переходу к неустойчивости через нулевое критическое волновое число. К этому классу относят-

ся, например, течения с фазовым переходом, происходящим на некоторой границе раздела, в протяженной горизонтальной области пористой среды. В качестве примера можно привести модель, описывающую процессы фильтрации в природных массивах, контактирующих с шахтами, туннелями и другими конструкциями. Функционирование таких инженерных систем сопровождается тепломассообменом между конструкцией и окружающими породами [1]. Искусственная вентиляция позволяет сохранить микроклимат, необходимый для эксплуатации. Вентиляция сопровождается испарением с потолка сооружения, в то время как грунтовые воды движутся вниз под действием силы тяжести или давления в водном горизонте. Вода может попасть в подземное сооружение в жидком или парообразном состоянии. Если окружающая порода имеет относительно низкую проницаемость, естественно предположить, что подземная вода, движущаяся к потолку сооружения, испаряется где-то в пористом пространстве и диффундирует в подземное сооружение в виде пара. В этом случае область, содержащая смесь пара и воздуха, возникает между свободным пространством и областью, насыщенной водой.

Рассматривается высокопроницаемый водный горизонт (область I на рис. 1), который ограничен снизу плоскостью $z = 0$ (ось z направлена вниз). Давление воды при $z = 0$ постоянно и равно P_0. Порода в слое $0 < z < L$ имеет низкую проницаемость, а на поверхности $z = L$ она обдувается воздухом с влажностью v_a, которая меньше влажности насыщенного пара, при заданном значении температуры T. В этом случае пористая среда в области Ω_1 при $0 < z < s(x,t)$ содержит воду, а в области Ω_2 при $0 < z < s(x,t)$ насыщена смесью воздуха и водяного пара (см. рис. 1).

Согласно [1] система уравнений, описывающих изучаемый процесс, совместно с граничными условиями имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\Delta P = 0 \text{ при } 0 < z < s(x,t),\ P = P_0 \text{ при } z = 0,\ P = P_a + P_c \text{ при } z = s(x,t),\\ &\Delta v = 0 \text{ при } s(x,t) < z < L,\ v = v^* \text{ при } z = s(x,t),\ v = v_a \text{ при } z = L, \\ &\boldsymbol{V}_n = -k(m\mu_w)^{-1}\,[\mathrm{grad}(P - \rho_w g z)]_n + D\,\rho_a \rho_w^{-1}\,[\mathrm{grad}(v)]_n \text{ при } z = s(x,t), \end{aligned} \qquad (1)$$

где m – пористость, k – проницаемость, μ_w – вязкость воды, g – ускорение свободного падения, ρ_w – плотность воды, ρ_a – плотность воздуха, P_a – давление воздуха в области Ω_2, P_c – капиллярное давление, индекс n обозначает нормаль к поверхности фазового перехода $s(x,t)$, направленную из области воды, D – коэффициент диффузии, $\boldsymbol{V}_n$ – нормальная компонента скорости поверхности фазового перехода.

Если пористая среда несмачиваема, то могут существовать два стационарных решения с плоским фронтом фазового перехода. В [1] показано, что для нижнего решения может иметь место неустойчивость по отношению бесконечно малым коротковолновым возмущениям, но это решение устойчиво по отношению к бесконечно малым длинноволновым возмущениям. Ниже мы будем рассматривать только случаи, когда нижнее решение спектрально устойчиво.

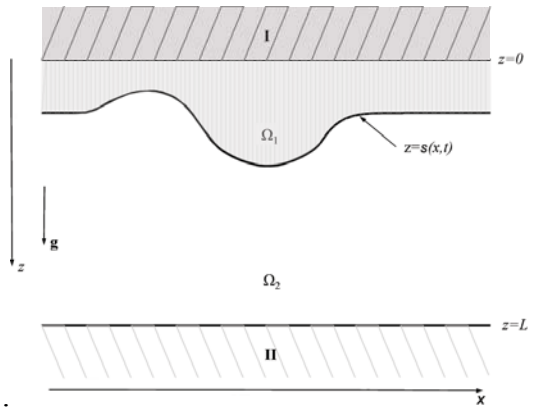


Рис. 1. Схема течения.

Известно (см. [2]), что конечные локализованные возмущения спектрально устойчивого решения могут приводить к тому, что фронт за конечное время достигает верхней границы низкопроницаемого слоя при $z=0$, граничные условия перестают выполняться и постановка задачи должна быть изменена. Такой сценарий рассматривается как катастрофическая перестройка течения. Причины, по которым одни возмущения приводят к такой эволюции решения, а другие – нет, исследуются ниже.

Кроме того предметом изучения является возможность существования таких стационарных решений задачи (1), для которых фронт фазового перехода отличается от плоского. Если такие решения существуют, но являются спектрально неустойчивыми, то получить их методом установления при численном решении нестационарной задачи (1) не представляется возможным.

Еще одна задача, которая исследована в данной работе, – это существование решений задачи (1) в виде бегущей волны и глобальная устойчивость таких решений.

Указанные цели исследования были достигнуты путем аналитического решения приближенного уравнения, описывающего эволюцию фронта фазового перехода, и проверки сделанных на основе этих решений выводов с помощью численного решения задачи (1). В слабонелинейном приближении уравнение для эволюции фронта фазового перехода сводится к уравнению Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП):

$$\partial\eta/\partial\tau=\partial^2\eta/\partial\xi^2 + \eta - \eta^2 \qquad (2)$$

где η пропорциональна разности между координатой фронта $s(x,t)$ и неустойчивым положением плоского фронта H_s, τ – безразмерное время, ξ – безразмерная горизонтальная координата. Показано, что полученное приближенное уравнение предсказывает существование стационарных решений в основной задаче. Такими решениями являются два решения с плоским фронтом, одно солитоноподобное решение и семейство периодических решений, описываемых эллиптическими функциями.

Все найденные решения, за исключением одного решения для плоского фронта являются спектрально неустойчивыми и не могут возникнуть в результате асимптотического приближения решения, которое имело начальные условия отличные от тех, которые совпадают с этим неустойчивым стационарным решением. Любое конечное начальное возмущение спектрально устойчивого решения либо асимптотически затухает, либо приводит к катастрофической перестройке течения, а именно: образованию пальца и прорыву воздуха к верхней границе малопроницаемого слоя пористой среды. При этом, чем ближе начальное возмущение к неустойчивому стационарному решению, тем медленнее эволюционирует это возмущение на начальной стадии.

Найденные приближенные стационарные решения могут с хорошей точностью использоваться для предсказания того, по какому сценарию пойдет развитие возмущения, которое не имеет общих точек ни с одним стационарным решением. Если начальное положение фронта фазового перехода находится между спектрально устойчивым решением и любым из стационарных решений, то оно затухает. Если начальное положение фронта находится выше хотя бы одного спектрально неустойчивого стационарного решения, то происходит катастрофическая перестройка решения.

Для проверки полученных результатов выполнено численное решение задачи о движении фронта фазового перехода с помощью разработанного авторами программного кода. Результаты численного моделирования использованы для верификации возможности использовать стационарные решения, полученные в слабонелинейном приближении, а также для определения сценария, по которому пойдет развитие начального возмущения. Показано, что полученные стационарные решения позволяют пердсказать поведение возмущения в окрестности точки поворота бифуркацинной диаграммы.

Предложена модификация формул, описывающих приближенное стационарное солитоноподобное решение в случае, когда амплитуда возмущения сравнима с высотой

малопроницаемого слоя пористой среды, в котором находится фронт фазового перехода. Путем численного моделирования показано, что это модифицированное приближенное решение находится в хорошем согласии с результатами численного расчета.

Известно, что уравнение КПП имеет решения в виде бегущей волны (кинка) со значениями на бесконечности, соответствующими устойчивому и неустойчивому положению плоского стационарного фронта.

Для биологических проблем и задач теории горения, которые описываются уравнением КПП, допустимыми являются только значения $0< \eta <1$. Однако отклонение поверхности изначально плоского фронта фазового перехода от положения равновесия может происходить не только вниз (в этом случае $\eta >0$), но и вверх ($\eta <0$). При этом отдельные части фронта могут оказаться ниже уровня устойчивого равновесия H_g, поэтому значения $\eta >1$ также являются допустимыми. Решение для бегущей волны, распространяющейся со скоростью $W_{KPP}<2$ не является монотонным и в некоторых точках такой волны $\eta <0$, поэтому подобные решения обычно не рассматриваются, как противоречащие физическому смыслу рассматриваемой задачи. Однако оказалось, что бегущая волна, имеющая постоянную скорость $W_{KPP}<2$, является допустимой, если уравнение (2) описывает распространение фронта фазового перехода в пористой среде.

Результаты численного решения подтверждают существование решений в виде бегущей волны для задачи (1). При этом уравнение КПП с хорошей точностью предсказывает скорость бегущей волны для задачи (1) даже в том случае, когда предположения о малости амплитуды и большей длине возмущения, сделанные при использовании слабонелинейного приближения, перестают выполняться с большой точностью.

При $W_{KPP}<2$ бегущая волна неустойчива как для задачи (1) так и для уравнения (2). В обоих случаях существует два сценария развития неустойчивости. В первом случае решение трансформируется в бегущую волну, скорость которой асимптотически приближается к 2. При втором сценарии развития неустойчивости образуется палец, быстро увеличивающийся по амплитуде. Для полной системы уравнений палец растет вверх по направлению к верхней границе низкопроницаемого слоя и достигает этой границы за конечное время.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда № 16-11-10195.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильичев А.Т., Цыпкин Г.Г.* Неустойчивости однородных фильтрационных течений с фазовым переходом// ЖЭТФ. 2008. Т. 134. С. 815–830.
2. *Shargatov V.A., Il'Ichev A.T., Tsypkin G.G.* Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium //Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 83. P. 552–561.

—— ♦ ♦ ♦ ——

СКАЧОК СКОРОСТИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Б.Р. Шарифуллин, И.В. Наумов
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН
e-mail: sharifullinbulat@mail.ru

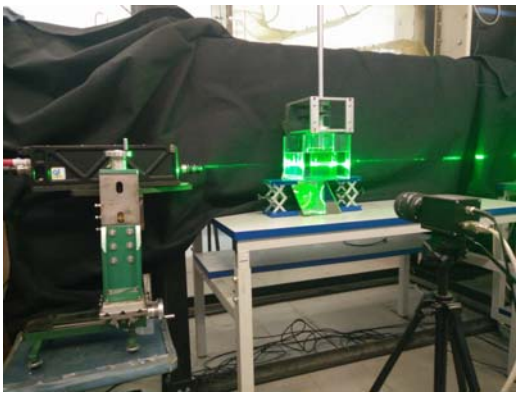
Развитие воздушных вихревых биореакторов привлекло внимание исследователей к двухфазным замкнутым потокам в закрытом цилиндрическом контейнере [1, 2]. Подходящей моделью биореактора является закрученный поток исследуемой среды в вертикальном герметичном контейнере [2]. Вращающаяся крышка обеспечивает вихревое движение необходимой интенсивности, в то время как другие стенки контейнера неподвижны. Простая геометрия и четко определенные граничные условия удобны для численного моделирования. Но экспериментальное измерение скорости и визуализация структуры потока в вихревой системе жидкость–газ затруднена. Поэтому для экспериментального моделирования нелинейных эффектов и интенсификации массообмена в вихревом биореакторе лучше всего использовать конфигурацию из двух несмешиваемых жидкостей различной кинематической вязкости и плотности.

Первые экспериментальные исследования, посвященных изучению вихревого ограниченного движения двух жидкостей, были проведены для комбинаций силиконовое масло–вода [3], соевое масло–вода [4] и подсолнечное масло–вода [5]. Использование масел в качестве верхней жидкости позволило изучить деформацию границы раздела [3], выявить осевой противоток (распад вихря) в верхней жидкости [4], а также обнаружить эффект гистерезиса и образование водяного столба [5]. Экспериментальное и численное исследование ячеистой структуры в двух-жидкостном течении [6] обнаружило и обосновало эффект проскальзывания радиальной компоненты скорости на границе раздела, происходящий в результате влияния центробежной силы и разности плотностей двух жидкостей. В данной работе экспериментально определен скачок азимутальной скорости на границе раздела и определено влияние вязкости нижней жидкости на ее затухание.

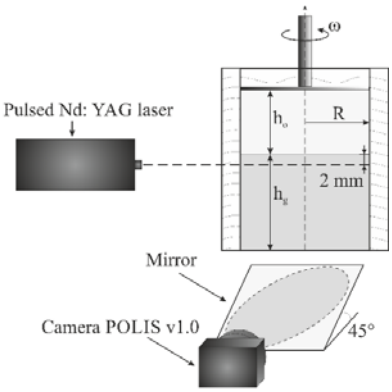
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Эксперименты проводились в вертикальном цилиндрическом контейнере (R = 45 мм, h = 2,5R) с верхним диском, вращающимся с угловой скоростью ω (рис. 1). Были измерены радиальная и азимутальная компоненты скорости в горизонтальных поперечных сечениях с использованием метода цифровой трассерной визуализации (PIV). Измерения проводились в двух сечениях: на расстоянии 2 мм над и под границей раздела (рис. 1 (б)). Сдвиг на 2 мм от границы раздела позволяет исследовать закономерности переноса углового момента через границу раздела, избегая искажений из-за ее деформации при увеличении закрутки потока. В качестве верхней жидкости было использовано подсолнечное масло (o), а в качестве нижней жидкости: (I) 80% раствор глицерина (g), (II) вода (w). При температуре 22,6°C плотности и кинематические вязкости жидкостей составляли: ρ_o = 914,7 кг/м^3, ρ_g = 1237 кг/м^3, ρ_w = 1000 кг/м^3, ν_o = 49,11 мм^2/с, ν_g = 42,82 мм^2/с, ν_w = 1 мм^2/с. Высота слоя верхней жидкости h_o = 1R, высота слоя нижней жидкости $h_g = h_w$ = 1R.

Интенсивность вихревого движения, генерируемого вращающимся диском, характеризуется числом Рейнольдса: $Re = \omega R^2/\nu_o$ и относительным удлинением h_o.



(а)

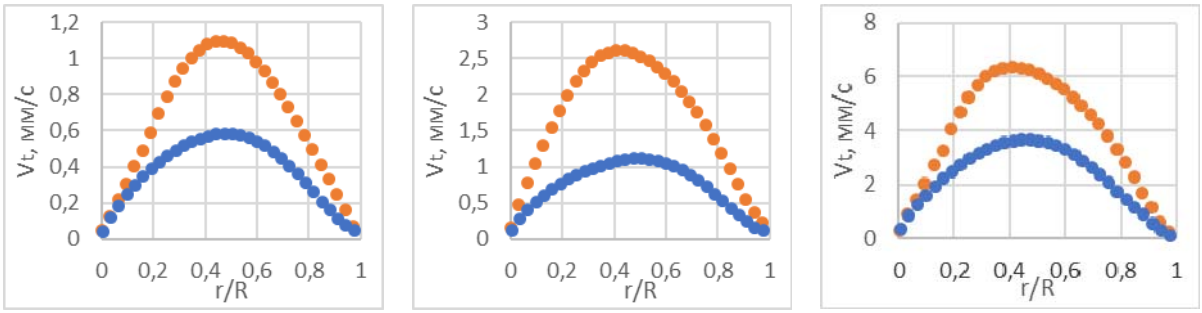


(б)

Рис.1. *Фото (а) и схема экспериментальной установки (б).*

РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 представлено сравнение измеренных профилей азимутальной скорости V_t в горизонтальном сечении над и под границей раздела для случая I. По данным профилям видно, что максимальное значение скорости отличается примерно в два раза. Из-за разницы в плотности жидкостей и вязкого трения на границе раздела наблюдается эффект проскальзывания азимутальной скорости.



(а) (б) (в)

Рис. 2. Профили азимутальной скорости (Vt) в горизонтальном сечении в случае I при Re = (а) 50, (б) 100, (в) 200 (● – над границей раздела, ● – под границей раздела).

На рис. 3 представлены профили азимутальной скорости над и под границей раздела для случая II. На данных профилях так же наблюдается скачок азимутальной скорости на границе раздела, но отношение максимальных значений азимутальной скорости над и под границей раздела существенно меньше чем для случая I, из-за влияния силы вязкого трения на пограничный слой под границей раздела.

На рис. 2, 3 видно, что при увеличении числа Рейнольдса над границей раздела происходит сдвиг максимального значения азимутальной компоненты скорости в область оси цилиндра. Кроме этого, на рис. 3 под границей раздела наблюдается смещение максимального значения в область боковой стенки. Сходящееся верхнее течение сдвигает максимум к оси, а расходящееся нижнее течение сдвигает максимум на периферию. Наличие смещения максимального значения под границей раздела в случае II связано с тем, что влияние силы вязкого трения на пограничный слой меньше, чем в случае I. На рисунке 4 показаны распределения угловой скорости (Ω) над и под границей раздела для чисел Рейнольдса 50 и 200 (сл. II), из которых видно, что при увеличении числа Рейнольдса профиль угловой скорости под границей раздела выпрямляется, приближаясь по форме к профилю угловой скорости вращающегося диска.

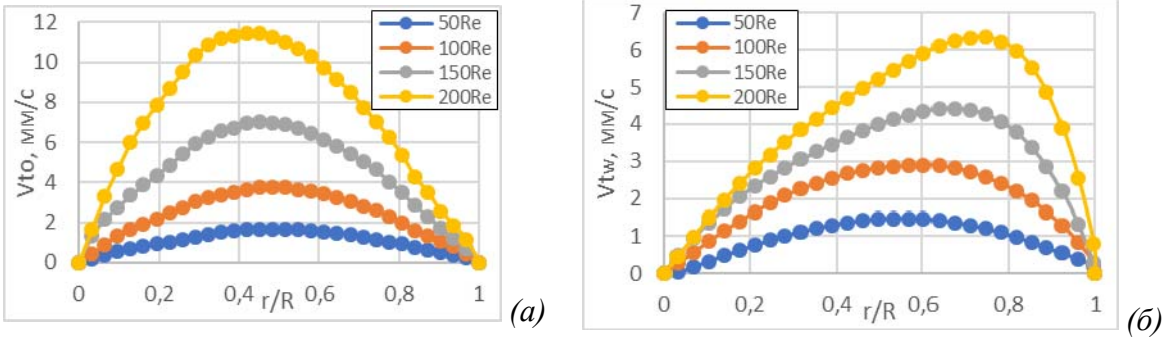


Рис. 3. Профили азимутальной скорости (сл. II): (а) над и (б) под границей раздела.

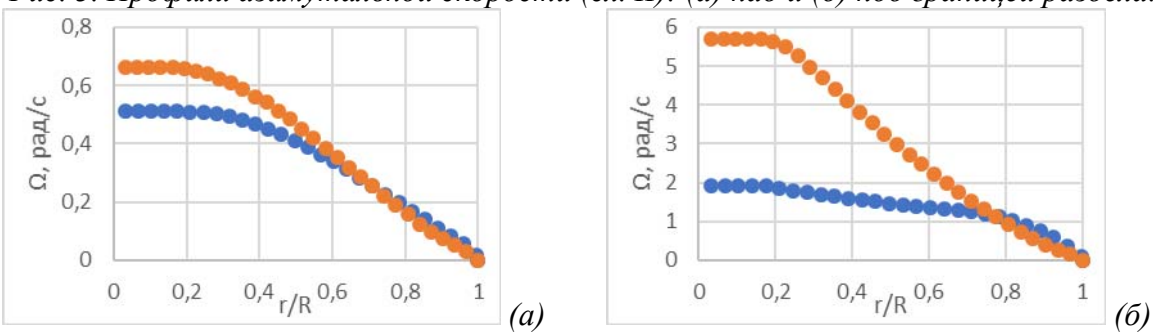


Рис. 4. Распределение угловой скорости (сл. II) при Re = (а) 50, (б) 200 (● – над границей раздела, ● – под границей раздела).

ЗАКЮЧЕНИЕ

Основным результатом выполненного исследования является экспериментальное наблюдение того, что окружная скорость имеет скачок на границе раздела двух несмешиваемых жидкостей в ограниченном вихревом потоке. В численных расчетах как правило, используется условие непрерывности для компонент скорости на границе раздела. В работе [6] был выявлен эффект проскальзывания радиальной скорости на границе раздела. Настоящее исследование показывает, что проскальзывание также происходит и для окружной скорости. Представленные результаты предполагают пересмотр граничных условий на границе раздела двух жидкостей при численном моделировании, для корректного описания эволюции вихревого движения как в биореакторах, так и в других приложениях.

РБЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-09-00083.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ramazanov, Yu. A., Kislykh, V.I., Kosyuk, I. P., Bakuleva, N. V., Shchurikhina, V. V.* Industrial production of vaccines using embryonic cells in gas-vortex gradient-less bioreactors. // In: New Aspects of Biotechnology and Medicine, 2007, С. 87–91.
2. *Liow, K. Y. S., Tan, B. T., Thouas, G., Thompson, M. C.* CFD Modeling of the Steady-State Momentum and Oxygen Transport in a Bioreactor that is Driven by AN Aerial Rotating Disk // Modern Physics Letters B, 2009, № 23, С. 121–127.
3. *Fujimoto, S., Takeda, Y.* Topology changes of the interface between two immiscible liquid layers by a rotating lid // Phys. Rev. E, 2009, № 80, 015304(R).
4. *Tsai, J.-C., Tao, C.-Y., Sun, Y.-C., Lai, C.-Y., Huang, K.-H., Juan, W.-T., Huang, J.-R.* Vortex-induced morphology on a two-fluid interface and the transitions // Phys. Rev. E, 2015, № 92, 031002(R).
5. *Naumov, I. V., Herrada, M. A., Sharifullin, B. R., Shtern, V.N.* Hysteretic growth and de-

cay of a water-spout column // Phys. Rev. Fluids, 2018, № 3, 024701.
6. *Naumov I.V., Herrada M.A., Sharifullin B., Shtern V.N.* Slip at the interface of a two-fluid swirling flow // Phys. Fluids, 2018, № 30, 074101.

—— ♦♦♦ ——

О ВОЛНОВОМ ДВИЖЕНИИ В СОСТАВНОЙ КАПЛЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А.А. Ширяев
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинсокго РАН
e-mail: aashiryaev@list.ru

Рассматриваются осцилляции сферической капли радиуса R, состоящей из двух слоев несмешивающихся невязких несжимаемых жидкостей. Слой верхней жидкости плотностью ρ_1 имеет толщину h. Внутренняя жидкость, составляющая «ядро» капли имеет плотность ρ_2. Коэффициенты поверхностного натяжения свободной поверхности капли и границы раздела жидкостей обозначаются σ_1 и σ_2 соответственно. Исследуется взаимодействие капиллярных волн на свободной поверхности и границе раздела такой капли. Воздействием набегающего потока воздуха пренебрегается.

Рассмотрение ведётся в сферической системе координат $\{r,\theta,\varphi\}$, связанной с центром масс капли, с использованием осесимметричной постановки. Математическая постановка задачи формулируется в безразмерных переменных с характерными масштабами обезразмеривания $R=\rho_1=\sigma_1=1$. За безразмерными величинами сохраняются старые обозначения. Вводятся безразмерные отношения плотностей слоёв $\rho\equiv\rho_2/\rho_1$ и отношение коэффициентов поверхностного натяжения $\sigma\equiv\sigma_2/\sigma_1$.

Задача описывается приведенной ниже системой уравнений электрогидродинамики, в которой физические величины с нижним индексом «1» относятся к внешнему слою жидкости и свободной границе, а величины с индексом «2» – к внутреннему слою и границе раздела сред.

Осцилляции возмущенной свободной поверхности капли описывается функцией $\xi_1(\theta,t)$, а возмущение границы раздела сред – $\xi_2(\theta,t)$, представляемых в виде разложений по полиномам Лежандра $P_n(\theta)$:

$$\xi_1(\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)P_n(\theta)\quad \xi_2(\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(t)P_n(\theta)$$

Движение идеальной несжимаемой жидкости внешнего и внутреннего слоёв описывается уравнениями Эйлера и уравнениями неразрывности:

$$\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial t}+\mathbf{V}_1(\nabla\mathbf{V}_1)=-\nabla P_1;\ \rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}_2}{\partial t}+\mathbf{V}_2(\nabla\mathbf{V}_2)\right)=-\nabla P_2;\ div\mathbf{V}_{1,2}=0$$

где $\mathbf{V}_{1,2}$ – поля скоростей внешнего и внутреннего слоев, а $P_{1,2}$ – гидродинамические давления в них. Постановка дополняется условием ограниченности поля скоростей в центре масс капли:

$$r\to 0:\quad |\mathbf{V}_2|<\infty$$

Задача дополняется системой из кинематического и динамического граничных условий на свободной поверхности капли $F_1(r,\theta,t)\equiv r-1-\xi_1(\theta,t)=0$, т.е. при:

$$r = 1 + \xi_1(\theta,t):\ \frac{dF_1(r,\theta,t)}{dt} = 0;\ P_1 - P_{\sigma 1} = P_{ext}.$$

где $P_{\sigma 1} = \mathrm{div}\,\mathbf{n}_1$ – давление капиллярных сил на свободной поверхности P_{ext} – гидростатическое давление окружающей среды, а $\mathbf{n}_1$ – нормаль к свободной поверхности капли. На границе раздела слоёв $F_2(r,\theta,t) \equiv r - 1 + h - \xi_2(\theta,t) = 0$, записываются кинематическое и динамическое условия, а также условие равенства нормальных компонент скоростей внешней и внутренней жидкостей.

$$r = 1 - h + \xi_2(\theta,t):\ \frac{dF_2(r,\theta,t)}{dt} = 0;\ P_2 - P_{\sigma 2} = P_1;\ \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}_2.$$

где $P_{\sigma 2} = \mathrm{div}\,\mathbf{n}_2$ – давление капиллярных сил на границе раздела, а $\mathbf{n}_2$ – нормаль к границе раздела сред. Задача дополняется условиями сохранения объёмов внутренней жидкости и капли в целом, а также условием неподвижности центра масс капли:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R-h+\xi_2(\theta,t)} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi\rho(1-h)^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R+\xi_1(\theta,t)} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-h+\xi_2(\theta,t)} \rho_2 \mathbf{r} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-h+\xi_2(\theta,t)}^{1+\xi_1(\theta,t)} \rho_1 \mathbf{r} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \mathbf{0}$$

В работе ограничимся рассмотрением безвихревых течений ($rot\mathbf{V} = 0$), благодаря чему в задаче можно перейти от векторных полей скоростей течения жидкости $\mathbf{V}_{1,2}$, к соответствующим гидродинамическим потенциалам ψ_1, ψ_2 ($\mathbf{V}_{1,2} = \nabla\psi_{1,2}$). Сформулированная выше задача решается с использованием асимптотических методов, для чего величины волнового возмущения поверхности капли и границы раздела сред полагаются малыми по сравнению с размерами капли, так как вызваны тепловыми колебаниями молекул: $\max\left|\xi_{1,2}(\theta,t)\right| / R \sim \varepsilon << 1$. Соответствующий порядок малости будут иметь поля скоростей жидкости, вызванные этими возмущениями, и гидродинамические потенциалы $\mathbf{V}_{1,2} \sim \psi_{1,2} \sim \xi_{1,2}(\theta,t) \sim \varepsilon$. Гидродинамические давления и давления капиллярных сил представляются в виде разложений по малому параметру ε. Для анализа осцилляций возмущённой поверхности капли исследуется задача первого порядка малости по ε, в которой из системы динамических граничных условий получено дифференциальное эволюционное уравнение четвёртого порядка на коэффициенты $\alpha_n(t)$, определяющие осцилляции свободной поверхности жидкости.

$$D_1(n)\alpha_n(t) + D_2(n)\alpha_n''(t) + D_3(n)\alpha_n^{(4)}(t) = 0; \qquad (1)$$

$$D_1(n) = -\frac{C_1(n)}{C_3(n)};\ D_2(n) = -\frac{C_2(n)}{C_3(n)} - \frac{C_1(n)C_6(n)}{C_3(n)C_4(n)};$$

$$D_3(n) = \frac{C_5(n)}{C_4(n)} - \frac{C_2(n)C_6(n)}{C_3(n)C_4(n)};$$

$$C_1(n) = (1-n)(2+n);\ C_4(n) = -\sigma(n-1)(2+n)/(h-1)^2;$$

$$C_2(n) = \frac{-1}{(1-(1-h)^{2n} + (1-h)^{2n}h)n} + \frac{(1-h)^{-1+n}}{(1-h)^{-2-n}(-1-n) + (1-h)^{n-1}(1+n)};$$

$$C_3(n)=\frac{(1-h)^{2+n}}{(1-(1-h)^{2n}+(1-h)^{2n}h)n}-\frac{1}{(1-h)^{-2-n}(-1-n)+(1-h)^{n-1}(1+n)};$$

$$C_5(n)=\frac{(1-h)^{n}}{(1-(1-h)^{2n}+(1-h)^{2n}h)n}-\frac{1}{(1-h)^{2}((1-h)^{-2-n}(-1-n)+(1-h)^{-1+n}(1+n))};$$

$$C_6(n)=-\frac{(1-h)^{2+2n}}{(1-(1-h)^{2n}+(1-h)^{2n}h)n}+\frac{(1-h)^{-1-n}}{(1-h)^{-2-n}(-1-n)+(1-h)^{-1+n}(1+n)}+\frac{(-1+h)\rho}{n};$$

Эволюционное дифференциальное уравнение сводится к биквадратному алгебраическому подстановкой $\alpha_n(t)=K_n\cos(\omega_n t+\phi_n)$ с вещественными коэффициентами K_n, ϕ_n и определяет собственные частоты ω_n осцилляций отдельно взятых мод. Далее исследуется влияние параметров задачи на осцилляции свободной поверхности капли.

Анализ решения. Будем рассматривать моды осцилляций свободной поверхности капли с малыми номерами $2\le n\le 5$, колебания которых отслеживаются проще, чем колебания более высоких мод. Каждая мода осцилляций поверхности капли имеет две собственные частоты, одна из которых существенно превышает другую. Колебания поверхности высокой частоты соответствуют синфазным колебаниям ядра и внешнего слоя, а низкой частоты– противофазным.

Для иллюстрации отличий от осцилляций однородной капли вводится δ – отношение собственной частоты к частоте осцилляций однородной капли $\omega=\sqrt{n(n-1)(n+2)}$. Получено, что с увеличением h нормализованные таким образом частоты осцилляций в синфазном режиме увеличиваются по сравнению с однородной каплей. На режим противофазных колебаний изменение толщины слоя оказывает более значительное влияние: частоты существенно меньше Рэлеевских, но приближаются к ним по мере увеличения толщины слоя.

Показано, что собственные частоты осцилляций в синфазном режиме становятся заметно больше рэлеевских по мере увеличения безразмерного отношения коэффициентов поверхностного натяжения σ. В противофазном режиме увеличение σ оказывает слабое влияние на амплитуды осцилляций, приводя к их незначительному увеличению.

При близких значениях плотностей жидкостей $1<\rho<1.2$ влияние отношения плотностей жидкостей на противофазные колебания практически отсутствует. Нормализованное отношение частот для синфазных колебаний снижается с увеличением ρ.

Стоить отметить, что наличие жидкого «ядра» в капле оказывает наибольшее влияние на частоты осцилляций основной второй моды. Тем не менее, частоты более высоких мод также существенно отличаются от собственных частот для однородной капли, и это необходимо учитывать при моделировании поверхности осциллирующей капли, содержащей в себе жидкое «ядро».

Заключение. В работе получено два значения собственных частот осцилляций свободной поверхности составной капли, что соответствует выводам других авторов. Частоты осцилляций в синфазном режиме больше частот осцилляций однородной капли (т.е. случай отсутствующего жидкого «ядра»). Уменьшение размера жидкого ядра, уменьшение различий в плотности жидкостей, а также увеличение отношения коэффициентов межфазного натяжения σ приводит к увеличению отличия частот в синфазном режиме от частот для случая однородной жидкости. В противофазном режиме частоты осцилляций меньше частот для случая однородной капли, и разница между ними уве-

личивается по мере уменьшения σ и уменьшения толщины слоя. Изменение отношения плотностей в пределах $1<\rho<1.2$ какого-либо существенного влияния на частоты в противофазном режиме не оказывает. Отличие собственных частот осцилляций от частот для однородной капли существенно и для более высоких мод, что необходимо учитывать при моделировании поверхности составной капли.

—— ♦♦♦ ——

О РЕАЛИЗУЕМОСТИ ТОРОИДАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛЕ ПРИ ЕЁ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ

С.О. Ширяева, А.И. Григорьев
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Будем решать задачу об осцилляциях изолированной сферической капли радиуса R вязкой несжимаемой жидкости массовой плотности ρ, с коэффициентами поверхностного натяжения и кинематической вязкости γ и ν, свободная поверхность которой возмущена капиллярным волновым движением бесконечно малой амплитуды, возникающим из-за теплового движения молекул [1]. Амплитуда тепловых осцилляций капли по порядку величины определится соотношением: $|\xi| \sim \sqrt{\kappa T/\gamma}$, где κ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура жидкости. Для любых жидкостей, включая жидкие металлы, $|\xi| \sim (0.5 \div 1)\cdot 10^{-8}$ *см*, и для капель реальных жидкостей с любыми физически аргументированными размерами ($R \geq 10^{-5} = 0.1$ мкм) амплитуда тепловых осцилляций много меньше радиуса капли: $\left(|\xi|/R\right) \ll 1$. Тот же порядок малости будут иметь поле скоростей $\vec{u}(\vec{r},t)$ течения жидкости в капле, связанное с осцилляциями ее свободной поверхности, и поле гидродинамического давления внутри капли $p^{in}(\vec{r},t)$.

Всё рассмотрение проведём в сферической системе координат с началом в центре капли в безразмерных переменных, в которых $R=\rho=\gamma=1$, оставляя за всеми физическими величинами прежние обозначения.

Уравнение свободной поверхности капли запишем в виде: $F(\vec{r},t) \equiv r - R - \xi(\vartheta,\varphi,t) = 0$, где $\xi(\vartheta,\varphi,t)$ – возмущение равновесной сферической поверхности капли, вызванное ее тепловыми осцилляциями.

Как показано в [2–3], в линейном приближении по $|\xi|/R$ решаемая задача может быть скаляризована, а векторное поле $\vec{u}(\vec{r},t)$ представлено в виде:

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \hat{\hat{N}}_1\Psi_1(\vec{r},t) + \hat{\hat{N}}_2\Psi_2(\vec{r},t) + \hat{\hat{N}}_3\Psi_3(\vec{r},t); \qquad (1)$$

где $\Psi_j(\vec{r},t)$ – скалярные функции, а векторные операторы-проекторы $\hat{\hat{N}}_j$ имеют вид:

$$\hat{\hat{N}}_1 \equiv \nabla;\ \hat{\hat{N}}_2 \equiv \hat{\hat{N}}_1 \times \vec{r} \equiv \nabla \times \vec{r};\ \hat{\hat{N}}_3 \equiv \hat{\hat{N}}_1 \times \hat{\hat{N}}_2 \equiv \nabla \times (\nabla \times \vec{r}). \qquad (2)$$

В основе указанного подхода лежит утверждение, что соленоидальное векторное поле может быть представлено в виде суммы тороидального и полоидального векторных полей [4]. В (1) первое слагаемое справа описывает потенциальное слагаемое полного поля скоростей $\vec{u}(\vec{r},t)$, второе – тороидальное, а третье – полоидальное.

В итоге, вместо векторной краевой задачи для отыскания $\vec{u}(\vec{r},t)$ мы получаем на-

бор трёх скалярных задач для отыскания функций $\Psi_j(\vec{r},t)$. Как показывает детальное рассмотрение [2–3], в линейном приближении по $|\xi|/R$ задачи для отыскания функций $\Psi_1(\vec{r},t)$ и $\Psi_3(\vec{r},t)$ связаны между собой через гидродинамические граничные условия и полностью определяют осцилляции капли, а тороидальная компонента поля скоростей, описываемая с помощью $\Psi_2(\vec{r},t)$, формирует независимую краевую задачу. Причем, тороидальная компонента поля скоростей не принимает участия в формировании рельефа поверхности капли.

Дисперсионное уравнение для нахождения частот осцилляций капли принимает вид:

$$s^2 + 2(l-1)(2l+1)\cdot\nu\cdot s + l(l-1)(l+2) + \\ +2(l-1)^2(l+1)\frac{\nu\cdot s}{1-\frac{\sqrt{s/\nu}}{2}\cdot\frac{i_l\left(\sqrt{s/\nu}\right)}{i_{l+1}\left(\sqrt{s/\nu}\right)}+(l+1)} = 0;$$

где s – комплексная частота, l – номер моды осцилляций; $i_l\left(\sqrt{s/\nu}\right)$ – модифицированная сферическая функция Бесселя.

Дисперсионное уравнение, получающееся в задаче для нахождения $\Psi_2(\vec{r},t)$, имеет вид:

$$\sqrt{\frac{s}{\nu}}\cdot i_{l+1}\left(r\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)+(l-1)\cdot i_l\left(r\sqrt{\frac{s}{\nu}}\right)=0.$$

Это уравнение имеет только тривиальное решение.

Поскольку функция $\Psi_2(\vec{r},t)$ не влияет на движение поверхности капли, то виртуальная начальная деформация поверхности произвольного вида не приводит к возникновению тороидального движения.

Подводя итог сказанному выше, напомним, что всё рассмотрение проводилось в линейном приближении по $|\xi|/R$, и вывод о нереализуемости тороидального движения справедлив лишь в этом приближении. Расчеты квадратичного приближения по $|\xi|/R$ могут привести к обнаружению сложных поло-тороидальных вихрей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т.6. №4. С.348–350.
2. Григорьев А.И., Лазарянц А.Э. Об одном методе решения уравнения Навье–Стокса в криволинейных системах координат // ЖВММФ. 1992. Т.32. №6. С.929–938.
3. Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики. Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010. 180 с.
4. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.:ИЛ, 1960. 886 с.

—— ♦♦♦ ——

НЕЛИНЕЙНЫЕ АСПЕКТЫ ФОКУСИРОВКИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ТОРА

Н.Д. Шмакова, Е.В. Ерманюк, Я.-Б. Флёр, Б. Вуазен
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
e-mail: shmakova@hydro.nsc.ru
Laboratoire des Ecoulements Geophysiques et Industriels (LEGI), France

Океан и атмосфера, в общем случае, являются жидкостями, стратифицированными по температуре и солености. В мировом океане в результате взаимодействия приливных течений с подводными горными хребтами, генерируются внутренние волны, которые вносят заметный вклад в энергетический баланс океана и глубинное перемешивание вод.

Генерацию приливных внутренних волн можно моделировать колебаниями объекта в стратифицированной жидкости с частотой плавучести N, т.е. перейдя в систему отсчета связанную с приливным течением. В двумерном случае в качестве колеблющегося объекта канонической формы рассматривается цилиндр, а в трехмерном случае – сфера. Трехмерный случай интересен тем, что, в отличие от двумерного, внутренние волны могут фокусироваться, что приводит к появлению локальных зон усиления амплитуды. Для внутренних волн, генерируемых горизонтальными колебаниями тора с небольшой амплитудой, амплитуда волны в зоне фокусировки существенно увеличивается [1], что подтверждает теоретические расчеты [2]. Увеличение амплитуды колебаний тора ведет к локальному обрушению волн в таких зонах. В случае инерционных волн, генерируемых вертикальными колебаниями тора во вращающейся жидкости, в зоне фокусировки возникает турбулентность [3].

В настоящей работе представлены экспериментальные данные, полученные с помощью PIV измерений для средних и больших амплитуд колебания тора и направленные на изучение нелинейных аспектов внутренних волн (рис. 1).

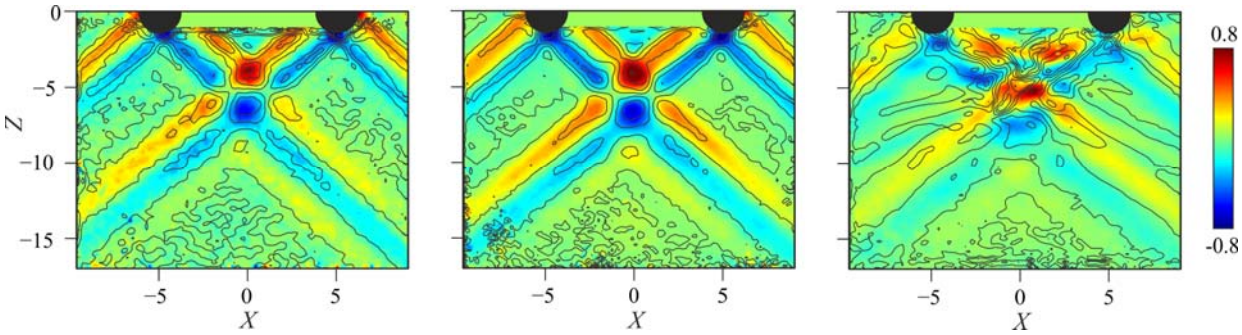


Рис. 1. Поле горизонтальной компоненты скорости (цвет) и перпендикулярной к плоскости рисунка компоненты завихренности (контур) для разных амплитуд колебаний тора, увеличивающихся слева направо в вертикальном центральном сечении тора. Левое изображение соответствует низкой амплитуде колебания и, соответственно, случаю регулярной фокусировки; правое изображение – нелинейная фокусировка при больших амплитудах колебания: турбулентность, возникновение вторичных волн

Для описания поведения волн в зоне фокусировки представлен новый безразмерный параметр, Фокусное число, который основан на теоретических расчетах волновой энергии в зоне фокусировки. Получена линейная зависимость угла наклона волны от фокусного числа для торов с разными радиусами, что в дальнейшем позволяет предсказать обрушение волн при небольших числах Стокса O(100). При умеренных фокусных

числах наблюдается вертикальное среднее течение и возникновение исчезающих высших гармоник в зоне фокусировки. В случае обрушения, наблюдаемого при больших фокусных числах, в зоне фокусировки возникают субгармоники, которые вместе с фундаментальной волной порождают триадный резонанс. В данном исследовании впервые продемонстрирован механизм возникновения триадного резонанса в трехмерном случае [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ermanyuk E.V., Shmakova N.D. & Flór J.-B.* Internal wave focusing by a horizontally oscillating torus // J. Fluid. Mech. 2017. V. 813. PP. 695 – 715
2. *Voisin B.* Internal wave focusing by annular forcing // In Proc. 8th Int. Symp.
3. Strat. Flows (San Diego, 29 August – 1 September 2016)
4. *Duran-Matute, M., Flór J.-B., Godeferd F. S. & Jause-Labert C.* Turbulence and columnar vortex formation through inertial-wave focusing // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. PP. 041001
5. Shmakova N. & Flor J.-B. 2019. Nonlinear aspects of focusing internal waves // J. Fluid. Mech. 2019. V. 862. PP. R4

—— ♦♦♦ ——

ТЕЧЕНИЕ ПЕНЫ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ С ЛОКАЛЬНЫМ ПРОНИЦАЕМЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

Н.Д. Шмакова, Н.А. Пеньковская, Е.В. Ерманюк, С.Ф.А. Сантуччи, К. Рофаст, А. Пуисто, М. Аллава
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
e-mail: shmakova@hydro.nsc.ru
École normale supérieure de Lyon, France
Institut de Physique de Nice – Universite Cote d'Azur, France
Aalto university, Finland

Неньютоновское поведение пены, ведущей себя как упругая либо текучая среда в зависимости от приложенного напряжения, обусловлено ее многомасштабной двухфазной структурой. Это поведение лежит в основе использования пен в различных областях применения, от продуктов повседневной жизни (пищевая, фармацевтическая промышленность) до крупномасштабных промышленных процессов (гидроразрыв пласта) [1, 2]

В данной работе представлены результаты экспериментального исследования течения монослоя пены в ячейке Хеле-Шоу при наличии изолированного препятствия в терминах усредненного по времени поля скорости. Препятствие представляло собой локальное сужение зазора ячейки, имевшее круглую либо квадратную в плане форму. При исследовании проводилась систематическая вариация одного из параметров (высоты препятствия, доли жидкой фракции в пене и т.д.) при фиксированных значениях всех прочих параметров.

Присутствие препятствия в потоке пены приводит к деформации пузырьков. При этом поверхностная энергия накапливается вследствие увеличения поверхности пузырьков в области локального сужения зазора и ее окрестности, затем высвобождается, вследствие чего за препятствием наблюдается т.н. отрицательный след [3], в котором происходит ускорение пузырьков до скоростей, превышающих скорость набегающего потока. Показано, что при некотором значении высоты препятствия в ячейке Хеле-Шоу

эффект отрицательного следа максимизируется. Существование максимума эффекта при некоторой высоте препятствия можно объяснить балансом между ростом поверхностной энергии при деформации пузырьков и ростом вязких потерь при движении пузырьков в узком зазоре.

Изучен характер изменения поля скорости пены в окрестности препятствия в зависимости от доли жидкой фракции, продемонстрирован плавный переход от течения т.н. сухой пены, имеющей сильно выраженные неньютоновские свойства, к течению пузырьковой жидкости, поведение которой близко к ньютоновскому. Полученные экспериментальные данные сопоставлены с численными расчетами на основе классической пузырьковой модели [4].

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РФ № 14.W03.31.0002.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kraynik A. M.* Foam flows. // Annu. Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. PP. 325–357
2. *Cohen-Addad S., H¨ohler R., Pitois O.* Flow in foams and flowing foams. // Annu. Rev. Fluid Mech. 2013. V. 45. PP. 241–267
3. *Hassager O.* Negative wake behind bubbles in non-newtonian fluids // Nature. 1979. V. 279. PP. 402–403
4. *Durian D. J.* Foam mechanics at the bubble scale // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. PP. 4780–4783

——— ♦ ♦ ♦ ———

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВИДА ЭНЕРГОНОСИТЕЛЯ НА АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА ДИЗЕЛЯ

А.Л. Яковенко, М.Г. Шатров, А.О. Глазков, С.М. Кузнецов, А.А. Предеин
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
e-mail: iakovenko_home@mail.ru

В настоящее время задача использования альтернативных топлив в двигателе внутреннего сгорания для снижения вредных выбросов и замещения традиционного нефтяного топлива является актуальной. Один из важных вопросов состоит в оценке уровня шума двигателя при его переводе на альтернативное топливо. Для дизеля рабочий процесс – это главный источник шума. Поэтому было выполнено экспериментальное исследование шума дизеля при его работе на различных видах альтернативных топлив.

ДВИГАТЕЛЬ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ КАК ИСТОЧНИК ШУМА

На кафедре «Теплотехника и автотракторные двигатели» МАДИ активно ведутся работы по использованию альтернативных топлив в поршневых двигателях внутреннего сгорания, а также по поиску путей снижения их акустического излучения.

Двигатель внутреннего сгорания является сложным источником шума, так как происходящие при его функционировании процессы вызывают образование акустического излучения различного по своей природе происхождения [1].

Наиболее сложной технической задачей является снижение источников структурного шума, который возникает при колебании наружных поверхностей двигателя. При

этом возбудителями колебаний являются импульсы давления газов в цилиндре и соударения отдельных элементов двигателя, например, перекладка поршня в цилиндре.

Для дизеля характерно преобладание шума от рабочего процесса, который увеличивается с ростом скорости нарастания давления в цилиндре при реализации процессов воспламенения и сгорания топлива. Таким образом, вид применяемого топлива, способ его подачи и воспламенения оказывает значительное влияние на акустические характеристики дизеля.

При использовании альтернативных топлив становится возможным воздействовать на скорость нарастания давления и, таким образом, получить снижение шума дизеля.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ШУМА ДИЗЕЛЯ

Определение акустических характеристик двигателя выполнялось экспериментальным путем (рис. 1).

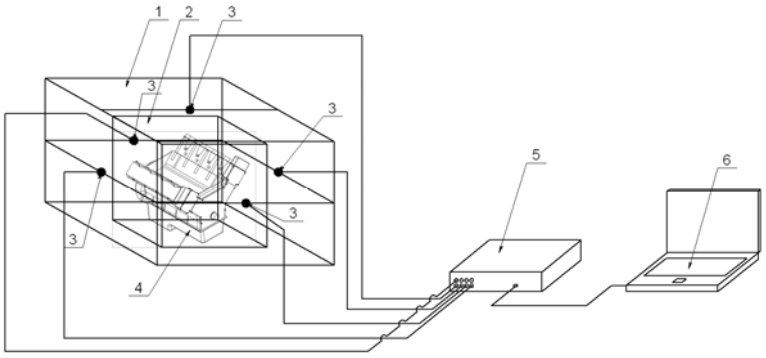


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
1 – измерительная поверхность, 2 – огибающая поверхность, 3 – микрофон, 4 – дизель, 5 – аппаратно-программный комплекс LMS Pimento, 6 – ПК

Измерение звукового давления осуществлялось с использованием аппаратно-программного комплекса LMS Pimento согласно типовым методикам (ГОСТ 53838-2010). Полученные результаты обрабатывались и сравнивались между собой.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ШУМА ДИЗЕЛЯ ПРИ ЕГО РАБОТЕ НА АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ТОПЛИВАХ

Одним из наиболее распространенных альтернативных топлив является газомоторное топливо.

При этом конвертация дизеля возможна по двум вариантам: переход на искровое зажигание или использование газодизельного рабочего процесса без изменения степени сжатия [2, 3]. При использовании газомоторного топлива для получения мощности дизеля приходится повышать степень его наддува.

На рис. 2 показаны результаты измерения шума для искрового зажигания, а на рис. 3 – для газодизельного процесса.

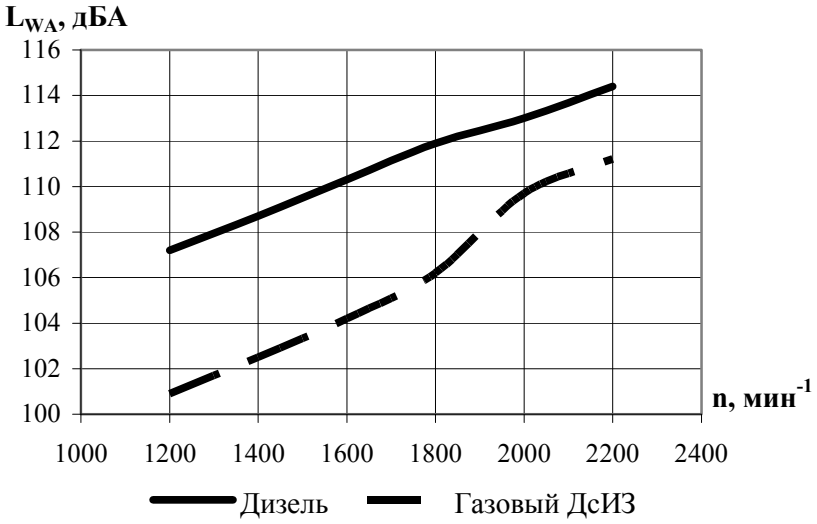


Рис. 2. Общие уровни шума двигателя 8Ч12/12 по внешней скоростной характеристике при работе по циклам дизеля и газового ДсИЗ

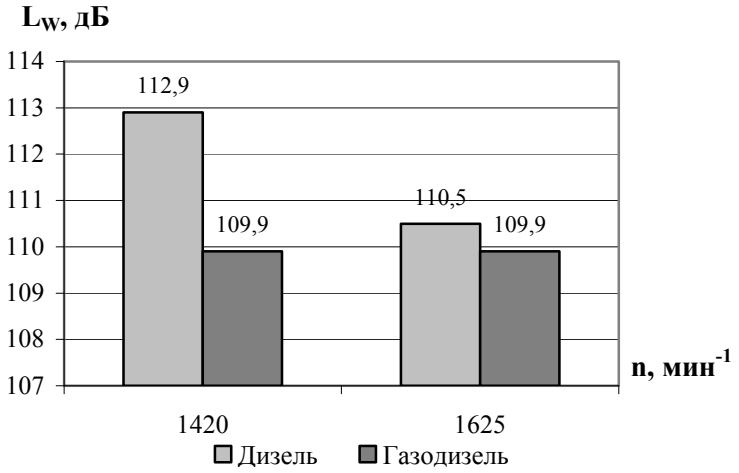


Рис. 3. Общие уровни шума двигателя 6ЧН10,7/12,4 по внешней скоростной характеристике для частот вращения 1420 и 1625мин$^{-1}$ при реализации дизельного и газодизельного вариантов

Также на кафедре проводятся работы по применению в дизеле смесевых топлив, одним из видов которх является водо-топливная эмульсия [4, 5]. На рис. 4 показаны результаты исследования шума дизеля 4ЧН11/12,5 при разных составах эмульсии в сравнении с чистым дизельным топливом.

ВЫВОДЫ

1. При конвертации дизеля для использования газомоторного топлива было получено существенное снижение уровня шума.

Шум двигателя 8Ч12/12 при искровом зажигании уменьшился на 3…6 дБА по внешней скоростной характеристике вследствие снижения жесткости рабочего процесса.

Перевод дизеля 6ЧН10,7/12,4 на газодизельный процесс привел к снижению шума на 0,6…2 дБ. Меньший эффект по сравнению с двигателем 8Ч12/12 объясняется применением на дизеле 6ЧН10,7/12,4 современной аккумуляторной топливной системы, а также сохранением исходной степени сжатия.

2. Применение водо-топливной эмульсии в дизеле 4ЧН11/12,5 вызвало увеличе-

ние уровня шума вследствие роста периода задержки воспламенения при постоянном угле опережения впрыскивания топлива. Данный результат обусловил необходимость коррекции угла опережения впрыскивания.

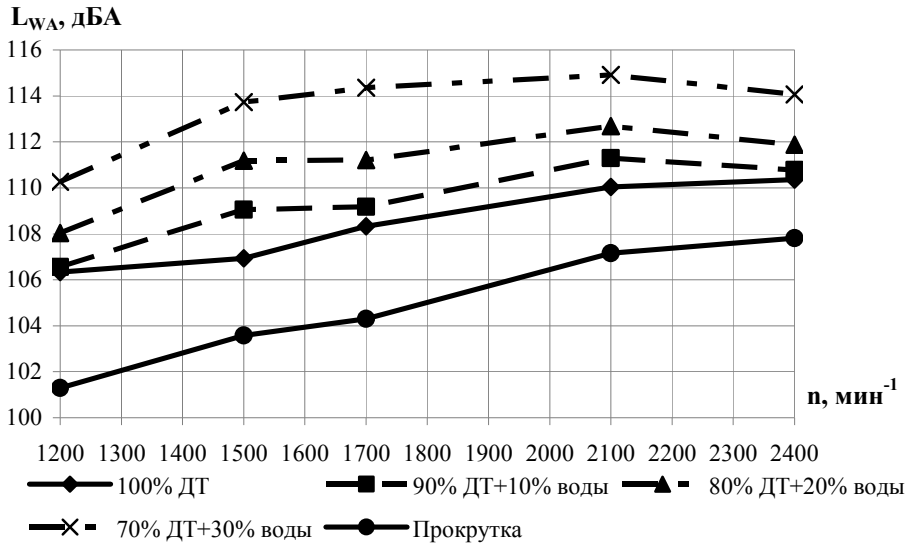


Рис. 4. Общие уровни шума дизеля 4ЧН11/12,5 по внешней скоростной характеристике при работе на смесевом топливе различного состава

ЛИТЕРАТУРА

1. Шум автомобильных двигателей внутреннего сгорания: учеб. пособие / *Шатров М.Г., Яковенко А.Л., Кричевская Т.Ю.* М.: МАДИ, 2014. 68 с.
2. Using simulation for development of the systems of automobile gas diesel engine and its operation control / *M.G. Shatrov, V.V. Sinyavski, A.Y. Dunin, I.G. Shishlov, A.V. Vakulenko, A.L. Yakovenko* // International J. of Engineering and Technology(UAE), 2018, V. 7, No. 2, P. 288–295.
3. Method of conversion of high- and middle-speed diesel engines into gas diesel engines / *M.G. Shatrov, V.V. Sinyavski, A.Y. Dunin, I.G. Shishlov, A.V. Vakulenko* // Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering, 2017, V. 15, No. 3, P. 383–395.
4. *Шатров М.Г.* Влияние массового состава водотопливной эмульсии на экологические показатели дизеля / *М.Г. Шатров, А.Ю. Дунин, А.Л. Яковенко, А.А. Езжев* // Автомобиль и Электроника. Современные Технологии. 2013. № 2 (5). С. 123.
5. *Шатров, М.Г.* Улучшение показателей дизеля, работающего на водотопливной эмульсии / *М.Г. Шатров, Б.А. Кудряшов, А.Ю. Дунин, А.А. Езжев, А.Н. Ливанский* // Известия Волгоградского государственного технического университета. Серия: Наземные транспортные системы. 2013. Т. 7. № 21 (124). С. 62–66.

——— ♦ ♦ ♦ ———

ФИЗИЧЕСКИЙ ВЗРЫВ ПРИ БЫСТРОМ ИСПАРЕНИИ ВСКИПАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

С.Е. Якуш
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: yakush@ipmnet.ru

Быстрые фазовые переходы, связанные со значительным увеличением удельного объема вещества, могут приводить к возникновению явлений взрывного типа с образованием волн давления. Взрывы такого типа относятся к «физическим» [1], то есть обусловленным выделением энергии не в результате химических реакций, а при изменении агрегатного состояния вещества. В литературе по промышленной безопасности, равно как и в отечественной нормативной литературе, данное явление известно как взрыв расширяющихся паров вскипающей жидкости, или BLEVE (Boiling Liquid Expanding Vapor Explosion) [2].

В работе рассматривается взрыв при разгерметизации резервуара высокого давления со сжиженным углеводородным газом (пропаном). Сформулирована математическая модель, основанная на гомогенном равновесном приближении, предполагающая равенство скоростей паровой и жидкой фаз, а также термодинамическое равновесие между ними. Рассмотрены аспекты реализации модели, численный метод решения сопряженной задачи для двухфазной и однофазной областей. Приведен пример расчета взрыва цилиндрического резервуара, частично заполненного сжиженным пропаном.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В предыдущих работах [3] для описания расширения двухфазной вскипающей среды в атмосферу и генерации воздушных ударных волн была использована равновесная гомогенная модель (см. [4]), предполагающая быструю релаксацию межфазных процессов по сравнению с газодинамическим временем, обусловленным расширением среды в атмосферу при разрушении оболочки резервуара. Дополнительным предположением данной модели было условие изэнтропичности, которое накладывает, помимо прочего, ограничение на начальное состояние вещества, которое должно быть однородно по объему резервуара в момент взрыва.

Более реалистичные начальные распределения с произвольным распределением объемной доли насыщенного пара и жидкости в начальный момент времени можно учесть, если использовать неизэнтропическую модель, представленную в последующей работе [5]. В этой модели в двухфазной области решаются уравнения неразрывности, импульса и энергии для двухфазной смеси, состоящей из смеси насыщенного пара и жидкости. Фактически, определяющие уравнения являются системой уравнений Эйлера, однако свойства среды в двухфазной области сильно отличаются от свойств газа. Именно, плотность ρ_m и удельная внутренняя энергия смеси e_m определяются соотношениями

$$\rho_m = \left(x_v v_v^0 + (1 - x_v) v_l^0 \right)^{-1} \tag{1}$$

$$e_m = x_v e_v^0 + (1 - x_v) e_l^0 \tag{2}$$

Здесь x_v – массовая доля пара в смеси, $v_i^0(P)$ и $e_i^0(P)$ – удельный объем и удельная внутренняя энергия i-й фазы ($i = l$ для жидкости, $i = v$ для насыщенного пара), верхний индекс 0 означает, что соответствующие значения величин берутся на линии насыщения, где они являются однозначной функцией текущего давления. Соответ-

ственно, давление P и массовая доля пара x_v находятся по ρ_m и e_m из уравнений (1) и (2) решением обратной задачи: $P = P(\rho_m, e_m)$, $x_v = x_v(\rho_m, e_m)$.

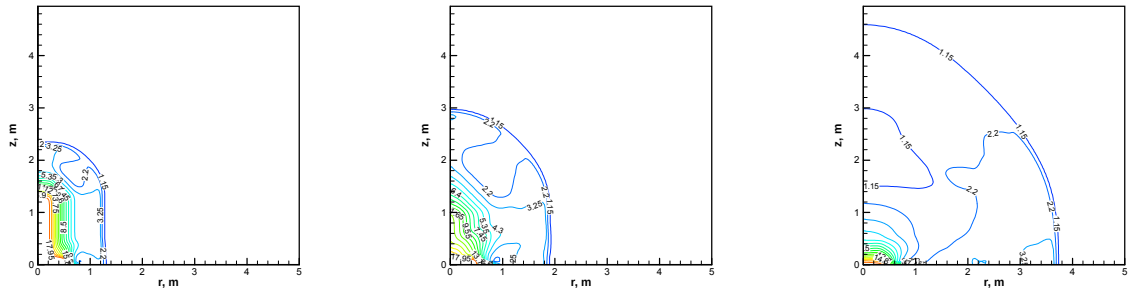
Таким образом, в рамках сделанных предположений задача сводится к решению уравнений Эйлера в двух подобластях (двухфазной области и внешней атмосфере), разделенных контактной поверхностью, на которой выполняются условия равенства давлений и скоростей. При этом в каждой подобласти используется соответствующее уравнение состояния (атмосферный воздух считался идеальным газом с постоянным показателем адиабаты 1.4). Форма контактной поверхности и скорость ее движения не задаются, а определяются в ходе решения сопряженной задачи.

Численное решение уравнений в каждой подобласти осуществлялось на основе схемы [6]. Расчет движения интерфейса (контактной поверхности) и аппроксимация уравнений движения в непосредственной близости к нему производились методом [7]. Отметим, что представленная равновесная модель не содержит каких-либо настраиваемых параметров, однако требует конкретизации свойств вскипающего вещества на линии насыщения (см. уравнения (1) и (2)). Эти свойства задавались в табличном виде для $v_i^0(P)$ и $e_i^0(P)$ в соответствии с данными [8] с шагом по давлению 0.01 бар, в промежутках между соседними табличными значениями использовалась линейная интерполяция.

РАСЧЕТЫ ВЗРЫВОВ ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОГО РЕЗЕРВУАРОВ

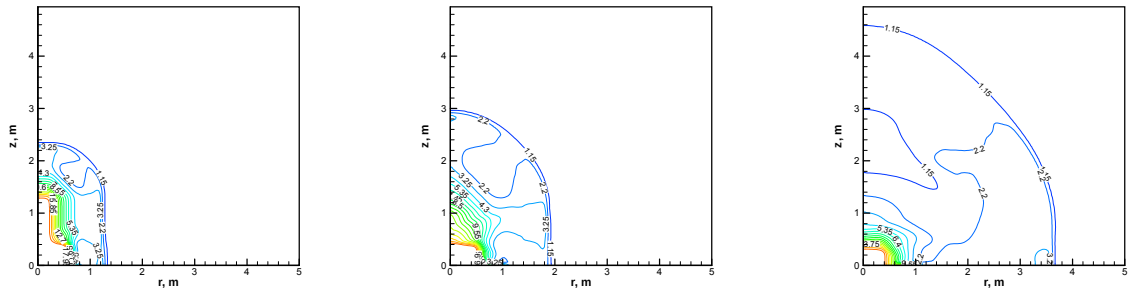
В работе [5] рассчитывался взрыв резервуара цилиндрической формы (высота 1.64 м, диаметр 1.2 м, объем 1.9 м^3), заполненного на 50% насыщенной жидкостью и паром, в качестве рабочего вещества использовался пропан при начальном давлении 19 бар. В настоящей работе проведены расчеты взрывов для той же геометрии и начального давления, но для различной степени заполнения резервуара жидкостью (от 10% до 100%).

На рис. 1 представлены поля давления в различные моменты времени при взрыве резервуара, заполненном на 10% по объему жидким пропаном. Поля давления при начальном заполнении 25% и 75% в те же моменты времени показаны на рис. 2 и 3. Видно, что ударная волна распространяется в атмосфере с практически одинаковой скоростью, близкой к скорости звука в воздухе (слабая ударная волна). Наибольший интерес представляет характер падения давления в паровой и жидкостной частях двухфазной области, обусловленная существенным различием скоростей звука в газе и двухфазной кипящей жидкости (низкие значения обусловлены наличием фазовых переходов, см. [3, 4]. Поэтому на начальном этапе происходит быстрое падение давления в паровой подушке, и более медленное падение давления во вскипающей жидкости. Однако оба этих фактора дают вклад в формирование взрывной ударной волны.



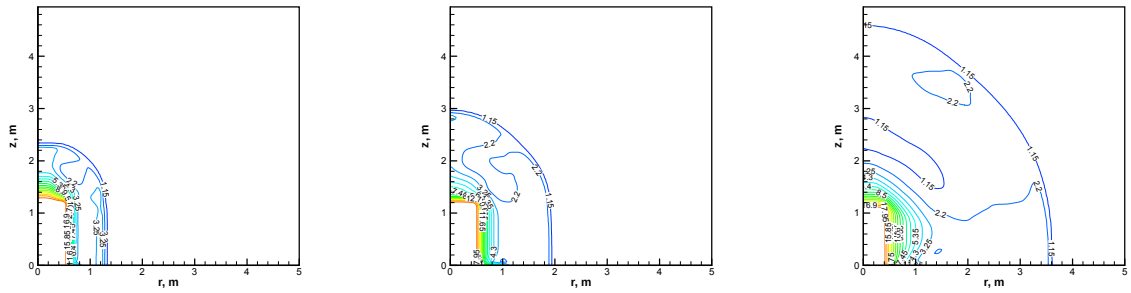
1 мс 2 мс 5 мс

Рис. 1. Поля давления при взрыве резервуара с пропаном при начальном заполнении жидкостью 10%.



1 мс 2 мс 5 мс

Рис. 2. Поля давления при взрыве резервуара с пропаном при начальном заполнении жидкостью 25%.



1 мс *2 мс* *5 мс*

Рис. 3. Поля давления при взрыве резервуара с пропаном при начальном заполнении жидкостью 75%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Физические взрывы при разрушении резервуаров высокого давления со сжиженными газами сопровождаются возникновением ударных волн в атмосфере, их изучение требует развития и валидации на экспериментальных данных моделей многофазных волновых течений в сочетании с газодинамическими моделями. Представленная в работе вычислительная модель физического взрыва позволяет проводить оценки ударно-волнового воздействия при авариях со сжиженными углеводородными топливами.

БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания АААА-А17-117021310385-6 «Механика и термогазодинамика реагирующих и многофазных систем».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд Б.Е., Сильников М.В.* Химические и физические взрывы. М.: Полигон, 2003. 416 с.
2. *Abbasi T., Abbasi S.A.* The boiling liquid expanding vapour explosion (BLEVE) is fifty... and lives on! // J. Loss Prev. Process Ind. 2008. V. 21. P. 485–487.
3. *Yakush S.E.* Model for blast waves of Boiling Liquid Expanding Vapor Explosions // Int. J. Heat Mass Transf. 2016. V. 103. P. 173–185.
4. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
5. *Yakush S.E.* Shock waves from explosions due to boil-up of superheated liquids // Proc. 9th International Seminar on Fire and Explosion Hazards. Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University Press Saint Petersburg, Russia, 2019. P. 430–439.
6. *Kurganov A., Tadmor E.* New high-resolution central schemes for nonlinear conservation

laws and convection-diffusion equations // J. Comput. Phys. 2000. V. 160. P. 241–282.
7. *Fedkiw R.P., Aslam T., Merriman B., Osher S.* A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the Ghost Fluid Method). // J. Comput. Phys. 1999. V. 152. P. 457–492.
8. NIST Chemistry Webbook. https://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/

—— ♦ ♦ ♦ ——

Содержание

Preface ... 5

Предисловие ... 6

Bodnár T., Fraunié Ph. Numerical Filters in Simulations of Variable Density Flows ... 7

Chashechkin Yu.D. Actual Problems of a Drop Impact Hydrodynamics ... 9

Chashechkin Yu.D. Differential Fluid Mechanics –"Old – New" Generation of Solvable Models of Flows ... 13

Chashechkin Yu.D., Zagumennyi Ya.V. Visualization of Stratified Flow around a Vertical Plate: Laboratory and Numerical Modeling ... 18

Chung L.T., Мелихов О.И. Оценка параметров волны термической детонации в стратифицированной среде ... 21

Dmitrenko A.V. The Formation of the Spectrum of Atmospheric Turbulence ... 24

Fraunié P., Aldebert C., Koenig G., Devenon J.L., Baklouti M., Bourras D., Sentchev A., Shrira V. Turbulent Parameters Identification in the Marine Surface Layer ... 27

Fukumoto Y., Le T.T. Stability of Finite Shear Layer of a Shallow-Water Flow ... 29

Kanygin R.I., Kanygin I.I., Meshkov E.E., Novikova I.A. Application of the Marker Method for Registration of Complex Three-Dimensional Flows ... 34

Mitkin V.V. Deformation of Drop Surface by High Speed Flow ... 35

Terentiev E.N., Farshakova I.I., Prikhodko I.N., Kuznetsov I.D., Dyakonova A.D. Methods of Gradient Morphology in Estimation of Vortex Parameters in Remote Studies ... 37

Terentiev E.N., Farshakova I.I., Shilin-Terentyev N.E. Super-Resolution of Whirlwinds in Black Hole Powehi Shadow ... 40

Vasiliev A.Yu. Interaction of Internal Wave Beams in a Viscous Stratified Fluid ... 43

Zagumennyi Ya.V. Computation of the Stratified Flow Pattern in the Modes of Internal Wave and Vortex Wake Generation ... 44

Zatsepin A.G., Kubryakov A.A., Elkin D.N. Physical Mechanisms of Submesoscale Eddies Generation: In Situ Satellite and Ship-Born Observations for the Black Sea and Laboratory Modelling ... 47

Абдухакимов Ф.А. Численное исследование флаттера конструкций в газовых потоках с использованием энергетического метода ... 50

Аганин А.А., Мустафин И.Н. Расчет импульса давления в жидкости при коллапсе кавитационного пузырька ... 52

Агеев А.И., Осипцов А.Н. О моделировании течений вязкой жидкости вдоль текстурированных поверхностей методом граничных интегральных уравнений ... 56

Аллилуева А.И. Коротковолновые асимптотики в линеаризованных уравнениях газовой динамики ... 59

Асмолов Е.С., Низкая Е.С., Виноградова О.И. Подъемная сила на малые частицы в течении в канале 59

Баранов С.А., Киселев А.Ф., Сбоев Д.С., Толкачев С.Н. Управление ламинарно-турбулентным переходом в трехмерном пограничном слое при помощи отсоса 62

Баранов С.А., Курячий А.П., Сбоев Д.С., Толкачев С.Н., Чернышев С.Л. Управление ламинарно-турбулентным переходом в трехмерном пограничном слое при помощи диэлектрического барьерного разряда 65

Бардаков Р.Н. Визуализация и анализ картины течений около равномерно вращающегося диска в однородной жидкости 68

Батура Н.И., Гаджимагомедов Г.Г., Масленников Г.Я. Экспериментальное исследование влияния сопловых вихрегенераторов на пульсации струи аэродинамической трубы с открытой рабочей частью 69

Белоножко Д.Ф., Очиров А.А., Апарнева А.В. О влиянии поверхностно-активного вещества на закономерности реализации неустойчивости Фарадея 71

Бирюков Е.Д., Копылов М.С., Кувшинников А.Е. Верификация численных решений задач газовой динамики с применением программного пакета OpenFoam 75

Брызгалов А.И., Васильевский С.А., Колесников А.Ф., Якуш С.Е. Численное исследование вихревых течений в мегаваттном индукционном ВЧ-плазмотроне ВГУ–3 ИПМех РАН 78

Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны в стратифицированной среде со сдвиговыми течениями 81

Вазаева Н.В., Чхетиани О.Г., Люлюкин В.С., Барсков К.В., Козлов Ф.А. Статистические характеристики термоконвективных структур в атмосферном пограничном слое на основе данных акустического зондирования 84

Вановский В.В. Сравнение механизмов диссипации малых колебаний сферического пузырька в жидкости 87

Вахитова Р.Д., Могилевский Е.И. Длинные волны в пленке неньютоновской жидкости на осциллирующей наклонной плоскости 90

Верезуб Н.А., Простомолотов А.И. Вихревые течения солевого KDP раствора в проточно-смесительном кристаллизаторе 93

Вигдорович И.И. Спектр затухающей двумерной автомодельной турбулентности 96

Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Об устойчивости нелинейных колебаний двухслойной жидкости в подвижном баке 97

Власова С.С. Стационарное конвективное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием квадратичного нагрева верхней границы с учетом теплообмена по закону Ньютона–Рихмана на ней 100

Волков Г.Ю., Мелихов О.И., Мелихов В.И., Никонов С.М., Неровнов А.А., Трубкин О.Н. Анализ влияния расхода питательной воды на процесс возникновения конденсационных гидроударов 103

Волкова А.О., Иванов А.И., Стрельцов Е.В. Использование комбинированных струйно-перфорированных границ для решения проблемы влияния стенок рабочей части в трансзвуковой аэродинамической трубе 107

Гафиятов Р.Н. Падение акустической волны на среду, содержащую слой многофракционной пузырьковой жидкости 109

Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Параметрическое исследование сверхзвукового пограничного слоя на адиабатической стенке при наличии конденсированной фазы 111

Гордин В.А. Компактные разностные схемы для аппроксимации дифференциальных соотношений 114

Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Волны Лява в средах с отрицательным коэффициентом Пуассона 114

Григорьев А.И., Ширяева С.О. О плоской молнии или о веерном свечении у вершин, висящих в грозовом облаке заряженных капель 115

Губайдуллин Д.А. Особенности динамики и акустики многофазных газокапельных и пузырьковых сред 119

Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Р. Наклонное падение акустических волн на границу многофракционной газовзвеси с полидисперсными частицами 121

Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Абдюшев А.А. Метод лимитирующей скорости в задачах фокусировки частиц в микрофлюидных устройствах 123

Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Насыров Р.Р. Дрейф частиц при вращательных колебаниях нижней стенки прямоугольного резонатора 126

Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Влияние теплообмена на акустику жидкости с покрытыми оболочкой пузырьками 129

Гущин В.А., Кондаков В.Г. Математическое моделирование течений со свободной поверхностью 130

Гущин В.А., Смирнова И.А. О динамике пятен в стратифицированной жидкости 137

Димитриева Н.Ф. Расчет многомасштабных структур течений неоднородной жидкости в гравитационном поле 139

Доброхотов С.Ю. Дисперсионные эффекты, связанные с распространением линейных гравитационных волн над быстроменяющимися участками дна бассейна 143

Дунин А.Ю., Душкин П.В., Калинина С.М., Беляев П.И., Шацких В.О. Влияние геометрических параметров сопловой части распылителя и режима его работы на развитие струй впрыскиваемого топлива 144

Душкин П.В., Дунин А.Ю., Кремнев В.В., Ховренок С.С., Шаган А. Методическое и техническое обеспечение экспериментального исследования динамики впрыскивания топлива под давлением до 300 МПа 147

Дымова О.А., Демышев С.Г. Анализ энергетики вихрей и течений в Черном море на основе результатов моделирования циркуляции 150

Елкин Д.Н., Зацепин А.Г., Саловатова Л.И. Сравнение закономерностей опускания вод по гладкому и шероховатому наклонному дну в придонном экмановском слое 153

Епифанов В.П. Волновые процессы при контактном разрушении пресноводного льда 156

Епифанов В.П., Нестеров С.В. Акустические и электромагнитные эффекты при контролируемом ударном возбуждением упругих волн в металлических стержнях 162

Журавлёв В.Ф. Некорректные задачи механики 166

Загуменный Я.В. Расчет картины стратифицированного течения в режимах генерации внутренних волн и спутных вихревых структур 172

Ильиных А.Ю. Картина всплеска несмешивающихся жидкостей 176

Исхаков А.Ш., Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е. Моделирование паровых взрывов при попадании диспергированного охладителя в высокотемпературный расплав 178

Калиниченко В.А. Подавление интенсивных колебаний жидкости слоем плавающих частиц 182

Каныгин Р.И., Каныгин И.И., Мешков Е.Е., Новикова И.А. Применение метода маркеров для регистрации сложных трёхмерных течений 185

Колбнева Н.Ю. Нелинейные осцилляции незаряженной капли во внешнем электростатическом поле и генерация электромагнитных волн дипольного типа 186

Колчанова Е.А. Осредненная конвекция в двухслойной системе жидкость – пористая зона при горизонтальных вибрациях в условиях микрогравитации 189

Кошелев К.Б., Стрижак С.В. Исследование динамики твердых частиц в атмосферном пограничном слое с модельными ветроустановками 192

Кравцова А.Ю., Янко П.Е., Кашкарова М.В., Шарифуллин Б.Р., Бильский А.В. Исследование периодической волновой структуры потока на границе жидкость–жидкость, возникающей в выходном канале Т-микромиксера, при наложении внешних пульсаций 195

Куликовский А.Г., Чугайнова А.П. Простые одномерные волны в несжимаемой анизотропной упругопластической среде с упрочнением 198

Кумакшев С.А. Установившиеся течения вязкой жидкости в плоском диффузоре 199

Лаврентьев С.Ю., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Якимов М.Ю. Пульсации конвективного потока от сосредоточенного источника тепла – непрерывного оптического разряда 202

Левицкий В.В., Чуприков А.М. Визуализация нестационарного течения индуцированного диффузией на наклонной поверхности 206

Малиновская Е.А. Влияние неоднородностей структуры поверхности на ветровой вынос частиц 210

Малышев К.Ю., Михайлов Е.А., Тепляков И.О. Представление решения задачи об электровихревом течении в полусферическом контейнере в виде быстросходящегося ряда 213

Марчевский И.К., В.С. Морева, Кузьмина К.С., Солдатова И.А. Поправка численного решения для интенсивности вихревого слоя, позволяющая корректно учитывать влияние вихрей вблизи обтекаемой поверхности 217

Матюшин П.В. Li-визуализация пространственной вихревой структуры внутренних волн при помощи функции LIUTEX (RORTEX) 220

Матюшин П.В. Формирование внутренних волн в стратифицированной вязкой жидкости за длинным цилиндром при его продольном обтекании 224

Моисеев К.В., Кулешов В.С. Свободная конвекция жидкости в плоской ячейке с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры 227

Назайкинский В.Е. Нестандартные каустики в асимптотическом моделировании распространения и набега на берег длинных волн в океане 231

Неверов В.В., Шелухин В.В. Седиментация с диффузией в двумерных ячейках с наклонными стенками 232

Нестеров С.В., Байдулов В.Г. Предельные циклы в объединенной модели Ван леер Поля – Рэлея 235

Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г. Метод ускоренной сходимости в задаче Штурма – Лиувилля 238

Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф. О влиянии теплового потока на гидравлическое сопротивление и расход термовязкой жидкости 239

Низкая Т.В., Асмолов Е.С., Виноградова О.И. Влияние кривизны мениска на течение жидкости вблизи поверхности, заполненной смазкой 242

Никифоров А.А. Поглощение акустических волн тонким слоем вязкоэластичной пузырьковой среды 245

Очиров А.А., Белоножко Д.Ф. О перераспределении поверхностно-активного вещества, вызванного распространением нелинейной волны вдоль поверхности вязкой жидкости 248

Ощепков В.О., Мошева Е.А., Мизев А.И. Неустойчивость двойной диффузии: новая постановка задачи и экспериментальные результаты 251

Перегудин С.И., Перегудина Э.С., Холодова С.Е. Волновые движения в электропроводящей жидкой среде 254

Петров А.Г., Байков Н.Д. Об обрушении капиллярно-гравитационных волн 255

Пискотин А.А. Регистрация капельных течений и сопутствующих звуковых пакетов 258

Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Об одном способе определения логарифмического декремента колебаний жидкости в цилиндрическом баке с упругим плоским днищем 260

Прессман Д.Я. Координатное расщепление, уравнения Римана, сеточно-характеристический метод схема переменных направлений и коррекция ре-

шения с помощью законов сохранения при разностной аппроксимации уравнений идеальной бароклинной атмосферы ... 262

Приймак В.Г. Описание наблюдаемых стадий перехода к турбулентности в круглой трубе решениями уравнений Навье–Стокса ... 262

Простомолотов А.И., Верезуб Н.А. Особенности гидродинамических процессов при выращивании кристаллов в пакете ячеек Хеле-Шоу ... 265

Прохоров В.Е. Влияние формы капли на излучение звука при ее ударе о водную поверхность ... 268

Рожков А.Н., Федюшкин А.И. Моделирование столкновения капли воды с небольшим препятствием ... 272

Розенталь О.М. Волновая динамика качества речной воды ... 275

Рулева Л.Б. Оптимизация работы манипулятора в водной среде ... 275

Сандуляну Ш.В. Силы вязкого взаимодействия двух пульсирующих пузырьков в жидкости вблизи их контакта ... 275

Сафронов П.В., Савастенко Э.А., Кудинова А.В., Терехов Н.А., Прохоров Г.О. Колебания угловой скорости коленчатого вала как параметр, характеризующий режим работы двигателя внутреннего сгорания ... 281

Сергеев Д.А., Кандауров А.А., Троицкая Ю.И., Ермакова О.С. Моделирование процессов фрагментации взволнованной водной поверхности и образования капель брызг под действием ветра в лабораторных условиях ... 284

Синявский В.В., Вакуленко А.В., Гонтюрев А.В., Кригульский А.В., Диваков А.Н. Особенности сгорания природного газа в газовых двигателях и газодизелях ... 287

Сисоев Г.М., Шихмурзаев Ю.Д. О распаде жидкости на капли в искривленных капиллярных струях ... 290

Суржиков С.Т. Анализ экспериментальных данных по конвективному нагреву модели марсианского спускаемого аппарата с использованием алгебраических моделей турбулентности ... 293

Теодорович Э.В. Функциональная формулировка статистической теории турбулентности ... 293

Ткаченко Л.А. Динамика табачного дыма при нелинейных колебаниях в открытой трубе вблизи резонанса ... 297

Тукмаков Д.А. Численное исследование процесса отражения ударной волны от твёрдой поверхности в газовой взвеси твёрдых частиц ... 300

Тунг Тхань Ле, Мелихов В.И., Неровнов А.А., Никонов С.М. Анализ экспериментов на установке ПГВ по гидродинамике двухфазного потока с помощью кода STEG ... 303

Урманчеев С.Ф., Низамова А.Д., Киреев В.Н. О возможном механизме миграции раковых клеток ... 306

Федюшкин А.И. Влияние числа Прандтля и граничных условий на конвекцию в горизонтальном слое ... 308

Хохрякова К.А., Колесниченко Е.В. Устойчивость двухслойной системы жидкостей в вертикальном переменном магнитном поле ... 311

Цветкова А.В. Волны, захваченные берегами и островами, и бильярды с полужесткими стенками ... 314

Циберкин К.Б. Численное моделирование и анализ устойчивости конвективного факела на границе раздела «жидкость–пористая среда» ... 315

Цыпкин Г.Г. Неустойчивость легкой жидкости над тяжелой в пористой среде ... 318

Чашечкин Ю.Д. Актуальные проблемы гидродинамики импакта капли ... 321

Чашечкин Ю.Д. Дифференциальная механика жидкостей – "старое – новое" поколение разрешимых моделей течений ... 325

Чашечкин Ю.Д., Загуменный Я.В. Визуализация стратифицированного течения около вертикальной пластины: лабораторное и численное моделирование ... 330

Чуприков А.М. Визуализация следа за свободно падающим растворяющимся кристаллом ... 333

Шайдуллин Л.Р. Исследование скорости истечения газа на оси открытого торца трубы вблизи резонанса ... 338

Шаргатов В.А., Богданова Ю.А., Горкунов С.В. Исследование в слабонелинейном приближении критической эволюции конечных возмущений поверхности фазового перехода при испарении воды в пористых средах ... 339

Шарифуллин Б.Р., Наумов И.В. Скачок скорости на границе раздела при организации вихревого движения двух несмешиваемых жидкостей ... 343

Ширяев А.А. О волновом движении в составной капле идеальной жидкости ... 346

Ширяева С.О., Григорьев А.И. О реализуемости тороидальных движений вязкой жидкости в сферической капле при её осцилляциях ... 349

Шмакова Н.Д., Ерманюк Е.В., Флёр Я.-Б., Вуазен Б. Нелинейные аспекты фокусировки внутренних волн, генерируемых горизонтальными колебаниями тора ... 351

Шмакова Н.Д., Пеньковская Н.А., Ерманюк Е.В., Сантуччи С.Ф.А., Рофаст К., Пуисто А., Аллава М. Течение пены в ячейке Хеле-Шоу с локальным проницаемым препятствием ... 352

Яковенко А.Л., Шатров М.Г., Глазков А.О., Кузнецов С.М., Предеин А.А. Анализ влияния вида энергоносителя на акустическое излучение от рабочего процесса Дизеля ... 353

Якуш С.Е. Физический взрыв при быстром испарении вскипающей жидкости ... 357

10-Я МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕЦИЯ –
ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
ВОЛНЫ И ВИХРИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ

Москва, Россия, 03–05 декабря 2019

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ ШКОЛЫ

ISBN 978-5-91741-252-8

Подписано к печати 18.11.19 тираж 250 экз.

Отпечатано в ООО «Премиум-принт»