

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем механики

На правах рукописи

ПАРШИН ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ НАРАЩИВАЕМЫХ ТЕЛ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАССОВЫХ СИЛ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена в Институте проблем механики Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор А.В. Манжиров

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А.С. Кравчук;
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.Н. Радаев

Ведущая организация: Институт проблем машиноведения
Российской академии наук

Защита состоится 17 мая 2007 г. в 15 часов на заседании Диссертационного совета Д 002.240.01 при Институте проблем механики Российской академии наук по адресу: 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем механики Российской академии наук.

Автореферат разослан 17 апреля 2007 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию закономерностей эволюции напряженно-деформированного состояния упругих и стареющих вязкоупругих изотропных тел в процессе их кусочно-непрерывного наращивания в полях массовых сил различной природы. Изучаются квазистатические процессы деформирования, сопровождающиеся малыми деформациями.

Актуальность темы. Множество природных явлений и технологических процессов сопровождается увеличением размеров и изменением формы твердых тел за счет присоединения к ним дополнительного материала. При исследовании такого рода процессов важно учитывать особенности постепенного притока нового вещества к поверхности тела при одновременном действии нагрузок. Этого нельзя осуществить в рамках классической механики деформируемого твердого тела, даже если рассматривать традиционные уравнения и граничные условия в переменной во времени области.

В качестве механической нагрузки в указанных процессах часто выступают массовые силы. Это силы, возникающие в результате действия на тело физических полей (силы тяжести, кулоновские силы), силы инерции, вызванные движением тела в пространстве как жесткого целого (прежде всего, центробежные силы), силы взаимного притяжения (например, гравитационного) частиц материала.

С постоянным действием сил тяжести приходится считаться при расчете постепенно возводимых строительных сооружений (зданий, плотин, насыпей) и последовательно монтируемых конструкций значительных размеров, при исследовании процессов формирования массивных природных объектов (намерзание ледников и ледяного покрова, зарождение осадочных и вулканических горных пород), процессов роста монокристаллов. Силы кулоновского взаимодействия играют ключевую роль в технологических процессах электролитического формования или нанесения покрытий электростатическим способом, а следовательно, не могут быть исключены из рассмотрения и при анализе напряженно-деформированного состояния изготавливаемых подобным образом изделий. Центробежные силы необходимо принимать во внимание в случае наращивания вращающихся тел, в частности, при моделировании ряда технологических процессов изготовления или усиления элементов конструкций и деталей машин и нанесения на них покрытий. К таким процессам можно отнести намотку или напыление материала на вращающуюся оправку или заготовку. Без учета сил гравитационного взаимопритяжения частиц, а при некоторых условиях еще и центробежных сил инерции, не обойтись при изучении процессов формирования массивных космических объектов в результате аккреции.

Элементы материала, присоединяемые к телу в процессе его наращивания, нередко подвергаются предварительному деформированию, вызывающему возникновение в них начальных напряжений. В таком случае в растущем теле будут формироваться поля напряжений и деформации даже при отсутствии внешней нагрузки. Примерами здесь могут служить силовая намотка или строительство с использованием предварительно напряженных конструктивных элементов.

Многие реальные искусственные и природные материалы (бетон, полимеры, лед, грунты, древесина) проявляют ярко выраженные свойства ползучести и старения. Ясно, что в силу существенной зависимости от времени протекающих в них деформационных процессов, процессы наращивания тел с использованием таких материалов обладают целым рядом специфических особенностей и при этом достаточно сложны для моделирования. Однако исследование именно этих процессов весьма актуально с точки зрения разнообразных инженерных и физических приложений.

Цели работы: более полное и точное описание механических процессов, протекающих в твердых деформируемых телах при их наращивании в условиях действия различных полей массовых сил; всестороннее исследование этих процессов, выявление и анализ общих и частных особенностей, которые органически присущи им, но не могут быть обнаружены в рамках традиционных подходов; формулировка выводов и рекомендаций практического характера.

Методика исследования. Представленные в диссертации исследования опираются, в первую очередь, на фундаментальные идеи механики растущих тел и математическую теорию наращиваемых тел, развитые в работах академика АН Армении Н.Х. Арутюняна и профессора А.В. Манжирова и их учеников. При этом используются результаты и методы математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, уравнений математической физики, теории обобщенных функций.

Научная новизна. Все рассмотренные в диссертации задачи относятся к развивающейся области механики деформируемого твердого тела — механике растущих тел. В приведенных ниже постановках они решены и детально исследованы впервые. В результате обнаружено и проанализировано множество новых механических эффектов, установлены факты, необычные с точки зрения механики тел постоянного состава. Также впервые изучены некоторые общие характерные особенности деформирования наращиваемых тел.

Практическая значимость. Результаты работы представляют теоретический и практический интерес как для механики, так и для некоторых других областей естествознания, и могут быть использованы в инженерной практике при моделировании целого ряда технологических процессов.

Представленные в диссертации исследования выполнены в рамках плановой тематики Института проблем механики Российской академии наук «Моделирование процессов формирования, взаимодействия, деформирования и разрушения упруговязкопластических тел под действием нагрузок и физических полей» (Гос. рег. № 0120.0503826), а также исследований, финансируемых грантом Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-1245.2006.1 и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00693 и № 06-01-00521).

Достоверность полученных результатов в рамках рассматриваемых механических моделей обеспечивается применением строгого математического аппарата при построении решений поставленных задач и их анализе. Она основывается также на практических оценках погрешностей выполняемых приближенных вычислений, контроле точности нахождения напряженного состояния тела посредством проверки выполнения интегральных условий равновесия его различных конечных частей, тестировании вычислительных программ на задачах с построенным в конечной форме решением, сопоставлении получаемых в частных случаях результатов с заранее прогнозируемыми или известными. Полученные в диссертации результаты в определенной степени подтверждают и адекватность самих механических представлений, положенных в основу проведенных в ней исследований.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Международной молодежной научной конференции «XXXI Гагаринские чтения» (Москва, 2005); Российской конференции с международным участием «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Саратов, 2005); Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной 85-летию со дня рождения акад. И.И. Воровича (Ростов-на-Дону, 2005); II Всероссийской научной конференции «Внутреннее ядро земли. Геофизическая информация о процессах в ядре» (Москва, 2005); Международной молодежной научной конференции «XXXII Гагаринские чтения» (Москва, 2006); Международной научной конференции «Ракетно-космическая техника: Фундаментальные и прикладные проблемы механики», посвященной 90-летию В.И. Феодосьева (Москва, 2006); Семинаре по механике сплошных сред им. Л.А. Галина Института проблем механики Российской академии наук (Москва, 2006); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006); Индо-российском совещании по проблемам нелинейной механики деформируемого твердого тела при больших деформациях (Дели, 2006); Международной молодежной научной конференции «XXXIII Гагаринские чтения» (Москва, 2007).

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введе-

ния, трех глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Полный объем диссертации вместе с иллюстрациями составляет 236 страниц. Из них 9 занимает список литературы, содержащий 98 наименований. Общее количество иллюстраций — 47.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждается тематика предпринятых в диссертации исследований и обосновывается их актуальность. Затем следуют несколько вводных параграфов. В § 0.1 даются необходимые первоначальные понятия. В § 0.2 проводится краткий обзор важнейших работ по механике непрерывно наращиваемых тел и формулируется цель настоящей диссертационной работы. В § 0.3 описываются ее структура и содержание, а также основные особенности и методы проводимых исследований, указываются работы, в которых рассматривались сходные с изучаемыми в диссертации задачи и приводятся описания этих задач. В § 0.4 кратко описываются используемые в работе определяющие соотношения материала. В § 0.5 излагаются основные положения механики растущих тел при малых деформациях и применяемый в работе общий метод решения соответствующих задач.

Под *наращиваемым (или растущим) телом* понимается деформируемое твердое тело, которое в процессе деформирования пополняется новыми материальными элементами, присоединяемыми к некоторой части его поверхности. Эта часть называется (*текущей, или мгновенной*) *поверхностью роста*. Считается, что присоединение материала происходит в условиях полного сцепления частиц на этой поверхности. Если за каждый бесконечно малый промежуток времени t к телу присоединяется лишь бесконечно тонкий слой материала, то речь идет о процессе *непрерывного наращивания (или роста)*. Если этапы непрерывного роста чередуются с интервалами времени, в течение которых приток дополнительного материала отсутствует, то следует говорить о *кусочно-непрерывном наращивании*.

В общем случае процесс наращивания начинается с присоединения материала к некоторому уже существующему твердому телу Ω_0 , которое в результате механических или иных воздействий начинает деформироваться за некоторое время до этого, в момент времени $t = t_0$. После начала наращивания в момент $t_1 \geq t_0$ оно становится частью рассматриваемого растущего тела, которую будем называть его *исходной частью (или исходным телом)*. В частном случае процесс непрерывного роста может начаться и без участия исходного тела. В этом случае возникает приток материала, например, к некоторому точечному центру или какой-либо жесткой поверхности. Часть твердого тела Ω_A , которая образована из всего поступавшего во время его

роста дополнительного материала, будем называть *дополнительной частью* (*дополнительным телом*). Части, сформированные в кусочно-непрерывном процессе на различных этапах непрерывного роста назовем *субтелами*, а те поверхности внутри наращиваемого тела, с которых в процессе роста начиналось формирование отдельных субтел, — *базовыми поверхностями (роста)*.

В случае малых деформаций при определении напряженно-деформированного состояния наращиваемого тела можно пренебречь деформационными изменениями во времени его конфигурации по сравнению с ее изменениями за счет пополнения тела новым материалом. Рассматриваются только такие процессы, в которых закон движения поверхности роста $S_*(t)$, а следовательно, и текущую конфигурацию тела можно считать априори известными.

Основной особенностью деформирования любого наращиваемого тела, отличающей его от тел постоянного состава и тел с переменной вследствие снятия материала границы, является принципиальное отсутствие у него единой недеформированной конфигурации. Из этого следует, во-первых, невозможность определения меры деформации растущего тела обычным для механики сплошной среды способом и, во-вторых, потребность в знании, вообще говоря, всей истории изменения состояния дополнительных элементов вплоть до момента их включения в состав рассматриваемого тела. Относительно последней будем считать, что она не зависит от процессов, происходящих в самом этом теле.

В то же время понятно, что частицы нового материала после его сцепления с поверхностью роста продолжают свое движение уже в составе сплошного, пусть и растущего, тела. Это значит, что в области пространства $\Omega(t)$, занимаемой в данный момент времени всем наращиваемым телом, однозначно определено достаточно гладкое поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ движения его частиц \mathbf{r} и задачу о деформировании такого тела можно поставить в скоростной форме. При этом в формулировке определяющих соотношений материала в роли характеристики процесса деформирования (как в задачах механики жидкости) должен выступать тензор скорости деформации $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})/2$.

В работе используется линейно вязкоупругий однородно стареющий изотропный материал, описываемый уравнением состояния

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})}) [2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{1}$, \mathbf{T} , \mathbf{E} — единичный тензор 2-го ранга, тензоры напряжений и малой деформации; $G(t)$ — модуль упругого сдвига, $\varkappa = (1 - 2\nu)^{-1}$, где $\nu = \text{const}$ — коэффициент Пуассона для мгновенной упругой деформации и деформации ползучести; $\tau_0(\mathbf{r})$ — распределение моментов возникновения напряжений в

точках тела; $\mathcal{I} + \mathcal{N}_s = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)^{-1}$ — линейный оператор, где $\mathcal{I} f(t) = f(t)$,

$$\mathcal{N}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) R(t, \tau) d\tau, \quad \mathcal{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau.$$

Отсчет времени ведется от момента изготовления материала. Ядро релаксации $R(t, \tau)$ есть резольвента ядра ползучести

$$K(t, \tau) = G(\tau) \partial \Delta(t, \tau) / \partial \tau, \quad \Delta(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau),$$

где $\Delta(t, \tau)$, $\omega(t, \tau)$ — функция удельной деформации и мера ползучести при чистом сдвиге ($t \geq \tau \geq 0$).

Если исходить из уравнения (1), то при рассмотрении растущего тела определяющие соотношения для него следует записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \partial \mathbf{T}^\circ / \partial t, \quad \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_{\tau_0(\mathbf{r})}) [\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) / G(t)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Если принять, что дополнительный материал загружается непосредственно в момент своего сцепления с телом, то, во-первых, $\tau_0(\mathbf{r}) = t_0$ при $\mathbf{r} \in \Omega_0$ и $\tau_0(\mathbf{r}) = \tau_*(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} \in \Omega_A$, где $\tau_*(\mathbf{r})$ — момент времени, начиная с которого частица, характеризуемая радиус-вектором \mathbf{r} , находится в составе тела, и, во-вторых, для корректной постановки задачи на этапе непрерывного наращивания достаточно задавать на поверхности роста полный тензор напряжений

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_*(t) \iff t = \tau_*(\mathbf{r}).$$

Именно такие процессы и рассматриваются в работе. В общих рассуждениях предполагается также, что поверхности $S_*(t)$ не имеют особых точек.

Частным случаем уравнения (1) является определяющее соотношение чисто упругого материала. Этот случай ввиду его особой значимости в каждой главе анализируется отдельно. Как показано в данной работе, именно в этом частном случае все неклассические особенности поведения наращиваемых тел проявляются наиболее ярко.

Все изучаемые в работе проблемы сводятся к *неклассическим* задачам механики деформируемого твердого тела. Их решения строятся для произвольного числа этапов непрерывного роста с произвольными по длительности паузами между ними с помощью метода, приводящего в итоге к решению последовательности краевых задач математической теории упругости, содержащих время t как вещественный параметр и поставленных для величин \mathbf{S} , \mathbf{D} и \mathbf{v} в области $\Omega(t)$ на различных временных этапах процесса, с последующим восстановлением эволюции поля напряжений по соответствующим формулам. Последняя процедура эквивалентна решению для каждой точки

тела интегральных уравнений типа Вольтерра, правые части которых получаются интегрированием по параметру компонент тензора \mathbf{S} , найденных в результате решения указанных краевых задач.

В контексте изучаемой в диссертации проблемы деформирования наращиваемых тел под действием массовых сил отметим следующее важное с математической точки зрения обстоятельство. При наличии у материала свойства ползучести в роли интенсивности объемной нагрузки в упомянутых выше краевых задачах даже при самой простой структуре истинного силового поля выступают, вообще говоря, разрывные в рассматриваемой пространственной области функции, изменяющиеся в ней сложным образом и зависящие от реологических свойств материала и всей истории формирования тела.

В **главе 1** исследуется влияние *сил взаимного или центрального притяжения частиц материала* на напряженно-деформированное состояние формируемых под их воздействием твердых тел. Исследования осуществляются на примере задачи о наращивании шара в произвольном центрально-симметричном силовом поле интенсивности $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_r f(r)$, где \mathbf{r} — радиус-вектор с началом в центре шара, $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, $r = |\mathbf{r}|$, причем при $r > 0$ функция $f(r)$ непрерывна и $f(r) > 0$. Деформирование растущего шара происходит только за счет действующих на него массовых сил, а присоединяемый материал считается изначально свободным от напряжений ($\mathbf{T}_* \equiv \mathbf{0}$). Процесс роста начинается с возникновения притока дополнительного материала к некоторому уже существующему шаровому телу (ядру радиуса a_0), находящемуся в рассматриваемом силовом поле или, в частном случае, к точечному центру ($a_0 = 0$). В § 1.1 дается общая физическая постановка задачи. В § 1.2 находится напряженно-деформированное состояние исходного шара до начала его наращивания. Параграфы 1.3 и 1.4 посвящены постановке краевых задач на произвольном этапе непрерывного роста шара и после его прекращения. В § 1.5 строятся замкнутые аналитические решения поставленных краевых задач, определяющие эволюцию напряженно-деформированного состояния шара после начала его кусочно-непрерывного роста. Доказана разрешимость изучаемой задачи в квадратурах на всех временных этапах в случае, когда силовое поле удовлетворяет хотя бы одному из ограничений $\int_0^\infty f(r) dr < +\infty$ или $r^2 f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Одной из важнейших особенностей напряженного состояния любого кусочно-непрерывно наращиваемого тела в общем случае является наличие разрывов напряжений при переходе через базовые поверхности роста. Параграф 1.6 диссертации имеет самостоятельный характер и посвящен анализу поведения тензора напряжений в окрестности первоначальной базовой поверхности в *произвольном* наращиваемом теле, подчиненном определяющим соотношениям (2). Доказывается *теорема* о том, что скачок этого тензора в произволь-

ной точке $\mathbf{r} \in S_*(t_1)$ первоначальной базовой поверхности роста при переходе через эту поверхность изменяется со временем по закону

$$\begin{aligned} \frac{\lrcorner \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} = & - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}|_0, \tau) R(t, \tau) d\tau - \\ & - \left[\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}|_0, t_1) - \frac{\mathbf{T}_*(\mathbf{r}|_A)}{G(t_1)} \right] \left[1 + \int_{t_1}^t R(t, \tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (3)$$

при достаточно общих ограничениях на характер деформирования окрестности рассматриваемой точки до начала и в процессе наращивания. Здесь введены обозначения $h(\mathbf{r}|_{0,A}) = \lim_{\Omega_{0,A} \ni \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} h(\mathbf{r}')$ и $\lrcorner h(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}|_A) - h(\mathbf{r}|_0)$. Заметим, что фигурирующий в формуле (3) тензор $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}|_0, t)$ на отрезке времени $[t_0, t_1]$ известен из решения классической задачи для исходного тела.

Видно, что эволюция скачка определяется только свойствами материала, моментами загрузки исходного тела и начала его роста, историей деформирования окрестности рассматриваемой точки на отрезке времени между этими моментами, а также начальными напряжениями, задаваемыми вблизи данной точки сразу после начала наращивания, и не зависит от параметров всего последующего процесса роста и нагружения тела (*следствие 1*). Следовательно, она является известной до построения решения собственно задачи наращивания и может использоваться в качестве одного из критериев его точности. Если на всем отрезке времени $[t_0, t_1]$ вплоть до начала наращивания исходное тело деформируется только под воздействием постоянной во времени объемной и поверхностной нагрузки при однородных кинематических ограничениях, а затем в некоторой точке \mathbf{r} базовой поверхности роста одна из физических компонент $T_{ij}^*(\mathbf{r}|_A)$ тензора начальных напряжений (в некоторой ортогональной системе координат в окрестности этой точки) равна нулю, то эволюция скачка соответствующей физической компоненты T_{ij} тензора напряжений в точке \mathbf{r} дается зависимостью $\lrcorner T_{ij}(\mathbf{r}, t) = -T_{ij}^e(\mathbf{r}|_0) D(t, t_1, t_0)$, где T_{ij}^e — компонента тензора напряжений, найденного из классической чисто упругой задачи для исходного тела при тех же кинематических ограничениях и нагрузке, что и в рассматриваемой вязкоупругой задаче, а функция

$$D(t, s, \tau) = 1 + G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_s) [\omega(s, \tau) - \omega(t, \tau)], \quad t \geq s \geq \tau \geq 0,$$

определяется только свойствами материала и при больших значениях $s - \tau$ мало отличается от единицы (*следствие 2*).

В § 1.7 обсуждаются некоторые характерные особенности напряженного состояния шарового тела, растущего в оговоренных выше условиях. На примере данной задачи показан также способ аналитического получения зависимостей от времени величин разрывов и изломов распределений напряжений при переходе через любую базовую поверхность роста внутри наращиваемого тела в тех случаях, когда эта базовая поверхность совпадает с последней

поверхностью роста на предыдущем этапе. При этом используется тот же подход, что и при доказательстве общей теоремы в § 1.6. Также исследовано поведение девиатора напряжений в наращиваемом шаре. В частности, показано, что в исходно существующем ядре шара поле данного тензора стационарно, а в каждой точке дополнительной части его эволюция определяется историей формирования тела только до момента включения в него данной точки. При достаточно большой продолжительности паузы перед k -м этапом непрерывного роста девиатор напряжений в материальном слое, присоединенном к телу в самом начале k -го этапа, на всем протяжении дальнейшего процесса деформирования будет сколь угодно мало отличаться от нуля.

В § 1.8 рассмотрена чисто упругая постановка задачи. Установлено, что в этом случае вся сформированная в результате наращивания часть твердого шара независимо от вида действующего на него силового поля оказывается загруженной *как жидкость*.

Когда шар растет в условиях собственной гравитации, интенсивность массовых сил, как известно, пропорциональна удалению от центра и не зависит от радиуса шара. Этот вариант рассматривается в § 1.9 как конкретный пример для числовой иллюстрации полученных выше результатов. Для вязкоупругого материала изучено также влияние характера и скорости роста на эволюцию и установившиеся распределения характеристик напряженно-деформированного состояния шара. В расчетах выявлено, например, что положения и значения максимумов интенсивности касательных напряжений и наибольшего касательного напряжения существенно зависят от реализуемого режима наращивания, но в любом случае данные значения не превышают соответствующих максимумов в аналогичном ненаращиваемом гравитирующем шаре, где указанные характеристики пропорциональны квадрату удаления от центра. Давление в центре шара, постепенно формируемого в поле сил собственной гравитации, всегда выше, чем у мгновенно сформированного шара соответствующего размера.

Параграф 1.10 подводит итоги проведенных в первой главе исследований.

Глава 2 посвящена изучению воздействия *центробежных сил* на состояние твердых тел, изготавливаемых в процессе вращения. Решается задача о постепенном формировании слоя материала произвольной толщины на внутренней или внешней поверхности круговой цилиндрической оправки, вращающейся вокруг своей оси с переменной угловой скоростью $\omega(t)$. Изменение скорости во времени предполагается достаточно медленным, $|\omega'(t)| \ll \omega^2(t)$, так что тангенциальными силами инерции можно пренебречь по сравнению с центробежными силами. Оправка считается существенно более жесткой, чем формируемый на ней слой, и поэтому ее собственная деформация в расчет не берется. С точки зрения постановки задачи это означает отсутствие ис-

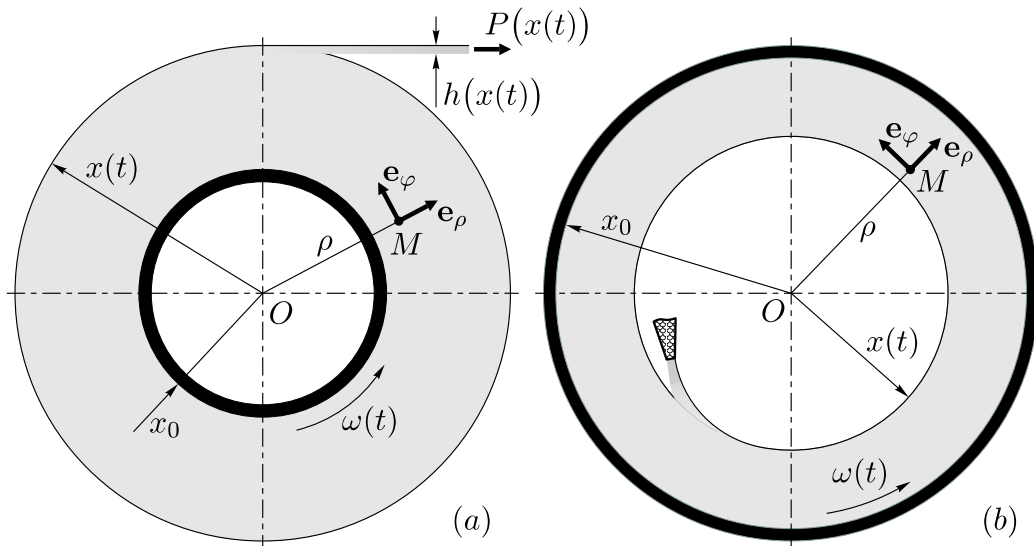
ходного тела. Учет деформации оправки не представляет принципиальных трудностей. Отказ от него делается умышленно — с целью иллюстрации в работе также и тех процессов, в которых на деформирование возникшей в результате наращивания части механической системы не влияет деформирование ее исходно существующей части. Присоединение элементарных слоев материала может осуществляться с произвольным предварительным натягом $\sigma_\varphi^*(\rho)$, зависящим от их радиуса ρ , то есть

$$\mathbf{T}_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \sigma_\varphi^*(\rho), \quad (4)$$

где \mathbf{e}_φ — единичный касательный вектор к поперечному сечению слоя. Это позволяет управлять напряженно-деформированным состоянием получаемого в итоге тела. В § 2.1 дается общее описание задачи. В § 2.2 ставятся краевые задачи, определяющие напряженно-деформированное состояние кусочно-непрерывно наращиваемого слоя. Рассматривается плоская деформация. В § 2.3 строятся замкнутые аналитические решения этих задач, содержащие квадратуры. В § 2.4 отдельно рассмотрен упругий случай.

Параграф 2.5 посвящен изучению остаточных напряжений, возникающих в изготовленном слое после остановки его вращения и, возможно, отсоединения от оправки. Доказано, что предельные значения этих напряжений не зависят от программы остановки, способа отсоединения и момента начала данных манипуляций и определяются тензором $\mathbf{T}_r(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{T}_-(\mathbf{r})$. Здесь первое слагаемое в правой части есть финальный тензор напряжений в задаче наращивания рассматриваемого *вязкоупругого стареющего* слоя при произвольном законе $\omega(t)$, не предполагающем остановки вращения. Второе слагаемое есть взятый с обратным знаком тензор напряжений в соответствующем ненаращиваемом *упругом* полом цилиндре, вращающемся с угловой скоростью $\omega_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)$, одна из боковых поверхностей которого сцеплена с жесткой втулкой (если речь идет только об остановке вращения готового слоя) или свободна (в случае остановки вращения и отсоединения от оправки), а на другой задано нулевое напряжение или равномерное давление $p_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$, равное установившемуся при законе $\omega(t)$ значению давления на оправку полученного в результате наращивания слоя. Ход рассуждений, приводящий к формулировке данного утверждения имеет общий в рамках линейной теории характер и может быть положен в основу доказательств теорем об остаточных напряжениях, возникающих в произвольных наращиваемых телах после завершения их формирования и последующего освобождения от механической нагрузки или кинематических связей.

В § 2.6 в рамках построенной выше общей модели в качестве примеров рассмотрены задачи о силовой намотке и о внутреннем напылении слоя (фиг. 1) за один и за несколько этапов непрерывного наращивания в случае вращения

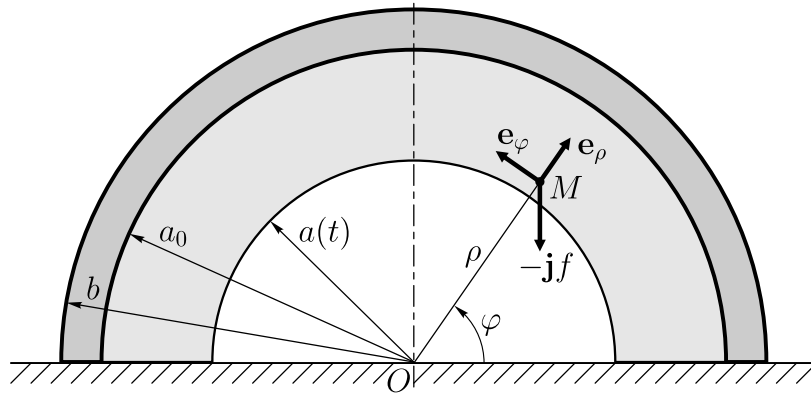


Фиг. 1. Возможные технологические процессы формирования цилиндрического слоя на вращающейся оправке

оправки с постоянной угловой скоростью. Выявлена принципиальная необходимость совместного учета факторов постепенного притока к телу нового материала и действия на это тело центробежных сил при расчете его напряженно-деформированного состояния как в процессе, так и после изготовления. Показано, например, что пренебрежение учетом центробежных сил при моделировании процесса намотки в некоторых случаях может дать радикально неверные представления о законе изменения давления на поверхность оправки и привести к сильному завышению оценки прочности изделия на этапе его изготовления, а также значений предсказываемых остаточных напряжений. Все это может внести большие ошибки в прорабатываемую схему технологического процесса. Остаточные напряжения в изделиях, получаемых в результате напыления материала на вращающуюся поверхность, могут оказаться соизмеримыми с напряжениями, действующими в процессе изготовления, или даже значительно превышать их. Это особенно актуально, если наличие остаточных напряжений в данных изделиях является негативным фактором. Напряженное состояние рассматриваемых вязкоупругих тел, остающееся после их изготовления, определяющим образом зависит от характера протекания данного процесса. Так, наличие пауз в процессе намотки или напыления приводит к качественному и весьма существенному количественному изменению картины остаточного напряженного состояния по сравнению с получаемой в непрерывном процессе.

Основные результаты второй главы зафиксированы в § 2.7.

В **главе 3** анализируется влияние *сил тяжести* на состояние постепенно формируемых в их присутствии объектов. Решается инженерная задача о последовательном сооружении на гладком жестком основании тяжелой



Фиг. 2. Возводимая арочная конструкция

полукруглой арочной конструкции методом послойного утолщения по внутренней поверхности некоторой первоначально установленной на это основание заготовки, выполненной заранее без остаточных напряжений (фиг. 2). Предполагается закрепление на основании подошв наращиваемой арки посредством скользящей заделки, запрещающей отслоение, но не препятствующей свободному скольжению. В § 3.1 дается постановка задачи. Рассматривается случай плоской деформации. В § 3.2 ставится краевая задача, описывающая деформирование заготовки под действием собственного веса и произвольной нагрузки на ее наружной поверхности с момента установки на основание и до начала наращивания. В § 3.3 проводится постановка краевых задач для кусочно-непрерывно наращиваемой тяжелой арки, на внешнюю поверхность которой продолжает действовать некоторая переменная нагрузка. Учитывается возможность использования в процессе наращивания предварительно напряженных конструктивных элементов. Параграфы 3.4–3.6 посвящены построению решений поставленных краевых задач в рядах и квадратурах методом Фурье разделения переменных. В § 3.7 отдельно разобран упругий случай.

Параграф 3.8 посвящен подробному изучению воздействия собственно сил тяжести на постепенно возводимую арочную конструкцию (при отсутствии предварительных напряжений и поверхностной нагрузки). Качественно исследовано влияние ползучести, старения и веса материала на деформирование произвольного тела, наращиваемого ненапряженными весовыми элементами. Выделены и проанализированы центральные тенденции, непрерывное взаимодействие которых определяет процесс формирования напряженно-деформированного состояния такого тела, — это тенденция к перераспределению за счет ползучести уже возникших в теле напряжений на присоединяемый к нему новый материал и тенденция к постоянному догружению весом этого материала уже существующей части тела. Общие рассуждения подкрепляются результатами многочисленных числовых расчетов, выполненных

для различных режимов возведения тяжелых тонкостенных и толстостенных сводов из тонкостенной заготовки и усиления исходно толстостенных сводов.

При достаточно быстром изготовлении конструкции из молодого материала закладывается большой потенциал к перераспределению возникающих в ней напряжений. Поскольку все элементы деформируются при этом в достаточной степени согласованно, то финальное состояние в целом оказывается близким к тому, которое имело бы место при загрузке собственным весом уже готовой конструкции (но эта близость все же не может быть неограниченной из-за возникающих разрывов напряжений, не зависящих, как показано в главе 1, от скорости протекания процесса наращивания). В рассматриваемой задаче это приводит в конечном итоге к очень сильному разгрузению исходно существующей части арки. Однако при быстром пополнении тела новыми элементами происходит и его интенсивное утяжеление, которое может вызывать в нем рост напряжений до тех пор, пока ползучесть не повлияет существенно на этот процесс. Поэтому на начальной стадии утолщения арка испытывает напряжения, превышающие первоначальные. В случае тонкой заготовки это превышение весьма значительно.

Если же возведение начинается достаточно поздно (в смысле возраста материала), перед началом наращивания выдерживается достаточно продолжительная пауза или само наращивание протекает слишком медленно, то изменение напряженно-деформированного состояния конструкции в процессе изготовления обуславливается, в основном, ее догрузением весом новых дополнительных элементов. Состояние тела после такого изготовления оказывается чрезвычайно далеким от классического. Материал, присоединенный на завершающей стадии возведения, остается практически не напряженным. Уровень напряжений в исходной части рассматриваемой арочной конструкции при этом значительно возрастает по сравнению с первоначальным. Если заготовка является достаточно тонкостенной, в начальный момент в ней возникают весьма высокие напряжения. В результате в готовой конструкции будут иметься области с уровнем напряжений, многократно превышающим максимальный уровень при ее расчете по конечной конфигурации.

Показано, что, варьируя надлежащим образом скорость наращивания конструкции, можно добиться в итоге весьма ощутимого снижения в ней напряжений относительно начального состояния заготовки, не превысив при этом допустимых значений во время изготовления.

Изготовление тяжелого тела из чисто упругого материала является предельным вариантом процессов второго типа. В этом случае свойственные таким процессам особенности деформирования проявляются наиболее сильно.

В ходе исследований обнаружено, что даже весьма толстостенная заготовка после установки на гладкое основание стремится отслоиться от него на

периферийных участках своих подошв под действием собственного веса. Избавиться от зон отрывающих контактных напряжений за счет последующего усиления такой заготовки без принятия специальных мер невозможно даже в том случае, когда контактное давление на подошвах наращиваемой арки окончательной толщины было бы всюду положительным.

При постепенном изготовлении арки из достаточно толстой заготовки удастся получить в готовой конструкции заметно более низкие напряжения по сравнению с теми, которые бы она имела, будучи установленной на основание сразу в готовом виде.

В § 3.9 исследован вариант наращивания арочной конструкции слоями, равномерно растянутыми в окружном направлении произвольным напряжением, зависящим от радиуса слоя (см. (4)). При таком способе возведения также не удастся избежать неограниченного по времени сохранения удерживающих связей на части подошвы готовой арки, препятствующих ее отслоению. Однако созданием в присоединяемых слоях надлежащих начальных напряжений возможно добиться гораздо более выгодного результирующего напряженного состояния конструкции, чем при ее наращивании ненапряженными элементами, в смысле минимизации отрицательного давления на основание и общего уровня напряжений в теле.

В § 3.10 рассмотрен такой вариант процесса, когда вершина арки закрепляется на подвесе с контролируемой силой натяжения, компенсирующей во время возведения заданную долю текущего веса арки и убывающей до нуля после окончательного завершения ее формирования. Использование такой технологии позволяет получить во всей готовой конструкции значительно более низкие напряжения, чем при обычном наращивании в том же временном режиме. При этом также оказывается возможным получение как непрерывной и практически совпадающей с классической, так и гораздо более оптимальной, чем в классическом случае, финальной эпюры контактных напряжений. Если же, помимо организации силовой поддержки, еще подвергать присоединяемые к конструкции элементы некоторому начальному растяжению, то удастся добиться того, что даже тонкостенная арка будет оказывать в итоге на основание *всюду положительное* контактное давление (что невозможно в том случае, если эта арка установлена в готовом виде), причем распределенное по подошве достаточно эффективно.

При самых различных вариантах изготовления рассматриваемой конструкции характеристики ее напряженного состояния могут достигать в процессе изготовления величин, значительно превышающих финальные, причем в других ее точках.

Важнейшие результаты выполненных в третьей главе исследований описаны в § 3.11.

В **заключении** сформулированы выводы и перечислены основные научные результаты всей диссертационной работы.

При проведении расчетов во всех задачах для аппроксимации зависимостей от временных параметров определяющих характеристик вязкоупругого стареющего материала выбираются выражения, широко используемые в литературе. Задание конкретных числовых значений входящих в них постоянных учитывает известные экспериментальные данные. Тем не менее, в **приложении А** выводятся общие ограничения, которые нужно наложить на эти постоянные, чтобы указанные характеристики удовлетворяли основным математическим требованиям, предъявляемым к рассматриваемой модели материала для обеспечения ее адекватности реальным процессам.

В **приложении Б** кратко описаны вычислительные методы, применяемые для построения числовых решений исследуемых задач (§ Б.1). Указаны и обоснованы основные приемы, которые используются в работе для проверки правильности и контроля точности получаемых результатов (§ Б.2).

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Исследованы процессы деформирования твердых шаровых тел, растущих в произвольном центральном силовом поле за счет притока вещества к их поверхности. Показано, что такие тела приобретают необычные с точки зрения классической механики деформируемого твердого тела свойства. В частности, интенсивность касательных напряжений в постепенно выросшем упругом шаре оказывается всюду равной нулю. Проведены числовые расчеты для гравитирующих объектов, формирующихся в результате аккреции. Установлено, что в вязкоупругом случае распределение напряжений в них существенно зависит от скорости и характера протекания процесса роста. Изучены особенности этой зависимости.
2. Исследованы процессы послойного изготовления цилиндрических тел и покрытий посредством нанесения материала с произвольным натягом на наружную или внутреннюю поверхность вращающейся оправки. Выявлена принципиальная необходимость совместного учета факторов постепенного притока к телу нового материала и действия на тело центробежных сил при расчете его напряженно-деформированного состояния в процессе и после изготовления. Выполнены расчеты для случаев силовой намотки и внутреннего напыления. Изучено влияние различных режимов изготовления на распределения остаточных напряжений в готовых изделиях.
3. Решена существенно двумерная задача о сооружении тяжелого полуциркулярного свода на гладком основании. Показано, что отказ от учета дей-

ствия сил тяжести на протяжении всего процесса возведения тяжелых объектов может привести к радикально неверным представлениям об их текущем и результирующем состоянии, в том числе к многократному завышению прочности и эксплуатационной несущей способности. Напряженно-деформированное состояние таких объектов определяющим образом зависит от технологии и режима возведения. Продемонстрирована возможность весьма эффективного управления этим состоянием посредством варьирования в процессе наращивания скорости присоединения дополнительного материала, создания в нем предварительных напряжений, временного локального нагружения поверхности возводимого объекта.

4. Изучен ряд общих аспектов механического поведения и состояния растущих и сформированных в процессе наращивания упругих и стареющих вязкоупругих тел. В частности, доказана теорема об эволюции скачка тензора напряжений на поверхности раздела исходной и дополнительной частей произвольного наращиваемого тела, указан способ аналитического построения зависимостей величин разрывов и изломов напряжений от времени при переходе через границы субтел, предложен эффективный метод определения остаточных напряжений в наращиваемых телах после их освобождения от нагрузки или кинематических связей.
5. В результате анализа построенных в диссертации решений новых задач механики растущих тел и проведенных числовых расчетов обнаружены и детально изучены принципиально новые механические эффекты, возникающие при наращивании деформируемых тел. Сделан ряд практически важных выводов.

ПУБЛИКАЦИИ

Основные результаты диссертационной работы отражены в следующих публикациях:

1. *Паршин Д.А.* Наращивание гравитирующего шара // XXXI Гагаринские чтения. Тезисы докладов Международной молодежной научной конференции. Москва, 5–9 апреля 2005 г. М.: «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2005. Т. 1. С. 100–101.
2. *Паршин Д.А.* О контакте массивной наращиваемой арки с жестким основанием // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Материалы V Российской конференции с международным участием. Саратов, 23–25 августа 2005 г. / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. С. 253–256.

3. *Паршин Д.А.* Нарастивание гравитирующего упругого шара // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения акад. И.И. Воровича. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. Т. 1. С. 157–161.
4. *Манжиров А.В., Паршин Д.А.* Нарастивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66–83.
5. *Паршин Д.А.* Нарастивание массивных деформируемых тел // XXXII Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодежной научной конференции в 8 томах. Москва, 4–8 апреля 2006 г. М.: «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2006. Т. 1. С. 147–149.
6. *Ефремова Е.А., Паршин Д.А.* Напряженно-деформированное состояние вязкоупругого стареющего слоя, наносимого на вращающуюся цилиндрическую втулку // Ракетно-космическая техника: Фундаментальные и прикладные проблемы механики. Материалы Международной научной конференции, посвященной 90-летию В.И. Феодосьева. Москва, 4–6 мая 2006 г. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. С. 52.
7. *Паршин Д.А.* Кусочно-непрерывное нарастивание тяжелой арки из вязкоупругого стареющего материала // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2006 г. Т. 3. С. 170.
8. *Манжиров А.В., Паршин Д.А.* Моделирование процессов нарастивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 149–166
9. *Manzhirou A.V., Parshin D.A.* Accretion of solids under mass forces // Indo-Russian workshop on Problems in Nonlinear Mechanics of Solids with Large Deformation. Proceedings. IIT Delhi, November 22–24, 2006. New Delhi: IIT Delhi, 2006. P. 71–79.
10. *Паршин Д.А.* Возведение тяжелой арочной конструкции с применением предварительно напряженных конструктивных элементов // XXXIII Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодежной научной конференции в 8 томах. Москва, 3–7 апреля 2007 г. М.: «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2007. Т. 1. С. 147–148.

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ НАРАЩИВАЕМЫХ ТЕЛ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАССОВЫХ СИЛ**

Паршин Дмитрий Александрович

Подписано в печать 16.04.07. Заказ № 6-2007. Тираж 70 экз.

Отпечатано на ризографе
Института проблем механики Российской академии наук
119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1