

На правах рукописи

Сорокин Константин Сергеевич

**Динамика змееподобных и вибрационных  
роботов**

01.02.01 – Теоретическая механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в Московском физико-техническом институте (Государственном университете) на кафедре механики и процессов управления (базовая кафедра ИПМех РАН).

Научный руководитель: академик РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор Черноусько Феликс Леонидович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Мартыненко Юрий Григорьевич

доктор физико-математических наук,  
Ковалева Агнесса Соломоновна

Ведущая организация: Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Защита состоится 21 января 2010 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при Учреждении Российской академии наук Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, расположенном по адресу: 119526, Москва, пр. Вернадского, д. 101, корп. 1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан 17 декабря 2009 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета

Д 002.240.01 при ИПМех РАН,

кандидат физико-математических наук

Сысоева Е. Я.

## Общая характеристика работы

Диссертация посвящена изучению динамики змееподобных и вибрационных роботов. Исследовалась динамика движения по шероховатой поверхности трёхзвенного мобильного робота, способного перемещаться за счёт изменения своей геометрической конфигурации, а также вибрационных роботов, которые приводятся в движение внутренними дебалансными вибровозбудителями. Между роботами и поверхностью, по которой они перемещаются, действует сухое кулоновское трение.

**Актуальность работы.** Интерес исследователей к динамике мобильных роботов, использующих способы перемещения, отличные от традиционного движения на колёсах или гусеницах, обусловлен расширением круга задач, которые ставятся перед ними. В узких щелях, трубах, при движении по пересечённой местности могут найти применение змееподобные роботы. Для перемещения в сложных (вязких, сыпучих) средах целесообразно применение вибрационных роботов. Вибророботы не нуждаются во внешних движителях, их можно конструктивно выполнять в виде запаянных капсул, и потому они могут быть очень устойчивыми к агрессивному воздействию внешней среды.

Специалистов в области механики и биомеханики давно интересовал способ перемещения змей и других животных, не имеющих конечностей и передвигающихся только за счёт изменения геометрической конфигурации, сохраняя при этом постоянный контакт тела с подстилающей поверхностью. В работах М. А. Лаврентьева и М. М. Лаврентьева<sup>1</sup> рассматривались движения змей в изогнутых трубах. Змееподобные движения при наличии препятствий исследовались в работах S. Hirose<sup>2</sup>, а также J. W. Burdick и G. S. Chirikjan, которые, кроме того, сконструировали и исследовали многозвенный змееподобный неголономный робот<sup>3</sup>. Большой вклад в исследование многозвенных змееподобных механизмов внёс Ф. Л. Черноусько, предложивший способы квазистатического перемещения многозвенников на плоскости с количе-

---

<sup>1</sup> Лаврентьев М. А., Лаврентьев М. М. Об одном принципе создания тяговой силы движения // Журнал прикладной механики и технической физики. 1962. N 4. Стр. 3-9.

<sup>2</sup> Hirose S. Biologically Inspired Robots: Snake-like Locomotors and Manipulators // Oxford: Oxford Univ. Press, 1993. 220 p.

<sup>3</sup> Burdick J. W., Radford J., Chirikjan G. S. A "sidewinding" locomotion gait for hyper-redundant robots // Proc. 1993 IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation. Atlanta, 1993. Vol. 3. P. 101-106.

ством звеньев, большим трёх<sup>4</sup>, а также разработавший способы перемещения двух- и трёхзвенников с помощью сочетания быстрых и медленных фаз движения. Исследования многозвенников на плоскости также развивались в работах А. С. Смышляева, Т. Ю. Фигуриной, J. Gray, A. Morishima и других.

К другому типу роботов — классу вибрационных роботов — можно отнести механизмы, состоящие из корпуса и внутренних подвижных масс, управляя перемещением которых можно управлять реакцией внешней среды на корпус механизма, обеспечивая его движение в требуемом направлении. Существенный вклад в исследование динамики такого рода механизмов внесли Н. Н. Болотник, И. М. Зейдис, Т. Ю. Фигурина, Ф. Л. Черноусько, К. Циммерманн, С. Ф. Яцун, А. Fidlin, К. Furuta, Н. Li, J. J. Thomsen и многие другие. Ф. Л. Черноусько исследовал динамику прямолинейного движения по горизонтальной поверхности тела с подвижной внутренней массой, перемещающейся вдоль прямой, параллельной линии движения тела, построил<sup>5</sup> периодические режимы управления движением внутренней массы, им найдены оптимальные параметры этих режимов, при которых средняя скорость корпуса максимальна. Динамика вибрационного робота, перемещение которого по горизонтальной плоскости возбуждается гармоническим движением внутренних тел в горизонтальном и вертикальном направлениях с одинаковой частотой, но со сдвигом фаз, исследована Н. Н. Болотником, И. М. Зейдисом, К. Циммерманном и С. Ф. Яцуном<sup>6</sup>. Они показали, что управляя сдвигом фаз и частотой колебаний внутренних тел, можно управлять средней скоростью корпуса механизма по направлению и величине.

**Цель диссертационной работы** состоит в исследовании динамики змееподобных трёхзвенных механизмов и вибрационных роботов с одним или тремя дебалансными вибровозбудителями путём создания математических моделей таких роботов, их натуральных образцов, проведения с последними экспериментов для верификации и уточнения применяемых математических моделей.

---

<sup>4</sup> Черноусько Ф. Л. Волнообразные движения многозвенника по горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика. 2000. Т.64, Вып. 4 С. 518–531.

<sup>5</sup> Черноусько Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70. С. 915–941.

<sup>6</sup> Болотник Н. Н., Зейдис И. М., Циммерманн К., Яцун С. Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. №5. С. 157–167.

**Методы исследования.** В диссертации используются методы теоретической механики, метод осреднения уравнений движения, численные методы, экспериментальные методы механики.

**Научная новизна** диссертации заключается в следующем:

Автором проведено экспериментальное исследование трёхзвенных мобильных роботов, принцип движения которых основан на чередовании быстрых и медленных фаз. Исследована зависимость перемещения робота за цикл элементарных движений от максимального угла отклонения боковых звеньев по отношению к корпусу, от отношения масс концевых узлов к массам центральных узлов, от отношения длин концевых звеньев к длине корпуса. Выяснилось, что экспериментальные данные для движений трёхзвенника довольно сильно отличаются количественно, а в некоторых опытах и качественно от теоретических расчетов по идеальной модели, в которой быстрая фаза предполагалась мгновенной. С целью выяснения, что играет ключевую роль в этих расхождениях, автором диссертации проинтегрированы уравнения движения трёхзвенника в поперечном направлении без использования предположения о пренебрежимой малости влияния сил трения в быстрой фазе. Численное моделирование показало хорошее количественное и качественное согласие с экспериментом. Таким образом, доказано, что основной вклад в рассогласование теории и эксперимента вносит сила трения, действием которой нельзя пренебрегать при той длительности быстрых фаз, которую удалось достичь в эксперименте.

Разработан способ перемещений трёхзвенного мобильного робота с последовательным соединением звеньев по шероховатой поверхности, используя только медленные фазы (квазистатические перемещения). Доказано, что предложенная схема в принципе осуществима, и приведены выражения для определения параметров механизма, при которых данная схема движений возможна.

Рассмотрена задача о движении робота с двумя внутренними массами, колеблющимися по гармоническому закону, по наклонной плоскости при малом трении. Доказано, что движение вверх по наклонной плоскости осуществимо и приведены условия, когда это возможно. Исследованы зависимости скорости движения от частоты и фаз колебаний внутренних масс, угла наклона и других параметров.

Проведена серия экспериментов с моделью вибрационного робота с дебалансным вибровозбудителем. Установлено, что зависимость скорости движения от частоты вращения ротора качественно совпадает в эксперименте и в теоретической модели, использующей метод осреднения уравнений движения. Исследовано движение натурной модели вибрационного робота, использующего для перемещения вибровозбудитель, действующий под углом к подстилающей поверхности. Получены зависимости скорости такого механизма от частоты вращения роторов вибровозбудителя и угла наклона его линии действия к поверхности.

**Практическая значимость** полученных результатов главным образом состоит в проработке способов перемещений змееподобных и вибрационных роботов, о преимуществах которых по сравнению с традиционными способами движения говорилось выше. Автором диссертации разработан способ перемещения трёхзвенника с использованием только медленных движений, это позволяет снизить требования к двигателям и системе управления робота, упростить его конструкцию. Изучение модели вибрационного робота при движении по наклонной плоскости позволило доказать, что робот, использующий внутренние гармонически осциллирующие массы, способен перемещаться вверх по наклонной шероховатой поверхности. В диссертации приведены критерии для определения, возможно ли движение механизма вверх, выведены формулы для оценки скорости такого перемещения.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались автором на VII всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» в ННГУ им. Н. И. Лобачевского в 2005 г.; на XLVIII научной конференции МФТИ(ГУ) в 2005 г.; на IX всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике в ННГУ им. Н. И. Лобачевского в 2006 г.; на международной конференции «Управление динамическими системами» в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН в 2009 г.; на 52-й научной конференции МФТИ(ГУ) в 2009 г.; на семинаре «Теория управления и динамика систем» Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН в июле 2009 г.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 4 статьи в реферируемых журналах из перечня ВАК [1–4] и 4 публикации в сборниках трудов конференций.

**Личный вклад автора** заключается в самостоятельном получении всех результатов диссертации, за исключением экспериментальных исследований, проведённых совместно с Н. А. Соболевым. Основные результаты диссертации являются новыми, и они опубликованы.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 2 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 97 страниц. Библиографический список содержит 33 наименования.

## Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность рассматриваемой задачи, даётся обзор литературы по теме диссертации, формулируется цель работы, в сжатом виде излагается содержание всех глав.

**Первая глава** диссертации посвящена исследованию динамики трёхзвенного шарнирного механизма, способного передвигаться по плоской горизонтальной поверхности за счёт изменения геометрической конфигурации. Глава состоит из шести разделов.

**В разделах 1.1–1.3** представлена механическая модель трёхзвенника и описывается принцип движения на основе чередования быстрых и медленных фаз, разработанный Ф. Л. Черноусько<sup>7</sup>, приводятся некоторые результаты его работ.

Движения трёхзвенника строятся как комбинации более простых движений, которые называются элементарными. Элементарные движения начинаются из состояния покоя и заканчиваются также в состоянии покоя. Они бывают двух видов: быстрые и медленные. Во время медленных движений корпус механизма неподвижен, а одно или два боковых звена движутся, изменяя положение центра масс. Во время быстрых движений полагается, что моменты сил трения существенно меньше управляющих моментов двигателей, поэтому влиянием сил трения можно пренебречь. Центр масс робота в этом случае остаётся в покое, а корпус движется. В работах Ф. Л. Черноусько показано, что робот может перейти из любого заданного положения на плоскости в другое требуемое положение, если использовать следующие три вида

---

<sup>7</sup> Черноусько Ф. Л. О движении трёхзвенника по горизонтальной плоскости // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, Вып. 4 С. 15–20.

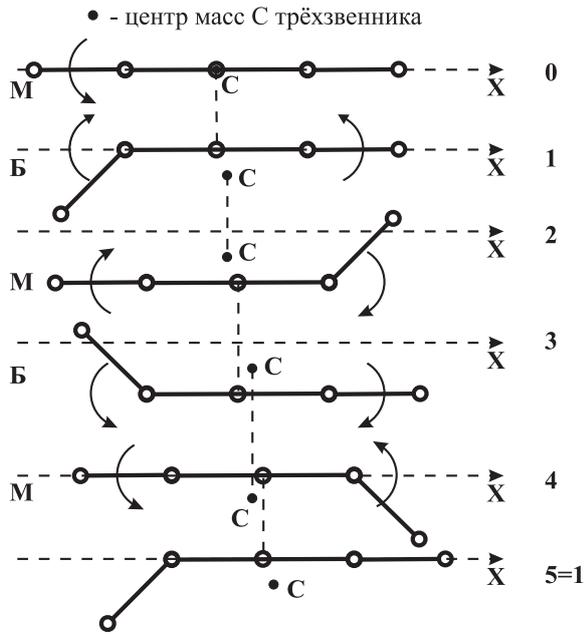


Рис. 1. Продольное движение

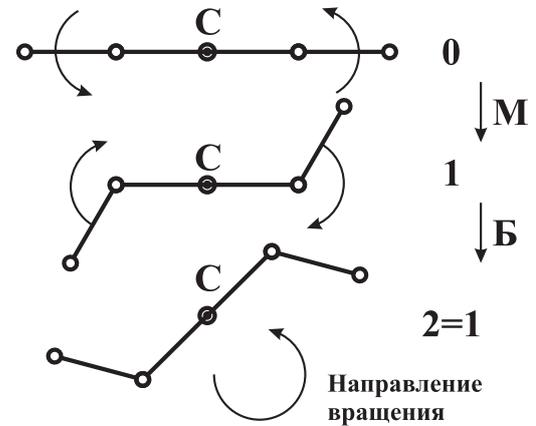


Рис. 2. Поворот на месте

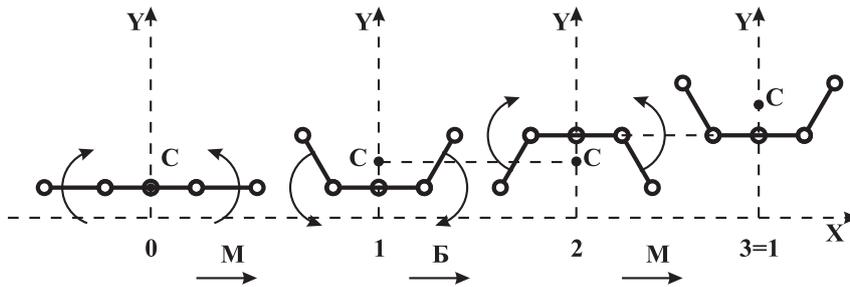


Рис. 3. Боковое (поперечное) движение

движений, составленных из набора элементарных: продольное (рис. 1), вращение на месте (рис. 2), боковое (рис. 3). На рисунках введены обозначения: М — медленное движение, Б — быстрое, а • — центр масс С трёхзвенника.

**В разделе 1.4** изложены результаты экспериментального исследования трёхзвенного робота (рис. 4), реализующего указанный выше принцип движения.

Получены зависимости перемещения робота за цикл элементарных движений от максимального угла отклонения боковых звеньев от корпуса (амплитуды отклонения), отношения масс концевых звеньев к центральным, отношения длины боковых звеньев к длине корпуса (рис. 5, 6, 7). Буквами «Г», «Э» обозначены соответственно, результаты рассмотрения идеальной

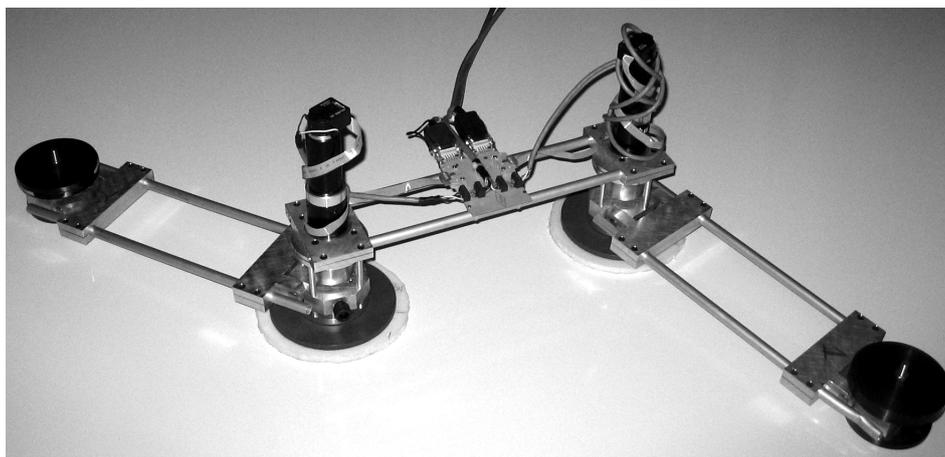


Рис. 4. Трёхзвенный ползающий робот

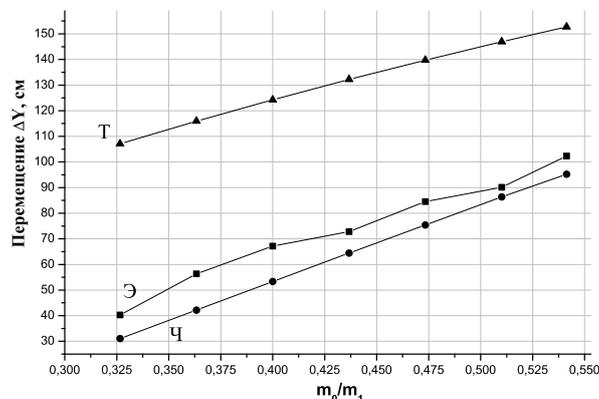
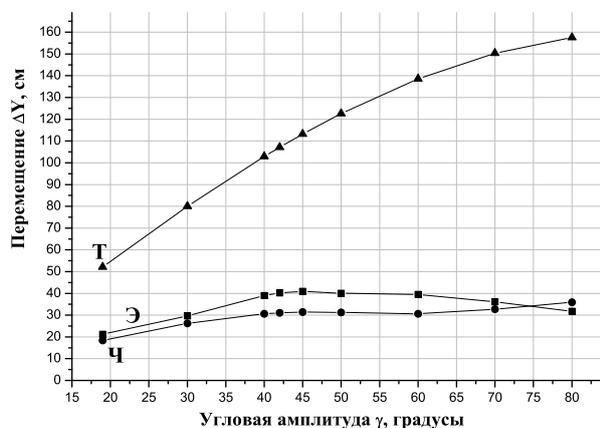


Рис. 5. Зависимость перемещения от максимального угла отклонения боковых звеньев

теоретической модели и экспериментальные данные. Для каждого измерения выполнялось по 10 циклов движений. Для каждой измеряемой точки проводилось по пять экспериментов. Перемещение  $\Delta Y = 10\Delta y$  вычислялось, как средняя величина результатов, полученных в пяти экспериментах. Для наглядности укажем, что длина корпуса робота составляла 32.5 см.

Рис. 6. Зависимость перемещения от отношения масс концевых и центральных узлов

Из рисунков видно, что экспериментальные данные существенно отличаются от результатов рассмотрения простой механической модели количественно и в некоторых случаях качественно. Однако возможность использования концепции быстрых и медленных фаз для реальных роботов была успешно подтверждена. В разделе 1.5 предпринята попытка определить причину

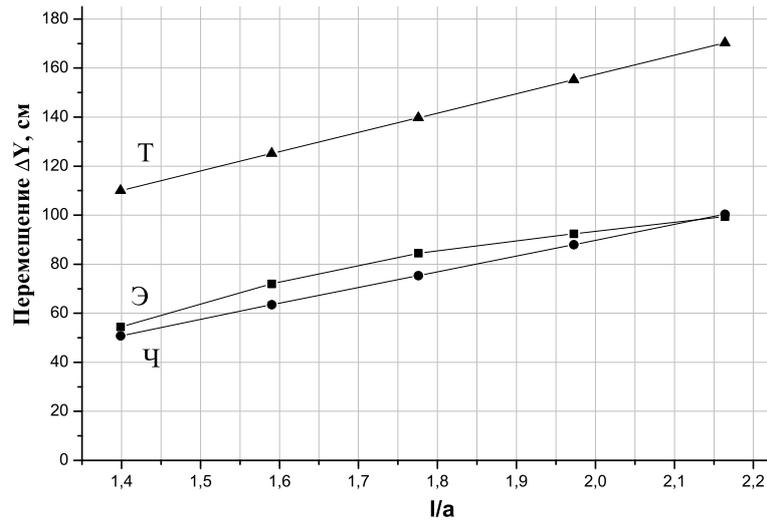


Рис. 7. Зависимость перемещения от отношения длин концевых звеньев к корпусу

рассогласованности теории и эксперимента. Для этого было выполнено численное моделирование поперечного движения трёхзвенника. Его результаты изображены на рис. 5, 6, 7 (обозначены буквой «Ч»). Таким образом, показано, что основным источником расхождений является влияние силы трения на движение робота в быстрых фазах. Мощность управляющих двигателей оказалась недостаточной, чтобы обеспечить очень малую длительность быстрых фаз, поэтому введённая в первой части концепция оказалась ограниченно применимой для данного конкретного трёхзвенного робота. Дополнительным результатом явилось создание модели для численных расчётов, которая показывает очень хорошую согласованность с экспериментом, поэтому её целесообразно использовать при проектировании роботов, снижая риски ошибок конструирования.

**Раздел 1.6** посвящен исследованию квазистатического перемещения трёхзвенного робота с последовательным соединением звеньев на горизонтальной плоскости. Преимущество только медленных движений перед сочетанием быстрых и медленных фаз заключается в возможности значительного снижения требований к мощности управляющих двигателей, а также к системе управления механизмом. Выше было показано, что эти требования достаточно высоки, поэтому разработка способов движения с использованием

только медленных фаз диктуется прежде всего практическими соображениями при конструировании роботов.

Рассмотрим механическую модель трехзвенника (рис. 8), представленную четырьмя точечными массами, соединёнными тремя невесомыми, абсолютно твёрдыми стержнями  $C_1O_1$ ,  $O_1O_2$ ,  $C_1O_1$ ,  $C_2O_2$ . Звено  $O_1O_2$  является центральным (корпус), а звенья  $C_1O_1$  и  $C_2O_2$  — концевыми или боковыми. В узлах  $O_1$  и  $O_2$  расположены управляющие двигатели. Направим ось  $OX$  вдоль корпуса, а ось  $OY$  — перпендикулярно ему. Начало координат разместим в точке  $O_1$ . Углы между звеньями  $C_iO_i$  и корпусом отмеряются по часовой стрелке от оси  $OY$  и равны  $\alpha_i$ , где  $i = 1, 2$ . Длину корпуса обозначим через  $b$ , а длины боковых звеньев — через  $l$ . Массы центральных узлов  $O_1$  и  $O_2$  равны  $m_0$ , а концевых —  $m_1$ .

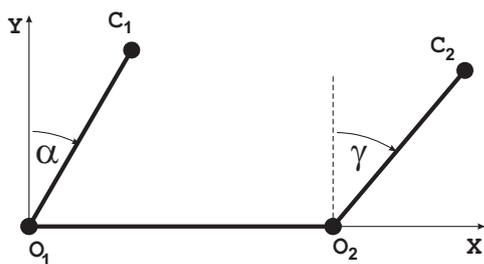


Рис. 8. Схема трехзвенника

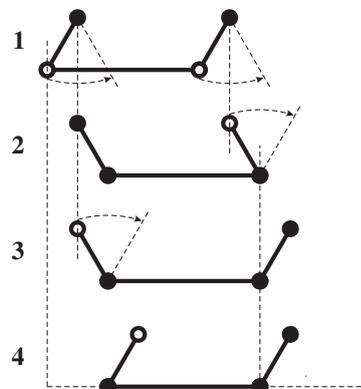


Рис. 9. Квазистатические движения трехзвенника

Исходным состоянием трёхзвенника в нашем случае является положение, при котором углы  $\alpha_i$  равны некоторому максимальному значению  $\gamma$ , причем  $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ . Предлагаемая схема квазистатического движения трехзвенника (рис. 9) может быть разделена на основные фазы:

1. перемещение корпуса (переход из положения 1 в 2);
2. вращение бокового звена  $O_2C_2$  по часовой стрелке (переход из положения 2 в 3);
3. вращение бокового звена  $O_1C_1$  по часовой стрелке (переход из положения 3 в 4, причём состояние 4 эквивалентно состоянию 1).

Фаза 1 предполагается состоящей из одного простого движения, когда уг-

лы  $\alpha_i$  изменяются синхронно от  $\gamma$  до  $-\gamma$ , точки  $O_1$  и  $O_2$  движутся, а  $C_1$  и  $C_2$  остаются в покое. В фазе 2 звено  $C_2O_2$  меняет угол наклона по отношению к корпусу от  $-\gamma$  до  $\gamma$ , а в фазе 3 так же движется звено  $C_1O_1$ . В работе изучаются только квазистатические движения трёхзвенника, поэтому все перемещения считаются достаточно медленными.

Основная задача заключается в определении параметров трехзвенного механизма, при которых движение осуществимо по предложенной кинематической схеме. Если оно невозможно ни при каких параметрах механизма, тогда такая кинематическая схема является неработоспособной.

Выписывая уравнения равновесия трёхзвенника отдельно для каждой из трёх фаз движения и дополняя их неравенствами, ограничивающими максимальные компоненты сил трения в неподвижных точках, после перехода к безразмерным переменным можно получить следующие неравенства:

$$2\xi \cos \alpha \leq \sqrt{1 - \xi^2(2\mu + \sin \alpha)^2} + \sqrt{1 - \xi^2(2\mu - \sin \alpha)^2}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ z^2 + (x\mu \cos \gamma - (1 + \mu \sin \gamma)y + \mu)^2 \leq \xi^2, \\ (x + z - \cos \alpha)^2 + (x\mu \cos \gamma - y\mu \sin \gamma + \mu + \sin \alpha)^2 \leq \xi^2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi = \frac{F_O}{F_C}, \quad \mu = \frac{l}{b}, \quad x = \frac{X_3}{F_C}, \quad y = \frac{Y_3}{F_C}, \quad z = -\left(\frac{X_3}{F_C} + \frac{X_2}{F_C} - \cos \alpha\right), \quad (3)$$

где  $F_C$  — максимальная сила сухого трения в концевых точках  $C_1$  и  $C_2$  трёхзвенника;  $X_2$  — компонента силы трения в точке  $O_2$ , а  $X_3$  и  $Y_3$  — в точке  $C_2$ .

Для того, чтобы доказать, что предложенная кинематическая схема осуществима, и определить условия, когда это имеет место, надо найти числа  $\xi, \mu, \gamma$ , такие, что для любого  $\alpha$  из диапазона  $[-\gamma, \gamma]$  выполняется неравенство (1), и существуют такие  $x, y, z$ , что все неравенства системы (2) справедливы. Решение неравенств (1) и (2), подробности которого здесь опускаются, позволяет определить область в пространстве параметров  $\xi, \mu, \gamma$ , внутри которой предложенная кинематическая схема осуществима. На рис. 10 показаны три области:  $f, h$  и  $k$ , внутри которых для каждой пары  $\xi, \mu$  найдётся угол  $\gamma > 0$  такой, что движение в квазистатическом режиме осуществимо.

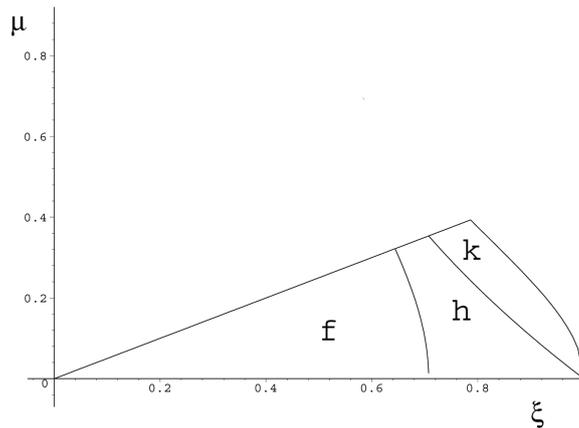


Рис. 10. Области существования решений неравенств (1) и (2)

Результаты первой главы опубликованы в работах [1, 3, 5–7].

**Вторая глава** диссертации посвящена исследованию динамики вибрационных роботов, перемещающихся за счёт движения внутренних масс.

**В разделах 2.1 – 2.5** продолжено изучение модели вибрационного робота, внутренние массы которого движутся по гармоническому закону во взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковой частотой, но со сдвигом фаз. Ранее такая модель робота, перемещающегося по горизонтальной плоскости, рассматривалась Н. Н. Болотником, И. М. Зейдисом, К. Циммерманном и С. Ф. Яцуном<sup>8</sup>. Отличие работы диссертанта заключается в изучении движения виброробота по наклонной плоскости.

Вибрационный робот состоит из несущего тела (корпуса) и внутренних тел, которые взаимодействуют с корпусом и могут перемещаться относительно последнего. Между корпусом и плоскостью опоры действуют силы сухого (кулоновского) и линейного вязкого трения. Введём в вертикальной плоскости две правые прямоугольные системы координат — неподвижную (инерциальную) систему координат  $Oxy$  и систему координат  $O'\xi\eta$ , жёстко связанную с корпусом. Оси  $x$  и  $\xi$  — направлены вдоль наклонной плоскости, а оси  $y$  и  $\eta$  направлены им перпендикулярно в верхнюю полуплоскость (рис. 11). Обозначим:  $x$  — абсцисса точки  $O'$  в системе координат  $Oxy$  (смещение корпуса относительно неподвижной системы отсчёта),  $\xi_i$  и  $\eta_i$  — координаты  $i$ -ого внутреннего тела в системе отсчёта  $O'\xi\eta$ ,  $m$  — масса корпуса,  $m_i$  — масса  $i$ -ого

<sup>8</sup> Болотник Н. Н., Зейдис И. М., Циммерманн К., Яцун С. Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5. С. 157–167.

внутреннего тела,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\alpha$  — угол наклона плоскости.

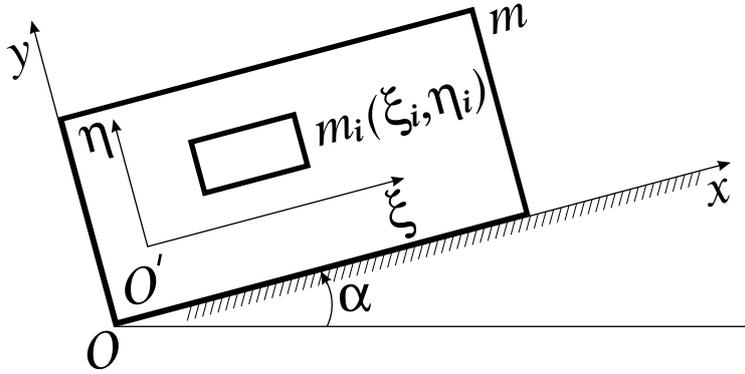


Рис. 11. Механическая модель виброробота

Будем считать, что приводы робота способны обеспечивать программное движение внутренних тел относительно корпуса, задаваемое функциями  $\xi_i(t)$  и  $\eta_i(t)$ . Рассмотрим важный частный случай, когда внутренние массы движутся так, что выполняются равенства

$$-\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\xi}_i = F_x \sin \omega t, \quad -\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\eta}_i = -F_y \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (4)$$

Например, такой случай имеет место быть при движении двух внутренних масс по гармоническому закону во взаимно перпендикулярных направлениях с одной частотой, но со сдвигом фаз. Перейдём к безразмерным переменным  $x^*, t^*$  и параметрам  $\varepsilon, \beta, \nu, \gamma$  по формулам

$$x^* = \frac{M\omega^2}{F_x} x, \quad t^* = \omega t, \quad \varepsilon = k \frac{Mg}{F_x}, \quad \beta = \frac{F_y}{Mg}, \quad \nu = \mu \frac{F_x}{kM^2 g \omega}, \quad \gamma = \frac{Mg}{F_x}, \quad (5)$$

где  $M$  — общая масса робота. Всюду далее будем считать, что  $\varepsilon \ll 1$ . Малость параметра  $\varepsilon$  свидетельствует об относительной малости величины силы сухого трения по сравнению с амплитудой «движущей» силы, действующей вдоль наклонной плоскости. Так как  $\varepsilon \ll 1$ , можно в первом приближении считать, что движение корпуса робота происходит без залипаний. С учётом этого уравнение движения корпуса в безразмерных переменных принимает вид (звёздочки, обозначающие безразмерные переменные, опущены)

$$\ddot{x} = \sin t - \varepsilon \nu \dot{x} - \gamma \sin \alpha - \varepsilon (\cos \alpha + \beta \sin(t + \varphi_0)) \operatorname{sign} \dot{x}, \quad \beta \leq \cos \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha \leq k \quad (6)$$

Из условия несоскальзывания  $\operatorname{tg} \alpha \leq k$  и определения  $\varepsilon$  следует, что  $\gamma \sin \alpha \leq \varepsilon$ . В дальнейшем будем рассматривать такие  $k$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$ , при которых  $\varepsilon \sim \gamma \sin \alpha$ , что позволит применить к уравнениям движения метод осреднения. Также введём допущение, что  $\varepsilon$  и  $\varepsilon\nu$  — суть величины одного порядка малости, то есть  $\nu \sim 1$ . Введём новую переменную  $u$ , связанную со скоростью  $\dot{x}$  следующим образом:

$$\dot{x} = -\cos t + u. \quad (7)$$

Подставляя это выражение в уравнение (6), получим уравнение для переменной  $u$  в стандартной форме, усреднив правую часть которого по переменной  $t$  на периоде  $2\pi$ , получим

$$\dot{u} = -\gamma \sin \alpha - \varepsilon \begin{cases} \nu u + 1, & \text{при } u > 1 \\ \nu u + \frac{2}{\pi}(\cos \alpha \arcsin u - \beta \sin \varphi_0 \sqrt{1 - u^2}), & \text{при } |u| \leq 1 \\ \nu u - 1, & \text{при } u < -1 \end{cases} \quad (8)$$

Найдём стационарные решения  $u = u_s$  уравнения (8), обращая его правую часть в нуль. При  $|u| > 1$  правая часть этого уравнения не обращается в нуль, следовательно, все возможные стационарные значения переменной  $u$  суть нули функции

$$P(u, \varphi_0, \beta, \nu, \alpha, k) = \sin \alpha + k \left[ \nu u + \frac{2}{\pi}(\cos \alpha \arcsin u - \beta \sin \varphi_0 \sqrt{1 - u^2}) \right], \quad (9)$$

рассматриваемой при фиксированных значениях параметров  $\varphi_0$ ,  $\beta$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  и  $k$ . В дальнейшем параметры, будут опускаться в списке аргументов для сокращения записи. Функция  $P(u)$  имеет нуль на отрезке  $[-1; 1]$  и притом единственный. Пусть  $u_s$  — искомый нуль функции (9). Величина  $u_s$  приблизительно равна средней скорости материальной точки в установившемся движении. Пользуясь теоремой о неявных функциях, можно исследовать зависимость величины  $u_s$  от параметров  $\beta$ ,  $\varphi_0$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  и  $k$ . Опуская подробности, приведём основные результаты такого исследования.

Без ограничения общности будем считать, что  $-\pi \leq \varphi_0 \leq \pi$ . Величина  $u_s$ , рассматриваемая, как функция параметра  $\varphi_0$ , убывает на интервалах  $-\pi \leq \varphi_0 \leq -\pi/2$  и  $\pi/2 \leq \varphi_0 \leq \pi$  и возрастает на интервале  $-\pi/2 \leq \varphi_0 \leq \pi/2$ . В точке  $\varphi_0 = -\pi/2$  величина  $u_s$  принимает минимальное значение, а в точке  $\varphi_0 = \pi/2$  — максимальное. В случае  $\sin \alpha < 2k\beta/\pi$

скорость становится положительной при некотором  $0 < \varphi_0 < \pi/2$ , а значит максимальная средняя скорость движения, достигаемая при  $\varphi_0 = \pi/2$ , также положительна, и корпус может перемещаться вверх по склону. Так как  $\beta \leq \cos \alpha$ , условие осуществимости движения вверх по наклонной запишется в виде

$$\operatorname{tg} \alpha < 2k/\pi. \quad (10)$$

Если это неравенство выполняется, то можно подобрать параметры робота так, что робот сможет перемещаться по наклонной плоскости вверх, при этом заведомо удовлетворяется условие несоскальзывания корпуса в покое  $\operatorname{tg} \alpha \leq k$ . Другим результатом является то, что величина  $u_s$ , рассматриваемая, как функция параметра  $\beta$ , убывает при  $-\pi \leq \varphi_0 \leq 0$  и возрастает при  $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$ . Поскольку  $0 \leq \beta \leq \cos \alpha$ , то при  $\beta = \cos \alpha$  достигается минимум величины  $u_s$ , если  $-\pi \leq \varphi_0 \leq 0$ , и максимум, если  $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$ . Также можно показать, что средняя скорость установившегося движения уменьшается при увеличении угла наклона плоскости, а её абсолютная величина уменьшается с увеличением коэффициента вязкого трения.

**В разделе 2.6** изложены результаты экспериментов с моделью вибрационного робота, имеющего один дебалансный вибровозбудитель (рис. 12). Целью экспериментов являлось более полное изучение рассматриваемого вида движения, проверка области применимости теоретического подхода, основанного на усреднении уравнений движения, изучение факторов, влияющих на параметры движения виброробота. Робот был собран из конструктора, что позволило значительно упростить и ускорить его сборку и последующие модификации конструкции. Робот состоит из корпуса (рамы на лыжных опорах), внутри которого на одной горизонтальной оси, расположенной перпендикулярно направлению движения, находится пара колёс, между которыми крепится груз. Этот груз закреплён на некотором удалении от оси вращения колёс, образуя совместно с ними ротор со смещённым центром масс. Колёса приводятся в движение парой электродвигателей. Коэффициент сухого трения скольжения для данного робота был равен 0.37. Помимо эксперимента с роботом выполнялось его численное моделирование без допущений о малости трения. В ходе опытов была измерена средняя скорость движения для четырёх частот вращения ротора со смещённым центром масс. Для этих значений выполнены расчёты на основе метода усреднения движения, численное ин-

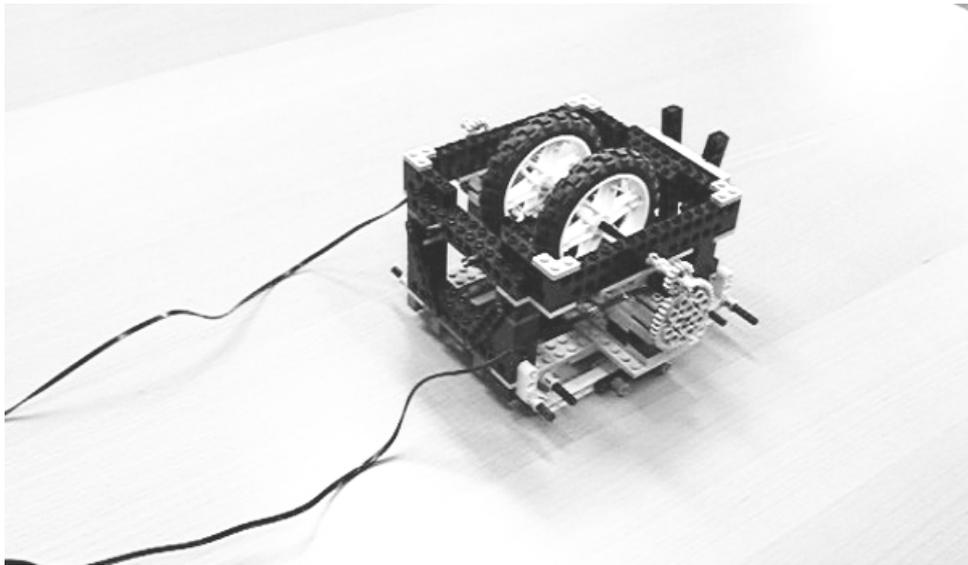


Рис. 12. Виброробот с одним дебалансным вибровозбудителем

тегрирование уравнений движения и проведены опыты с натурной моделью (рис. 13). Кривая, обозначенная  $V_A$ , представляет зависимость средней скорости от частоты вращения ротора, вычисленной с помощью метода усреднения при малом трении; кривая  $V_E$  экспериментальная, а  $V_C$  — результат численного интегрирования уравнений движения робота. По графикам на рис. 13

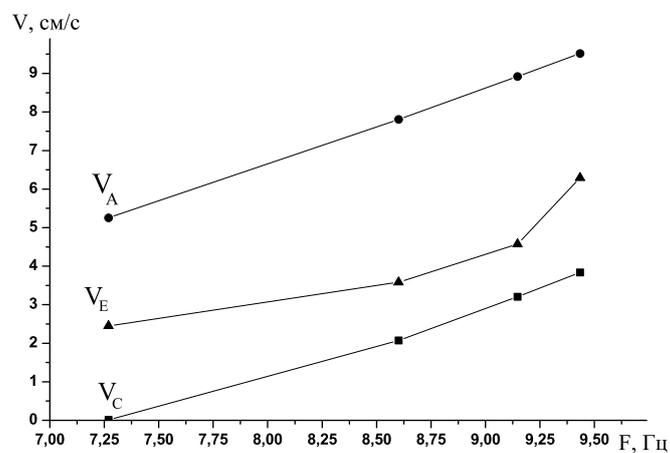


Рис. 13. Зависимость средней скорости движения от частоты возбуждающей силы

видно, что максимальные средние скорости получаются при расчёте с помощью метода усреднения для малых коэффициентов трения. Затем идёт результат экспериментов, а численное интегрирование выдало самые низкие

результаты, сильно отличающиеся от предыдущих двух. Автор диссертации считает, что это явление объясняется тем, что простая механическая модель робота не учитывала некоторые особенности реального механизма. Так, не учитывается конечность габаритов робота. В эксперименте виброробот при больших частотах вращения дебалансного вибровозбудителя отрывается то передней, то задней частью корпуса от поверхности. Другой фактор — реальное трение не является идеальным кулоновским. Также влияние оказала гибкость оси, к которой крепился дебалансный вибровозбудитель. При быстром вращении силы инерции изгибали эту ось, увеличивая реальное расстояние центра масс грузика вибровозбудителя от оси вращения. Подводя итоги, следует отметить, что для приблизительных оценок параметров движения при малых частотах вращения ротора лучше использовать расчёт на основе осреднения уравнений движения, чем численное моделирование, не учитывающее указанные выше факторы.

**В разделе 2.7** изложены результаты экспериментов с вибрационным роботом с тремя дебалансными вибровозбудителями, два из которых вращаются в сторону, противоположную направлению вращения находящегося точно посередине между ними третьего (рис. 14). Все они имеют идентичную конструкцию в виде ротора со смещённым центром масс и отличаются только тем, что масса среднего ротора равна удвоенной массе боковых. Эти эксцентрики вращаются с определённой и равной по модулю для всех них частотой  $\omega$ . Сдвиг фаз между вращающимися боковыми вибровозбудителями нулевой. Такое движение эквивалентно гармоническому колебанию материальной точки вдоль наклонной прямой. Механизм, движущийся за счёт этого, принципиально отличается от рассмотренного в предыдущем разделе тем, что при реверсе вращения роторов направление движения корпуса не меняется — корпус движется в ту сторону, в которой угол наклона линии колебания материальной точки  $\gamma$  составляет острый угол с плоскостью. Отметим, что при попытке применить к данной модели робота описанный выше метод осреднения уравнений движения при малом трении приведёт к получению нулевой средней скорости движения. Таким образом, такой робот нуждается в больших силах трения для перемещения. Ещё одно отличие этой модели от однороторного вибрационного робота заключается в том, что можно регулировать скорость, а также максимальное нормальное давление углом наклона

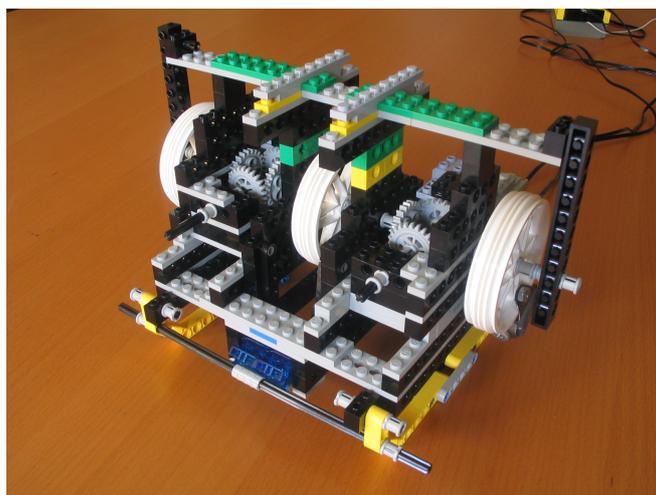


Рис. 14. Виброробот с тремя дебалансными вибровозбудителями

линии действия составного вибровозбудителя даже при фиксированной частоте.

Конструктивно робот представляет собой раму на двух лыжных опорах. Внутри рамы крепятся три соосных дебалансных вибровозбудителя, приводимые в движение двумя электродвигателями. Каждый из вибровозбудителей собран из лёгкого колеса, на ободе которого зафиксирован свинцовый грузик. Грузики на боковых роторах позиционируются идентично, а сами роторы вращаются синхронно. Используемая механическая схема позволяет жёстко фиксировать сдвиг фаз между вращением боковых грузиков и центрального, который вращается в противоположную им сторону. Таким образом, в начальный момент времени можно выставлять требуемый угол наклона  $\gamma$ . Коэффициент трения лыж о подстилающую поверхность составляет 0.30.

С этим вибророботом была проведена серия экспериментов. Измерялась средняя скорость движения в зависимости от частоты вращения роторов и угла наклона  $\gamma$  линии колебаний их центра масс. Результаты экспериментов представлены на трехмерном графике (рис. 15), из которого видно, что при углах наклона  $\gamma$ , равных 0 и  $\pi/2$ , средняя скорость составляла ноль при любой частоте. Средняя скорость виброробота монотонно возрастает при увеличении частоты для всех остальных углов. Виброробот достигает максимума средней скорости при угле наклона  $\gamma$ , примерно равном  $60^\circ$ . Для сравнения экспериментальных и численных расчетов приведены двумерные графики зависимости средней скорости виброробота от частоты вращения роторов при

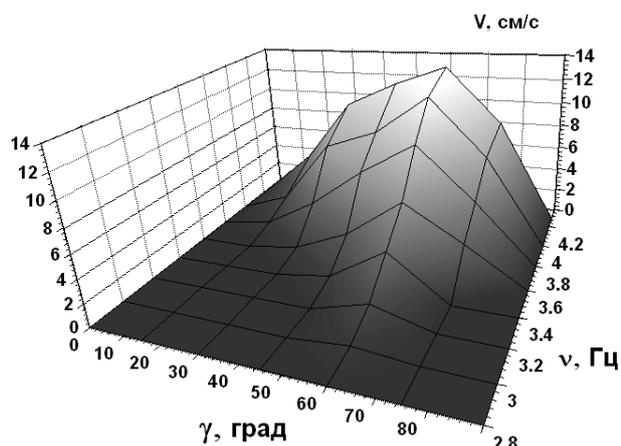


Рис. 15. Средняя скорость виброробота в зависимости от частоты вращения роторов и угла наклона плоскости колебаний их центра масс. углах 30 и 60° (рис. 16).

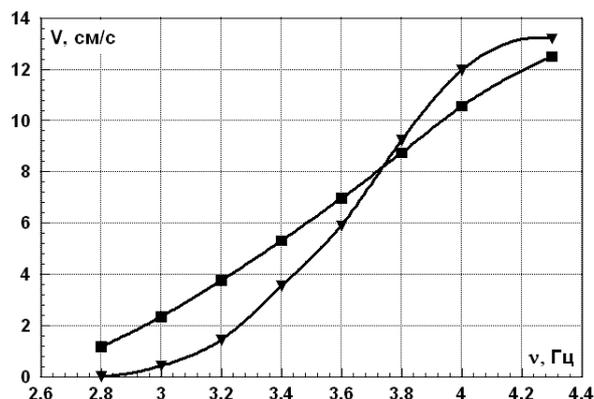


Рис. 16. Средняя скорость виброробота с тремя дебалансными вибровозбудителями в зависимости от частоты вращения роторов при  $\gamma = 60^\circ$ .

Результаты второй главы опубликованы в работах [2, 4, 8].

### Основные результаты, выносимые на защиту

1. Проведена серия экспериментов с трёхзвенным змееподобным роботом, реализующим принцип движения на основе сочетания быстрых и медленных фаз. Измерена зависимость скорости движения от параметров робота. Полученные результаты сопоставлены с теоретическими. Оценен вклад сил трения в рассогласование экспериментальных данных и результатов рассмотрения простой теоретической модели.

2. Предложен способ квазистатического перемещения трёхзвенника с последовательным соединением звеньев на плоскости с трением.

3. Исследована динамика вибрационного робота, перемещающегося за счёт движения внутренних осциллирующих масс по наклонной плоскости. Приведены условия осуществимости движения вверх по наклонной поверхности.

4. Проведены эксперименты с моделями вибрационных роботов с одним и тремя дебалансными вибровозбудителями. Измерена зависимость скорости перемещения от частоты вращения роторов вибровозбудителей.

## Публикации по теме диссертации

1. *Соболев Н. А., Сорокин К. С.* Экспериментальное исследование змееподобных движений трехзвенного механизма // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5 С. 168–176.
2. *Соболев Н. А., Сорокин К. С.* Экспериментальное исследование модели виброробота с вращающимися массами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 5 С. 161–170.
3. *Сорокин К. С.* Управление перемещением трехзвенника на плоскости с трением // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3 С. 165–176.
4. *Сорокин К. С.* Перемещение механизма по наклонной шероховатой плоскости за счёт движения внутренних осциллирующих масс // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6 С. 150–158.
5. *Сорокин К. С., Соболев Н. А., Черноусько Ф. Л.* Движение многозвенников при наличии сил сухого трения // Труды VII всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем», ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, 19–22 сентября 2005 г. С. 203.
6. *Сорокин К. С., Соболев Н. А.* Экспериментальное исследование трёхзвенного ползающего робота на плоскости с трением // Труды XLVIII научной конференции МФТИ(ГУ), Долгопрудный-Москва, 25–26 ноября 2005 г. Ч. 3. С. 231.
7. *Сорокин К. С.* Квазистатическое перемещение трёхзвенника на плоскости с трением // Тезисы докладов международной конференции «Управление динамическими системами», Москва, 26–30 января 2009 г. С. 82.
8. *Сорокин К. С.* Перемещение механизма по наклонной шероховатой плоскости за счёт движения внутренних осциллирующих масс // Труды 52-й научной конференции МФТИ(ГУ), Долгопрудный-Москва, 25–26 ноября 2005 г. Ч. 3. Т 1. С. 168–171.

**Сорокин Константин Сергеевич**

Динамика змееподобных и вибрационных роботов

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 15.12.2009. Заказ № 37 – 2009 г. Тираж 80 экз.

---

Отпечатано на ризографе, ИПМех РАН  
119526 Москва, проспект Вернадского, д. 101, к. 1.