На правах рукописи

Розенблат Григорий Маркович

Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела

01.02.01 Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена в Московском государственном автомобильно-дорожном техническом университете (МАДИ)

Официальные оппоненты: **доктор физико-математических наук, профессор**
Самсонов Виталий Александрович;
доктор физико-математических наук, профессор
Кобрин Александр Исаакович;
доктор физико-математических наук
Болотник Николай Николаевич.

Ведущая организация: Институт машиноведения имени А.А.Благонравова РАН.

Защита диссертации состоится «02» июня 2011 г. в 15-00 час. на заседании диссертационного совета Д002.240.01 при Институте проблем механики имени А.Ю.Ишлинского Российской академии наук по адресу: 119526, г. Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем механики имени А.Ю.Ишлинского Российской академии наук.

Автореферат разослан

Ученый секретарь диссертационного совета
Д002.240.01 при ИПМех РАН, к.ф.-м.н. **Сысоева Е.Я.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию и решению задач о равновесии и движении твёрдого тела, контактирующего односторонним образом с шероховатой плоскостью по законам сухого (кулонова) трения.

а) Задачи о равновесии твёрдого тела при таких условиях возникают при проектировании робототехнических устройств, которые в процессе своего движения опираются о шероховатую плоскость.

Кроме того, разработка методов исследования задач о равновесии твёрдого тела при наличии сухого трения предоставляется важной частью при решении более сложной задачи о равновесии системы (связанных) твёрдых тел в условиях опирания с сухим трением. Наконец, строгое и полное решение таких задач представляется важным и актуальным в настоящее время при преподавании курсов теоретической механики в вузах (а также в школах, при прохождении соответствующих разделов физики).

б) Задачи о движении твёрдого тела в условиях одностороннего контакта с опорной поверхностью по законам сухого трения являются актуальными при исследовании динамики движения автомобиля или простейших роботизированных тележек. Качественное и аналитическое решение таких задач может являться необходимым подспорьем при расследовании дорожно-транспортных происшествий органами Государственной инспекции по безопасности дорожного движения (ГИБДД).

Цель работы. Основываясь на классических моделях сухого трения, восходящих к Г. Амонтону и Ш. Кулону, и не выходя за рамки механики абсолютно твёрдого тела, дать аналитические формулы, выражающие необходимые и достаточные условия равновесия твёрдого тела, опирающегося на шероховатую плоскость. При исследовании динамики движения твёрдого тела по плоскости с сухим трением в диссертации преследуются три цели.

Первая — при изучении движения плоских твёрдых тел решается задача точного интегрирования уравнений движения (в частных случаях) и задача качественного исследования характера движения (в общем случае).

Вторая— при изучении движения твёрдого тела по гладкой или абсолютно шероховатой плоскостям определяются области начальных условий, соответствующие его безотрывным движениям (в частных интегрируемых случаях).

Третья— при исследовании переходов движения тела от чистого качения к качению со скольжением (и наоборот) дать условия и сценарий, свободные от парадоксальных ситуаций (типа «парадоксов Пенлеве»).

Методика исследования. В диссертации при решении задач о равновесии твёрдого тела при наличии сухого трения используется метод сил трения покоя, истоки которого были заложены в трактате Джеллетта «The theory of friction». Ранее использовался метод предельного равновесия («начало» движения), который восходит к Н.Н.Шиллеру, Н.Е. Жуковскому, Джеллетту, Раусу, а затем был развит в работах Ф.Л.Черноусько, П.Е.Товстика, И.И.Аргатова, Н.Н.Дмитриева, А.П.Иванова и др.

В диссертации метод сил трения покоя активно используется при решении задачи о равновесии твёрдого тела на плоскости с сухим анизотропным трением. В конечном итоге этот метод приводит к решению задачи выпуклого квадратичного программирования.

Методика исследования задач о движении твёрдого тела по шероховатой плоскости является достаточно традиционной и заключается в явном исследовании и интегрировании (если это возможно) соответствующих дифференциальных уравнений движения тела. Кроме того, (если это возможно аналитически) производится явное вычисление сил реакций (нормальной и тангенциальной), что является завершающим и важным этапом решения исходной задачи о движении твёрдого тела.

В качестве моделей опорной плоскости используются следующие:

1) Модель абсолютно гладкой плоскости (Аппель, Пуассон, Курно и т.д., подробную библиографию см. в книге А. П. Маркеев «Динамика твёрдого тела, соприкасающегося с твёрдой поверхностью», М., Наука, Физматлит, 1992, 335 с).

2) Модель абсолютно шероховатой плоскости, т. е. неголономная модель (скорость точки контакта равна нулю). Эта модель восходит к Эйлеру, Кориолису, Раусу, а затем развивалась в работах С. А. Чаплыгина, Воронца, В. В. Козлова, А. В. Карапетяна и т. д. (подробную библиографию см. в уже упомянутой книге А. П. Маркеева).

3) Модель неабсолютно шероховатой плоскости, т. е. модель с сухим трением (коэффициент трения конечен). Эта модель восходит к Г. Амонтону и Ш. Кулону, а впоследствии получила своё развитие в работах П. Контенсу, Т. Эрисмана, В.Ф.Журавлева, А. А.Кириенкова, В.А. Самсонова и т. д. Важным пунктом этой модели является выбор закона распределения нормальных давлений по области контакта. В диссертации рассмотрены два типа распределений: равномерный или по закону Л.А.Галина, полученному из решения статической контактной задачи теории упругости. Выбор других законов обсуждался и развивался в работах В.Ф.Журавлева, В. А. Самсонова, А.П. Иванова, А. А. Кириенкова, И. И. Аргатова и др.

Научная новизна. В диссертации с использованием указанных выше методов исследованы и решены в аналитическом виде некоторые классические задачи механики твёрдого тела с сухим трением.

Основными элементами новизны в диссертации являются следующие:

- аналитически решена задача о нахождении необходимых и достаточных условий равновесия твёрдого тела, опирающегося на плоскость с анизотропным сухим трением в статически определимом случае (одна, две или три точки опоры);

—исследована задача о горизонтальном движении стержня с двумя площадками, контактирующими с шероховатой плоскостью в условиях модели классического (одномерного) сухого трения и двумерной модели Контенсу-Журавлева, в некоторых случаях удаётся получить решение такой задачи в квадратурах;

—исследованы качественные особенности движения произвольного плоского твёрдого тела по шероховатой плоскости, в частности, показано, что максимальный путь, который может пройти такое тело до полной остановки в классе движений с фиксированной начальной кинетической энергией, реализуется на чисто поступательном его движении, а вращение и движение центра масс заканчиваются одновременно в момент остановки тела;

—исследовано движение круглого плоского твёрдого тела при равномерном распределении нормальных давлений по шероховатой плоскости, получены «неулучшаемые» (в классе движений с фиксированной начальной кинетической энергией) оценки времени остановки тела (сверху и снизу);

—исследовано движение круглого плоского твёрдого тела при неравномерном, но радиально-симметричном законе распределения нормального давления (закон Л. А. Галина) по шероховатой плоскости, где удаётся уравнения движения проинтегрировать в элементарных функциях;исследовано движение плоского твёрдого тела, представляющего собой стержень (узкий прямоугольник) при равномерном законе нормальных давлений по шероховатой плоскости, где показано, что все движения тела (для всех начальных условий, отличных от поступательных) стремятся к чисто вращательному вокруг центра стержня, если отношение его полудлины к центральному радиусу инерции меньше л/2;

—исследована задача о безотрывном плоском движении твёрдого тела (пластинки, контура) по шероховатой прямой по действием произвольной системы сил (задача Е. А. Болотова), где дана полная классификация переходов движений со скольжением в движения чистого качения (и наоборот) при безотрывном движении тела, получены простые достаточные условия безотрывного движения тела, которые затем применяются для классических задач о движении неоднородного круглого диска, тонкого стержня и эллиптического диска по шероховатой прямой в вертикальной плоскости в поле силы тяжести; основным принципом, используемым при решении таких задач, является корректный выбор начальных условий, при которых движение тела является безотрывным в моменты времени, непосредственно предшествующие начальному;

—исследована задача о безотрывном движении волчка (геометрически и динамически симметричного твёрдого тела) по гладкой плоскости в поле силы тяжести, где удаётся выписать аналитические условия и параметры тела, обеспечивающие его безотрывное движение;

— исследована задача о безотрывном движении волчка по абсолютно шероховатой плоскости в поле силы тяжести (неголономная постановка), где также (в некоторых случаях) удаётся вычислить в явном виде силу нормальной реакции, а затем установить условия безотрывного движения волчка;

— исследованы две классические задачи неголономной механики: 1) движение без проскальзывания колёсной пары по наклонной плоскости; 2) движение плоской колёсной модели экипажа типа скейтборда; получены условия безотрывного движения колёсной пары, показано, что при нарушении этих условий происходит отрыв одного из колёс, и возникает парадоксальная ситуация, что указывает на ограниченную область применимости неголономной модели;

- исследована задача о неустойчивости равновесного положения в вертикальной плоскости колесного экипажа при его прямолинейном установившемся движении и наличии сил трения качения.

- в некоторых случаях выполнено точное интегрирование уравнений движения тела, перемещающегося по шероховатой плоскости на трех опорах.

Практическое значение диссертации. Полученные в работе решения конкретных задач механики твёрдого тела могут быть использованы при создании робототехнических шагающих устройств, которые в процессе своего перемещения опираются на шероховатую поверхность. При этом равновесие или необходимое движение такого устройства должны обеспечиваться соответствующими силами сухого трения.
Результаты, полученные при решении задачи о движении стержня, контактирующего с шероховатой плоскостью двумя укреплёнными на нём площадками, могут быть использованы при восстановлении обстоятельств дорожно-транспортных происшествий органами Государственной инспекции по безопасности дорожного движения (ГИБДД). При этом предполагается, что автомобиль (транспортное средство) моделируется стержнем с двумя опорными площадками (плоские пары), и движение его является неуправляемым, т. е. происходит только поддействием сил трения. Результаты, полученные при исследовании безотрывных движений колёсных экипажей, могут быть использованы при проектировании роботизированных тележек.

Кроме того, практически все результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при преподавании курсов теоретической механики студентам ВУЗов, а также в школах с физико-математическим уклоном.

Достоверность полученных результатов основана как на применении классических методов исследований, хорошо зарекомендовавших себя в течение всего развития аналитической механики, так и применении новых методов, математически и логически обоснованных в тексте диссертации.

Апробация работы. Основные научные положения и результаты диссертации докладывались автором на научно-методических конференциях МАДИ (ГТУ) в период 2004-2011 гг. Кроме того, результаты работы были доложены на следующих научных семинарах:

1. «Теория управления и динамики систем» под руководством академика РАН Ф. Л. Черноусько (январь 2006 г.; ноябрь 2007 г.; ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН).
2. «Механика систем» им. А. Ю. Ишлинского под руководством академиков РАН Д. М. Климова, В. Ф. Журавлева (январь 2006 г.; февраль 2008 г.; ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН).

3. «Прикладная механика и управление» им. А. Ю. Ишлинского под руководством профессоров В. В. Александрова, Н. А. Парусникова,Ю. Г. Мартыненко, Ю. В. Болотина (февраль 2007 г, Институт механики МГУ им. М.В.Ломоносова).

4. «Аналитическая механика и устойчивость движения» им. В. В. Румянцева под руководством члена-корреспондента РАН В. В. Белецкого, проф. А. В. Карапетяна (октябрь 2006 г., мех.-мат. факультет МГУ им. М. В. Ломоносова).

5. «Научно-практические задачи развития автомобильно-дорожного комплекса в России». Председатель: вице-президент РАН академик РАН В.В.Козлов, сопредседатели: академики РАН К.В.Фролов, А.С.Бугаёв, член-корреспондент РАН В. М. Приходько (декабрь 2006 г., декабрь 2007 г. МАДИ (ГТУ)).

6. Общемосковский научно-методический семинар по теоретической механике под руководством профессора В.В.Лапшина (февраль 2004 г., МГТУ им. Н. Э. Баумана).

Некоторые результаты настоящей работы докладывались автором на Всероссийском совещании-семинаре заведующих кафедрами теоретической механики вузов России в июле 2004 г. (г. Пермь, Пермский госуниверситет), а также на заседаниях Научно-методического совета по теоретической механике при Минобрнауки РФ (председатель, академик МАН ВШ, профессор Ю. Г. Мартыненко).

Структура и объём работы. Диссертация состоит из ввсдсния, четырёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 245 стр. Рисунки включены в текст, список литературы занимает 6 стр. и содержит 114 источников.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Приведен краткий обзор полученных ранее результатов по теме диссертации, описана структура работы и краткое содержание глав и параграфов диссертации, указан список научных семинаров, совещаний и съездов, на которых были доложены основные результаты диссертационной работы.

Первая глава посвящена задачам о равновесии твердого тела, контактирующего с одной или двумя шероховатыми плоскостями. Характер взаимодействия с опорной плоскостью - это точечный контакт (тело опирается о плоскость одной, двумя или тремя своими точками).

В § 1.1 первой главы излагается решение задачи об условиях статического равновесия твердого тела, опирающегося на шероховатую плоскость с анизотропным сухим трением одной, двумя или тремя своими точками. Модель анизотропного сухого трения обобщает известную изотропную модель Амонтона- Кулона. Методика исследования здесь использует понятие анизотропной силы трения покоя, что существенно (по сравнению с методом предельного равновесия) облегчает получение аналитических условий равновесия. Результаты представлены достаточно простыми формулами. Сформулируем постановку задачи и полученные результаты. Пусть $Oxyz$ - неподвижная система координат. Рассмотрим твердое тело, опирающееся на плоскость Oxy своими точками $A_k, (k=1,n)$. Обозначим $\vec{r}_k = (x_k, y_k, 0)^T$ - радиус-вектор точки A_k . Здесь и всюду далее $k = 1, 2, ..., n$. Пусть к телу приложена произвольная система активных сил, имеющая главный вектор $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$ и главный момент $\vec{M}_O = (M_x, M_y, M_z)^T$ относительно точки O. Требуется определить условия на величины $\vec{F}, \vec{M}_O$, координаты опорных точек и характеристики анизотропного трения, при которых существуют такие реакции $\vec{N}_k = (0, 0, N_k)^T$ (нормальные реакции), $\vec{F}_k = (F_{kx}, F_{ky}, 0)^T$ (касательные реакции- анизотропные силы трения покоя), что удовлетворяются условия статического равновесия тела

$$\vec{F} + \sum_k (\vec{N}_k + \vec{F}_k) = 0, \quad M_O + \sum_k [\vec{r}_k \times (\vec{N}_k + \vec{F}_k)] = 0 \qquad (1.1)$$

Кроме того, должны выполняться условия неотрицательности $N_k \geq 0$ и соответствующие неравенства для анизотропных сил трения покоя $\vec{F}_k$. Опишем модель анизотропного сухого трения. Пусть точка контакта A_k приобрела скорость $\vec{v}_k$ в плоскости Oxy , направленную под углом θ к оси Ox. Тогда анизотропная сила трения скольжения определяется формулой

$$\vec{F}_{fr} = -N_k \Phi_O \vec{v}_k / |v_k| \qquad (1.2)$$

где $\Phi_O = \| f_{ij} \| - (2\times 2) -$ матрица тензора трения, предполагаемая положительно определенной, т.е., выполнены необходимые условия: $f_{11} > 0, f_{22} > 0, \Delta = f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} > 0$. При классическом законе сухого трения имеем $\Phi_O = fE$, где f - коэффициент трения, E - единичная матрица. Сила трения покоя $\vec{F}_k$, направленная под углом α к положительной оси Ox, по модулю не превосходит модуля той возможной силы трения движения, которая также направлена под углом α к оси Ox. Учитывая (1.2), мы получим следующие неравенства для анизотропной силы трения покоя

$$(f_{12} F_{ky} - f_{22} F_{kx})^2 + (f_{21} F_{kx} - f_{11} F_{ky})^2 \le \xi_k^2 = \Delta^2 N_k^2 \qquad (1.3)$$

Таким образом, поставленная задача формулируется так. Определить условия, налагаемые на величины $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z, x_k, y_k, f_{ij} (i, j = 1, 2)$, при которых существуют такие реакции $\vec{N}_k, \vec{F}_k$, что удовлетворяются уравнения равновесия (1.1) и выполнены неравенства (1.3) и $N_k \ge 0$, т.е., силы реакции плоскости являются допустимыми.

1) Пусть $n=1$ (одна точка опоры). Тогда справедливо

Утверждение 1. Для статического равновесия тела, опирающегося одной точкой на плоскость с анизотропным сухим трением, характеризуемым матрицей $\Phi_O = \| f_{ij} \|$, необходимо и достаточно соблюдения условий:

$$M_{A_1} = 0, F_z < 0, (f_{12} F_y - f_{22} F_x)^2 + (f_{21} F_x - f_{11} F_y)^2 \le \Delta^2 F_z^2$$

где M_{A_1} - главный момент активных сил относительно точки опоры A_1.

2) Пусть $n = 2$ (две точки опоры), A_1 совпадает с началом координат, а точка A_2 имеет координаты $x_2 = a\cos\alpha, y_2 = a\sin\alpha$, где a - длина отрезка $A_1 A_2$, α - угол, образуемый вектором $A_1 A_2$ с положительной осью Ox. Тогда M_x, M_y связаны соотношением

$$M_x \cos\alpha + M_y \sin\alpha = 0 \qquad (1.4)$$

означающим отсутствие условий, реализующих вращение тела вокруг оси $A_1 A_2$.
Нормальные реакции в точках A_1, A_2 даются формулами:

$$N_1 = -F_z - M_y / (a\cos\alpha) > 0, N_2 = M_y / (a\cos\alpha) > 0 \qquad (1.5)$$

Пусть ψ_0 - угол, образуемый вектором $\vec{F}_{xy} = (F_x, F_y, 0)^T$ с вектором A_1A_2. Вводим обозначения

$$g(\varphi) = f_{22}\cos\varphi - f_{12}\sin\varphi, h(\varphi) = f_{11}\sin\varphi - f_{21}\cos\varphi,$$

$$:\sigma^2(\varphi) = g^2(\varphi) + h^2(\varphi), \gamma = \alpha + \psi_0, \kappa = g(\alpha)g(\gamma) + h(\alpha)h(\gamma), F_0^2 = F_x^2 + F_y^2, m = M_z / a,$$

$$F_{01} = F_0 \sin\psi_0, F_{02} = F_0 |\kappa| / \Delta, F_{00}^2 = F_{01}^2 + F_{02}^2, \sigma_1(\gamma) = f_{12}g(\gamma) - f_{11}h(\gamma), \lambda_k N_k \sigma(\alpha), k = 1,2$$

Справедливо

Утверждение 2. Для статического равновесия твердого тела, опирающегося двумя точками на шероховатую плоскость с анизотропным сухим трением, описываемым матрицей Φ_O, необходимо и достаточно соблюдения условия (1.4), неравенств (1.5), а также неравенств

$$|m| < \lambda_2, |m - F_{01}| < \lambda_2, F_{02} < \sqrt{\lambda_2^2 - m^2} + \sqrt{\lambda_1^2 - (m - F_{01})^2} \qquad (1.6)$$

Утверждение 3 касается явного решения неравенств (1.6) и здесь не приводится (см. текст диссертации или статью автора в ПММ, вып.2, 2009).

3). Пусть $n = 3$ (три точки опоры), начало координат совпадает с точкой A_1. Обозначим

$$a_j = f_{11}y_j - f_{12}x_j, b_j = -f_{12}y_j + f_{22}x_j, j = 2,3$$
$$P_1 = f_{22}F_x - f_{12}F_y, P_2 = f_{21}F_x - f_{11}F_y, \xi_k = N_k\Delta, k = 1,2,3, \Delta = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} > 0$$

Здесь мы полагаем нормальные реакции N_k известными положительными величинами, которые получены из уравнений равновесия и зависят лишь от внешних заданных сил, их моментов и геометрии конструкции. Нетрудно показать, что задача об условиях возможности статического равновесия сводится к следующей оптимизационной задаче выпуклого программирования: найти экстремумы функции

$$\Psi = M_z\Delta = u_2a_2 + v_2b_2 + u_3a_3 + v_3b_3$$

при ограничениях

$$(u_2 + u_3 + P_1)^2 + (v_2 + v_3 + P_2)^2 \le \xi_1^2, u_2^2 + v_2^2 \le \xi_1^2, u_3^2 + v_3^2 \le \xi_3^2$$

Решение такой задачи подробно описано в тексте диссертации (см. также статью автора в ПММ, вып. 2, 2009г.) и сводится к поиску экстремума элементарной функции одной переменной, которая также приведена в тексте диссертации. Особенно простые аналитические формулы получаются для случая $F_x = F_y = 0$.

В Приложении к данному параграфу показано, как свести поиск экстремумов функции Ψ к алгебраической задаче о существовании кратного вещественного корня у многочлена 6-го порядка. Тогда граница области равновесия и экстремальные значения Ψ находятся **аналитически** из условия равенства нулю определителя результанта полученного многочлена и его производной (определитель 11-го порядка, коэффициенты которого являются известными алгебраическими функциями от параметров задачи). Приведены случай, когда граничные точки могут быть вычислены аналитически. В общем случае представлены результаты численных расчетов области равновесия.

В § 1.2 первой главы рассматривается задача об определении условий обязательного равновесия твердого тела, опирающегося на шероховатую плоскость одной своей точкой, когда условия его возможного (статического) равновесия выполнены. Обязательное равновесие означает, что кроме состояния статического равновесия не существует других возможных движений тела (со скольжением или без скольжения точки опоры, или с отрывом последней). В диссертации аналитически получены необходимые и достаточные условия такого обязательного равновесия. Поясним, что мы понимаем под такими условиями. Если эти условия выполнены (достаточность), то при любой силе $\vec{F}$, лежащей внутри конуса трения для опорной точки O и проходящей через эту точку, не существует каких-либо начальных возможных движений тела. Если же эти условия нарушаются (необходимость), то найдется такая сила $\vec{F}$ из внутренности указанного конуса трения и проходящая через точку O, при которой существует безотрывное движение тела с начальным скольжением опорной точки.

В § 1.3 первой главы рассматривается задача об условиях равновесия твердого тела, опирающегося двумя своими точками на две разные шероховатые плоскости. Опорные контакты предполагаются точечными, а взаимодействие их с опорными плоскостями происходит по закону изотропного сухого трения и имеет односторонний характер. К телу приложена произвольная пространственная система активных сил, а его равновесие понимается в статическом смысле. Полученные результаты включают в себя: а) условия равновесия тела при приложении фиксированной системы активных сил; б) условия равновесия тела при приложении произвольной системы активных сил (условия «заклинивания» или «самоторможения»). Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Вторая глава посвящена динамическим задачам о движении плоских (очень тонких) тел, опирающихся на шероховатую плоскость. Характер опирания тела о плоскость может быть либо непрерывным (пятно контакта), либо дискретным (опирание на очень малые площадки).

В § 2.1 второй главы исследуется задача о движении по горизонтальной плоскости невесомого стержня с двумя свободно укрепленными весомыми площадками на концах под действием сил сухого трения. Пусть это- стержень AB длины $2l$, а массы площадок A, B, соответственно, m_1, m_2. Форма площадок- круги радиуса ε. Предполагаем, что площадки укреплены на стержне при помощи идеальных цилиндрических шарниров, не создающих реактивных моментов от стержня и, следовательно, не могущих заставить площадки поворачиваться. Следовательно, применима одномерная (классическая) модель сухого трения: сила трения $\vec{f}_i$, приложенная к площадке $m_i, (i=1,2)$, направлена против вектора ее поступательной скорости $\vec{v}_i$ и пропорциональна ее весу, если площадка движется, и против вектора суммы остальных внешних сил, действующих на нее, если площадка покоится:

$$\vec{f}_i = -k_i m_i g \vec{v}_i / |\vec{v}_i|, \text{ если } v_i \neq 0$$
$$\vec{f}_i = -\min\{k_i m_i g, |\vec{F}_i|\} \cdot \vec{F}_i / |\vec{F}_i|, \text{ если } v_i = 0, F_i \neq 0 \qquad (2.1)$$
$$\vec{f}_i = 0, \text{ если } v_i = 0, F_i = 0$$

где k_i - коэффициент трения для площадки m_i , $\vec{v}_i$ - ее поступательная скорость (скорость ее центра), $\vec{F}_i$ - равнодействующая внешних сил (в данном случае сила реакции стержня в точке крепления площадки в момент ее остановки при $v_i = 0$). Пусть $\vec{v}$ - скорость центра масс C этого тела, γ - угол, составляемый вектором $\vec{v}$ с отрезком AB , $v_1 = \omega l$, где ω - угловая скорость стержня. Далее рассматривается случай равных масс : $m_1 = m_2 = m$ и равных коэффициентов трения : $k_1 = k_2 = k$. Тогда справедливы утверждения.

Утверждение 1. 1). Пусть начальные условия таковы, что $v(0) = v_1(0), \gamma(0) \neq \pi/2$. Тогда $v(t) = v_1(t)$ для всех t вплоть до полной остановки тела, и имеет место следующий первый интеграл :

$$(5\mu\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{v_1^2}{l})^4 \cdot \frac{v_1^2}{l} = C_1 = const, \gamma \in [0, \pi/2]$$
$$(5\mu\sqrt{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \frac{v_1^2}{l})^4 \cdot \frac{v_1^2}{l} = C_2 = const, \gamma \in [\pi/2, \pi) \qquad (2.2)$$

где $\mu = kg/2$.

2). Значение $\gamma = \pm\pi/2$ является особым, т.к., при этом происходит остановка одной из опорных площадок. В соответствие с моделью одномерного трения (2.1), в этой точке следует проверять неравенство $kg > 2v_1^2/l$. Если это неравенство выполнено, то процесс движения заканчивается вращением стержня AB вокруг остановившейся точки, а если это неравенство не выполнено, то процесс движения продолжается в соответствие с формулами (2.2), но в конце концов заканчивается вращением вокруг одной из опорных точек. Более подробно эти ситуации обсуждались в работе А.Ю. Ишлинского, Б.Н. Соколова, Ф.Л. Черноусько (Изв. АН СССР, МТТ, № 4, 1981, с.17-28), где рассматриваемая задача исследовалась численно.

Утверждение 2. Пусть $v(0) \neq v_1(0)$. Тогда $v(t)/v_1(t) \to 1$ в процессе движения, решения стремятся к интегрируемым, рассмотренным в утверждении 1.

В § 2.2 второй главы исследуется задача, аналогичная задаче из § 2.1, в предположении, что площадки контакта жёстко закреплены на стержне. Этот вид закрепления приводит к необходимости применения модели двумерного сухого трения, разработанной В. Ф. Журавлевым и учитывающей зависимость силы трения, приложенной к площадке, не только от скорости её центра, но также и от угловой скорости стержня (так как площадка контакта жёстко связана со стержнем). Исследование движения здесь аналогично исследованиям из §2.1. Показано, что при достаточно малых размерах площадок контакта решения рассматриваемой системы стремятся к соответствующим решениям из §2.1. Качественным (и главным) отличием движения рассматриваемой системы от движения системы из § 2.1 является то, что в процессе движения никогда не происходит чистого вращения вокруг остановившейся площадки. Таким образом, площадки движутся всё время и останавливаются лишь в конце, в момент остановки тела.

В § 2.3 второй главы исследуется движение плоского (очень тонкого) тела, опирающегося произвольной непрерывной областью на горизонтальную плоскость при наличии сухого трения Нормальное давление считается равномерно распределённым по области контакта.

Здесь получены следующие результаты.

1) Приведены основные способы аналитических вычислений сил трения и моментов сил трения, действующих на область контакта. Это— способ, использующий прямоугольные координаты и способ А. И. Лурье, использующий полярные координаты, связанные с мгновенным центром скоростей.

2) Получены оценки (сверху и снизу) для времени полной остановки тела при произвольных начальных условиях.

3) Рассмотрены вопросы о существовании чисто поступательных и чисто вращательных движений тела. Показано, что при совпадении центра нормальных давлений, действующих на область контакта, с центром масс тела , процесс движения заканчивается лишь при одновременном обращении в нуль угловой скорости тела и скорости центра её масс.

4) Рассмотрена задача об определении максимального пути, проходимого центром масс тела вплоть до полной остановки в классе движений с фиксированной начальной кинетической энергией. Показано, что максимальный путь реализуется на чисто поступательном движении тела (если, конечно, оно осуществимо!). Подчеркнём, что при поступательном движении сила трения (замедляющая движение центра масс) является максимальной, однако и начальная скорость центра масс также является максимальной среди всех движений, имеющихфиксированную кинетическую энергию.

В § 2.4 второй главы задача из § 2.3 рассмотрена в том частном случае, когда область контакта является кругом. Здесь показано, что центр масс тела движется прямолинейно и задача исследования движения упрощается. Получены следующие результаты:

1) В зависимости от параметров задачи (масса тела, радиус площадки контакта, момент инерции тела относительно вертикали, проходящей через центр масс) все движения тела (независимо от начальных условий) стремятся либо к чисто поступательному движению, либо к чисто вращательному движению вокруг центра масс, либо к смешанному движению, представляющему собой качение без проскальзывания

диска фиксированного радиуса по прямой, параллельной траектории центра масс, причём центр этого диска совпадает с центром площадки контакта, а радиус определяется параметрами тела.

2) Получены неулучшаемые (в классе движений с фиксированной начальной кинетической энергией) оценки времени остановки тела (сверху и снизу). Эти оценки связаны с результатами предыдущего пункта и достигаются на поступательных, вращательных или смешанных движениях, описанных в предыдущем пункте.

В § 2.5 второй главы результаты из § 2.4 распространяются для случая, когда область контакта является тонким кольцом. Полученные здесь результаты полностью аналогичны соответствующим из § 2.4.

В § 2.6 второй главы задача из § 2.3 рассматривается в том частном случае, когда область контакта есть узкий прямоугольник (стержень). Здесь получены следующие результаты.

1) В определённой области изменения параметров системы (отношение полудлины стержня к радиусу инерции тела относительно вертикальной оси, проходящей через центр стержня, меньше $\pi/2$) все движения тела (независимо от начальных условий) стремятся к чисто вращательному вокруг центра стержня.

2) При движении тела его центр масс отклоняется в сторону, противоположную его вращению.

В § 2.7 второй главы решена задача точного интегрирования уравнений движения круглого диска по шероховатой горизонтальной плоскости. Здесь принят неравномерный, но радиально-симметричный закон распределения нормального давления по области диска (закон Л.А.Галина). Уравнения движения диска представлены в элементарных функциях, определяется пройденный диском путь и время вплоть до остановки.

Третья глава посвящена некоторым классическим задачам о движении твёрдого тела по шероховатой плоскости. Контакт тела с плоскостью предполагается точечным, а характер взаимодействия является кулоновым (сухое трение) с коэффициентом трения, принимающим значения от нуля (абсолютно гладкая плоскость) до бесконечности (абсолютно шероховатая плоскость, т.е. неголономная связь). Бесконечный коэффициент трения принимается условно для реализации неголономной связи. Связь в точке контакта является односторонней, что существенно усложняет задачу исследования движений тела.

В § 3.1 третьей главы рассматривается задача о безотрывном плоском движении твёрдого тела (пластинки) пошероховатой прямой (с произвольным коэффициентом трения) под действием произвольной плоской системы сил (задача Е.А.Болотова). Связь в точке контакта предполагается односторонней. Дана полная классификация переходов движений со скольжениями в движения чистого качения и наоборот при безотрывном движении тела. Эта классификация свободна от парадоксальных ситуаций, так как рассматриваются только корректные начальные условия, при которых движение является безотрывным в моменты времени, непосредственно предшествующие начальному. Отметим, что при «некорректных» начальных условиях реализуется «заход» системы на связь, и движение пластинки должно описываться с привлечением дополнительных гипотез и предположений, использующих элементы теории удара с трением. Такая задача рассматривалась в работах А.П.Иванова.

В диссертации получены достаточные условия безотрывного движения тела в течение всего времени его движения, которые затем применяются для задач о движении неоднородного круглого диска, тонкого стержня и эллиптического диска по шероховатой горизонтальной прямой в вертикальной плоскости в поле силы тяжести.

В заключении параграфа показано, что задача о движении стержня по абсолютно шероховатой прямой является пределом аналогичной задачи для шероховатой плоскости с конечным коэффициентом трения k при $k \to \infty$. Кроме того, установлено, что при обращении нормальной реакции в нуль для модели абсолютно шероховатой плоскости, дальнейший процесс движения является скольжением (без отрыва) с нулевой силой нормальной реакции и ненулевой касательной силой.

В § 3.2 третьей главы рассмотрены основные принципы постановок задач в механике твердого тела при наличии связей (с сухим трением и без). Основное внимание уделено **предыстории** (возможной реализации) задаваемых начальных условий задачи, которые должны быть корректно определены таким образом, чтобы не требовалось введения дополнительных гипотез и допущений, выводящих исследование за рамки динамики твердого тела. Тогда динамика движения (и/или равновесия) твердых тел может быть описана однозначно и без каких-либо парадоксальных ситуаций (парадоксов Пэнлеве). Эта методика подробно иллюстрируется на трех известных задачах механики: 1) опирание плоского твердого тела на одну точку при наличии сухого трения; 2) плоское движение стержня с ползунами в направляющих при наличии сухого трения; 3) опирание твердого тела двумя точками на шероховатую плоскость («скамейка»).

В §§ 3.3, 3.4 третьей главы рассмотрена задача о безотрывном движении волчка (геометрически и динамически симметричного твёрдого тела) по гладкой плоскости в поле силы тяжести. Контакт тела с плоскостью предполагается точечным и односторонним, а трение отсутствует. Получены простые формулы для силы нормальной реакции опорной плоскости в виде полинома второго порядка от косинуса угла нутации. Затем выписаны **аналитические** условия, которым должны удовлетворять начальные данные и параметры тела, обеспечивающие его безотрывное движение во все время его движения.

В § 3.5 третьей главы рассматривается задача о безотрывном движении волчка по абсолютно шероховатой плоскости (бесконечный коэффициент трения) в поле силы тяжести. В предположении непроскальзывания точки контакта тела с плоскостью мы получаем, таким образом, неголономную одностороннюю связь. В некоторых случаях здесь также удаётся вычислить в явном виде силу нормальной реакции плоскости, как полином третьего порядка от косинуса угла нутации. Затем уже выписываются условия безотрывного движения волчка, т. е. положительности нормальной реакции.

Отметим, что в случае обращения нормальной реакции в нуль, рассматривается задача о возможности отрыва тела от опорной плоскости. Показано, что здесь могут возникать (в некоторых случаях) парадоксальные ситуации (типа парадоксов Пэнлеве), свидетельствующие о том, что до момента обнуления нормальной реакции должно начаться проскальзывание (при конечном коэффициенте трения), т. е. неголономная постановка задачи имеет ограниченную область применимости.

Отметим, что аналогичные трудности были указаны ещё Контенсу при исследовании движения гироскопа Флериэ.

Четвертая глава посвящена исследованию динамики движения некоторых колесных экипажей в условиях трения.

В § 4.1 четвертой главы рассмотрены две классические задачи неголономной механики для колёсных экипажей: 1) движение без проскальзывания колёсной пары по наклонной плоскости в поле силы тяжести, и 2) движение плоской колёсной модели экипажа типа скейтборда. При составлении уравнений движения используются основные теоремы динамики и кинематические соотношения, характеризующие неголономные связи. Неголономная связь в этих задачах заключается в том, что отсутствует боковое (нормальное и плоскости колеса) проскальзывание колеса. Такая методика позволяет наряду с определением движения системы, получать также и выражения для сил реакций, реализующих такое движение и связи (нормальные и касательные силы реакции, т. е. силы трения покоя).

Для движения колёсной пары под действием силы тяжести по наклонной плоскости получены уравнения траектории её центра масс, а также условия безотрывного движения. Если последние нарушаются, то происходит отрыв одного из колёс. Показано, что в этом случае возникает парадоксальная ситуация, и это указывает на ограниченную область применимости неголономной модели. Таким образом, в этих случаях необходимо учитывать конечность коэффициента трения и рассматривать процесс движения колёсной пары с возможностью бокового проскальзывания колёс.

В заключение этого параграфа рассмотрена задача о неуправляемом движении плоского колёсного экипажа (скейтборда), решение которой представлено в квадратурах.

В § 4.2 четвертой главы рассматривается задача о неустойчивости равновесного положения в вертикальной плоскости движущегося экипажа при наличии сил трения качения. Результаты этого параграфа получены совместно с В.Ф. Журавлевым.

Рассматриваемая модель экипажа состоит из трех твердых тел: двух пар колес и кузова, которые соединены в центрах колес посредством идеальных цилиндрических шарниров. Кузов предполагается абсолютно твердым телом, а колеса - деформируемыми (с диссипацией) по вертикали, что моделируется условным подвешиванием (над дорогой) центров масс колес на пружинах и демпферах. Предположение о деформируемости (с диссипацией) колес естественно влечет за собой появление моментов трения сопротивления их качению. Этот момент пропорционален соответствующей нормальной реакции с коэффициентом пропорциональности, зависящим от скорости движения центра колеса. На кузове установлен двигатель, со стороны которого к ведущим колесам прикладывается момент, обеспечивающий прямолинейное движение системы с определенной скоростью, причем предполагается, что колеса во время такого движения катятся без проскальзывания.

Пусть $v = const$ - установившаяся скорость движения автомобиля при описанных предположениях. В результате действия момента двигателя (как внешнего источника энергии в этой колебательной системе), преодолевающего описанные выше силы сопротивления, и наличия некоторых (малых) начальных отклонений и скоростей точек системы от их равновесного положения, возникают вертикальные колебания центров колес и, как следствие, колебания кузова. Требуется определить необходимые и достаточные условия устойчивости таких равновесных положений, а также такие значения скорости движения автомобиля v, при которых (для фиксированных остальных параметров системы) эти условия нарушаются, т.е., равновесное положение становится неустойчивым.

В работе получены аналитические формулы, выражающие такие необходимые и достаточные условия, которые зависят от коэффициентов трения качения колес и других массовых и геометрических параметров системы. Пользуясь феноменологическими соотношениями, дающими зависимости этих коэффициентов от скорости v, можно получать значения критических скоростей, при которых происходит потеря устойчивости движения. Методика исследования позволяет также получать уточненные значения частот малых колебаний системы при выполнении условий устойчивости, учитывающие наличие трения качения колес при движении автомобиля.

В § 4.3 четвертой главы рассматривается задача о движении тяжелого твердого тела, опирающегося на шероховатую горизонтальную плоскость тремя своими точками («тренога» или мотоцикл с коляской с неуправляемыми колесами). Контакты в точках опоры предполагаются односторонними и подчиняются закону сухого трения.

Изучается динамика возможных движений такого тела под действием сил тяжести и сухого трения. В частности, показано, что если тело несбалансированно относительно вертикальной оси, проходящей через его центр масс, то чисто вращательные его движения вокруг вертикальной оси невозможны.

Изучены поступательные движения (и близкие к ним). Показано, что при больших коэффициентах трения для несбалансированного вокруг вертикали тела существуют два направления на опорной плоскости, по которым (при одних и тех же начальных условиях) поступательное движение не является единственным возможным движением.Это говорит о его неустойчивости в этих двух направлениях.

Аналитически показано, что для почти поступательных движений тела (с малыми угловыми его скоростями) траектория его центра масс отклоняется в сторону противоположную его собственному вращению. Этот факт был установлен ранее в результате численных расчетов (см. Shegelski M.R.A, Goodvin G.L., et al. Exact normal forces and trajectories for a rotating tripod sliding on a smooth surface // Canadian J. Phys. 2004. Vol. 82.P. 875-890). В заключение параграфа рассматривается движение пластины, опирающейся тремя своими точками на шероховатую горизонтальную плоскость. В этом случае для некоторого класса начальных условий уравнения движения допускают интегрирование в квадратурах. Полученные интегралы позволяют дать качественное описание процесса движения. В частности, оказывается, что почти всегда процесс движения заканчивается чистым вращением вокруг одной из опорных точек.

Основные научные результаты и выводы

В диссертации получено решение крупной научно-технической проблемы о равновесии и движении твёрдого тела при наличии сухого трения. Новые научные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Статически определимые задачи о равновесии твёрдого тела, опирающегося своими точками на шероховатую плоскость, допускают простые аналитические решения. Кроме того, показано, что использование понятия силы трения покоя позволяет существенно сократить процесс получения решения задачи о равновесии (в отличие от обычно применяемого метода предельного равновесия).

Уравнения движения плоских тел по шероховатой плоскости в некоторых случаях допускают точное интегрирование, что позволяет дать также качественный анализ и неинтегрируемых случаев. Доказано, что при произвольном движении (отличном от чисто вращательного вокруг центра масс или чисто поступательного) любого плоского контура по шероховатой плоскости вращения и скорость центра масс обращаются в нуль одновременно в момент остановки тела. Кроме того, показано, что максимальный путь (в классе движений с фиксированной начальной кинетической энергией) реализуется на чисто поступательном движении. Более конкретные выводы о движении можно сделать в тех случаях, когда контур представляет собой круг, кольцо или узкий прямоугольник (стержень). В частности, результаты для кругового контура позволяют качественно описать движение тяжёлого однородного шара по шероховатой плоскости на этапе перехода качения со скольжением к чистому качению в случае, когда площадка контакта является кругом малого радиуса (неточечный контакт). Если же контур представляет собой стержень, то показано, что при его движении происходит отклонение траектории его центра масс в сторону, противоположную вращению.

2. Движение твёрдого тела по плоскости должно изучаться совместно с исследованием знака нормальной реакции и силы трения (покоя или скольжения) в точке контакта, в которой реализуется односторонняя связь. Кроме того, должны изучаться возможности отрыва тела от опорной плоскости в таких ситуациях.

В задаче о безотрывном плоском движении твёрдого тела (пластинки) по шероховатой прямой (задача Е.А.Болотова) можно дать полную классификацию переходов различных типов движений друг в друга, свободную от парадоксальных ситуаций. При этом используется понятие корректных начальных условий, которые являются (по определению) результатом некоторого исходного безотрывного движения (из ближайшего прошлого).

Получены достаточные условия безотрывного движения такого тела, которые затем эффективно применяются для исследования безотрывных движений в таких широко известных задачах, как задачи о неоднородном круглом диске, тонком стержне и эллиптическом диске.

3. В задаче о движении тяжёлого волчка по гладкой или абсолютно шероховатой плоскости удаётся вычислить аналитически силу нормальной реакции плоскости и исследовать её знак для широкого класса начальных условий и параметров волчка. Показано, что факт обнуления нормальной реакции является неотъемлемым свойством таких задач и это необходимо учитывать, в частности, при исследовании устойчивости стационарных движений волчка.

В задаче о движении волчка по гладкой плоскости факт обнуления нормальной реакции приводит к отрывам от опоры и появлению характерного «дребезга». В задаче о движении волчка по абсолютно шероховатой плоскости обращение нормальной реакции в нуль, в некоторых случаях, приводит к парадоксальной ситуации, что свидетельствует об ограниченной области применимости такой неголономной задачи.

4.Показано, что в задачах с неголономными моделями для безотрывных движений колёсных пар и колёсных экипажей также могут возникать парадоксальные ситуации в случае обращения в нуль нормальных реакций опорной шероховатой плоскости.

5. Показано, что при установившемся движении колесных экипажей может возникать неустойчивость равновесного положения, если учитывать действие на колеса моментов сил трения качения, которые, в свою очередь, зависят от скорости движения.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Розенблат Г. М. Об интегрировании уравнений движения диска по шероховатой плоскости. — Изв. РАН, МТТ, № 4, 2007, с. 65-71.

[2] Розенблат Г. М. Равновесие твёрдого тела на плоскости с анизотропным сухим трением. — ПММ, т. 73, вып. 2, 2009, с. 204-218.

[3] Розенблат Г. М. О безотрывных движениях твёрдого тела по плоскости. Доклады РАН, 2007, т. 415, №5.— С. 622-624.

[4] Розенблат Г. М. О движении плоского твёрдого тела по шероховатой прямой. // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 3, с. 293-306.

[5] Розенблат Г. М. Метод определения параметров безотрывного движения волчка по гладкой плоскости. // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 1,с. 87-98.

[6] Розенблат Г. М. О вибрационной стабилизации волчка Лагранжа. ПММ, т. 48, №3, 1984. — С. 113-118.

[7] Розенблат Г. М. К динамике неголономных моделей колёсных экипажей // Вестник Удмуртского университета. Серия: математика, механика, компьютерные науки, 2008, вып. 3, с. 90-108.

[8] Розенблат Г.М. К постановке задач в динамике несвободного движения твердого тела и парадоксы Пэнлеве. // Вестник Удмуртского университета. Серия: математика, механика, компьютерные науки, 2009,вып. 2, с. 75-88 .

[9] Розенблат Г.М. Об интегрировании уравнений движения тела, опирающегося тремя точками на шероховатую плоскость. // Доклады РАН, 2010, т. 435, № 4, стр. 475-478.

[10] Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. О колебаниях колесного экипажа при наличии трения. // Доклады РАН, 2011, т. 436, № 5, стр. 627-630.

[11] Розенблат Г.М. О движении тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками. // ПММ, т. 75, вып. 2, 2011, стр. 261- 265.

[12] Розенблат Г.М. Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.- 208 с.

[13] Розенблат Г. М. Динамические системы с сухим трением. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. — 204 с.

[14] Розенблат Г. М. О движении тела, опирающегося двумя площадками на плоскость при наличии сил сухого трения. Сборник научно-методических статей. Теоретическая механики. — М.: Изд-во Московского университета, 2004, вып. 25. — С. 157-164.

[15] Розенблат Г. М. Об одной задаче динамики твёрдого тела при наличии сил сухого трения. Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика, вып. 26 / Под ред. академика МАН ВШ Ю. Г. Мартыненко. — М.: Изд-во Московского университета, 2006. - С. 113-120.

[16] Розенблат Г. М. Механика в задачах и решениях. — М.: Едиториал УРСС, 2004. - 160 с.

[17] Козлова З.П., Паншина А. В., Розенблат Г. М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского. Динамика материальной точки // Под ред. Г. М. Розенблата. — М.: КомКнига 2006. - 312 с.

[18] Козлова 3. П., Паншина А. В., Розенблат Г. М. Теоретическая механика в решениях задача из сборника И. В. Мещерского. Динамика материальной системы. // Под ред. Г. М. Розенблата. — М.: Изд-во ЛКИ, 2007. - 432 с.