

На правах рукописи

ГАВРИКОВ Александр Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ЭМУЛЬСИЙ  
И ГРАНУЛИРОВАННЫХ СРЕД,  
ПРОПИТАННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

А в т о р е ф е р а т  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук А. С. Шамаев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Д. В. Георгиевский

кандидат физико-математических наук В. Г. Байдулов

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина”.

Защита диссертации состоится “29” ноября 2012 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при ИПМех РАН по адресу: 119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1, ИПМех РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан “25” октября 2012 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета Д 002.240.01

кандидат физико-математических наук

Е. Я. Сысоева

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Целый ряд факторов, таких как потребность в новых материалах, проблемы геологической разведки, акустики морского дна и многие другие стимулируют интерес к разработке моделей, описывающих физические процессы в неоднородных средах, составленных из фаз с различными реологическими свойствами. В частности, многие проблемы сейсмоакустики, например определение состава смеси жидкостей в скважинах, требуют решения обратной задачи нахождения характеристик (плотности, вязкости, концентрации) фаз по экспериментально полученному звуковому полю, для чего необходимо адекватно сформулировать прямую задачу построения акустического давления по известным параметрам среды. Известно также, что свойства (инерционность, упругость) комбинированных материалов существенно зависят от частот воздействия. Исследование данного вопроса имеет важное значение для механики неоднородных сред.

**Цель работы.** Исследование модели эмульсии двух слабовязких сжимаемых жидкостей, отличающейся введением малого параметра, расчет усредненных характеристик, спектральный анализ уравнения акустики эмульсии и определение динамических характеристик гранулированной среды, пропитанной жидкостью, резонансным методом.

**Научная новизна** работы состоит в следующем: доказана сильная сходимость по малому параметру разности скоростей и разности градиентов скоростей допредельной и предельной задач (исходной и усредненной) в рамках модели малых колебаний эмульсии двух слабовязких сжимаемых жидкостей. Проведен качественный спектральный анализ полученного интегро-дифференциального акустического уравнения. Создан метод численного расчета в плоском случае усредненных коэффициентов эмульсии, используемых в уравнении акустики. Получены явные аналитические выражения для определения динамических

инерционных и упругих характеристик гранулированной среды, пропи-танной жидкостью.

**Научная и практическая значимость работы.** Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при постановке и решении задач о распространении звука в эмульсиях и при определении плотности и скорости звука в насыщенном жидкостью грунте.

**Достоверность** и обоснованность результатов основываются на использовании строгих математических методов, сравнении численных результатов с аналитическими решениями и соответствии полученных аналитических формул экспериментальным данным.

**Личное участие** автора выразилось в формулировках и доказа-тельствах выдвинутых утверждений, проведении численных экспери-ментов, обработке и анализе результатов вычислений и экспериментов, оформлении результатов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на всероссийских и международных профильных науч-ных конференциях и семинарах:

1. Международная конференция "The Fifth International Conference on Differential and Functional Differential Equations" . Москва, 2008г.
2. Международная конференция "Современные проблемы матема-тики, механики и их приложений" , посвященная 70-летию ректо-ра МГУ академика В.А. Садовнического. Москва, 2009г.
3. Международная конференция "Управление динамическими си-стемами" , проходившая в рамках мультikonференции "Теория и системы управления" . Москва, 2009г.
4. Международная минikonференция "Качественная теория диффе-ренциальных уравнений" . Москва, 2009г.
5. 52-я научная конференция МФТИ. Москва, 2009г.

6. Международная конференция "Seventh International Conference on Numerical Methods and Applications". Болгария, Боровец, 2010г.
7. 53-я научная конференция МФТИ. Москва, 2010г.
8. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Нижний Новгород, 2011.
9. Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков. Нижний Новгород, 2011.
10. 54-я научная конференция МФТИ. Москва, 2011г.

**Публикации.** По теме диссертации опубликована 13 печатных работ, в том числе 5 статей в журналах из перечня Высшей аттестационной комиссии РФ. Список работ приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав и списка литературы. Общий объем работы составляет 110 страниц, включая 30 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 77 наименований.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность рассматриваемых в работе проблем, сформулирована цель и задачи диссертационной работы, перечислены представленные в диссертации новые результаты, их практическая ценность и положения, выносимые на защиту, кратко изложена структура диссертации.

**В первой главе** приводится обзор литературы по вопросу, обсуждается постановка задачи и проводится доказательство сильной сходимости разности скоростей и разности градиентов скоростей допредельной и усредненной задач.

Используемая для рассматриваемой задачи модель, отличающаяся введением малого параметра  $\varepsilon$  в уравнения движения, впервые [1] исследовалась методом двухмасштабных асимптотических разложений. Было выведено усредненное уравнение и показана связь между предельными скоростью и давлением (аналог динамического закона Дарси). В дальнейшем была доказана [2] слабая в  $L_2$  сходимости скоростей и сильная сходимости давлений. Тем же методом исследовалась рассматриваемая модель при учете капиллярных эффектов [3] и с добавлением фазовых переходов в насыщенной паром жидкости [4]. Однако в перечисленных работах отсутствуют явные вычисления усредненных (эффективных) характеристик среды.

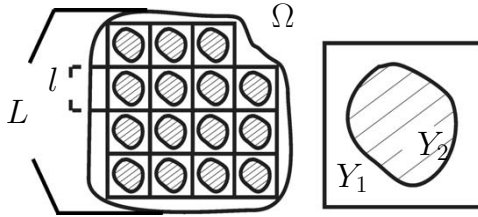


Рис. 1: Область  $\Omega$  и ячейка периода  $Y$ .

Рассматривается движение эмульсии в ограниченной области  $\Omega$  с гладкой границей  $\partial\Omega$  при внешних звуковых возмущениях малой амплитуды (например, колебания смеси нефти и воды около положения равновесия, вызванные сейсмоакустическим воздействием). Капиллярные и термальные эффекты не учитываются. Характеристики жидкостей в состоянии покоя — динамические вязкости  $\mu_i$ , плотности  $\rho_i$ , скорости звука  $c_i$  ( $i = 1, 2$ ) считаются сравнимыми

$$\mu_1 \sim \mu_2, \quad \rho_1 \sim \rho_2, \quad c_1 \sim c_2$$

Дисперсная фаза представляет собой периодически расположенные одинаковые включения (капли или слои) неизменной достаточно глад-

кой формы, см. рис.1. Вводятся два пространственных масштаба: размер ячейки периода  $l$  (характерная длина на микроуровне, например средний размер капель) и  $L$  — размер области  $\Omega$  (макроуровень, размер полости в грунте, заполненной эмульсией). При этом длина волны внешнего акустического возмущения  $\lambda$  считается существенно большей размера ячейки периодичности, но меньшей либо равной величине параметра  $L$ , так, что

$$\lambda \lesssim L, \quad l/\lambda \sim l/L = \varepsilon \ll 1$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр.

Обе жидкости считаются баротропными, локальные числа Рейнольдса  $R_i^{(l)}$  (отношение инерционных и вязких сил на микроуровне) полагаются величиной порядка единицы:

$$R_i^{(l)} = \rho_i \omega l^2 / \mu_i \sim 1 \quad i = 1, 2$$

Здесь  $\omega$  — частота внешнего акустического воздействия. На макроуровне последнее выражение приводит к соотношению  $\mu_i / (\rho_i \omega L^2) \sim \varepsilon^2 \ll \varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ), что при учете малых звуковых возмущений можно интерпретировать как незначительное влияние вязкости в масштабах порядка длины волны на движение эмульсии как целого, но на микроуровне вязкость существенна (локальное влияние), что в результате сказывается на распространении волн во всем объеме, т.е. вязкость необходимо принимать во внимание при переходе к усредненным характеристикам.

Если уменьшить влияние вязкости, предположив, что  $R_i^{(l)} \gg 1$  при  $l \ll L$ , т.е.  $\mu_i / (\rho_i \omega L^2) \ll \varepsilon^2$  ( $i = 1, 2$ ), то на локальном уровне получится невязкая задача, дисперсия звука будет отсутствовать. При принятом соотношении параметров проявляются и демпфирующие, и диспергирующие свойства среды [1].

Вводятся приведенные динамические вязкости  $\mu'_i$  [1–4] так, что

$$\mu_i \sim \rho_i \omega l^2 = \rho_i \omega L^2 (l^2/L^2) = \rho_i \omega L^2 \varepsilon^2 = \mu'_i \varepsilon^2, \quad i = 1, 2$$

В дальнейшем штрих у приведенных вязкостей опускается, а исходные динамические вязкости обозначаются как  $\varepsilon^2 \mu_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Вводятся пространственные размерные переменные  $x' = (x [L])/L$  (далее штрих опускается) и функции

$$c(\xi) = c_i, \quad \rho(\xi) = \rho_i, \quad \varepsilon^2 \mu(\xi) = \varepsilon^2 \mu_i, \quad \xi \in Y_i, \quad i = 1, 2$$

Здесь  $\xi = x/\varepsilon$  — локальная "быстрая" переменная. Таким образом, скорость звука  $c$ , динамическая вязкость  $\varepsilon^2 \mu$  и плотность  $\rho$  определены как  $Y$ -периодические ( $Y = \overline{Y_1 \cup Y_2} = [0, 1]^d$  см. рис.1) разрывные на границах контакта фаз функции, принимающие постоянные значения для каждой из жидкостей [2].

Дальнейшие результаты без существенных изменений обобщаются на случай непрерывных функций вязкости и скорости звука, а также непрерывной класса  $H^1(Y)$  функции плотности.

В соответствии с предположением о малости амплитуды звукового возмущения эмульсии за исходные уравнения движения жидкостей берутся линеаризованные вблизи положения равновесия уравнения Навье-Стокса с нулевыми начальными условиями

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot \varepsilon^2 \mu \nabla \mathbf{v} + \nabla(\varepsilon^2 \mu/3) \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1)$$

Здесь неизвестные функции — скорость  $\mathbf{v}(x, t; \varepsilon)$ , равная скорости дисперсионной среды или скорости дисперсной фазы в зависимости от принадлежности последним пространственной переменной  $x$ , и давление  $p(x, t; \varepsilon)$ , определяемое аналогичным образом, представляют собой малые возмущения скорости и давления относительно состояния покоя. Функция  $\mathbf{f}(x, t)$  описывает воздействующее на эмульсию звуковое поле.



На границах фаз предполагается непрерывность скорости и тензора напряжений.

Задача исследуется в обобщенной формулировке в соболевском пространстве  $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^d$ , используется запись в перемещениях, равных в линейном приближении интегралу от скорости  $\mathbf{u}(x, t; \varepsilon) = \int_0^t \mathbf{v}(x, s; \varepsilon) ds$ , возмущение давления и перемещение связаны соотношением, следующим из предположения о баротропности жидкостей

$$p(x, t; \varepsilon) = -\gamma \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \operatorname{div} \mathbf{u}$$

где модуль объемной упругости  $\gamma(\xi) = c^2(\xi)\rho(\xi)$ .

Вводятся периодические вспомогательные вектор-функции  $\mathbf{V}^j(\xi, t)$  ( $j = 1, \dots, d$ ) как решения нестационарных задач на ячейке периода  $Y$  (локальных задач)

$$\begin{aligned} \rho(\xi) \frac{\partial \mathbf{V}^j(\xi, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{V}^j(\xi, t) + \nabla q(\xi, t) &= 0, \quad \xi \in Y \\ \operatorname{div}_\xi \mathbf{V}^j &= 0, \quad \mathbf{V}^j|_{t=0} = \frac{\mathbf{e}_j}{\rho(\xi)} \end{aligned} \quad (2)$$

при условиях непрерывности скорости  $\mathbf{V}^j(\xi, t)$  и тензора напряжений на границе фаз. Заметим, что вязкость входит в уравнения в приведенном виде, т.е. ее значение на локальном уровне велико.

Определяется зависящая от времени  $t$  матрица

$$K(t) = \{K_{ij}(t)\}, \quad K_{ij}(t) = \frac{1}{|Y|} \int_Y V_i^j(\xi, t) d\xi, \quad i, j = 1, \dots, d$$

Матрица  $K(t)$  в данной задаче является обобщенным динамическим аналогом матрицы фильтрации в законе Дарси.

Пусть функция  $p^0(x, t)$  есть решение задачи (уравнения акустики

эмульсии)

$$\left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y \frac{\partial p^0(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x \int_0^t K(t-s)(\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^0(x, s)) ds = 0, \quad x \in \Omega$$

$$[K(t) * (\mathbf{f}(x, t) - \nabla p^0(x, t))] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad p^0 = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (3)$$

где  $\langle g(\xi) \rangle_Y = (1/|Y|) \int_Y g(\xi) d\xi$  — среднее по ячейке.

Отметим, что эффекты сжимаемости на локальном уровне, в задаче (2), не оказывают влияния и проявляются только в макромасштабе, в задаче (3).

Вводятся функции  $\mathbf{v}^0$  и  $\mathbf{u}^0$

$$\mathbf{v}^0(x, \xi, t) = \frac{\partial \mathbf{u}^0(x, \xi, t)}{\partial t} = (v_1^0(x, \xi, t), \dots, v_d^0(x, \xi, t))$$

со значениями в  $\mathbb{H}^1(\Omega, \mathbb{H}_{per}^1(Y))$  с помощью формулы

$$\mathbf{v}^0(x, \xi, t) = \sum_{j=1}^{j=d} \int_0^t \mathbf{V}^j(\xi, t-s) (\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^0(x, s)) ds \quad (4)$$

В этих обозначениях выполнена следующая теорема.

**Теорема.** Для решений предельной (усредненной) и исходной задач справедливы равенства:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{v}(x, t; \varepsilon) - \mathbf{v}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla_x \mathbf{v}(x, t; \varepsilon) - \nabla_{\frac{x}{\varepsilon}} \mathbf{v}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p(x, t; \varepsilon) - p^0(x, t)\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

Таким образом, осциллирующая вектор-функция  $\mathbf{v}^0(x, x/\varepsilon, t)$ , зависящая от локальной переменной  $\xi = x/\varepsilon$ , описывает предельное поведение скорости, а  $\langle \mathbf{v}^0(x, \xi, t) \rangle_Y$  — предельной средней скорости. Следует заметить, что хотя градиенты скоростей в исходной задаче неограничены, однако их поведение удается описать с помощью градиентов предельной функции  $\mathbf{v}^0(x, x/\varepsilon, t)$  по локальным координатам  $\xi$ .

Из выражения (4) вытекает соотношение

$$\langle \mathbf{v}^0(x, \xi, t) \rangle_Y = \int_0^t K(t-s)(\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^0(x, s)) ds \quad (5)$$

Формула (5) является динамическим аналогом закона Дарси, связывающим поведение средней скорости и градиента давления.

В Главе 1 с помощью метода двухмасштабной сходимости [5] (обобщение слабой сходимости, развивающее метод двухмасштабных асимптотических разложений) осуществляется предельный переход по малому параметру  $\varepsilon$  в задаче (1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и доказательство вышеприведенной теоремы. Полученное таким образом усредненное интегро-дифференциальное уравнение акустики (3) содержит усредненные характеристики неоднородностей среды (вязкость, плотность, концентрацию) в виде матричного ядра свертки  $K(t)$  (не зависящего от пространственных переменных) и среднего от сжимаемости.

**Во второй главе** проводится качественное исследование спектра собственных колебаний интегро-дифференциального уравнения акустики (3).

Пусть внешнее воздействие отсутствует  $\mathbf{f}(x, t) = 0$ , матрица  $K(t) = K'(t)E$ , где  $E$  — единичная матрица,  $K'(t)$  — скаляр (далее штрих опускается), что соответствует изотропному случаю, тогда система (3) может быть представлена в виде

$$\begin{cases} p_i^0(x, t) = K(t) * p_{xx}^0(x, t), \\ p^0|_{t \leq 0} \equiv 0, \quad p_x^0(0, t) = p_x^0(1, t) = 0 \end{cases}$$

$$K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-a_i t}, \quad c_i = \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \langle \psi_i(\xi) \rangle_Y^2, \quad a_i = \eta_i$$

Здесь  $\psi_i(\xi), \eta_i$  — собственные функции и собственные значения задачи (2). Значения экспоненциально убывающей функции  $K(t)$  характеризуются следующим образом

$$K(0) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i = \left\langle \frac{1}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y / \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y$$

$$K(\infty) = c_1 = \frac{1}{\langle \rho(\xi) \rangle_Y} \Big/ \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y$$

Типичные картины спектров имеют следующий вид:

1) Пусть функция  $K(t)$  представима в виде  $K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-a_i t}$ ,

$$c_i, a_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i < \infty$$

т.е.  $\dot{K}(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$ , что соответствует условию  $\rho(y) \in H^1(Y)$  (плотность непрерывна, граница раздела фаз размыта). Тогда вещественная часть спектра состоит из счетного числа серий  $\alpha_{n,N}$ , сходящихся к предельным точкам  $\alpha_N$ , комплексная часть спектра состоит из серии комплексно-сопряженных собственных значений  $\lambda_n^\pm$ , мнимая часть которых  $\Im \lambda_n^\pm$  уходит на бесконечность, а действительная  $\Re \lambda_n^\pm$  имеет предел  $\Re \lambda = \beta$ , где асимптота  $\beta$  выражается равенством

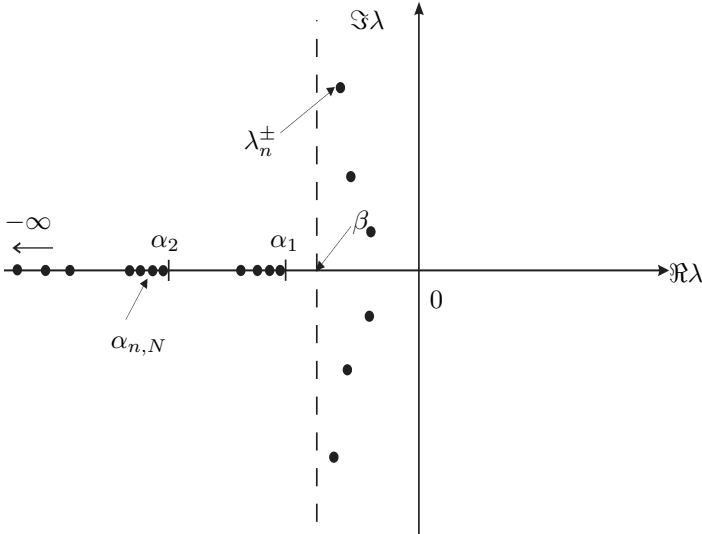


Рис. 2: Картина спектра при  $\dot{K}(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$ .

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i}{\sum_{i=1}^{\infty} c_i} = \frac{1}{2} \frac{\dot{K}(0)}{K(0)} = -\frac{1}{2} \frac{\left\| \nabla \frac{1}{\rho} \right\|_{L_{2,\mu}(Y)}^2}{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L_{2,\rho}(Y)}^2}$$

в весовых пространствах  $L_{2,\mu}$ ,  $L_{2,\rho}$  с весами  $\mu(\xi)$  и  $\rho(\xi)$  соответственно.

2) Пусть функция  $K(t)$  представима в виде  $K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-a_i t}$ ,

$$c_i, a_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i = \infty$$

т.е.  $\dot{K}(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ , что соответствует разрывной функции плотности (резкой границе фаз). Тогда вещественная часть спектра, как и в предыдущем случае, состоит из счетного числа серий  $\alpha_{n,N}$ , сходящихся к своим предельным точкам  $\alpha_N$ , Комплексная часть спектра состоит комплексно-сопряженных собственных значений  $\lambda_n^{\pm}$ , у которых и мнимые, и действительные части стремятся к бесконечности.

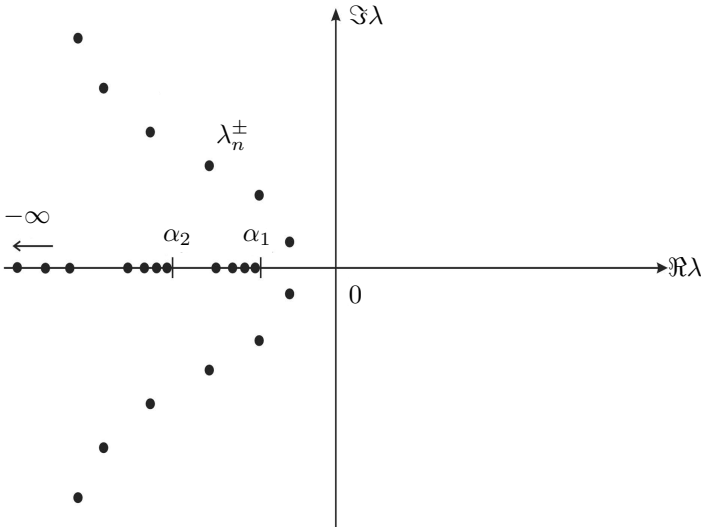


Рис. 3: Картина спектра при  $\dot{K}(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ .

В третьей главе методом конечных объемов [6] выводятся разностные уравнения для численного решения периодических локальных вспомогательных задач (2) в плоском случае, проводится сравнение численных и аналитических решений в некоторых частных случаях. Максимальная относительная погрешность в наихудшем случае на сетке  $100 \times 100$  есть величина порядка  $10^{-3}$ . В качестве характеристик жидкостей использовались параметры  $\rho_1 = 998.2 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu_1^0 = \varepsilon^2 \mu_1 = 1.01 \cdot 10^{-2} \text{ П}$  (вода),  $\rho_2 = 860 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu_2^0 = \varepsilon^2 \mu_2 = 43.258 \cdot 10^{-2} \text{ П}$  (нефть), где малый параметр  $\varepsilon = 7 \cdot 10^{-6}$ .

Основная идея метода состоит в представлении в дивергентном виде и последующем интегрировании уравнений движения по пространственным контрольным объемам, на которые разбивается ячейка периода, переходе по теореме Гаусса-Остроградского от интегралов по объему к интегралам по его границам при использовании граничных условий для получения системы линейных уравнений на дискретные функции, заданные на разнесенной сетке. Для интегрирования по времени использовалась неявная схема Эйлера, система линейных уравнений решалась с помощью функций прямого решения для разреженных матриц из пакета Intel MKL.

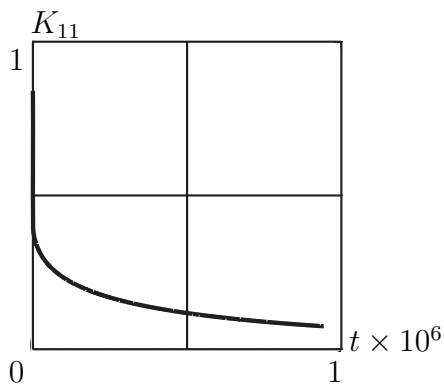


Рис. 4: Функция  $K_{11}(t)$ .

На рис.4 представлен результат численного решения задачи (2), элемента  $K_{11}(t)$  матрицы  $K(t)$  для включения в виде круга радиуса 0.2, центр которого совпадает с центром ячейки, для вышеуказанных значений параметров  $\rho_{1,2}, \mu_{1,2}$  при  $N = 200$  (по оси ординат отложено  $(K_{11} \cdot 10^3 - 1.0195)/0.003$ ).

Созданный метод численного расчета позволяет в будущем определить характер влияния нелокального члена на процесс распространения звуковой волны в смеси жидкостей — наличие или отсутствие переднего и заднего волновых фронтов, характер зависимости локальной скорости звука от свойств среды и самого решения рассматриваемого уравнения, характер затухания амплитуды волны при увеличении времени и значений координат.

**В четвертой главе** исследуется гранулированная среда, пропитанная жидкостью. Определяются ее динамические характеристики: плотность и упругость. На основе адекватной математической модели аналитически вычисляются собственные частоты главной и более высоких мод гидроупругой системы и находятся их сдвиги по отношению к частотам невозмущенной системы (без наличия среды). Резонансные кривые и величины сдвигов, определяемые высокоточными экспериментальными измерениями, позволяют найти динамическую плотность, коэффициент диссипации и скорость звука (упругость) в среде с относительно малой погрешностью. В качестве гидроакустических установок использовались резонаторы на основе прямоугольных сосудов с акустически мягкими стенками и дном. Сосуды заполнены жидкостью с открытой поверхностью (водой, керосином, нефтью и т.д.) и содержат образцы исследуемых гранулированных сред.

Теория резонансного метода, использующего жесткие гидроакустические трубы, разработана и применена для определения динамических свойств различных материалов в [7,8]. Эти свойства гранулированных и пористых сред, пропитанных жидкостью, в естественных условиях

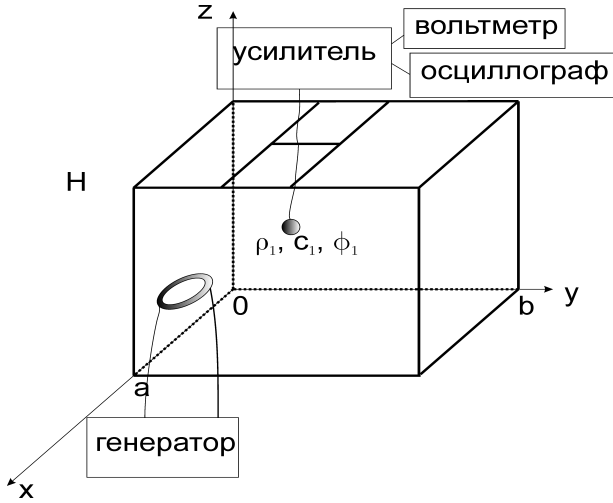


Рис. 5: Принципиальная схема экспериментальной установки.

удобнее исследовать с помощью резонаторов в форме прямоугольных сосудов.

Для определения динамической плотности и диссипации среды использован сосуд с акустически мягкими стенками и дном. В сосуд с размерами  $a \times b$  помещается на горизонтальное дно слой среды толщины  $h$ , динамические свойства (плотность, вязкость, упругость и др.) которой неизвестны. Сверху среды находится слой жидкости высоты  $H$  ( $H$  много больше  $h$ ), для которой известны (измерены или взяты из справочников) скорость звука в жидкости  $c_1$  и ее плотность  $\rho_1$ . Для определения искомых величин применяется резонансный метод [7,8]. На первом этапе исследуются теоретически элементарная задача о собственных колебаниях жидкости без учета подстилающего слоя  $h = 0$ , результаты сопоставляются с табличными. Для звукового потенциала методом разделения переменных из линейных уравнений акустики находятся собственные формы  $\varphi_{mkn}$  и частоты  $\omega = \omega_{mkn}$ . На втором этапе решается задача на собственные частоты и формы с учетом слоя сре-



ды  $h > 0$ , находятся собственные формы  $\tilde{\varphi}$  и, методом возмущений в предположении, что  $h/H$  и  $(\omega - \tilde{\omega})/\omega$  - малые величины одного порядка, собственные частоты  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{mkn}$ . С квадратической погрешностью по  $h/H$  разность частот представляется в виде

$$-\Delta\omega = -c_1^2 \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \frac{\rho_2 h}{\omega \rho_1 H} \quad (6)$$

В выражении (6) неизвестными являются величины  $\tilde{\omega}$  и  $\rho_2$ , остальные параметры заданы (здесь  $n$  - номер моды собственных вертикальных колебаний). Наличие среды приводит к уменьшению собственных частот. Смысл резонансного метода заключается в измерении резонансных частот  $\tilde{\omega}$ , практически совпадающих с собственными соответствующих мод колебаний  $\omega$ .

Выражение для динамической плотности среды

$$\rho_2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \left(\frac{c_H}{c_1}\right)^2 \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{H}{h}, \quad c_H = fH, \quad f = \omega/2\pi \quad (7)$$

содержит отношение малых величин  $h/H$ ,  $\Delta\omega/\omega$ , что требует высокоточных измерений. Согласно формуле (7) происходит "динамическое взвешивание" среды, пропитанной жидкостью. Как установлено [7,8], динамическая плотность является комплексной функцией частоты  $\tilde{\omega}$  воздействия вследствие взаимодействия между гранулами и вязкой жидкостью, выражение (7) определяет вещественную часть динамической плотности. Скорость звука  $c_2$  в гранулированной среде отсутствует в формулах (6), (7) первого приближения по параметру  $h/H$ . Для рассматриваемой постановки задачи тонкий слой среды находится в пучности скорости, т.е. в узле давления. Экспериментальные результаты убедительно подтверждает адекватность модели акустически мягкого резонатора, проведены измерения динамической плотности различных образцов гранулированной среды, пропитанной жидкостью.

Например, для образца, имеющего статическую плотность  $\rho_2^0 = 2.00$  г/см<sup>3</sup>, (хорошо окатанный кварцевый песок, пропитанный водой, со

средним диаметром гранул 0.02 см, пористостью 0.43 и просветом 0.27) динамическая плотность при частоте воздействия  $f_{111} = 3860$  Гц равна  $\rho_2 = 1.82$  г/см<sup>3</sup>, а при возрастании частоты  $f_{432} = 10543$  Гц уменьшается до  $\rho_2 = 1.6$  г/см<sup>3</sup>.

Аналогичным образом при помещении образца среды в пучность акустического давления находится скорость звука

$$c_2 = \left( \frac{1}{c_1^2} - \left( \frac{n}{2c_H} \right)^2 - \frac{\Delta f}{f} \frac{H}{h} \frac{\rho_2}{c_1^2 \rho_1} \right)^{-1/2} \quad (8)$$

где  $\rho_2$  - статическая плотность гранулированной среды, измеряемая простым взвешиванием. Модуль объемной упругости по найденной скорости звука определяется как  $K_2 = \rho_2 c_2^2$ . Полученные теоретические результаты сопоставляются с экспериментальными данными, полученными для определения динамической плотности и результатами, полученными на других лабораторных установках (гидроакустических трубах) [9].

## Основные результаты и выводы

1. Доказана сильная сходимость по малому параметру разности скоростей и разности градиентов скоростей допредельной и предельной задач (исходной и усредненной) в рамках модели малых колебаний эмульсии двух слабовязких сжимаемых жидкостей, что является обоснованием дальнейшего исследования и применения модели.
2. Проведен качественный спектральный анализ интегро-дифференциального уравнения акустики эмульсии, построены типичные картины спектров собственных колебаний, выявлена зависимость поведения колебательной части спектра от плотности.
3. Создан метод численного расчета в плоском случае усредненных

коэффициентов эмульсии, используемых в уравнении акустики, что позволяет в будущем определить характер влияния нелокального члена на процесс распространения звуковой волны в смеси жидкостей.

4. Получены явные аналитические выражения для определения динамических инерционных и упругих характеристик гранулированной среды, пропитанной жидкостью, резонансным методом. Экспериментальные результаты убедительно подтверждает адекватность модели акустически мягкого резонатора на основе прямоугольного сосуда.

## Работы автора по теме диссертации

1. *Vlasov V. V., Gavrikov A. A., Ivanov S. A., Knyazkov D. Yu., Samarin V. A. and Shamaev A. S.* Spectral properties of combined media // Journal of Mathematical Sciences. 2010. V. 164. № 6. P. 948-963.
2. *Гавриков А. А., Шамаев А. С.* Некоторые вопросы акустики эмульсий // Докл. Академии Наук. 2010. Т. 434. № 1 С. 42-46.
3. *Нестеров С. В., Акуленко Л. Д., Гавриков А. А.* Определение динамической плотности гранулированной среды, пропитанной жидкостью // Докл. Академии Наук. 2011. Т. 436. № 6. С. 760-763.
4. *Гавриков А. А.* Определение динамических характеристик гранулированной среды, пропитанной жидкостью // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. Ч. 2. С. 88-89.

5. *Gavrikov A.A., Shamaev A.S.* Some problems in acoustics of emulsions // *Journal of Mathematical Sciences*. 2011. V. 179. № 3. P. 415-436.
6. *Гавриков А.А.* О малых колебаниях эмульсии двух слабвязких жидкостей // *ПММ*. Принята к печати.
7. *Власов В.В., Гавриков А.А., Иванов С.А., Князьков Д.Ю., Самарин В.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства комбинированных сред // В сборнике "Современные проблемы математики и механики" том 5, выпуск 1, Изд.МГУ 2009, стр.138-155.
8. *Gavrikov A.A., Knyazkov D.U., Shamaev A.S.* Some spectral problems of porous media acoustics. Современные проблемы математики, механики и их приложений // *Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовниченко*. М.: Изд-во Университетская книга, 2009.
9. *Гавриков А.А.* О спектре одного акустического уравнения // Труды 52-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук" . Ч. III. Т. 1. М.: МФТИ, 2009.
10. *Гавриков А.А., Шамаев А.С.* Некоторые вопросы акустики эмульсий // Сборник трудов международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" . М.: Изд-во МЭСИ, 2010, с. 53-83.
11. *Гавриков А.А.* Определение скорости звука и модуля объемной упругости гранулированной среды, пропитанной жидкостью // Труды 53-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук" . Ч. III. Т. 1. М.: МФТИ, 2010.

12. *Гавриков А.А.* Определение динамических характеристик гранулированной среды, пропитанной жидкостью // Актуальные проблемы механики. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков. Тезисы докладов. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2011.
13. *Гавриков А.А., Шамаев А.С.* Некоторые вопросы акустики эмульсий // Труды семинара имени И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28. С. 114-146.
14. *Гавриков А.А.* Динамический закон Дарси для смеси двух слабвязких жидкостей // Труды 54-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". М.: МФТИ, 2011.

#### **Список используемой литературы**

1. *Lévy T.* Propagation of waves in a mixture of fluids // Int. J. Eng. Sci. 1981. V. 19. №1. P. 83-90.
2. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Berlin: Springer, 1980 = Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
3. *Auriault J.L., Lebaigue O.* Acoustic waves in a mixture of fluids with capillary effects // Int. J. Eng. Sci. 1989. V. 27. №10. P. 1253-1265.
4. *Auriault J.L., Boutin C.* Waves in bubbly liquids with phase change // Int. J. Eng. Sci. 2001. V. 39. №5. P. 503-527.
5. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Мат. сб. 2000. Т. 191. №7. С. 31-72.

6. *Fletcher C.A.J.* Computational Techniques for Fluid Dynamics 2. Berlin: Springer, 1988. = Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
7. *Нестеров В.С.* Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации // Акуст. журнал. 1959. Т. 5. Вып. 3. С. 337-344.
8. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Исследование инерционных и упругих свойств пропитанных жидкостью гранулированных сред резонансным методом // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 145-156.
9. *Нестеров С.В.* Сравнительный анализ механических свойств грунтов Черного и Баренцева морей// Теоретические и экспериментальные исследования волновых процессов в океане. Сборник научных трудов. Севастополь: Морской гидрофизический институт АН УССР. 1991. С. 140-147.

Александр Александрович Гавриков

**Исследование эффективных динамических характеристик  
эмульсий и гранулированных сред,  
пропитанных жидкостью**

01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

Подписано к печати 09.10.2012. Заказ № 21-2012. Тираж 70 экз.

---

Отпечатано на ризографе ИПМех РАН  
119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, 1

