На правах рукописи

КОСТИН Георгий Викторович

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.02.01 — теоретическая механика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Н. В. Баничук,
доктор физико-математических наук, профессор Д. В. Баландин,
доктор физико-математических наук, профессор В. В. Сазонов.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Защита диссертации состоится «13» февраля 2014 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при ИПМех РАН по адресу: 119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1, ИПМех РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан «30» ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.240.01
кандидат физико-математических наук

Е. Я. Сысоева

Цель работы заключается в развитии аналитических и численных методов решения прямых и обратных задач динамики управляемых механических систем, содержащих распределенные и сосредоточенные параметры, на основе вариационных подходов.

Актуальность исследуемых задач обусловлена тем, что в математической теории управления механическими системами с распределенными параметрами сравнительно мало задач, для которых разработаны алгоритмы, позволяющие достаточно быстро и точно вычислять программу и строить синтез оптимального управления. Еще меньше таких задач, для которых решения найдены в аналитической форме. Основная причина состоит в том, что только для простейших систем удается построить решение в явном замкнутом виде, например, в виде рядов Фурье. Применение широко распространенных численных методов, основанных на вариационных подходах к решению статических и стационарных задач, ограничено отсутствием удобных формулировок начально-краевых задач динамики. Поэтому представляют интерес любые вариационные постановки, применяя которые численное решение и оценки его качества можно получить с помощью модификаций математически обоснованных методов, таких, например, как методы Ритца, Галеркина, конечных элементов и т. п. Для численных подходов к построению законов управления системами с распределенными параметрами характерно использование дискретизации задачи на ранних стадиях решения. Одним из недостатков таких подходов является то, что априори довольно трудно определить связь между исходной системой с распределенными параметрами и ее конечномерной моделью. Такая связь может быть установлена с помощью явных оценок качества решения, следующих напрямую из формулировок обратных задач динамики, полученных на основе предложенных автором методов. Вариационные подходы позволяют разрабатывать новые процедуры построения законов управления с заданными критериями качества и проводить параметрическую оптимизацию динамических процессов в режиме реального времени.

Методы исследования. Решение задач, поставленных в работе, требует применения и развития различных методов анализа состояния и динамического поведения механических систем. Методологическую основу составляют известные классические подходы: вариационное исчисление и математическая теория оптимального управления, вариационные принципы аналитической механики (принцип Гамильтона–Остроградского), методы разделения переменных и спектрального анализа (преобразование Фурье, Лапласа), принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования, методы условной и безусловной оптимизации, методы теории аппроксимаций, численные методы Ритца и Галеркина, метод конечных элементов. Наряду с перечисленными подходами используются новые методы, впервые предложенные или существенно модифицированные автором. Это относится к методу интегро-дифференциальных соотношений для решения краевых и начально-краевых задач математической физики, методу полиномиальных и кусочно-полиномиальных аппроксимаций.

Научная новизна. Даны новые вариационные формулировки ряда начальных и начально-краевых задач динамики для механических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. Выведены необходимые условия стационарности решения для этих постановок и доказана их эквивалентность исходной системе уравнений движения. Исследована связь предложенных вариационных постановок с классическим вариационным принципом Гамильтона–Остроградского для задач с краевыми и периодическими условиями по времени. С использованием новых обобщенных формулировок с использованием методов Ритца, Бубнова–Галеркина, Петрова–Галеркина и метода конечных элементов разработаны новые алгоритмы численного решения задач динамики систем с распределенными параметрами. На основе вариационного и проекционного подходов в рамках линейной теории упругости предложена оригинальная процедура построения уточняющих моделей колебаний тел протяженной (балочной) формы. Проанализированы частоты и формы поперечных и продольных собственных движений балок для различных граничных условий. Разработаны алгоритмы параметрической оптимизации управления механическими системами на основе вариационных подходов. Развита процедура регуляризации численного решения для задач оптимального управления с учетом явных энергетических оценок качества выбранных аппроксимаций. Разработанные подходы обобщены на случаи моделей колебаний электромеханических манипуляторов с податливыми звеньями, вязкоупругих конструкций с протяженными элементами, вязкого течения сжимаемой жидкости в трубопроводе. Проведено моделирование, анализ и оптимизация управления для ряда прикладных задач динамики гибридных систем, содержащих как сосредоточенные, так и распределенные параметры.

Достоверность и обоснованность результатов. Результаты работы основаны на решении корректно поставленных задач механики, использовании строго обоснованных математических методов, сравнении результатов компьютерного моделирования с теоретическими выводами и экспериментальными данными.

Практическая значимость работы. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при постановке и решении задач управления динамическими системами с распределенными и сосредоточенными параметрами. Разработанные вариационные и проекционные методы математического моделирования и оптимизации движений могут быть применены для качественного описания поведения механических систем и выработки эффективных законов управления.

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на всероссийских и международных профильных научных конференциях [23]–[42], на семинаре по теории управления и динамике систем ИПМех РАН, на семинаре имени В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости механико-математического факультета МГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях [1]–[21], рекомендованных ВАК России, в монографии [22], в журналах, научных сборниках и трудах конференций [23]–[42]. Основные результаты, выносимые на защиту и опубликованные в работах [7]–[42], получены автором диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Количество страниц в диссертации — 359, в том числе 111 иллюстраций и 17 таблиц. Список литературы содержит 190 наименований.

Краткое содержание работы

Данная работа представляет результаты в области моделирования и оптимизации управляемых динамических систем, полученные автором в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук.

Введение посвящено описанию современного состояния и некоторых особенностей развития теории математического моделирования и оптимального управления движением механических систем с распределенными параметрами. Сформулирована цель работы и в сжатом виде изложено содержание всех глав и параграфов.

Первая глава содержит анализ ряда вариационных формулировок линейных начальных и начально-краевых задач о движении механических систем с инерционными и упругими элементами. Исходно поведение таких объектов описывается дифференциальными уравнениями с начальными и граничными условиями, которые могут содержать как сосредоточенные, так и распределенные параметры. Наиболее известными примерами таких систем являются математические модели, описывающие динамику упругих тел, стержней, струн, мембран и т.п.

В §1.1 предлагаются две обобщенные постановки задачи об управляемых движениях упругой системы с конечным числом степеней свободы, которая определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) с начальными условиями в канонической форме

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}\,, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u}\,; \tag{1}$$

$$t = 0: \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0\,, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0\,. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^n$ — векторы обобщенных координат и импульсов; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор внешних воздействий; $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно определенные матрицы масс и жесткости; $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матрица входа. Вводятся вектор-функции состояния, определяющие соотношения между скоростями и импульсами, а также координатами и силами,

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{p}\,, \quad \mathbf{s} = \mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{B}\mathbf{u}) + \mathbf{q}\,, \tag{3}$$

и соответствующие им квадратичные формы

$$\varphi_\pm = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \pm \mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{s}\right), \quad \varphi_+(t) \geq 0\,. \tag{4}$$

Эти функции равны нулю на действительных движениях $\mathbf{q}^*(t)$ и $\mathbf{p}^*(t)$.

Ставится задача нахождения стационарных значений одного из функционалов движения

$$\delta\Phi_\pm[\mathbf{q}^*(t), \mathbf{p}^*(t)] = 0\,, \quad \Phi_\pm[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \int_0^T \varphi_\pm dt\,, \tag{5}$$

при выполнении начальных условий (2). Для рассмотренного типа механических систем уравнения Эйлера, условия трансверсальности в конечный момент времени $t = T$ и начальные условия эквивалентны в обоих постановках исходной задаче Коши (1), (2).

Первая из обобщенных постановок (5) сводится к условной минимизации неотрицательного функционала Φ_+, который представляет собой энергетическую невязку уравнений состояния (1):

$$\Phi_+[\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*] = \min_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \Phi_+[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = 0\,. \tag{6}$$

Вторая формулировка (5) для Φ_- при задании определенных краевых условий по времени напрямую связана с принципом Гамильтона–Остроградского о наименьшем действии. Действительно, например, при задании периодических условий по времени $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T)$ и $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(T)$ интеграл Φ_- распадается на два независимых интеграла

$$\Phi_-[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = S_1[\mathbf{q}] + S_2[\mathbf{p}]\,, \quad S_1 = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{q} - 2\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{u}\right) dt\,,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p} - (\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{B}\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{B}\mathbf{u})\right) dt\,,$$

где S_1 — функционал действия по Гамильтону, используемый в классическом вариационном принципе.

Предложенный вариационный подход распространяется на случай вынужденных движений упругих систем с распределенными параметрами. В §1.2 дается минимизационная формулировка задачи о продольных движениях тонкого прямолинейного упругого стержня длины L, закрепленного на подвижном основании. При выбранном законе изменения положения основания $u(t)$ необходимо найти линейную плотность импульса $p(t, x)$, нормальные силы в поперечном сечении $s(t, x)$, перемещения точек стержня $w(t, x)$, которые доставляют абсолютный минимум функционалу состояния

$$\Phi_+[p^*(t, x), s^*(t, x), w^*(t, x)] = \min_{p,s,w} \Phi_+[p, s, w] = 0\,. \tag{7}$$

Интегралы по области $\Omega = \{t, x : 0 < t < T, 0 < x < L\}$

$$\Phi_\pm = \int_\Omega \varphi_\pm d\Omega\,, \quad \varphi_\pm = \frac{1}{2}\left(\rho(x)\eta^2 \pm \kappa(x)\xi^2\right), \tag{8}$$

подобно (5) связывают силы в сечении с продольными деформациями и плотность импульса со скоростями точек стержня через функции

$$\eta = w_t - \rho^{-1}(x)p \,, \quad \xi = w_x - \kappa^{-1}(x)s \,. \tag{9}$$

Уравнение изменения импульса, краевые и начальные условия

$$p_t = s_x \,, \quad \{t,x\} \in \Omega \,; \quad w(t,0) = u(t) \,, \quad s(t,L) = 0 \,, \tag{10}$$

$$w(0,x) = w^0(x) \,, \quad p(0,x) = p^0(x) \tag{11}$$

рассматриваются как локальные ограничения.

Продольные движения стержня являются частным случаем динамики систем, исследуемых в рамках линейной теории упругости. В §1.3 дается семейство вариационных формулировок широкого класса начально-краевых задач о вынужденных движениях упругих тел, занимающих пространственную область $x \in V \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей Γ.

Ставится задача о нахождении векторов плотности импульса $\mathbf{p}(t,x)$ и перемещений $\mathbf{w}(t,x)$, а также тензора напряжений $\sigma(t,x)$, которые доставляют стационарные значения функционалу состояния

$$\delta\Phi[\mathbf{p}^*(t,x), \mathbf{w}^*(t,x), \sigma^*(t,x)] = 0 \,, \tag{12}$$

$$\Phi[\mathbf{p}, \mathbf{w}, \sigma] = \int_\Omega \varphi d\Omega \,, \quad \{t,x\} \in \Omega = (0,T) \times V \,, \tag{13}$$

$$\varphi = a\rho(x)\eta \cdot \eta + b\xi : \mathbf{C}(x) : \xi \,, \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \,, \quad b \geq 0 \,, \tag{14}$$

$$\eta = \mathbf{w}_t - \rho^{-1}(x)\mathbf{p} \,, \quad \xi = \varepsilon - \mathbf{C}^{-1}(x) : \sigma \,, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\right) , \tag{15}$$

при выполнении следующих ограничений

$$\mathbf{p}_t = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}(t,x) \,, \tag{16}$$

$$\alpha(x) \cdot \mathbf{w} + \beta(x) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{u}(t,x) \,, \quad \mathbf{q} = \sigma \cdot \mathbf{n}(x) \,, \quad x \in \Gamma \,, \tag{17}$$

$$\mathbf{w}(0,x) = \mathbf{w}^0(x) \,, \quad \mathbf{p}(0,x) = \mathbf{p}^0(x) \,, \quad x \in V \,. \tag{18}$$

Здесь $\varepsilon(t,x)$ — тензор деформаций, $\mathbf{q}(t,x)$ — вектор граничных напряжений, $\eta(t,x)$ и $\xi(t,x)$ — вектор и тензор состояния, определяющие связь плотности импульса со скоростями точек упругого тела и соотношения закона Гука. Заданы параметры семейства a и b, объемная плотность тела ρ, тензор модулей упругости $\mathbf{C}$, единичный вектор внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе тела Γ, векторы объемных сил $\mathbf{f}(t,x)$ и граничных воздействий $\mathbf{u}(t,x)$, тензоры второго ранга α и β, устанавливающие тип граничных условий. По определению $\Phi = \Phi_\pm$ при $a = \pm\frac{1}{2}$.

Важно отметить следующее. Интеграл Φ должен быть равным нулю на точном решении. При $a = 0$ необходимо вводить дополнительное векторное ограничение $\eta = \mathbf{0}$. Если $a \geq 0$, то $\Phi \geq 0$ и задача сводится к условной минимизации функционала Φ. Вместе с ограничениями (10) система уравнений Лагранжа–Эйлера относительно Φ эквивалентна исходной системе гиперболических линейных уравнений, описывающих движения упругого тела.

В §1.4 предложенный вариационный подход распространяется на случай вынужденных поперечных движений упругого стержня в рамках модели Эйлера–Бернулли. Переопределяются квадратичные функционалы (8), в которых, в отличие от (9), функции состояния

$$\eta = w_t - \rho^{-1}(x)p\,, \quad \xi = w_{xx} - \kappa^{-1}(x)s \tag{19}$$

связывают поля поперечных перемещений точек стержня $w(t,x)$ с функциями линейной плотности импульса $p(t,x)$ и изгибающего момента в поперечном сечении $s(t,x)$. Здесь ρ — линейная плотность, κ — изгибная жесткость. В вариационной постановке либо ищется стационарная точка функционала Φ_-, либо, как в (7), минимум Φ_+ при удовлетворении уравнения изменения импульса

$$p_t + s_{xx} = f(t,x)\,, \quad \{t,x\} \in \Omega = (0,T) \times (0,L)\,, \tag{20}$$

краевых соотношений

$$
\begin{aligned}
x = 0: \quad & a_1 w + b_1 s_x = u_1(t)\,, \quad a_2 w_x - b_2 s = u_2(t)\,, \\
x = 1: \quad & a_3 w - b_3 s_x = u_3(t)\,, \quad a_4 w_x + b_4 s = u_4(t)\,,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

и начальных условий (11). Здесь a_i, b_i — коэффициенты, определяющие тип краевых условий, u_i, $i = 1, 2, 3, 4$, — граничные воздействия, f — внешняя распределенная нагрузка.

Вторая глава посвящена описанию и сравнению различных численных процедур построения приближенных решений задач о вынужденных движениях механических систем с распределенными параметрами с использованием предложенных обобщенных формулировок.

В §2.1 на основе интегро-дифференциальной постановки и полиномиальных представлений неизвестных функций изложена модификация метода Ритца для приближенного решения задач динамики тонкого упругого стержня (см. рис. 1). Рассмотрены случаи, когда один конец стержня свободен, а другой в отсутствие внешних нагрузок ($f(t,x) \equiv 0$) перемещается вдоль или поперек центральной линии по заданному закону $u(t)$ ($u(0) = w(0,0)$).

Для продольных движений необходимо выполнить ограничения (10), (11), а для поперечных — (11), (20), (21) при выбранных условиях: $a_1 = a_2 = b_3 = b_4 = 1$, $a_3 = a_4 = b_1 = b_2 = 0$, $u_2(t) = u_3(t) = u_4(t) = 0$ и $u_1(t) = u(t)$. Вводится динамическая функция $r(t,x)$, такая что $s = r_t$. Для удовлетворения закона изменения импульса полагается при продольных движениях $p = r_x$, а при поперечных $p = -r_{xx}$. Выбирая аппроксимации неизвестных функций как

$$
\begin{aligned}
w(t,x) &= w^0(x) - u(0) + u(t) + t \sum\nolimits_{i+j=0}^{N} w_{ij} t^i x^j\,, \\
r(t,x) &= r^0(x) + t \sum\nolimits_{i+j=0}^{N} r_{ij} t^i x^j\,,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где $p^0 = r_x^0$ для продольных перемещений и $p^0 = -r_{xx}^0$ для поперечных, автоматически удовлетворяем начальные условия. После этого можно строго выполнить выбранные краевые соотношения. В Φ_+ из (8)

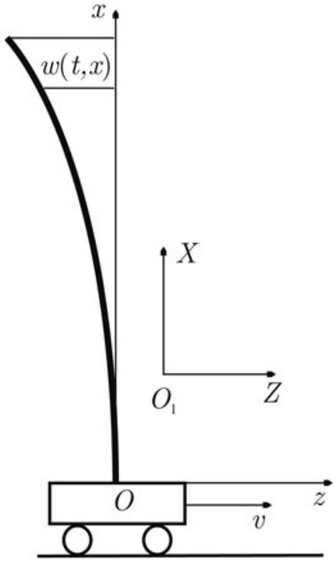

Рис. 1: Упругая балка, закрепленная на подвижной тележке.

подставляются аппроксимации (22) и после интегрирования по Ω задача условной минимизации (7) в силу квадратичности функционала сводится к линейной системе алгебраических уравнений относительно неопределенных параметров w_{ij}, r_{ij}. Начальные распределения w^0, p^0 и функция управления $u(t)$ определяют правые части этих уравнений.

Значение функционала $\Phi_+ \neq 0$ является мерой качества любого допустимого приближения, которое точно удовлетворяет уравнение изменения импульса, начальные и граничные условия. Относительную ошибку такого решения можно определить в сравнении со средней механической энергией $\bar{E}$ как $\Delta = \Phi_+ T^{-1} \bar{E}^{-1}$.

Для полиномиальных по времени законов управления

$$u(t) = \sum\nolimits_{i=0}^{K} u_i t^i \in \mathcal{P}_K(0,T) \tag{23}$$

исследована сходимость приближенных решений к точному при увеличении размерности аппроксимаций. Полученные решения сравниваются с результатами, найденными с помощью метода Фурье.

В §2.2 описывается алгоритм, который основан на методе Ритца и МКЭ и предназначен для численного решения задачи о продольных перемещениях упругого стержня. Дается кусочно-полиномиальное представление неизвестных кинематических и динамических полей, заданных на треугольной сетке в пространственно-временной области Ω, т.е. $w, r \in \mathcal{S}_N^{\Delta}(\Omega)$, где $\mathcal{S}_N^{\Delta}$ — непрерывный сплайн с максимальной степенью полиномов N. Проведен анализ сходимости конечно-элементной процедуры при увеличении числа элементов и степени полиномов.

В §2.3 предложенная модификация метода Ритца распространяется на случай вынужденных движений упругих тел. На основе вариационной формулировки (12)–(18) разработан численный алгоритм нахождения движений упругого тела на основе кусочно-полиномиальных аппроксимаций и предложен критерий оценки качества решений. Для трехмерной модели приведен пример расчета и анализа поперечных движений вытянутого призматического тела (балки) с квадратным поперечным сечением. Балка занимает область $V = \{x_i, i = 1, 2, 3 : -a_i < x_i < a_i\}$ и закреплена при $x_1 = -a_1$ на основании, которое перемещается вдоль оси Ox_3 согласно полиномиальному по времени закону (23).

В §2.4 на примере задачи о поперечных движениях упругого стержня в рамках модели Эйлера–Бернулли описан вариационный подход к пространственной дискретизации уравнений движения упругих конструкций. Рассмотрен класс линейных краевых воздействий (21). Разработан алгоритм построения приближенной системы ОДУ, решение которой доставляет минимальные (стационарные) значения введенным энергетическим функционалам $\Phi_{\pm}$ на заданном множестве полей поперечных перемещений, импульсов и изгибающих моментов.

Согласно этому алгоритму пространственный отрезок $x \in [0, L]$ разбивается на M элементов. Кинематическая и динамическая переменные выбраны в виде сплайнов по x с переменными по времени коэффициентами

$$\begin{aligned} w &= w^0(x) - u(0) + u(t) + \sum_{j=0}^{MN} a_{1j}(x) w_j(t)\,,\ a_{1j}(0) = a'_{1j}(0) = 0 \\ r &= r^0(x) + \sum_{j=0}^{MN} a_{2j}(x) r_j(t)\,,\ a_{2j}(L) = a'_{2j}(L) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

где $a_{ij} \in \mathcal{S}^M_{N+1}(0,L) \subset C^1$ — кусочно-полиномиальные пробные базисные функции, $N+1$ — максимальная степень используемых полиномов.

После подстановки аппроксимаций (24) в функционалы $\Phi_\pm[r,w]$ и интегрирования по x выписаны уравнения Эйлера и условия трансверсальности на свободном конце $t = T$ для двух полученных вариационных задач, одномерных относительно времени t. Эти необходимые условия стационарности вместе с однородными начальными условиями $w_j(0) = r_j(0) = 0$ составляют совместную краевую по времени задачу, из решения которой находятся поля неизвестных функций. Приведены примеры расчетов перемещений упругой балки и сравнение качества полученных численных решений для функционалов Φ_+ и Φ_-.

В §2.5 рассмотрен проекционный подход на основе МКЭ (модификация метода Петрова–Галеркина) к численному решению задач о вынужденных движениях упругого стержня. Для пространственной дискретизации неизвестных функций используются гладкие аппроксимации (24). Разработанные численные процедуры основаны на обобщенной постановке исходной задачи, в которой приравниваются нулю интегральные проекции функций состояния (9) или (19):

$$\int_0^L \eta b_j(x)dx = 0\,, \quad \int_0^L \xi b_j(x)dx = 0\,, \quad j = 1,\ldots,MN\,, \tag{25}$$

где $b_j \in \mathcal{S}^M_{N-1}(0,L)$ — кусочно-полиномиальные тестовые базисные функции. В результате исходная система, описываемая уравнениями в частных производных, сводится к системе ОДУ первого порядка. Проводится частотный анализ аппроксимирующих уравнений и сравнение проекционного подхода с классическим методом Галеркина и вариационным алгоритмом из §2.4.

Третья глава содержит описание регулярного проекционного подхода к построению приближенных математических моделей, описывающих в рамках линейной теории упругости собственные движения призматических тел (балок) с прямоугольным поперечным сечением ($|x_k| < a_k$, $k = 1, 2, 3$). Для этой цели применяется полиномиальное относительно поперечных координат x_2, x_3 представление неизвестных функций перемещений и напряжений

$$\mathbf{w} = \sum_{i+j=0}^{N} x_2^i x_3^j \mathbf{w}^{(ij)}(x_1) \sin \omega t\,, \quad \sigma = \sum_{i+j=0}^{N} x_2^i x_3^j \sigma^{(ij)}(x_1) \sin \omega t\,, \tag{26}$$

а также импульсов с учетом (16): $\mathbf{p} = -\omega^{-2} \nabla \cdot \sigma$.

С использованием интегральной формы функций состояния (15) после исключения времени t и части граничных условий ($q = 0$ при $x_{2,3} = \pm a_{2,3}$) исходная система уравнений в частных производных сводится к системе ОДУ относительно координаты x_1:

$$\int_A \eta \cdot \mathbf{v}(x_2, x_3) dA = 0\,, \quad \int_A \xi : \tau(x_2, x_3) dA = 0\,, \tag{27}$$

для всех $\mathbf{v} \in \mathcal{P}_N^v(A)$ и $\tau \in \mathcal{P}_N^t(A)$, где $\mathcal{P}_N^v$ и $\mathcal{P}_N^t$ — векторное и тензорное пространства полиномиальных тестовых функций степени N, заданных на прямоугольнике $A = \{x_2, x_3 : |x_2| < a_2,\, |x_3| < a_3\}$.

В §3.1 в рамках двумерной модели рассмотрены свободные движения упругой балки, закрепленной с одного или двух торцов. С использованием дискретизации по поперечной координате разработан вариационный и проекционный подходы к нахождению собственных частот и форм колебаний. С использованием свойств симметрии задачи проведен частотно-волновой анализ продольных и поперечных движений балки.

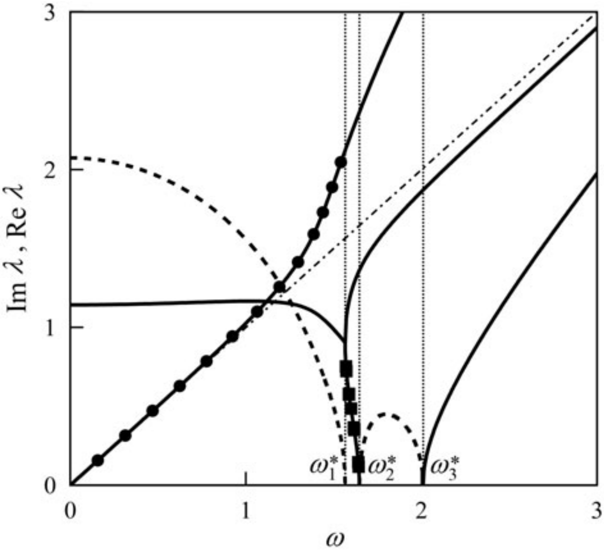

Рис. 2: Частотно-волновые характеристики продольных колебаний.

В §3.2 исследовано влияние геометрических и упругих характеристик на частоты и формы собственных колебаний свободной балки (двумерная модель). Учитывая специальный случай граничных условий в напряжениях (задача Неймана), с помощью модификации проекционного подхода удалось получить уточненные модели свободных движений. Эти модели даже при малых размерностях аппроксимаций (27) позволяют провести достаточно качественный анализ низших мод колебаний. Для продольных движений показано существование разных типов собственных перемещений и внутренних напряжений балки. Частотно-волновые характеристики для однородной изотропной балки показаны на рис. 2. Для поперечных колебаний (рис. 3) выявлено наличие частотных зон, соответствующих разным видам решений характеристического уравнения, полученного для предложенной модели.

В §3.3 в рамках трехмерной модели линейной упругости и проек-

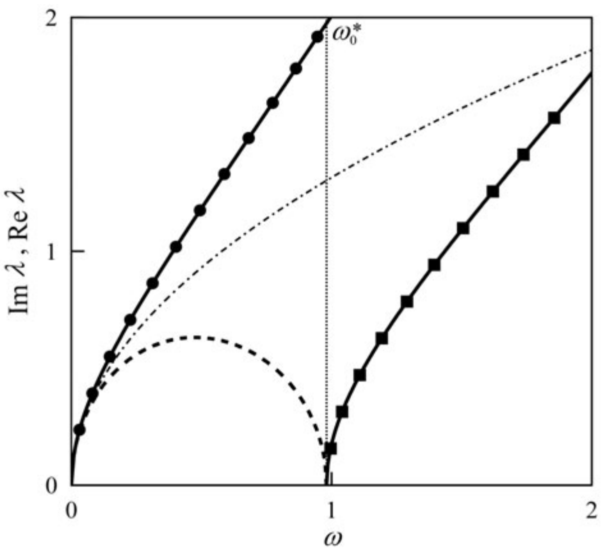

Рис. 3: Частотно-волновые характеристики поперечных колебаний.

ционного подхода выведены приближенные уравнения, описывающие с различной степенью точности собственные продольные, поперечные, «дышащие» и крутильные колебания упругой балки прямоугольного поперечного сечения. Исследовано влияние геометрических и механических параметров системы на частоты и формы этих колебаний.

Четвертая глава содержит результаты исследования задач оптимального управления упругими системами с распределенными параметрами. Описываются подходы к параметрической оптимизации движений этих систем и способы регуляризации полученных численных решений. Показаны возможности построения решения, отвечающего заданным критериям качества, и оптимизации движений упругих систем.

В §4.1 для однородного прямолинейного упругого стержня рассмотрен случай полиномиального по времени закона (23) поперечного перемещения одного из его концов ($u(0) = \dot{u}(0) = \dot{u}(T) = 0$, $u(T) = u_T$). Разработан алгоритм построения управления, которое приводит систему за заданное время T в состояние с минимальной механической энергией

$$J_1[u] \to \min_{u\in\mathcal{P}_K}\,, \quad J_1 = E(T)\,, \quad E(t) = \int_0^L \left(\frac{p^2}{2\rho} + \frac{\kappa w_{xx}^2}{2}\right) dx\,. \qquad (28)$$

Исследованы задачи оптимального перевода системы из состояния покоя в заданное терминальное положение и максимального гашения начальных колебаний за фиксированное время. Показано, что даже для невысоких степеней полиномов K в (23) удается на несколько порядков уменьшить энергию остаточных колебаний системы.

В §4.2 для упругого тела призматической формы рассмотрен случай полиномиального управления (23) продольными перемещениями его основания. Разработан алгоритм оптимизации энергии тела в конечный момент времени. Проведены анализ и сравнение результатов, полученных для одномерной и трехмерной моделей движения.

В §4.3 оптимизация управления и регуляризация решения на основе МКЭ проводятся для задачи о продольном перемещении упругого стержня. В матричной форме представлен алгоритм нахождения кусочно-полиномиального по времени закона изменения положения конца стержня ($u(0) = 0$, $u(T) = u_T$). Предложенное управление минимизирует механическую энергию в конце процесса с учетом средней энергии, запасаемой стержнем, и ошибки приближенного решения

$$\begin{gathered} J[u] \to \min_{u\in\mathcal{S}_K^M}\,, \quad J = \sum\nolimits_{i=0}^{3} \alpha_i J_i\,, \quad J_1 = E(T)\,, \\ J_2 = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)dt\,, \quad J_3 = \frac{\Phi_+}{T}\,, \quad E(t) = \int_0^L \left(\frac{p^2}{2\rho} + \frac{\kappa w_x^2}{2}\right) dx\,. \end{gathered} \qquad (29)$$

где $\alpha_i \geq 0$ — весовые коэффициенты, а Φ_+ — функционал невязки из (8) и (9). Конечно-элементные аппроксимации, заданные на треугольной сетке, находятся согласно алгоритму, описанному в §2.2. Исследовано влияние коэффициентов α_i на качество получаемого приближения.

В §4.4 проекционный подход, описанный в §2.5, применяется для решения задач оптимального управления упругими системами. Алгоритм пространственной дискретизации уравнений поперечных движений упругого стержня на основе МКЭ использован в задаче параметрической оптимизации конечной механической энергии стержня $E(T)$ с учетом величины интегральной ошибки приближенного решения:

$$J[u] \to \min_{u \in \mathcal{P}_K}, \quad J = J_1 + \alpha J_2, \quad J_1 = E(T), \quad J_2 = \frac{\Phi_+}{T}, \qquad (30)$$

где $u(0) = 0$, $u(T) = u_T$, $E(t)$ определена в (28), а Φ_+ — в (8) и (19).

В качестве примера на рис. 4 кружками и квадратами для безразмерных параметров $\rho = \kappa = L = u_T = 1$, $T = 2$, $M = N = 4$, $K = 9$ отражена соответственно зависимость J_1 и J_2 от α. При малых значениях α ошибка дискретизации превышает величину энергии в конце процесса. Для этого интервала не приходится говорить о достоверности полученных результатов. Для больших α возрастает терминальная энергия J_1. Существует интервал $10^{-2} < \alpha < 10^{2}$, где оба функционала практически не меняются и $J_2 \ll J_1$, что позволяет судить о полученных значениях энергии J_1 как о достаточно точных.

Пятая глава посвящена прикладным задачам моделирования и управления для динамических систем, содержащих как сосредоточенные, так и распределенные элементы. Для построения приближенных решений и оптимизации используются подходы, описанные ранее.

В §5.1 рассматриваются плоские вращательные движения упругого нагруженного звена манипулятора (см. рис. 5). На основе механической модели слабого изгиба тонкого прямолинейного стержня исследованы повороты звена, управляемого электроприводом, расположенным в шарнирно закрепленном конце. Проводится моделирование динамики жесткого и упругого манипуляторов, строится оптимальное по быстродействию управление движением в предельной модели абсолютно жесткого звена с учетом электромагнитных процессов в приводе. Исследу-

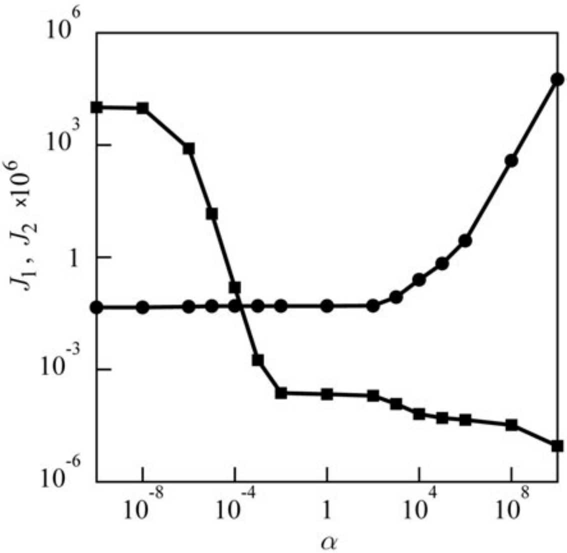

Рис. 4: Связь конечной энергии балки и точности решения.

ются различные допустимые законы управления. Эти рациональные управляющие воздействия применяются в упругой модели звена, дается оценка точности и амплитуды остаточных колебаний. На основе проекционного подхода, описанного в §2.5 и §4.4, численно находится оптимальное по терминальной энергии управление движением.

В §5.2 предложены математические модели экспериментальной установки, которая представляет собой характерную структуру мачтового подъемного механизма, часто используемого в различных автоматизированных конвейерных системах. Подъемник рассматривается как вязкоупругая конструкция, которая состоит из двух одинаковых балок, прикрепленных к подвижному основанию (см. рис. 6, слева). Верхние части балок жестко соединены с полиспастом, предназначенным для подъема полезной нагрузки. Цель управления — перемещение балочной конструкции за фиксированное время в заданное состояние, в котором

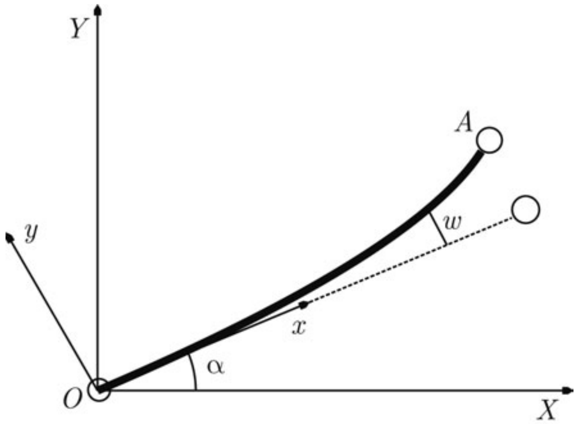

Рис. 5: Электромеханическое звено, нагруженное точечной массой.

минимизируется запасенная механическая энергия. Для построения алгоритма управления подъемником проведен частотный анализ исходной двухбалочной конструкции. На основе этого анализа предложена упрощенная балочная модель с краевыми условиями специального типа (рис. 6, справа). Для описания колебаний исследуемого механизма и построения оптимальных законов управления использована модификация метода Петрова–Галеркина, основанная на алгоритме метода конечных элементов из §2.5 и §4.4. Представлены результаты расчетов, которые сравниваются с экспериментальными данными измерений.

В §5.3 проводятся моделирование, частотный анализ и оптимизация процессов управления потоком жидкости в трубопроводе. Разработана математическая модель управляемой системы с распределенными параметрами, описывающая динамическое поведение вязкой сжимаемой жидкости, которая подается насосом и перемещается в длинной жесткой трубе. С использованием вспомогательных функций, описывающих силы в поперечном сечении трубы и эффективные перемещения жидкости, а также линейной аппроксимации сопротивления, исходная

Рис. 6: Модели мачтового подъемника: исходная и упрощенная.

задача с неоднородными параметрами сводится к системе уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и однородными начальными и граничными условиями.

Как и в §2.5, для численного моделирования динамики элемента трубопровода используется проекционный подход, основанный на обобщенной формулировке уравнений состояния системы, что обеспечивает возможность явных оценок качества решения. Ставится задача перевода потока жидкости в трубопроводе за фиксированное время в заданный стационарный режим и минимизации остаточных колебаний. Для оптимизации управляемых движений используются конечно-элементные аппроксимации давления и массового расхода жидкости в трубе. Сравниваются численные результаты, полученные для идеальной и вязкой сжимаемой жидкости.

Основные результаты диссертации

Даны новые вариационные постановки начальных и начально-краевых задач о вынужденных движениях упругих систем, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями как в обыкновенных, так и в частных производных, а также смешанными граничными и начальными условиями. Полученные интегро-дифференциальные формулировки сводятся либо к нахождению минимума квадратичных функционалов состояния системы, либо к определению их стационарных точек при заданных дифференциальных ограничениях. Ранее подобные обобщенные постановки были даны лишь для задач с краевыми и периодическими условиями по времени.

Выведены необходимые условия стационарности рассмотренных функционалов и установлено, что ограничения вместе с уравнениями Лагранжа–Эйлера, а также естественными граничными и терминальными условиями вариационной задачи, эквивалентны исходным определяющим соотношениям системы. Показана связь предложенных вариационных постановок задач динамики с классическим вариационным принципом Гамильтона–Остроградского.

Эти результаты обобщены на случаи электромеханических систем, вязкоупругих конструкций с протяженными элементами, акустической модели вязкого течения сжимаемой жидкости в трубопроводе.

С использованием предложенных в работе вариационных формулировок и метода Ритца разработаны новые алгоритмы численного решения задач динамики упругих систем с распределенными параметрами. Алгоритмы основаны на различных подходах к дискретизации исходной бесконечномерной задачи, включая полиномиальное представление неизвестных функций, конечно-элементные аппроксимации, а также дискретизацию по части переменных.

Развит проекционный подход к численному решению динамических задач, представляющий собой оригинальную модификацию метода Петрова–Галеркина на основе интегрального представления уравнений состояния. Проведен сравнительный анализ полученных различными подходами приближенных систем уравнений, представляющих собой либо алгебраические, либо обыкновенные дифференциальные уравнения.

Разработана регулярная процедура построения уточняющих уравнений собственных движений балок на основе вариационного и проекционного подходов и линейной теории упругости. Для полученных двумерных и трехмерных балочных моделей проведен частотно-волновой анализ свободных колебаний. Найдены частоты и формы поперечных и продольных движений для различных граничных условий. Для упругих тел балочного типа обнаружены специфические частотные диапазоны, в которых возникают особые формы собственных колебаний.

На основе развитых интегро-дифференциальных подходов к численному решению задач о движении механических систем с распределенными параметрами разработаны алгоритмы параметрической оптимизации управления. Показано, что оптимизация законов управления для квадратичных целевых функционалов сводится к последовательному решению двух систем линейных уравнений. Предложена процедура регуляризации полученного решения с учетом явных энергетических оценок качества аппроксимаций.

Проведены моделирование, анализ и оптимизация управления для ряда прикладных задач динамики систем, содержащих как сосредоточенные, так и распределенные параметры. Решена задача об управляемых вращениях нагруженного упругого звена в манипуляционной системе с электромеханическим приводом. Предложена математическая модель и выполнена оптимизация перемещений вязкоупругой конструкции мачтового подъемника. Построены оптимальные законы управления потоком вязкой сжимаемой жидкости, транспортируемой по протяженному участку трубопровода.

Основные публикации автора

[1] *Костин Г.В.* Динамика управляемых вращений нагруженного упругого звена в манипуляционной системе с электромеханическим приводом // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. 1989. № 6. С. 130–138.

[2] *Костин Г.В.* Моделирование управляемых движений электромеханического манипуляционного робота с упругими звеньями // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 4. С. 182–188.

[3] *Костин Г.В.* Влияние гармонических возмущений на управляемые движения механической системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 2. С. 16–25.

[4] *Костин Г.В.* Оптимальное по быстродействию управление механической системой с учетом сил трения и гармонического возмущения // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 4. С. 57–63.

[5] *Костин Г.В.* Построение оптимального управления движением упругих тел методом интегродифференциальных соотношений // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 4. С. 21–31.

[6] *Костин Г.В.* Моделирование вынужденных движений упругой балки на основе метода интегродифференциальных соотношений // ПММ. 2013. Том 77. Вып. 1. С. 83–101.

[7] *Акуленко Л.Д., Каушинис С.К., Костин Г.В.* Амплитудно-частотный анализ и моделирование динамики управляемых движений электромеханической системы выборки информации // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 43–50.

[8] *Акуленко Л.Д., Каушинис С.К., Костин Г.В.* Влияние сухого трения на управление движением электромеханических систем // Изв. РАН. Тех. кибернетика. 1994. № 1. С. 65–74.

[9] *Акуленко Л.Д., Костин Г.В.* Метод возмущений в задачах динамики неоднородных упругих стержней // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 452–464.

[10] *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Численно-аналитический метод исследования свободных колебаний неоднородных стержней // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 180–191.

[11] *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Влияние диссипации на пространственные нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 19–28.

[12] *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Колебания и распад жидкой самогравитирующейся массы // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 152–163.

[13] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Построение управляемых движений упругого стержня методом интегро-дифференциальных соотношений // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 1. С. 60–67.

[14] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Оптимизация движений упругого стержня методом интегродифференциальных соотношений // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 2. С. 56–64.

[15] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Доклады АН. 2006. Т. 408. № 6. С. 750–753.

[16] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Вариационная формулировка задач оптимизации движений упругих тел // Доклады АН. 2007. Т. 415. № 2. С. 180–184.

[17] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Вариационные подходы к решению начально-краевых задач динамики линейных упругих систем // ПММ. 2009. Том 73. Вып. 6. С. 934–953.

[18] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Моделирование и анализ собственных колебаний упругой призматической балки на основе проекционного подхода // ПММ. 2011. Том 75. Вып. 6. С. 995–1010.

[19] *Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Костин Г.В.* Метод ускоренной сходимости для определения собственных частот неоднородного стержня // Доклады РАН. 1996. Т. 349. № 5. С. 624–627.

[20] *Aschemann H., Kostin G.V., Rauh A., Saurin V.V.* Approaches to control design and optimization in heat transfer problems // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 3. С. 40–51.

[21] *Steinbach M.C., Bock H.G., Kostin G.V., Longman R.W.* Mathematical Optimization in Robotics: Towards Automated High-Speed Motion Planning // Surveys on Mathematics for Industry. 1998. V. 7. N. 4. P. 303–340.

[22] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Integrodifferential Relations in Linear Elasticity. De Gruyter Studies in Mathematical Physics 10. Berlin: De Gruyter, 2012.

[23] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Моделирование пространственных движений упругой балки на основе метода интегродифференциальных соотношений // Современные проблемы механики сплошной среды. Том 2. Труды XIV международной конференции. Ростов-на-Дону: Из-во ЮФУ, 2010 С. 165-169

[24] *Kostin G.V., Aschemann H., Saurin V.V., Rauh A.* Optimal real-time control of flexible rack feeders using the method of integrodifferential relations // Preprints MATHMOD 2012 Vienna - Full Paper Volume / [eds. I. Troch, F. Breitenecker] Vienna: ARGESIM, Report no. S38, 2012.

[25] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Method of integro-differential relation for optimal beam control // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2006. V. 6. Issue 1. 77th GAMM Annual Meeting, Berlin. P. 817–818.

[26] *Kostin G.V., Saurin V.V.* A variational approach to optimal control problems for elastic body motions // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2007. V. 7. Issue 1. Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics (ICIAM07) and 78th GAMM Annual Meeting, Zurich. P. 4130019–4130020.

[27] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Optimal control for 3D elastic body motions // Proc. Int. Summer School-Conf. APM, 2007, St. Petersburg, Russia.

[28] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Integrodifferential approach to optimal control problems of elastic beam motions // Proc. 3rd IFAC Workshop PSYCO'07, 2007, St. Petersburg, Russia. Periodic Control Systems, V. 3, Part 1

[29] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Motion analysis and optimization for beam structures // Proc. 9th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications DSTA, 2007, Lodz, Poland. P. 407–414.

[30] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Variational analysis in dynamical problems of linear elasticity // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2008. V. 8. Issue 1. 79th GAMM Annual Meeting, Bremen. P. 10301–10302.

[31] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Motion analysis and optimization for beam structures. In Modeling, Simulation and Control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems: State-of-the-Art, Perspectives and Applications / [ed. J. Awrejcewicz]. Springer, Netherlands. 2008. P. 201-210.

[32] *Kostin G.V., Saurin V.V.* A variational approach to 3d rod motion modeling and optimization // Proc. XXII ICTAM, 2008, Adelaide, Australia.

[33] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Varational approach and spline technique to optimization of controlled beam motions // Proc. ENOC, 2008, Saint Petersburg, Russia.

[34] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Variational formulation of optimal control problems for elastic body motions // In "Advances in Mechanics: Dynamics and Control: Proceedings of the 14th International Workshop on Dynamics and Control"/ [eds. F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin] Moscow: Nauka, 2008. P. 183–189.

[35] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Modeling and variational analysis of control problems for elastic body motions // Proc. Conference on Mathematical Modelling MATHMOD 09 / [eds. I. Troch, F. Breitenecker] Vienna, 2009. P. 468–478.

[36] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Variational technique to 3D dynamical control problems in linear elasticity // Proc. 15th International Workshop on Dynamics and Control / [eds. J. Rodellar, E. Reithmeier] Barcelona: CIMNE, 2009. P. 95–102.

[37] *Kostin G.V., Saurin V.V.* An integrodifferential approach and optimal control design for elastic beam motions // Proc. CAO2011: ECOMAS Thematic Conference on Computational Analysis and Optimization / [eds. S. Repin, T. Tiihonen, T. Tuovinen] Jyvaskyla: University of Jyvaskyla, 2011. P. 106–109.

[38] *Kostin G.V., Saurin V.V.* An integrodifferential approach to reliable optimal control design for elastic beam motions // Proc. 7th European

Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011) / [eds. D. Bernardini, G. Rega and F. Romeo] Rome: Sapienza University of Rome, 2011.

[39] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Design of optimal boundary control for elastic beam motions based on an integrodifferential approach // Proc. PHYSCON 2011, Leon, Spain, September 5-8, IPACS Electronic library, 2011

[40] *Kostin G.V., Saurin V.V., Aschemann H., Rauh A.* Modelling and optimization of control processes for compressible liquid flow in pipeline systems // Preprints MATHMOD 2012 Vienna - Full Paper Volume / [eds. I. Troch, F. Breitenecker] Vienna: ARGESIM, Report no. S38, 2012.

[41] *Rauh A., Senkel L., Aschemann H., Kostin G.V., Saurin V.V.* Reliable finite-dimensional control procedures for distributed parameter systems with guaranteed approximation quality // Proc. IEEE Multi-Conference on Systems and Control, 2012, Dubrovnik, Croatia.

[42] *Saurin V.V., Kostin G.V.* An integrodifferential approach to optimal damping of elastic structure vibrations // Proc. 15th International Workshop on Dynamics and Control (May 31 - June 3, 2009, Tossa de Mar, Spain)/ [eds. J. Rodellar, E. Reithmeier] Barcelona: CIMNE, 2009. P. 143–150.

Георгий Викторович Костин

Вариационные подходы к моделированию и оптимизации движений управляемых механических систем

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

01.02.01 — Теоретическая механика

Подписано к печати 10.10.2013. Заказ № 32-2013. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе Института проблем механики РАН

119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, 1