

На правах рукописи

**Степанов Федор Игоревич**

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С ТРЕНИЕМ  
ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва-2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН)

Научный руководитель: академик РАН Горячева Ирина Георгиевна,  
зав. лаб. трибологии ИПМех РАН

Официальные оппоненты: **Пшеничнов Сергей Геннадиевич**,  
д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник  
Института механики МГУ

**Федотенков Григорий Валерьевич**,  
к.-ф. м. н., доцент кафедры сопротивления  
материалов, динамики и прочности машин  
Московского авиационного института

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Донской государственный  
технический университет» (ДГТУ)

Защита состоится 16.03.2017 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета Д002.240.01 на базе ИПМех РАН по адресу: просп. Вернадского 101, корп.1, Москва.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН (<http://www.ipmnet.ru/diss/diss/>)

Автореферат разослан «01» февраля 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 002.240.01,  
к.ф.-м.н.

Сысоева Е.Я.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность работы

При фрикционном взаимодействии деформируемых тел сила трения возникает вследствие проявления двух основных механизмов: деформационных потерь энергии в поверхностных слоях контактирующих тел и адгезионного взаимодействия их поверхностей. В условиях граничного трения (смазанный контакт) основным механизмом трения является проявление релаксационных свойств материалов или их тонких поверхностных слоев.

В механике деформируемого твердого тела развивается направление, связанное с постановкой и решением контактных задач для вязкоупругих сред. Многие материалы, применение которых связано с контактным взаимодействием различного типа, в том числе и фрикционным, обладают реологическими свойствами (вязкоупругие материалы). Проявление реологических свойств материала при контактном взаимодействии является причиной деформационных потерь энергии при трении. В связи с этим указанный класс задач представляет особый интерес для исследователей. В настоящий момент существует большое количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных изучению вязкоупругих свойств материалов. Ряд исследований посвящен решению задач о фрикционном взаимодействии вязкоупругих тел. Построены аналитические решения ряда контактных задач в плоской постановке. Для решения пространственных контактных задач используются, как правило, численные методы, или решения строятся для упрощенных одномерных моделей вязкоупругого материала. Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью учета касательных напряжений в области контакта при решении контактных задач о скольжении тел по вязкоупругому

полупространству, а также необходимостью развития численных методов решения контактных задач для системы штампов с целью изучения эффекта взаимного влияния инденторов при их скольжении по вязкоупругому полупространству.

**Целями работы являются:**

- разработка метода решения контактных задач о скольжении единичного гладкого индентора, а также системы, состоящей из двух инденторов произвольной формы, по вязкоупругому полупространству, описываемому спектром времен релаксации, при наличии касательных напряжений в области контакта;
- исследование влияния на контактные характеристики формы индентора, а также касательных напряжений, действующих в области контакта при скольжении индентора по вязкоупругому полупространству;
- исследование эффекта взаимного влияния при скольжении системы из двух инденторов по границе вязкоупругого полупространства;
- исследование напряженного состояния вязкоупругого полупространства, возникающего при скольжении по нему одного и системы из двух инденторов параболической формы.

**Научную новизну составляют следующие результаты:**

- решение трехмерной контактной задачи о скольжении жесткого индентора по вязкоупругому полупространству с учетом касательных напряжений в области контакта;
- решение контактной задачи о скольжении по вязкоупругому полупространству системы из двух жестких инденторов с учетом их взаимного влияния;

- проведенный анализ влияния касательных напряжений в области контакта на контактные характеристики и деформационную составляющую силы трения;
- установление и анализ эффекта взаимного влияния двух инденторов при их одновременном скольжении по вязкоупругому полупространству, анализ зависимости контактных характеристик инденторов и деформационной составляющей силы трения от расстояния между инденторами и скорости скольжения;
- расчет и анализ напряженного состояния вязкоупругого полупространства при скольжении по нему одиночного индентора, а также системы из двух инденторов.

### **Достоверность результатов исследования обеспечена**

- использованием при разработке вычислительных программ проверенных численных методов, в частности, метода граничных элементов, метода Симпсона для вычисления интегралов, метода Гаусса с выбором главного элемента для решения СЛАУ;
- совпадением численных результатов решения задачи для вытянутого в одном направлении индентора с полученным ранее аналитическим решением аналогичной задачи в плоской постановке;
- совпадением результатов при близкой к нулевой скорости скольжения с решением задачи в упругой постановке.

### **Практическая ценность работы**

Результаты работы могут быть использованы:

- при моделировании множественного контакта жестких тел с вязкоупругим полупространством;

- для оценки деформационных потерь при трении в некоторых трибосопряжениях;
- для оценки необходимых прочностных характеристик материалов, используемых в некоторых механических узлах (на основании расчетов напряженного состояния).

### **Методы исследования**

- метод граничных элементов для решения контактных задач;
- методы численного интегрирования;
- методы численного решения СЛАУ.

### **Положения выносимые на защиту:**

- разработка методов решения контактных задач, позволяющих учитывать наличие касательных напряжений в области контакта, пригрузку, взаимное влияние двух инденторов в случае их одновременного скольжения по вязкоупругому полупространству;
- свойства решений контактных задач о скольжении тел по вязкоупругому полупространству, в том числе:
  - зависимость контактных характеристик (распределение давлений, форма и размеры области контактного взаимодействия, внедрение) индентора от касательных напряжений в области контакта, скорости скольжения, нагрузки, параметров материала основания;
  - контактные характеристики индентора при наличии точечных пригрузок, их зависимость от расстояния между центром индентора и пригрузки, скорости скольжения и параметров материала основания;

- контактные характеристики двух инденторов при одновременном скольжении, их зависимость от расстояния между инденторами, скорости скольжения, параметров материала основания;
- напряженное состояние, возникающее в полупространстве при скольжении по нему одного и двух инденторов при наличии и отсутствии касательных напряжений в области контакта.

### **Апробация работы**

Основные результаты работы были представлены на международных и российских конференциях, таких как: II Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», Новосибирск, 10–14 октября 2011; Ломоносовские чтения, Москва, МГУ, 2013; VII Всероссийская (с международным участием) конференция по механике деформируемого твёрдого тела, Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013; 56-я научная конференция МФТИ с международным участием, Москва, 25–30 ноября 2013; 5th ASIATRIB 2014, Ангара, Индия, 17-20 февраля 2014; III Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций», Новосибирск, 26–30 мая 2014; 57-я научная конференция МФТИ с международным участием, 24–29 ноября 2014, Москва; Ломоносовские чтения, 2014, Москва, МГУ; WCCM-ECCM-ECFD 2014 Congress, Барселона, Испания, 20-25 июля 2014; Международная научно-техническая конференция. ИММС НАНБ. Гомель Беларусь, 2015; XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20 – 24 августа, 2015; Совместное заседание семинара по механике сплошной среды им. Л.А. Галина ИПМех РАН под руководством профессора А.В. Манжирова и семинара по механике фрикционного

взаимодействия твердых тел им. И.В. Крагельского ИПМех РАН под руководством академика РАН И.Г. Горячевой, 2016; 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM-2016, Монреаль, Канада, 21-26 августа, 2016.

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Количество страниц в диссертации – 83, в том числе иллюстраций – 29, список литературы содержит 79 наименований

### **Содержание работы**

Во введении обоснована актуальность исследования, приводится обзор литературы, касающейся темы диссертации. В данный обзор вошли экспериментальные работы, в которых изучалась деформационная составляющая силы трения при качении и скольжении, а также основные результаты теоретических исследований, в которых предпринимались попытки математического моделирования фрикционного взаимодействия жестких тел с материалами, обладающими реологическими свойствами. Кроме того перечислены работы, в которых решение контактных задач осуществляется с помощью основных методов. Во введении указаны цели работы, апробация результатов, основные публикации автора, описана структура работы и дано краткое содержание.

В **Главе 1** рассматривается контактная задача об установившемся скольжении со скоростью  $V$  жесткого параболического индентора по вязкоупругому основанию, свойства которого описываются следующей



зависимостью сдвиговых деформаций  $\gamma(t)$  от касательных напряжений  $\tau_{xz}(x, y)$ :

$$\gamma(t) = \frac{1}{G} \tau_{xz}(t) + \frac{1}{G} \int_{-\infty}^t \tau_{xz}(\tau) K(t-\tau) d\tau; \quad K(t') = \sum_i k_i \exp\left(-\frac{t'}{\lambda_i}\right) \quad (1)$$

Ядро релаксации имеет экспоненциальный вид и задается спектром времен релаксации  $1/k_i$  и времен последействия  $\lambda_i$ ,  $G$  – мгновенный модуль сдвига. Коэффициент Пуассона считается не зависящим от времени. В области контакта действуют касательные напряжения в соответствии с законом Кулона-Амонтона (моделирующие адгезионную составляющую силы трения). Подвижная декартова система координат  $(x, y, z)$  связана с индентором, ее центр совпадает с первоначальной точкой касания индентора с границей полупространства, ось  $Ox$  сонаправлена вектору скорости, а ось  $z$  направлена по внешней нормали к границе полупространства.

Рассматриваются следующие граничные условия на плоскости  $z = 0$ :

$$z = 0: \quad \tau_{xz}(x, y) = \mu \sigma_z(x, y), \quad \tau_{yz} = 0, \quad w(x, y) = f(x, y) + D \quad \text{при } (x, y) \in \Omega$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } (x, y) \notin \Omega, \quad (2)$$

а также условие равновесия:

$$Q = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy \quad (3)$$

Здесь  $\Omega$  – область контакта,  $f(x, y)$  – гладкая функция, описывающая форму индентора,  $D$  – внедрение индентора в полупространство  $\sigma_z$  и  $\tau_{xz}$ ,

$\tau_{yz}$  – нормальное и касательные напряжения,  $\mu$  – коэффициент трения скольжения.

Решение задачи осуществляется методом граничных элементов. Для этого на границе полупространства выбирается прямоугольная область  $\Omega^*$  таким образом, чтобы искомая площадка контакта оказалась заведомо внутри нее. Сетка, построенная внутри выбранной области, служит областью определения для кусочно-постоянных функций контактного давления и вертикальных смещений границы полупространства. Соотношение, связывающее вертикальные перемещения границы полупространства с контактными давлениями получено из решения задачи о движении распределенной нагрузки по вязкоупругому полупространству, и в случае, если рассматривается одно время релаксации  $1/k$  и последствия  $\lambda$ , принимает вид:

$$w(x, y) = \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_{\Omega} \mu p(\xi, \eta) \left[ \frac{\xi-x}{R^2} + \frac{1}{V} k I_1 \left( \frac{\xi-x}{\lambda V}, \frac{\eta-y}{\lambda V} \right) \right] d\xi d\eta -$$

$$- \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{V} k I_2 \left( \frac{\xi-x}{\lambda V}, \frac{\eta-y}{\lambda V} \right) \right] d\xi d\eta,$$

$$R = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2},$$

$$I_1(\alpha, \beta) = e^{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + \beta^2}, \quad I_2(\alpha, \beta) = e^{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}, \quad u = \frac{\xi-x-V\tau}{\lambda V} \quad (4)$$

На основании граничных условий (2), условия равновесия (3) и соотношения (4) строится система уравнений, которая в случае разбиения области  $\Omega^*$  на  $N \times N$  квадратных со стороной  $\Delta$  элементов запишется в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \dots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

Здесь  $\Delta^2$  – площадь элемента разбиения  $\Omega^*$ ,  $k_j^i$  соответствуют вертикальному смещению поверхности полупространства в центре ячейки разбиения  $j$  в результате действия единицы давления внутри ячейки  $i$ . На основании выражения (4), а также с учетом введения безразмерных параметров выражение для  $k_j^i$  запишется как

$$k_j^i = \frac{1}{\pi^2 c} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \iint_{\Omega_i} \left\{ \frac{(\xi' - x_{ij}') \mu}{(\xi' - x_{ij}')^2 + (\eta' - y_{ij}')^2} + \mu B e^{A(\xi' - x_{ij}')} \int_{A(\xi' - x_{ij}')}^{\infty} \frac{e^{-u} u du}{u^2 + A^2 (\eta' - y_{ij}')^2} \right\} d\xi' d\eta' -$$

$$- \frac{2}{\pi^2 c} \iint_{\Omega_i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\xi' - x_{ij}')^2 + (\eta' - y_{ij}')^2}} + B e^{A(\xi' - x_{ij}')} \int_{A(\xi' - x_{ij}')}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + A^2 (\eta' - y_{ij}')^2}} \right\} d\xi' d\eta' \quad (6)$$

Используемые безразмерные параметры (где  $r$  – характерный размер индентора):

$$(x', y', \xi', \eta') = \frac{1}{r} (x, y, \xi, \eta), \quad c = \frac{G}{G_l}, \quad A = \frac{r}{\lambda V},$$

$$B = k \frac{r}{V}, \quad Q' = \frac{Q}{G_l r^2}, \quad p'(x, y) = \frac{p(x, y)}{G_l}, \quad V' = \frac{V \lambda}{r} \quad (7)$$

$G_l$  – длительный модуль сдвига. Поскольку область контакта заранее неизвестна, при решении системы (5), полученные давления могут оказаться положительными, отрицательными и равными нулю. Элементам с

отрицательными значениями, присваивается значение нуль, а ранг матрицы системы (5) сокращается за счет всех нулевых элементов давления и система решается заново. Данная процедура прекращается, когда решение системы (5) перестает содержать в себе отрицательные значения давления. Таким образом определяются площадка контакта, распределение контактного давления и внедрение индентора в полупространство.

Для проверки корректности метода решения проведено сравнение решения контактной задачи для индентора, форма поверхности которого описывается функцией:

$$f(x, y) = -(3x^2 + y^2) / (2r) \quad (8)$$

с аналитическим решением задачи в плоской постановке о скольжении цилиндра по вязкоупругому полупространству.

Проведен анализ зависимости контактных характеристик индентора формы

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2) / (2r). \quad (9)$$

от ряда безразмерных параметров, таких как  $V'$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $c$ ,  $Q'$ . На рис. 1 представлены распределения контактного давления при трех различных значениях параметра  $c$ . Параметр  $c=1$  соответствует упругому полупространству. В случае скольжения по вязкоупругому полупространству, при увеличении параметра  $c$ , площадка контакта уменьшается и сдвигается в направлении скольжения индентора, ее форма становится вытянутой вдоль оси  $Oy$ , максимальное значение давления увеличивается.

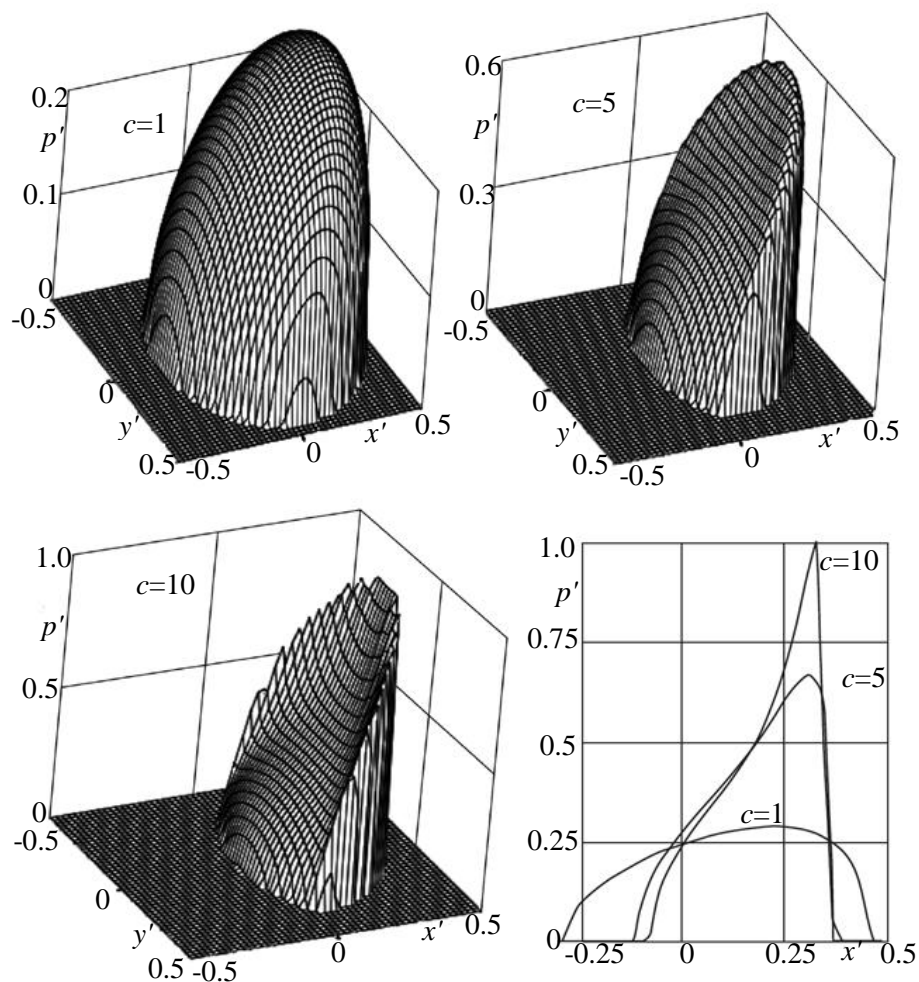


Рис. 1 – Распределение контактного давления при различных значениях параметра:  $c = 1; 5; 10$  ( $Q' = 0.08, V' = 0.416, \mu = 0.5$ ).

Исследовалось влияние скорости на контактные характеристики индентора. При увеличении скорости скольжения, размер площадки контакта уменьшается, степень ее асимметрии относительно плоскости  $x=0$  возрастает, а при дальнейшем увеличении скорости уменьшается. Контактные давления в центральном сечении  $y=0$  распределены несимметрично относительно начальной точки касания. Максимальные значения контактных давлений возрастают при увеличении скорости.

Показано, что при увеличении коэффициента  $\mu$  трения скольжения площадка контакта смещается по направлению скольжения, максимальное давление внутри нее увеличивается, а расположение максимума давления сдвигается в сторону движения индентора (см. рис. 2.а.). Такое перераспределение давления при наличии касательных напряжений в области контакта увеличивает значение деформационной составляющей силы трения, определяемой соотношением:

$$\mu^* = \frac{T^*}{P} = \frac{\iint_{\Omega} xp(x, y) dx dy}{r \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy} \quad (10)$$

Показано, что коэффициент Пуассона оказывает существенное влияние на деформационную составляющую коэффициента трения (чем меньше коэффициент Пуассона, тем больше гистерезисные потери). На рис. 2.б. представлены зависимости деформационной составляющей коэффициента трения (10) от скорости при разных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$  и коэффициента трения  $\mu$ .

Поскольку коэффициент Пуассона в выбранной модели материала постоянен, расчет напряженного состояния внутри полупространства осуществляется с использованием известных выражений для расчета напряжений внутри упругого полупространства при действии на него сосредоточенной силы Буссинеска и Черутти. В результате исследования напряженного состояния вязкоупругого полупространства обнаружено, что максимумы максимальных касательных напряжений могут локализоваться как под поверхностью, так и на поверхности в зависимости от величины коэффициента трения, а растягивающие и сжимающие напряжения достигают максимума на поверхности. Величина максимумов напряжений

растет с увеличением скорости скольжения, она несколько больше для материалов с меньшим значением коэффициента Пуассона.

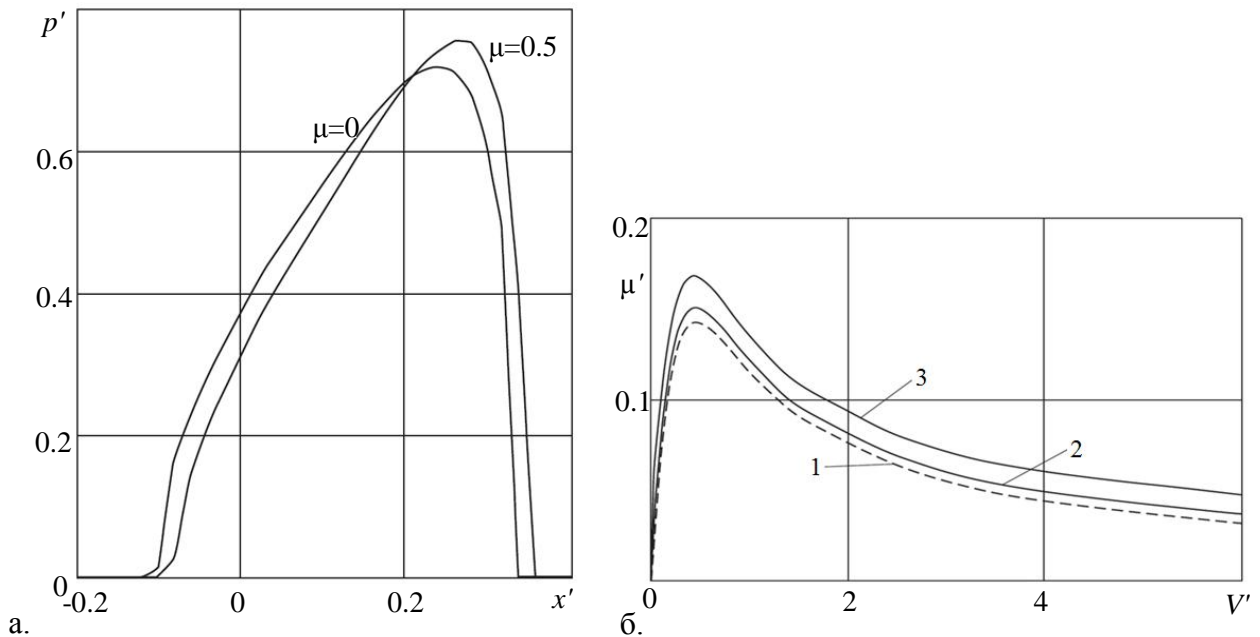


Рис. 2. – Распределение контактного давления (а) в плоскости  $y = 0$  при  $\mu=0$  и  $\mu=0.5$  ( $Q' = 0.1$ ,  $c = 5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $V' = 0.66$ ) и зависимость деформационной составляющей коэффициента трения (б) от безразмерной скорости при  $c = 5$ ,  $Q' = 0.1$ , (кривая 1 –  $\nu = 0.3$ ,  $\mu = 0$ , кривая 2 –  $\nu = 0.45$ ,  $\mu = 0.5$ , кривая 3 –  $\nu = 0.3$ ,  $\mu = 0.5$ );

Увеличение коэффициента трения также приводит к росту концентрации напряжений под штампом. На рис. 3 представлено распределение компоненты напряжений  $\sigma'_{xx}(x, 0, 0)$  на оси  $Ox$ . С ростом  $\mu$  увеличивается перепад значений напряжений.

Наличие трения приводит к тому, что максимальное растяжение локализуется позади области контакта, а резкое изменение значения напряжений приходится на область сжатия.

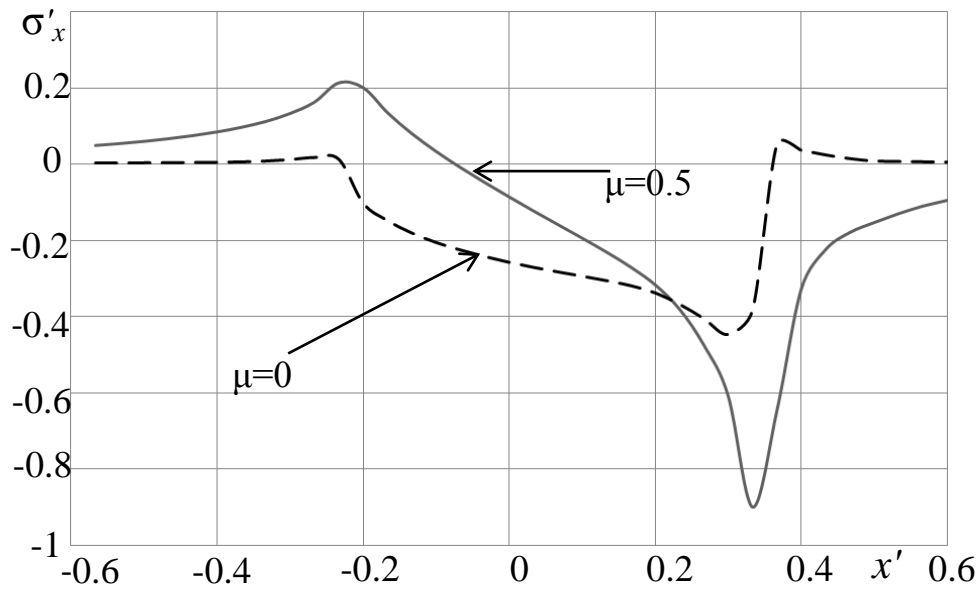


Рис. 3 – Распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности полупространства при  $Q' = 0.1$ ,  $c = 5$ ,  $V' = 0.75$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu = 0.5$ .

В Главе 2 рассматривается контактная задача об установившемся скольжении жесткого параболического индентора по вязкоупругому основанию при наличии двух сосредоточенных сил, действующих на границу полупространства в точках с координатами  $(-l, 0)$  и  $(l, 0)$ . Вязкоупругие свойства материала полупространства определяются соотношением (1). Условия на границе полупространства ( $z = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz}(x, y) &= \mu \sigma_z(x, y), \quad w(x, y) = f(x, y) + \psi(x, y, l) + D : (x, y) \in \Omega, \\
 \tau_{xz}(x, y) &= T \delta(x \pm l, y \pm 0), \quad \sigma_z(x, y) = Q \delta(x \pm l, y \pm 0), \\
 \tau_{xz}(x, y) &= 0, \quad \sigma_z(x, y) = 0 : (x, y) \notin \{\Omega, (-l, 0), (l, 0)\}, \\
 \tau_{yz} &= 0 : -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Функция  $\psi(x, y, l)$  описывает вертикальные перемещения границы полупространства, обусловленные воздействием на нее сосредоточенных



сил. Справедливо также условие равновесия (3). Как и в **Главе 1** решение осуществляется с помощью метода граничных элементов. На основании граничных условий (11) и условия равновесия составляется линейная система уравнений:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \dots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ f_1 + \psi_1 \\ \vdots \\ f_N + \psi_N \end{bmatrix} \quad (12)$$

Элементы  $\psi_i$ , входящие в (12), вычисляются с помощью выражения для вертикальных перемещений границы вязкоупругого полупространства, вызванных воздействием сосредоточенной силы:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) = & \frac{(1-2\nu)T_x}{4\pi G} \left[ \frac{\xi - x}{R^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\xi - x - V\tau}{R_*^2} d\tau \right] + \\ & + \frac{(1-2\nu)T_y}{4\pi G} \left[ \frac{\eta - y}{R^2} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{\eta - y}{R_*^2} d\tau \right] - \frac{(1-\nu)T_z}{2\pi G} \left[ \frac{1}{R} + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \frac{1}{R_*} d\tau \right], \\ & R_* = \sqrt{(\xi - x - V\tau)^2 + (\eta - y)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Система (12) решается при помощи итерационного процесса, описанного в **Главе 1**, в результате определяются распределение контактного давления, площадка контакта и внедрение индентора.

Приведен анализ решения контактной задачи. Обнаружен эффект разделения площадки контакта индентора на две подобласти вследствие воздействия сосредоточенных сил (см. рис. 4). Наличие сосредоточенных сил, впереди и позади индентора, вызывают снижение деформационной

составляющей коэффициента трения по сравнению со случаем изолированного индентора. Установлено, что деформационная составляющая коэффициента трения может принимать отрицательные значения при малых расстояниях между сосредоточенными силами и центром индентора

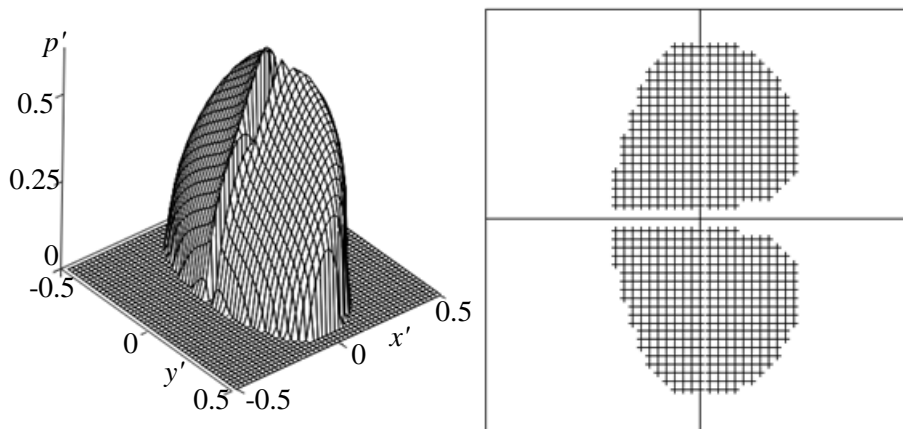


Рис. 4 – Распределение контактного давления и площадка контакта индентора ( $Q' = 0.1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $c = 3$ ,  $V' = 1.25$   $\mu = 0.5$ ).

Увеличение расстояния от центра индентора до точек приложения сосредоточенных сил вызывает увеличение деформационной составляющей коэффициента трения вплоть до асимптотического значения, соответствующего изолированному индентору.

На рис. 5 представлена зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости для трех случаев: скольжение изолированного индентора, а также случаев скольжения индентора с пригрузкой находящейся на расстоянии  $l' = 3; 10$ . Наличие пригрузки вызывает снижение деформационной составляющей коэффициента трения вплоть до отрицательных значений.

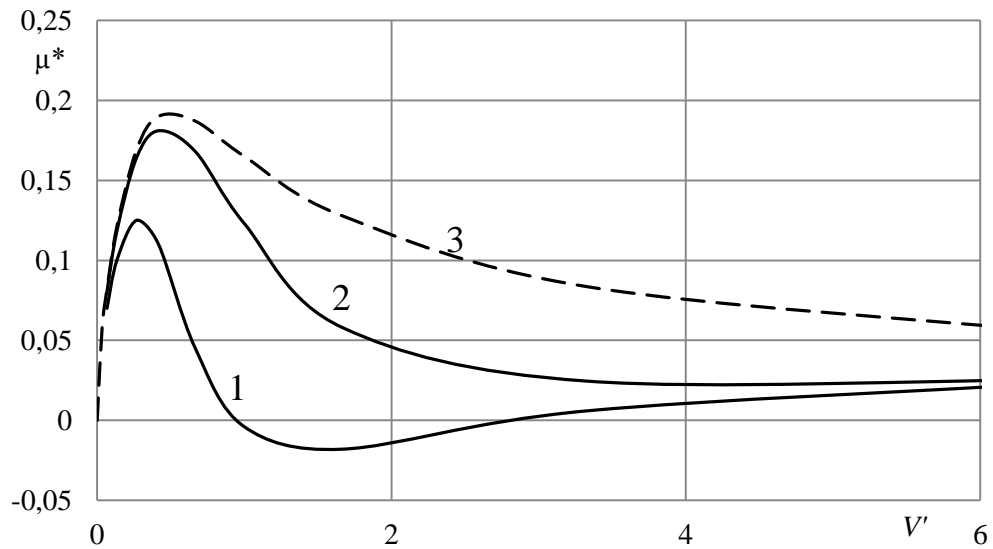


Рис. 5 – Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от скорости скольжения  $c = 5$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $Q' = 0.1$  (кривая 1 –  $l' = 3$ )  
кривая 2 –  $l' = 10$ , кривая 3 – изолированный штамп

В **Главе 3** рассматривается контактная задача об установившемся скольжении по вязкоупругому полупространству системы двух инденторов расположенных вдоль оси  $Ox$ , направленной в сторону скольжения инденторов. Модель материала полупространства описывается выражением (1). Каждый индентор нагружен вертикальной силой  $Q$ . Система координат  $(x, y, z)$  связана с индентором 1, движущимся за индентором 2, ось  $z$  направлена по внешней нормали к границе полупространства. Расстояние между инденторами постоянно  $l = const$ . На границе полупространства выполняются следующие граничные условия:

$$z = 0: \quad \tau_{xz}(x, y) = \mu \sigma_z(x, y), \quad \tau_{yz} = 0,$$

$$w_1(x, y) = f(x, y) + \psi_1(x, y) + D_1 \quad (x, y) \in \Omega_1$$

$$w_2(x, y) = f(x - l, y) + \psi_2(x, y) + D_2 \quad (x, y) \in \Omega_2$$

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (x, y) \notin \Omega_1, \Omega_2$$

(14)

$\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – области контакта инденторов (здесь и далее индексы 1 и 2 обозначают соответствие индентору 1 или 2),  $D_1$  и  $D_2$  – внедрения инденторов,  $w_1(x, y)$  и  $w_2(x, y)$  вертикальные перемещения поверхности полупространства. Функции  $\psi_1(x, y)$  и  $\psi_2(x, y)$  описывают дополнительные вертикальные перемещения полупространства в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , соответственно, в результате воздействия соседнего индентора,  $f(x, y) = -(x^2 + y^2)/(2r)$  описывает форму каждого из инденторов в системах координат, связанных с их центрами ( $r$  – радиус каждого индентора). Справедливо условие равновесия:

$$Q = \iint_{\Omega_i} p(x, y) dx dy, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

Задача решается методом граничных элементов. Сначала один из инденторов рассматривается как изолированный, с помощью метода, описанного в **Главе 1**, определяются его контактные характеристики. Используя полученное распределение давления, а также соотношение (4), вычисляется кусочно-постоянная функция дополнительных перемещений в прямоугольной области  $\Omega_1^*$ , заведомо содержащей в себе область контакта соседнего индентора 1. На основании граничных условий (14) и условия равновесия (15) составляется система уравнений:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 & \cdots & \Delta^2 & 0 \\ k_1^1 & \cdots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \cdots & k_N^N & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ \vdots \\ p_{1,N} \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ f_{1,1} + \psi_{1,1} \\ \vdots \\ f_{1,N} + \psi_{1,N} \end{bmatrix} \quad (16)$$

После определения контактных характеристик индентора 1, вычисляется функция дополнительных перемещений полупространства в области  $\Omega_2^*$ , определяются контактные характеристики индентора 2 и так далее, до момента, когда найденные площадки контакта инденторов перестают отличаться от соответствующих площадок на предыдущем шаге процедуры, а изменения контактных давлений не превышают заданной погрешности. Таким образом, контактные характеристики инденторов определяются с учетом их взаимного влияния. В результате взаимодействия между инденторами площадка контакта заднего индентора смещается назад, возникает падение давления в центре, а при достаточно большой скорости скольжения возникает эффект разделения площадки контакта на две подобласти (рис. б). Этот эффект имеет место при достаточно близком расположении инденторов. Если  $l$  – велико, взаимное влияние не проявляется.

Обнаружено, что деформационная составляющая коэффициента трения системы инденторов всегда меньше, чем изолированного индентора, а уменьшение расстояния между центрами инденторов приводит к уменьшению деформационной составляющей коэффициента трения.

Деформационная составляющая коэффициента трения переднего индентора больше чем у изолированного на постоянную величину, не зависящую от скорости скольжения. В то же время разница между деформационной составляющей коэффициента трения заднего и изолированного индентора увеличивается с увеличением скорости скольжения.

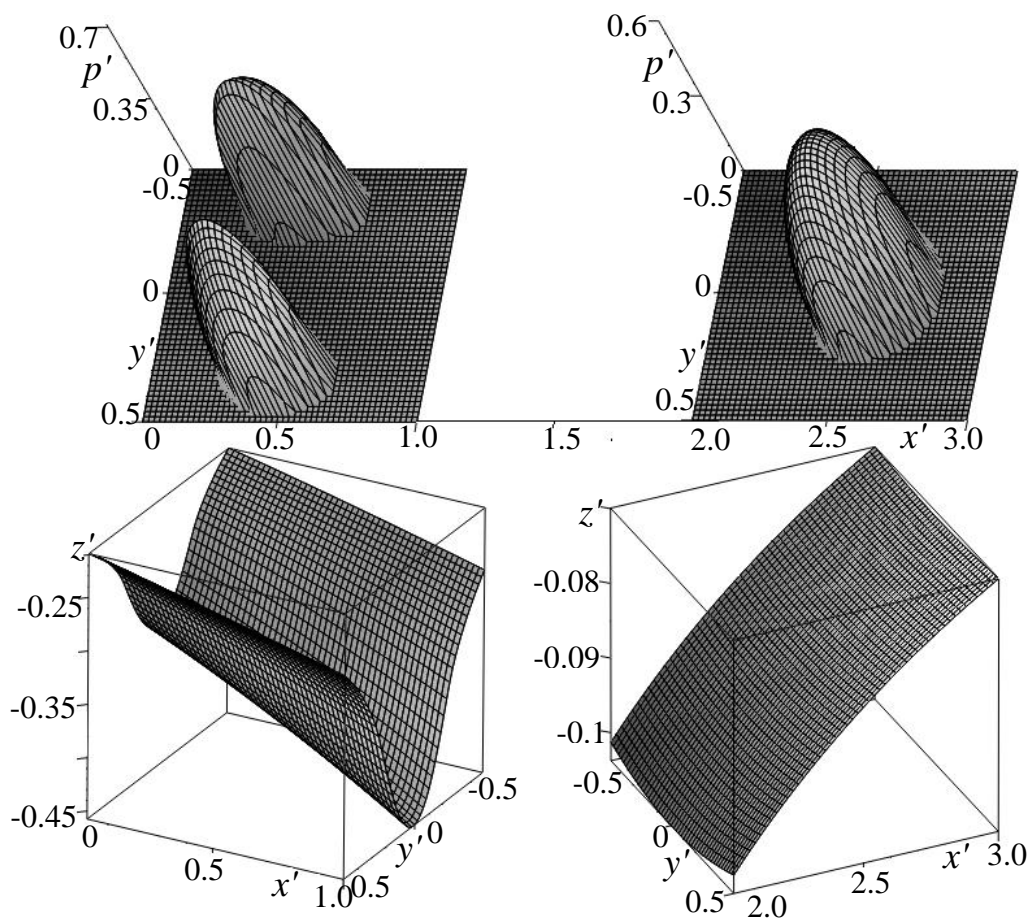


Рис. 6 – Распределение контактного давления и соответствующие функции дополнительных перемещений,  $c = 3$ ,  $l' = 2$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $V' = 6$ .

Деформационная составляющая коэффициента трения заднего индентора может принимать отрицательные значения при достаточно высокой скорости скольжения и небольшом расстоянии между центрами инденторов.

Приведен анализ напряженного состояния полупространства. Показано, что пики максимальных касательных напряжений в плоскости  $y = 0$  находятся под передним индентором на некотором расстоянии от поверхности полупространства, причем максимальные значения возрастают с увеличением скорости скольжения.

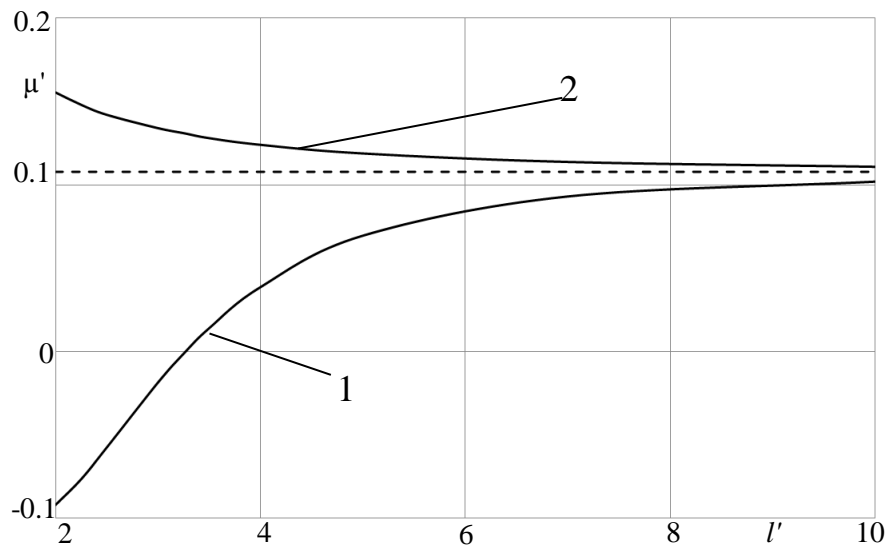


Рис. 7. Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения индентора 1 и 2 от расстояния между ними ( $c = 3$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $V' = 3$ ,  $Q' = 0.08$  ).

При относительно небольшой скорости скольжения, пик максимальных касательных напряжений находится под передним индентором, при увеличении скорости скольжения и разделении площадки контакта заднего индентора, пик максимальных касательных напряжений оказывается под ним.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы:

- Разработан метод решения контактной задачи о скольжении гладкого индентора по вязкоупругому полупространству, который позволяет провести анализ влияния формы индентора, касательных напряжений в области контактного взаимодействия, а также вязкоупругих характеристик основания, нагрузки и скорости скольжения на распределение напряжений и силу сопротивления при скольжении с трением жесткого индентора по вязкоупругому полупространству.

- Показано, что общая сила трения не является прямой суммой ее деформационной и адгезионной составляющих, как это часто принимается при расчете силы сопротивления скольжению деформируемых тел.
- Предложен метод исследования взаимного влияния инденторов при их скольжении по вязкоупругому полупространству. На основании произведенных расчетов сделаны следующие выводы:
  - скорость скольжения и расстояние между инденторами оказывают существенное влияние на распределение контактного давления, площадку контакта и силу трения. Обнаружен новый эффект разделения площадки контакта на две подобласти у позади скользящего индентора при уменьшении расстояния между ними;
  - деформационная составляющая коэффициента трения увеличивается у переднего индентора и снижается у заднего в результате их взаимного влияния; система из двух инденторов при фиксированной скорости скольжения и расстоянии между инденторами имеет деформационную составляющую коэффициента трения ниже, чем изолированный индентор; при увеличении расстояния между инденторами, деформационная составляющая коэффициента трения системы стремится к значению, соответствующему изолированному индентору.
- Проведен анализ напряженного состояния для случая скольжения по вязкоупругому полупространству изолированного индентора, а также системы, состоящей из двух инденторов; установлены места концентрации максимальных касательных и растягивающих напряжений при различных скоростях скольжения.



## Публикации

1. Степанов Ф. И., Последовательное скольжение двух гладких штампов по вязкоупругому основанию с трением.//Прикладная механика и техническая физика. 2015. - Т.56, №6, 2015, С.158-165.
2. Горячева И. Г., Степанов Ф. И., Торская Е. В. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству//ПММ. 2015. Т. 79. Вып 6. С.853-863.
3. Goryacheva I.G., Stepanov F.I., Torskaya E.V. Effect of friction in sliding contact of a sphere over a viscoelastic half-space //Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures, series Computational Methods in Applied Sciences, Springer. 2016, P. 93-103.
4. Степанов Ф. И., Торская Е. В., Исследование напряженного состояния при скольжении штампа по вязкоупругому полупространству//Трение и износ. 2016, Т.37, №2, С.12-17.
5. Степанов Ф. И., Влияние пригрузки на контактные характеристики при скольжении гладкого индентора по вязкоупругому основанию// XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20 – 24 августа 2015 года. С. 1042-1044
6. Goryacheva I.G. and Stepanov F.I. The system of indenters sliding over the viscoelastic half-space (ICTAM 2016, 20-28 августа 2016, Монреаль, Канада)
7. Горячева И. Г., Степанов Ф. И. Трехмерные контактные задачи о скольжении системы штампов по вязкоупругому полупространству XVIII Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 7–10 ноября 2016 г., Ростов-на-Дону

8. Горячева И. Г., Степанов Ф. И. Напряженное состояние вязкоупругого полупространства при движении по нему штампа. Научная конференция «Ломоносовские чтения–2016» Москва, Россия 18-22 апреля 2016.

*Научное издание*

Степанов Федор Игоревич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Пространственная контактная задача с трением для вязкоупругих тел

Подписано в печать 23.01.2017. Заказ 1-2017. Тираж 70 экз.

---

Отпечатано на ризографе в Институте проблем механики им. А.Ю.

Ишлинского РАН

119526, Москва, проспект Вернадского, 101, корп. 1