

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова –  
обособленное структурное подразделение  
Федерального государственного бюджетного  
научного учреждения  
Уфимского федерального исследовательского  
центра Российской академии наук  
450054, г. Уфа, проспект Октября, 69, лит. Ж.  
Тел./факс (347) 235-52-55, e-mail: imran@anrb.ru

УТВЕРЖДАЮ

ИО директор ИМех УФИЦ РАН

к.ф-м.н. Галимзянов М.Н.

«27» августа 2020 г.

## ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертацию Сандуляну Штефана Васильевича «Асимптотические и численные методы исследования взаимодействия газовых пузырьков в жидкости вблизи их контакта в пульсирующем поле давления», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

### Актуальность темы диссертации.

Эффекты слияния и дробления пузырьков, которые часто не учитываются, оказывают существенное влияние на дисперсный состав газожидкостных систем. Проблема взаимодействия двух газовых пузырьков в жидкости при звуковом воздействии является одной из сложных нерешенных проблем гидродинамики многофазных сред, хотя она привлекает интерес исследователей более ста лет. Она привлекает значительный теоретический интерес, а также от ее решения во многом зависит эффективность технологических процессов, использующих газожидкостные системы. Таким образом, задача определения условий слияния пульсирующих пузырьков или его отсутствия является несомненно актуальной.

### Содержание работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, который включает 93 наименования. Общий объем диссертации составляет 129 страниц.

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и основные задачи исследования, раскрывается ее научная новизна, теоретическая и практическая значимость, сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** представлен обзор работ, посвященных взаимодействию двух пульсирующих газовых пузырьков в жидкости. Поставленную задачу предлагается решать методом, с использованием уравнений Лагранжа второго рода, в предположении, что собственные частоты колебаний пузырьков много больше частоты акустического воздействия, а амплитуда пульсации давления много меньше атмосферного. Кратко приведены основные результаты работы.

**Во второй главе** найдена кинетическая энергия идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной изнутри двумя сферами переменных радиусов, которые движутся вдоль прямой, проходящей через центры сфер. Для потенциального осесимметричного течения найдена функция тока в бисферических координатах в виде разложения по полиномам Гегенбауэра. Коэффициенты разложения найдены из граничных условий по нормали к поверхностям сфер. С помощью функции тока была найдена кинетическая энергия жидкости в виде квадратичной формы четырех скоростей: скоростей центров сфер и скоростей изменения радиусов. Все десять коэффициентов квадратичной формы представлены в виде точных рядов зависящих от радиусов сфер и расстояния между их центрами. Показана тождественность данных рядов с ранее полученными рядами Хикса, Нермана и Воинова.

С помощью преобразования Меллина для коэффициентов квадратичной формы были найдены асимптотические разложения при малом зазоре между поверхностями сфер. Вблизи контакта по формуле Лагранжа найдены гидродинамические силы действующие на сферы.

**В третьей главе** рассматривается движение двух сфер переменных радиусов вдоль линии центров в вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса для различных граничных условий: прилипание, нулевое

тангенциальное напряжение и проскальзывание. В первых двух случаях, аналогично первой главе, были найдены функции токов в бисферических координатах как разложение по полиномам Гегенбауэра. С помощью функции тока были получены выражения для вязких сил в виде рядов и найдены их главные асимптотики вблизи контакта. Для случая проскальзывания асимптотики вязких сил были найдены с помощью метода тонкого слоя. Полученные асимптотики в частных случаях согласуются с ранее известными результатами других исследователей.

**Четвертая глава** посвящена изучению динамики пузырьков вблизи контакта. С помощью преобразования Рауса уравнения Лагранжа приведены к одному уравнению для зазора между пузырьками. Анализ данного уравнения был осуществлен с помощью метода осреднения. Уравнения Лагранжа также решались численно и результаты согласуются с методом осреднения.

Для вязкой силы отдельно были исследованы случай прилипания на границе и случай нулевого тангенциального напряжения. Для первого из них методом осреднения было получено, что при отношении радиусов менее 2.8 усредненная сила остается отрицательной вплоть до контакта, то есть вязкая сила не может препятствовать слиянию пузырьков. При отношении радиусов пузырьков более 3 с помощью метода осреднения, а также численными расчетами уравнений Лагранжа была найдена область параметров вязкости и амплитуды пульсаций пузырьков, при которых сближение заканчивается колебаниями на некотором конечном зазоре между пузырьками. Для вязкой силы, соответствующей нулевому тангенциальному напряжению, как методом осреднения, так и численными расчетами, было получено, что пузырьки будут сближаться вплоть до контакта, то есть будут сливаться.

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

### **Новизна исследований.**

1. Выведены более удобные выражения для кинетической энергии идеальной жидкости с двумя пульсирующими сферами.

2. Из уравнений Стокса вязкой жидкости получены более удобные выражения для вязких сил.

3. На основе известных формул получены более удобные асимптотики для вязких и невязких сил, действующих на пузырьке в жидкости, по малому параметру – расстоянию между поверхностями сфер.

4. Численно и приближенно исследованы уравнения сближения сфер.

5. Выведены уравнения слияния пузырьков.

### **Практическая значимость.**

Полученные результаты могут быть использованы для эффективного освобождения газовой фазы из газожидкостных систем при технологических процессах. Учет слияния пузырьков также необходим в процессах интенсификации массообмена с применением ультразвукового воздействия в различных областях: химических, биологических, а также в медицине.

### **Достоверность полученных результатов**

Достоверность результатов диссертации обусловлена корректностью постановок задач и применением строгих математических методов для их решения. Также достоверность полученных рядов и асимптотик подтверждается их сравнением с результатами других точных и асимптотических решений, описанных в литературе. Условие парного слияния пузырьков качественно находится в согласии с экспериментальной литературой.

### **Замечания по диссертационной работе**

1. Проблема взаимодействия двух пузырьков в несжимаемой жидкости под воздействием гармонического акустического поля рассмотрена в трех предельных ситуациях, а именно, когда жидкость является идеальной и жидкость вязкая. При этом, в случае вязкой жидкости уравнение импульсов в терминах линии тока принято в приближении Стокса и рассмотрено два

случая, когда на поверхности пузырьков выполняется условие прилипания и тангенциальное напряжение равно нулю (поверхность пузырьков является свободной границей). Однако, в работе слабое уделяется внимание сравнительному анализу результатов, полученных для рассмотренных ситуаций. Отметим также, что следовало бы более детально обсудить количественные и качественные эффекты, вытекающие из полученных теоретических решений. Вместо этого автор ограничивается констатацией фактов следующих из полученных формул (это касается, например, описания результатов представленных на стр. 16 и 17 автореферата).

Не обсуждается также результат о характерных взаимодействии пузырьков в идеальной и вязкой жидкости, когда в первом случае для силы взаимодействия выполняется третий закон Ньютона, а во втором – нет.

2. Формулы получены с помощью точных решений уравнений для функции тока в идеальной жидкости с двумя сферами, скорости центров которых направлены по линии, проходящей через центры. В действительности пузырей много и скорости центров направлены под углом к линии, проходящей через центр.

3. В работе отсутствует обоснование предположения о сферичности пузырьков. Данное предположение не учитывает поверхностные волны. Если пузырьки в отдаленности, выполнение этого условия на больших расстояниях достаточно очевидно, то при близких расстояниях контакта оно требует обоснования.

4. В работе использовано приближение Стокса, хотя следовало бы решать уравнения Навье-Стокса в полной постановке.

5. Вязкая сила, для случая с нулевым тангенциальным напряжением на поверхности пузырьков, была так же найдена в работе [67] немного другим способом. Было бы целесообразно сравнить полученные для этих сил ряды.

6. Нет вывода бисферических координат, а также отсутствуют ссылки на работы G. Jeffery. Асимптотика представлена без вывода.

7. В главе 3 вязкие силы в приближении Стокса для различных

граничных условий приведены без вывода, ссылаясь на громоздкость формул.

8. В первой главе в разделе 1.2 написано уравнение Лагранжа, однако квадратичная форма кинетической энергии приводится только в параграфе 1.4. В формуле (1.3.2) плотность жидкости не введена, а вводится позже. Имеются орфографические опечатки, подпись осей некоторых рисунков в разделе 4.3 несколько меньше основного текста. Индексы для радиусов в отсутствии пульсации пузырьков  $R_{10}$  в некоторых местах по ошибке заменены на  $R_{01}$ . Все выше сказанное несколько затрудняет чтение диссертации.

Отмеченные замечания не снижают положительного впечатления о работе в целом.

### **Заключение.**

Диссертация Ш.В. Сандуляну является законченной научно-квалификационной работой и выполнена на высоком научном уровне. Проведенное исследование вносит неоспоримый вклад в теорию взаимодействия газовых пузырьков в жидкости и результаты являются практически значимыми. По теме диссертации опубликованы 12 научных работах, из них 3 статьи индексированы в базах данных WoS или Scopus и входят в список рекомендуемых изданий ВАК РФ. Также результаты обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях. Автореферат соответствует содержанию диссертационной работы и достаточно полно отражает ее результаты.

Диссертация Сандуляну Штефана Васильевича «Асимптотические и численные методы исследования взаимодействия газовых пузырьков в жидкости близи их контакта в пульсирующем поле давления» удовлетворяет требованиям "Положения о порядке присуждении ученых степеней", утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. № 842 (ред. от 01.10.2018), а ее автор, Сандуляну Штефан Васильевич,

заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы.

Отзыв составили:

д.ф.-м.н., профессор, г.н.с.  
лаборатории «Механика  
многофазных систем»



Шагапов В.Ш.

д.ф.-м.н., профессор,  
заведующий лабораторией  
«Дифференциальные  
уравнения механики»



Хабиров С.В.

