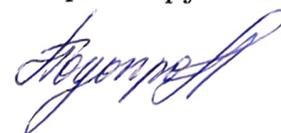


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский государственный университет имени  
М.В.Ломоносова»

На правах рукописи



Подопросветова Анастасия Борисовна

**Теоретическое и экспериментальное исследования  
устойчивости упругой трубки с протекающей внутри  
жидкостью**

Специальность 01.02.05 —  
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Веденеев Василий Владимирович

Москва — 2020

## Оглавление

	Стр.
Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Обзор литературы и пространственно одномерные уравнения для упругой трубки с протекающей внутри неньютоновской жидкостью . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1 Обзор литературы . . . . .	14
1.2 Вывод уравнения движения упругой трубки с протекающей неньютоновской жидкостью . . . . .	20
1.2.1 Трёхмерные уравнения движения неньютоновской жидкости . . . . .	20
1.2.2 Предположения . . . . .	21
1.2.3 Осреднение системы уравнений по сечению . . . . .	23
1.2.4 Модель трубки . . . . .	25
1.2.5 Одномерная система уравнений . . . . .	26
1.2.6 Сравнение с другими одномерными моделями . . . . .	26
1.2.7 Переход к безразмерным переменным . . . . .	28
1.3 Выводы . . . . .	29
<b>Глава 2. Существование и единственность стационарного состояния упругой трубки при протекании через неё степенной жидкости . . . . .</b>	<b>30</b>
2.1 Одномерное уравнение, описывающее стационарное состояние . . . . .	30
2.2 Исследования задачи без учёта вязкости . . . . .	31
2.2.1 Анализ стационарных точек . . . . .	31
2.2.2 Анализ максимальной возможной длины трубки . . . . .	36
2.2.3 Неединственность решения . . . . .	40
2.3 Исследования задачи с учётом вязкости . . . . .	46
2.4 Кровеносные сосуды . . . . .	48
2.5 Выводы . . . . .	50
<b>Глава 3. Исследование устойчивости упругой трубки с протекающей внутри неньютоновской жидкостью . . . . .</b>	<b>52</b>
3.1 Характеристики локальной устойчивости . . . . .	52

	Стр.
3.1.1	Уравнения для возмущений . . . . . 52
3.1.2	Дисперсионное уравнение . . . . . 53
3.1.3	Критерий неустойчивости для длинных волн . . . . . 55
3.1.4	Влияние вязких потерь на критерий устойчивости . . . . . 56
3.1.5	Критерий неустойчивости для коротких волн . . . . . 57
3.1.6	Переход от длинноволновой к коротковолновой неустойчивости . . . . . 59
3.2	Абсолютная и конвективная неустойчивость . . . . . 60
3.2.1	Влияние числа Рейнольдса . . . . . 60
3.2.2	Нулевые масса трубки и продольное натяжение . . . . . 61
3.2.3	Эффект небольшого натяжения трубки . . . . . 64
3.2.4	Произвольное натяжение трубки . . . . . 68
3.3	Устойчивость упругой сужающейся или расширяющейся трубки . 69
3.3.1	Влияние длины волны на неустойчивость . . . . . 71
3.3.2	Устойчивость коротких волн ( $k \rightarrow \infty$ ) . . . . . 72
3.4	Глобальная неустойчивость упругой конечной длиной трубки . . 75
3.5	Глобальная неустойчивость упругой сужающейся или расширяющейся трубки . . . . . 83
3.6	Характеристики устойчивости трубки конечной длины . . . . . 87
3.6.1	Критерий устойчивости . . . . . 87
3.6.2	Влияние длины трубки на спектр собственных частот . . . 88
3.6.3	Метод нахождения областей неустойчивости . . . . . 93
3.6.4	Области неустойчивости упругой трубки конечной длины 94
3.7	Выводы . . . . . 95

#### **Глава 4. Экспериментальное исследование влияния режима**

	<b>потока на устойчивость упругих трубок . . . . . 97</b>
4.1	Характеристики экспериментального исследования . . . . . 97
4.1.1	Описание экспериментального метода . . . . . 97
4.1.2	Экспериментальная установка . . . . . 98
4.1.3	Рабочая жидкость . . . . . 100
4.1.4	Диаметр упругой трубки . . . . . 103
4.2	Результаты . . . . . 104
4.2.1	Режимы колебаний . . . . . 104

	Стр.
4.2.2 Неустойчивость упругой трубки с турбулентным течением внутри . . . . .	104
4.2.3 Неустойчивость упругой трубки с ламинарным течением внутри . . . . .	106
4.2.4 Сравнение режимов неустойчивости ламинарного и турбулентного режимов течения . . . . .	107
4.2.5 Проверка эквивалентности ламинарного и турбулентного режимов . . . . .	109
4.2.6 Визуализация режимов неустойчивости для ламинарного и турбулентного течений жидкости . . . . .	110
4.3 Обсуждение результатов . . . . .	111
4.4 Выводы . . . . .	113
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>130</b>
<b>Список таблиц . . . . .</b>	<b>136</b>

## Введение

### **Актуальность.**

Настоящая работа посвящена изучению устойчивости упругой трубки с протекающей внутри жидкостью.

В биологических и промышленных приложениях при течении жидкостей в тонкостенных упругих трубках возникают различные явления, которые оказывают влияние на характер течения и на деформацию стенок: неединственность стационарного состояния, потеря его устойчивости, изменение характера течения с ламинарного на турбулентный. Известно, например, что изменение геометрии кровеносных сосудов может привести к изменению течения жидкости, что влечёт за собой дисфункциональные изменения в организме человека и животного. В частности, экспериментальные исследования кровотока жирафов (Brook B.S., Pedley T.J., Seymour R.S.) показали, что ограничения кровотока вследствие изменений в ярёмных венах могут привести к ограничениям мозгового кровотока. В экспериментах, проведенных на собаках (Волобуев А.Н., Кошев В.И., Петров Е.С.), исследованы условия возникновения колебаний в кровеносной системе.

Исследования ученых в области гидроупругости (Болотин В.В., Вольмир А.С., Ильгамов М.А., Amabili M., Paidoussis M.P., Wang X.) легли в основу дальнейшего развития изучения взаимодействия жидкости с тонкостенными упругими трубками. До сих пор в литературе исследовались, в основном, лишь течения ньютоновской (линейно-вязкой) или идеальной жидкости, в том числе нелинейные задачи, связанные с движением солитонов в системах «упругая трубка—жидкость» (Василевский Ю.В., Вельмисов П.А., Ильичев А.Т., Чупахин А.П., Demiray H., Jensen O.E., Fu Y.C., Fung Y.C., Kumaran V.A., Pedley T.J., Stewart P.S.). Известно, однако, что кровь в небольших сосудах и другие биологические жидкости могут проявлять существенно неньютоновские свойства (Кучумов А.Г., Anand M., Coene P.-P.L.O., Galdi G.P., Ku D.N., Smith N.P.). Исследованиям нелинейно-вязких жидкостей в различных областях, в том числе исследованиям реологии крови, занимались ведущие ученые всего мира (Ентоу В.М., Левтов В.А., Регирер С.А. Рожков А.Н., Caro C.G., Charm, S.E., Kurland G.S., Liepsch D., Moravec S., Thurston G.B., Pedley T.J.). Наиболее общей моделью, описывающей поведение крови при течении по сосудам, является

ся модель псевдопластической жидкости. В данной работе поставлены и решены новые задачи изучения влияния нелинейно-вязких свойств протекающей среды на движение системы на основе одномерных моделей, которые являются основным механизмом для изучения динамики биологической жидкости в системе кровообращения (Абакумов М.В., Василевский Ю.В., Симаков С.С., Холодов А.С., Alastruey J., Blanco P., Formaggia L., Quarteroni A., Reymond P.).

подавляющее большинство экспериментальных исследований устойчивости движения жидкости в тонкостенных упругих трубках проводилось только для турбулентных течений (Amabili M., Bertram C.D., Brower R.W., Gavriely N. Wang R.-Q.), и только несколько исследований было проведено для ламинарных течений (Lyon C.K., Kumaran V.A). Однако, в нормальных условиях кровь течет на турбулентном режиме лишь в небольшой части сердечно-сосудистой системы, тогда как преимущественно течение крови является ламинарным. Тем самым, экспериментальное исследование поведения упругой трубки при различных числах Рейнольдса и влияние на него характера течения представляет большой интерес.

Таким образом, актуальность перечисленных задач связана с важными приложениями, в первую очередь в биомеханике: неустойчивостью системы «стенка сосуда — поток крови» объясняются различные виды высокочастотных пульсаций сосудов животных и людей, ограничения скорости течения и изменения геометрии формы стенки, приводящие к быстрому изнашиванию сосудов и сердечно-сосудистым заболеваниям.

### **Цель и задачи работы.**

Целью работы является исследование устойчивости мягких упругих трубок с протекающей внутри жидкостью. В работе будут решены следующие задачи:

1. Проведение аналитического исследования уравнения, описывающего осесимметричное стационарное состояние линейно-упругой трубки при протекании степенных жидкостей на основе одномерной модели.
2. Изучение динамической устойчивости упругих трубок с протекающей внутри степенной жидкостью, основанное на одномерной модели, с целью выявления влияния реологии жидкости, длины трубки, продольного натяжения, жесткости и поверхностной плотности трубки.
3. Экспериментальное исследование устойчивости мягкой тонкостенной упругой трубки с протекающей внутри ньютоновской жидкостью. Ана-

лиз влияния режима течения жидкости на границу устойчивости и на колебания после потери устойчивости.

### **Научная новизна работы.**

Принципиально новыми являются задачи течения нелинейно-вязкой жидкости внутри деформируемых трубок. До сих пор исследовались лишь течения ньютоновской (линейно-вязкой) или идеальной жидкости: на простых одномерных постановках были предсказаны основные эффекты, возникающие в системах «трубка—жидкость», которые затем были подтверждены экспериментально.

В данной работе предложены новые постановки задач, направленные на изучение влияния нелинейно-вязких свойств протекающей среды на стационарное состояние и устойчивость системы. Было проведено детальное исследование области неустойчивости, обнаруженной ранее без учёта продольного натяжения (Юшутин, 2012). Были найдены условия неустойчивости движения нелинейно-вязкой степенной жидкости, которые показывают качественную разницу с устойчивостью течения ньютоновской жидкости: в зависимости от показателя нелинейности в пространстве параметров появляются новые области неустойчивости, отсутствующие в случае ньютоновской жидкости. В работе были проведены теоретические исследования влияния реологии жидкости на границы устойчивости, в том числе учтено натяжение трубки, а также конечная длина деформируемой трубки.

Наряду с большим количеством экспериментальных исследований турбулентного течения внутри упругой трубки, существует пробел в области исследований ламинарных потоков в упругой трубке, необходимых для приложений в сердечно-сосудистой системе. Проведённые в настоящей работе исследования позволяют восполнить недостающие экспериментальные данные. В экспериментальной части было проведено детальное построение областей разных видов колебаний при течении в упругих трубках линейно-вязкой жидкости. Экспериментально выявлено влияние режима течения (ламинарного и турбулентного) на устойчивость упругой трубки при условии равных интегральных параметров течения.

### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Результаты теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в данной работе, применимы к взаимодействию жидкости с мягкими стенками содержащих их трубок и сосудов, такими как кровь и стенки сосуда.

Результаты научного исследования применимы в биомедицинских технологиях для выявления участков кровеносной системы, более подверженных возникновению дисфункциональных изменений в организме человека и животных, в технологических процессах, где жидкости движутся в мягких трубках.

### **Методология и методы исследования.**

Задача исследования существования и единственности стационарного состояния упругой трубки с текущей внутри жидкостью была решена аналитически методами качественной теории дифференциальных уравнений. В случае исследования устойчивости течения нелинейной-вязкой степенной среды в упругой трубке задача решалась классическими методами теории устойчивости. Для трубок бесконечной длины рассматривались решения в виде бегущих волн и выводилось дисперсионное уравнение. Анализом его корней находились области неустойчивости в пространстве параметров. Для трубки большой, но конечной длины асимптотическое положение спектра собственных частот определялось с помощью теории глобальной неустойчивости. Для трубок произвольной длины была решена задача на собственные значения.

Экспериментальные исследования по изучению устойчивости движения ньютоновских сред в тонкостенных латексных трубках было проведено на установке типа «Starling resistor», созданной в НИИ механики МГУ. Испытания проводились на модели тонкостенной эластичной трубки (трубки Пенроуза), натянутой между двумя жёсткими трубками того же диаметра и помещенной в резервуар. Установка состоит из бака с рабочей жидкостью, резервуара-аквариума, систем труб, кранов, компрессора, насоса, расходомера, датчиков давлений, камер и микрофона. Система автоматизирована; создана компьютерная программа для записи и обработки эксперимента. Показания датчиков оцифровываются, визуализируются, что позволяет более детально контролировать ход эксперимента, и записываются с помощью данной программы. После проведения эксперимента производилась обработка и анализ полученных данных.

### **Основные положения, выносимые на защиту.**

1. Качественное аналитическое исследование уравнений движения осесимметричного стационарного состояния упругой трубки показывает, что для движения идеальной жидкости с заданным профилем скорости стационарное состояние всегда существует для коротких трубок и при определенных условиях для сколь угодно длинных трубок. Однако, при учете вязкости,

трубка может иметь лишь конечную длину, что приводит к возникновению нестационарного движения как единственного возможного при достаточно большой длине трубки. Более того, если стационарное состояние трубки, удовлетворяющее граничным условиям, существует, то оно может быть неединственным в зависимости от значения числа Рейнольдса и некоторых дополнительных условий.

2. Изучение осесимметричной потери устойчивости растянутых упругих трубок с протекающей внутри степенной жидкостью, основанное на одномерной модели, показывает, что, хотя такие возмущения в случае ньютоновской жидкости затухают (что соответствует имеющимся экспериментальным данным), они могут расти в случае малого значения показателя степенной среды  $n$ , что обобщает аналогичный результат в ненатянутых трубках (Юшутин, 2012). Это означает, что для псевдопластических жидкостей неустойчивость может наблюдаться при повышенном внутреннем давлении в трубке, т.е. без схлопывания трубки во время цикла колебаний.
3. Даже если трубка с протекающей нелинейной-вязкой степенной средой осесимметрично неустойчива, эта неустойчивость может не наблюдаться, если неустойчивость является конвективной. Однако, если неустойчивость абсолютна, локализованные возмущения растут и область возмущения расширяется как вниз, так и вверх по потоку. В связи с этим проведен детальный анализ абсолютной/конвективной неустойчивости в зависимости от продольного натяжения бесконечно длинной трубки.
4. Поскольку критерий неустойчивости для длинной, но конечной трубки не совпадает с критерием неустойчивости для бесконечно длинной трубки, то для определения границ устойчивости асимптотическое расположение спектра определялось методом глобальной неустойчивости. Для трубок произвольной (в том числе, малой) длины граница устойчивости и свойства области неустойчивости исследовались численно с учетом упругости стенки трубы, продольного натяжения и длины трубки.
5. Экспериментальное исследование автоколебаний трубок Пенроуза с протекающей внутри жидкостью при турбулентном и ламинарном режимах проводилось с одинаковыми скоростями потока и перепадами давления в резисторе Старлинга для выявления влияния режима течения. Было проведено сравнение границ устойчивости и были выявлены четыре ти-

па колебаний, наблюдаемые по датчикам перепада давления, датчику выходного давления и визуализации режимов колебаний трубки. Результаты исследования показывают, что турбулентные течения являются менее устойчивыми и имеют бóльшую амплитуду колебаний, чем ламинарные течения, а режимы колебаний упругой трубки различны для ламинарного и турбулентного режимов течения, даже при условии равенства интегральных параметров (расход, перепад давления, трансмуральное давление, форма трубки).

### **Степень достоверности результатов.**

Достоверность результатов диссертационной работы обусловлена использованием классических математических методов механики сплошных сред. Для аналитических и численных расчётов использованы стандартные, хорошо известные методы исследования характера неустойчивости. Достоверность экспериментальных исследований подтверждена использованием современного измерительного оборудования, многократными независимыми тарировками, соответствием части результатов известным ранее.

### **Апробация работы.**

Основные результаты, полученные в данной работе, докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

1. Семинара по механике сплошных сред под руководством академика РАН А.Г. Куликовского, профессора В.П. Карликова, член-корр. РАН О.Э. Мельника, профессора А.Н. Осипцова.
2. Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ — ИТПМ СО РАН — СПбГПУ — НИИМ МГУ.
3. Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени проф. В. В. Трофимова под руководством профессора Георгиевского Д.В. и профессора Шамолина М.В.
4. XIV Всероссийская (с международным участием) конференция «Биомеханика - 2020» (Пермь, 2020).
5. 11-ая международная конференция - школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2020).
6. School for young mechanicians and mathematicians «Mathematical methods of mechanics» (Moscow, 2020).
7. XLVIII International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» (St. Petersburg, 2020).

8. VII всероссийская конференция с участием зарубежных учёных «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Красноярск, 2020).
9. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019).
10. Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию со дня рождения академика РАН Л.В. Овсянникова "Математические проблемы механики сплошных сред" (Новосибирск, 2019).
11. XVIII и XIX Всероссийская школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2016 и 2019).
12. Конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 2016, 2017, 2018 и 2019).
13. 12th European Fluid Mechanics Conference (Вена Австрия, 2018).
14. Всероссийские конференции молодых учёных-механиков «YSM-2017», «YSM-2018», «YSM-2020» (Сочи, 2017, 2018 и 2020).
15. 8th World Congress of Biomechanics (Дублин Ирландия, 2018).
16. Конференции «Ломоносов-2017» и «Ломоносов-2018» (Москва, 2017 и 2018).
17. Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященная памяти академика Леонида Ивановича Седова в связи со столетием со дня его рождения (Москва, 2017).
18. Конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ (Москва, 2016 и 2017).
19. 23rd Congress of the European Society of Biomechanics (Севилья Испания, 2017).
20. XII Всероссийская (с международным участием) конференция Биомеханика-2016 (Пермь, 2016).

Работа отмечена наградами:

1. Диплом 2-й степени конкурса научных работ, выполненных студентами, всероссийской конференции молодых учёных-механиков 2017 года.
2. Диплом 2-й степени за лучшую работу студентов конференции-конкурса молодых учёных НИИ механики МГУ 2017 года.
3. Диплом 3-й степени за лучшую работу студентов конференции-конкурса молодых учёных НИИ механики МГУ 2016 года.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 3 статьи [1—3] индексируемые в базах данных «Сеть науки» (Web of Science) и «Скопус» (Scopus) и

входят в список рекомендуемых изданий ВАК, а также 2 статьи [4; 5] в сборниках материалов и 21 тезис докладов [6—26] международных и всероссийских конференций.

**Личный вклад автора.** Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. В постановке задачи, обсуждении результатов и подготовке совместных научных публикаций принимал участие соавтор, научный руководитель В.В. Веденеев.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения. Полный объём диссертации составляет 136 страниц, включая 57 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 130 наименований.

В главе 1 приведен обзор литературы и получена система одномерных уравнений для осесимметричных течения степенной жидкости в упругих трубках. Трёхмерная система уравнений, описывающая длинноволновые низкочастотные движения системы, сводится к одномерной системе уравнений путем интегрирования по поперечному сечению трубки.

В главе 2 теоретически исследованы существование и единственность осесимметричных состояний упругих трубок при протекании степенных жидкостей. Проведено качественное аналитическое исследование уравнений движения стационарного состояния трубки. В результате доказано, что для движения идеальной жидкости с заданным профилем скорости стационарное состояние всегда существует для коротких трубок и при определенных условиях для сколь угодно длинных трубок. Однако, при учёте вязкости трубка может иметь лишь конечную длину, что приводит к возникновению нестационарного движения, как единственного возможного, при достаточно большой длине трубки. Более того, если стационарное состояние трубки, удовлетворяющее граничным условиям, существует, то оно может быть неединственным в зависимости от значения числа Рейнольдса и некоторых дополнительных условий.

В главе 3 исследована устойчивость течения неньютоновской степенной жидкости в упругой трубке. Сначала аналитически найдены критерий локальной устойчивости однородной трубки и критерий абсолютной неустойчивости, позволяющую предсказать область возникновения неустойчивости упругих трубок конечной длины. Показано, что неустойчивость, при которой сохраняется осесимметричность движения трубки, возможна лишь для псевдопластических жидкостей, т.е. потеря устойчивости линейно-вязких сред с сохранением осесимметричности движения невозможна, что согласуется с известными ре-

зультатами. Далее была исследована глобальная неустойчивость достаточно длинных трубок конечной длины и получено, что область глобальной неустойчивости практически совпадает с областью абсолютной неустойчивости. Затем был проведен численный анализ влияния продольного натяжения и длины трубки на область неустойчивости конечных трубок произвольной, в том числе малой, длины.

В главе 4 задача взаимодействия жидкости с тонкостенной упругой трубкой (упругой трубкой Пенроуза) исследовалась экспериментально на установке типа «резистор Старлинга». Целью исследования являлось выявление границы устойчивости и проведение сравнительного анализа зависимости типов колебаний от режима потока, который ранее не изучался. Изучено и сопоставлено влияние турбулентного и ламинарного режимов с равными расходом и перепадом давления. Четыре типа колебаний для ламинарного и турбулентного потока наблюдались по перепаду давления, выходному давлению, и визуализации режимов колебания трубки.

# Глава 1. Обзор литературы и пространственно одномерные уравнения для упругой трубки с протекающей внутри неньютоновской жидкостью

## 1.1 Обзор литературы

Течения в упругих трубках распространены во многих биологических и промышленных системах, таких как доставка различных жидких продуктов в нефтяной и пищевой промышленности. Важными примерами в человеческом теле является транспортировка пищи и жидкостей в глотке, пищеводе; кровотоков по артериям и венам; вывод желчи по желчным протокам; воздушный поток в легочных дыхательных путях.

Исследования устойчивости течений в упругих трубках могут быть разделены на два направления: задачи, связанные с изгибом продольной оси трубки, и задачи, связанные с деформированием стенок.

Изгибная неустойчивость упругих трубок с протекающей внутри жидкостью была широко изучена многими авторами [27—29]. Такая неустойчивость может возникать в различных промышленных охладителях, в том числе в охладителях ядерных реакторов. Данная неустойчивость не является предметом изучения в настоящей работе, поскольку нет никаких данных об изгибной неустойчивости в биологических приложениях. По-видимому, изгибные колебания быстро затухают из-за воздействия тканей, окружающих сосуды. Именно поэтому для биомеханики в первую очередь представляют интерес неустойчивые режимы, не сопровождающиеся изгибом оси трубки.

Известно, что изменения в геометрии кровеносных сосудов, желчных протоков, пищевода и других биологических сосудах, такие как пережатия, перегибы или патологическая извитость, могут приводить к качественным изменениям в потоке биологической жидкости, приводящим к неправильному функционированию организма человека или животного. Колебания подобного вида трубок влияют на ограничения расхода и перепад давления. В связи с этим, к колебаниям упругих трубок и их биологическому приложению был проявлен огромный интерес [30—33].

Существует большой блок работ, в которых изучаются аспекты, связанные с механикой стенок канала: исследуется влияние анизотропии и вязкоупругости материала, эффекты, связанные с геометрической нелинейностью [34–40]. Течение жидкости при этом часто описывается простейшей моделью идеальной жидкости, сводящейся лишь к дополнительному члену в уравнениях движения стенки канала.

К другому виду работ относятся исследования, посвященные изучению течения линейно-вязких жидкостей в упругой трубке [41–43]. Используемая при этом модель трубки была либо линейной, либо упрощенной нелинейной. В работе [44] на основе одномерной модели исследовалось стационарное течение невязкой жидкости в упругой трубке и доказано, что в пространстве параметров есть области, где такого течения не существует, а если оно существует, то в общем случае неединственно. Авторами работы [41] решалась такая же задача с учётом потери энергии потока из-за отрыва от стенки на выходе из суженного участка. Было получено, что в данной постановке решение существует всегда, хотя неединственность решения в общем случае сохраняется. Отметим, что результаты работы имеют качественное согласие с экспериментом, хотя авторы [41] отмечают важность включения в модель вязкости жидкости во всем течении, а не только в области отрыва.

Анализ устойчивости упругих трубок часто проводится с использованием одномерных моделей. Простейшие теоретические одномерные модели были впервые использованы в работах [31; 45]. Для учёта изменения поперечного сечения каждая трубка характеризуется связью площади поперечного сечения и трансмурального давления (разности внутреннего и внешнего давлений), известной как закон трубки. В начале цикла колебаний, когда трансмуральное давление отрицательное и скорость потока велика, трубка теряет устойчивость, частично сужается, что увеличивает её сопротивление. В свою очередь, это приводит к замедлению потока и увеличению трансмурального давления. Далее трубка раздувается, скорость течения растёт и трансмуральное давление вновь падает, замыкая цикл колебаний. Во время каждого цикла колебаний деформирование трубки неосесимметричное, а поток внутри нее достаточно сложный, сопровождающийся отрывом потока от поверхности трубки. Для лучшего соответствия одномерной модели реальному поведению жидкости в трубках в них включают потери давления, вызванные частичным отрывом потока от стенок после области сужения, что, как описано в [42; 46], играет важную роль.

Существует большая серия зарубежных работ, посвященных исследованиям неустойчивости течения вязкой, несжимаемой жидкости, приводимой в действие заданным градиентом давления в длинном плоском канале конечной длины, у которого сегмент одной стенки заменён безмассовой мембраной, удерживаемой продольным натяжением [47]. В работе [48] была исследована абсолютная/конвективная неустойчивость для поверхностных мод с использованием упрощённой одномерной модели потока в канале с упругим сегментом. В работе [49] рассматривается усредненная одномерная модель, полученная с помощью метода взвешенных невязок, и проводится исследование линейной и нелинейной устойчивости. В статье [50] автор рассматривает канал, одна стенка которого заменена безмассовой мембраной с постоянным продольным натяжением, с учетом равномерного внешнего давления на упругий участок. В результате было определено, что неоднородное статическое состояние неустойчиво по отношению к двум семействам режимов колебаний: низкочастотному, когда колебания сохраняются до низкого мембранного натяжения, и высокочастотных, когда неустойчивость сохраняется за пределами критического значения натяжения. Авторами статьи [51] было проведено численное исследование с фокусом на параметрическую зависимость от высоты канала для ряда гибких вставок, которые включают в себя простые гибкие пластины, натянутые мембраны и упругие гибкие вставки.

Тем не менее, несмотря на использование многими авторами одномерных моделей, они обладают рядом недостатков, описанных в работе [43]. Авторами этой работы предложены усовершенствования на основе двумерных моделей. Аналитические и численные исследования движений жидкости и трубки проводятся на основе двумерных моделей [52–56] и численные — на основе трехмерных моделях [57–59]. Также проведены исследования устойчивости течения в канале конечной длины, у которого сегмент одной стенки заменён безмассовой мембраной в работах [56; 60–63] с использованием двумерных моделей. Значительное развитие одномерных моделей, которое приводит к результатам, качественно согласованным с трехмерным численным моделированием, демонстрируется в [64].

В то же время в биомеханике в течение последних двадцати лет моделирование кровотока развивается, в значительной мере, с использованием одномерных моделей [65–80], а также одновременным использованием одномерных и трёхмерных моделей [81; 82]. Так, на основе одномерных моделей, авторы

статей [65; 66] приводят методику расчёта и структуру программных средств, предназначенных для численного моделирования гемодинамики сердечно-сосудистой системы и исследования кровообращения в организме в целом под действием периодического сокращения сердца. В работе [73] рассматриваются одномерные модели течения крови и распространения волн давления в артериальной системе, являющиеся альтернативными к более сложным трёхмерным моделям. Данные модели используются для изучения влияния на пульсовую волну геометрической и механической артериальной модификации, например, из-за стеноза, или при размещении протеза. Ряд работ посвящён построению одномерной модели сети кровеносных сосудов человека с целью исследования как общих особенностей кровообращения, так и для планирования операций на сосудах конкретного пациента [71; 72; 74; 76]. Обзор использования одномерных моделей для моделирования сети кровеносных сосудов и варианты моделей, количественно верно описывающих распространение пульсовой волны, представлены в работе [75].

Таким образом, одномерное моделирование является удобным инструментом для теоретического анализа устойчивости упругих трубок с протекающей внутри жидкостью.

На данный момент в литературе почти все исследования были проведены только для упругих трубок с протекающей ньютоновской (линейно-вязкой) жидкостью внутри [83—87]. Хотя известно, что при ряде условий биологические жидкости, такие как кровь в небольших сосудах [88—93] или желчь [94; 95], а также жидкие продукты питания, поступаемые в желудок по пищеводу [96], могут обладать неньютоновскими свойствами. В работе [97] приведены параметры крови сердечного цикла, которые эквивалентны показателю степенной среды  $n = 1/8$  в реологическом законе. Также в работе [90] отмечается влияние псевдопластических свойств на распределение скоростей в больших артериях. В некоторых работах учитываются и эффекты реологии жидкости в виде модификации конвективного члена, который соответствует непараболическому профилю скорости в сосуде [73; 97].

Известные исследования течения неньютоновских сред внутри трубок концентрируются на перистальтических явлениях, т.е. тех случаях, когда деформирование стенок канала является заданным, и исследуется лишь отклик потока жидкости на заданное движение стенок. В этом случае задача об устойчивости стенок не ставилась [98; 99]. Таким образом, не исследованным остался

вопрос о возможности других видов потери устойчивости, не имеющих места при течении ньютоновской жидкости в трубке.

Анализ литературы, связанной с теоретическими исследованиями устойчивости показал существование лишь работ, посвященных течению линейно-вязкой жидкости в упругих трубках. Единственным исключением является работа [100], посвященная существованию неустойчивости бесконечно длинных, нерастянутых трубок с протекающей внутри степенной жидкостью, что позволяет выделить перспективное направление исследований: аналитическое исследование устойчивости упругих трубок с протекающей неньютоновской жидкостью, в том числе с учетом её натяжения и конечных размеров, которое является целью данной работы.

Переходя к обзору работ, посвященных экспериментальным исследованиям, отметим, что классические эксперименты, выполняемые для исследования устойчивости моделей кровеносных сосудов, транспортирующих жидкость, проводятся на установках «резистор Старлинга» [101]. Сложное взаимодействие жидкости со стенкой во время колебаний приводит к различным типам неустойчивости с низкими, средними и высокими частотами [102], что приводит к снижению скорости потока и падению давлению.

Поскольку сосудистые стенки для переноса жидкости являются мягкими и деформируемыми в биологических системах [103–105], то в качестве модели кровеносного сосуда обычно используют латексный каучук (силиконовая резина) [106] или гибкую резиновую трубку (дренажную трубку Пенроуза)[107].

В работе [106] была определена связь между перепадом давления и расходом, при помощи постепенного увеличения перепада давления вдоль трубки. В процессе экспериментов наблюдались громкие гудящие звуки и колебания трубки, которые возникают только тогда, когда скорость потока становится постоянной и не меняется при дальнейшем увеличении перепада давления (данное явление называется ограничением расхода). Кроме того, частота колебаний выше при больших скоростях течения и в случае меньших расстояний между противоположными плоскими стенками. Авторы работы [108] исследовали характеристики ограничения расхода толстостенных труб из силиконовой резины с потоком воды внутри и было обнаружено, что скорость потока зависит не только от трансмурального давления выше по потоку, но также и от истории колебаний. Позже авторы [109] провели эксперименты для тонких трубок, чтобы изучить влияние толщины стенки. Как и в толстой трубке, резкое снижение

скорости потока происходило при возникновении схлопываний и ограничений расхода.

Авторы [110] определили связь между расходом, его ограничением и давлением  $P$  в точке первоначального схлопывания упругой трубки в зависимости от внутреннего диаметра, длины и толщины стенки трубки. Были найдены два режима ограничения расхода: в первом режиме трубка сохраняет цилиндрическую форму при  $P < P_a$  и начинает колебаться при  $P \approx P_a$ ; во втором режиме между устойчивым режимом и колебаниями существует режим статической потери устойчивости.

Большинство этих исследований проводились только для турбулентных течений. Известно, что турбулентность возникает в стенозирующих (с уменьшенным просветом) сосудах из-за сильного увеличения линейной скорости кровотока; в остальных случаях наличие турбулентного течения внутри свойственно лишь желудочкам сердца, устью аорты и дуге аорты, в то время как кровотоки в других частях сердечно-сосудистой системы ламинарные. Следовательно, исследование влияния режима течения на начало и характер колебаний модельного кровеносного сосуда представляет большой интерес.

В то же время существует только несколько исследований влияния вязкости и режима течения на устойчивость. Авторами [111] изучалась применимость теоретической модели «водопада» [112; 113] и возникновение колебаний для различных вязкостей жидкостей с использованием резистора Старлинга. В статье впервые представлены соотношения давления и расхода для упругой трубки с течением жидкости при низком числе Рейнольдса, соответствующим ламинарному потоку. Эксперименты показали, что соотношение давление-поток для течений с низким числом Рейнольдса заметно отличаются от соотношения для течений с большим числом Рейнольдса. Влияние вязкости жидкости было исследовано отдельно в работе [114]. Проводились эксперименты на упругих трубках для ламинарных режимов с наименьшим числом Рейнольдса. Цель проводившихся исследований состояла в том, чтобы предоставить экспериментальные данные для проверки трехмерных кодов DNS, которые ограничены достаточно малыми числами Рейнольдса. Авторы [115] экспериментально изучили влияние режима потока на предельный цикл колебаний латексной тонкостенной трубки и показали, что частота колебаний существенно зависит от перепада давления в трубке при фиксированной скорости потока на ламинарных режимах, и амплитуда колебаний больше для турбулентных режимов. Однако в этих экспе-

риментах жесткая труба перед сегментом упругой трубки не была достаточно длинной для достижения развитого ламинарного или турбулентного течения.

Таким образом, существует расхождение между большим количеством экспериментальных исследований упругих трубок с турбулентным потоком внутри и биомеханическими приложениями, где течение ламинарное. В связи с этим, целью экспериментальных исследований данной работы является устранение этого пробела.

## 1.2 Вывод уравнения движения упругой трубки с протекающей неньютоновской жидкостью

### 1.2.1 Трехмерные уравнения движения неньютоновской жидкости

Рассматривается цилиндрическая упругая трубка с текущей внутри неё неньютоновской степенной жидкостью.

Система уравнений для жидкости имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \frac{dv^i}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla^i p + \frac{1}{\rho} \nabla_j \tau^{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где  $\tau^{ij}$  — тензор вязких напряжений. Реология степенной жидкости описывается соотношением:

$$\tau^{ij} = 2\mu(\sqrt{2}I_2(e))^{n-1}e^{ij}, \quad I_2 = \sqrt{e^{ij}e_{ij}}, \quad (1.1)$$

где  $e^{ij}$  — тензор скорости деформаций. Это соотношение обобщает простое выражение для чистого сдвига:

$$\tau^{12} = \mu \left( \frac{dv_1}{dx_2} \right)^n.$$

Для Ньютонской жидкости  $n = 1$ . Случай  $0 < n < 1$  соответствует псевдопластическим средам, вязкость которых выше при меньшей скорости сдвига, а случай  $n > 1$  соответствует дилатантной среде, вязкость которой увеличивается с увеличением скорости сдвига (Рис. 1.1 (а)).

Введем цилиндрическую систему координат, ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии трубки, и рассмотрим осесимметричные течения. Тогда система уравнений переписывается в следующем виде:

$$\frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial v^z}{\partial z} + \frac{v^r}{r} = 0, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv^r}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( 2\mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^r}{\partial r} \right) - 2r\mu I_2^{n-1} \frac{1}{r^3} v^r + \right. \\ \left. + \frac{2}{r} \mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) \right], \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv^z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) + \frac{\mu}{r} I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) \right]. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Для стационарного течения внутри жёсткой цилиндрической трубки постоянного радиуса  $R_0$  решением системы (1.2) – (1.4) является пуазейлевский профиль скорости:

$$v^r = 0, \quad v^z(r) = 2^{-\frac{1}{n}} \left( \frac{k}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left( R_0^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -k = \text{const}. \quad (1.5)$$

Профили скорости для различных  $n$  представлены на рисунке 1.1 (б). Для ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ) получается стандартный параболический профиль скорости.

### 1.2.2 Предположения

Будем считать, что деформирование трубки происходит так, что каждое поперечное сечение  $S(z, t)$  оболочки остается круговым, а точки оболочки перемещаются только радиально (Рис. 1.2). Тогда положение оболочки задается радиусом сечения трубки  $R(z, t)$  в точке  $z$  в момент времени  $t$ . Взаимодействие между средой и трубкой происходит за счёт условия прилипания и равенства нормальных напряжений. Продольными перемещениями пренебрегается.

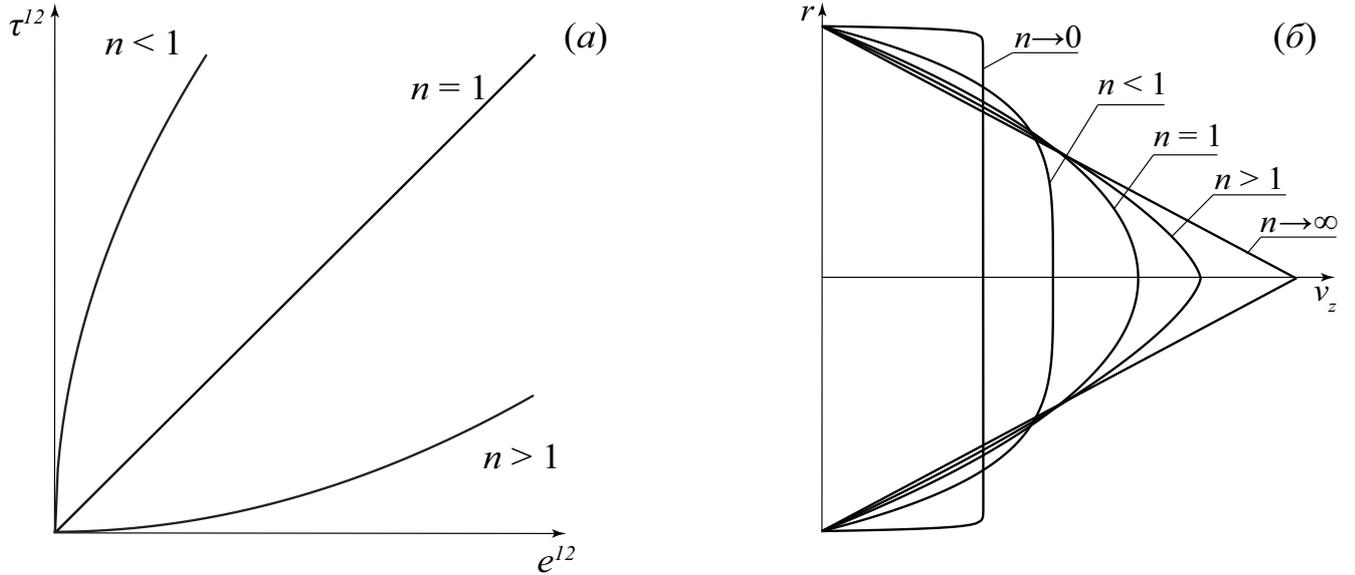


Рисунок 1.1: (а) Степенной закон для чистого сдвига. (б) Профили скорости при различных  $n$ .

Чтобы упростить двумерную систему (1.2) — (1.4) до одномерной системы уравнений в терминах радиуса поперечного сечения  $R$  и расхода  $Q$ , каждое уравнение интегрируется по сечению, принимая во внимание взаимодействие жидкости с трубой.

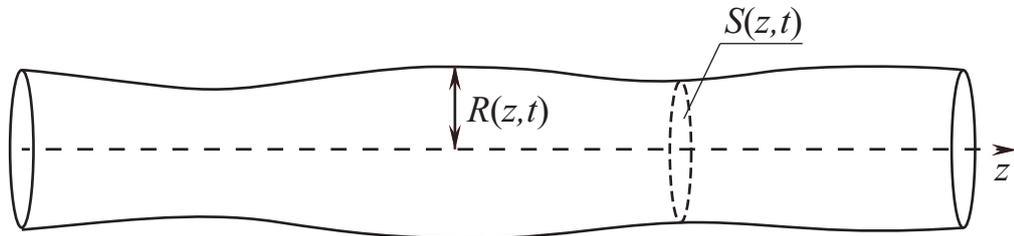


Рисунок 1.2: Осесимметричное возмущение упругой трубки

Предполагается, что возмущения:

1. имеют длину волны, много большую радиуса  $R$ ;
2. имеют низкую частоту колебаний, так что течение можно считать квази-установившимся.

При этих условиях относительная скорость  $V(\xi, z, t) = v^z(r, z, t)/v_{av}(z, t)$  (где  $\xi = r/R$ , и  $v_{av}(z, t) = Q/(\pi R^2)$  — средняя скорость) не зависит от радиуса поперечного сечения  $R(z, t)$  и локального расхода  $Q(z, t)$ , другими словами, в каждый момент времени в каждом сечении устанавливается распределение скорости близкое к распределению Пуазейля (1.5). Вычисляя среднюю скорость

для профиля (1.5), находим:

$$V(\xi, z, t) = \frac{1 + 3n}{1 + n} \left( 1 - \xi^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

Следовательно,

$$v^z(r, z, t) = \frac{Q(z, t)}{\pi R^2(z, t)} \frac{1 + 3n}{1 + n} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right). \quad (1.6)$$

### 1.2.3 Осреднение системы уравнений по сечению

Первое уравнение одномерной задачи получается простым интегрированием уравнения неразрывности (1.2) по поперечному сечению:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \pi \frac{\partial R^2(z, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Для получения второго одномерного уравнения, проинтегрированное уравнение (1.4) примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{S(z, t)} \left( \frac{\partial v^z}{\partial t} + v^r \frac{\partial v^z}{\partial r} + v^z \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) dS = - \int_{S(z, t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dS + \\ + \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\rho} \int_{S(z, t)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) + \frac{\mu}{r} I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) \right] dS. \end{aligned}$$

Далее преобразуем его следующим образом.

Во-первых, используя уравнение неразрывности  $\partial v^z / \partial z = -(1/r) \partial(rv^r) / \partial r$  и условие прилипания  $v^z(R, z, t) = 0$  на стенках трубки, интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_{S(z, t)} v^r \frac{\partial v^z}{\partial r} dS &= 2\pi \int_0^R r v^r \frac{\partial v^z}{\partial r} dr = \\ &= 2\pi R v^r(R(z, t), z, t) v^z(R(z, t), z, t) - 2\pi \int_0^R v^z \frac{\partial r v^r}{\partial r} dr = \\ &= -2\pi \int_0^R v^z \left( -r \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) dr = \int_{S(z, t)} v^z \frac{\partial v^z}{\partial z} dS. \end{aligned}$$

Используя профиль скорости (1.6), после ряда преобразований получаем:

$$\int_{S(z,t)} v^z \frac{\partial v^z}{\partial z} dS = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q(z,t)^2}{(2n+1)\pi R(z,t)^2} \right).$$

Во-вторых, член, содержащий давление, переписывается следующим образом:

$$\int_{S(z,t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dS = \frac{\pi R(z,t)^2}{\rho} \frac{\partial p(z,t)}{\partial z},$$

где

$$P(z,t) = \frac{1}{\pi R^2(z,t)} \int_{S(z,t)} p(r,z,t) dS$$

— среднее давление в поперечном сечении.

Наконец, вязкие члены в правой части преобразуем следующим образом. Два первых члена имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi}{\rho} \int_0^R r \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) + \frac{1}{r} \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) dr = \\ & = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi}{\rho} \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \right) dr = \\ & = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi R(z,t)}{\rho} \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) (R(z,t), z, t). \end{aligned}$$

Для следующих преобразований необходимо учесть длинноволновое приближение, т.е. то, что характерное отношение радиуса к длине  $R/L$  является малым параметром  $\varepsilon$ . Из уравнения неразрывности следует, что радиальная и продольная скорости оцениваются как  $v^r/v^z \sim R/L \sim \varepsilon$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) = \\ & = \mu \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} \right)^2 + O(\varepsilon^2) \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) = -\mu 2^{\frac{1-n}{2}} \left| \frac{\partial v^z}{\partial r} \right|^n + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

поскольку второй инвариант тензора скорости деформаций раскрывается как

$$\begin{aligned} I_2^2 &= \left( \frac{\partial v^z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v^r}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right)^2 = \\ &= \frac{v_{av}^2}{R^2} \left( \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}^z}{\partial \tilde{z}} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}^r}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\tilde{v}^r}{\tilde{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{v}^z}{\partial \tilde{r}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{v}^r}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{v_{av}^2}{R^2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{v}^z}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + O(\varepsilon^2) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} \right)^2 + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где тильды обозначают скорости и длины, рассчитанные по средней продольной скорости и радиусу трубы.

Из выражения для скорости (1.6) находим

$$\frac{\partial v^z}{\partial r}(r, z, t) = -\frac{Q}{\pi R^2(z, t)} \frac{3n+1}{n} \frac{r^{1/n}}{R(z, t)^{(n+1)/n}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi R(z, t)}{\rho} \mu I_2^{n-1} \left( \frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z} \right) \Big|_{r=R} &= \\ -\frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi R(z, t)}{\rho} \mu 2^{\frac{1-n}{2}} \frac{Q^n}{\pi^n R(z, t)^{2n}} \frac{(3n+1)^n}{n^n} \frac{r}{R(z, t)^{n+1}} \Big|_{r=R} &= \\ = -\frac{\mu 2(3n+1)^n Q^n r}{\rho n^n \pi^{n-1} R(z, t)^{3n}} \Big|_{r=R} &= -\frac{\mu 2(3n+1)^n Q^n}{\rho n^n \pi^{n-1} R(z, t)^{3n-1}}. \end{aligned}$$

Последний вязкий член

$$\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\rho} \int_S \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu I_2^{n-1} \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) dS$$

имеет порядок  $\varepsilon^2$ , и им можно пренебречь.

В итоге проинтегрированное по сечению уравнение (1.4) примет вид:

$$\frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q(z, t)^2}{(2n+1)\pi R(z, t)^2} \right) + \frac{\mu 2(3n+1)^n Q(z, t)^n}{\rho n^n \pi^{n-1} R(z, t)^{3n-1}} + \frac{\pi R(z, t)^2}{\rho} \frac{\partial P(z, t)}{\partial z} = 0. \quad (1.8)$$

#### 1.2.4 Модель трубки

Для получения последнего уравнения, необходимо объединить давление жидкости и движение стенки трубки. Учитывая массу трубки, её натяжение и

силу упругости, возникающая за счёт изменения её радиуса, получаем:

$$\beta(R - R_0) + m \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = P, \quad (1.9)$$

где

$$\beta = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)R_0^2}$$

— радиальная жёсткость трубки,  $m = \rho_t h$  — поверхностная плотность стенки трубки, которая может включать в себя инерцию жидкости,  $N = \sigma h$  — продольное натяжение трубки,  $R_0$  — радиус недеформированной трубки;  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $h$  — толщина стенки трубки,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения трубки.

### 1.2.5 Одномерная система уравнений

Таким образом, замкнутая система уравнений (1.7), (1.8), (1.9) для трёх неизвестных  $Q$ ,  $R$ ,  $P$  относительно переменных  $z$ ,  $t$  имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial(\pi R^2)}{\partial t} = 0; \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right) + \frac{\mu 2(3n+1)^n Q^n}{\rho n^n \pi^{n-1} R^{3n-1}} + \frac{\pi R^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0; \quad (1.11)$$

$$\beta(R - R_0) + m \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = P. \quad (1.12)$$

Впервые эта система без учета натяжения, в несколько других обозначениях, была получена в работе [100].

### 1.2.6 Сравнение с другими одномерными моделями

Уравнение (1.10) имеет стандартный вид одномерного уравнения неразрывности [103]. Уравнение движения трубки (1.12) также имеет стандартную форму, однако, в отличие от других исследований, здесь не учитывается «закон

движения» трубки при отрицательных трансмуральных давлениях: он необходим для получения колебаний, связанных со схлопыванием части трубки, однако целью данной работы является исследование колебаний при положительных трансмуральных давлениях, не сопровождающихся схлопыванием. Кроме того, это уравнение учитывает массу трубки, что необходимо для получения неустойчивости коротких волн (см. раздел 3.1.5 ниже).

Уравнение импульсов (1.11) имеет более сложный вид и нуждается в дополнительном анализе. Как правило [103], одномерное уравнение импульсов записывается в стандартной форме:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{dp}{dz} - F, \quad (1.13)$$

где  $v(z,t)$  и  $p(z,t)$  — средняя продольная скорость и давление жидкости, и  $F$  — слагаемое, учитывающее потери на трение. Умножив уравнение (1.11) на  $\rho/(\pi R^2)$ , оно переписывается в аналогичной форме:

$$\rho \left( \frac{1}{\pi R^2} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\pi R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right) \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu \frac{2(3n+1)^n Q^n}{n^n \pi^n R^{3n+1}}. \quad (1.14)$$

Левая часть уравнения (1.13) записывается в предположении о равномерном распределении скоростей, т. е. в пренебрежении пуазейлевским распределением скоростей. Это эквивалентно случаю  $n = 0$ , поскольку в данном случае получается однородный пуазейлевский профиль скорости (Рис. 1.1 (б)). Для  $n = 0$ , вводя среднюю скорость  $v = Q(z,t)/(\pi R^2)$  и используя уравнение неразрывности, левая часть уравнения (1.14) преобразуется к виду

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

которое совпадает с левой частью (1.13). Очевидно, что для  $n \neq 0$  левая часть уравнения (1.14) отражает влияние пуазейлевского распределения скорости на интегральную конвективную производную. В аналогичном виде правая часть уравнения импульсов при  $n \neq 0$  используется в [73; 97].

Наконец, рассмотрим слагаемое, учитывающее вязкие потери давления:

$$\mu \frac{2(3n+1)^n Q^n}{n^n \pi^n R^{3n+1}}. \quad (1.15)$$

Для  $n = 1$  оно примет вид:

$$\mu \frac{8Q}{\pi R^4}, \quad (1.16)$$

что представляет собой потерю давления в обычном потоке ньютоновской жидкости с пуазейлевским распределением скоростей. В этом виде слагаемое  $F$  было взято, например, в работе [31]. Ясно, что при  $n \neq 1$  слагаемое (1.15) представляет собой обобщение члена, отвечающего за вязкие потери, на степенные жидкости.

Аналогичная одномерная модель использовалась в [73; 97] для создания модели сети кровеносных сосудов. Однако, учитывая профиль скорости (1.5) и получая тот же конвективный член, что и второе слагаемое в (1.11), авторы данных исследований принимали вязкие потери давления равными выражению (1.16), т.е. пренебрегали неньютоновской реологией.

### 1.2.7 Переход к безразмерным переменным

В качестве размерно независимых величин выбираются плотность жидкости  $\rho$ , радиус трубки  $R_0$  и расход  $Q_0$  на входе в трубку. Тогда остальные величины обезразмериваются следующим образом:

$$\begin{aligned} R &= R_0 \tilde{R}, & Q &= Q_0 \tilde{Q}, \\ P &= \frac{\rho_0 Q_0^2}{R_0^4} \tilde{P}, & \beta &= \frac{\rho_0 Q_0^2}{R_0^5} \tilde{\beta}, & m &= R_0 \rho_0 \tilde{m}, & N &= \frac{\rho Q_0^2}{R_0^3} \tilde{N}, \\ z &= R_0 \tilde{z}, & t &= \frac{R_0^3}{Q_0} \tilde{t}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где обозначения с тильдой относятся к безразмерным переменным.

Вязкость жидкости обезразмеривается через число Рейнольдса, которое для степенных жидкостей в трубках вводится, как в [116]:

$$Re = \frac{\rho (2R_0)^n v_{av}^{2-n}}{\mu \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n 8^{n-1}} = \frac{\rho R_0^n v_{av}^{2-n}}{\mu} \frac{8n^n}{(3n+1)^n}.$$

Выражая среднюю скорость, как  $v_{av} = Q_0/(\pi R_0^2)$ , получено:

$$\mu = \frac{\rho Q_0^{2-n} \pi^{n-2}}{R_0^{4-3n}} \frac{8n^n}{Re (3n+1)^n},$$

В результате система (1.10)–(1.12) принимает следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial (\pi \tilde{R}^2)}{\partial \tilde{t}} = 0; \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{(3n+1)\tilde{Q}^2}{(2n+1)\pi\tilde{R}^2} \right) + \frac{16\tilde{Q}^n}{\pi Re\tilde{R}^{3n-1}} + \pi\tilde{R}^2 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{z}} = 0; \quad (1.19)$$

$$\beta(\tilde{R}-1) + \tilde{m} \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \tilde{t}^2} - \tilde{N} \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \tilde{z}^2} = \tilde{P}. \quad (1.20)$$

Подставив значение  $P$ , выраженное через  $R$ , из (1.20) в (1.19) и опуская тильды, окончательно получим безразмерную систему двух одномерных по пространству уравнений:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial(\pi R^2)}{\partial t} = 0, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right) + \frac{16Q^n}{\pi ReR^{3n-1}} + \pi R^2 \beta \frac{\partial R}{\partial z} + \pi R^2 m \frac{\partial^3 R}{\partial z \partial t^2} - \pi R^2 N \frac{\partial^3 R}{\partial z^3} = 0. \quad (1.22)$$

### 1.3 Выводы

В настоящей главе был проведен обзор литературы и обозначены актуальные направления исследования рассматриваемой задачи. Получена замкнутая система уравнений движения нелинейно-вязкой степенной жидкости внутри деформируемой цилиндрической трубки, зависящих от интегральных функций, с применением гипотезы единого профиля (отношение продольной скорости к своему среднему значению не зависит от радиуса поперечного сечения и локального расхода). Тем самым была найдена пространственно-одномерная постановка задачи о течении неньютоновской жидкости в упругой трубке.

## Глава 2. Существование и единственность стационарного состояния упругой трубки при протекании через неё степенной жидкости

### 2.1 Одномерное уравнение, описывающее стационарное состояние

Рассмотрим стационарное состояние трубки. В таком случае расход и радиус не зависят от времени:  $Q = Q_s(z)$ ,  $R = R_s(z)$ . Тогда уравнения (1.21) и (1.22) примут вид:

$$\frac{\partial Q_s}{\partial z} = 0 \Rightarrow Q_s \equiv 1,$$

$$\frac{(3n+1)}{(2n+1)\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_s^2} \right) + \frac{16}{\pi Re R_s^{3n-1}} + \pi R_s^2 \beta \frac{\partial R_s}{\partial z} - \pi R_s^2 N \frac{\partial^3 R_s}{\partial z^3} = 0.$$

Последнее уравнение записывается в виде:

$$\frac{N R_s^{3n+1}}{\beta} \frac{d^3 R_s}{dz^3} + \left( \frac{2(3n+1) R_s^{3n-4}}{(2n+1)\pi^2 \beta} - R_s^{3n+1} \right) \frac{dR_s}{dz} - \frac{16}{\pi^2 \beta Re} = 0. \quad (2.1)$$

Оно имеет третий порядок и требует три граничных условия. Будем считать, что упругая трубка имеет одинаковый радиус на входе и на выходе (как, например, в экспериментах на установках Starling resistor, где она одета на концы металлических трубок). Также задано значение входного трансмурального давления  $P = P_{in}$ :

$$R_s(0) = R_s(L) = 1, \quad \frac{d^2 R_s(0)}{dz^2} = -P_{in}/N \quad (2.2)$$

Таким образом, уравнение (2.1) с приведенными граничными условиями (2.2) представляет собой безразмерную краевую задачу, описывающую стационарное состояние трубки с протекающей внутри жидкостью.

Уравнение (2.1) может быть приведено к виду:

$$\frac{d}{dz} \left[ -\frac{N}{\beta} \frac{d^2 R_s}{dz^2} + \left( \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 \beta} R_s^{-5} + 1 \right) R_s \right] = -\frac{16}{\pi^2 \beta Re R_s^{3n+1}}. \quad (2.3)$$

Без учета натяжения (т.е. при  $N = 0$ ) одномерное уравнение (2.3) было получено и исследовано в статье [100]. В этом случае оно превращается в уравнение

первого порядка и интегрируется в явном виде, причём при заданном входном радиусе  $R_s(0) = 1$  решение всегда единственно и существует лишь на конечной длине  $L < L_{max}$ . При учёте натяжения ( $N \neq 0$ ) уравнение (2.3) представляет собой уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами и в явном виде не интегрируется. В связи с этим, следующие разделы 2.2, 2.3 посвящены качественному исследованию свойств краевой задачи для уравнения (2.3).

## 2.2 Исследования задачи без учёта вязкости

### 2.2.1 Анализ стационарных точек

Сначала рассмотрим случай, когда значение числа Рейнольдса стремится к бесконечности,  $Re \rightarrow \infty$ , тогда дифференциальное уравнение (2.3) имеет первый интеграл:

$$-\frac{N}{\beta} \frac{d^2 R_s}{dz^2} + \left( \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2\beta} R_s^{-5} + 1 \right) R_s + A = 0, \quad (2.4)$$

где в силу граничных условий при  $z = 0$

$$A = - \left( \frac{P_{in}}{\beta} + \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2\beta} + 1 \right).$$

Обозначим  $R_s = x$  и  $\frac{\partial R_s}{\partial z} = y$ , тогда с учетом (2.4) получается система:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 N x^4} + \frac{\beta x}{N} + \frac{\beta A}{N}, \end{cases} \quad (2.5)$$

где штрихом обозначена производная по  $z$ .

В рамках новых обозначений оставшиеся граничные условия имеют вид:

$$x(0) = x(L) = 1. \quad (2.6)$$

Для того чтобы найти решение краевой задачи (2.5), (2.6) необходимо подобрать начальное значение  $y(0)$  на прямой  $x(0) = 1$  таким образом, чтобы

значение  $z$ , за которое траектория  $x(z), y(z)$  вернется на прямую  $x = 1$ , было равно длине трубки  $L$ .

Для исследования системы (2.5) выясним качественную картину её фазовой плоскости. Сначала найдем стационарные точки  $(x_0, y_0)$  системы (2.5). Очевидно, что  $y_0 = 0$ , а  $x_0$  является решением уравнения

$$T(x) = x^5 + Ax^4 + \varkappa = 0, \quad \varkappa = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2\beta} > 0. \quad (2.7)$$

Нетрудно доказать, что уравнение (2.7) может иметь не больше трёх действительных корней. При  $A < A_{cr}$ , один, всегда присутствующий корень, отрицателен, а два корня положительны, причём один меньше  $x_{cr} = -4A/5$ , а другой больше; при  $A = A_{cr}$ , один кратный корень  $x = x_{cr}$  положителен, другой — отрицателен; при  $A > A_{cr}$  имеется только один отрицательный корень (индексом  $cr$  обозначаются критические значения). Значение

$$A_{cr} = -\frac{5}{4^{4/5}}\varkappa^{1/5}$$

соответствует кратному корню уравнения (2.7), равному  $x_{cr}$  — значению, при котором производная функции  $T(x)$  обращается в 0.

В качестве примера при заданных значениях  $\beta = 0.7, n = 0.2$  и значениях  $A = A_{cr} = -1.00$ ,  $A = -1.08 < A_{cr}$  ( $P_{in} = -0.005$ ),  $A = -0.37 > A_{cr}$  ( $P_{in} = -0.500$ ), построен график зависимости  $T(x)$  от  $x$  (Рис. 2.1(а)).

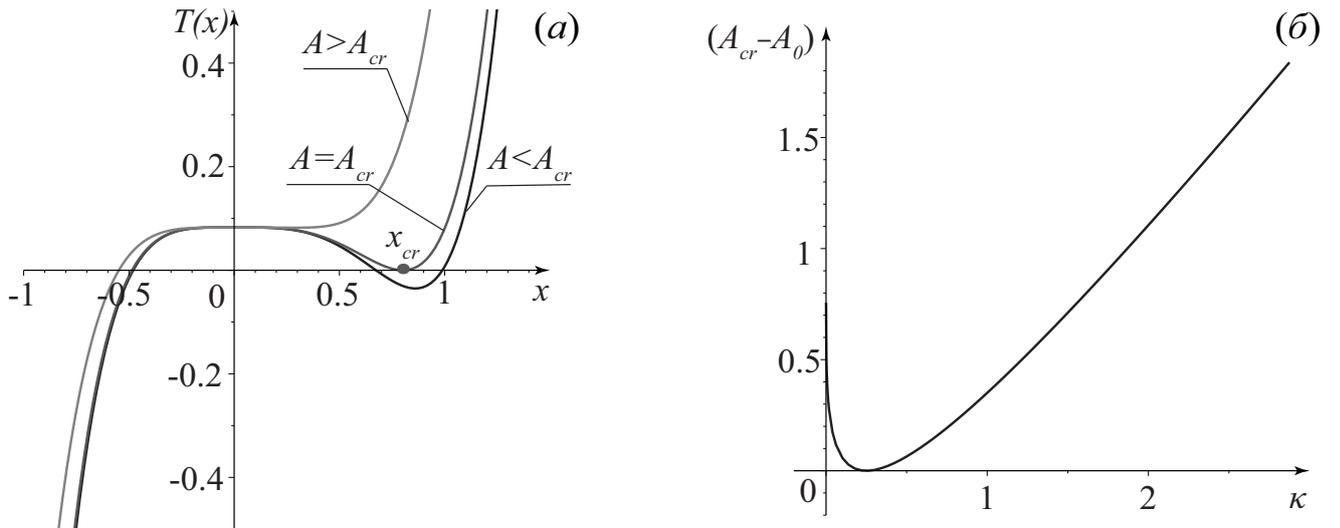


Рисунок 2.1: (а) График функции  $T(x)$ . (б) График функции  $(A_{cr} - A_0)$ .

Поскольку  $x$  имеет смысл радиуса трубки, физический смысл имеют только положительные корни  $x_0 > 0$ . Можно показать, что траектории системы

(2.5) не могут пересекать ось  $x = 0$ , поэтому далее ограничимся изучением полуплоскости  $x > 0$  фазовой плоскости (2.7).

В дальнейшем нам понадобится значение  $A$  при  $P_{in} = 0$ :

$$A = A_0 = -(\varkappa + 1).$$

Значение  $A_0$  совпадает с значением  $A_{cr}$  при  $\varkappa = 1/4$ , а в остальных случаях всегда  $A_0 < A_{cr}$ , поскольку функция

$$A_{cr} - A_0 = -\frac{5}{4^{4/5}}\varkappa^{1/5} + \varkappa + 1$$

всегда положительна при  $\varkappa \neq 1/4$  (Рис. 2.1(б)).

Рассмотрим типы стационарных точек при  $A < A_{cr}$  (в противоположном случае стационарных точек  $x_0 > 0$  нет). После линеаризации второго уравнения системы (2.5) относительно точки  $(x_0, 0)$  она примет вид:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{\beta}{N} \left( 5 + \frac{4A}{x_0} \right), \end{cases} \quad (2.8)$$

Характер поведения фазовых траекторий системы (2.8) на фазовой плоскости определяют корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{\beta}{N} \left( 5 + \frac{4A}{x_0} \right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

В зависимости от собственных значений

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\beta}{N} \left( 5 + \frac{4A}{x_0} \right)}$$

получаем:

1. большая стационарная точка  $x_0 > -4A/5$  — седло;
2. меньшая стационарная точка  $x_0 < -4A/5$  — центр.

Рассмотрим три возможных типа фазовых траекторий в зависимости от значения  $A$ . Ряд примеров ниже приведен для значений параметров

$$\beta = 0.7, N = 2.4, n = 0.2, \quad (2.9)$$

тогда значения  $A_0 = -1.08, A_{cr} = -1.00$ . Также введем значение входного давления  $P_{cr}$ , при котором  $A = A_{cr}$ :

$$P_{cr} = \beta \left( \frac{5}{4^{4/5}} \varkappa^{1/5} - (\varkappa + 1) \right) < 0.$$

1.  $A_0 < A < A_{cr}$ 

Входное давление в трубке  $P_{in}$  отрицательное, но не слишком большое по абсолютной величине ( $0 > P_{in} > P_{cr}$ ). Имеются две стационарные точки, одна из которых центр, а другая — седло.

- а) При  $\varkappa < 1/4$  обеим точкам соответствует  $x_0 < 1$ , т.е. суженное состояние трубки. Для примера на Рис. 2.2(а) показан фазовый портрет для (2.9) и  $P_{in} = -0.010$ , тогда  $A = -1.06$ .

При увеличении абсолютного значения трансмурального давления стационарные точки сближаются: точка, соответствующая центру, смещается в сторону увеличения по оси  $Ox$ , а точка, соответствующая седлу, смещается от  $x_0 = 1$  (одно из возможных значений  $x_0$  при  $P_{in} = 0$ ) в сторону уменьшения по оси  $Ox$ . Примером может служить фазовая плоскость для (2.9) и  $P_{in} = -0.040$ , тогда  $A = -1.02$  (Рис. 2.2(б)).

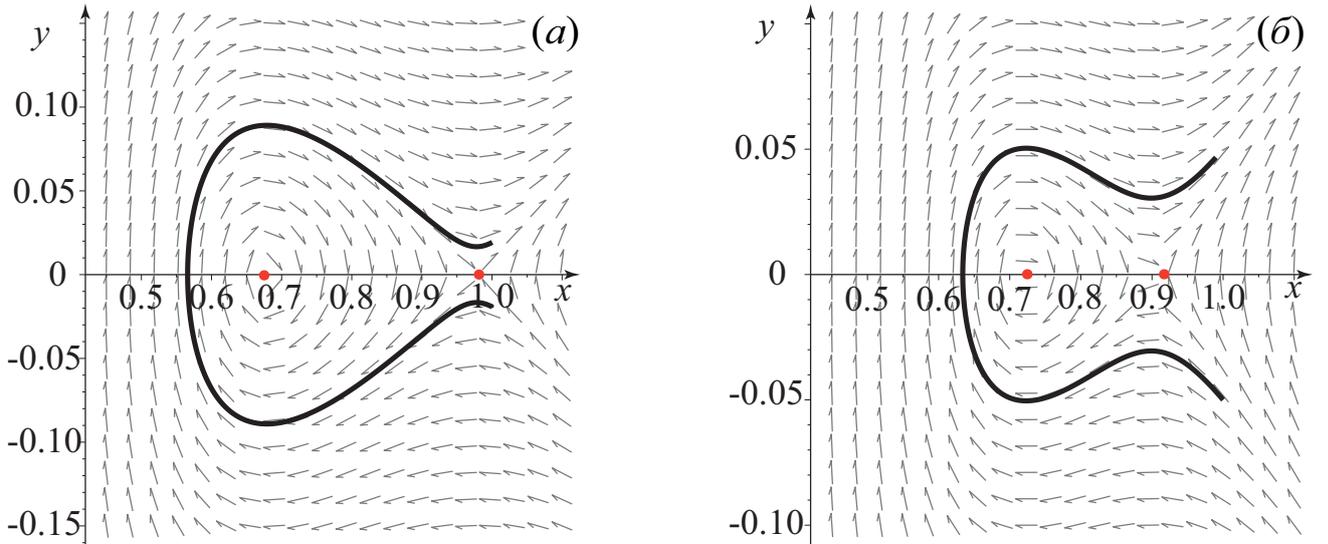


Рисунок 2.2: (а) Фазовый портрет для (2.9),  $P_{in} = -0.010$ ,  $A_0 < A < A_{cr}$ .

(б) Фазовый портрет для (2.9),  $P_{in} = -0.040$ ,  $A_0 < A < A_{cr}$ .

- б) При  $\varkappa > 1/4$  обе стационарные точки соответствуют  $x_0 > 1$ , при увеличении  $|P_{in}|$  происходит сближение точек, аналогичное предыдущему случаю. Примером является фазовый портрет (Рис. 2.3(а)) для  $\beta = 0.1$ ,  $N = 2.4$ ,  $n = 0.2$ ,  $P_{in} = -0.007$ .

2.  $A > A_{cr}$ 

Входное давление  $P_{in}$  отрицательно и достаточно большое по абсолютной величине ( $0 > P_{cr} \geq P_{in}$ ). При  $A = A_{cr}$  стационарные точки сливаются и при  $A > A_{cr}$  исчезают. Примером являются фазовые портреты, для

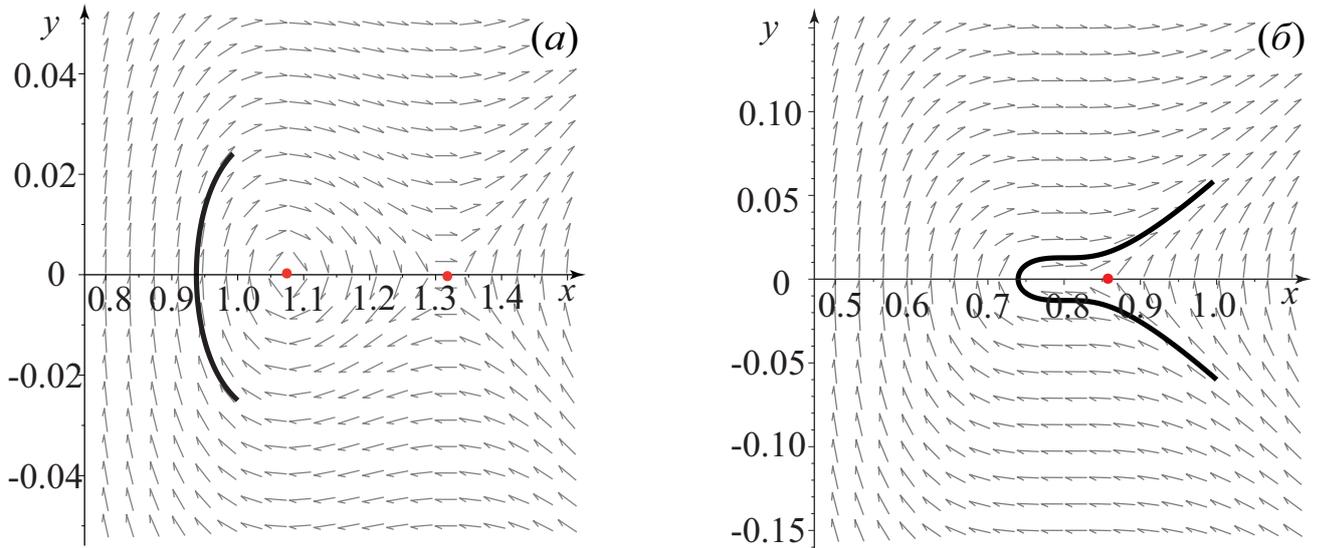


Рисунок 2.3: (а) Фазовый портрет для  $x_0 > 1$ ,  $P_{in} = -0.040$ ,  $A_0 < A < A_{cr}$ .

(б) Фазовый портрет для (2.9),  $A = A_{cr}$ .

значений (2.9) и  $P_{in} = P_{cr}$ , при котором  $A = A_{cr}$  (Рис. 2.3(б)), и  $P_{in} = -0.100$ , при котором  $A = -0.93 > A_{cr}$  (Рис. 2.4(а)).

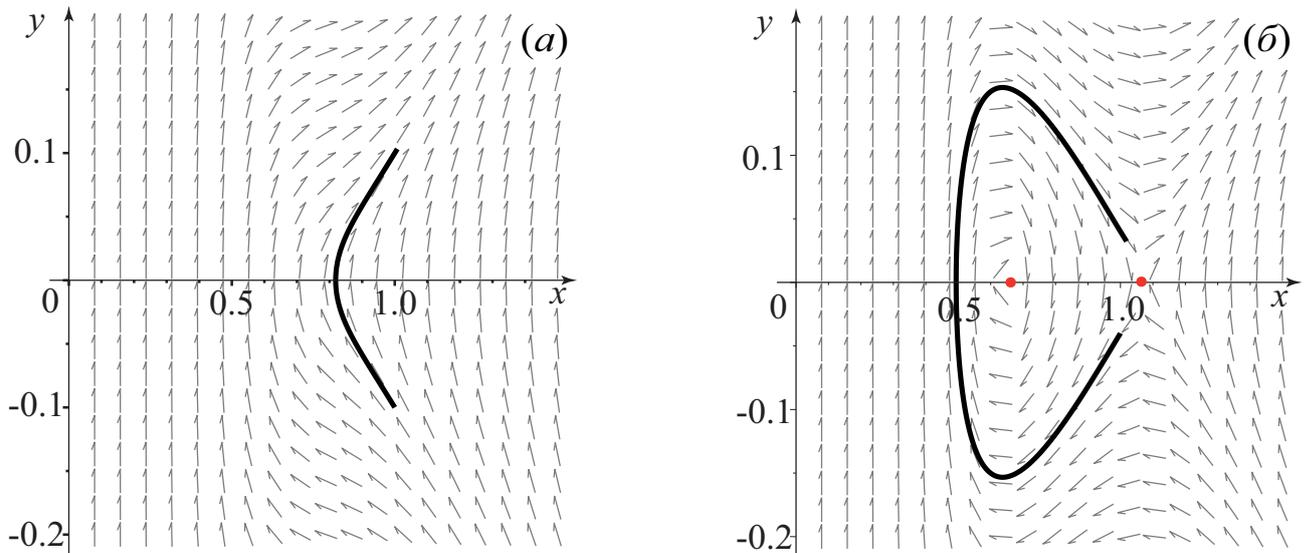


Рисунок 2.4: (а) Фазовый портрет для (2.9),  $P_{in} = -0.100$ ,  $A > A_{cr}$ .

(б) Фазовый портрет для (2.9),  $P_{in} = 0.040$ ,  $A < A_0$ .

3.  $A < A_0$ , значение  $P_{in} > 0$  — входное давление повышено.

В данном случае существуют две стационарные точки, одна из которых центр, а другая — седло, причем седловая точка имеет значение  $x_0 > 1$ , а центр —  $x_0 < 1$ , что соответствует раздутому и суженному состоянию трубки, соответственно. Фазовый портрет, построенный для (2.9) и  $P_{in} = 0.040$  при котором  $A = -1.13 < A_0$ , представлен на (Рис. 2.4(б)).

При увеличении значения трансмурального давления стационарная точка, соответствующая центру, смещается ближе к 0, а стационарная точка, соответствующая седлу, смещается от значения равного 1, в сторону увеличения по оси  $Ox$ . Пример фазовой плоскости для (2.9) и  $P_{in} = 0.500$ , при котором  $A = -1.79 < A_0$  показан на Рис. 2.5(a).

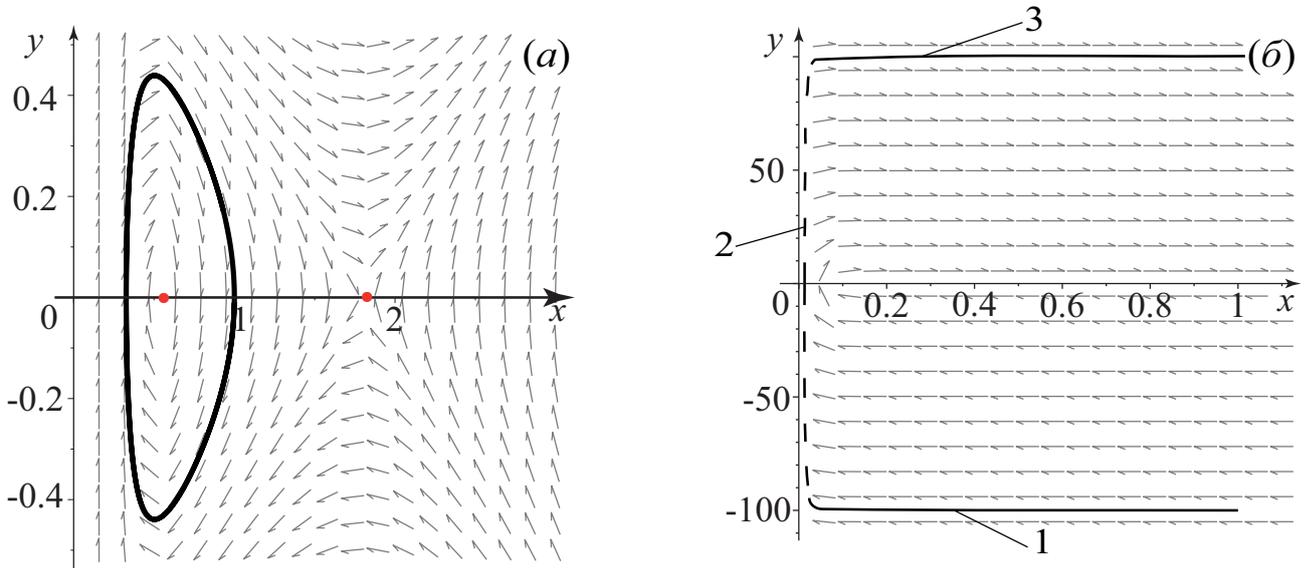


Рисунок 2.5: (a) Фазовый портрет для (2.9),  $P_{in} = 0.500$ ,  $A < A_0$ .

(б) Фазовый портрет для (2.9),  $y(0) \rightarrow -\infty$ .

Важно отметить, что система (2.5) не имеет сингулярностей при  $x > 0$  и, следовательно, не испытывает бифуркаций фазовой плоскости, кроме слияния и исчезновения стационарных точек при  $A = A_{cr}$ . Таким образом, приведенные выше примеры фазовых плоскостей для случаев 1, 2, 3 качественно не меняются при других параметрах задачи.

### 2.2.2 Анализ максимальной возможной длины трубки

Далее исследуем, при каком значении  $z = L$  фазовая траектория возвращается на прямую  $x = 1$  при  $x(0) = 1$  и различных значениях  $y(0)$ .

Если начальное значение  $y(0) \rightarrow +\infty$ , то  $dx/dz \rightarrow +\infty$ , и из структуры фазовых портретов видно, что трубка неограниченно расширяется, так что решения краевой задачи не существует.

Докажем, что если начальное значение  $y(0) \rightarrow -\infty$ , то время прохождения траектории до её возвращения на прямую  $x = 1$  (значение  $z$ ) стремится к 0. Примером подобной траектории может служить фазовый портрет для (2.9) при  $y(0) \rightarrow -\infty$  (Рис. 2.5(б)).

Траектория может быть разбита на три участка:

1.  $y(0) \rightarrow -\infty$

На данном участке траектория близка к прямой, параллельной оси  $OX$ . Согласно первому уравнению системы (2.5),  $x' = y$ , значит значение  $dx/dz \rightarrow -\infty$ , что свидетельствует о большой скорости прохождения данного участка. В то же время, значение  $x$  (пройденное расстояние) не больше 1, а значит, значение  $z$  (время прохождения этого участка) будет стремиться к 0.

2. Участок траектории от  $y(0) \rightarrow -\infty$  до  $y(0) \rightarrow +\infty$ .

На данном участке значение  $x \rightarrow 0$ , а скорость изменения  $y$ , согласно второму уравнению системы (2.5), является величиной порядка  $1/x^4$ , и можно пренебречь остальными слагаемыми. Откинув их, рассмотрим упрощенные уравнения для определения времени движения траектории по вертикальному участку

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 N x^4} \end{cases}$$

или

$$x'' = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 N x^4}. \quad (2.10)$$

С учётом соотношения:

$$x'' = y' = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} y.$$

Уравнение (2.10) может быть проинтегрировано, в результате чего получаем уравнение первого порядка:

$$y^2 = -\frac{3n+1}{(2n+1)\pi^2 N 3x^3} + C, \quad (2.11)$$

где в силу начально условия  $x(0) = 1$

$$C = \frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N} + y(0)^2.$$

Уравнение (2.11) интегрируется второй раз, в результате чего получается решение уравнения (2.10):

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{C - \frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N \zeta^3}}} = \pm z + C_2, C_2 = const.$$

Положив в силу начального условия  $C_2 = 0$ , рассмотрим решение:

$$\int_x^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{C - \frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N \zeta^3}}} = z.$$

Заменой переменных

$$\zeta = \xi \left( \frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N C} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\chi(C) = \xi \left( \frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N C} \right)^{-\frac{1}{3}},$$

решение переписывается в виде:

$$\left( \frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{C^{5/6}} \int_{\chi(C)x}^{\chi(C)} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{-3}}} = z. \quad (2.12)$$

Интеграл в соотношении (2.12) при  $\chi \rightarrow 1$  (приближение вертикального участка к  $x = 0$ ) сходящийся и имеет порядок  $\chi(C)$ , т.е. порядка  $C^{1/3}$ , а значит,  $z$  имеет порядок  $C^{-1/2} |y(0)|^{-1}$ . Таким образом, время  $z$  прохождения вертикального участка траектории стремится к 0 при  $y(0) \rightarrow -\infty$ .

### 3. $y(0) \rightarrow +\infty$

В данном случае траектория близка к прямой, параллельной оси  $OX$ , и значение  $z$  стремится к 0, аналогично участку траектории, при котором  $y(0) \rightarrow -\infty$ .

Тем самым,  $L \rightarrow 0$  при  $|y(0)| \rightarrow +\infty$ , поэтому максимальная длина трубки  $L_{max}$ , при которой существует решение краевой задачи, может достигаться только при ограниченных  $|y(0)|$ .

При ограниченном  $|y(0)|$  значение  $L$  может быть неограниченно большим, только если траектория проходит вблизи седловой точки, т.к. в её окрестности скорость на траектории падает до нуля, и она может оставаться в этой окрестности сколь угодно долго. Если значение  $x_0$  точки — центра равно 1 (т.е.  $\varkappa > 1/4, P_{in} = 0$ ), тогда трубка не будет раздуваться

или сужаться, а всегда будет сохранять свою начальную форму, а значит значение длины трубки  $L$  может быть неограниченно большим. В других случаях точка — центр не может подойти, поскольку фазовые траектории в её окрестности замкнуты охватывают особую точку, а значит траектория, начинающаяся с  $x(0) = 1$ , не может слишком близко подойти к особой точке — центру.

Рассмотрим значения  $L_{max}$  для ранее разобранных трёх случаев:

1.  $A_0 < A \leq A_{cr}$

В этом случае трубка может быть сколь угодно длинной при  $y(0)$ , близких к сепаратрисе, соответствующей седловой точке.

а) Пример такой траектории показан для стационарных точек  $x_0 < 1$  и значений (2.9),  $P_{in} = -0.050$ ,  $A = -1.01$ ,  $y(0) \approx -0.051$ , близким к сепаратрисе седловой точки (Рис. 2.6(а)).

б) Для стационарных точек  $x_0 > 1$ , примером служит траектория для значений параметров  $\beta = 0.1$ ,  $N = 2.4$ ,  $n = 0.2$ ,  $P_{in} = -0.007$ ,  $y(0) \approx 0.025$  (Рис. 2.6(б)).

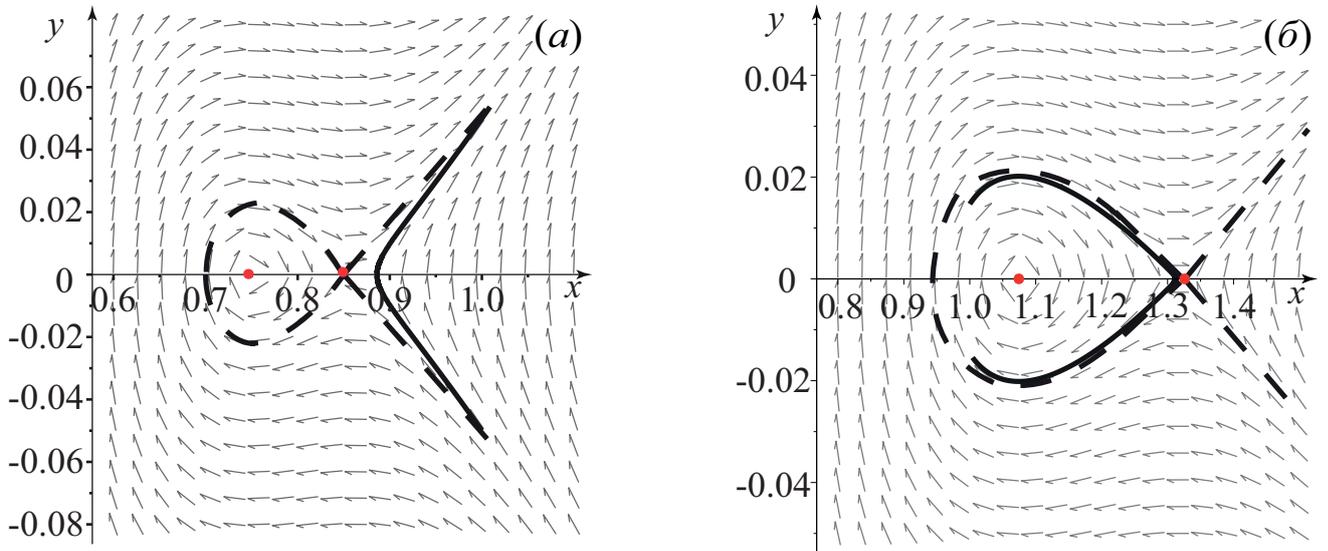


Рисунок 2.6: (а) Фазовый портрет для (2.9),  $P_{in} = -0.050$ ,  $A_0 < A \leq A_{cr}$ .

(б) Фазовый портрет для  $x_0 > 1$ ,  $P_{in} = -0.007$ ,  $A_0 < A \leq A_{cr}$ .

2.  $A > A_{cr}$

Поскольку стационарных точек нет, то значение  $L_{max}$  конечно. Таким образом, стационарные состояния трубки с протекающей жидкостью для достаточно длинных трубок в этом случае не существуют.

3.  $A < A_0$

В случае, когда входное давление повышено, трубка также может быть сколь угодно длинной при  $y(0)$ , достаточно близких к сепаратрисе, соответствующей седловой точке. Примером служит траектория для значений параметров (2.9) и  $P_{in} = 0.100$ ,  $A = -1.01$ ,  $y(0) \approx 0.085$  соответствующего сепаратрисе седловой точки (Рис. 2.7).

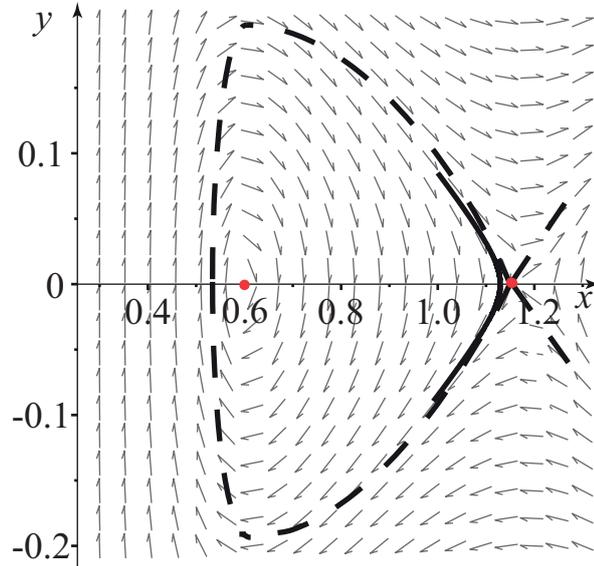


Рисунок 2.7: Фазовый портрет для (2.9),  $P_{in} = 0.100$ ,  $A_0 < A$ .

Следовательно, при стационарном состоянии трубка может быть сколь угодно длинной только при  $A < A_{cr}$ , т.е. при  $P_{in} \geq P_{cr}$ .

### 2.2.3 Неединственность решения

В настоящем разделе рассматривается возможность неединственности решения краевой задачи (2.5), (2.6) в зависимости от значения параметра  $A$  для разных длин трубок. Большинство рассматриваемых ниже примеров приведены для значений безразмерных параметров

$$\beta = 0.7, N = 2.4, n = 0.2, \quad (2.13)$$

тогда значения  $A_0 = -1.14$ ,  $A_{cr} = -1.12$ .

1.  $A_0 < A \leq A_{cr}$

а) В данном случае для стационарных точек  $x_0 < 1$  и для любых значений длины  $L$  имеется неединственность решения, а именно, при

одинаковом значении  $L$  существуют две траектории, по которым возможно вернуться на прямую  $x = 1$ . Одно решение соответствует  $y_s < y(0) < 0$ , где  $y_s$  — пересечение сепаратрисы, приходящей в седловую точку, с прямой  $x = 1$ , а второе решение соответствует  $y(0) < y_s < 0$ , причём в этом случае траектория обходит точку — центр.

Например, для значений параметров (2.13) и  $P_{in} = -0.003$ ,  $A = -1.13$  и значений  $y(0) \approx -0.11400$  и  $y(0) \approx -0.01635$  получаются две траектории, соответствующие одному значению  $L = 5$  (Рис. 2.8(а)). График зависимости радиуса трубки  $R$  от координаты  $z$ , соответствующий этим решениям, показан на Рис. 2.8(б). Другой пример, соответствующий значению  $L = 25$ , показан на Рис. 2.9(а,б) ( $y(0) \approx -0.01672$  и  $y(0) \approx -0.01674$ ).

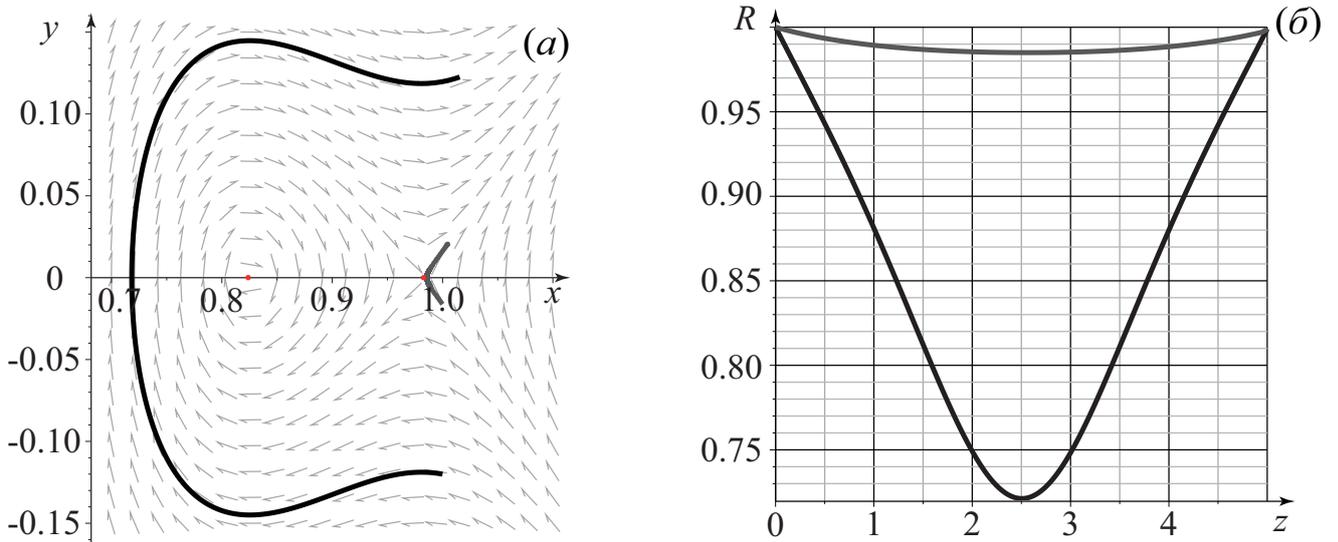


Рисунок 2.8: (2.13),  $P_{in} = -0.003$ ,  $A_0 < A \leq A_{cr}$ ,  $L = 5$ , (а) фазовый портрет, (б) график  $R(z)$ .

Рассмотрим зависимость длины трубки от различных начальных значений  $y(0)$ . График имеет асимптоту  $y(0) = y_s$ , соответствующую значению, при котором  $y(0)$  принадлежит сепаратрисе седловой точки. Так, для ранее рассмотренного примера, со значениями параметров (2.13), график имеет асимптоту  $y(0) = y_s \approx -0.01673$  (Рис. 2.10(а)). Решение существует только при отрицательных значениях  $y(0)$ . Расчёты показывают, что убывание  $L$  при уменьшении  $y(0)$  монотонно, поэтому в данном случае при любых  $L$  существует два решения, с обходом и без обхода центра.

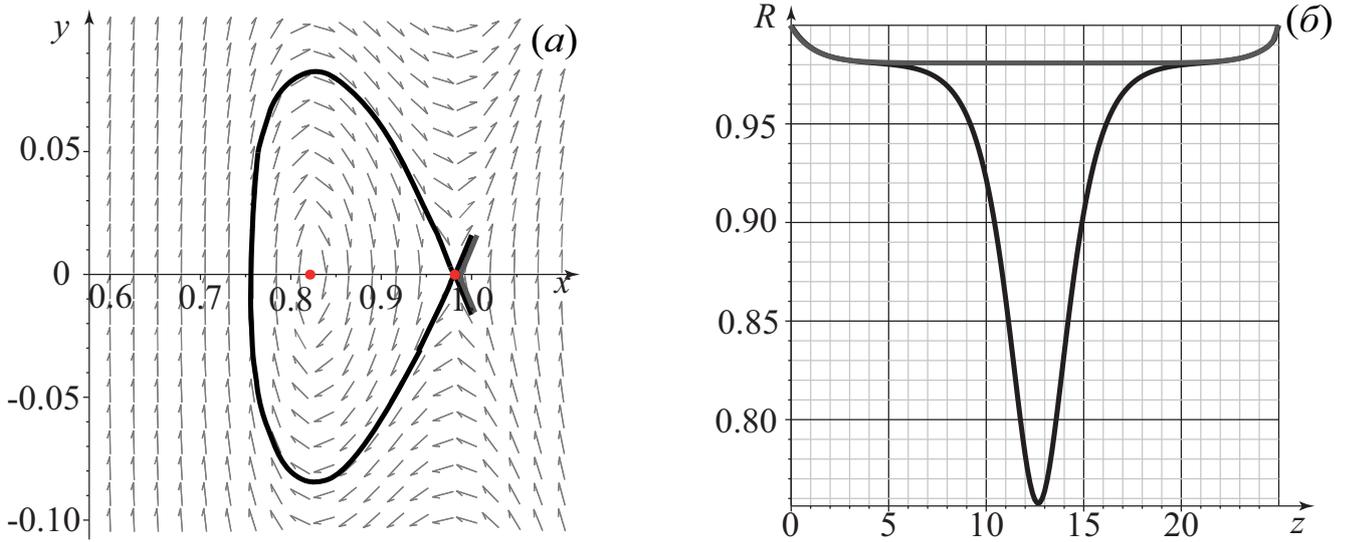


Рисунок 2.9: (2.13),  $P_{in} = -0.003$ ,  $A_0 < A \leq A_{cr}$ ,  $L = 25$ , (а) фазовый портрет, (б) график  $R(z)$ .

б) Если стационарные точки соответствуют значениям  $x_0 > 1$ , то в данном случае количество решений зависит от длины трубки. При достаточно малых значениях  $L < L_{cr1}$  существуют две траектории, соответствующие разным начальным  $y(0)$ , аналогично случаю  $A > A_{cr}$ , который будет рассмотрен ниже. При  $L_{cr2} > L > L_{cr1}$  решений не существует. Далее, при  $L_{cr3} > L > L_{cr2}$  появляются ещё два решения, соответствующие одному дополнительному обходу точки — центра, причем при симметричном отражении относительно середины трубки одно превращается во второе. Затем при  $L > L_{cr3} > L_{cr2}$  появляются ещё два дополнительных решения. При достаточно больших  $L$  существует любое наперед заданное четное количество решений. Каждый обход точки — центра соответствует локальному сужению трубки и последующему расширению до исходного радиуса. Например, значению  $L = 40$  соответствует четыре решения: одно без обхода центра, два с одним обходом, и одно с полуторным обходом (Рис. 2.10(б)).

График зависимости  $L$  от начального значения  $y(0)$  имеет две асимптоты,  $y_{s+}$  и  $y_{s-}$ , соответствующие двум сепаратрисам седловой точки (Рис. 2.11(а)). При  $y(0) > y_{s+}$  или при  $L_{cr1} < L < L_{cr2}$  решения краевой задачи не существует. При  $y(0) < y_{s+}$  и малом значении длины трубки  $L < L_{cr1}$  имеется два решения. При  $y(0) < 0$  и  $L = L_{cr1}$  или при  $0 < y(0) < y_{s+}$  и  $L = L_{cr2}$  имеется единственность решения. При

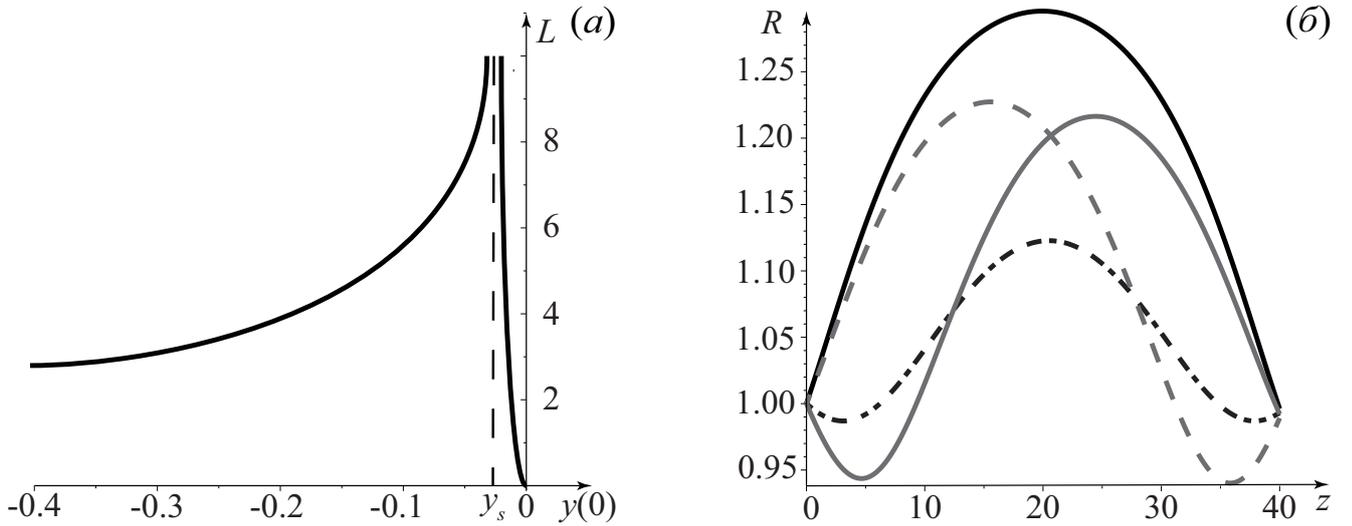


Рисунок 2.10: (а) График  $L(y(0))$  при (2.13),  $P_{in} = -0.003$ ,  $A_0 < A \leq A_{cr}$ .

(б) График  $R(z)$  для  $x_0 > 1$ ,  $P_{in} = -0.005$ ,  $A_0 < A \leq A_{cr}$ ,  $L = 40$ .

$y(0) < y_{s-}$  и  $L > L_{cr1}$  решения краевой задачи не существует. При  $y_{s-} < y(0) < y_{s+}$  и при больших значениях длины трубки ( $L > L_{cr2}$ ) возможно существование множества решений, соответствующих числу возврата на прямую  $x = 1$  при обходе точки — центра.

## 2. $A > A_{cr}$

Ввиду того, что стационарных точек нет, для больших значений  $L$  решение не существует. Другими словами, не существует траектории, возвращающейся в точку  $x(L) = 1$ . Однако, для малых значений  $L$  существует два решения, т.е. существуют две различные траектории, соответствующие различным начальным значениям  $y(0)$  и одинаковым значениям  $L$ , такие что  $x(L) = 1$ .

Поскольку  $L = 0$  при  $y(0) = 0$  и  $y(0) \rightarrow -\infty$ , график зависимости длины трубки  $L$  от начального значения  $y(0)$  (Рис. 2.11(б)) имеет максимум, соответствующий единственному возможному случаю единственности решения. Таким образом, при  $L > L_{max}$  решения не существует, при  $L = L_{max}$  есть единственное решение, при  $L < L_{max}$  — 2 решения. Значения  $y(0)$  принимают отрицательные значения, поскольку в данном случае только при них возможно существование решения.

Для примера на Рис. 2.12(а) показана фазовая плоскость для значений (2.13) и  $P_{in} = -0.100$ ,  $A = -0.89$ . При различных начальных значениях  $y(0) \approx -0.2$ ,  $y(0) \approx -2$  существуют две различные траектории, соответствующие одному значению  $L = 0.83$ . Оба решения в виде зависимости

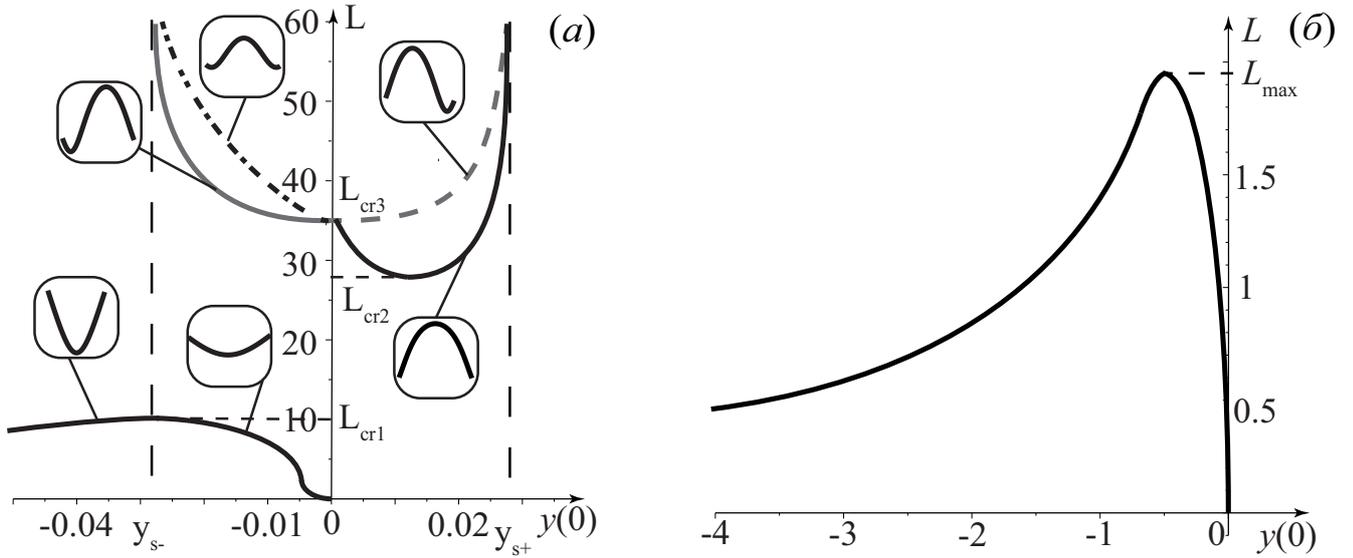


Рисунок 2.11: (а) График  $L(y(0))$  при  $x_0 > 1$ ,  $P_{in} = -0.005$ , в выносках показан качественный характер графика  $R(z)$ , соответствующий каждому решению.

(б) График  $L(y(0))$  при (2.13),  $P_{in} = -0.100$ ,  $A > A_{cr}$ .

радиуса трубки  $R$  от координаты  $z$  для трубок одинаковой длины  $L$  показаны на Рис. 2.12(б). График зависимости  $L$  от  $y(0)$  имеет максимум в точке  $y(0) \approx -0.52$  и значение  $L_{cr} \approx 1.955$  (Рис. 2.11(б)).

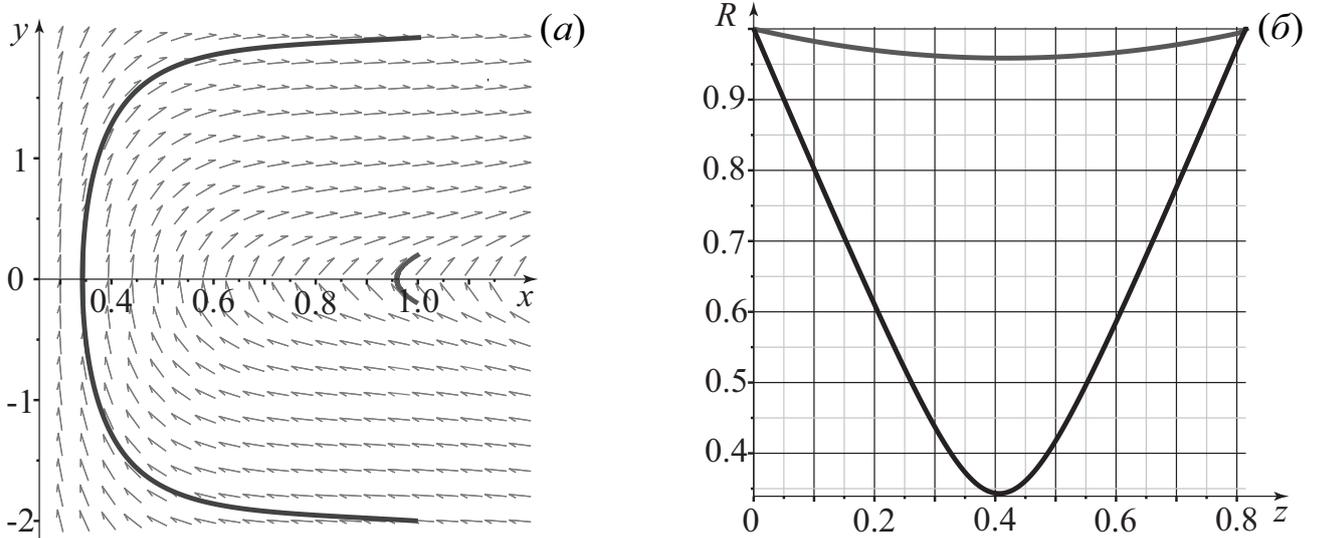


Рисунок 2.12: (2.13),  $P_{in} = -0.100$ ,  $A > A_{cr}$ ,  $L = 0.83$ , (а) фазовый портрет, (б) график  $R(z)$ .

3. В данном случае, когда значение седловой стационарной точки  $x_0 > 1$ , а центра —  $x_0 < 1$ , всегда имеется неединственность решения. При достаточно малых значениях  $L$  существуют две траектории, соответствующие разным начальным  $y(0)$ . Аналогично случаю  $A_0 < A \leq A_{cr}$ , одно ре-

шение соответствует  $0 < y(0) < y_{s+}$ , а второе решение соответствует  $y(0) < y_{s-} < 0$ , причём в этом случае траектория обойдет точку — центр. Например, для  $P_{in} = 0.003$ , при котором значение  $A = -1.15$ , и заданных начальных значениях  $y(0) \approx -0.025$ ,  $y(0) \approx 0.016$  получаются две траектории, соответствующие одному значению  $L = 7.5$  (Рис. 2.13(а,б)).

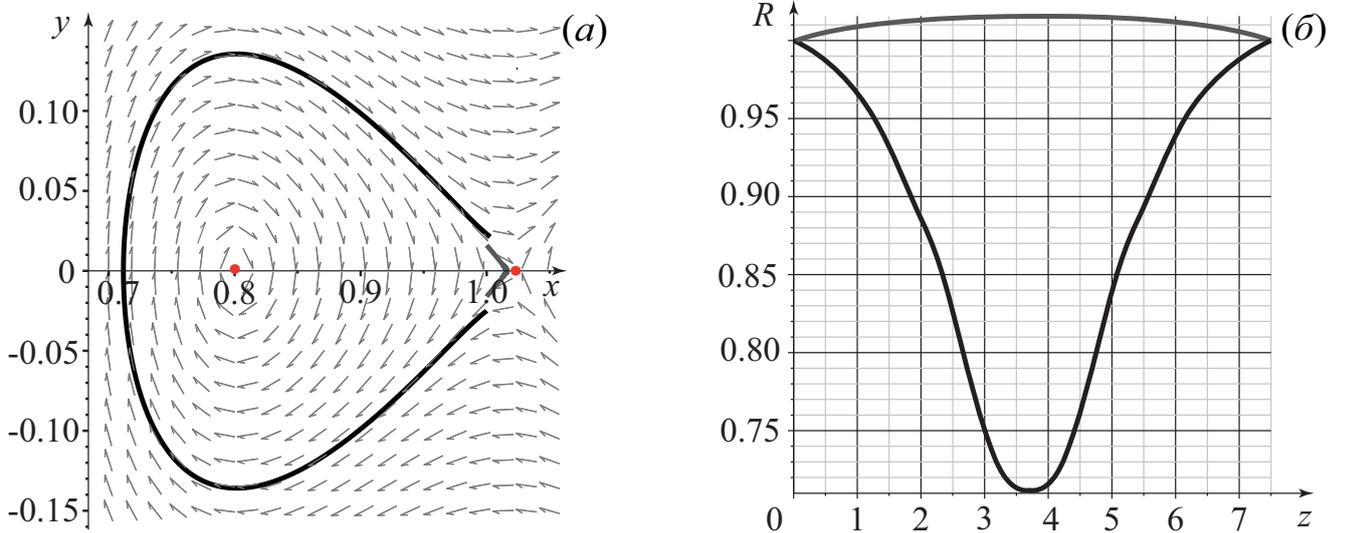


Рисунок 2.13: (2.13),  $P_{in} = 0.003$ ,  $y(0) \approx -0.025$ ,  $y(0) \approx 0.016$ , (а) фазовый портрет, (б) график  $R(z)$ .

При  $L > L_{cr1} > 0$  появляются ещё два решения, соответствующие одному дополнительному обходу точки — центра, причем при симметричном отражении относительно середины трубки одно превращается во второе. При  $L > L_{cr2} > L_{cr1}$  появляются ещё четыре дополнительных решений. При достаточно больших  $L$  существует любое наперед заданное количество решений. Каждый обход точки — центра соответствует локальному сужению трубки и последующему расширению до исходного радиуса.

Например, значению  $L = 20$  соответствует восемь решений: одно без обхода центра, три с одним обходом, и четыре с двумя обходами (Рис. 2.14(а)). График зависимости  $L$  от начального значения  $y(0)$  имеет две асимптоты,  $y_{s+}$  и  $y_{s-}$ , соответствующие двум сепаратрисам седловой точки (Рис. 2.14(б)). При  $y(0) > y_{s+}$  решения краевой задачи не существует. При  $y(0) < y_{s+}$  и малом значении длины трубки  $L$  имеется два решения. При  $y(0) < y_{s-}$  и большом значении  $L$  решения краевой задачи не существует.

При  $y_{s-} < y(0) < y_{s+}$  и при больших значениях длины трубки  $L$  возможно существование множества решений, соответствующих числу возврата на прямую  $x = 1$  при обходе точки — центра.

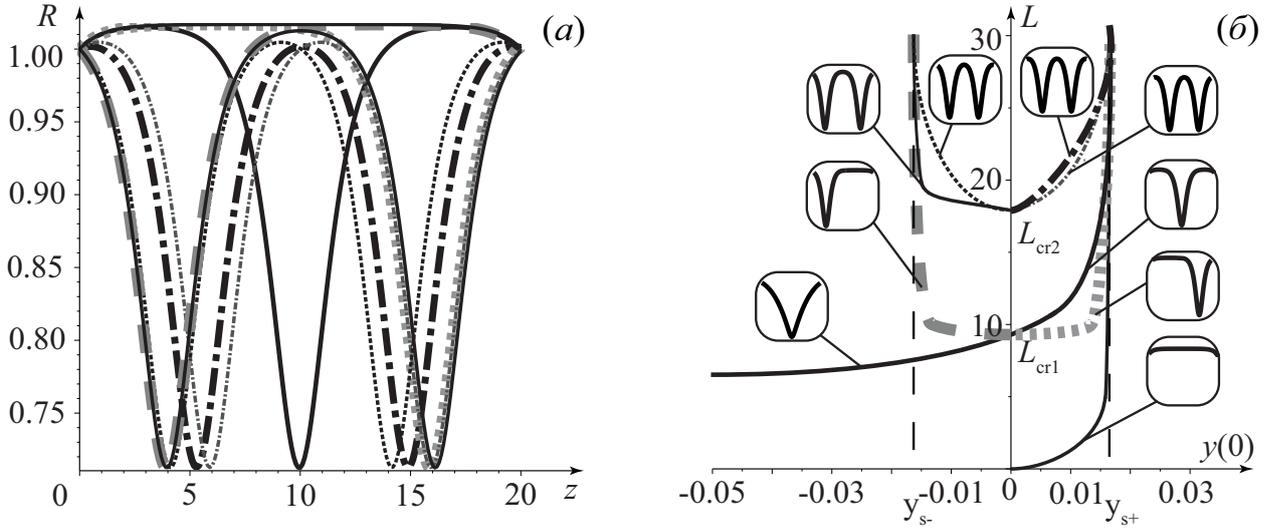


Рисунок 2.14: (а) График  $R(z)$  для (2.13),  $P_{in} = 0.003$ ,  $L = 20$ . (б) График  $L(y(0))$  при (2.13),  $P_{in} = 0.003$ , в выносках показан качественный характер графика  $R(z)$ , соответствующий каждому решению.

### 2.3 Исследования задачи с учётом вязкости

Если значение числа Рейнольдса конечно, тогда в уравнении (2.4) величина  $A \neq const$ , а именно  $A = A(z)$  является растущей функцией координаты. Причем при ограниченных значениях  $R_s(z) < M$ , где  $M = const$ , производная этой функции ограничена снизу некоторой константой  $D$  ( $A'(z) > D > 0$ ). Поэтому движение траектории  $x(z)$ ,  $y(z)$  можно представить как движение вдоль векторного поля (2.5), с одновременной эволюцией этого поля из-за роста  $A$ . Поскольку  $A = A(z)$  растущая, то через некоторое конечное  $z$  задача сведется к случаю  $A > A_{cr}$ . Физически это соответствует падению давления в трубке ниже  $P_{cr}$  из-за вязких потерь. После этого траектория за конечное время покинет область  $x \leq 1$  и больше не вернется на прямую  $x = 1$ . Таким образом, решение краевой задачи существует лишь при  $L \leq L_{max}(Re)$ , а при превышении длины  $L_{max}$  стационарного состояния не существует.

В зависимости от  $Re$  и, соответственно, скорости увеличения  $A$ , может иметь место неединственность решения, аналогичная невязкому случаю. Например, для значений (2.13),  $P_{in} = 0$  и  $Re = 1000$  получаются две траектории, соответствующие одному значению  $L = 10$  (Рис. 2.15(а)). При этом в решении с обходом центра «провал» радиуса расположен ближе к концу трубки.

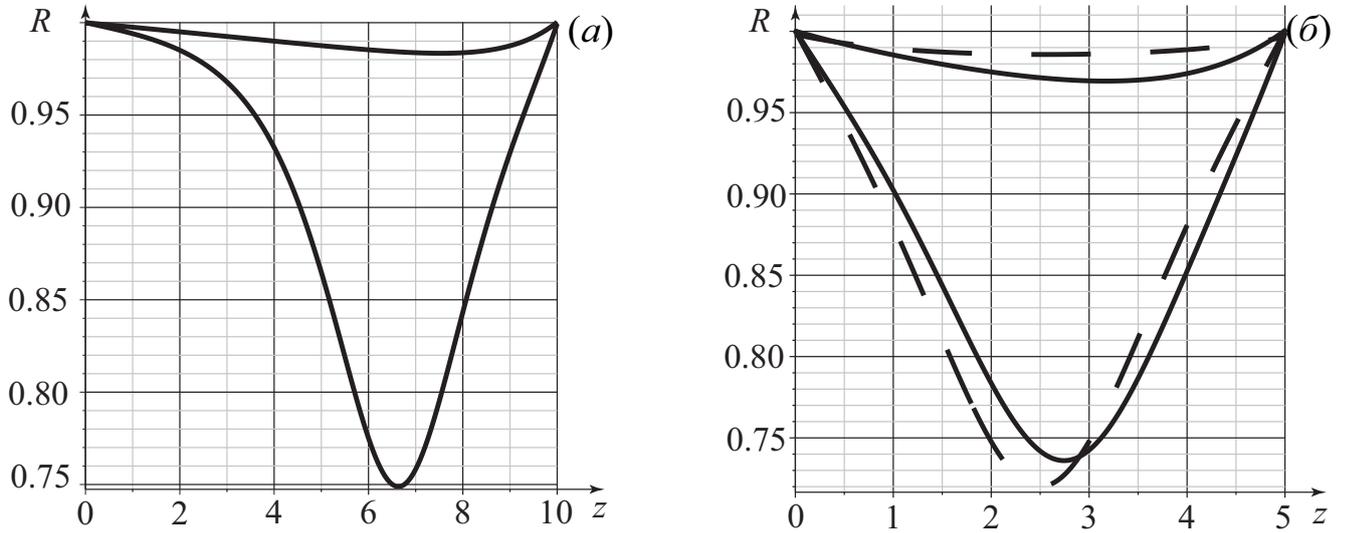


Рисунок 2.15: (а) График  $R(z)$  для (2.13),  $P_{in} = 0$ ,  $Re = 1000$ . (б) График  $R(z)$  для (2.13),  $P_{in} = -0.003$ ,  $L = 5$ .

Для сравнения с полученными ранее результатами в невязком случае, например с Рис. 2.8(б) (Рис. 2.15(а), пунктирные линии), была построена зависимость  $R(z)$  для (2.13),  $P_{in} = -0.003$  и  $Re = 250$  для  $y(0) \approx -0.092$  и  $y(0) \approx -0.018$  (Рис. 2.15(б), сплошные линии). Из построения видно, что в обоих решениях «провал» радиуса сдвигается под действием вязкости к концу трубки. Кроме того, в решении с обходом центра «провал» радиуса становится меньше, а в решении без обхода центра «провал» радиуса увеличивается.

При больших конечных значениях числа Рейнольдса  $Re$  и положительном входном трансмуральном давлении  $P_{in} > 0$  (а также при  $P_{cr} < P_{in} < 0$ ,  $\varkappa > 1/4$ ) возможен случай возникновения неединственности, аналогичный случаю  $A < A_0$  с несколькими обходами центра. Примером служит график и зависимости  $R(z)$ , для значений (2.13),  $P_{in} = 0.03$  и  $Re = 1500$ . Два сужения имеют место при  $y(0) = 0.0745$ ,  $y(0) \approx -0.0316$  и  $y(0) = 0.0292$ , одно сужение — при  $y(0) \approx -0.0317$  и  $y(0) \approx 0.0293$ , раздутая трубка — при  $y(0) \approx -0.0746$  (Рис. 2.16(а)).

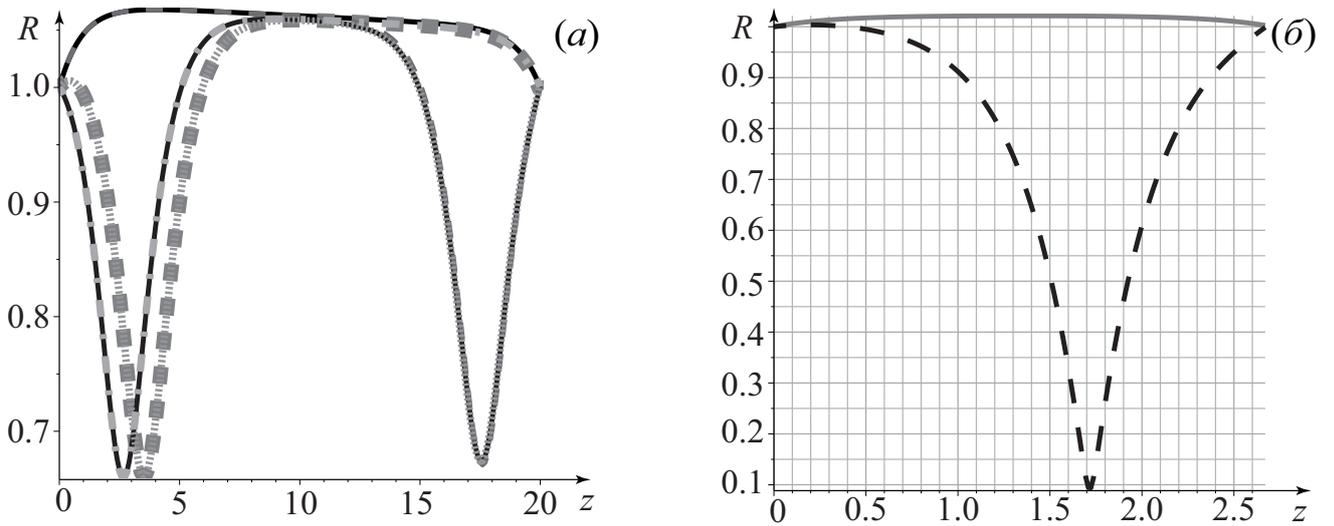


Рисунок 2.16: (а) График  $R(z)$  для (2.13),  $P_{in} = 0.03$ ,  $Re = 1500$ . (б) График  $R(z)$  для восходящей аорты.

## 2.4 Кровеносные сосуды

Сердечно-сосудистая система человека состоит из сердца и сосудов — артерий, капилляров и вен. Кровь по сосудам движется под действием перепада давления, от области высокого к области низкого давления. Поскольку сосудистая стенка эластична, изменения трансмурального давления сопровождаются изменениями диаметра и степени растяжения.

Механические свойства и геометрические параметры кровеносных сосудов, ранее изученные в ряде работ, представлены в Таблице 1. Безразмерные параметры (обозначенные волной) выражаются через размерные по формулам (1.2.7) и  $\tilde{L} = L/R_0$ . Значения радиальной жесткости могут быть найдены по формуле  $\beta = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R_0^2}$ , поскольку известно, что диапазон значений модуля Юнга  $E$  для кровеносных сосудов 0.1-1.0 МПа [117] и среднее значение обычно около 0.4 МПа (40 Н/см<sup>2</sup>) [118], а значение коэффициента Пуассона  $\nu \approx 0.4$ . В свою очередь, продольное натяжение может быть найдено по формуле  $N = Ehl$ , где  $l$  — продольное относительное удлинение сосуда. Напряжение ( $E * l$ ) принято в расчетах равным 5 Н/см<sup>2</sup> [119], что соответствует напряжениям, которые испытывает стенка сосуда в организме человека.

Расчёты показывают, что для параметров, соответствующих аорте, решение существует, и во всех случаях неединственно. В расчетах предполагается показатель степенной среды  $n = 1$ , поскольку течение крови в крупных сосудах

Таблица 1: Параметры кровеносных сосудов

	$R_0$ (см) [120]	$h$ (см) [121]	$V_0$ (см/с) [120]	$Re$ [120]	$P_{in}$ (Н/см <sup>2</sup> ) [122]
Восходящая аорта	1.00 — 1.60	0.20	22.00 — 63.00	1600 — 5800	1.33
Большие артерии	1.00 — 3.00	0.10	22.00 — 50.00	110 — 850	1.10
Большие вены	0.25 — 0.50	0.05	15.00 — 20.00	210 — 570	0.13
Полая вена	0.10	0.15	11.00 — 16.00	630 — 900	0.10

отвечает ньютоновским свойства. Для значений параметров восходящей аорты (Таб. 1  $R_0 = 1.50$  см [123],  $V_0 = 30$  см/с,  $Re = 1900$ ) получаются две траектории, соответствующие реальной длине сосуда  $L = 4.00$  см [123] (Рис. 2.16(б)).

Другим примером являются артерии, имеющие довольно правильную цилиндрическую форму. Их стенки достаточно толстые, чтобы выдерживать высокое давление, которое создается при мощных выбросах крови, и они не опадают, если не наполнены кровью. Для значений параметров артерий (Таб. 1, например, левая почечная артерия  $R_0 = 0.25$  см [123],  $V_0 = 35$  см/с,  $Re = 370$ ,  $L = 3.00$  см [123] или правая общая подвздошная артерия  $R_0 = 0.44$  см [123],  $V_0 = 35$  см/с,  $Re = 650$ ,  $L = 5.80$  см [123]) получаются две траектории, одна из которых соответствует небольшому расширению, а вторая очень большому провалу радиуса в конце трубки (Рис. 2.17(а,б)).

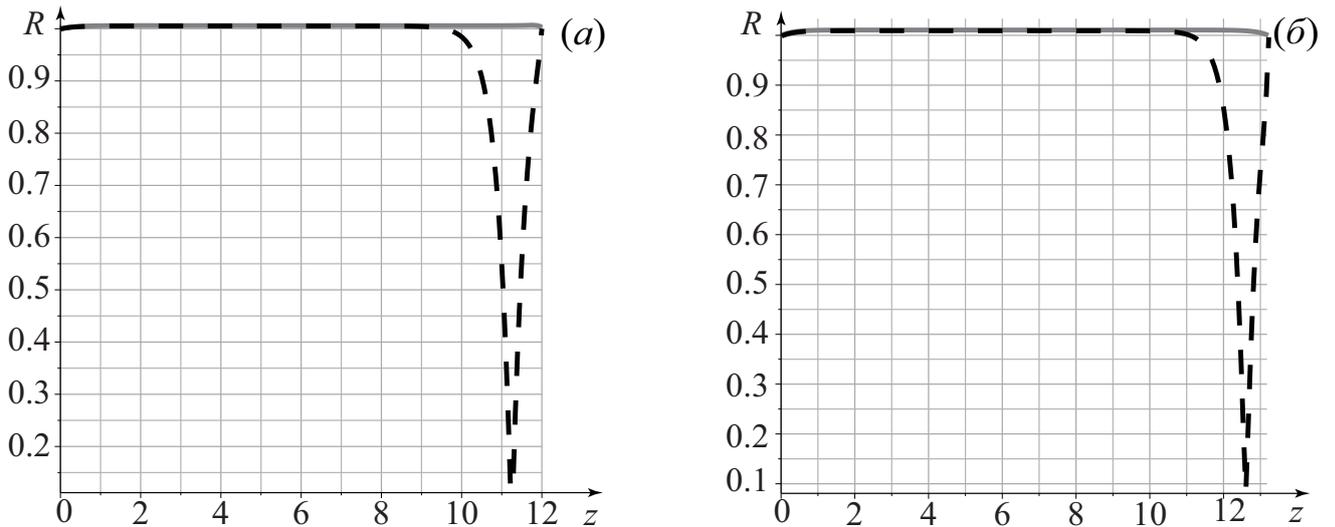


Рисунок 2.17: (а) График  $R(z)$  для левой почечной артерии. (б) График  $R(z)$  для правой общей подвздошной артерии.

В свою очередь, давление в венах низкое в сравнении с давлением в артериях, поэтому стенки вен тоньше. При рассмотрении зависимости радиуса от длины трубки с параметрами, соответствующими венам (Таб. 1, например, левая внутренняя подвздошная вена  $R_0 = 0.25$  см [123],  $V_0 = 20$  см/с,  $Re = 210$ ,  $L = 3.00$  см [123] или верхняя полая вена  $R_0 = 1.10$  см [123],  $V_0 = 15$  см/с,  $Re = 700$ ,  $L = 8.00$  см [123]), также получается две траектории, аналогичные траекториям, полученным для артерий (Рис. 2.18(а,б)).

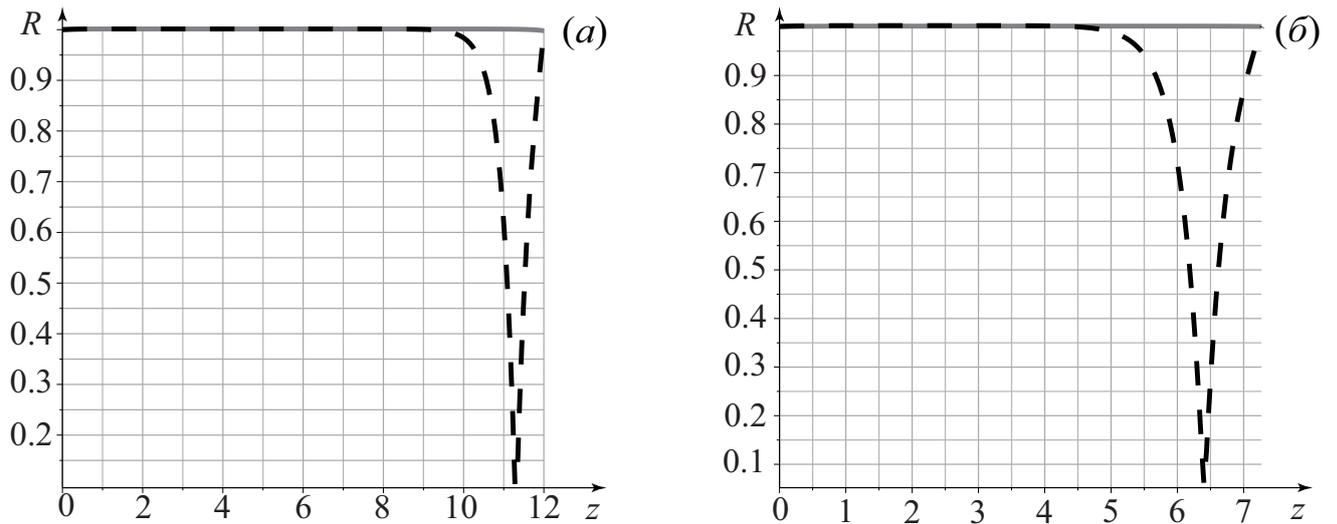


Рисунок 2.18: (а) График  $R(z)$  для левой внутренней подвздошной вены. (б) График  $R(z)$  для верхней полой вены.

## 2.5 Выводы

В данной главе выведено одномерное уравнение стационарного состояния упругой трубки с протекающей внутри степенной жидкостью, учитывающее её реологию и образующийся ламинарный профиль скорости.

Для движения идеальной жидкости (число Рейнольдса  $Re \rightarrow \infty$ ) с заданным профилем скорости получены условия существования стационарного состояния для сколь угодно большой длины трубки: значение входного трансмурального давления либо положительно, либо отрицательно и больше некоторого критического значения ( $P_{in} > 0$  или  $P_{cr} < P_{in} < 0$ ). При учёте вязкости (конечные числа Рейнольдса) трубка всегда может иметь лишь конечную длину. Таким образом, решения краевой задачи о стационарном состоянии трубки

достаточно большой длины не существует, что должно приводить к колебательному режиму течения как единственно возможному. Данные колебания могут быть связаны с ранее изучавшимися в литературе колебательными режимами, вызванными падением давления в жидкости, потерей устойчивости трубки и её периодическими схлопываниями.

При достаточно больших числах Рейнольдса и  $L < L_{max}$  имеет место неединственность стационарного состояния трубки, удовлетворяющего граничным условиям задачи: при  $P_{in} < P_{cr} < 0$  или  $P_{cr} < P_{in} < 0$  и  $\kappa < 1/4$  — два решения, при  $P_{in} > 0$  или  $P_{cr} < P_{in} < 0$  и  $\kappa > 1/4$  — семейство решений. Одно из решений соответствует незначительно суженной (или расширенной) трубке с плавным изменением её радиуса по длине. Второе решение (или семейство решений) соответствует резким локальным сужениям трубки с последующим расширением до исходного радиуса. Существование таких режимов, в реальности, по-видимому, невозможно в связи с вероятной потерей осесимметричности трубки и отрыва потока в локальном сужении; эти явления не описываются рассматриваемой здесь моделью. Вероятно, что перестроение на такой режим в действительности приводит к возникновению колебательного характера течения.

## Глава 3. Исследование устойчивости упругой трубки с протекающей внутри неньютоновской жидкостью

В настоящей главе исследуется устойчивость стационарного состояния трубки. Примеры, рассмотренные в главе 2, показывают, что на длительном расстоянии радиус трубки меняется медленно (например, рис. 2.18), аналогичное поведение наблюдается и в экспериментах. Поэтому основным предположением данной главы является настолько медленное изменение невозмущенного радиуса трубки, что им можно пренебречь.

Сначала будет исследована локальная устойчивость упругой трубки и найден критерий абсолютной неустойчивости. Затем будет проведен анализ глобальной неустойчивости достаточно длинных трубок конечной длины. После этого — численный анализ влияния продольного натяжения и длины трубки на область неустойчивости конечных трубок произвольной длины.

### 3.1 Характеристики локальной устойчивости

#### 3.1.1 Уравнения для возмущений

Возмущения стационарного состояния имеют вид:

$$Q = 1 + Q'(z, t); \quad R = R_s(z) + R'(z, t). \quad (3.1)$$

Подставим эти выражения в систему (1.21), (1.22) и линеаризуем её. После ряда алгебраических преобразований линеаризованная система уравнений для возмущений принимает вид:

$$\frac{\partial Q'(z, t)}{\partial z} + 2\pi R_s \frac{\partial R'(z, t)}{\partial t} = 0; \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Q'(z,t)}{\partial t} + \frac{2(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s^2(z)} \frac{\partial Q'(z,t)}{\partial z} + \\
& \quad + \left[ \frac{16n}{\pi Re R_s^{3n-1}(z)} - \frac{4(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s^3(z)} \frac{\partial R_s(z)}{\partial z} \right] Q'(z,t) + \\
& + \left[ \left( 2\pi\beta R_s(z) + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi R_s^4} \right) \frac{\partial R_s(z)}{\partial z} + \frac{16(1-3n)}{\pi Re R_s^{3n}(z)} - 2N\pi R_s(z) \frac{\partial^3 R_s(z)}{\partial z^3} \right] R'(z,t) + \\
& \quad + \left[ \pi\beta R_s^2(z) - \frac{2(3n+1)}{\pi(2n+1)R_s^3(z)} \right] \frac{\partial R'(z,t)}{\partial z} + \\
& \quad + m\pi R_s^2(z) \frac{\partial^3 R'(z,t)}{\partial z \partial t^2} - 2N\pi R_s^2(z) \frac{\partial^3 R_s(z)}{\partial z^3} = 0. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

### 3.1.2 Дисперсионное уравнение

Сначала изучим локальную устойчивость трубки. Для длины волны  $\lambda$  предположим, что  $\lambda \ll L$ , т. е. будем рассматривать волны, длина которых значительно меньше расстояния, на котором радиус трубки существенно изменяется, что позволяет положить  $R_s = const$ . Тогда уравнение (3.3) становится уравнением с постоянными коэффициентами и допускает решения в виде бегущих волн. С другой стороны, уравнение (3.3) выведено при условии  $\lambda \gg R$ , так что оба неравенства

$$R \ll \lambda \ll L \quad (3.4)$$

считаются выполненными.

Принимая локальное значение  $R_s$ , как линейный масштаб  $R_0$ , и переобезразмерив остальные переменные, без ограничения общности, считается  $R_s \equiv 1$  и рассматриваем решения в виде бегущих волн  $Q' = \hat{Q}e^{i(kz-\omega t)}$ ,  $R' = \hat{R}e^{i(kz-\omega t)}$ . Уравнение (3.2) примет вид

$$\hat{Q}k e^{i(kz-\omega t)} + 2\pi(-\omega)\hat{R}e^{i(kz-\omega t)} = 0 \quad \Rightarrow \hat{R} = \frac{\hat{Q}k}{2\pi\omega}.$$

А уравнение (3.3) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
& -\hat{Q}\omega i e^{i(kz-\omega t)} + \frac{2(3n+1)}{(2n+1)\pi} k i \hat{Q} e^{i(kz-\omega t)} + \frac{16n}{\pi Re} \hat{Q} e^{i(kz-\omega t)} + \frac{16(1-3n)}{\pi Re} \hat{R} e^{i(kz-\omega t)} + \\
& + \left( \pi\beta - \frac{2(3n+1)}{\pi(2n+1)} \right) \hat{R} k i e^{i(kz-\omega t)} + i\pi N k^3 \hat{R} e^{i(kz-\omega t)} - im\pi k \omega^2 \hat{R} e^{i(kz-\omega t)} = 0.
\end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для  $\hat{R}$  и сокращая его на  $\hat{Q} e^{i(kz-\omega t)}$ , получено дисперсионное соотношение

$$\left(1 + \frac{mk^2}{2}\right) \omega^2 + \left( \frac{16n}{\pi Re} i - \frac{2(3n+1)k}{\pi(2n+1)} \right) \omega + \frac{8(1-3n)k}{\pi^2 Re} i - \frac{k^2\beta}{2} + \frac{k^2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} - \frac{Nk^4}{2} = 0. \quad (3.5)$$

Так как это квадратное уравнение относительно  $\omega$ , его дискриминант задается формулой:

$$\begin{aligned}
D = & -\frac{(16n)^2}{\pi^2 Re^2} + 2k^2\beta - \frac{32(n+1)k}{\pi^2 Re(2n+1)} i + \frac{4(3n+1)nk^2}{(2n+1)^2\pi^2} + \\
& + 2Nk^4 \left(1 + \frac{mk^2}{2}\right) - 2mk^2 \left( \frac{8(1-3n)k}{\pi^2 Re} i - \frac{k^2\beta}{2} + \frac{k^2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} \right), \quad (3.6)
\end{aligned}$$

и корни находятся в виде:

$$\omega_{1,2}(k) = \frac{2}{2 + mk^2} \left[ \frac{(3n+1)k}{(2n+1)\pi} - \frac{8n}{\pi Re} i \pm \frac{1}{2} \sqrt{D} \right]. \quad (3.7)$$

Из (3.7) видно, что одна ветвь  $\omega$  всегда имеет отрицательную мнимую часть. Таким образом, одна из волн для каждого  $k$  всегда затухает, и только одна может расти и приводить к неустойчивости.

Влияние трех параметров трубки,  $\beta$ ,  $N$  и  $m$ , различно для разных длин волн. Для длинных волн натяжение и инерционные члены незначительны, а важную роль играет только радиальная жесткость  $\beta$ . Наоборот, для коротких волн преобладают натяжение и инерционные члены. Поэтому далее отдельно исследуются устойчивость длинных и коротких волн и получен критерии устойчивости в явном виде. Затем исследуются промежуточные длины волн и переход от области коротковолновой неустойчивости к области длинноволновой неустойчивости.

### 3.1.3 Критерий неустойчивости для длинных волн

Рассмотрим случай длинных волн,  $k \rightarrow 0$ , который также соответствует рассмотрению произвольных длин волн в легкой ненатянутой трубке. Действительно, анализируя порядки каждого члена в дисперсионном соотношении (3.5), можно видеть, что данная ситуация эквивалентна случаю,  $m = N = 0$ , т. е. пренебрегается натяжением и инерцией трубки.

Волна является растущей, если  $\text{Im } \omega(k) > 0$ . Выражение для  $\text{Im } \omega(k)$  находится из выражения (3.7), где корень вычисляется явно с использованием формулы  $\sqrt{a + ib} = \alpha + i\gamma$ , где

$$\gamma = \pm \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega = & -\frac{8n}{\pi Re} \pm \frac{16k(n+1)}{\sqrt{2}\pi^2 Re(2n+1)} \times \\ & \left[ 2k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right) - \frac{(16n)^2}{\pi^2 Re^2} + \left( \frac{32^2 k^2 (n+1)^2}{\pi^4 Re^2 (2n+1)^2} + 4k^4 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right) \frac{(16n)^2}{\pi^2 Re^2} + \frac{(16n)^4}{\pi^4 Re^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Исключая квадратные корни возведением в квадрат, неравенство  $\text{Im } \omega > 0$  сводится к

$$\frac{8(n+1)^2}{\pi^2(2n+1)^2 n^2} \left( \frac{-(6n^3 - n^2 - 1)}{2n^2\pi^2(2n+1)} - \beta \right) k^4 > 0.$$

Отсюда видно, во-первых, что изменение знака  $\text{Im } \omega(k)$  невозможно при ненулевом  $k$ , так что все длинные волны либо затухают, либо растут. Во-вторых, критерий неустойчивости  $\text{Im } \omega > 0$  сводится к следующему неравенству:

$$\beta < \beta_{fl}(n) = \frac{-(6n^3 - n^2 - 1)}{2n^2\pi^2(2n+1)}. \quad (3.9)$$

Поскольку  $\beta > 0$ , неустойчивость может возникнуть только в том случае, если правая часть положительна. Это имеет место при

$$n < 0.611.$$

Область неустойчивости  $\beta < \beta_{fl}(n)$  показана на Рис. 3.1(a).

Заметим, что критерий неустойчивости не зависит от числа Рейнольдса  $Re$ , которое определяет скорости роста волн, но не их знак. Также видно, что осесимметричная неустойчивость возможна только для псевдопластических жидкостей; в частности, режимы неустойчивости течений ньютоновских жидкости в упругих трубах могут быть только неосесимметричными, что подтверждается всеми известными экспериментальными данными.

### 3.1.4 Влияние вязких потерь на критерий устойчивости

Рассмотрим влияние неньютоновского трения на найденный критерий неустойчивости (3.9). Для этого будем учитывать неньютоновские свойства среды только в слагаемом конвективной части производной. Другими словами положим в правой части уравнения (1.14)  $n = 1$ , как в работе [73].

Тогда уравнение (1.22) примет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right) + \frac{16Q}{\pi Re R^2} + \pi R^2 \beta \frac{\partial R}{\partial z} + \pi R^2 m \frac{\partial^3 R}{\partial z \partial t^2} - \pi R^2 N \frac{\partial^3 R}{\partial z^3} = 0.$$

В свою очередь дисперсионное соотношение преобразуется к уравнению:

$$\left(1 + \frac{mk^2}{2}\right)\omega^2 + \left(\frac{16}{\pi Re}i - \frac{2(3n+1)k}{\pi(2n+1)}\right)\omega + \frac{-16k}{\pi^2 Re}i - \frac{k^2\beta}{2} + \frac{k^2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} - \frac{Nk^4}{2} = 0,$$

а, его дискриминант задается формулой:

$$D = -\frac{16^2}{\pi^2 Re^2} + 2k^2\beta - \frac{64nk}{\pi^2 Re(2n+1)}i + \frac{4(3n+1)nk^2}{(2n+1)^2\pi^2} + \\ + 2Nk^4\left(1 + \frac{mk^2}{2}\right) - 2mk^2\left(\frac{-16k}{\pi^2 Re}i - \frac{k^2\beta}{2} + \frac{k^2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)}\right),$$

и корни находятся в виде:

$$\omega_{1,2}(k) = \frac{2}{2 + mk^2} \left[ \frac{(3n+1)k}{(2n+1)\pi} - \frac{8}{\pi Re}i \pm \frac{1}{2}\sqrt{D} \right].$$

Произведя вычисления аналогичные разделу 3.1.3, получим выражение выражение для  $\text{Im } \omega$  в виде:

$$\text{Im } \omega = -\frac{8}{\pi Re} \pm \frac{32nk}{\sqrt{2}\pi^2 Re(2n+1)} \times \left[ 2k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right) - \frac{16^2}{\pi^2 Re^2} + \left( \frac{32^2 k^2 (2n)^2}{\pi^4 Re^2 (2n+1)^2} + 4k^4 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right)^2 - 4k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right) \frac{16^2}{\pi^2 Re^2} + \frac{16^4}{\pi^4 Re^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Неравенство  $\text{Im } \omega > 0$  сводится к:

$$\frac{32n^2}{\pi^2(2n+1)^2n^2} \left( \frac{-2n}{\pi^2(2n+1)} - \beta \right) k^4 > 0.$$

Поскольку  $\beta$  и  $n$  являются положительными, то данное неравенство не может быть выполнено. Таким образом, без учета неньютоновских свойств среды в слагаемом, отвечающем за вязкие потери давления, даже при учёте неньютоновского профиля скорости, найденная ранее область неустойчивости отсутствуют.

### 3.1.5 Критерий неустойчивости для коротких волн

Рассмотрим случай коротких волн,  $k \rightarrow \infty$ . Хотя, строго говоря, изучая предел произвольных коротких волн, мы всегда ограничиваемся условием (3.4). Подставив значение  $k \rightarrow \infty$  в дискриминант (3.6), видно, что трубка устойчива при  $m = 0, N \neq 0$  и неустойчива при  $m \neq 0, N = 0$ .

Если  $m \neq 0, N \neq 0$ , тогда вычислим асимптотическое значение дискриминанта (3.6) при  $k \rightarrow \infty$ , разложив его квадратный корень относительно  $1/k^3$ :

$$D \approx Nmk^6 \left( 1 - \frac{16(1-3n)}{N\pi^2 Re k^3} i \right) \Rightarrow \sqrt{D} \approx \sqrt{Nmk^3} \left( 1 - \frac{8(1-3n)}{N\pi^2 Re k^3} i \right)$$

Тогда критерий коротковолновой неустойчивости принимает вид:

$$\text{Im } \omega = \frac{2}{2 + mk^2} \left[ \frac{8n}{\pi Re} \pm \sqrt{\frac{m}{N}} \frac{4(1-3n)}{\pi^2 Re} \right] > 0.$$

Возможны два случая:

1.  $n < 1/3$ . Критерий неустойчивости для коротких волн имеет вид:

$$n < \frac{1}{3 + 2\pi\sqrt{\frac{N}{m}}}.$$

2.  $n > 1/3$ . Тогда неустойчивость возникает при

$$n > \frac{1}{3 - 2\pi\sqrt{\frac{N}{m}}}, \quad \sqrt{\frac{N}{m}} < \frac{3}{2\pi}.$$

Область неустойчивости показана на Рис. 3.1(б).

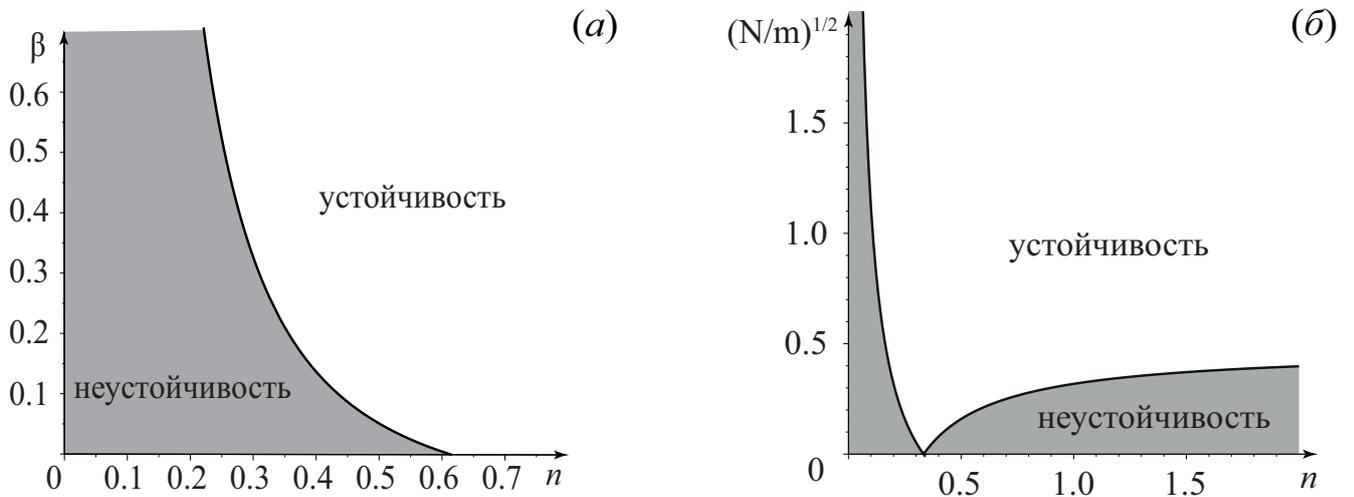


Рисунок 3.1: (а) Область неустойчивости при  $m = 0, N = 0$ . (б) Область неустойчивости коротких волн при  $m \neq 0, N \neq 0$ .

Чтобы лучше понять физическую природу критерия неустойчивости, рассмотрим уравнение трубки без потока внутри, т. е. уравнение (1.20) при  $R = 1, P = 0$ . Видно, что оно становится волновым уравнением, решением которого являются волны с фазой скорость  $c_0 = \sqrt{N/m}$

Таким образом, критерий коротковолновой неустойчивости является условие на скорость волны трубки  $c_0$ . Короткие волны неустойчивы, только если скорость волны в пустой трубе  $c_0$  достаточно мала. Достаточное натяжение или достаточно малая масса трубки увеличивают  $c_0$  и стабилизируют короткие волны.

### 3.1.6 Переход от длинноволновой к коротковолновой неустойчивости

Видно, что неустойчивости длинных и коротких волн обусловлены различными параметрами трубки: в то время как длинноволновая неустойчивость зависит только от радиальной жесткости трубки  $\beta$ , коротковолновая неустойчивость зависит только от продольного натяжения  $N$  и поверхностной плотности  $m$ . Оба критерия не зависят от числа Рейнольдса  $Re$ . Рассмотрим, как происходит переход от длинноволновой к коротковолновой неустойчивости. А именно, обозначим волновое число  $k_{tr}$ , соответствующее нейтральной волне, т. е.  $\text{Im } \omega(k_{tr}) = 0$ . Это волновое число является пороговым значением между растущими и затухающими волнами. После алгебраических преобразований из (3.7) получим:

$$k_{tr} = 2\pi n \sqrt{\left( \frac{-(6n^3 - n^2 - 1)}{2n^2\pi^2(2n + 1)} - \beta \right) \times (4\pi^2 n^2 N - (1 - 3n)^2 m)^{-1}}.$$

Заметим, что в квадратном корне первый множитель представляет критерий неустойчивости для длинных волн (3.9), а второй представляет собой критерий неустойчивости для коротких волн. Из этого следует, что если и длинные, и короткие волны либо затухают, либо растут, то  $k_{tr}$  является чисто мнимым, что означает, что все волны либо затухают, либо растут. Другими словами, не существует изолированной области неустойчивости или устойчивости для волн со средним значением волнового числа. Во-вторых, если длинные волны затухают, а короткие волны растут или наоборот, тогда существует только одно пороговое волновое число, разграничивающее затухающие и растущие волны. Наконец, пороговое волновое число не зависит от числа Рейнольдса  $Re$ , т. е. последнее не имеет никакого влияния не только на критерии неустойчивости длинных и коротких волн, но также и на волновые числа растущих или затухающих волн. Таким образом, число Рейнольдса  $Re$  не имеет отношения к свойствам устойчивости и влияет только на скорости роста возмущений, но не на факт роста.

Заметим также, что хотя критерий коротковолновой неустойчивости зависит только от  $N/m$ , волновое число  $k_{tr}$  зависит отдельно от  $N$  и  $m$ .

### 3.2 Абсолютная и конвективная неустойчивость

Даже если трубка с протекающей внутри псевдопластичной жидкостью неустойчива, эта неустойчивость может не наблюдаться в реальности, если неустойчивость конвективна. В этом случае локализованные возмущения растут, но одновременно сносятся потоком вниз по течению и могут покидать заданную область, имея небольшую амплитуду. Однако, если неустойчивость абсолютна, локализованные возмущения растут так, что занятая ими область расширяется как вниз по течению, так и вверх по течению. Критерий абсолютной неустойчивости приводится в [124; 125] и состоит из двух условий:

1. Существует седловая точка  $\omega_s$  функции  $\omega(k)$  в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $\omega$ , т.е.  $d\omega/dk = 0$  при  $\omega = \omega_s$ ,  $\text{Im } \omega_s > 0$ .
2. В этой седловой точке обратная функция  $k(\omega)$  имеет точку ветвления. Сливающиеся в ней ветви  $k_1(\omega_s) = k_2(\omega_s)$ , должны соответствовать волнам, бегущим в противоположные стороны, т.е.  $\text{Im } k_1(\omega) \rightarrow +\infty$ ,  $\text{Im } k_2(\omega) \rightarrow -\infty$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ , или наоборот.

Поскольку абсолютная неустойчивость характеризуется пространственными ветвями, то дисперсионное соотношение (3.5) удобно переписать в виде многочлена от  $k$ :

$$F(\omega, k) = -\frac{Nk^4}{2} + \left( \frac{m\omega^2}{2} + \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} \right) k^2 + \left( \frac{8(1-3n)}{\pi^2 Re} i - \frac{2(3n+1)k}{\pi(2n+1)} \omega \right) k + \omega^2 + \frac{16n}{\pi Re} \omega i = 0. \quad (3.10)$$

#### 3.2.1 Влияние числа Рейнольдса

В разделе 3.1 было показано, что значение числа Рейнольдса не влияет на устойчивость ни длинных, ни коротких волн. Однако, оно может повлиять на области абсолютной/конвективной неустойчивости. Это влияние числа Рейнольдса может быть оценено до анализа. После замены

$$k = \frac{k'}{Re}, \quad \omega = \frac{\omega'}{Re}, \quad N = N' Re^2, \quad m = m' Re^2,$$

число Рейнольдса исключается из дисперсионного соотношения. Это означает, что условие абсолютной неустойчивости в зависимости от  $\beta$  и  $n$  для заданных  $N$ ,  $m$ ,  $Re$  такое же, как и для  $N' = NRe^2$ ,  $m' = mRe^2$  и  $Re = 1$ . Поэтому во всех численных примерах ниже принимается  $Re = 1$ , а пересчет границы абсолютной неустойчивости для желаемого  $Re$  будет заключаться в пересчете натяжения и массы трубки.

### 3.2.2 Нулевые масса трубки и продольное натяжение

Для корректности задачи о поведении локализованных возмущений необходимо, чтобы короткие волны затухали, т.е.  $\text{Im } \omega(k) < 0$  при  $k \rightarrow \pm\infty$  вдоль вещественной оси  $k$ . В разделе 3.1.5 показано, что добиться выполнения этого условия можно учётом слабой инерции трубки. Будем считать, что продольное натяжение и поверхностная плотность трубки малы, поэтому соответствующие члены необходимы только для стабилизации коротких волн, но в анализе точки ветвления ими можно пренебречь.

Для получения критерия абсолютной неустойчивости удобно переписать дисперсионное соотношение (3.10) как многочлен от  $k$ , учитывая, что  $N = m = 0$ :

$$\left( \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} \right) k^2 + \left( \frac{8(1-3n)}{\pi^2 Re} i - \frac{2(3n+1)}{\pi(2n+1)} \omega \right) k + \left( \omega^2 + \frac{16n}{\pi Re} i \omega \right) = 0 \quad (3.11)$$

Это квадратное уравнение для  $k(\omega)$ , и, следовательно, существует две пространственные ветви. Точка ветвления  $\omega_s$  функции  $k(\omega)$  находится приравниванием дискриминанта нулю. Простыми преобразованиями снова получается квадратное уравнение для  $\omega_s$ :

$$D_k = 4 \left( \frac{(3n+1)^2}{\pi^2(2n+1)^2} - \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} + \frac{\beta}{2} \right) \omega^2 - 4 \left( \frac{8(3n+1)(1-3n)}{\pi^3 Re(2n+1)} + \left( \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} \right) \frac{16n}{\pi Re} \right) i \omega - \frac{8^2(1-3n)^2}{\pi^4 Re^2} = 0. \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.12) легко показать, что условие  $\text{Im } \omega_s > 0$  выполняется тогда и только тогда, когда выражение в скобках при втором слагаемом является

положительным, т.е.

$$\frac{(3n+1)(1-3n)}{2n(2n+1)} + \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{\pi^2\beta}{2} > 0.$$

Последнее неравенство может быть записано в виде:

$$\beta < \beta_{abs} = \frac{(3n+1)(1-n)}{\pi^2 n(2n+1)} \quad (3.13)$$

Условие (3.13) показывает, что седловая точка  $\omega(k)$  с  $\text{Im } \omega_s > 0$  существует только для достаточно мягких трубок.

Далее рассмотрим второе условие абсолютной неустойчивости, а именно направление распространения волн. Решения  $k(\omega)$  дисперсионного уравнения (3.11) при  $|\omega| \rightarrow \infty$  имеют вид:

$$k_{1,2} = \left( \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} \right)^{-1} \times \\ \times \left( \frac{3n+1}{\pi(2n+1)} \pm \sqrt{\left( \frac{3n+1}{\pi(2n+1)} \right)^2 - \left( \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} \right)} \right) \omega.$$

Легко видеть, что пространственные волны движутся в противоположных направлениях, если

$$\frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \beta > \beta_{div} = \frac{2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} \quad (3.14)$$

В результате критерий абсолютной неустойчивости записывается следующим образом:

$$\beta_{div}(n) < \beta < \beta_{abs}(n) \quad (3.15)$$

Это условие может быть выполнено только при  $n < 1/3$ , так как три кривые  $\beta_{div}(n)$ ,  $\beta_{abs}(n)$ ,  $\beta_{fl}(n)$  пересекаются в точке  $n = 1/3$ . Область абсолютной неустойчивости показана на рис. 3.2.

Заметим, что области конвективной неустойчивости, окружающие область абсолютной неустойчивости на рис. 3.2, различны. Та область, которая находится ниже области абсолютной неустойчивости, представляет собой параметры, для которых обе волны движутся вниз по течению, так что любое возмущение также перемещается вниз по течению и покидает конечную область за

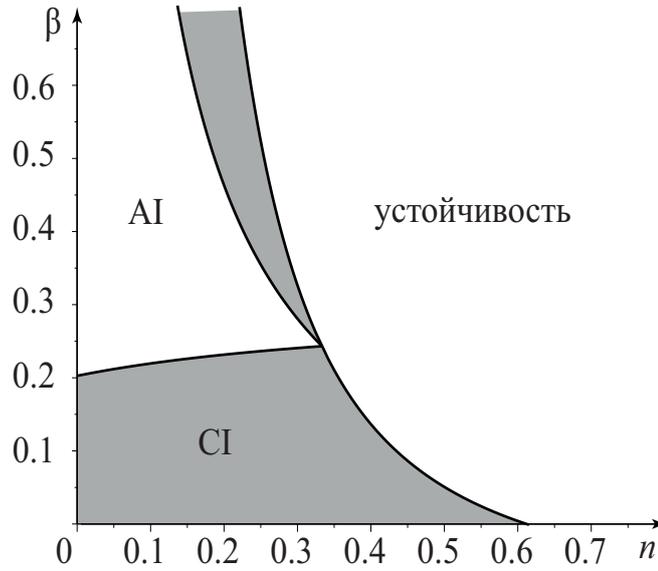


Рисунок 3.2: Область абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости.

конечное время. Седловая точка  $\omega(k)$ , хотя и существует, не имеет отношения к асимптотике локализованных возмущений трубки. Область конвективной неустойчивости, лежащая над областью абсолютной неустойчивости, представляет собой параметры, для которых одна волна бежит вниз по течению, а другая — вверх по течению. Однако седловая точка  $\omega(k)$  лежит в области  $\text{Im } \omega < 0$ . Отметим также, что первая область  $\beta < \beta_{div}$  представляет собой значения очень «слабых» трубок: в стационарном состоянии такие трубки не сужаются из-за падения давления в течении, а расширяются [100]. Такие значения параметров далее не рассматриваются.

Несмотря на то, что при  $N = 0$  нет необходимости рассматривать топологию функции  $\omega(k)$  и путь интегрирования для анализа абсолютной неустойчивости, это будет необходимо при  $N \neq 0$ . Поэтому сначала рассмотрим эти особенности при  $N = 0$ .

Точки ветвления  $\omega(k)$  задаются нулями дискриминанта (3.6). Положив  $N = m = 0$  и подставив  $k = i\kappa$ , получаем квадратное уравнение

$$D_0(\kappa) = \left( \frac{n(3n+1)}{\pi^2(2n+1)^2} + \frac{\beta}{2} \right) \kappa^2 - \frac{8(n+1)}{\pi^2(2n+1)Re} \kappa + \frac{64n^2}{\pi^2 Re^2}.$$

При  $\beta < \beta_{fl}$  это уравнение имеет два положительных действительных корня, другими словами существуют две чисто мнимые точки ветвления  $k_{b1}, k_{b2}$  с  $\text{Im } k_{b1,2} > 0$ .

Седловые точки  $\omega(k)$  (точки ветвления обратной функции  $k(\omega)$ ) задаются условием  $F(\omega, k) = 0$  и  $\frac{\partial F(\omega, k)}{\partial k} = 0$ , где  $F$  — дисперсионное соотношение (3.10).

Эта система преобразуется в следующее квадратное уравнение:

$$F_0(\varkappa) = \left( -\alpha + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{(3n+1)^2} \alpha^2 \right) \varkappa^2 + 8 \frac{(2n+1)(n+1)}{(3n+1)^2 Re} \alpha \varkappa + \frac{16(2n+1)(1-3n)(6n^2+3n+1)}{\pi^2 Re^2 (3n+1)^2},$$

где  $\alpha = \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{\beta}{2}$ . Можно показать, что при  $N = m = 0$  обе седловые точки  $k_{s1}, k_{s2}$  являются чисто мнимыми  $\beta < \beta_{div}$ , в то время как они являются комплексными и симметричными относительно мнимой оси при  $\beta_{div} < \beta < \beta_{fl}$  (т.е.  $\text{Im } k_{s1} = \text{Im } k_{s2}$ ,  $\text{Re } k_{s1} = -\text{Re } k_{s2}$ ). Когда  $\beta \rightarrow \beta_{div}$ , седловые точки стремятся к бесконечности либо по мнимой, либо по действительной оси (для  $\beta \rightarrow \beta_{div} - 0$  и  $\beta \rightarrow \beta_{div} + 0$ , соответственно) как  $|k_{s1,2}| \sim 1/\sqrt{|\beta - \beta_{div}|}$ .

При  $\beta = \beta_{fl}$  все точки ветвления и седловые точки схлопываются в одну точку, а при  $\beta > \beta_{fl}$  седловые точки становятся чисто мнимыми, а точки ветвления симметричны относительно мнимой оси.

Например, на рис. 3.3 показаны линии уровня  $\text{Im } \omega(k) = const$  в комплексной  $k$ -плоскости для двух ветвей  $\omega(k)$ . При  $0 < \beta < \beta_{div}$  обе пространственные волны бегут в одном направлении ( $\text{Im } k_{1,2} \rightarrow +\infty$  как  $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ ), так что контур интегрирования может быть деформирован вниз, как показано на рис.3.3(a). В этом случае седловые точки не определяют асимптотику локализованного возмущения. При  $\beta > \beta_{div}$  пространственные волны бегут в противоположных направлениях, и путь интегрирования, дающий асимптотическое поведение, проходит через обе седловые точки, как показано на рис.3.3(b).

### 3.2.3 Эффект небольшого натяжения трубки

Теперь рассмотрим влияние ненулевого, но малого продольного натяжения  $N$  при  $m = 0$ .

Сначала рассмотрим расположение точек ветвления  $\omega(k)$ , заданных нулями уравнения (3.6). Положим  $m = 0$  и подставим  $k = i\varkappa$ , тогда получим:

$$D(\varkappa) = -\frac{N}{2} \varkappa^4 + D_0(\varkappa) = 0. \quad (3.16)$$

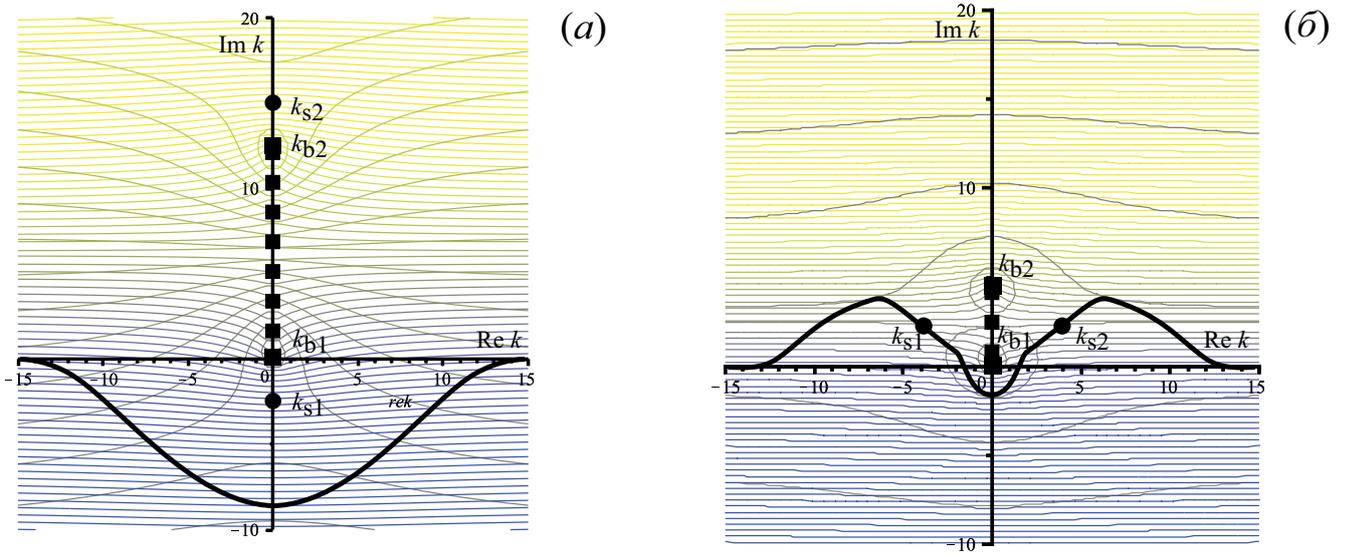


Рисунок 3.3: Линии уровня  $\text{Im } \omega(k) = \text{const}$  на комплексной  $k$ -плоскости и контур интегрирования, дающий асимптотическое поведение локализованного возмущения. Параметры  $N = m = 0, n = 0.1, \beta = 0.1 < \beta_{div}$  (а),  $\beta_{div} < \beta = 0.3 < \beta_{fl}$  (б). Седловые точки  $\omega(k)$  показаны кружками, а точки ветвления — квадратами. Разрез ветви показан пунктирной линией, а путь интегрирования — жирной сплошной линией.

Видно, что при достаточно малых  $N$  все четыре корня уравнения (3.16) действительные, т. е. точки ветвления  $k_b$  чисто мнимые (рис. 3.4). При увеличении продольного натяжения  $N$  точки ветвления  $\varkappa_2$  и  $\varkappa_4$  стремятся друг к другу и сливаются при определенном  $N$ , после чего они становятся комплексно-сопряженными. В плоскости  $k$  они становятся симметричными относительно мнимой оси. Две другие точки ветвления  $k_1$  и  $k_3$  остаются чисто мнимыми: первая с положительной, а вторая с отрицательной мнимой частью при любом  $N$ .

Рассмотрим расположение седловых точек. Система уравнений  $F(\omega, k) = 0$  и  $\frac{\partial F(\omega, k)}{\partial k} = 0$  преобразуется в систему:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}N\varkappa^4 - \alpha\varkappa^2 + \frac{16n}{\pi Re}\sigma + \sigma^2 &= 0, \\ 2N\varkappa^3 + 2\alpha\varkappa + \frac{8(1-3n)}{\pi^2 Re} - \frac{2(3n+1)}{\pi(2n+1)}\sigma &= 0, \end{aligned}$$

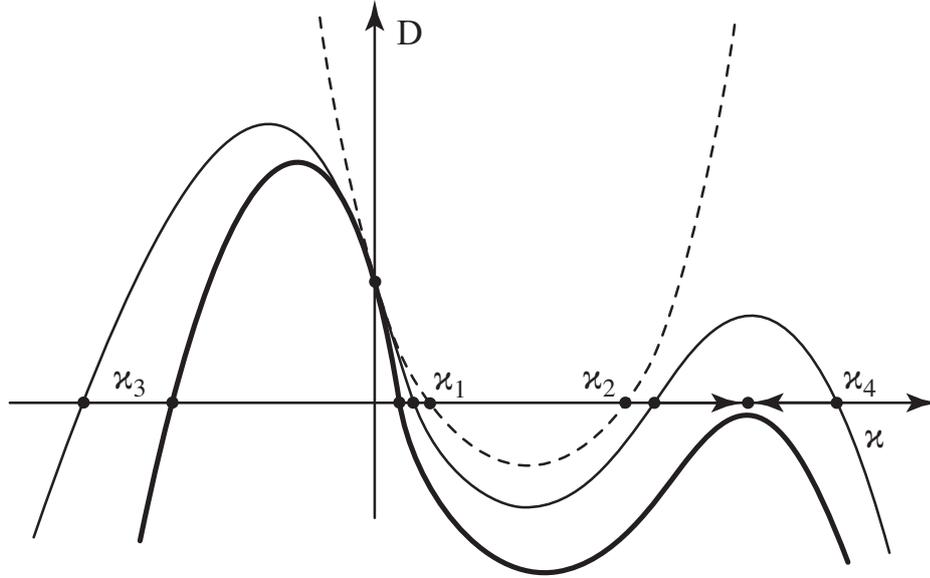


Рисунок 3.4: График  $D(\kappa)$  при  $N = 0$  (пунктирная линия), при малых  $N > 0$  (тонкая линия) и при больших  $N > 0$  (жирная линия). Стрелки показывают движение  $\kappa_{2,4}$  по мере увеличения  $N$

где  $\omega = i\sigma$ . Видно, что при  $N \neq 0$  имеется шесть седловых точек  $\omega(k)$ , вместо двух точек при  $N = 0$ . Исключая  $\sigma$ , получаем одно уравнение на  $\kappa$ :

$$F(\kappa) = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{(3n+1)^2} N^2 \kappa^6 + \left( 2 \frac{\pi^2(2n+1)^2}{(3n+1)^2} \alpha - \frac{3}{2} \right) N \kappa^4 + 8 \frac{(2n+1)(n+1)}{(3n+1)^2} Re \kappa^3 + F_0(\kappa). \quad (3.17)$$

Рассмотрим его решения при  $N \rightarrow 0$ . Две точки  $k_{s1,2}$  стремятся к седловым точкам системы с  $N = 0$ . Другие четыре точки стремятся к бесконечности, поскольку  $\kappa \sim 1/\sqrt{N}$ . После подстановки  $\kappa = \lambda/\sqrt{N}$  имеем:

$$\frac{\pi^2(2n+1)^2}{(3n+1)^2} \lambda^4 + \left( 2 \frac{\pi^2(2n+1)^2}{(3n+1)^2} \alpha - \frac{3}{2} \right) \lambda^2 + \left( -\alpha + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{(3n+1)^2} \alpha^2 \right).$$

Полученное уравнение является биквадратным с положительным дискриминантом, т.е. все его корни действительны.

При  $\beta > \beta_{div}$  оба корня  $\lambda^2$  положительны. Это означает, что четыре дополнительные седловые точки  $k_{s3,4,5,6}$  являются чисто мнимыми: мнимые части двух из которых положительны, а двух других отрицательны. Топология линий уровня  $\text{Im } \omega(k)$  для этого случая показана на рис. 3.5. Ясно, что дополнительные седловые точки не оказывают влияние на асимптотику локализованного возмущения, поэтому те же самые седловые точки  $k_{s1,2}$  вызывают абсолютную неустойчивость, как и при  $N = 0$ .

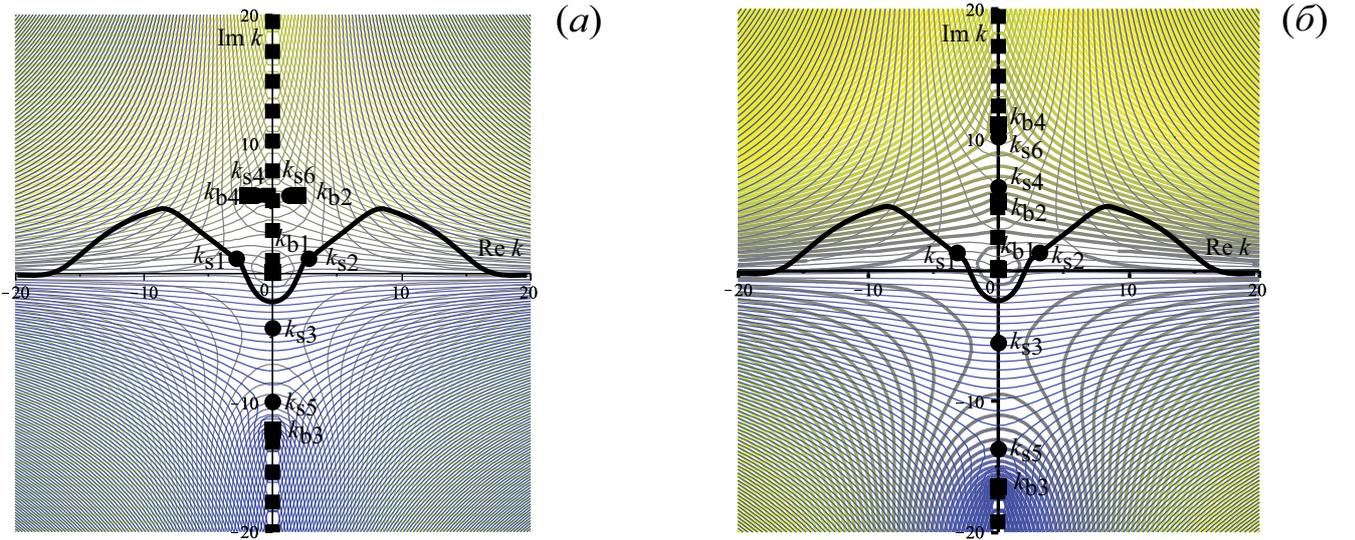


Рисунок 3.5: Линии уровня  $\text{Im } \omega(k) = \text{const}$  на комплексной  $k$ -плоскости и контур интегрирования, дающий асимптотическое поведение локализованного возмущения. Параметры  $m = 0$ ,  $n = 0.1$ ,  $\beta = 0.3 > \beta_{\text{div}}$ ,  $N = 0.0015$  (а),  $N = 0.003$  (б). Седловые точки  $\omega(k)$  показаны кружками, а точки ветвления — квадратами. Разрез ветви показан пунктирной линией, а путь интегрирования — жирной сплошной линией.

В случае  $\beta < \beta_{\text{div}}$  неустойчивость является конвективной при  $N = 0$ , потому что седловые точки, определяющие асимптотическое поведение возмущения, отсутствуют (рис. 3.3). При  $N \neq 0$  один корень  $\lambda^2$  отрицателен, а другой положителен, т.е. две дополнительные седловые точки  $k_{s3,4}$  действительны, а две другие  $k_{s5,6}$  являются чисто мнимыми при  $N \rightarrow 0$ . Две дополнительные седловые точки  $k_{s3,4}$  определяют характер неустойчивости. Чтобы вычислить  $\text{Im } \omega_s$ , необходимо рассмотреть следующее приближение седловых точек при  $N \rightarrow 0$ :  $\varkappa = \lambda/\sqrt{N} + \varkappa'$  и линеаризовать (3.17) относительно  $\varkappa'$ . Можно показать, что  $\text{Im } \varkappa' \rightarrow \text{const}$  при  $N \rightarrow 0$ , это означает, что  $\text{Im } \omega_s \rightarrow \text{const}$ . Расчет предельной постоянной дает область абсолютной неустойчивости при  $N \rightarrow 0$  показанной на рис. 3.6.

Заметим, что нет непрерывного перехода от малого  $N > 0$  к  $N = 0$ , поскольку при  $N \rightarrow 0$ , седловые точки  $k_{s3,4}$ , приводящие к неустойчивости, стремятся к бесконечности, но  $\text{Im } \omega_s \rightarrow \text{const}$ , тогда как при  $N = 0$  такие седловые точки отсутствуют. Поскольку при  $N \rightarrow 0$  асимптотическая форма локализованных возмущений определяется короткими волнами с длинами волн  $\sim 1/\sqrt{N}$ , то область неустойчивости называется «коротковолновой» абсолютной неустойчивостью.

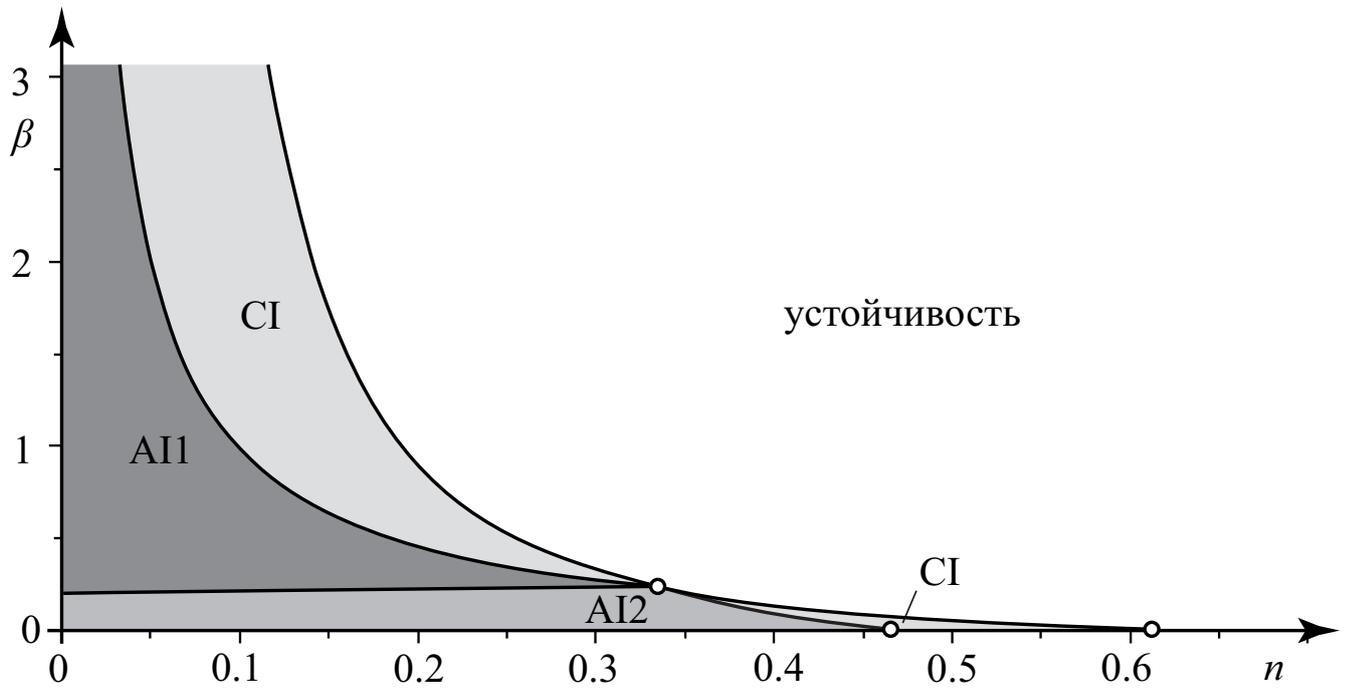


Рисунок 3.6: Области «постоянной» абсолютной неустойчивости ( $AI_1$ ), коротковолновой абсолютной неустойчивости ( $AI_2$ ) и конвективной ( $CI$ ) неустойчивости при малых  $N > 0$  и  $m = 0$ .

### 3.2.4 Произвольное натяжение трубки

Для произвольного  $N > 0$  граница абсолютной неустойчивости может быть найдена численно. Начиная с границы, показанной на рисунке 3.6 при малых  $N$ , постепенно увеличиваем  $N$  и следим за  $\text{Im}\omega(k_{s1,2})$ , которые определяют характер неустойчивости. Результаты показаны на рисунке 3.7 для различных значений  $N$ . Как видно, при увеличении натяжения область абсолютной неустойчивости уменьшается при  $n > 0.2$ , и, наоборот увеличивается при  $n < 0.2$ . Заметим, что когда  $N$  не мало, нет разделения между обычной и коротковолновой абсолютной неустойчивостью. При  $N \approx 2.01$  граница абсолютной неустойчивости касается горизонтальной оси при  $n \approx 0.26$ , а при  $N > 2.01$  область абсолютной неустойчивости разделяется на две несвязанные области.

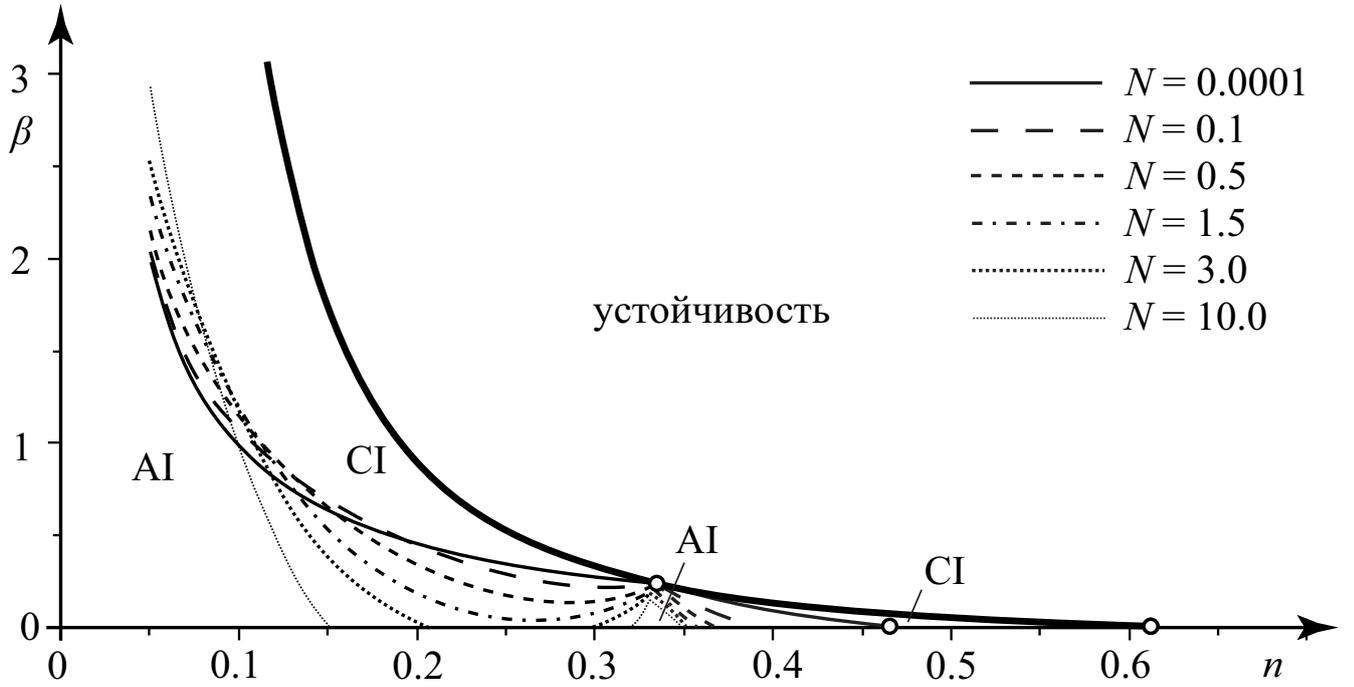


Рисунок 3.7: Области абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости при  $N = 0.0001, 0.1, 0.5, 1.5, 3.0, 10.0$  и  $m = 0$ . Жирной линией показана длинноволновая граница устойчивости.

### 3.3 Устойчивость упругой сужающейся или расширяющейся трубки

Рассмотрим влияние изменения геометрии трубки на область неустойчивости трубки. Будем предполагать, что радиус меняется медленно  $R_s \approx const$ , но градиент давления, вызванный сужением или расширением, не пренебрежимо мал, т.е.  $\chi = \frac{dR_s}{dz} \neq 0$  — малая, но ненулевая величина.

Тогда дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{mk^2}{2}\right)\omega^2 + \left(\frac{16ni}{\pi Re} - \frac{2(3n+1)k}{\pi(2n+1)} - \frac{4(3n+1)\chi i}{(2n+1)\pi}\right)\omega + \frac{8(1-3n)ki}{\pi^2 Re} - \frac{k^2\beta}{2} + \\
 + \frac{k^2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} - \frac{Nk^4}{2} + \frac{ik\chi}{2\pi} \left(2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi}\right) = 0. \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Найдем корни дисперсионного уравнения.

$$\begin{aligned}
D &= \left( \frac{16ni}{\pi Re} - \frac{2(3n+1)k}{\pi(2n+1)} - \frac{4(3n+1)\chi i}{(2n+1)\pi} \right)^2 - 4 \left( \frac{8(1-3n)ki}{\pi^2 Re} - \frac{k^2\beta}{2} + \frac{k^2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{Nk^4}{2} + \frac{ik\chi}{2\pi} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right) \right) \left( 1 + \frac{mk^2}{2} \right) = \\
&= -\frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} + 2k^2\beta - \frac{2^5 ki(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \frac{4(3n+1)nk^2}{(2n+1)^2\pi^2} + 2Nk^4 \left( 1 + \frac{mk^2}{2} \right) - \\
&- 2mk^2 \left( \frac{8(1-3n)ki}{\pi^2 Re} - \frac{k^2\beta}{2} + \frac{k^2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} \right) - \frac{8(3n+1)\chi i}{(2n+1)\pi} \left( \frac{16ni}{\pi Re} - \frac{2(3n+1)k}{(2n+1)\pi} \right) - \\
&\quad - \frac{16(3n+1)^2\chi^2}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{2ik\chi}{\pi} \left( 1 + \frac{mk^2}{2} \right) \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right).
\end{aligned}$$

Тогда корни уравнения (3.18) имеют вид:

$$\omega_{1,2} = \frac{2}{2 + mk^2} \left[ \frac{(3n+1)k}{(2n+1)\pi} - \frac{8ni}{\pi Re} + \frac{2(3n+1)\chi i}{(2n+1)\pi} \pm \frac{1}{2} \sqrt{D} \right].$$

Ограничимся случаем, в котором не учитывается поверхностная плотность трубки и продольное натяжение стенок, т.е.  $m = 0$ ,  $N = 0$ . Тем самым имеем:

$$\begin{aligned}
\omega_{1,2} &= \frac{(3n+1)k}{(2n+1)\pi} - \frac{8ni}{\pi Re} + \frac{2(3n+1)\chi i}{(2n+1)\pi} \pm \frac{1}{2} \left[ 2k^2\beta - \frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} + \frac{4(3n+1)nk^2}{(2n+1)^2\pi^2} - \right. \\
&\quad - \frac{2k(n+1)i}{\pi^2 Re(2n+1)} + \frac{2^7(3n+1)\chi n}{(2n+1)\pi^2 Re} + \frac{2^4(3n+1)^2 k\chi i}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{16(3n+1)^2\chi^2}{(2n+1)^2\pi^2} - \\
&\quad \left. - \frac{2ik\chi}{\pi} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Система с возмущениями неустойчива в том и только в том случае, когда существует действительное  $k$  такое, что мнимая часть от  $\omega(k)$  является поло-

жительной. Выделим мнимую часть значения  $\omega(k)$ :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega) = & -\frac{8n}{\pi Re} + \frac{2(3n+1)\chi}{(2n+1)\pi} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{2^4 k(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \frac{2^3(3n+1)^2 k\chi}{(2n+1)^2 \pi^2} - \right. \\ & \left. - \frac{k\chi}{\pi} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right) \right) \left[ 2k^2\beta - \frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} + \frac{4(3n+1)nk^2}{(2n+1)^2 \pi^2} + \right. \\ & + \frac{2^7(3n+1)\chi n}{(2n+1)\pi^2 Re} - \frac{16(3n+1)^2 \chi^2}{(2n+1)^2 \pi^2} + \left( \left( 2k^2\beta - \frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} + \frac{4(3n+1)nk^2}{(2n+1)^2 \pi^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2^7(3n+1)\chi n}{(2n+1)\pi^2 Re} - \frac{16(3n+1)^2 \chi^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \right)^2 + \left( \frac{2^4(3n+1)^2 \chi k}{(2n+1)^2 \pi^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2^5 k(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} - \frac{2k\chi}{\pi} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)^2}{(2n+1)\pi} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Сгруппировав слагаемые относительно  $\beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2 \pi^2}$ , получим:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega) = & -\frac{8n}{\pi Re} + \frac{2(3n+1)\chi}{(2n+1)\pi} \pm \left[ -\frac{2^{7/2} k(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \right. \\ & \left. + k \left( \frac{2^{5/2}(3n+1)^2 \chi}{(2n+1)^2 \pi^2} - \chi\sqrt{2} \left( \beta + \frac{3(3n+1)}{(2n+1)\pi^2} \right) \right) \right] \left[ 2k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2 \pi^2} \right) - \right. \\ & - \frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} + \frac{2^7(3n+1)\chi n}{(2n+1)\pi^2 Re} - \frac{16(3n+1)^2 \chi^2}{(2n+1)^2 \pi^2} + \left( 4k^4 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2 \pi^2} \right)^2 + \right. \\ & + 4k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2 \pi^2} \right) \left( \frac{2^7(3n+1)\chi n}{(2n+1)\pi^2 Re} - \frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} - \frac{16(3n+1)^2 \chi^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \right) + \\ & \left. + \left( \frac{2^7(3n+1)\chi n}{(2n+1)\pi^2 Re} - \frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} - \frac{16(3n+1)^2 \chi^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + k^2 \left( -\frac{2^5(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \frac{2^4(3n+1)^2 \chi}{(2n+1)^2 \pi^2} - \frac{2\chi}{\pi} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.19) \end{aligned}$$

### 3.3.1 Влияние длины волны на неустойчивость

Полученное выражение (3.19) громоздко для анализа, поэтому поступим следующим образом. Сначала покажем, что знак  $\text{Im } \omega$  одинаковый при любых  $k$ ,

а затем рассмотрим предел коротких волн, что позволит упростить выражение и получить критерий, который будет являться критерием для общего случая.

Рассмотрим влияние длины волны на неустойчивость. Если существует значение волнового числа  $k$ , при котором  $\text{Im}(\omega)$  сменит знак, то это покажет, что произошел переход от устойчивости к неустойчивости и наоборот. Для этого приравняем значение  $\text{Im}(\omega)$  к нулю и выразим последовательно внешний и внутренний корень.

$$\begin{aligned}
& \left[ 4k^4 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right)^2 + 4k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right) \left( \frac{2^7(3n+1)\chi n}{(2n+1)\pi^2 Re} - \frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{16(3n+1)^2\chi^2}{(2n+1)^2\pi^2} \right) + \left( \frac{2^7(3n+1)\chi n}{(2n+1)\pi^2 Re} - \frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} - \frac{16(3n+1)^2\chi^2}{(2n+1)^2\pi^2} \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. + k^2 \left( -\frac{2^5(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \frac{2^4(3n+1)^2\chi}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{2\chi}{\pi} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
& = k^2 \left[ \left( -\frac{2^{7/2}k(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \frac{2^{5/2}(3n+1)^2\chi}{(2n+1)^2\pi^2} - \chi\sqrt{2} \left( \beta + \frac{3(3n+1)}{(2n+1)\pi^2} \right) \right)^2 \times \right. \\
& \quad \times \left. \left( \frac{8n}{\pi Re} - \frac{2(3n+1)\chi}{(2n+1)\pi} \right)^{-2} - 2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right) \right] + \\
& \quad + \frac{2^8 n^2}{\pi^2 Re^2} - \frac{2^7(3n+1)\chi n}{(2n+1)\pi^2 Re} + \frac{16(3n+1)^2\chi^2}{(2n+1)^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Возведя в квадрат и сгруппировав относительно  $k^4$  и  $k^2$ , имеем  $k^4 = 0$ , т.е.  $k = 0$ . Таким образом, как и ранее, получили, что и короткие ( $k \rightarrow \infty$ ) и длинные ( $k \rightarrow 0$ ) волны одновременно устойчивы или неустойчивы.

### 3.3.2 Устойчивость коротких волн ( $k \rightarrow \infty$ )

Рассмотрим устойчивость волн, в предположении, что волновое число велико  $k \rightarrow \infty$ , так как и короткие и длинные волны одновременно устойчивы или неустойчивы. Раскладывая внутренний корень  $\text{Im}(\omega)$  в ряд Тейлора по малому

параметру  $\frac{1}{k^2}$  и не учитывая порядок малости выше второго, получим

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega) = & -\frac{8n}{\pi Re} + \frac{2(3n+1)\chi}{(2n+1)\pi} \pm \left[ -\frac{2^{7/2}k(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + k \left( \frac{2^{5/2}(3n+1)^2\chi}{(2n+1)^2\pi^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \chi\sqrt{2} \left( \beta + \frac{3(3n+1)}{(2n+1)\pi^2} \right) \right) \right] \left[ 4k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right) - \frac{2^9n^2}{\pi^2 Re^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2^8(3n+1)n\chi}{(2n+1)\pi^2 Re} - \frac{2^5(3n+1)^2\chi^2}{(2n+1)^2\pi^2} + \frac{1}{4} \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2} \right)^{-1} \times \right. \\ & \left. \times \left( -\frac{2^5(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \frac{2^4(3n+1)^2\chi}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{2\chi}{\pi} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right) \right)^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Далее, аналогично раскладываем корень предыдущего выражения в ряд Тейлора по малому параметру  $\frac{1}{k^2}$ , не учитывая порядок малости выше второго, и считаем выражения с  $\frac{1}{k}$  малыми. Имеем

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega) = & -\frac{8n}{\pi Re} + \frac{2(3n+1)\chi}{(2n+1)\pi} \pm \frac{1}{2|k|\sqrt{\beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2}}} \left[ -\frac{2^{7/2}k(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \right. \\ & \left. k \left( \frac{2^{5/2}(3n+1)^2\chi}{(2n+1)^2\pi^2} - \chi\sqrt{2} \left( \beta + \frac{3(3n+1)}{(2n+1)\pi^2} \right) \right) \right] \left[ 1 + \frac{1}{k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right)} \left( -\frac{2^7n^2}{\pi^2 Re^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2^6(3n+1)n\chi}{(2n+1)\pi^2 Re} - \frac{2^3(3n+1)^2\chi^2}{(2n+1)^2\pi^2} \right) + \frac{1}{2^4k^2 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2} \right)^2} \left( -\frac{2^5(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2^4(3n+1)^2\chi}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{2\chi}{\pi} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right) \right) \right]^{-1/2} = -\frac{8n}{\pi Re} + \frac{2(3n+1)\chi}{(2n+1)\pi} \pm \\ & \pm \frac{\text{sign}(k)}{\sqrt{\beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2}}} \left( -\frac{2^{5/2}(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \chi \left( \frac{2^{3/2}(3n+1)^2}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \beta + \frac{3(3n+1)}{(2n+1)\pi^2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку критерием неустойчивости является положительность мнимой части  $\omega(k)$ , то выполнено неравенство:

$$\begin{aligned} \text{sign}(k) \left( -\frac{2^{5/2}(n+1)}{\pi^2 Re(2n+1)} + \chi \left( \frac{2^{3/2}(3n+1)^2}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \beta + \frac{3(3n+1)}{(2n+1)\pi^2} \right) \right) \right) > \\ > \left( \frac{8n}{\pi Re} + \frac{2(3n+1)\chi}{(2n+1)\pi} \right) \sqrt{\beta + \frac{2(3n+1)n}{(2n+1)^2\pi^2}}. \end{aligned}$$

Возведя в квадрат последнее неравенство и приведя подобные слагаемые относительно  $\beta$  и  $\chi$ , получим квадратное неравенство:

$$\frac{\chi^2 \beta^2}{2} + \frac{\beta}{\pi^2} \left[ -\chi^2 \frac{(3n+1)(18n+5)}{(2n+1)^2} + \chi \frac{2^3(12n^2+5n+1)}{(2n+1)Re} - \frac{2^6 n^2}{Re^2} \right] + \chi^2 \frac{(3n+1)^2(1-6n)}{2(2n+1)^3 \pi^4} + \chi \frac{2^3(3n+1)(12n^2-5n-1)}{\pi^4(2n+1)^2 Re} - \frac{2^5(6n^3-n^2-1)}{\pi^4 Re^2(2n+1)} > 0.$$

Если  $\chi = 0$ , то получим ранее рассмотренный случай в предположении  $\frac{\partial R_s}{\partial z} = 0$ . Тем самым далее можно считать, что  $\chi \neq 0$ . Сократив полученное неравенство на  $\frac{\chi^2}{2}$ , имеем:

$$\beta^2 + \frac{2\beta}{\pi^2} \left[ -\frac{(3n+1)(18n+5)}{(2n+1)^2} + \frac{2^3 12n^2+5n+1}{\chi (2n+1)Re} - \frac{1}{\chi^2} \frac{2^6 n^2}{Re^2} \right] + \frac{(3n+1)^2(1-6n)}{(2n+1)^3 \pi^4} + \frac{1}{\chi} \frac{2^4(3n+1)(12n^2-5n-1)}{\pi^4(2n+1)^2 Re} - \frac{1}{\chi^2} \frac{2^6(6n^3-n^2-1)}{\pi^4 Re^2(2n+1)} > 0. \quad (3.20)$$

Графики зависимости  $\beta$  от  $n$  для некоторых параметров  $\chi$  и  $Re = 1000$  представлены на Рис.3.8, 3.9.

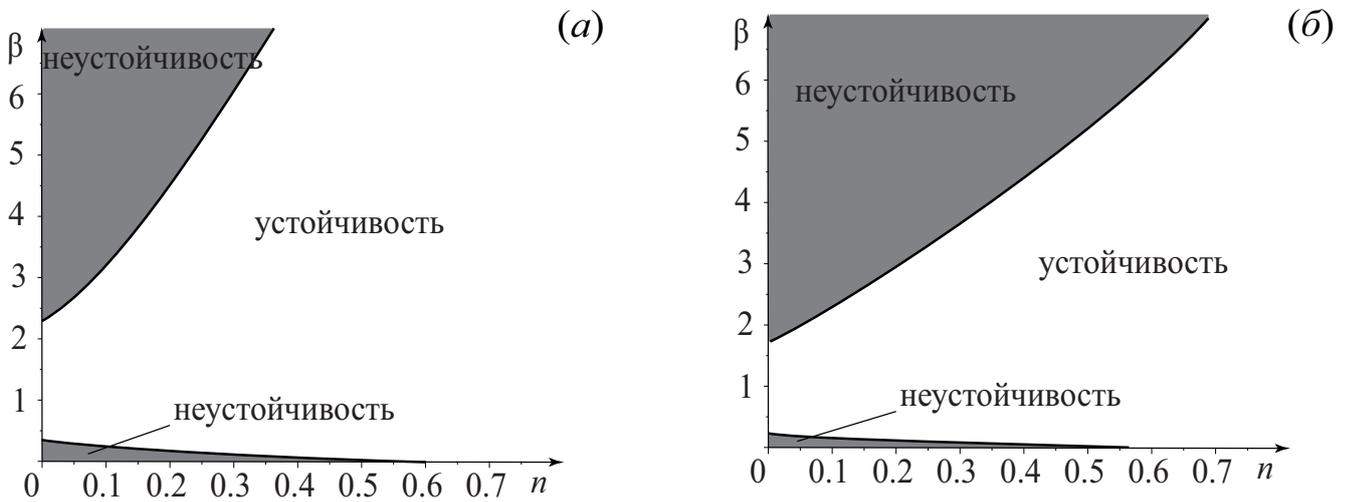


Рисунок 3.8: Область неустойчивости при  $\chi = -0.001$  (a),  $\chi = -0.002$  (b).

В силу указанного выше замечания, данные области неустойчивости представляют собой области неустойчивости не только коротких, но и произвольных длин волн.

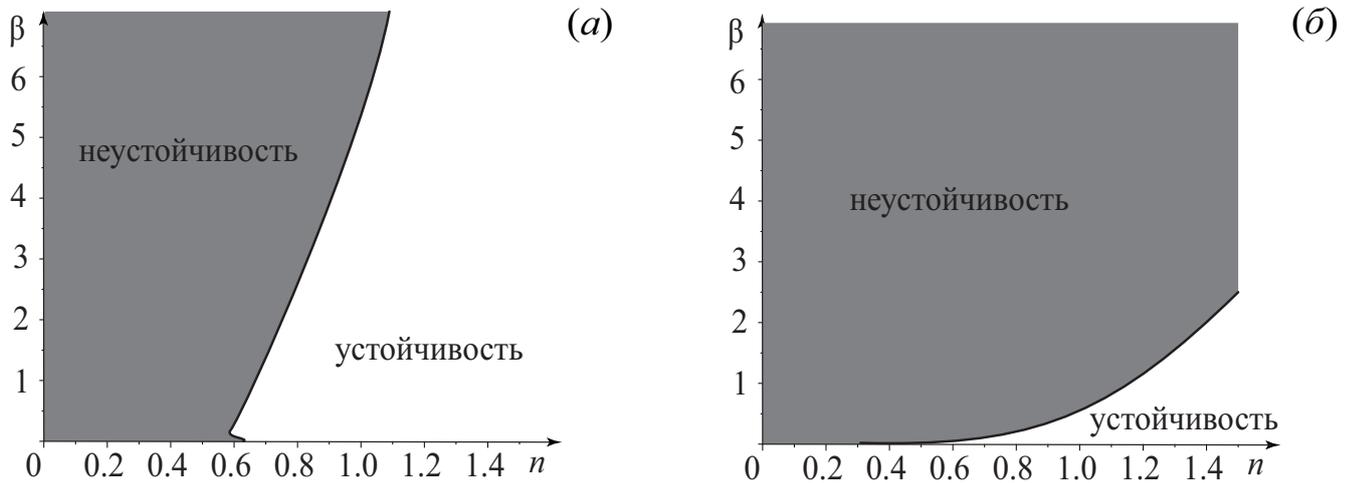


Рисунок 3.9: Область неустойчивости при  $\chi = 0.001$  (a),  $\chi = 0.002$  (b).

### 3.4 Глобальная неустойчивость упругой конечной длинной трубки

Важно отметить, что критерий устойчивости для сколь угодно длинных трубок не совпадает с критерием устойчивости для бесконечно длинной трубки. Это связано с тем, что в бесконечно длинной трубке существует решение в виде неограниченных по пространству бегущих волн, в то время как в конечных, пусть и очень длинных трубках, имеется отражение волн от концов, так что в собственных колебаниях участвуют, как минимум, сразу две волны. Асимптотический метод глобальной неустойчивости, разработанный А.Г. Куликовским [126], является эффективным методом определения собственных мод и границ устойчивости систем, в которых размеры в одном направлении намного больше, чем размеры в других направлениях.

Критерий глобальной неустойчивости формулируется следующим образом.

Для случая бесконечно длинной трубки корни  $k_j(\omega)$  дисперсионного уравнения нумеруются в порядке убывания их мнимых частей  $\text{Im } k_j(\omega)$  для  $\text{Im}(\omega) \gg 1$ :

$$\text{Im } k_1(\omega) > \dots > \text{Im } k_s(\omega) > \text{Im } k_{s+1}(\omega) > \dots > \text{Im } k_N(\omega).$$

Эти корни делятся на две группы: верхняя с  $\text{Im } k_j(\omega) > 0$ ,  $j = 1, \dots, s$  и нижняя с  $\text{Im } k_j(\omega) < 0$ ,  $j = s + 1, \dots, N$ . Если эти две группы остаются разделенными полосой, параллельной действительной оси  $k$ , при уменьшении  $\text{Im } \omega$  до  $\text{Im } \omega = 0$ , то это достаточное условие отсутствия глобальной неустойчивости.

Если такой полосы не существует, то может существовать такая  $\omega$ , что

$$\operatorname{Im}[k_u(\omega) - k_l(\omega)] = 0, \quad (3.21)$$

где  $k_u$  — корень из верхней группы с наименьшим значением  $\operatorname{Im} k(\omega)$ , а  $k_l$  — корень из нижней группы с наибольшим значением  $\operatorname{Im} k(\omega)$ .

Уравнение (3.21) определяет кривую на комплексной плоскости, которую далее будем называть  $\Omega$ -кривой. В окрестности этой кривой располагается дискретный спектр собственных частот конечной системы при больших длинах  $L$ . В случае, если часть этой кривой находится в области  $\operatorname{Im} \omega > 0$  имеется глобальная неустойчивость.

Заметим, что если критерий абсолютной неустойчивости выполняется для задачи о бесконечно длинной трубке, то возникает глобальная неустойчивость трубок большой, но конечной длины.

Перейдем к исследованию устойчивости конечной, но достаточно длинной трубки.

Для случая бесконечно длинной трубки и заданных параметров  $Re$ ,  $N$ ,  $n$ ,  $\beta$  находились седловые точки, из которых выходят  $\Omega$ -кривые. Далее, чтобы численно найти  $\Omega$ -кривые на  $\omega$ -плоскости, выбирается сетка в окрестности найденной седловой точки. Количество точек сетки подбирается для каждой седловой точки в зависимости от ее значения. Изображение на плоскости  $\omega$  симметрично относительно оси мнимой части  $\omega$  ( $\operatorname{Re}(\omega) = 0$ ). Затем численно находятся четыре корня  $k$  дисперсионного уравнения (3.5) в каждой точке сетки. После этого значения  $\omega$ , соответствующие  $\Omega$ -кривой, определяются из условия удовлетворения уравнению (3.21).

Рассмотрим поведение  $\Omega$ -кривых, в окрестности которых локализованы собственные частоты, на  $\omega$ -плоскости в зависимости от области неустойчивости. В качестве примера рассмотрим  $\Omega$ -кривые для безразмерных продольного натяжения  $N = 1.5$ , числа Рейнольдса  $Re = 100$  и нулевой поверхностной плотности трубки  $m = 0$ . Для безразмерных значений  $\beta$  и  $n$  выберем одну точку в области абсолютной неустойчивости для бесконечно длинной трубки при  $N = m = 0$ . Далее увеличиваем безразмерное продольное натяжение  $N$  до значения 1.5. После этого строим  $\Omega$ -кривые для заданных значений  $\beta$ ,  $n$  и  $N$ .

С этого момента будем постепенно изменять значения параметров  $\beta$  и  $n$ , двигаясь по часовой стрелке от точки 1 к точке 13 (Рис. 3.10(a)) и проследим

за движением седловых точек функции  $\omega(k)$  и выходящих из них  $\Omega$ -кривых. Полный цикл движения седловых точек показан на рисунке 3.10(б).

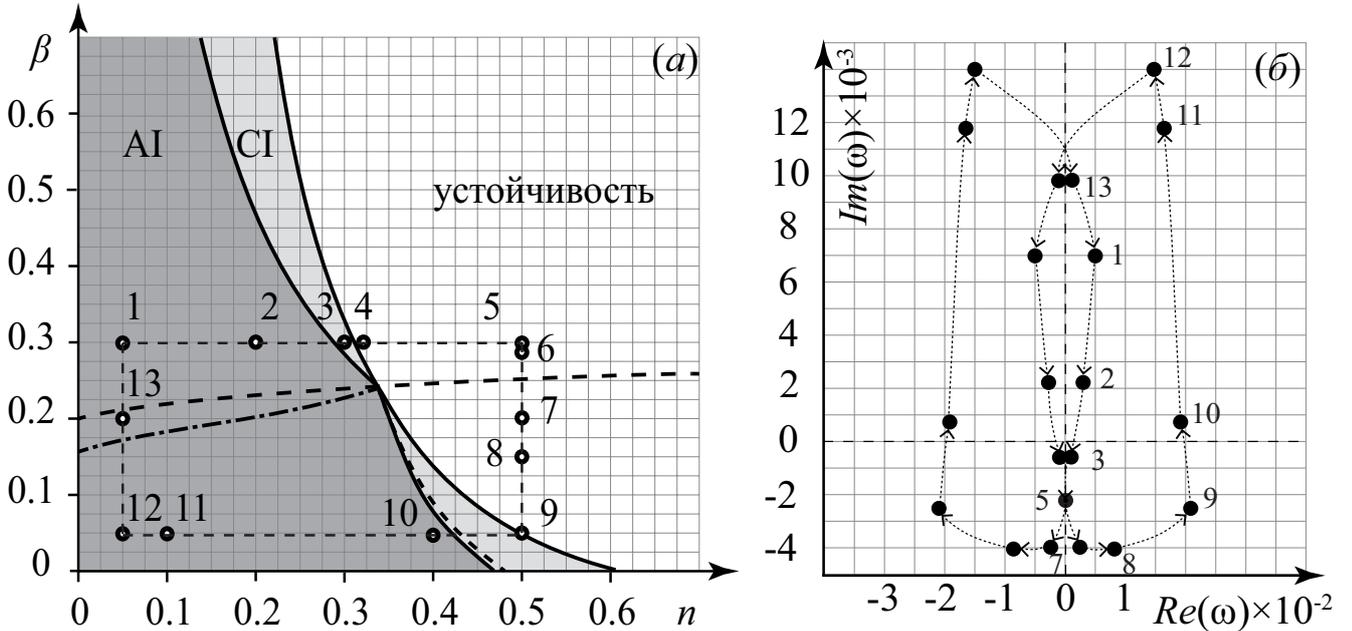


Рисунок 3.10: (а) Области абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости. (б) Траектории седловых точек  $\omega(k)$  на  $\omega$ -плоскости. Полный цикл движения седловых точек от точки 1 до точки 13 и вновь 1.

В начальный момент времени для значений  $\beta$  и  $n$  в точке 1 ( $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.3$ ) две седловые точки (кружки) расположены в области положительных значений  $\text{Im}(\omega)$  симметрично относительно оси  $\text{Re}(\omega) = 0$  и две  $\Omega$ -кривые выходят из этих седловых точек (рис. 3.11(а)). Две другие седловые точки (квадраты) расположены на мнимой оси в положительной области и движутся в сторону уменьшения своего значения.

Седловые точки приближаются друг к другу, как показано на рисунке 3.11(б), при фиксированном значении  $\beta = 0.3$  и постепенном увеличении  $n$  от 0.05 до 0.3, т.е. последовательный переход от области абсолютной неустойчивости (точка 2; рис. 3.11(б) сплошные линии) в область конвективной неустойчивости (точка 3; рис. 3.11(б) пунктирные линии). В этом случае седловые точки проходят через действительную ось и меняют знак мнимых частей (рис. 3.11(б) пунктирные линии) при пересечении границы абсолютной неустойчивости на плоскости  $\beta$ - $n$  (рис. 3.10(а)). При этом  $\Omega$ -кривые полностью уходят в область  $\text{Im}(\omega) < 0$ . Седловые точки из другой пары (квадраты) продолжают движение по мнимой оси с уменьшением своего значения.

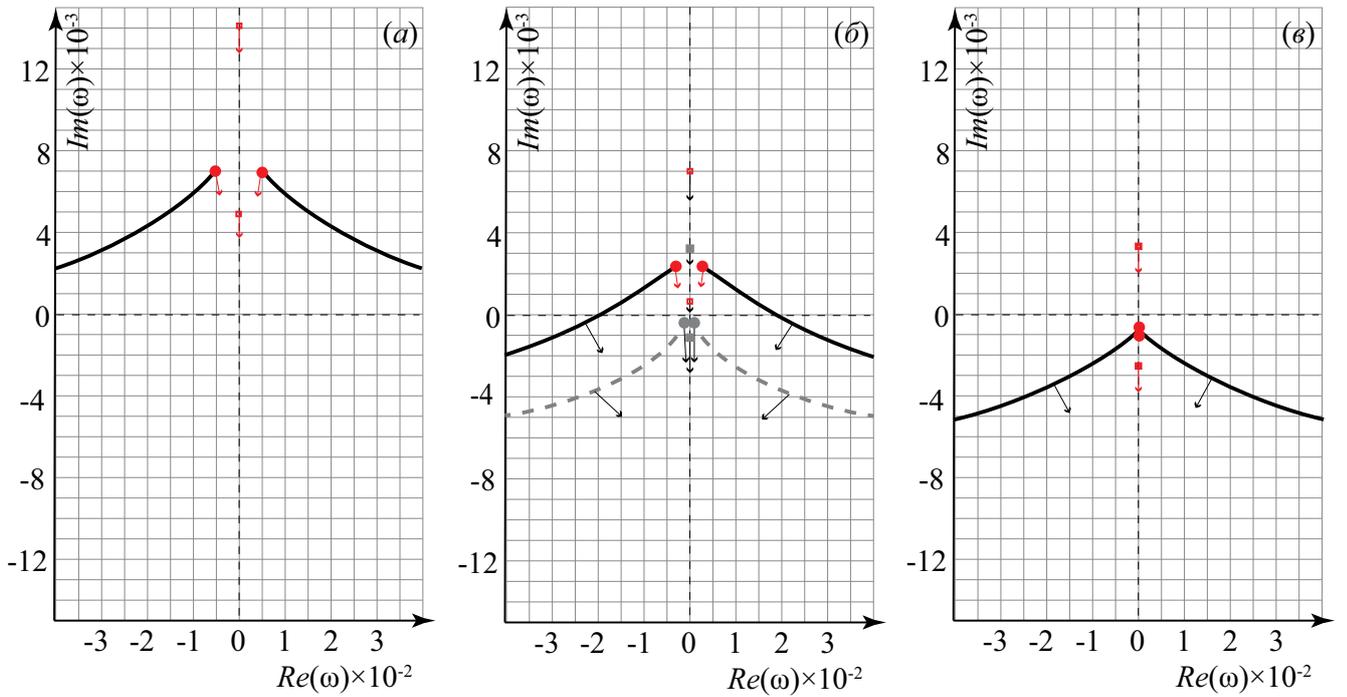


Рисунок 3.11:  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.3$ . (б) сплошная линия  $n = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ . (б) пунктирная линия  $n = 0.3$ ,  $\beta = 0.3$ . (в)  $n = 0.31$ ,  $\beta = 0.3$ . Седловые точки  $\omega(k)$  обозначены кружками и квадратами. При изменении параметров  $n$  и  $\beta$  от значений в точке 1 до значений в точке 4; направления движения кривых указываются стрелками.

При дальнейшем увеличении  $n$  седловые точки медленно сближаются, двигаясь в направлении уменьшения своей мнимой части, как показано стрелками на рисунках 3.11(а,б).

При переходе из области конвективной неустойчивости в область устойчивости, т.е. при переходе от точки 3 к точке 5 через точку 4, седловые точки движутся следующим образом.

Сначала, седловые точки ( $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) сходятся симметрично, при этом модуль мнимой части немного увеличивается, а значение их действительной части уменьшается (Рис. 3.12(а) черные точки перемещаются из точки 3 в точку 4). Когда седловые точки пересекают границу устойчивости, они сталкиваются на мнимой оси и начинают двигаться в противоположных направлениях вдоль мнимой оси ( $Re(\omega) = 0$ ). При дальнейшем увеличении значения  $n$  седловая точка  $\omega_1$ , которая движется в положительном направлении оси  $Im(\omega)$ , достигает нуля при  $n = 0.35$  и начинает движение в обратном направлении (рис. 3.12(б)). Вторая седловая точка  $\omega_2$  продолжает движение в сторону убывания  $Im(\omega)$ .

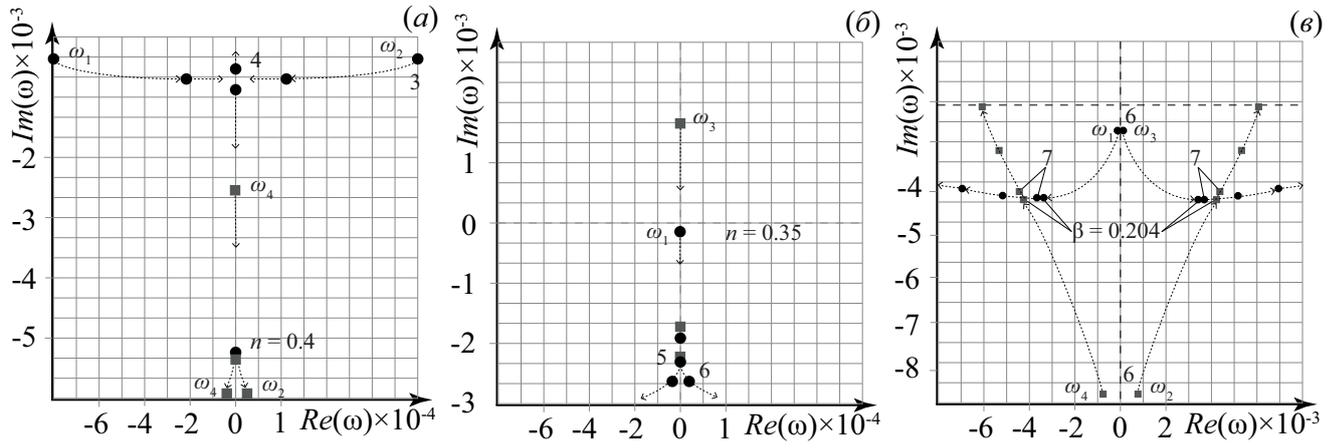


Рисунок 3.12: Траектории седловых точек  $\omega(k)$  на комплексной  $\omega$ -плоскости. (а) Движение седловых точек из точки 3 в точку 4. (б) Движение седловых точек из точки 4 в точку 6 через точку 5. (в) Движение седловых точек из точки 6 в точку 7.

При этом существуют еще две седловые точки  $\omega_3$  и  $\omega_4$  (квадраты), движущиеся вдоль мнимой оси  $Im(\omega)$  в отрицательном направлении. Стрелки указывают направление движения при увеличении  $n$ .

Далее седловая точка  $\omega_2$  догоняет седловую точку  $\omega_4$  на мнимой оси при  $n = 0.4$ , а при дальнейшем увеличении значения  $n$  они расходятся в сторону уменьшения мнимой части и увеличения модуля действительной части. В это время седловые точки  $\omega_1$  и  $\omega_3$  продолжают сходиться с уменьшением мнимой части. При увеличении  $n$   $\omega_1$  догоняет  $\omega_3$  в точке 6 ( $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.295$ ) и они начинают расходиться аналогично  $\omega_2$  и  $\omega_4$  (Рис. 3.12(б)).

Вид  $\Omega$ -кривых в точке 4 показана на рисунке 3.11(в). Когда  $\omega_2$  и  $\omega_4$  начали расходиться ( $n = 0.4$ ), появляются дополнительные сегменты  $\Omega$ - (рис. 3.13(а)). Новый участок кривой представляют собой замкнутую траекторию, огибающую седловые точки, обозначенные квадратами. Кроме того, есть часть  $\omega$ -кривой, которая полностью лежит на мнимой оси  $\omega$ .

Теперь зафиксируем значение  $n = 0.5$  и будем уменьшать значение  $\beta$ , переходя от точки 5 к точке 9 через точки 6, 7 и 8.  $\Omega$ -кривые меняют свою конфигурацию при переходе от точки 5 к точке 7. Это связано с переходом через точку 6, в которой  $\omega_1$  и  $\omega_3$  встречаются и начинают расходиться. В этот момент вокруг этих седловых точек (кружки на рис. 3.13(б)) появляются новые замкнутые  $\Omega$ -кривые. При этом указанные квадратами седловые точки подходят близко к  $\Omega$ -кривым, уходящим на бесконечность, и замкнутые петли  $\Omega$ -кривой,

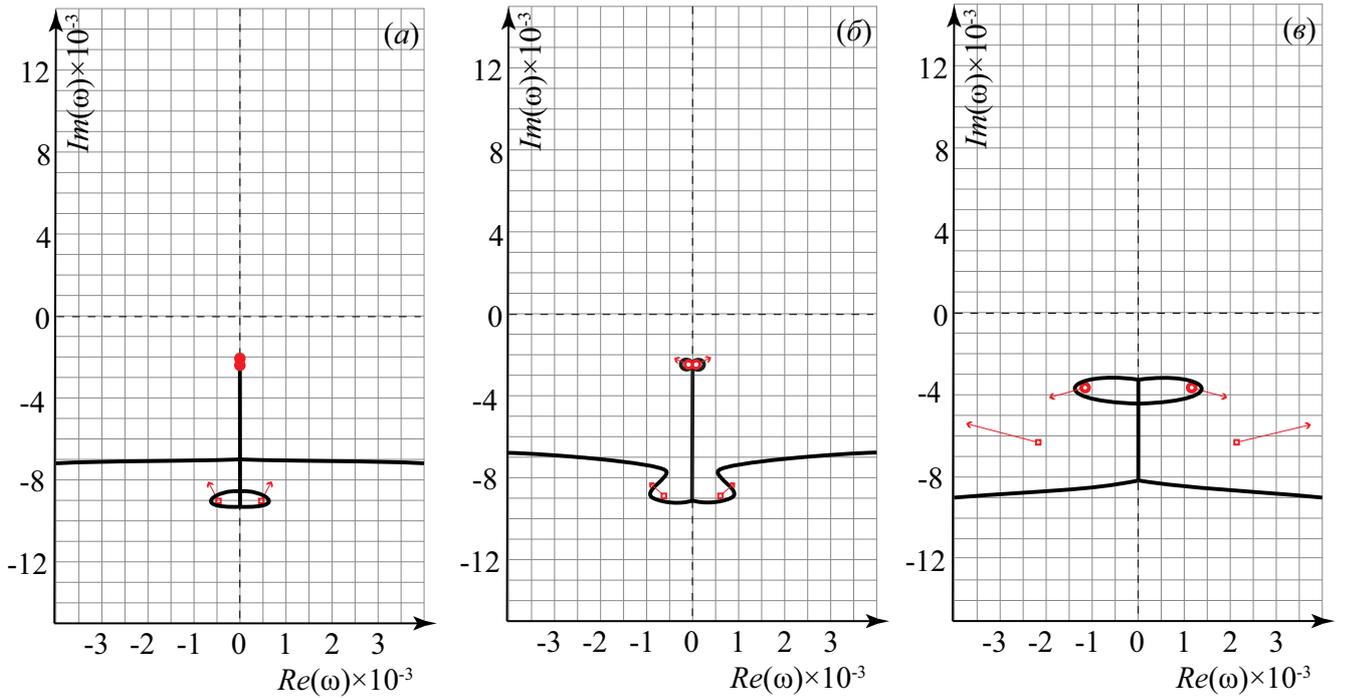


Рисунок 3.13:  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.3$ , (б)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.25$ , (в)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.2$ . Седловые точки  $\omega(k)$  обозначены кружками и квадратами. При изменении параметров  $n$  и  $\beta$  от значений в точке 5 до значений в точке 7; направления движения кривых указываются стрелками.

оггибающие их, сливаются с ними и перестают существовать. Часть  $\Omega$ -кривой, которая полностью лежит на мнимой оси  $\omega$ , остается.

Продолжая уменьшать  $\beta$ , переходим от точки 6 к точке 7. Седловые точки  $\omega_2$  и  $\omega_4$  продолжают двигаться в сторону положительных значений своих мнимых частей, увеличивая значение модуля действительной части. В этом случае седловые точки  $\omega_1$  и  $\omega_3$  перемещаются по направлению к седловым точкам  $\omega_2$  и  $\omega_4$ , пока все точки не окажутся на одной прямой, параллельной действительной оси при  $\beta = 0.204$ . Траектории движения описанных седловых точек показаны на рисунке 3.12(в).  $\Omega$ -кривые имеют вид, представленный на рисунке 3.13(в).

После этого седловые точки  $\omega_2$  и  $\omega_4$  движутся в том же направлении, что и ранее, и не представляют интереса для дальнейшего анализа (поскольку она и не определяют асимптотическое положение собственных частот). В свою очередь, точки  $\omega_1$  и  $\omega_3$  изменяют свое направление в точке 7 и начинают двигаться в направлении увеличения своей мнимой части. Это движение продолжается при последовательном переходе от точки 7 к точке 9, то есть при фиксированном значении  $n$  и уменьшении  $\beta$ . Расположение  $\Omega$ -кривых в точ-

ках 8 и 9 показано на рисунке 3.14(а,б) соответственно. Во время перехода от точки 8 к точке 9 две другие седловые точки встречаются на положительной части мнимой оси и начинают свое движение в противоположных направлениях вдоль мнимой оси.

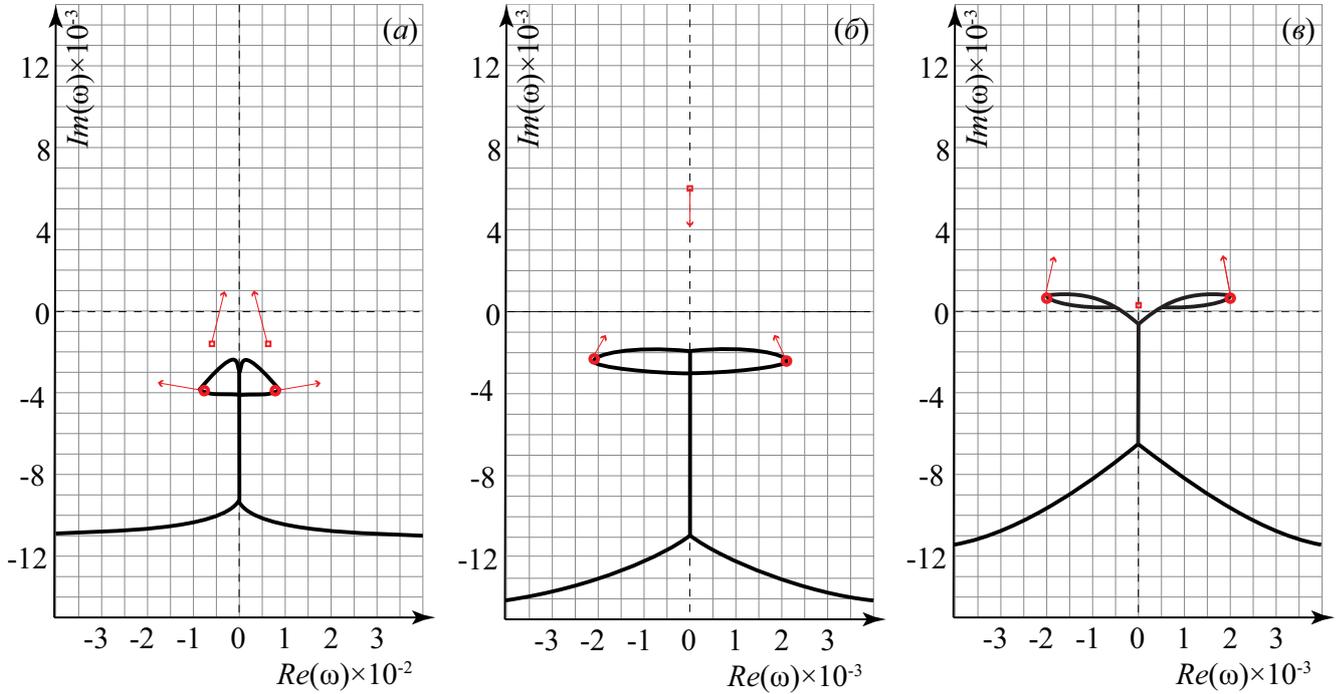


Рисунок 3.14:  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.15$ , (б)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ . (в)  $n = 0.4$ ,  $\beta = 0.05$ . Седловые точки  $\omega(k)$  обозначены кружками и квадратами. При изменении параметров  $n$  и  $\beta$  от значений в точке 8 до значений в точке 10; направления движения кривых указываются стрелками.

После этого фиксируем значение  $\beta = 0.05$  и уменьшаем значение  $n$ , т.е. следим за изменением кривых при переходе от точки 9 к точке 12 через точки 10 и 11. Вначале модуль действительной части седловых точек уменьшается. Направление движения кривых показано стрелками на рисунке 3.14(б). Далее, выпуклый вверх участок  $\Omega$ -кривой пересекает ось  $\text{Im}(\omega) = 0$  (рис. 3.14(в)). Это происходит для параметров  $n$  и  $\beta$ , соответствующих границе глобальной неустойчивости (рис. 3.10 пунктирная линия).

Далее, уменьшая  $n$ , седловые точки вместе с кривыми переходят в область  $\text{Im}(\omega) > 0$  и продолжают увеличивать значение своей мнимой части. Граница перехода седловых точек в область с  $\text{Im}(\omega) > 0$  обозначена сплошной линией на рисунке 3.10(а). В этом случае замкнутые кривые деформируются, а нижние

части этих кривых уменьшаются, как показано для точки 10 на рисунке 3.14(в), а при уменьшении  $n$  исчезают.

В дальнейшем значение мнимой части увеличивается, а модуль действительной части уменьшается при переходе к точке 12 через точки 11.

Для значений  $\beta$  и  $n$  в точках 11 и 12 ( $n = 0.1$  и  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.025$ ) две седловые точки расположены в области положительных значений  $\text{Im}(\omega)$ . Две части  $\omega$ -кривых выходят из этих седловых точек и пересекаются на оси  $\text{Re}(\omega) = 0$  (рис. 3.15(а, б)).

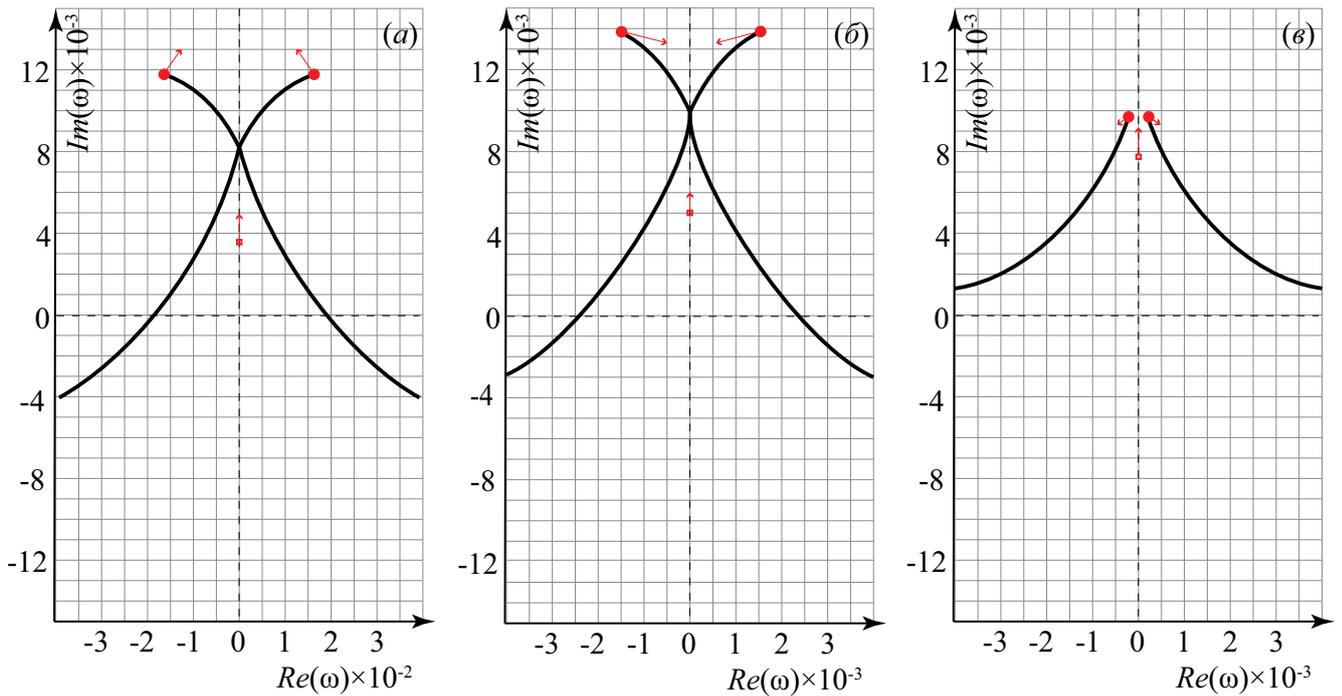


Рисунок 3.15:  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ , (б)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ . (в)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.2$ . Седловые точки  $\omega(k)$  обозначены кружками и квадратами. При изменении параметров  $n$  и  $\beta$  от значений в точке 11 до значений в точке 13; направления движения кривых указываются стрелками.

При фиксированном значении  $n = 0.05$  будем постепенно увеличивать значение  $\beta$ , переходя от точки 12 ( $\beta = 0.05$ ) до точки 1 ( $\beta = 0.3$ ). При этом седловые точки сближаются, а модуль их действительной и мнимой частей уменьшается. Части  $\omega$ -кривых перед пересечением уменьшаются. Точка 13 расположена чуть выше граничных значений параметров  $n$  и  $\beta$  (рис. 3.10(а) штрих-пунктирная линия), при переходе через которые седловые точки проходят через ось  $\text{Re}(\omega) = 0$ , меняя знаки вещественных частей (рис. 3.15(в)). В конце цикла переходим из точки 13 ( $\beta = 0.2$ ) в точку 1 ( $\beta = 0.3$ ), продолжая

движение по линии  $n = 0.05$  и увеличивая  $\beta$ . Таким образом, остаются две  $\Omega$ -кривые, выходящие из седловых точек, движущиеся в направлении увеличения  $|\operatorname{Re}(\omega)|$  и уменьшения  $\operatorname{Im}(\omega)$  (рис. 3.11(a)).

Полный цикл движения седловых точек показан на рисунке 3.10(б).

Таким образом, было доказано, что критерий глобальной неустойчивости практически совпадает с критерием абсолютной неустойчивости, за исключением узкой зоны перехода из нижней части области конвективной неустойчивости в область абсолютной неустойчивости. Кроме того, переход из области точки 12 в область точки 13 происходит через границу, где седловая точка является чисто мнимой, т.е. дивергенция сменяется флаттером.

### 3.5 Глобальная неустойчивость упругой сужающейся или расширяющейся трубки

Дисперсионное уравнение (3.18) с учетом слагаемого, отвечающего за сужение и расширение трубки вдоль её длины  $\chi$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{Nk^4}{2} + \left( \frac{\beta}{2} - \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} - \frac{m\omega^2}{2} \right) k^2 + \left( \frac{2(3n+1)k}{\pi(2n+1)} \omega - \frac{8(1-3n)i}{\pi^2 Re} - \right. \\ \left. - \frac{\chi i}{2\pi} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right) \right) k - \left( \frac{16ni}{\pi Re} + \omega - \frac{4(3n+1)i\chi}{(2n+1)\pi} \right) \omega = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ограничимся случаем длинных волн,  $k \rightarrow 0$ , что эквивалентно случаю  $m = N = 0$ . Тогда дисперсионное уравнение (3.22) является квадратным уравнением относительно волнового числа  $k$  и его дискриминант дается формулой:

$$\begin{aligned} D_\chi = 4\omega^2 \left( \frac{\beta}{2} - \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} \right) - 4i\chi\omega \frac{3n+1}{(2n+1)\pi} \left( 3\beta - \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} \right) - \\ - \chi^2 \left( \beta + \frac{3(3n+1)}{(2n+1)\pi^2} \right)^2 - \frac{32i\omega}{\pi Re} \left( \frac{1-9n^2}{\pi^2(2n+1)} - \left( \beta n - \frac{2n(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} \right) \right) - \\ - \frac{64(1-3n)^2}{\pi^4 Re^2} - \frac{8(1-3n)\chi}{\pi^3 Re} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Разница корней дисперсионного уравнения (3.22) выражается как

$$k_1 - k_2 = \frac{\sqrt{D_\chi}}{\frac{\beta}{2} - \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)}}.$$

Последнее равенство выполняется при условии  $\beta > \beta_{div} = \frac{2(3n+1)}{\pi^2(2n+1)}$ .

Кроме того, собственные частоты для трубки длины  $L$  должны удовлетворять условию:

$$k_1 - k_2 = \frac{2\pi s}{L}, s \in \mathbb{N},$$

где  $s$ -номер собственной частоты. Таким образом, уравнение для нахождения  $\omega$  имеет вид:

$$D_\chi = \frac{4\pi^2 s^2}{L^2} \left( \frac{\beta}{2} - \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} \right)^2. \quad (3.24)$$

Обозначим выражение

$$a = 4\chi \frac{3n+1}{(2n+1)\pi} \left( 3\beta - \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} \right) + \frac{32}{\pi Re} \left( \frac{(3n+1)(1-n)}{\pi^2(2n+1)} - \beta n \right),$$

тогда корни уравнения (3.24):

$$\omega_{1,2} = \frac{ai \pm \sqrt{D_\omega}}{4 \left( \beta + \frac{2(3n+1)n}{\pi^2(2n+1)^2} \right)},$$

где

$$D_\omega = -a^2 + 16 \left( \frac{\beta}{2} - \frac{(3n+1)n}{\pi^2(2n+1)^2} \right) \left( \chi^2 \left( \beta - \frac{3(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} \right)^2 + \frac{64(1-3n)^2}{\pi^4 Re^2} + \frac{8(1-3n)\chi}{\pi^3 Re} \left( 2\pi\beta + \frac{6(3n+1)}{(2n+1)\pi} \right) + \frac{4\pi^2 s^2}{L^2} \left( \frac{\beta}{2} - \frac{3n+1}{\pi^2(2n+1)} \right)^2 \right).$$

Далее находится критерий неустойчивости из условия  $\text{Im}(\omega) > 0$  в зависимости от знака выражений  $D_\omega$  и  $a$ . После проведения алгебраических вычислений получен критерий неустойчивости в зависимости от влияния сужения и расширения трубки, который имеет вид:

1.  $n \geq 3/4$

$$\left[ \begin{cases} \beta > \frac{\frac{(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} \left( \frac{(3n+1)\chi}{(2n+1)} - \frac{8(1-n)}{Re} \right)}{\frac{3(3n+1)\chi}{(2n+1)} - \frac{8n}{Re}}, \\ \frac{8n(2n+1)}{3(3n+1)Re} < \chi < \frac{8(3n-1)(2n+1)}{5(3n+1)Re}, \\ \beta > \beta_{div}, \\ \chi > \frac{8(3n-1)(2n+1)}{5(3n+1)Re}; \end{cases} \right.$$

2.  $0 < n < 3/4$

$$\left[ \begin{cases} \beta_{div} < \beta < \frac{\frac{(3n+1)}{\pi^2(2n+1)} \left( \frac{8(1-n)}{Re} - \frac{(3n+1)\chi}{(2n+1)} \right)}{\frac{8n - 3(3n+1)\chi}{Re - (2n+1)}}, \\ \frac{8(3n-1)(2n+1)}{5(3n+1)Re} < \chi < \frac{8n(2n+1)}{3(3n+1)Re}, \\ \beta > \beta_{div}, \\ \chi > \frac{8n(2n+1)}{3(3n+1)Re}. \end{cases} \right.$$

Таким образом, при показателе степени  $n \geq 3/4$ , согласно полученному критерию, трубка может быть только расширенная. При показателе степени  $n < 3/4$  неустойчивость может возникнуть как для трубок с сужением, так и для трубок с расширением. Однако, сужающаяся трубка может быть неустойчива, только при показателе степени  $n < 1/3$ , что соответствуют критерию абсолютной неустойчивости для бесконечной трубки.

Рассмотрим примеры изменения границы неустойчивости в зависимости от слагаемого, отвечающего за сужение или расширение упругой трубки  $\chi$ , и числа Рейнольдса  $Re$ . Сначала рассмотрим сужающуюся трубку. При одинаковом значении числа Рейнольдса  $Re$ , но уменьшающемся значении слагаемого, отвечающего за сужение или растяжение упругой трубки вдоль её длины  $\chi$ , область неустойчивости уменьшается, а затем исчезает вовсе (Рис. 3.16(a)). При фиксированном значении сужения упругой трубки вдоль её длины  $\chi$  и уменьшающемся значении числа Рейнольдса  $Re$  область неустойчивости растёт (Рис. 3.16(b)).

Для расширяющихся трубок с увеличения значения слагаемого, отвечающего за сужение или растяжение упругой трубки вдоль её длины  $\chi$ , и фиксированном числе Рейнольдса  $Re$  область неустойчивости расширяется (Рис. 3.17(a)). В отличии от сужающихся трубок, для расширяющихся трубок при фиксированном расширении упругой трубки вдоль её длины  $\chi$  и уменьшающемся значении числа Рейнольдса  $Re$  область неустойчивости уменьшается (Рис. 3.17(b)).

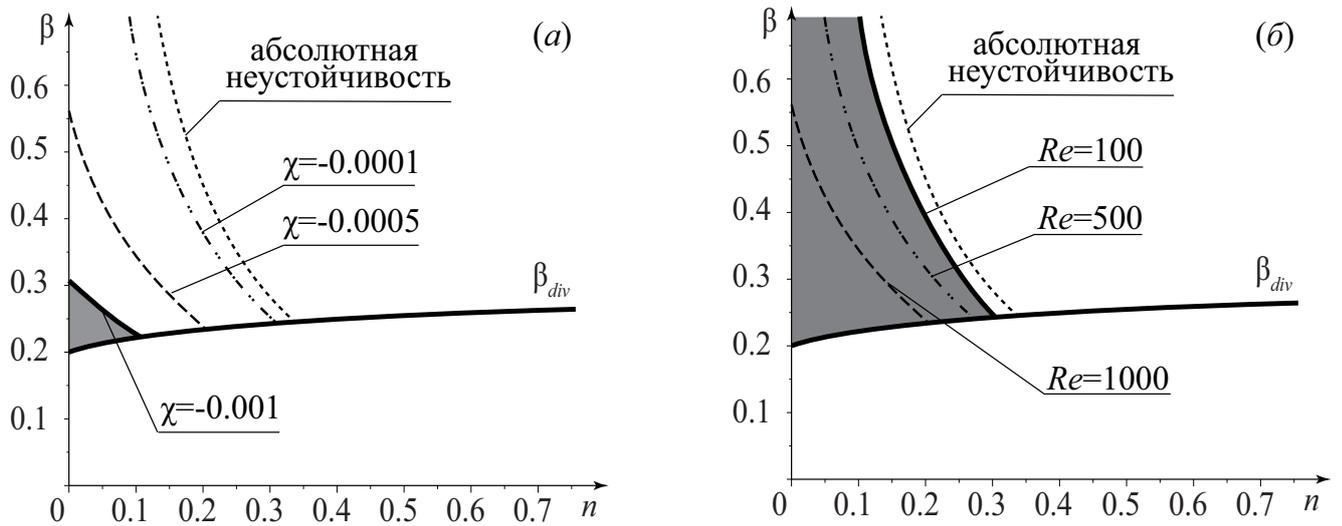


Рисунок 3.16: (а) Область неустойчивости при фиксированном числе Рейнольдса  $Re = 1000$  в зависимости от коэффициента сужения  $\chi$ . (б) Область неустойчивости при фиксированном сужении трубки  $\chi = -0,0005$  и различном числе Рейнольдса  $Re$ .

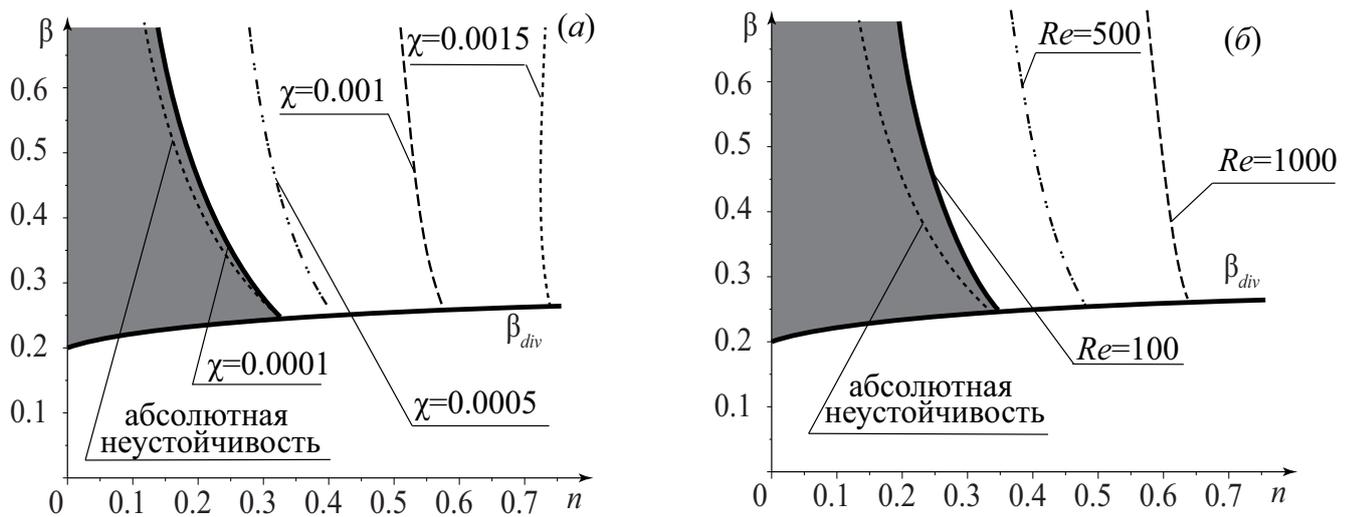


Рисунок 3.17: (а) Область неустойчивости при фиксированном числе Рейнольдса  $Re = 1000$  в зависимости от коэффициента расширения  $\chi$ . (б) Область неустойчивости при фиксированном расширении трубки  $\chi = 0,001$  и различном числе Рейнольдса  $Re$ .

### 3.6 Характеристики устойчивости трубки конечной длины

#### 3.6.1 Критерий устойчивости

Рассмотрим цилиндрическую упругую трубку длиной  $L$ , закрепленную на жестких цилиндрических трубках длиной  $L_1$ ,  $L_2$  с текущей внутри неньютоновской жидкостью (рисунок 3.18).

Дисперсионное уравнение (3.10) для волнового числа  $k$  является уравнением четвертого порядка, поэтому необходимо задать четыре граничных условия. Рассматриваются граничные условия аналогичные, используемым в работе [48].

Во-первых, задается радиус трубки  $R(z) = 1$  при  $z = -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}$ , т.е. в месте закрепления упругого сегмента на жестких трубках. Из уравнения (1.21) эти условия переформулируются в терминах расхода следующим образом:

$$\frac{\partial Q(-\frac{L}{2})}{\partial z} = \frac{\partial Q(\frac{L}{2})}{\partial z} = 0. \quad (3.25)$$

Во-вторых, на концах жестких сегментов ( $z = -L_1 - \frac{L}{2}, \frac{L}{2} + L_2$ ) устанавливаются постоянные давления. Из системы уравнений (1.18)-(1.20) получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{16Q^n}{\pi Re R^{3n-1}} \right) \frac{1}{\pi R^2},$$

откуда давление передается на концы упругих сегментов как:

$$P\left(-\frac{L}{2}, t\right) = P\left(-L_1 - \frac{L}{2}\right) - L_1 \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{16Q^n}{\pi Re R^{3n-1}} \right) \frac{1}{\pi R^2};$$

$$P\left(\frac{L}{2}, t\right) = P\left(\frac{L}{2} + L_2\right) + L_2 \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{16Q^n}{\pi Re R^{3n-1}} \right) \frac{1}{\pi R^2}.$$

После линеаризации с учетом равенства (3.25), данные условия в терминах возмущений имеют вид:

$$P'\left(-\frac{L}{2}\right) = -\frac{L_1}{\pi} \left( \frac{\partial Q'}{\partial t} + \frac{16nQ'}{\pi Re} \right); \quad P'\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L_2}{\pi} \left( \frac{\partial Q'}{\partial t} + \frac{16nQ'}{\pi Re} \right). \quad (3.26)$$

Возмущения давления  $P'(-\frac{L}{2})$ ,  $P'(\frac{L}{2})$ , в свою очередь, могут быть выражены через возмущения расхода  $Q'(-\frac{L}{2})$ ,  $Q'(\frac{L}{2})$  с использованием системы (1.21, 1.22), так что все четыре граничных условия будут выражены через расход.

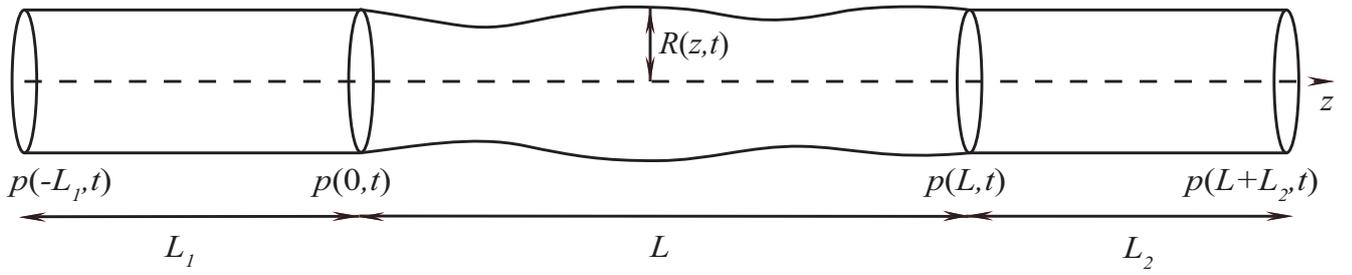


Рисунок 3.18: Осесимметричное возмущение упругой трубки конечной длины

Рассмотрим решение в виде собственных мод:

$$Q(z, t) = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^4 Q_j e^{ik_j(\omega)z},$$

где  $k_j(\omega)$  — четыре различных корня дисперсионного уравнения (3.5), а  $Q_j$  — произвольные постоянные. Подставляя решение в граничные условия (3.25), (3.26), получаем частотное уравнение:

$$\det M = 0, \quad (3.27)$$

где матрица коэффициентов  $M$  имеет вид:

$$\begin{aligned} M_{1j} &= ik_j e^{-ik_j \frac{L}{2}}; \\ M_{2j} &= ik_j e^{ik_j \frac{L}{2}}; \\ M_{3j} &= -\frac{N}{2\pi} ik_j^3 e^{-ik_j \frac{L}{2}} - \frac{L_1}{\pi} \left( \omega^2 + \frac{16ni}{\pi Re} \omega \right) e^{-ik_j \frac{L}{2}}; \\ M_{4j} &= -\frac{N}{2\pi} ik_j^3 e^{ik_j \frac{L}{2}} - \frac{L_2}{\pi} \left( \omega^2 + \frac{16ni}{\pi Re} \omega \right) e^{ik_j \frac{L}{2}}. \end{aligned}$$

Частотное уравнение (3.27) имеет дискретный набор решений  $\omega_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , а критерием устойчивости  $j$ -й моды является  $\text{Im } \omega_j \leq 0$ . Трубка будет устойчива тогда и только тогда, когда устойчивы все моды.

### 3.6.2 Влияние длины трубки на спектр собственных частот

В разделе 3.4 были исследованы кривые, около которых локализуются собственные частоты при  $L \rightarrow \infty$ . Рассмотрим влияние уменьшения длины

упругой трубки  $L$  на расположение собственных частот на  $\omega$ -плоскости и его связь с  $\Omega$ -кривыми.

Для этого на плоскости  $\beta$ - $n$  равномерно выберем точки в разных областях (рис. 3.19). Как и раньше, выбираем безразмерный  $N = 1.5$ ,  $Re = 100$ ,  $m = 0$  и для определенности положим  $L_1 = L_2 = 0$ . Рассмотрим четыре значения длины упругой трубки и обозначим нули определителя матрицы  $M$  (3.27) на плоскости  $\omega$  красными точками при  $L = 200$ , синими крестиками при  $L = 100$ , желтыми звездами при  $L = 50$  и зелеными плюсами при  $L = 10$ .

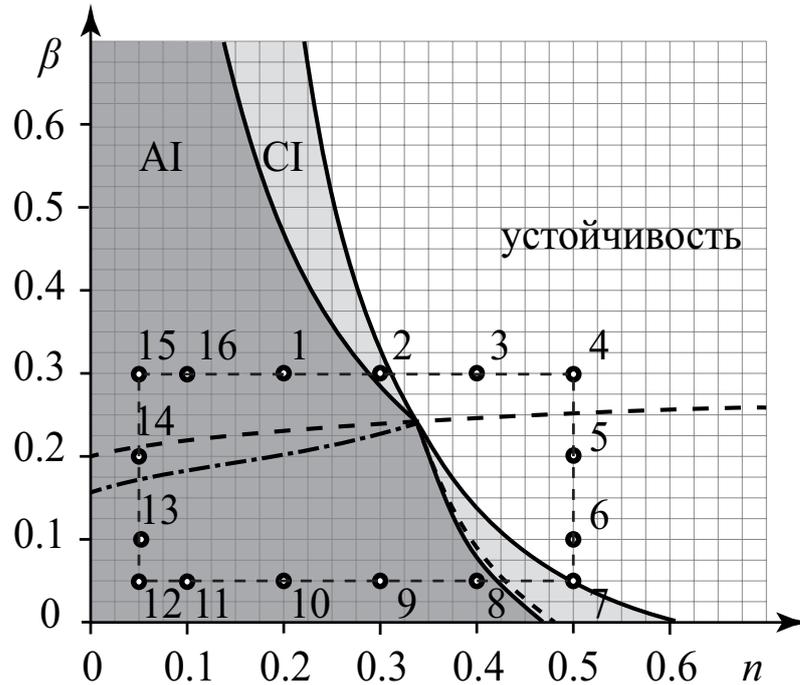


Рисунок 3.19: Области абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости.

Параметры  $\beta$  и  $n$  для полного цикла движения из точки 1 в точку 16.

Для параметров  $\beta = 0.3$  и  $n = 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$  в рассматриваемой области комплексной плоскости  $\omega$  количество собственных частот в четыре раза меньше при  $L = 50$  и в два раза меньше при  $L = 100$  по сравнению с количеством частот при  $L = 200$  на уходящих в бесконечность  $\Omega$ -кривых (рис. 3.20). При этом собственные частоты расположены на  $\Omega$ -кривых.

Когда седловые точки  $\omega_1$  и  $\omega_3$  встречаются и начинают расходиться вдоль мнимой оси, в их окрестности образуются дополнительные собственные частоты (рис. 3.21(a)). Эти частоты удаляются от исходных  $\Omega$ -кривых с уменьшением длины трубки  $L$ . Появление новых собственных частот обусловлено переходом частот из окрестности уходящих на бесконечность  $\Omega$ -кривых по вертикальному

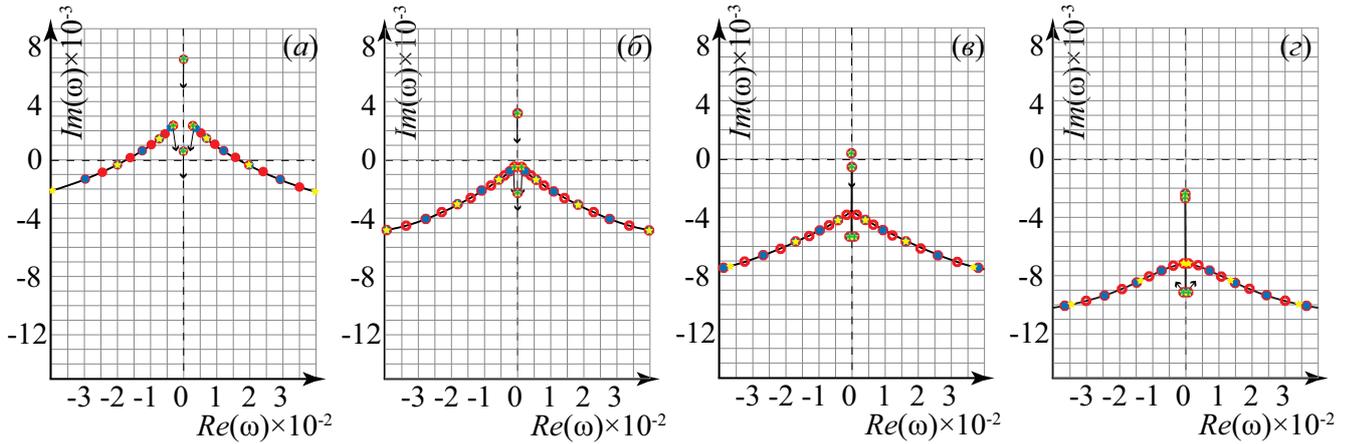


Рисунок 3.20:  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ , (б)  $n = 0.3$ ,  $\beta = 0.3$ , (в)  $n = 0.4$ ,  $\beta = 0.3$ , (г)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.3$ .  $L = 200$  — красные точки,  $L = 100$  — синие кресты,  $L = 50$  — желтые звезды при и  $L = 10$  — зеленые плюсы.

участку  $\Omega$ -кривой. С увеличением длины упругой трубки  $L$  количество передших частот растет.

При дальнейшем уменьшении  $\beta$ , т.е. при дальнейшем расхождении седловых точек и уменьшении длины упругой трубки  $L$ , собственные частоты, лежащие на уходящих на бесконечность  $\Omega$ -кривых, также отдаляются и меняют свою выпуклость (рис. 3.21(а-г)).

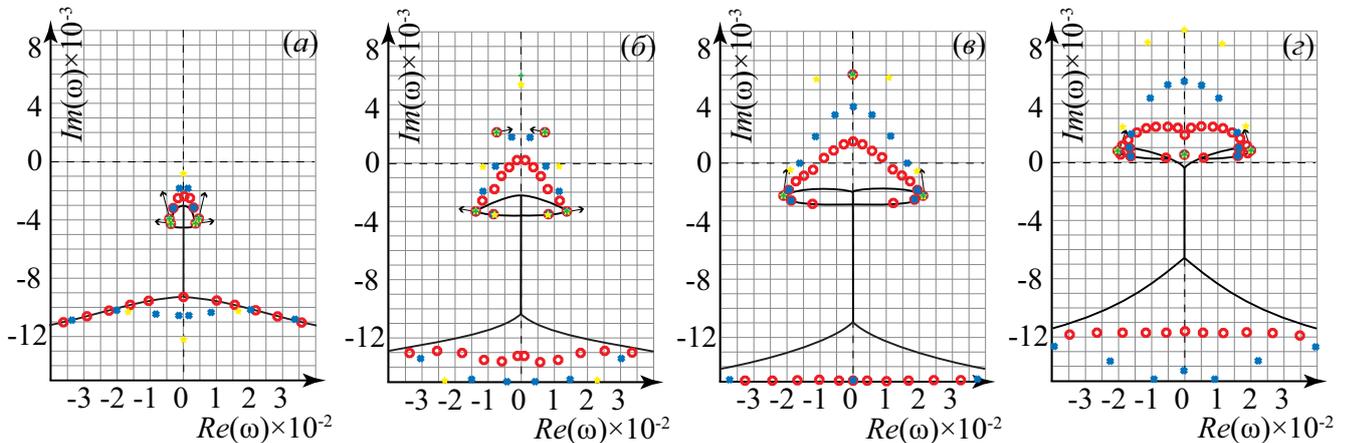


Рисунок 3.21:  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.2$ , (б)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$ , (в)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ , (г)  $n = 0.4$ ,  $\beta = 0.05$ .  $L = 200$  — красные точки,  $L = 100$  — синие кресты,  $L = 50$  — желтые звезды при и  $L = 10$  — зеленые плюсы.

При фиксированном  $\beta = 0.05$  и уменьшении  $n$ , т.е. при сближении седловых точек и увеличении значений их мнимой части, собственные частоты,

соответствующие уходящим на бесконечность  $\Omega$ -кривым, постепенно изменяют свою выпуклость и приближаются к этим  $\Omega$ -кривым (Рис. 3.21(з)), 3.22).

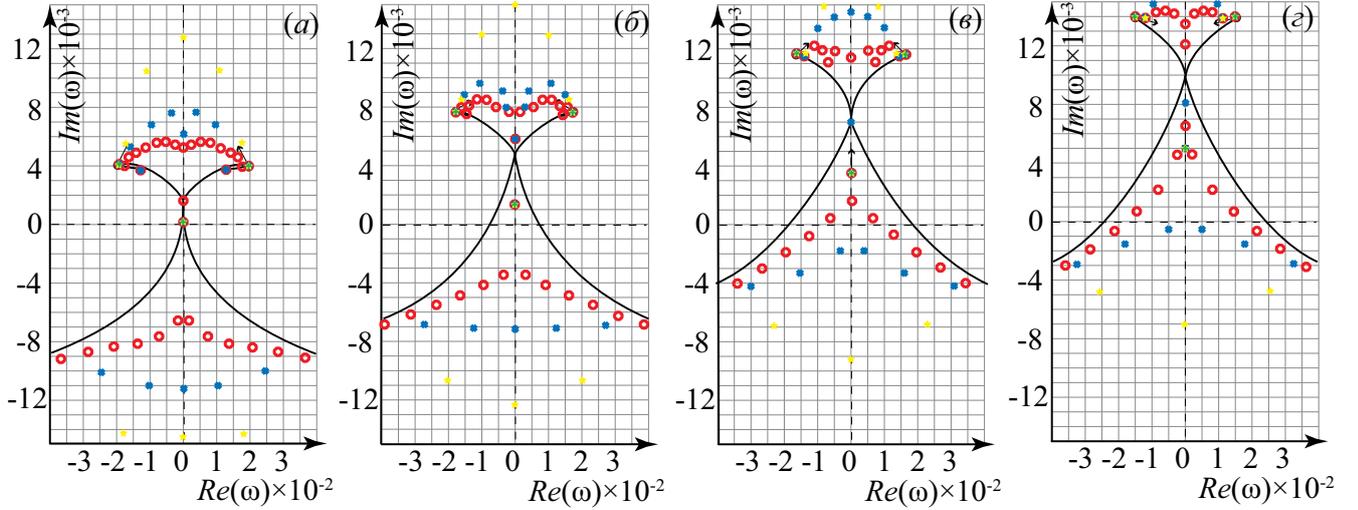


Рисунок 3.22:  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.3$ ,  $\beta = 0.05$ , (б)  $n = 0.2$ ,  $\beta = 0.05$ , (в)  $n = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ , (г)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ .  $L = 200$  — красные точки,  $L = 100$  — синие кресты,  $L = 50$  — желтые звезды при и  $L = 10$  — зеленые плюсы.

Собственные частоты, расположенные в окрестности седловых точек, также приближаются к  $\omega$ -кривым (рис. 3.23(а)).

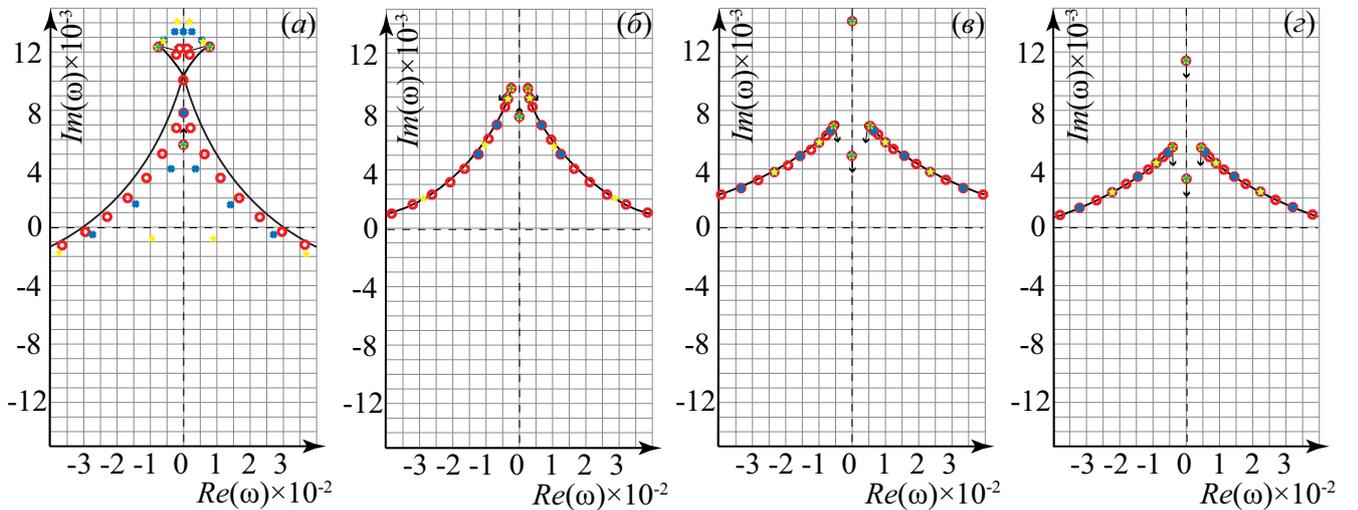


Рисунок 3.23:  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.1$ , (б)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.2$ , (в)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.3$ , (г)  $n = 0.1$ ,  $\beta = 0.3$ .  $L = 200$  — красные точки,  $L = 100$  — синие кресты,  $L = 50$  — желтые звезды при и  $L = 10$  — зеленые плюсы.

Седловые точки встречаются и начинают расходиться при фиксированном  $n = 0.05$  и увеличении  $\beta$ . В этот момент остаются только собственные частоты, которые лежат на  $\Omega$ -кривых, уходящих на бесконечность (рис. 3.23(б-г)).

Отметим, что во всех случаях с  $L = 10$  собственные частоты остаются только в седловых точках. Поскольку такие собственные частоты вырожденные (амплитуда собственной функции равна нулю), то все невырожденные собственные частоты лежат за пределами рассматриваемого участка комплексной плоскости. Остальные частоты становятся гораздо реже и либо не попадают в рассматриваемую область для случая уходящих на бесконечность  $\Omega$ -кривых, либо исчезают для случая  $\Omega$ -кривых, расположенных в окрестности седловых точек.

Кроме того, заметим, что при фиксированном  $n = 0.5$  и уменьшении  $\beta$  имеется вертикальный участок  $\Omega$ -кривой, совпадающий с мнимой осью комплексной плоскости, в окрестности которого малое количество нулей определителя, в частности, они отсутствуют для рассмотренных длин трубки  $L$ . Рассмотрим данный случай подробнее.

При  $L \rightarrow \infty$  главный член определителя (3.27) является произведением экспоненциального множителя

$$e^{-i(k_1(\omega)+k_2(\omega)-k_3(\omega)-k_4(\omega))\frac{L}{2}}$$

и двух миноров матрицы  $M$ : один имеет порядок 2 и занимает левый верхний угол ( $M_2$ ), другой также имеет порядок 2 и занимает правый нижний угол этой матрицы ( $M_{s2}$ ). Следующий по старшинству экспоненциальный член отличается от первого на

$$e^{-i(k_2(\omega)-k_3(\omega))L},$$

а коэффициент при нём является произведением таких же миноров  $M'_2$ ,  $M'_{s2}$  матрицы, получаемой из  $M$  перестановкой 2-го и 3-го столбцов. Таким образом, сохраняя два главных члена в уравнении (3.27), получаем:

$$|M_2||M_{s2}| + |M'_2||M'_{s2}|e^{i(k_2(\omega)-k_3(\omega))L} = 0. \quad (3.28)$$

Обозначим произведение миноров  $A = |M_2||M_{s2}|$  и  $B = |M'_2||M'_{s2}|$ , причем  $A$  и  $B$  являются комплексно-сопряженными. Тогда последнее уравнение удобно переписать в виде:

$$A + Be^{iqL}e^{-\epsilon L} = 0,$$

где  $q = \text{Re}(k_2(\omega) - k_3(\omega))$  и  $\epsilon = \text{Im}(k_2(\omega) - k_3(\omega))$ .

Поскольку необходимо найти частоту, удовлетворяющую уравнению (3.28), то должно выполняться условие  $\text{Im}(k_2(\omega)) = \text{Im}(k_3(\omega))$ , т.е.  $\epsilon = 0$ . Тогда

$$e^{iqL} = -\frac{A}{B} = e^{i(2\text{Arg}(A)+\pi)}.$$

Откуда

$$q = \text{Re}(k_2(\omega) - k_3(\omega)) = \frac{2\text{Arg}(A)}{L} + \frac{\pi(2r+1)}{L}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Далее рассмотрим, например, значения параметров  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$  (рис. 3.21(б)) и  $\omega = -0.006i$ , на вертикальном участке  $\Omega$ -кривой. Тогда значение произведения миноров  $A \approx i$  и  $q \approx -0.644$ . Полученные значения находятся между значений, соответствующих  $r = -20$  и  $r = -21$ . Значению  $r = -20$  соответствуют значения  $\text{Re}(k_2) = 0.314$  и  $\text{Re}(k_3) = -0.314$ , значению  $r = -21$  —  $\text{Re}(k_2) = 0.329$  и  $\text{Re}(k_3) = -0.329$ . Значения  $\omega$ , соответствующие полученным  $k_2, k_3$ , лежат за пределами вертикального участка.

Полученный результат для конкретных значений характерен и для других параметров  $\omega$ ,  $\beta$ ,  $n$  и  $L$  при рассмотрении вертикального участка  $\Omega$ -кривой. Однако, заметим, что существуют параметры  $L$ , при которых несколько частот локализовано в окрестности вертикального участка  $\Omega$ -кривой, что свидетельствует о моменте перехода собственных частот из окрестности  $\Omega$ -кривых, уходящих на бесконечность, в окрестность  $\Omega$ -кривых, лежащих вблизи седловых точек. Отсутствие или малое количество собственных частот локализованных в области вертикального участка  $\Omega$ -кривой связано с очень маленьким значением  $\text{Re}(k)$ , поэтому насыщение этого участка кривой собственными частотами происходит при гораздо больших значениях  $L$ .

### 3.6.3 Метод нахождения областей неустойчивости

Без учета продольного натяжения  $N$  и поверхностной плотности стенки  $m$  (т.е.  $N = m = 0$ ) существует только две пространственные волны и, соответственно, необходимо только два граничных условия (3.25), а матрица  $M$   $4 \times 4$  заменяется на матрицу  $2 \times 2$ . Частотное уравнение в этом случае имеет вид

$$\det M = k_1 k_2 (e^{ik_1 L} - e^{ik_2 L}) = 0 \Leftrightarrow k_1(\omega) - k_2(\omega) = \pm \frac{2\pi j}{L}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.29)$$

Легко заметить, что независимо от длины трубки  $L$ , область неустойчивости для трубки конечной длины совпадает с областью абсолютной неустойчивости для бесконечно длинных трубок  $\beta_{div} < \beta < \beta_{abs}$ ; при этом в случае неустойчивости все моды растущие. Отметим, что задача для трубок конечной длины при  $\beta < \beta_{div}$  и  $N = m = 0$  некорректна, поскольку обе пространственные волны распространяются вниз по потоку, и оба граничных условия должны быть заданы на входе, вместо одного на входе и другого на выходе, как при  $\beta > \beta_{div}$ .

### 3.6.4 Области неустойчивости упругой трубки конечной длины

Для нахождения области неустойчивости при  $N > 0$ ,  $m > 0$  задача решается численно следующим образом. Сначала выбираются значения  $n$  и  $\beta$  при  $0 < n < 1/3$ ,  $\beta_{div}(n) < \beta < \beta_{abs}(n)$  и вычисляется  $j$ -ая собственная частота  $\omega_j(0, m)$  при  $N = 0$ ,  $m = 0$  из уравнения (3.29). Область  $\beta < \beta_{div}(n)$  далее не рассматривается, так как она соответствует сильно неустойчивому состоянию, в котором длины волн имеют порядок  $\sim \sqrt{N/Re}$ , т.е. соответствуют коротким волнам, что противоречит предположениям, при которых построена модель. Затем, взяв это значение  $\omega_j(0, 0)$  за начальное, постепенно увеличиваются  $N$  и  $m$  до желаемого значения и численно вычисляем  $\omega_j(N, m)$  для  $N \neq 0$ ,  $m \neq 0$  при тех же  $n$ ,  $\beta$ . Затем, начиная с этого значения,  $n$  и  $\beta$  изменяются для нахождения границы устойчивости  $j$ -й моды в плоскости  $(n, \beta)$  при заданных  $N$ ,  $m$ . Кроме того, можно изменить значения длин упругой  $L$  и жестких  $L_1, L_2$  трубок и значение числа Рейнольдса  $Re$ .

В ниже приведенных расчетах рассмотрена первая мода колебаний. Проследим влияние различных параметров на область неустойчивости описанным выше методом.

Сначала зафиксируем длины трубок, число Рейнольдса и будем постепенно увеличивать продольное натяжение. При его увеличении область неустойчивости сужается по ширине с увеличением значения продольного натяжения  $N$ . Например, это показано на рисунке 3.24(a) для  $Re = 100$ ,  $L = 10$  и  $L_1 = L_2 = 0$ .

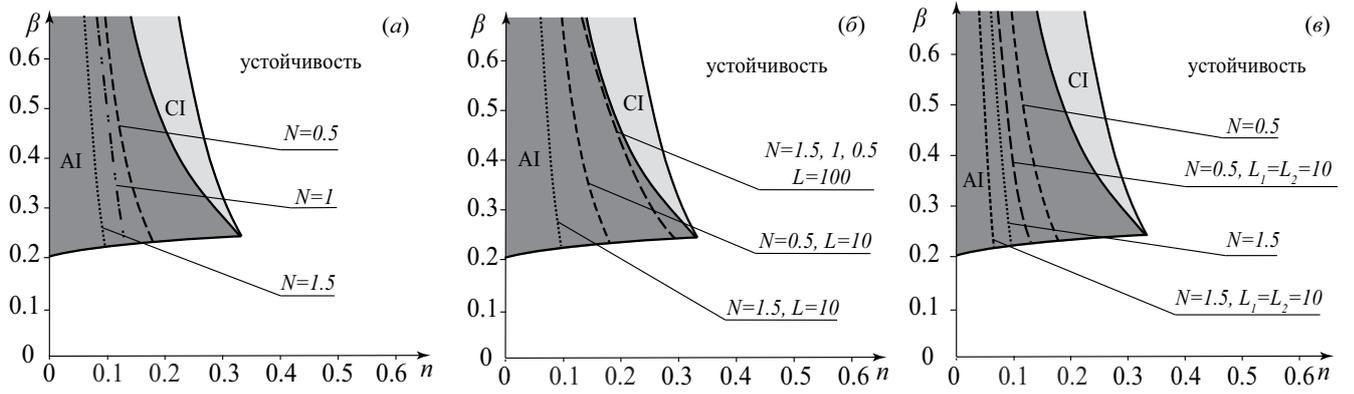


Рисунок 3.24: (а) Область неустойчивости при  $L = 10$ ,  $Re = 100$ ,  $L_1 = L_2 = 0$ . (б) Область неустойчивости при  $Re = 100$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  и различных  $L$ . (в) Область неустойчивости при  $L = 10$ ,  $Re = 100$  и различных  $L_1, L_2$ .

Затем фиксируем длины трубок и отслеживаем влияние числа Рейнольдса  $Re$  и поверхностной плотности  $m$  для различных значений продольного натяжения  $N$ . Численно проверено, что изменения числа Рейнольдса  $Re$  и поверхностной плотности  $m$  практически не влияют на границу неустойчивости.

Увеличение длины упругой трубки имеет дестабилизирующий эффект, иными словами, область неустойчивости больше для более длинных трубок при неизменном продольном натяжении  $N$  (рис. 3.24(б)). Как и ожидалось, рассчитанная граница неустойчивости длинных трубок ( $L = 100$ ) практически совпадает с границей глобальной неустойчивости, которая при  $\beta > \beta_{\text{div}}$  совпадает с границей абсолютной неустойчивости бесконечно длинных трубок независимо от продольного натяжения  $N$ .

При изменении длины жестких входных и выходных трубок и фиксированном значении продольного натяжения  $N$  область неустойчивости тем больше, чем меньше длина жестких трубок. Этот результат продемонстрирован на рисунке 3.24(в), где длины жестких трубок  $L_1, L_2$  изменялись от 0 до 10 при фиксированном продольном натяжении  $N = 0.5$  или  $N = 1.5$ .

### 3.7 Выводы

Анализ локальной устойчивости показал, что для длинных волн осесимметричная неустойчивость возможна только при  $n < 0,611$ , тогда как короткие волны стабилизируются небольшим натяжением трубки, которое почти всегда

присутствует. Было получено, что без учета натяжения трубки абсолютная неустойчивость возможна только при  $n < 1/3$ . Граница абсолютной неустойчивости при учете продольного натяжения найдена численно.

Было установлено, что критерий глобальной неустойчивости конечной трубки большой длины практически совпадает с критерием абсолютной неустойчивости, за исключением небольшого участка в области перехода из нижней части области конвективной неустойчивости в область абсолютной неустойчивости.

Для определения области неустойчивости упругой трубки произвольной длины без учета продольного натяжения задача решалась аналитически, а с учетом продольного натяжения — численно.

Показано, что в независимости от длины  $L$  область неустойчивости для трубки конечной длины при  $N = m = 0$  совпадает с областью абсолютной неустойчивости для трубок бесконечной длины.

В общем случае, с увеличением продольного натяжения  $N$  сужается диапазон показателей реологического закона, соответствующий неустойчивости. Область неустойчивости больше для более длинных упругих трубок с меньшими длинами входных и выходных жёстких трубок. Изменение числа Рейнольдса  $Re$  и поверхностной плотности  $m$  практически не влияет на границу неустойчивости.

Подчеркнём, что найденная неустойчивость, существующая только в случае псевдопластических жидкостей, не связана с неосесимметричными схлопываниями трубки, всегда наблюдаемыми в экспериментах по неустойчивости упругих трубок с линейно-вязкими жидкостями, и может происходить при положительных трансмуральных давлениях.

## Глава 4. Экспериментальное исследование влияния режима потока на устойчивость упругих трубок

В предыдущей главе показано, что течение псевдопластических жидкостей в упругих трубках может быть неустойчивым по отношению к осесимметричным возмущениям, в том числе при повышенных внутренних давлениях. При этом данная неустойчивость отсутствует при течении ньютоновских жидкостей в упругой трубке, но возникает другая форма потери устойчивости, связанная с понижением давления в окрестности конца трубки и её неосесимметричными схлопываниями. В данной главе рассматривается именно эта форма потери устойчивости. Как показано в обзоре литературы, существует большое количество экспериментальных исследований упругих трубок с турбулентным потоком внутри, хотя в биологических приложениях течение является ламинарным. Поэтому целью данной главы является проведение экспериментальных исследований по выявлению влияния режима течения на устойчивость.

### 4.1 Характеристики экспериментального исследования

#### 4.1.1 Описание экспериментального метода

Известно, что существует ряд ламинарных и турбулентных режимов с равными коэффициентами сопротивления (рис. 4.1). Эти эквивалентные по своим интегральным свойствам режимы соответствуют разным числам Рейнольдса и, для одной и той же жидкости, разным средним скоростям. Следовательно, размерные перепады давления не равны, что приводит к различным формам внутренней поверхности упругой трубки. Тем не менее, можно выбирать различные жидкости с одинаковыми перепадами давления и одинаковой средней скоростью таким образом, чтобы их числа Рейнольдса соответствовали  $Re_l$  и  $Re_t$ , см. рис. 4.1. В результате эти потоки будут «эквивалентными», и единственным различием будет режим течения: ламинарный или турбулентный. Чтобы организовать такие эквивалентные потоки для данной скорости потока, были

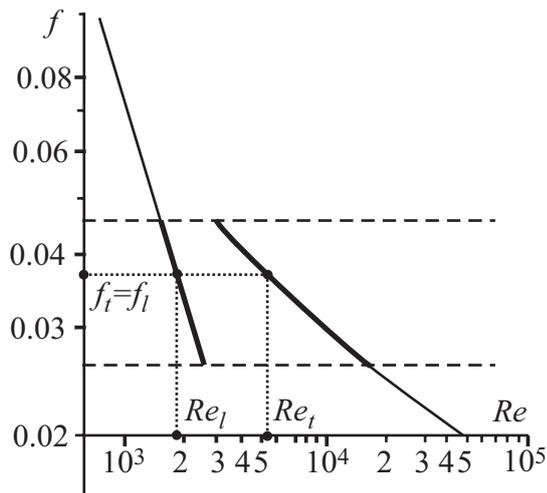


Рисунок 4.1: Коэффициент сопротивления  $f$  в жесткой трубе в зависимости от числа Рейнольдса

использованы растворы воды и глицерина, которые обеспечивают равный перепад давления и трансмуральное давление, что гарантирует сходство форм трубок. Затем было проведено сравнение результатов в одной и той же упругой трубке для турбулентного потока воды и ламинарного потока раствора глицерина, которые равны по всем интегральным параметрам.

#### 4.1.2 Экспериментальная установка

Экспериментальное исследование проводилось на установке, предназначенной для циркуляции жидкости в замкнутом контуре, Рис. 4.2. Установка состоит из тонкостенной эластичной трубки Пенроуза диаметром 10 мм, длиной 44 см и толщиной  $0.3 \pm 0.02$  мм, натянутой между двумя жёсткими трубками одинакового диаметра и помещенной в камеру; сливного и основного резервуаров; насоса; расходомера; датчиков перепада давления; двух камер. Внешнее давление  $p_e$  в камере постоянно. Камера сделана из стекла и заполнена водой для предотвращения провисания упругой трубки. Насос контролируется автоматически датчиком уровня жидкости в сливном баке. Жёсткая входная трубка длиной 1 м обеспечивает устойчивые ламинарный и турбулентный потоки во всех экспериментах.

Заметим, что выбранный диаметр и длина эластичной трубки приблизительно совпадают с диаметром [120] и длиной части системы кровообращения

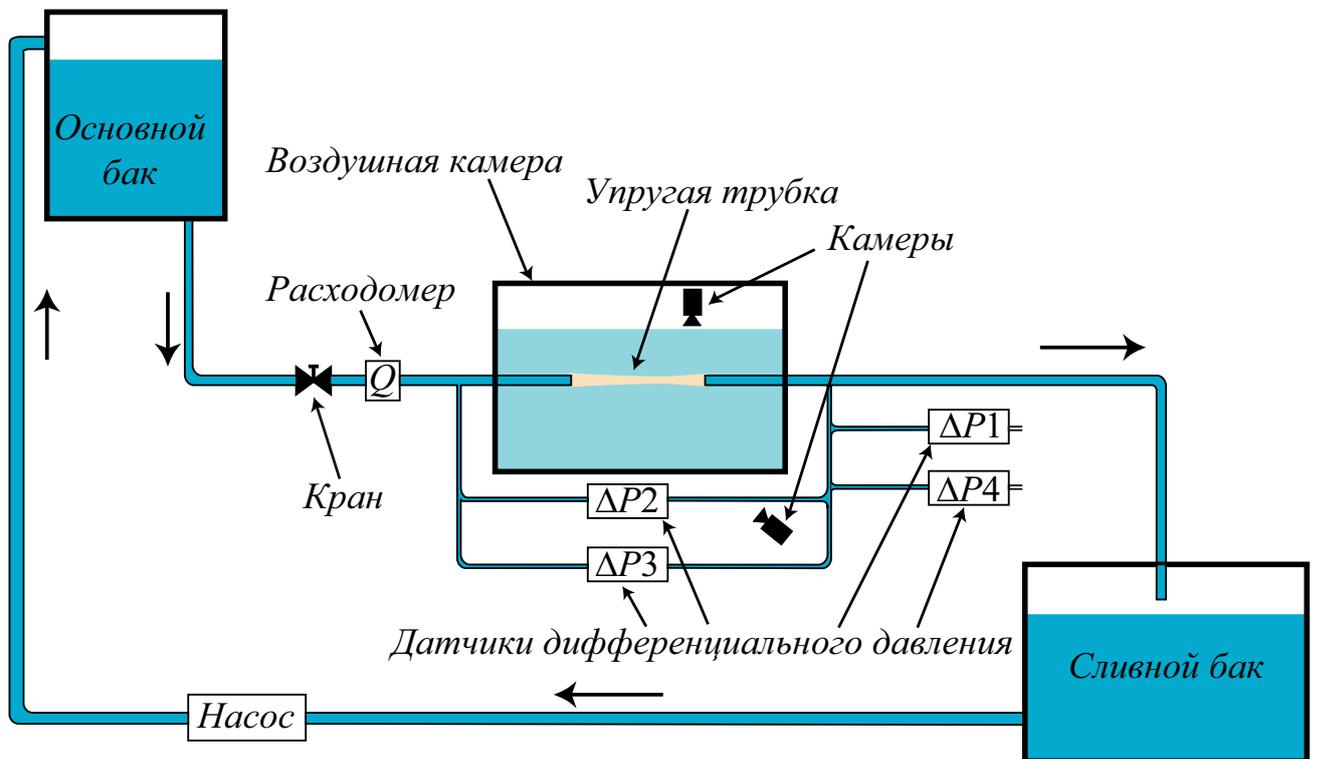


Рисунок 4.2: Установка для исследования колебаний упругих трубок с протекающей внутри жидкостью.

человека, состоящей из бедренной и поверхностной бедренной артерий. Поскольку этот отдел кровообращения относится к достаточно крупным артериям, кровь можно моделировать ньютоновской жидкостью.

Рабочая жидкость протекает по замкнутому контуру. Жидкость закачивается насосом в основной бак на высоту 12 метров и оттуда самотёком поступает в тонкостенную эластичную трубку. Средний расход жидкости изменяется при помощи крана и измеряется датчиком расхода (ультразвуковым расходомером Карат 520 с относительной погрешностью измерения 1 % от выходного значения). Далее рабочая жидкость протекает через упругую трубку, сливной шланг и попадает в сливной бак, замыкая цикл. Рабочая жидкость внутри упругой трубки протекает за счет перепада давления  $\Delta p = p_1 - p_2$  (перепад давления вверх  $p_1$  и вниз  $p_2$  по потоку). Перепад давления в трубке изменяется в зависимости от расхода  $Q$  или давления вниз по потоку  $p_2$ . В свою очередь, давление в выходном сечении  $p_2$  изменяется в зависимости от положения сливного шланга. Два датчика перепада давления (датчики VD dmp331 и KORUND-DDN-001M с рабочим диапазоном давления 100 кПа и 10 кПа и погрешностью измерения 500 Па и 100 Па, соответственно), фиксируют перепад давления между входным и выходным сечениями упругой трубки. Другая пара датчиков дифференци-

ального давления фиксирует разницу между давлением в выходном сечении упругой трубки  $p_2$  и атмосферным давлением  $p_a$ . Расстояние от упругой трубки до точки забора давления  $p_1$  составляет 0,5 м, а до точки забора давления  $p_2$  — 0,3 м. Внешнее давление  $p_e$  может контролироваться уровнем воды в камере; во всех проделанных экспериментах  $p_e = p_a + 883\text{Па}$ .

Две видеокамеры, расположенные над трубкой и сбоку, позволяют получать данные об изменении геометрии эластичной трубки при различных режимах течения.

Для проверки работы установки вместо секции упругой трубы была вставлена жесткая трубка, совпадающая по длине с упругой трубкой. Затем была проведена серия экспериментов для нахождения зависимости сопротивления от числа Рейнольдса для ламинарного и турбулентного режимов течения. Хорошее соответствие между экспериментальными и теоретическими данными было получено для жёсткой трубки.

### 4.1.3 Рабочая жидкость

Как указано в разделе 4.1.1, цель экспериментального исследования состоит в том, чтобы определить и изучить влияние режима течения на границу устойчивости и колебания трубки. Были организованы два потока с одинаковым расходом: турбулентный поток воды и ламинарный поток раствора глицерина, которые обеспечивают равные перепады давления  $p_1 - p_2$  и  $p_2 - p_e$ . Поскольку трубки использовались одинаковые, то эти два потока являются “эквивалентными”. Другими словами, расход, давления и форма трубки одинаковые, а различие заключается только в режиме течения. Как видно из рис. 4.1, это условие может быть выполнено только в том случае, если выполняется конкретное соотношение между расходом и вязкостью раствора глицерина, т.е. для каждого расхода необходимо использовать разные растворы. Установление данной зависимости приводится ниже.

Обозначим ламинарный поток индексом  $l$ , а турбулентный поток индексом  $t$ . Предполагается, что средние скорости  $v_{av}$  и перепады давления  $\Delta p$  одинаковы для ламинарных и турбулентных течений. Значение коэффициента сопротивления для потока в трубке в зависимости от перепада давления определяется как

$$f = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v_{av}^2} \frac{D}{L}, \quad (4.1)$$

где  $D$  — диаметр трубки, а  $L$  — длина трубки.

Далее была проведена серия экспериментов для турбулентного режима течения с целью определения коэффициента турбулентного сопротивления в упругой трубке. В качестве рабочей жидкости использовалась вода. Число Рейнольдса  $Re$  находится в диапазоне от 4000 до 8000. Экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления в упругой трубе от числа Рейнольдса показана на рисунке 4.3(а) (точки). Теоретическое значение коэффициента сопротивления для жесткой трубки рассчитывается по эмпирическим формулам Блазиуса [127] и Филоненко [128]:

$$f_{Bl} = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}; \quad f_F = (1.82 \log(Re) - 1.64)^{-2}. \quad (4.2)$$

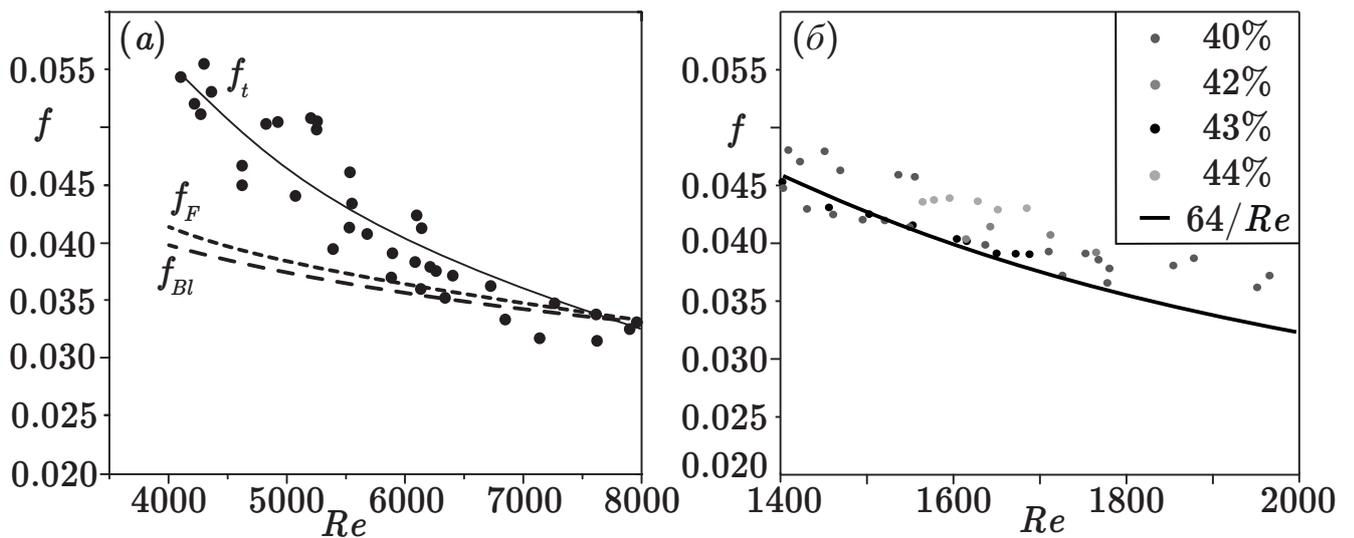


Рисунок 4.3: (а) Значение коэффициента сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса для турбулентного течения. Эмпирические кривые Блазиуса  $f_{Bl}$  и Филоненко  $f_F$ ;  $f_t$  — аппроксимация полученных экспериментальных данных. (б) Коэффициент сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса для ламинарного течения жидкости с различной вязкостью.

Видно, что коэффициент трения для случая упругой трубки существенно отличается от коэффициента трения для жесткой трубки. В дальнейшем будет использоваться степенное приближение  $f_t = 30.822/Re^{0.762}$  экспериментальных данных. Эти результаты подтверждают данные других авторов. В работе [129] авторы продемонстрировали, что ламинарно-турбулентный переход происходит не из-за медленного изменения диаметра трубки, а из-за упругих эффектов.

Данный результат был получен при помощи демонстрации ламинарно-турбулентного перехода в более жесткой гелевой трубке той же формы, что и у деформируемой трубки. Граница ламинарно-турбулентного перехода в жесткой гелевой трубке совпала с теоретической границей перехода для цилиндрической трубки. Впоследствии, авторы работы [130] продемонстрировали влияние упругости на деформируемые трубки, изготовленные из полидиметилсилоксановых гелей с различными модулями сдвига. В этих исследованиях коэффициент сопротивления, полученный для турбулентного потока в упругой трубке, был существенно больше, чем в жесткой трубке, что соответствует результатам, полученным в данной работе.

Приравнивая значение перепада давления для турбулентного и ламинарного течений и учитывая, что экспериментально полученный коэффициент сопротивления для ламинарного потока в упругой трубе корректно соотносится с теоретическим коэффициентом сопротивления для жесткой трубки,  $f_l = 64/Re$  (см. 4.3б), и, выражая среднюю скорость через скорость потока, получено

$$Q = \frac{\pi D}{4} \left( \frac{64\nu_l \rho_l}{30.822 \rho_t \nu_t^{0.762}} \right)^{\frac{1}{0.238}}. \quad (4.3)$$

Учитывая, что вязкость и плотность водного раствора глицерина при температуре  $20^\circ C$  являются известными функциями концентрации, формула (4.3) определяет требуемую вязкость (концентрацию) водного раствора глицерина для каждого расхода, гарантируя, что перепад давления такое же, как и в соответствующем турбулентном потоке воды.

Также необходимо, чтобы расход (4.3) соответствовал турбулентному диапазону чисел Рейнольдса для случая с водой в качестве рабочей жидкости и ламинарному диапазону для случая с раствором глицерина, т.е.

$$Q_t < Q < Q_l. \quad (4.4)$$

Функция расхода имеет вид:

$$Q_{l,t} = \frac{Re_{l,t} \nu_{l,t} \pi D}{4},$$

где значение  $Re_t = 4000$  взято как минимальное число Рейнольдса, которое гарантирует развитый турбулентный режим, а  $Re_l = 1800$  — как максимальное число Рейнольдса, которое гарантирует ламинарный поток. Расход (4.3) в

зависимости от концентрации раствора глицерина показана на рис.4.4(*а*). Таким образом, диапазон расхода от 1,9 до 3,2 л /мин и концентрация водного раствора глицерина от 40% до 44% при температуре 20°С являются необходимыми условиями для эквивалентности ламинарного и турбулентного потоков, которые исследуются в экспериментах.

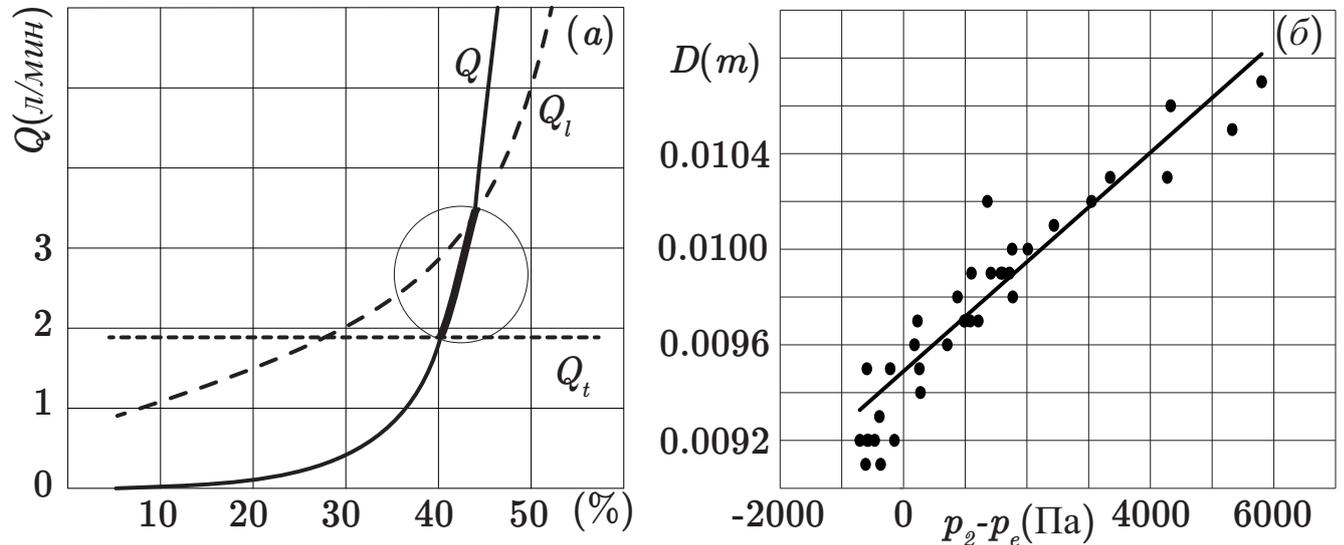


Рисунок 4.4: (*а*) Расход (4.3) в зависимости от концентрации водного раствора глицерина; часть кривой, удовлетворяющая условию (4.4), выделена жирным. (*б*) Пример зависимости диаметра трубки от давления на выходе.

#### 4.1.4 Диаметр упругой трубки

Поскольку в экспериментах используется трубка из упругого материала, ее диаметр варьируется в зависимости от трансмурального давления. Была проведена серия экспериментов для определения диаметра упругой трубки в зависимости от выходного давления. Экспериментальные данные с среднеквадратическим отклонением 0,00019 м, вызванным различием образцов упругих трубок при различных условиях течения, были аппроксимированы соотношением  $D = 2 \times 10^{-7}(p_2 - p_e) + 0,0094$  (рис. 4.4б).

## 4.2 Результаты

### 4.2.1 Режимы колебаний

Когда перепад давления  $\Delta p = p_1 - p_2$  увеличивается при постоянных расходах  $Q$  и трансмуральном давлении  $p_2 - p_e$ , упругая трубка теряет устойчивость при прохождении некоторого критического значения  $\Delta p_{cr}$ , и начинаются колебания. Статическая неустойчивость, предшествующая колебаниям, либо не была обнаружена, либо (при малых расходах) имела пренебрежимо малый диапазон перепадов давления, так что ей можно пренебречь при дальнейших рассмотрениях.

По результатам экспериментов были выявлены четыре типа колебаний; результирующие графики показаны на рисунке 4.5(*a - г*). Один ярко выраженный пик присутствует во всех режимах колебаний и соответствует резкому увеличению и последующему уменьшению перепада давления. После основного пика наблюдаются четыре, три, два или одно небольшое изменение перепада давления для четвертого (Рис. 4.5*a*), третьего (Рис. 4.5*б*), второго (Рис. 4.5*в*) и первого (Рис. 4.5*г*) типов колебаний соответственно.

### 4.2.2 Неустойчивость упругой трубки с турбулентным течением внутри

Сначала проводятся эксперименты для турбулентного режима течения в диапазоне расходов  $Q = 2,2 - 4$  л/мин с шагом 0,2 л/мин, а в качестве рабочей жидкости используется вода. При фиксированном расходе давление вверх по течению  $p_1$  остается неизменным, а выходное давление  $p_2$  изменяется в зависимости от положения выходного отверстия сливного шланга. В результате перепад давления постепенно увеличивается до тех пор, пока не начнутся колебания, т.е. произойдет переход через границу устойчивости. Затем происходит резкий скачок перепада давления и начинаются колебания третьего типа. При дальнейшем увеличении перепада давления наблюдаются области режимов ко-

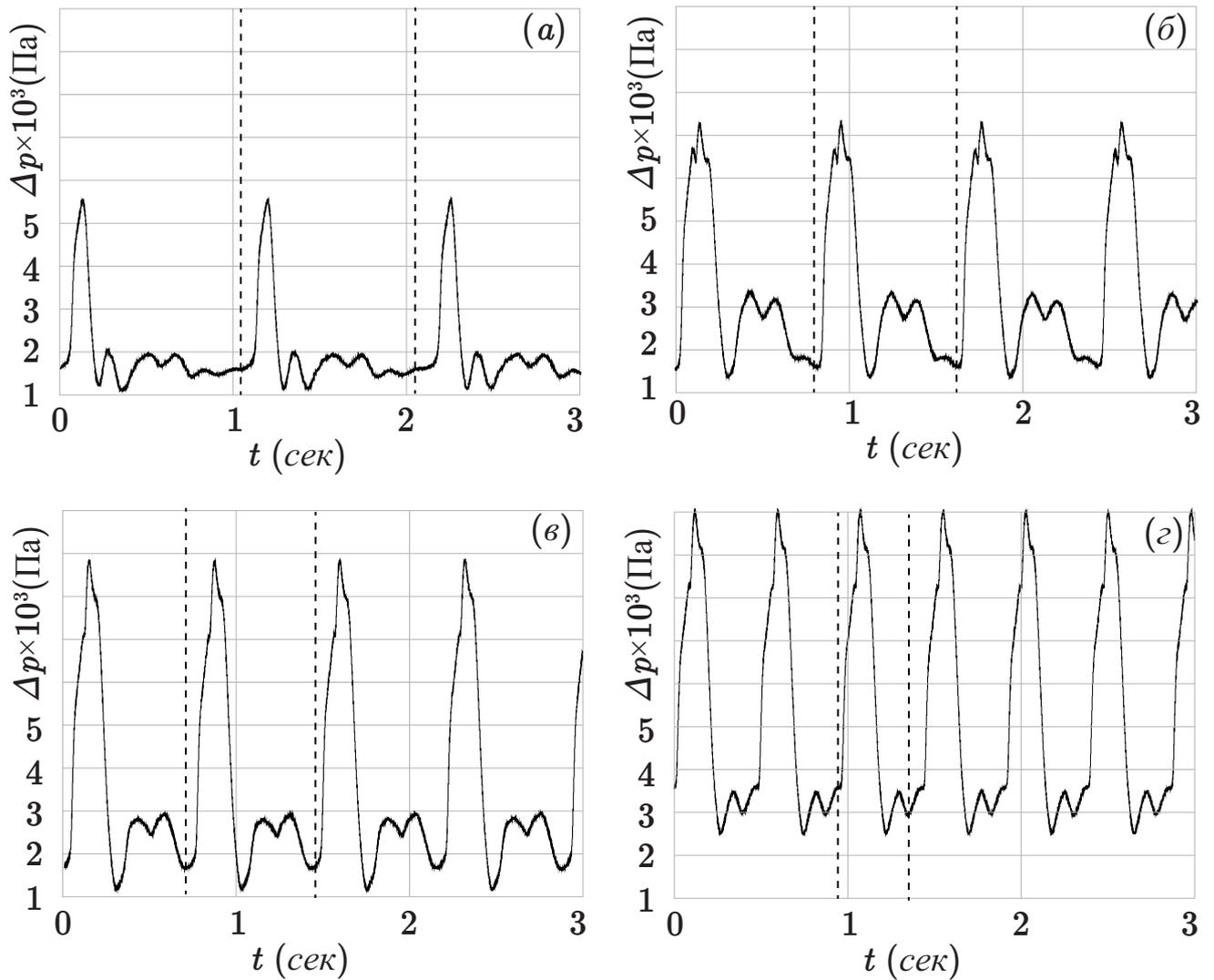


Рисунок 4.5: Четыре типа колебаний, наблюдаемых по показаниям перепада давления.

колебаний, ранее определенные в разделе (4.2.1): за третьим режимом следует второй, а затем, при большем перепаде давления, реализуется первый режим колебаний.

Области режимов колебаний, описанные выше, показаны на рис. 4.6а. В качестве альтернативного варианта, диапазон режимов колебаний также может быть определен по давлению на выходе  $p_2$  в зависимости от расхода, рис. 4.6б. Отметим, что невозможно выделить область устойчивости и третий тип колебаний только по измерениям  $p_2$ .

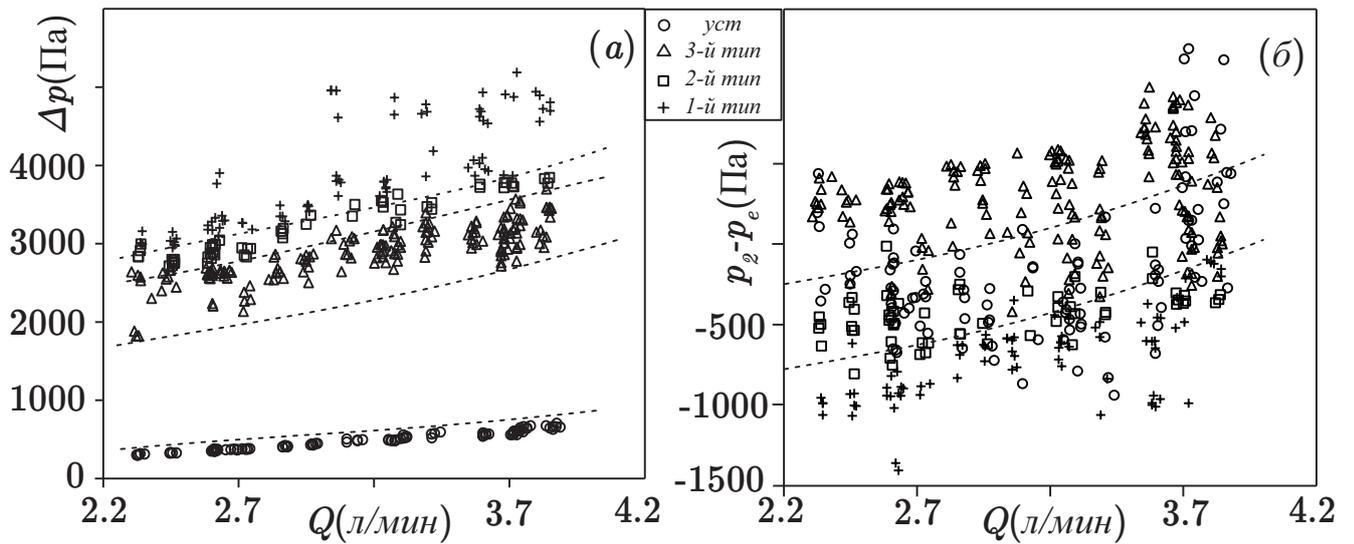


Рисунок 4.6: (а) Перепад давления в зависимости от расхода для турбулентного течения. (б) Давление на выходе в зависимости от расхода для турбулентного течения.

### 4.2.3 Неустойчивость упругой трубки с ламинарным течением внутри

Эксперименты для ламинарного течения внутри упругой трубки проводятся таким же образом, как и для турбулентного режима течения. Однако акцент делается на выявление влияния вязкости. В качестве рабочей жидкости используются водные растворы глицерина с процентным содержанием 42%, 43% и 44%, а расход варьируется от 2.3 л/мин до 2.7 л/мин.

После потери устойчивости происходит небольшой скачок перепада давления и начинаются колебания четвертого типа. Затем снова происходит небольшой скачок перепада давления, и упругая трубка начинает колебаться в соответствии с третьим типом с дальнейшим увеличением падения давления. После колебания переходят во второй режим, а затем в первый режим с дальнейшим увеличением перепада давления.

Разделение на области по типам колебаний показано на рисунке 4.7(а). Видно что, что небольшое изменение вязкости не влияет на границу перехода между режимами колебаний.

Как и в случае турбулентного потока, диапазоны режимов колебаний можно определить и на зависимости давления на выходе  $p_2$  в зависимости от

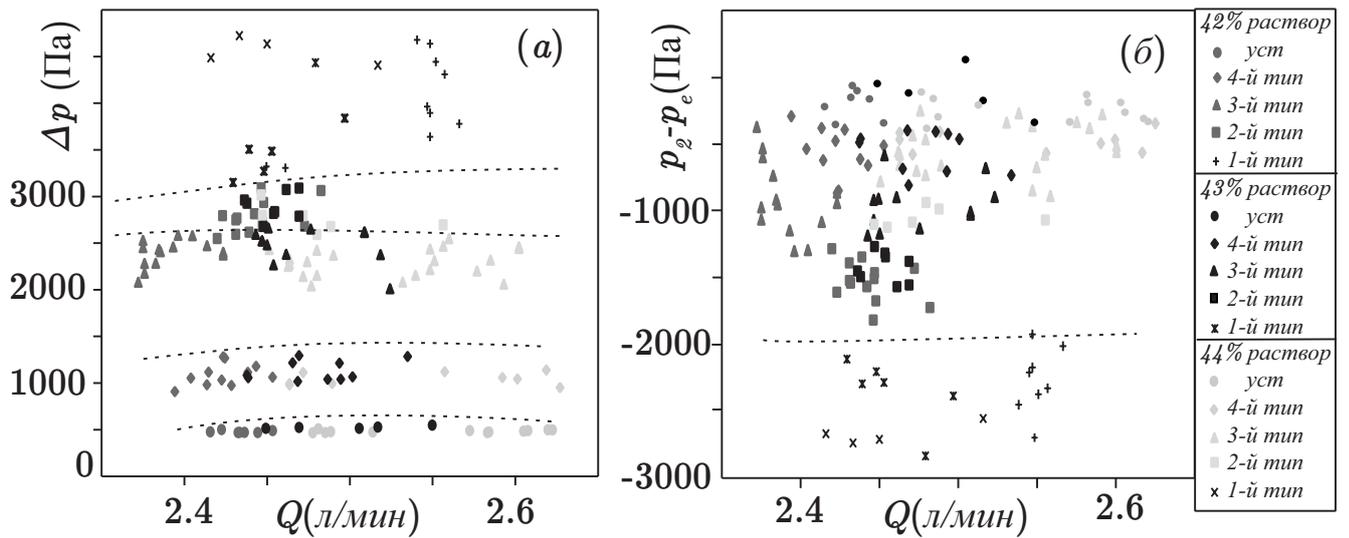


Рисунок 4.7: (а) Перепад давления в зависимости от расхода для ламинарного течения. (б) Давление на выходе  $p_2$  в зависимости от расхода для ламинарного течения.

расхода, рис. 4.7б. Однако невозможно разделить область устойчивости и четвертый тип колебаний только при помощи измерений  $p_2$ .

Отметим, что четвертый режим колебаний характерен только для ламинарных течений и не наблюдается при турбулентном течении. Более того, видно, что в терминах  $\Delta p$  переход от устойчивости к колебаниям происходит в ламинарном потоке более плавно благодаря появлению четвертого типа колебаний.

#### 4.2.4 Сравнение режимов неустойчивости ламинарного и турбулентного режимов течения

Поскольку ранее в разделе 4.2.3 было показано, что небольшое изменение вязкости не оказывает существенного влияния на границу устойчивости, было проведено сравнение при ламинарном режиме течения только для одного раствора глицерина, имеющего концентрацию 43%, с водой при турбулентном режиме.

На рисунках 4.6а, 4.7а видно, что потеря устойчивости при турбулентном режиме потока происходит при меньшем перепаде давления, чем при ламинарном режиме, т. е. ламинарный поток более устойчив. Затем происходит резкое увеличение перепада давления при турбулентном режиме и наблюдаются коле-

бания третьего типа. В то же время колебания упругой трубки с ламинарным потоком внутри происходят согласно четвертому типу и только при дальнейшем увеличении перепада давления переходят у третьему типу.

Третий тип колебаний реализуется при примерно одинаковых перепадах давления для обоих режимов течения. Колебания упругой трубки переходят ко второму типу при дальнейшем увеличении перепада давления, а граница перехода от третьего типа ко второму соответствует почти одинаковым перепадам давления для турбулентных и ламинарных течений. Однако переход к первому режиму для турбулентного потока происходит при меньшем перепаде давления, чем для ламинарного потока.

Наблюдаемые области режимов колебаний упругой трубки для ламинарного и турбулентного потока при одинаковых расходах показаны на рисунке 4.8.

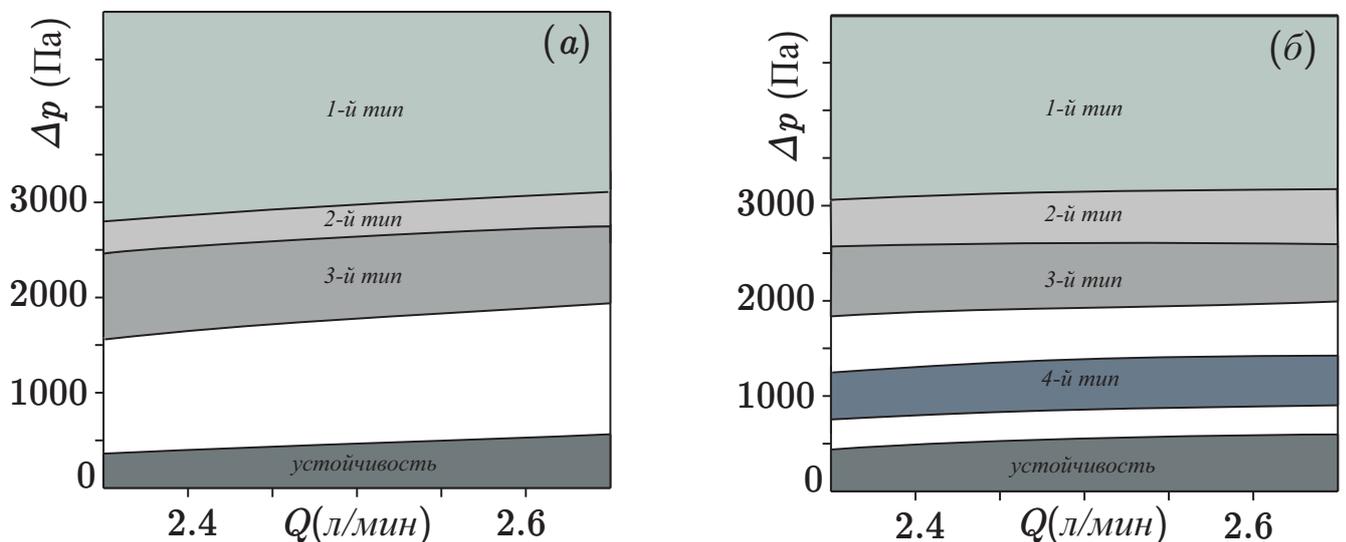


Рисунок 4.8: Перепад давления в зависимости от расхода для (а) турбулентного и (б) ламинарного течения.

Далее перейдем к сравнению частот колебаний для ламинарного и турбулентного течений при одинаковых режимах колебаний. Упругая трубка колеблется с частотой почти 1,19, 1,18, 1,43 (рис. 4.9 (а, в, д)) для турбулентного потока при третьем, втором и первом типе колебаний, соответственно, и с частотой почти 1,13, 1,31, 1,56 (рис. 4.9 (б, г, е)) при тех же режимах для ламинарного течения. Следовательно, частота колебаний упругой трубки с ламинарным потоком увеличивается при переходе между режимами колебаний существенно, чем с турбулентным потоком внутри. Частота третьего типа колебаний больше для турбулентного режима, а частота второго и первого типа — для ламинарных режимов.

Основываясь на перепадах давления на рисунке 4.9 (и аналогичных измерениях), получено, что амплитуда колебаний для турбулентного потока выше, чем для ламинарного потока для всех режимов колебаний.

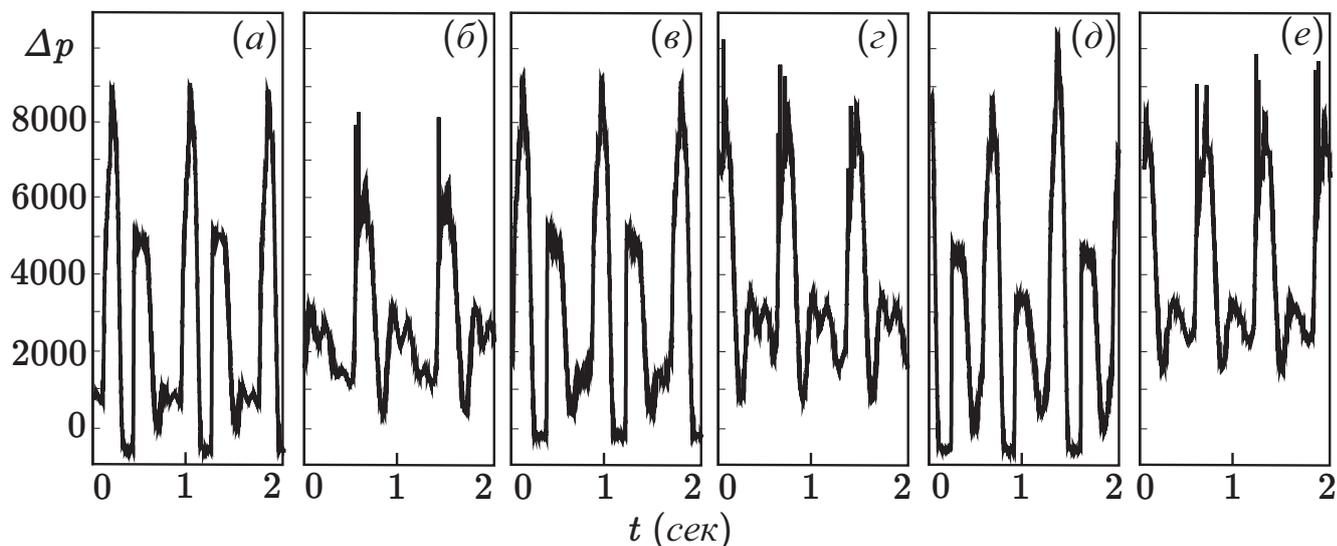


Рисунок 4.9: Перепад давления в зависимости от времени для третьего, второго и первого типа колебаний упругой трубки с турбулентным ( $a, в, д$ ) и ламинарным ( $б, з, е$ ) потоками внутри.

#### 4.2.5 Проверка эквивалентности ламинарного и турбулентного режимов

Поскольку перепад давления на границе устойчивости для турбулентного и ламинарного режимов течения не совпадает, то форма трубки тоже не совпадает. Поэтому режимы вблизи границ устойчивости не эквивалентны. В связи с тем, что переход к неустойчивости для турбулентного режима происходит при меньшем перепаде давления, то можно определить параметры, для которых будет реализован устойчивый ламинарный режим, эквивалентный граничному устойчивому турбулентному режиму.

Для получения эквивалентного режима были выбраны расход, диаметр, перепад давления и трансмуральное давление для ламинарного режима, которые совпали с аналогичными параметрами для турбулентного режима (Рис. 4.10). Полученные данные представлены для ламинарного режима 42% и 43% раствора глицерина в качестве рабочей жидкости. Можно видеть, что

полученные потоки действительно эквивалентны в пределах погрешности измерений датчиков.

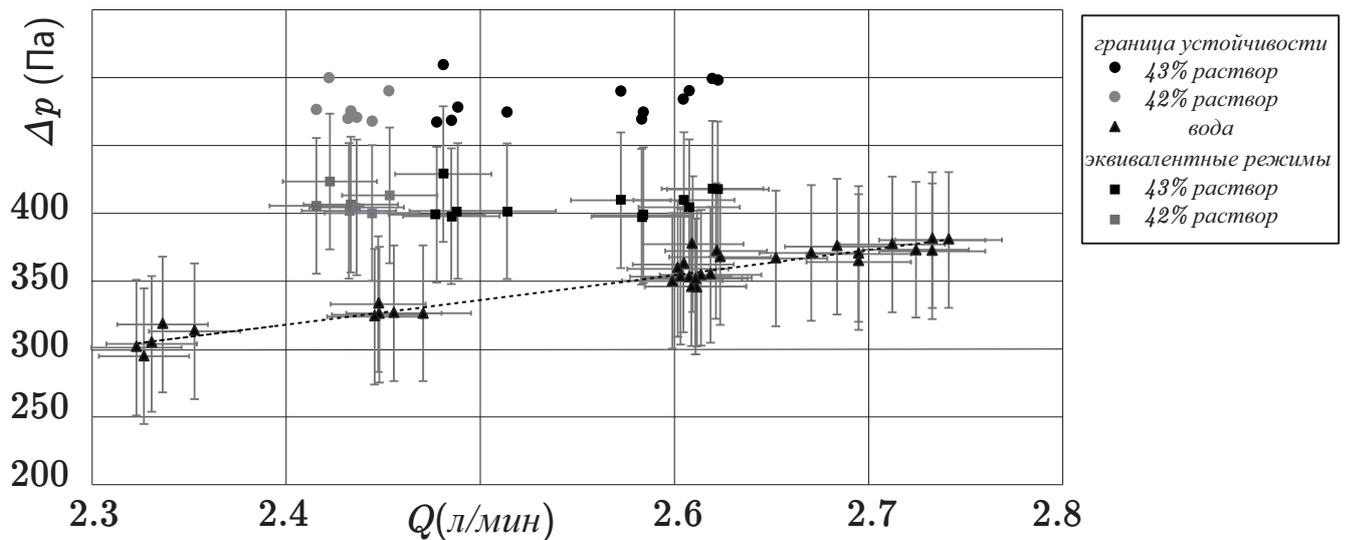


Рисунок 4.10: Перепад давления в зависимости от расхода для эквивалентных режимов течения.

#### 4.2.6 Визуализация режимов неустойчивости для ламинарного и турбулентного течений жидкости

Для сравнения режимов колебаний упругой трубки производилась синхронная видеозапись с видом сверху и сбоку на две камеры, указанные на рисунке 4.2.

Изучение изображений сверху (рисунки 4.11, 4.12, 4.13 (б,г)) показывает, что максимальное сжатие трубки во время цикла колебаний увеличивается при последовательном переходе от третьего режима колебаний ко второму и достигает максимального сжатия при первом режиме колебаний как в турбулентном, так и в ламинарном режимах течения.

Также видно, что область пережатия длиннее и плавнее при ламинарном режиме (рисунки 4.11, 4.12, 4.13 (в,з)) и короче и круче при турбулентном режиме (рисунки 4.11, 4.12, 4.13 (а,б)) для всех режимов колебаний.

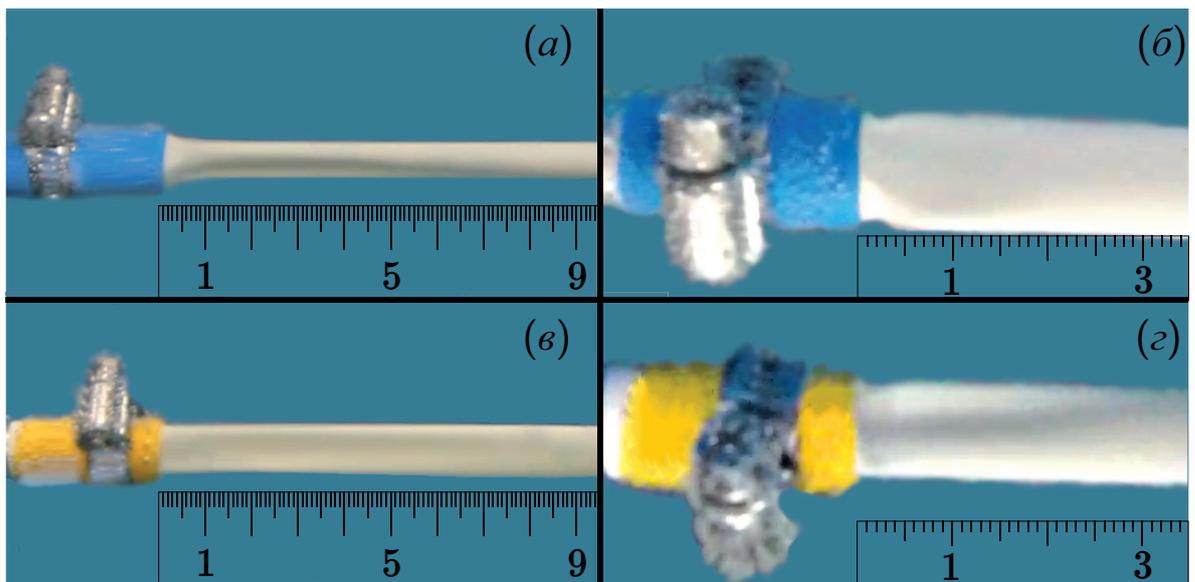


Рисунок 4.11: Деформация упругой трубки во время колебаний третьего типа для (а) турбулентного потока (вид сбоку), (б) турбулентного потока (вид сверху), (в) ламинарного потока (вид сбоку), (г) ламинарного потока (вид сверху).

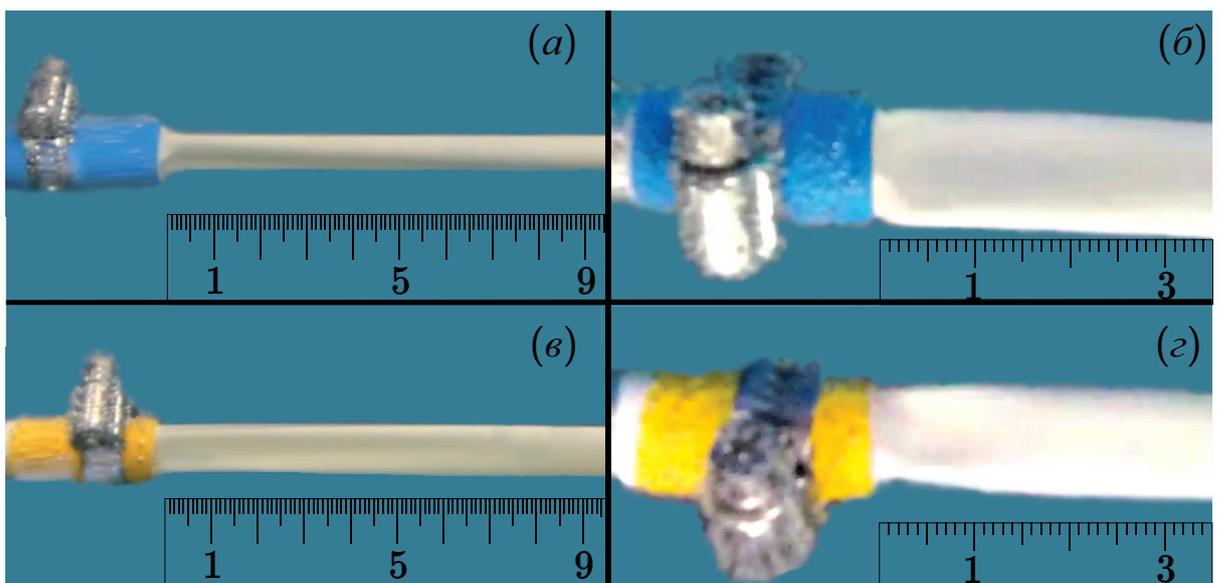


Рисунок 4.12: Деформация упругой трубки во время колебаний второго типа для (а) турбулентного потока (вид сбоку), (б) турбулентного потока (вид сверху), (в) ламинарного потока (вид сбоку), (г) ламинарного потока (вид сверху).

### 4.3 Обсуждение результатов

В результате экспериментальных исследований были выявлены два основных отличия:

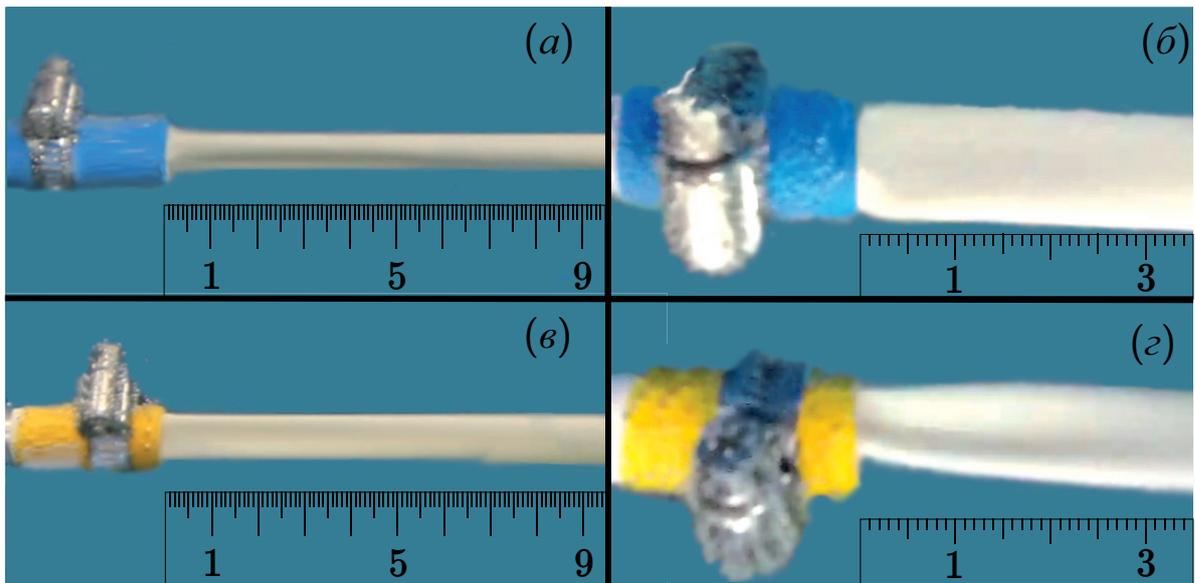


Рисунок 4.13: Деформация упругой трубки во время колебаний первого типа для (а) турбулентного потока (вид сбоку), (б) турбулентного потока (вид сверху), (в) ламинарного потока (вид сбоку), (г) ламинарного потока (вид сверху).

1. В случае ламинарного течения в упругой трубке неустойчивость возникает при больших перепадах давления, другими словами, ламинарный стационарный поток в упругой трубке более устойчив, чем турбулентный.
2. После потери устойчивости амплитуда колебаний больше при турбулентных течениях, чем при ламинарных; также, второй и последующие пики давления в каждом цикле колебаний гораздо более выражены при турбулентных течениях.

Первый из этих результатов имеет простое теоретическое объяснение. Сначала рассмотрим ламинарный, более устойчивый, чем турбулентный поток. Устойчивость теряется, когда небольшие изменения диаметра трубки приводят к падению давления, которое не может поддерживаться трубкой, и затем она теряет осесимметричность, схлопывается и поток отрывается от стенок трубки. Условия для неустойчивости являются благоприятными там, где небольшое уменьшение диаметра вызывает значительно большее изменение давления, т.е. при большем значении  $dp/dD$ . Учитывая, что давление на входе и диаметр задаются жестким сегментом трубки выше по потоку, это условие можно переформулировать следующим образом: неустойчивость наступит раньше при большем значении  $d(\text{grad } p)/dD$ , где  $\text{grad } p = \Delta p/L$  — градиент давления (положительный градиент соответствует снижению давления ниже по потоку). Вычислим эту производную для ламинарных и турбулентных течений.

Рассмотрим три стационарных потока: ламинарный поток, турбулентный поток в жесткой трубке и турбулентный поток в упругой трубке (напомним, что ламинарный поток в жестких и упругих трубках имеет один и тот же коэффициент сопротивления  $f = 64/Re$ ), которые соответствуют одному и тому же расходу, градиенту давления и диаметру трубки. Для локального градиента давления имеем:

$$\text{grad } p(D) = f(Re) \frac{\rho v^2}{2D}, \quad Re = Re(D) = \frac{v(D)D}{\nu}, \quad v = v(D) = \frac{4Q}{\pi D^2},$$

и коэффициент сопротивления для ламинарного потока ( $l$ ), турбулентного потока в жесткой трубке ( $Bl$ ) и турбулентного потока в упругой трубке ( $t$ ):

$$f_l(Re) = \frac{64}{Re}, \quad f_{Bl}(Re) = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}, \quad f_t(Re) = \frac{30.822}{Re^{0.762}}.$$

Рассмотрим небольшое изменение диаметра трубки в сжимаемом участке при неизменном расходе  $Q$ . Непосредственным вычислением находим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(\text{grad } p)}{dD} \right|_l &= -4 \frac{\rho_l v^2}{2} \frac{f_l}{D^2}, \quad \left. \frac{d(\text{grad } p)}{dD} \right|_{Bl} = -\frac{19}{4} \frac{\rho_t v^2}{2} \frac{f_{Bl}}{D^2}, \\ \left. \frac{d(\text{grad } p)}{dD} \right|_t &= -4.238 \frac{\rho_t v^2}{2} \frac{f_t}{D^2}. \end{aligned}$$

С учетом равенства стационарного перепада давления  $\rho_l f_l = \rho_t f_{Bl} = \rho_t f_t$ ; соответственно,

$$\left. \frac{d(\text{grad } p)}{dD} \right|_l = \frac{16}{19} \left. \frac{d(\text{grad } p)}{dD} \right|_{Bl}, \quad \left. \frac{d(\text{grad } p)}{dD} \right|_l = 0.944 \left. \frac{d(\text{grad } p)}{dD} \right|_t, \quad (4.5)$$

т.е., небольшое уменьшение диаметра трубки приводит к меньшему снижению давления для ламинарного, а не для турбулентного потока, как для жесткой, так и для упругой трубки. Следовательно, ламинарный поток более устойчив, что полностью подтверждается экспериментальными наблюдениями.

#### 4.4 Выводы

В этой главе проведено сравнение границ устойчивости и режимов колебаний деформируемых упругих трубок, с протекающей внутри жидкостью при

двух режимах: ламинарном и турбулентном, в условиях равного расхода, перепада давления, трансмурального давления и одинаковой геометрии трубки. Теоретический анализ показывает, что для получения ламинарных режимов, эквивалентных турбулентным потокам воды, расход в диапазоне от 1.9 до 3,2 л/мин и концентрация водных растворов глицерина от 40% до 44% при температуре  $20^{\circ}\text{C}$  являются необходимыми условиями равенства интегральных характеристик.

Эквивалентные эксперименты по устойчивости проводились отдельно для течения воды (турбулентный режим) и водных растворов глицерина (ламинарный режим). После потери устойчивости были определены четыре режима колебаний, которые в каждом цикле соответствуют одному резкому пику перепада давления, за которым следуют один, два, три или четыре дополнительных пика меньшей амплитуды.

Было установлено, что потеря устойчивости при турбулентном режиме происходит при меньшем перепаде давления, чем при ламинарном режиме. Для турбулентного режима при пересечении границы устойчивости реализуется третий тип колебаний, сопровождающийся резким увеличением перепада давления. При том же перепаде давления колебания упругой трубки с ламинарным потоком реализуются согласно четвертому типу колебаний и переходят в третий режим с дальнейшим увеличением перепада давления. Перепад давления при третьем режиме колебаний и граница между третьим и вторым режимами почти совпадает для турбулентных и ламинарных течений. Однако при дальнейшем увеличении перепада давления переход к пермому режиму для турбулентного течения происходит при более низком перепаде давления, чем для ламинарного течения.

Результаты данного исследования показывают, что границы устойчивости и типы колебаний флаттера деформируемой трубки, с протекающей внутри жидкостью, различны для ламинарного и турбулентного режимов, даже если их интегральные параметры (расход, перепад давления, трансмуральное давление, форма трубки) совпадают. Следовательно, экспериментальные исследования, которые часто проводятся в условиях турбулентного течения, следует с осторожностью применять к ламинарным физиологическим течениям. В связи с этим, такие биомеханические приложения требуют специальных экспериментов, в которых как режим течения, так и реология жидкости (например, неньютоновская жидкость) должны быть точно воспроизведены.

## Заключение

В работе были получены следующие основные результаты.

1. Аналитически исследованы свойства одномерного уравнения движения с заданными граничными условиями для осесимметричного стационарного состояния упругой трубки, учитывающего реологию жидкости и образующийся профиль скорости.
  - а) Получено, что для движения идеальной жидкости с заданным профилем скорости стационарное состояние всегда существует для коротких трубок и при определенных условиях для сколь угодно длинных трубок. Однако, при учёте вязкости трубка может иметь лишь конечную длину, что приводит к возникновению нестационарного движения, как единственного возможного, при достаточно большой длине трубки.
  - б) Если стационарное состояние трубки, удовлетворяющее граничным условиям, существует, то в зависимости от значения числа Рейнольдса и некоторых дополнительных условий оно может быть неединственным.
2. Аналитически исследована локальная, абсолютная и конвективная неустойчивость упругой трубки, глобальная неустойчивость длинных конечных трубок, а также численно исследована устойчивость упругой трубки произвольной конечной длины.
  - а) Для бесконечно длинной упругой трубки показано, что неустойчивость, при которой сохраняется осесимметричность движения трубки, возможна лишь при показателе степенного закона  $n < 0.611$ . Таким образом, потеря устойчивости линейно-вязких сред с сохранением осесимметричности движения невозможна.
  - б) Найдены области абсолютной ( $n < 1/3$ ) и конвективной неустойчивости бесконечно длинных трубок в зависимости от продольного натяжения упругой трубки.
  - в) Получено, что критерий глобальной неустойчивости длинной конечной трубки практически совпадает с критерием абсолютной неустойчивости для бесконечной длины трубки.

- г) Определено влияние продольного натяжения и длины трубки на устойчивость упругой трубки конечной длины.
3. Проведены экспериментальные исследования по нахождению границы устойчивости и типов колебаний упругой трубки, с протекающей внутри ньютоновской жидкостью, в зависимости от режима колебаний при одинаковых расходах и перепадах давления.
- а) Установлено, что потеря устойчивости в режиме турбулентного потока происходит при меньшем перепаде давления, чем в ламинарном потоке.
- б) Были выявлены четыре типа колебаний для ламинарного и три для турбулентного потоков, наблюдаемые по датчикам перепада давления, датчику выходного давления и визуализации режимов колебаний трубки. Колебания на турбулентном режиме характеризуются более резким сужением трубки в момент схлопывания и большей амплитудой колебаний.
- в) Проведено сравнение переходов между типами колебаний в зависимости от перепада давления для ламинарных и турбулентных течений.

## Список литературы

1. *Poroshina, A. and Vedeneev, V.* Influence of longitudinal tension on the stability of the finite length elastic tubes conveying Non-Newtonian fluid / Poroshina, A. and Vedeneev, V. // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2018. — Vol. 1129.
2. *Порошина, А.Б. and Веденеев, В.В.* Существование и единственность стационарного состояния упругой трубки при протекании через нее степенной жидкости / Порошина, А.Б. and Веденеев, В.В. // *Российский журнал биомеханики.* — 2018. — Т. 22, 2. — 196—222.
3. *Веденеев, В.В. and Порошина, А.Б.* Устойчивость упругой трубки, содержащей текущую неньютоновскую жидкость и имеющей локально ослабленный участок / Веденеев, В.В. and Порошина, А.Б. // *Труды МИАН.* — 2018. — Т. 300, 1. — 42—64.
4. *Порошина, А.Б.* Стационарное состояние упругой трубки с протекающей внутри жидкостью / Порошина, А.Б. // *Сборник Трудов конференции-конкурса молодых ученых.* — г. Москва: изд-во Московского университета. — 2017. — С. 171—178.
5. *Порошина, А.Б.* Устойчивость упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости / Порошина, А.Б. // *Сборник Трудов конференции-конкурса молодых ученых.* — г. Москва: изд-во Московского университета. — 2016. — С. 174—181.
6. *Порошина, А.Б.* Абсолютная, конвективная и глобальная неустойчивость упругой трубки с протекающей неньютоновской жидкостью бесконечных и конечных размеров / Порошина, А.Б., В. Веденеев // *Сборник тезисов докладов VII Всероссийской конференции "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения"* — г. Красноярск: изд-во ИВМ СО РАН. — 2020. — С. 186—187.
7. *Подопросветова, А.Б.* Экспериментальное исследование влияния режимов течения на устойчивость упругой трубки / Подопросветова, А.Б., В. Веденеев // *Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM-2020. Тезисы докладов.* — г. Москва: изд-во Московского университета. — 2020. — С. 122.

8. **Подопросветова, А.Б.** Исследование неустойчивости упругой трубки бесконечной и конечной длины с протекающей внутри псевдопластической жидкостью / **Подопросветова, А.Б.** // Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM-2020. Тезисы докладов. – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2020. – С. 121.
9. **Порошина, А.Б.** Экспериментальное исследование устойчивости упругой трубки / **Порошина, А.Б.** // Всероссийская школа-семинар "Современные проблемы аэрогидродинамики". Тезисы докладов. – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2019. – С. 88.
10. **Порошина, А.Б.** Влияние сужения и расширения трубки на устойчивость упругих трубок конечной длины / **Порошина, А.Б.** // Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В.Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред». Тезисы докладов. – г. Новосибирск: изд-во Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН. – 2019. – С. 168–169.
11. **Порошина, А.Б.** Исследование устойчивости упругой сужающейся и расширяющейся трубки с протекающей внутри псевдопластической жидкостью / **Порошина, А.Б.** // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. – Уфа РИЦ БашГУ. – 2019. – С. 277–279.
12. **Порошина, А.Б.** Устойчивость упругой суженой или расширенной трубки с протекающей неньютоновской жидкостью / **Порошина, А.Б.** // Ломоносовские чтения. Секция механики. Тезисы докладов – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2019. – С. 182–183.
13. **Poroshina, A.** Instability of elastic finite length tubes conveying power law fluids / **Poroshina, A., V. Vedeneev** // 12th European Fluid Mechanics Conference. – Vienna, Austria. – P. 44.
14. **Poroshina, A.** Instability of elastic tubes conveying power law fluids / **Poroshina, A., V. Vedeneev** // 8th World Congress of Biomechanics. – Dublin, Ireland.
15. **Порошина, А.Б.** Влияние продольного натяжения на устойчивость упругих трубок конечной длины с протекающей внутри неньютоновской жидкостью / **Порошина, А.Б., В. Веденеев** // Всероссийская конференция

- ция молодых учёных-механиков YSM-2018. Тезисы докладов. – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2018. – С. 136.
16. *Веденеев, В.* Исследование влияния продольного натяжения на область устойчивости упругих трубок конечной длины с протекающей внутри степенной жидкостью / В. Веденеев, **Порошина, А.Б.** // Ломоносовские чтения. Секция механики. Тезисы докладов – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2018. – С. 167.
  17. **Порошина, А.Б.** Исследование устойчивости упругих трубок конечной длины с протекающей внутри степенной жидкостью / **Порошина, А.Б.** // Сборник тезисов XXV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов-2018 – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2018.
  18. **Poroshina, A.** Existence and uniqueness of stationary state of elastic tubes conveying power law fluids / **Poroshina, A., V. Vedeneev** // 23rd Congress of the European Society of Biomechanics. – Seville, Spain.
  19. **Порошина, А.Б.** Неединственность стационарного состояния упругой трубки с протекающей внутри степенной жидкостью / **Порошина, А.Б.** // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов - 2017». Сборник трудов конференции. – г. Москва: изд-во МАКС Пресс. 2017. – 2017.
  20. **Порошина, А.Б.** Осесимметричное стационарное состояние упругой трубки при протекании через нее неньютоновской жидкости / **Порошина, А.Б., В. Веденеев** // Ломоносовские чтения. Секция механики. Тезисы докладов – г. Москва: изд-во Московского университета, – 2017. – С. 168.
  21. **Порошина, А.Б.** Стационарное состояние упругой трубки с протекающей внутри жидкостью / **Порошина, А.Б.** // Тезисы конференции-конкурса молодых ученых института механики МГУ им. М.В. Ломоносова 11-13 октября– г. Москва: изд-во Московского университета. – 2017. – С. 30.
  22. **Порошина, А.Б.** Существование и единственность стационарного состояния упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости / **Порошина, А.Б., В. Веденеев** // Всероссийская конференция молодых учёных-механиков, 5-15 сентября 2017 г., Сочи,

- «Буревестник» МГУ. Тезисы докладов. – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2017. – С. 98.
23. **Порошина, А.Б.** Осесимметричная неустойчивость упругой трубки при протекании внутри нее неньютоновской жидкости / **Порошина, А.Б.**, В. Веденеев // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 18-27 апреля 2016. – 2016. – С. 146.
24. **Порошина, А.Б.** Существование и единственность стационарного состояния упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости / **Порошина, А.Б.**, В. Веденеев // Биомеханика-2016. Тезисы докладов XII Всероссийской (с международным участием) конференции. – г. Пермь: изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета. – 2016. – С. 99–100.
25. **Веденеев, В.** Устойчивость упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости / В. Веденеев, **Порошина, А.Б.** // Современные проблемы аэрогидродинамики. Тезисы докладов XVIII Всероссийской конференции, посвященной 60-летию Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике и 125-летию со дня рождения академика АН СССР Н.И. Мухелишвили. – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2016. – С. 34–35.
26. **Порошина, А.Б.** Устойчивость упругой трубки при протекании через неё нелинейно-вязкой жидкости / **Порошина, А.Б.** // Тезисы конференции-конкурса молодых ученых института механики МГУ им. М.В. Ломоносова 10-12 октября 2017 г. – г. Москва: изд-во Московского университета. – 2017. – С. 24.
27. Аэрогидроупругость конструкций / А. Горшков [и др.]. – М.: Физматлит, 2000. – С. 591.
28. *Paidoussis, M.* Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow.V.1. / M. Paidoussis. – Academic press, 1998.
29. *Ильгамов, М.* Введение в нелинейную гидроупругость / М. Ильгамов. – М.: Наука, 1991. – С. 200.
30. *Кошев, В.* Гидродинамический флаттер и антифлаттерная стабилизация в сердечно-сосудистой системе / В. Кошев, Е. Петров, А. Волобуев. – Самара: ООО «Офофрт», 2007. – С. 408.

31. *Katz, A.* Flow through a collapsible tube. Experimental Analysis and Mathematical Model / A. Katz, Y. Chen, A. Morreno // Biophysical J. — 1969. — Vol. 9(10). — P. 1261—1279.
32. *Pedley, T.* Blood pressure and flow rate in the giraffe jugular vein / T. Pedley, B. Brook, R. Seymour // Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci. — 1996. — Vol. 351. — P. 855—866.
33. *Shapiro, A.* Physiologic and medical aspects of flow in collapsible tubes / A. Shapiro // Proc. 6th Canadian Congress on Applied Mechanics. — 1977. — P. 883—906.
34. *Wang, D. M.* Nonlinear analysis of flow in an elastic tube (artery): steady streaming effects / D. M. Wang, J. M. Tarbell // Journal of Fluid Mechanics. — 1992. — Vol. 239. — P. 341—358.
35. *Вольмир, А.* Оболочки в потоке жидкости и газа / А. Вольмир. — М.: Наука, 1979. — С. 320.
36. *Ильгамов, М.* Статические задачи гидроупругости / М. Ильгамов. — Казань: ИММ РАН, 1994. — С. 208.
37. *Amabili, M.* Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part I: stability / M. Amabili, F. Pellicano, M. Paidoussis // Journal of sound and Vibration. — 1999. — Vol. 225(4). — P. 655—699.
38. *Ilichev, A.* Stability of aneurysm solutions in a fluid-filled elastic membrane tube / A. Ilichev, Y.-B. Fu // Acta Mechanica Sinica. — 2012. — Vol. 28(4).
39. *Matsuzaki, Y.* Nonlinear stability analysis of a two-dimensional model of an elastic tube conveying a compressible flow / Y. Matsuzaki, Y. C. Fung // Journal of Applied Mechanics. — 1979. — Vol. 46(1). — P. 31—36.
40. *Анкилов, А.* Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов. / А. Анкилов, П. Вельмисов. — Ульяновск: УЛГТУ, 2000. — С. 115.
41. *Jensen, O.* The existence of steady flow in a collapsed tube / O. Jensen, T. Pedley // J. Fluid Mech. — 1989. — Vol. 206. — P. 339—374.
42. *Jensen, O.* Instabilities of flow in a collapsed tube / O. Jensen // J. Fluid Mech. — 1990. — Vol. 220. — P. 623—659.
43. *Pedley, T.* Modelling Flow and Oscillations in Collapsible Tubes / T. Pedley, X. Luo // Theor. Comp. Fluid Dyn. — 1998. — Vol. 10. — P. 277—294.

44. *Reyn, J. W.* Multiple solutions and flow limitation for steady flow through a collapsible tube held open at the ends / J. W. Reyn // J. Fluid Mech. — 1987. — Vol. 174. — P. 467–493.
45. *Shapiro, A.* Steady flow in collapsible tubes / A. Shapiro // ASME J/Biomech. Engrg. — 1977. — Vol. 99. — P. 126–147.
46. *Heil, M.* Fluid-structure interaction in internal physiological flows / M. Heil, A. Hazel // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2011. — Vol. 43. — P. 141–162.
47. *Pedley, T.* Flow and oscillations in collapsible tubes: Physiological applications and low-dimensional models / T. Pedley, D. Pihler-Puzovic // Sadhana. — 2015. — Vol. 40(3). — P. 891–909.
48. *Stewart, P. S.* Local and global instabilities of flow in a flexible-walled channel / P. S. Stewart, S. L. Waters, O. E. Jensen // Eur. J. Mech. B/Fluids. — 2009. — Vol. 28. — P. 541–557.
49. *Amaouche, M.* Linear and weakly nonlinear global instability of a fluid flow through a collapsible channel / M. Amaouche, G. Labio // Phys. Fluids. — 2016. — Vol. 28. — P. 044106.
50. *Stewart, P. S.* Instabilities in flexible channel flow with large external pressure / P. S. Stewart // J. Fluid Mech. — 2017. — Vol. 825. — P. 922–960.
51. Stability of a flexible insert in one wall of an inviscid channel flow / M. Burke [et al.] // J Fluids Struct. — 2014. — Vol. 48. — P. 435–450.
52. *Kudenatti, R.* Stability of two-dimensional collapsible-channel flow at high Reynolds number / R. Kudenatti, N. Bujurke, T. Pedley // J. Fluid Mech. — 2012. — Vol. 705. — P. 371–386.
53. *Liu, H.* Stability and energy budget of pressure-driven collapsible channel flows / H. Liu, X. Luo, Z. Cai // J. Fluid Mech. — 2012. — Vol. 705. — P. 348–370.
54. *Luo, X.* Multiple solutions and flow limitation in collapsible channel flows / X. Luo, T. Pedley // J. Fluid Mech. — 2000. — Vol. 420. — P. 301–324.
55. *J., G.* High-Reynolds-number steady flow in a collapsible channel / G. J., P. T. J. // J. Fluid Mech. — 2006. — Vol. 569. — P. 151–184.

56. *Stewart P. S., W. S. L.* Local instabilities of flow in a flexible channel: Asymmetric flutter driven by a weak critical layer / W. S. L. Stewart P. S., J. O. E. // *Physics of Fluids*. — 2010. — Vol. 22(3). — P. 031902.
57. *Marzo, A.* Three-dimensional collapse and steady flow in thick-walled flexible tubes / A. Marzo, X. Luo, C. Bertram // *J. Fluids Struct.* — 2005. — Vol. 20, no. 6. — P. 817–835.
58. *Heil, M.* Self-excited oscillations in three-dimensional collapsible tubes: Simulating their onset and large-amplitude oscillations / M. Heil, J. Boyle // *J. Fluid Mech.* — 2010. — Vol. 652. — P. 405–426.
59. *Gay-Balmaz, F.* Stability of helical tubes conveying fluid / F. Gay-Balmaz, D. Georgievskii, V. Putkaradze // *Fluids Struct.* — 2017. — Vol. 78. — P. 146–174.
60. Sloshing and slamming oscillations in a collapsible channel flow / P. S. Stewart [et al.] // *J. Fluid Mech.* — 2010. — Vol. 662. — P. 288–319.
61. *Pihler-Puzovic, D.* Stability of high-Reynolds-number flow in a collapsible channel / D. Pihler-Puzovic, T. J. Pedley // *J. Fluid Mech.* — 2013. — Vol. 714.
62. *Pihler-Puzovic, D.* Flutter in a quasi-one-dimensional model of a collapsible channel / D. Pihler-Puzovic, T. J. Pedley // *Proc. R. Soc. Lond.* — 2014. — Vol. 470. — P. 20140015.
63. *Xu, F.* Divergence-driven oscillations in a flexible-channel flow with fixed upstream flux / F. Xu, J. Billingham, O. Jensen // *J. Fluid Mech.* — 2013. — Vol. 723. — P. 706–733.
64. Predicting the onset of high-frequency self-excited oscillations in elastic-walled tubes / R. Whittaker [et al.] // *Proc. R. Soc. London A*. — 2010. — Vol. 466. — P. 3635–3657.
65. Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы / М. Абакумов [и др.] // *Матем. Моделирование*. — 2000. — Т. 12. — С. 106–117.
66. Математическая модель гемодинамики сердечнососудистой системы / М. Абакумов [и др.] // *Дифференц. уравнения*. — 1997. — Т. 33, № 7. — С. 892–898.

67. *Василевский, Ю.* Об эластичности сосудов в одномерных моделях гемодинамики / Ю. Василевский, В. Саламатова, С. Симаков // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 9. — С. 1599—1610.
68. *Симаков, С.* Методы расчета глобального кровотока в организме человека с использованием гетерогенных вычислительных моделей / С. Симаков, А. Холодов, А. Евдокимов // В кн.: Медицина в зеркале информатики. М.: Наука. — 2008. — С. 124—170.
69. *Холодов, А.* Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса вещества / А. Холодов // В кн.: Компьютерные модели и прогресс медицины. М.: Наука, — 2001. — С. 127—163.
70. Reduced modelling of blood flow in the cerebral circulation: Coupling 1-D, 0-D and cerebral auto-regulation models / J. Alastruey [et al.] // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2008. — Vol. 56. — P. 1061—1067.
71. An anatomically detailed arterial network model for one-dimensional computational hemodynamics / P. Blanco [et al.] // IEEE Trans Biomed Eng. — 2015. — Vol. 62(2). — P. 736—753.
72. A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling / E. Boileau [et al.] // Int. J. Numer. Method Biomed. Eng. — 2015. — Vol. 31(10). — e02732.
73. *Formaggia, L.* One-dimensional models for blood flow in arteries / L. Formaggia, D. Lamponi, A. Quarteroni // J. Engng Mathematics. — 2003. — Vol. 47. — P. 251—276.
74. *Guan, D.* Comparison of the Windkessel model and structured-tree model applied to prescribe outflow boundary conditions for a one-dimensional arterial tree model / D. Guan, F. Liang, P. Gremaud // J Biomech. — 2016. — Vol. 49(9). — P. 1583—1592.
75. *Quarteroni, A.* Cardiovascular mathematics / A. Quarteroni. — ICM, 2006.
76. Validation of a one-dimensional model of the systemic arterial tree / P. Raymond [et al.] // Am J Physiol Heart Circ Physiol. — 2009. — Vol. 297. — H208—222.

77. Numerical issues of modelling blood flow in networks of vessels with pathologies / Y. Vassilevski [et al.] // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 26. — P. 605–622.
78. Pulse wave propagation in a model human arterial network: Assessment of 1-D visco-elastic simulations against in vitro measurements / J. Alastruey [et al.] // Int. J. Biomech. — 2011. — Vol. 44. — P. 2250–2258.
79. A theory of fluid flow in compliant tubes / A. Barnard [et al.] // Biophys. J. — 1966. — Vol. 6(6). — P. 717–724.
80. *Olufsen, M.* A one-dimensional fluid dynamic model of the systemic arteries / M. Olufsen // Computational Modeling in Biological Fluid Dynamics: The IMA Volumes in Mathematics and its Applications. — 2001. — Vol. 124. — P. 167–187.
81. *Blanco, P.* Modeling dimensionally-heterogeneous problems: analysis, approximation and applications / P. Blanco, M. Discacciati, A. Quarteroni // Numer. Math. — 2011. — Vol. 119. — P. 299–335.
82. *Blanco, P.* A unified variational approach for coupling 3D–1D models and its blood flow applications / P. Blanco, R. Feijooa, S. Urquiza // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2007. — Vol. 196. — P. 4391–4410.
83. Multidimensional modeling for the carotid artery blood flow / S. Urquiza [et al.] // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2006. — Vol. 195. — P. 4002–4017.
84. *Mynard, J.* A 1D arterial blood flow model incorporating ventricular pressure, aortic valve and regional coronary flow using the locally conservative Galerkin (LCG) method / J. Mynard, P. Nithiarasu // Commun. Numer. Methods Eng. — 2008. — Vol. 24. — P. 367–417.
85. Multi-scale modeling of the human cardiovascular system with applications to aortic valvular and arterial stenoses / F. Liang [et al.] // Med. Biol. Eng. Comput. — 2009. — Vol. 47. — P. 743–755.
86. Biomechanical characterization of ventricular-arterial coupling during aging: a multi-scale model, study / F. Liang [et al.] // J. Biomech. — 2009. — Vol. 42. — P. 692–704.

87. *Wang, J.* Wave propagation in a model of the arterial circulation / J. Wang, K. Parker // *J. Biomech.* — 2004. — Vol. 37. — P. 457–470.
88. *Anand, M.* A shear-thinning viscoelastic fluid model for describing the flow of blood / M. Anand, K. Rajagopal // *Int. J. Cardiovasc. Med. Sci.* — 2004. — Vol. 4, no. 2. — P. 59–68.
89. Hemodynamical flows: Modeling, analysis and simulation. / G. Galdi [et al.]. — Birkhauser, Boston, 2008.
90. *Gijsen, F.* The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: Steady flow in a carotid bifurcation model / F. Gijsen, F. van de Vosse, J. Janssen // *J. Biomech.* — 1999. — Vol. 32, no. 6. — P. 601–608.
91. *Ku, D.* Blood flow in arteries / D. Ku // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 1997. — Vol. 29. — P. 399–434.
92. Hemodynamics in the abdominal aorta: A comparison of in vitro and in vivo measurements / J. Moore [et al.] // *J. Appl. Physiol.* — 1985. — Vol. 76, no. 4. — P. 1520–1527.
93. *Shibeshi, S.* The rheology of blood flow in a branched arterial system / S. Shibeshi, W. Collins // *Appl Rheol.* — 2005. — Vol. 15(6). — P. 398–405.
94. Effect of co-trimoxazole and N-acetylcysteine and role in stent clogging / P.-P. Coene [et al.] // *Scand. J. Gastroenterol.* — 1994. — Vol. 29, no. 8. — P. 757–763.
95. Non-Newtonian flow of pathological bile in the biliary system: experimental investigation and CFD simulations / A. Kuchumov [et al.] // *Korea–Aust. Rheol. J.* — 2014. — Vol. 26, no. 1. — P. 81–90.
96. *Singh, R.* Fluid Flow in Food Processing. / R. Singh, D. Heldman // In book: *Introduction to Food Engineering.* — 2014. — P. 65–209.
97. *Smith, N.* An anatomically based model of transient coronary blood flow in the heart / N. Smith, A. Pullan, P. Hunter // *SIAM J. Appl. Math.* — 2002. — Vol. 62, no. 3. — P. 990–1018.
98. *Wang, Y.* Peristaltic flow of a Johnson-Segalman fluid through a deformable tube / Y. Wang, T. Hayat, K. Hutter // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics.* — 2007. — Vol. 21. — P. 369–380.

99. *Mandal, P.* An unsteady analysis of non-Newtonian blood flow through tapered arteries with a stenosis / P. Mandal // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2005. — Vol. 40. — P. 151—164.
100. *Юшутин, В. С.* Устойчивость деформируемых каналов при течении по ним нелинейно-вязких сред со степенным законом упрочнения / В. С. Юшутин // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. — 2012. — № 4. — С. 3—7.
101. *Knowlton, F.* The influence of variations in temperature and bloodpressure on the performance of the isolated mammalian heart / F. Knowlton, E. Starling // J. Physiol. — 1912. — Vol. 44. — P. 206—219.
102. *Bertram, C.* Mapping of instabilities for flow through collapsed tubes of different length / C. Bertram, C. Raymond, T. Pedley // J. Fluids Struct. — 1990. — Vol. 4. — P. 125—153.
103. *Grotberg, J.* Biofluid mechanics in flexible tubes / J. Grotberg, O. Jensen // Ann. Rev. Fluid Mech. — 2004. — Vol. 36. — P. 121—147.
104. *Grotberg, J.* Respiratory fluid mechanics / J. Grotberg // Phys. Fluids. — 2011. — Vol. 23. — P. 021301.
105. Nonlinear Dynamics of Human Aortas for Material Characterization / M. Amabili [et al.] // Phys. Rev. — 2020. — P. 011015.
106. Flutter in flow-limited collapsible tubes: a mechanism for generation of wheezes / N. Gavriely [et al.] // J. Appl. Physiol. — 1989. — Vol. 66(5). — P. 2251—2261.
107. *Brower, R.* Pressure-Flow Characteristics of Collapsible Tubes: A Reconciliation of Seemingly Contradictory Results / R. Brower, A. Noordergraaf // Ann. Biomed. — 1973. — Vol. 1(3). — P. 333—355.
108. *Bertram, C.* Flow Limitation in Uniform Thick-Walled Collapsible Tubes / C. Bertram, R. Castles // J. Fluids Struct. — 1999. — Vol. 13(3). — P. 399—418.
109. *Bertram, C.* Flow-Rate Limitation in a Uniform Thin-Walled Collapsible Tube, With Comparison to a Uniform Thick-Walled Tube and a Tube of Tapering Thickness / C. Bertram, N. Elliott // J. Fluids Struct. — 2003. — Vol. 17(4). — P. 541—559.

110. Control of Flow Limitation in Flexible Tubes / R.-Q. Wang [et al.] // J. Mech. Des. — 2017. — Vol. 139(1). — P. 013401.
111. *Lyon, C.* Applicability of the waterfall model / C. Lyon, J. Scott, C. Wang // Circulation Research. — 1954. — Vol. 47. — P. 68—73.
112. Energy and hydraulic gradient along systemic veins / Duomarco [et al.] // Am J Physiol. — 1954. — Vol. 178. — P. 215—219.
113. Critical closure of pulmonary vessels analyzed in terms of Starling resistor model / R. Lopez-Muniz [et al.] // Appl Physiol. — 1969. — Vol. 14. — P. 625—635.
114. *Bertram, C.* The Onset of Flow-Rate Limitation and Flow-Induced Oscillations in Collapsible Tubes / C. Bertram, J. Tscherry // J. Fluids Struct. — 2006. — Vol. 22(8). — P. 1029—1045.
115. *Zayko, J.* Self-Exciting Oscillations of Elastic Tube Conveying Fluid at Laminar and Turbulent Flow Regimes / J. Zayko, V. Vedeneev // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Vol. 894. — P. 012030.
116. *Metzner, A. B.* Flow of Non-Newtonian Fluids-Correlation of the Laminar, Transition, and Turbulent-flow Regions / A. B. Metzner, J. C. Reed // A.I.Ch.E. Journal. — 1955. — Vol. 1(4). — P. 434—440.
117. *Bergel, D.* The Static Elastic Properties of the Arterial Wall / D. Bergel // J. Physiol. — 1961. — Vol. 156. — P. 445—457.
118. Elastic properties of human aortas in relation to age and atherosclerosis: a structural model / F. Wuyts [et al.] // Phys. Med. Bid. — 1995. — Vol. 40. — P. 1577—1597.
119. *Пуриня, Б.* Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека / Б. Пуриня, В. Касьянов. — Рига: Зинатне, 1980. — С. 260.
120. Mathematical Modeling of Skin Bioheat Transfer / F. Xu [et al.] // Applied Mechanics Reviews. — 2009. — Vol. 62(5).
121. *Formaggia, L.* Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system T1 / L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani. — Springer Science, Business Media, 2010.
122. *Дудель, Й.* Физиология человека: в 3-х томах Т.2 Под ред. Шмидт Р., Тесва Г. Пер. с англ. / Й. Дудель, Й. Рюэрг, Р. Шмидт. — М.:Мир., 2005.

123. *Лужа, Д.* Рентгеновская анатомия сосудистой системы / Д. Лужа. — Будапешт: Издательство Академии Наук Венгрии, 2008. — С. 379.
124. *Briggs, R.* Electron-Stream interaction with plasmas / R. Briggs. — Cambridge, MA: MIT Press, 1964.
125. *Bers, A.* Space-time evolution of plasma instabilities — absolute and convective / A. Bers // In Handbook of Plasma Physics (ed. A. A. Galeev, R. N. Sudan), North-Holland. — 1983. — Т. chap.3.2. — С. 451—517.
126. *Куликовский, А.* Об устойчивости однородных состояний / А. Куликовский // Прикладная математика и механика. — 1966. — Т. 30(1). — С. 148—153.
127. *Schlichting, H.* Boundary-Layer Theory / H. Schlichting. — McGraw-Hill, 1979.
128. *Филоненко, Г.* Гидравлическое сопротивление трубопроводов / Г. Филоненко // Теплоэнергетика. — 1954. — № 4. — С. 40—44.
129. *Verma, M.* A dynamical instability due to fluid-wall coupling lowers the transition Reynolds number in the flow through a flexible tube / M. Verma, V. Kumaran // J. Fluid Mech. — 2012. — Vol. 705. — P. 322—347.
130. *Neelamegam, R.* Experimental study of the instability of laminar flow in a tube with deformable walls / R. Neelamegam, V. Shankar // Phys. Fluids. — 2015. — Vol. 27. — P. 024102.

## Список рисунков

1.1	(а) Степенной закон для чистого сдвига. (б) Профили скорости при различных $n$ . . . . .	22
1.2	Осесимметричное возмущение упругой трубки . . . . .	22
2.1	(а) График функции $T(x)$ . (б) График функции $(A_{cr} - A_0)$ . . . . .	32
2.2	(а) Фазовый портрет для (2.9), $P_{in} = -0.010$ , $A_0 < A < A_{cr}$ . (б) Фазовый портрет для (2.9), $P_{in} = -0.040$ , $A_0 < A < A_{cr}$ . . . . .	34
2.3	(а) Фазовый портрет для $x_0 > 1$ , $P_{in} = -0.040$ , $A_0 < A < A_{cr}$ . (б) Фазовый портрет для (2.9), $A = A_{cr}$ . . . . .	35
2.4	(а) Фазовый портрет для (2.9), $P_{in} = -0.100$ , $A > A_{cr}$ . (б) Фазовый портрет для (2.9), $P_{in} = 0.040$ , $A < A_0$ . . . . .	35
2.5	(а) Фазовый портрет для (2.9), $P_{in} = 0.500$ , $A < A_0$ . (б) Фазовый портрет для (2.9), $y(0) \rightarrow -\infty$ . . . . .	36
2.6	(а) Фазовый портрет для (2.9), $P_{in} = -0.050$ , $A_0 < A \leq A_{cr}$ . (б) Фазовый портрет для $x_0 > 1$ , $P_{in} = -0.007$ , $A_0 < A \leq A_{cr}$ . . . . .	39
2.7	Фазовый портрет для (2.9), $P_{in} = 0.100$ , $A_0 < A$ . . . . .	40
2.8	(2.13), $P_{in} = -0.003$ , $A_0 < A \leq A_{cr}$ , $L = 5$ , (а) фазовый портрет, (б) график $R(z)$ . . . . .	41
2.9	(2.13), $P_{in} = -0.003$ , $A_0 < A \leq A_{cr}$ , $L = 25$ , (а) фазовый портрет, (б) график $R(z)$ . . . . .	42
2.10	(а) График $L(y(0))$ при (2.13), $P_{in} = -0.003$ , $A_0 < A \leq A_{cr}$ . (б) График $R(z)$ для $x_0 > 1$ , $P_{in} = -0.005$ , $A_0 < A \leq A_{cr}$ , $L = 40$ . . .	43
2.11	(а) График $L(y(0))$ при $x_0 > 1$ , $P_{in} = -0.005$ , в выносках показан качественный характер графика $R(z)$ , соответствующий каждому решению. (б) График $L(y(0))$ при (2.13), $P_{in} = -0.100$ , $A > A_{cr}$ . . . .	44
2.12	(2.13), $P_{in} = -0.100$ , $A > A_{cr}$ , $L = 0.83$ , (а) фазовый портрет, (б) график $R(z)$ . . . . .	44
2.13	(2.13), $P_{in} = 0.003$ , $y(0) \approx -0.025$ , $y(0) \approx 0.016$ , (а) фазовый портрет, (б) график $R(z)$ . . . . .	45
2.14	(а) График $R(z)$ для (2.13), $P_{in} = 0.003$ , $L = 20$ . (б) График $L(y(0))$ при (2.13), $P_{in} = 0.003$ , в выносках показан качественный характер графика $R(z)$ , соответствующий каждому решению. . . .	46
2.15	(а) График $R(z)$ для (2.13), $P_{in} = 0$ , $Re = 1000$ . (б) График $R(z)$ для (2.13), $P_{in} = -0.003$ , $L = 5$ . . . . .	47

- 2.16 (а) График  $R(z)$  для (2.13),  $P_{in} = 0.03$ ,  $Re = 1500$ . (б) График  $R(z)$  для восходящей аорты. . . . . 48
- 2.17 (а) График  $R(z)$  для левой почечной артерии. (б) График  $R(z)$  для правой общей подвздошной артерии. . . . . 49
- 2.18 (а) График  $R(z)$  для левой внутренней подвздошной вены. (б) График  $R(z)$  для верхней поллой вены. . . . . 50
- 3.1 (а) Область неустойчивости при  $m = 0$ ,  $N = 0$ . (б) Область неустойчивости коротких волн при  $m \neq 0$ ,  $N \neq 0$ . . . . . 58
- 3.2 Область абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости. . . . 63
- 3.3 Линии уровня  $\text{Im } \omega(k) = const$  на комплексной  $k$ -плоскости и контур интегрирования, дающий асимптотическое поведение локализованного возмущения. Параметры  $N = m = 0$ ,  $n = 0.1$ ,  $\beta = 0.1 < \beta_{div}$  (а),  $\beta_{div} < \beta = 0.3 < \beta_{fl}$  (б). Седловые точки  $\omega(k)$  показаны кружками, а точки ветвления — квадратами. Разрез ветви показан пунктирной линией, а путь интегрирования — жирной сплошной линией. . . . . 65
- 3.4 График  $D(\varkappa)$  при  $N = 0$  (пунктирная линия), при малых  $N > 0$  (тонкая линия) и при больших  $N > 0$  (жирная линия). Стрелки показывают движение  $\varkappa_{2,4}$  по мере увеличения  $N$  . . . . . 66
- 3.5 Линии уровня  $\text{Im } \omega(k) = const$  на комплексной  $k$ -плоскости и контур интегрирования, дающий асимптотическое поведение локализованного возмущения. Параметры  $m = 0$ ,  $n = 0.1$ ,  $\beta = 0.3 > \beta_{div}$ ,  $N = 0.0015$  (а),  $N = 0.003$  (б). Седловые точки  $\omega(k)$  показаны кружками, а точки ветвления — квадратами. Разрез ветви показан пунктирной линией, а путь интегрирования — жирной сплошной линией. . . . . 67
- 3.6 Области «постоянной» абсолютной неустойчивости ( $AI_1$ ), коротковолновой абсолютной неустойчивости ( $AI_2$ ) и конвективной (CI) неустойчивости при малых  $N > 0$  и  $m = 0$ . . . . . 68
- 3.7 Области абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости при  $N = 0.0001, 0.1, 0.5, 1.5, 3.0, 10.0$  и  $m = 0$ . Жирной линией показана длинноволновая граница устойчивости. . . . . 69
- 3.8 Область неустойчивости при  $\chi = -0.001$  (а),  $\chi = -0.002$  (б). . . . . 74
- 3.9 Область неустойчивости при  $\chi = 0.001$  (а),  $\chi = 0.002$  (б). . . . . 75

- 3.10 (а) Области абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости.  
 (б) Траектории седловых точек  $\omega(k)$  на  $\omega$ -плоскости. Полный цикл движения седловых точек от точки 1 до точки 13 и вновь 1. . . . . 77
- 3.11  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.3$ . (б) сплошная линия  $n = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ . (в) пунктирная линия  $n = 0.3$ ,  $\beta = 0.3$ . (г)  $n = 0.31$ ,  $\beta = 0.3$ . Седловые точки  $\omega(k)$  обозначены кружками и квадратами. При изменении параметров  $n$  и  $\beta$  от значений в точке 1 до значений в точке 4; направления движения кривых указываются стрелками. . . . . 78
- 3.12 Траектории седловых точек  $\omega(k)$  на комплексной  $\omega$ -плоскости. (а) Движение седловых точек из точки 3 в точку 4. (б) Движение седловых точек из точки 4 в точку 6 через точку 5. (в) Движение седловых точек из точки 6 в точку 7. . . . . 79
- 3.13  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.3$ , (б)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.25$ , (в)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.2$ . Седловые точки  $\omega(k)$  обозначены кружками и квадратами. При изменении параметров  $n$  и  $\beta$  от значений в точке 5 до значений в точке 7; направления движения кривых указываются стрелками. . . . . 80
- 3.14  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.15$ , (б)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ . (в)  $n = 0.4$ ,  $\beta = 0.05$ . Седловые точки  $\omega(k)$  обозначены кружками и квадратами. При изменении параметров  $n$  и  $\beta$  от значений в точке 8 до значений в точке 10; направления движения кривых указываются стрелками. . . . . 81
- 3.15  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ , (б)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ . (в)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.2$ . Седловые точки  $\omega(k)$  обозначены кружками и квадратами. При изменении параметров  $n$  и  $\beta$  от значений в точке 11 до значений в точке 13; направления движения кривых указываются стрелками. . . . . 82
- 3.16 (а) Область неустойчивости при фиксированном числе Рейнольдса  $Re = 1000$  в зависимости от коэффициента сужения  $\chi$ . (б) Область неустойчивости при фиксированном сужении трубки  $\chi = -0,0005$  и различном числе Рейнольдса  $Re$ . . . . . 86

- 3.17 (а) Область неустойчивости при фиксированном числе Рейнольдса  $Re = 1000$  в зависимости от коэффициента расширения  $\chi$ . (б) Область неустойчивости при фиксированном расширении трубки  $\chi = 0,001$  и различном числе Рейнольдса  $Re$ . . . . . 86
- 3.18 Осесимметричное возмущение упругой трубки конечной длины . . . 88
- 3.19 Области абсолютной (AI) и конвективной (CI) неустойчивости. Параметры  $\beta$  и  $n$  для полного цикла движения из точки 1 в точку 16. 89
- 3.20  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ , (б)  $n = 0.3$ ,  $\beta = 0.3$ , (в)  $n = 0.4$ ,  $\beta = 0.3$ , (г)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.3$ .  $L = 200$  — красные точки,  $L = 100$  — синие кресты,  $L = 50$  — желтые звезды при и  $L = 10$  — зеленые плюсы. . . . . 90
- 3.21  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.2$ , (б)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$ , (в)  $n = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ , (г)  $n = 0.4$ ,  $\beta = 0.05$ .  $L = 200$  — красные точки,  $L = 100$  — синие кресты,  $L = 50$  — желтые звезды при и  $L = 10$  — зеленые плюсы. . . . . 90
- 3.22  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.3$ ,  $\beta = 0.05$ , (б)  $n = 0.2$ ,  $\beta = 0.05$ , (в)  $n = 0.1$ ,  $\beta = 0.05$ , (г)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.05$ .  $L = 200$  — красные точки,  $L = 100$  — синие кресты,  $L = 50$  — желтые звезды при и  $L = 10$  — зеленые плюсы. . . . . 91
- 3.23  $\Omega$ -кривые на комплексной  $\omega$ -плоскости. Параметры  $N = 1.5$ ,  $m = 0$ ,  $Re = 100$ . (а)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.1$ , (б)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.2$ , (в)  $n = 0.05$ ,  $\beta = 0.3$ , (г)  $n = 0.1$ ,  $\beta = 0.3$ .  $L = 200$  — красные точки,  $L = 100$  — синие кресты,  $L = 50$  — желтые звезды при и  $L = 10$  — зеленые плюсы. . . . . 91
- 3.24 (а) Область неустойчивости при  $L = 10$ ,  $Re = 100$ ,  $L_1 = L_2 = 0$ . (б) Область неустойчивости при  $Re = 100$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  и различных  $L$ . (в) Область неустойчивости при  $L = 10$ ,  $Re = 100$  и различных  $L_1$ ,  $L_2$ . 95
- 4.1 Коэффициент сопротивления  $f$  в жесткой трубе в зависимости от числа Рейнольдса . . . . . 98
- 4.2 Установка для исследования колебаний упругих трубок с протекающей внутри жидкостью. . . . . 99

- 4.3 (а) Значение коэффициента сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса для турбулентного течения. Эмпирические кривые Блазиуса  $f_{Bl}$  и Филоненко  $f_F$ ;  $f_t$  — аппроксимация полученных экспериментальных данных. (б) Коэффициент сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса для ламинарного течения жидкости с различной вязкостью. . . . . 101
- 4.4 (а) Расход (4.3) в зависимости от концентрации водного раствора глицерина; часть кривой, удовлетворяющая условию (4.4), выделена жирным. (б) Пример зависимости диаметра трубки от давления на выходе. . . . . 103
- 4.5 Четыре типа колебаний, наблюдаемых по показаниям перепада давления. . . . . 105
- 4.6 (а) Перепад давления в зависимости от расхода для турбулентного течения. (б) Давление на выходе в зависимости от расхода для турбулентного течения. . . . . 106
- 4.7 (а) Перепад давления в зависимости от расхода для ламинарного течения. (б) Давление на выходе  $p_2$  в зависимости от расхода для ламинарного течения. . . . . 107
- 4.8 Перепад давления в зависимости от расхода для (а) турбулентного и (б) ламинарного течения. . . . . 108
- 4.9 Перепад давления в зависимости от времени для третьего, второго и первого типа колебаний упругой трубки с турбулентным (а, в, д) и ламинарным (б, г, е) потоками внутри. . . . . 109
- 4.10 Перепад давления в зависимости от расхода для эквивалентных режимов течения. . . . . 110
- 4.11 Деформация упругой трубки во время колебаний третьего типа для (а) турбулентного потока (вид сбоку), (б) турбулентного потока (вид сверху), (в) ламинарного потока (вид сбоку), (г) ламинарного потока (вид сверху). . . . . 111
- 4.12 Деформация упругой трубки во время колебаний второго типа для (а) турбулентного потока (вид сбоку), (б) турбулентного потока (вид сверху), (в) ламинарного потока (вид сбоку), (г) ламинарного потока (вид сверху). . . . . 111

- 4.13 Деформация упругой трубки во время колебаний первого типа для  
(а) турбулентного потока (вид сбоку), (б) турбулентного потока  
(вид сверху), (в) ламинарного потока (вид сбоку), (г) ламинарного  
потока (вид сверху). . . . . 112

**Список таблиц**

1	Параметры кровеносных сосудов . . . . .	49
---	-----------------------------------------	----