Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

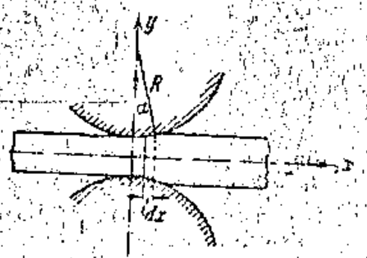
ПРОКАТКА И ВОЛОЧЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

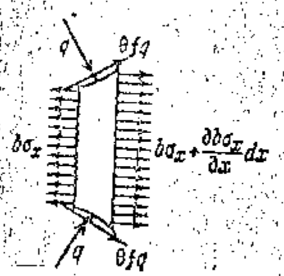
(Москва)

При расчете напряжений, возникающих при прокатке и при волочении материала, обычно принято считать, что пластические деформации материала подчиняются закону Треска-Сен-Венана, согласно которому максимальное касательное напряжение в каждой точке материала постоянно и не зависит от скорости деформирования, Так, например, поступил Карман [1], решая задачу о прокатке.

А. Ильюшин [2], решая задачу о волочении через коническое очко без трения, принял, что максимальное касательное напряжение зависит линейно от скорости деформирования. Ряд соображений об игре сил при прокатке дал Надаи. Здесь приводится схема приближенного расчета усилий при прокатке и волочении материала с учетом



Фиг. 1



Фиг. 2

трения о внешние стенки и с учетом влияния на напряженное состояние скоростей деформирования.

Как будет показано, задача при некоторых упрощающих предположениях сводится к интегрированию одного (в случае волочения) или двух (в случае прокатки) обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

1. При рассмотрении задачи о прокатке составим уравнения движения элемента (фиг. 1, 2) прокатываемой полосы между двумя сечениями x и $x + dx$. Если обозначить среднее нормальное напряжение, растягивающее или сжимающее полосу, через σ_x, а удельное давление через q, то получим уравнение

$$\rho b w_x = \frac{d}{dx}\left(\sigma_x b \right) + q \sin \alpha + \theta f q \cos \alpha \tag{1.1}$$

где ρ — плотность материала, w_x — среднее ускорение элемента, b — толщина полосы, f — коэффициент трения материала полосы о вальцы[1], θ — число, равное $+1$, если скорость элемента больше окружной скорости вальцов, и равное -1, если имеет место обратное соотношение.

Для большинства случаев инерционным членом $\rho b w_x$ можно пренебречь. Кроме того, с достаточным приближением можно считать

$$\sin \alpha \approx \frac{x}{R}, \qquad \cos \alpha \approx 1 \tag{1.2}$$

где x — расстояние сечения от прямой, проходящей через центры вальцов, и R — их радиус.

---

[1] Помимо закона трения Кулона могут быть приняты и другие. См. Надаи [3].

Для толщины полосы можно принять следующую зависимость от x:

$$b(x) = b_0 + \frac{x^2}{R} \tag{1.3}$$

где b_0 — ширина полосы после ее обжатия вальцами.

Так как упругим эффектом полосы можно полностью пренебречь, то обжатие прекращается в сечении $x = 0$ и, следовательно,

$$b_0 = l - 2R \tag{1.4}$$

где l—расстояние между центрами вальцов.

Если до прокатки толщина полосы была b_1, то из соотношения

$$b_1 = b_0 + \frac{a^2}{R} \tag{1.5}$$

нетрудно найти длину a—части полосы, которая подвергается обжатию.

Следуя Карману, примем напряжение σ_x и $-q$ приближенно равным главным нормальным напряжениям полосы. Тогда максимальное касательное напряжение для каждого сечения будет равно:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x + q) \tag{1.6}$$

Будем считать, что это напряжение линейно зависит от скорости деформации сдвига, т. е.

$$\tau_{\max} = K + \mu\gamma \tag{1.7}$$

где K—пластическая постоянная, μ—коэффициент вязкости и γ—скорость деформации сдвига. Последнюю можно подсчитать из следующих соображений: пусть v_x—средняя скорость точек сечения x в направлении оси x; если Q—объем материала, прокатываемого в единицу времени, на единицу ширины полосы, и полоса при прокатке не уширяется, то

$$v_x = -\frac{Q}{b(x)} \tag{1.8}$$

так как точки полосы имеют направление отрицательной оси.

Так как материал считается несжимаемым, то для скорости деформирования растяжения в направлении осей x и y при установившемся процессе прокатки имеем

$$\varepsilon_x = \frac{dv_x}{dx} = \frac{Q}{b^2}\frac{db}{dx}, \qquad \varepsilon_y = -\varepsilon_x = -\frac{Q}{b^2}\frac{db}{dx}$$

Принимая, как было сделано выше для напряженного состояния, оси x и y за главные оси деформации, получим для максимальной скорости сдвига в каждом сечении выражение

$$\gamma = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) = \frac{Q}{b^2}\frac{db}{dx} \tag{1.9}$$

Приравнивая (1.6) и (1.7) с помощью (1.9), найдем

$$q = -\sigma_x + 2\left(K + \mu\frac{Q}{b^2}\frac{db}{dx}\right) \tag{1.10}$$

Величина, стоящая в скобках в правой части этого равенства, есть известная функция x, если, конечно, на основании соответствующе поставленных экспериментов пластическая постоянная K и коэффициент вязкости μ определены для данного материала и для данной температуры, при которой совершается прокатка.

Если желательно учесть инерционные члены при решении задачи о прокатке, то ускорение элемента может быть определено на основании известных соотношений гидродинамики по формуле

$$w_x = v_x\frac{dv_x}{dx} = -\frac{Q^2}{b^3}\frac{db}{dx} \tag{1.11}$$

Подставляя выражение w_x и q в уравнение движения, имеем

$$-\frac{Q^2}{b^3}\frac{db}{dx} = \frac{d}{dx}x(\sigma_x b) + \left(\frac{x}{R} + 6f\right)\left[-\sigma_x + 2\left(K + \mu\frac{Q}{b^2}\frac{db}{dx}\right)\right] \tag{1.12}$$

Вводя функцию

$$P = \sigma_x b$$

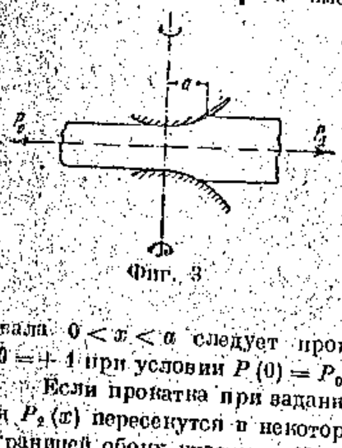
которая означает силу, с которой растягивается полоса в данном сечении, получим для этой функции дифференциальное уравнение $\quad$ (1.13)

$$\frac{dP}{dx} = \varphi(x, \theta) P + \psi(x, \theta) \qquad (1.14)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{x + \theta f R}{R b(x)}, \qquad \psi(x) = -\frac{Q^2}{R^3}\frac{db}{dx} - 2\left(\frac{x}{R} + \theta f\right)\left(K + \mu\frac{Q}{b^2}\frac{db}{dx}\right) \qquad (1,15)$$

Скорость точек сечения $x = 0$ больше окружной скорости вальцов ωR, где ω — угловая скорость вальцов. Поэтому сила трения имеет направление положительной оси x и следует на участке, примыкающем к этому сечению, положить $\theta = +1$. Точки другого крайнего сечения $x = a$ имеют скорость большую ωR, и, следовательно, на участке, примыкающем к сечению $x = a$, трение направлено в сторону отрицательной оси x («затаск» полосы); на этом участке надлежит положить $\theta = -1$.



Фиг. 3

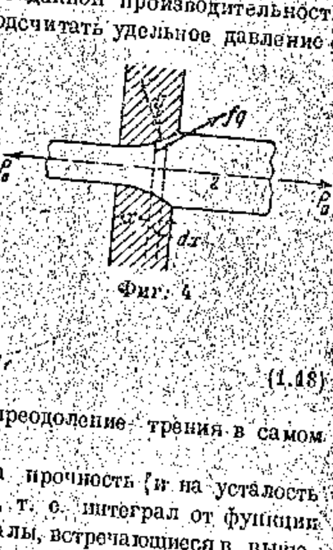
Некоторое среднее сечение $x = c$ $(0 < c < a)$, имеющее скорость, равную окружной скорости вальцов, служит разделом рассмотренных двух участков полосы.

Обозначим через P_0 и P_a усилия, приложенные по краям (фиг. 3) полосы, которые могут иметь место при различных системах прокатных станков (при прокатке без дополнительных сил следует положить P_0 и P_a равными нулю). Тогда для определения функции $P(x)$ внутри интервала $0 < x < a$ следует проинтегрировать уравнение (14) на участке $x \geqslant 0$, полагая $\theta = +1$ при условии $P(0) = P_0$ и полагая $\theta = -1$ на участке $x \leqslant a$ при условии $P(a) = P_a$.

Если прокатка при заданных силах P_0 и P_a возможна, то полученные кривые $P_1(x)$ и $P_2(x)$ пересекутся в некоторой точке с абсциссой $x = c$. Эта точка является, очевидно, границей обоих участков. Найдя ее, уже нетрудно определить из соотношения

$$\omega R = \frac{Q}{b(c)} \qquad (1.16)$$

необходимую скорость вращения вальцов для получения заданной производительности стана. Для расчета мощности, расходуемой станом, нужно подсчитать удельное давление q по границе контакта вальцов с полосой. Для этого следует воспользоваться формулой (1.10), где нужно положить $\sigma_x = P/b$. Зная q как функцию x, по формуле



Фиг. 4

$$T = f\int_0^c q(x)\,dx - f\int_c^a q(x)\,dx \qquad (1.17)$$

определяем окружное усилие на вальцах.

После этого мощность, расходуемая на прокатку, может быть вычислена по соотношению

$$w = h\left(\omega R T + P_0\frac{Q}{b_0} - P_1\frac{Q}{b_1}\right) + w_r \qquad (1.18)$$

где h — ширина полосы и w_r — мощность, расходуемая на преодоление трения в самом стане.

Для подсчета трения, а также для расчета вальцов на прочность (и на усталость) следует вычислить полную силу давления вальца на полосу, т. е. интеграл от функции $q(x)$ в пределах от 0 до a. Решение уравнения (1.14) и интегралы, встречающиеся в вышенаписанных формулах, могут быть вычислены одним из приближенных способов квадратур.

2. Задача о волочении требует примерно той же схемы расчета, как и задача о прокатке. Напишем прежде всего уравнения движения элемента материала, подвергающегося волочению (фиг. 4). Если через σ_x обозначить среднее значение растягивающего напряжения по сечению материала, нормальному к оси симметрии, и через

q — удельное давление на границу материала по поверхности очка, то уравнение представится в виде

$$\rho F w_z = \frac{d}{dz}(\sigma_z F) + q \sin\alpha + fq\cos\alpha \tag{2.1}$$

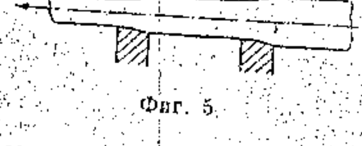
где F — площадь поперечного сечения материала, ρ — его плотность, α — угол наклона касательной к образующей поверхности очка с осью z, f — коэффициент кулонова трения материала о стенки. Если трение не подчиняется закону Кулона, то последний член правой части уравнения должен быть соответственно изменен.

Пусть Q — объем материала, проходящий через очко в единицу времени. Тогда средняя скорость движения частиц, расположенных по какому-либо сечению, выразится формулой:

$$v_z = -\frac{Q}{F} \tag{2.2}$$

так как согласно принятому на фиг. 4 направлению оси z движение материала происходит в направлении отрицательной оси z. При стационарном процессе волочения получим для ускорения выражение

$$w_z = v_z \frac{dv_z}{dz} = \frac{Q^2}{F^3}\frac{dF}{dz} \tag{2.3}$$



Фиг. 5.

Зная очертания очка, нетрудно построить функции

$$\alpha = \alpha(z), \quad F = F(z) \quad \text{и} \quad dF/dz = F'(z) = 2\pi r \operatorname{tg}\alpha,$$

где r — радиус сечения материала, находящегося на расстоянии z от левого края очка.

Будем считать, что в первом приближении аналогично задаче о прокатке $q = -\sigma_r$, где σ_r — нормальное напряжение на площадках, нормали к которым проходят через ось z.

Примем, кроме того, деформированное и напряженное состояния по сечению материала однородными. Главные напряжения и главные деформации примем приближенно соответственно равными:

$$\sigma_1 = \sigma_z, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_z = \frac{dv}{dz} = \frac{Q}{F^2}\frac{dF}{dz}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \tag{2.4}$$

Для пространственного течения материала примем уравнения пространственного деформирования вязкопластической среды, полученные нами ранее [4]. Так как по направлению оси z происходит растяжение и, кроме того, деформация ε_z является наибольшей из всех трех главных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, то уравнения деформирования примут вид

$$\sigma_1 = \frac{4}{3}K + \mu\varepsilon_1, \qquad \sigma_2 = -\frac{2}{3}K + \mu\varepsilon_2, \qquad \sigma_3 = -\frac{2}{3}K + \mu\varepsilon_3 \tag{2.5}$$

Откуда

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_z - \sigma_r = 2K + \mu(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = 2K + \frac{3}{2}\mu\frac{Q}{F^2}\frac{dF}{dz} \tag{2.6}$$

Следовательно,

$$-\sigma_r = q = -\sigma_z + 2K + \frac{3\mu Q}{2F^2}F'(z) \tag{2.7}$$

Подставляя значение q в уравнение движения элемента и вводя обозначение

$$P = \sigma_z F$$

придем к уравнению

$$\frac{dP}{dz} + \varphi(z)P = \psi(z) \tag{2.8}$$

где

$$\varphi(z) = -\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{F}, \qquad \psi(z) = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)\left[2K + \frac{3\mu Q}{2F^2}F'(z)\right] - \rho\frac{Q^2}{F^2}\frac{dF}{dz}$$

являются известными. Начальным условием при волочении обычно следует считать

$$P = 0 \quad \text{при} \quad z = a.$$

где a — координата правого края очка. В результате решения уравнения найдем усилие, развиваемое в материале с левой стороны очка. При волочении последовательно через два очка (фиг. 5) начальное условие для первого очка будет тем же, а для второго — растягивающее усилие в материале с правой стороны очка уже не будет равно нулю и определится из решения задачи для первого очка.

Поступила в редакцию 7 IV 1941.

HIGH SPEAD ROLLING AND DRAWING OF MATERIAL

A. J. ISHLINSKY

(Summary)

The article contains the schematic calculation of stresses developed due to rolling and drawing of material. The influence of the velocity of deformation on the stressed state of the material and the external friction are taken into consideration.

The author employs the simplifying assumption that the stressed and deformed states of material over the cross-section perpendicular to the direction of movement are homogeneous.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman. Zeitschrift f. angew. Mat. u. Mech. 1925. Vol. 5.
2. Ильюшин А. А. Труды конференции по пластической деформации. М. 1936.
3. Nadai. Journal of Applied Mechanik. 1939. T. 6. № 2.
4. Ишлинский А. Ю. Уравнения пространственного деформирования не вполне упругих тел. Печ. в Уч. записках МГУ.