ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ МГУ

# НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

№ 29

МОСКВА– 1973

## ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ИНЕРЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД НАВИГАЦИИ

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.Ю. Ишлинский

Задача о так называемом автономном, т.е. без использования внешних ориентиров, определении местоположения движущегося объекта (инерциальная навигация) имеет большое практическое значение. Возможно ли определить свое местоположение, используя лишь приборы, действующие на механическом принципе? Представляется на первый взгляд непостижимой сама идея решения такой задачи. Однако это возможно. Достижения механики в настоящее время несколько остаются в тени, однако многие из них поистине изумительны.

Например, кажется принципиально невозможным создание такого маятника, который не качался бы на подвижном объекте. Но это не так, если считать, что Земля - шар с радиальным распределением плотности, а сила тяготения проходит через центр масс маятника. Оказывается, что в пределах такой модели в принципе можно создать такой маятник, что при любом движении точки его подвеса прямая, проходящая через эту точку и центр масс, всегда будет направлена к центру Земли. Необходимо лишь обеспечить удовлетворение надлежащих начальных условий движения. Вопрос об этом был предметом большого числа работ, исследований и сомнений. Идея такого маятника принадлежит известному немецкому механику Шулеру и была высказана уже полвека тому назад.

Рассмотрим плоский физический маятник Шулера, точка подвеса которого движется произвольным образом по дуге большого круга невращающейся сферы $S$, окружающей Землю (рис.1). Пусть в начальный момент линия маятника, соединяющая точку подвеса и центр масс $C$, проходит через общий центр $O$ Земли и этой сферы $S$. Каким условиям должны удовлетворять параметры маятника, чтобы линия $AC$ проходила через точку $O$ при любом движении точки $A$ по упомянутой дуге большого круга?

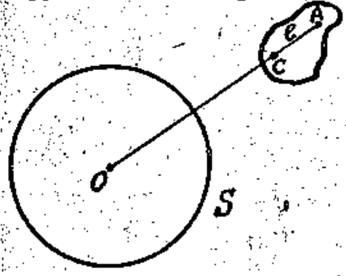


Рис. I

Свяжем с маятником некоторое воображаемое абсолютно твердое тело, не имеющее массы и закрепленное в неподвижной точке $O$ (рис.2). При движении в точках $A$ и $O$ возникнут силы реакций. Обозначим их горизонтальные составляющие через $N$ и $P$. Запишем уравнение вращения такого "продолженного" маятника вокруг неподвижной точки $O$. Имеем

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = PR .$$

Здесь $J_0$ - момент инерции маятника относительно центра Земли $O$ и $R = r + e$. С другой стороны, рассматривая уравнение движения центра масс маятника в направлении касательном к его траектории, получим

$$m\frac{dv_0}{dt} = mr\frac{d^2\theta}{dt^2} = P - N .$$

Попробуем выбрать параметры маятника так, чтобы было $N = 0$. Для этого необходимо взять $J_0 = mrR$. Вспомним теорему Штейнера. Имеем $J_0 = J_c + mr^2$ и $J_A = J_c + ml^2$. Теперь получаем $J_A = mrR - mr^2 + ml^2 = mRl$. Однако, если $N = 0$, то дополнительное тело с закреплением в точке $O$ можно отбросить. Следовательно, если в начальный момент линия плоского физического маятника проходит через центр $O$ и $J_A = mlR$, то при любом последующем движении точки подвеса маятника по дуге большого круга линия маятника будет все время проходить через точку $O$. Разумеется в начальное мгновение времени $t = 0$ маятник или должен быть неподвижен или вращаться с той же угловой скоростью, с которой обращается радиус $OA$. В последнем случае в мгновение $t = 0$ должно соблюдаться очевидное условие

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_c}{R-l}.$$

Из теории удара следует, что точка подвеса маятника $A$ при выполнении условия $J_A = mlR$ является центром удара для тела (рис.2), у которого точка $O$ неподвижна. К сожалению условие $J_A = mlR$ при движении точки подвеса по поверхности сферы $S$, окружающей Землю, выполнить практически нельзя. Например, если изготовить маятник в виде сферы радиусом I м, то смещение $l$ точки подвеса от центра сферы должно быть около 1/16 мк. Имеющиеся тепловые и упругие деформации не позволяют поддерживать эту величину с необходимой точностью. Существенно, однако, что величина силы тяготения не имеет никакого отношения к параметрам маятника. В связи с этим упомяну о приборе, который известный немецкий ученый Магнус показал мне в Мюнхене в 1967 году.

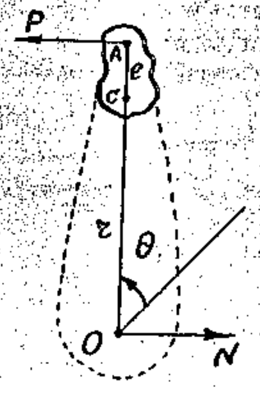

Рис.2

Стержень с рукояткой может вращаться в горизонтальной плоскости (рис.3) вокруг вертикальной оси. На стержне укреплен маятник, плоскость колебаний которого также горизонтальна. Точку подвеса маятника можно смещать вдоль стержня. Перемещая точку подвеса маятника вдоль стержня, можно найти такое ее положение, что при любом переменном вращении стержня в горизонтальной плоскости линия маятника будет направлена вдоль стержня. Если теперь точку подвеса сместить, то при внезапном повороте стержня из положения покоя в одну и ту же сторону маятник будет отклоняться в разные стороны в зависимости от того, смещена ли точка подвеса в сторону рукоятки или же, напротив, в другую сторону. Стержень приводится во вращение вокруг вертикальной оси непосредственно рукой экспериментатора (за рукоятку). Мы рассмотрели плоский физический маятник Шулера, движущийся по дуге большого круга. Найдем теперь условия, которым должны удовлетворять значения параметров пространственного физического маятника Шулера, точка подвеса которого произвольным образом движется по неподвижной сфере $S$, окружающей Землю, с тем радиусом $R$ и центром, что и Земля (рис.4). Пусть система координат $xyz$ с началом в точке подвеса жестко связана с маятником. Уравнения движения маятника относительно некоторой поступательно перемещающейся системы координат в проекциях на оси подвижной системы координат $xyz$, имеют следующий вид

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=L_x+mom_x P,$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=L_y+mom_y P,$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=L_z+mom_z P.$$

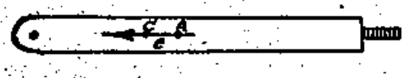

Рис.3

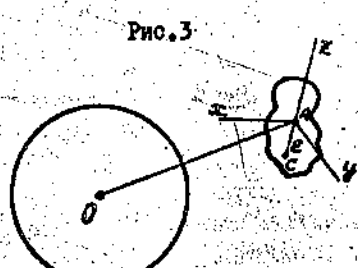

Рис.4

Здесь $A$, $B$, $C$ – моменты инерции маятника относительно осей $xyz$ соответственно. При этом предполагается, что оси $xyz$ являются главными осями инерции. Абсолютная угловая скорость системы координат $xyz$ имеет проекции на свои же оси соответственно $p$, $q$, $r$. Момент $\bar{L}$ является моментом силы тяготения $\bar{F}$. Момент же силы реакции $N$ относительно точки подвеса разумеется равен нулю. Далее

$$\bar{P}=-m\bar{W}$$

– переносная сила инерции, обусловленная движением невращающейся системы координат с началом в точке подвеса маятника с ускорением $\bar{W}$.

Задача состоит в следующем. Нельзя ли подобрать параметры маятника $A$, $B$, $C$, $\ell$ и начальные условия движения так, чтобы при произвольном (совершенно произвольном!) движении точки подвеса по сфере $S$ линия $OC$ неизменно проходила бы через центр Земли (или, что то же, через центр сферы $S$). Короче, возможен ли невозмущаемый пространственный физический маятник? Допустим, что это возможно. Тогда линия $OC$ будет направлена по радиусу сферы $S$, а движение маятника и, в частности, точки его подвеса $O$ по сфере $S$ можно задать проекциями скорости $v_x$, $v_y$ точки подвеса на оси $x$, $y$ и проекцией $r$ угловой скорости маятника на ось $z$. Ограничимся случаем

$$x_c=y_c=0,\quad z_c=-\ell,$$

где $x_c$, $y_c$ и $z_c$ – координаты центра масс маятника. По известным формулам кинематики имеем теперь

$$p = -\frac{v_y}{R}, \quad q = \frac{v_x}{R}.$$

Поскольку предполагалось, что невозмущаемое движение маятника возможно, то выписанная выше система уравнений должна обращаться в тождество при произвольных функциях времени $v_x$, $v_y$. Эта система уравнений запишется теперь в виде:

$$-\frac{A}{R}\frac{dv_y}{dt} + (C-B)\frac{v_x r}{R} = -mlW_y,$$

$$\frac{B}{R}\frac{dv_x}{dt} - (A-C)\frac{v_y r}{R} = mlW_x,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (A-B)\frac{v_x v_y}{R^2} = 0.$$

Согласно формулам кинематики

$$W_x = \frac{dv_x}{dt} - v_y r, \quad W_y = \frac{dv_y}{dt} + v_x r.$$

Подставив в последнюю систему уравнений выражения $W_x$, $W_y$ получим

$$-\frac{A}{R}\frac{dv_y}{dt} + (C-B)\frac{v_x r}{R} = -ml\left(\frac{dv_y}{dt} + rv_x\right),$$

$$\frac{B}{R}\frac{dv_x}{dt} - (A-C)\frac{v_y r}{R} = ml\left(\frac{dv_x}{dt} - rv_y\right),$$

$$C\frac{dr}{dt} - (B-A)\frac{v_x v_y}{R^2} = 0.$$

Так как равенства являются тождествами, то члены одинаковой структуры в их левых и правых частях должны быть равны. Из первых двух тождеств имеем

$$A = mlR$$

и

$$B = mlR.$$

Следовательно,

$$A = B = m\ell R.$$

Кроме того, должно быть:

$$(C - B + m\ell R)\,r = 0,$$
$$(A - C - m\ell R)\,r = 0.$$

Однако в силу соотношения $A = B = m\ell R$ эти условия совпадают и приводятся к виду $Cr = 0$. Следовательно, либо $C = 0$ и $r$ – произвольная величина, либо $r = 0$ и тогда $C$ может быть произвольным. Вместе с тем из третьего тождества при $A = B$ следует

$$C\frac{dr}{dt} = 0, \quad Cr = Cr(0).$$

Поэтому, если в начальный момент времени $r(0) = 0$, то тем самым обеспечивается равенство

$$r(t) = r(0) = 0.$$

Таким образом возможны два случая:

1) $A = B = m\ell R,\ C = 0,\ r \neq 0;$

2) $A = B = m\ell R,\ C \neq 0,\ r = 0.$

Первый случай физически не реален, так как только бесконечно тонкий стержень, вытянутый вдоль оси $z$, имеет момент инерции $C$ равным нулю. Второй случай как раз и соответствует пространственному маятнику Шулера. Итак, пусть такой маятник установлен в начальный момент так, чтобы линия $OC$ была направлена по радиусу Земли, имело место равенство $r(0) = 0$ и, кроме того, выполнялись в начальный момент равенства $v_y = -pR$, $v_x = qR$, установленные ранее. Тогда при дальнейшем произвольном движении точки подвеса по поверхности Земли ось $OC$ будет все время направлена к центру Земли.

Реализовать такой маятник, как об этом упоминалось выше, крайне затруднительно. Однако можно создать модель маятника Шулера с помощью гироскопов, ньютонометров и интегрирующих устройств. Подобная модель может дать многое для решения задачи местоопределения движущегося объекта, но, разумеется, не решает ее полностью. Важным прибором для осуществления инерциальной навигации является пространственный трехосный гироскопический стабилизатор. Этот стабилизатор позволяет на подвижном объекте материализовать систему координат, ориентированную по неподвижным звездам. По образному выражению американских специалистов он представляет из себя как бы "звездное небо в бутылке". Если звезды видны, то гироскопический стабилизатор не нужен. Но безоблачное небо - явление ненадежное. А гиростабилизатор как бы запоминает звездное небо, если совместить оси гироскопического стабилизатора с осями, направленными к неподвижным звездам и, кроме того, расположить на подвижном объекте маятник Шулера, то определить свое местоположение уже нетрудно. В самом деле, маятник Шулера покажет направление к центру Земли, что вместе со "звездным небом в бутылке" позволяет узнать широту места и курс. Используя часы, можно определить и долготу.

Поразительным достижением в теории и практике гироскопических приборов является создание пространственного гироскопического компаса Геккелера. В жидкости во взвешенном состоянии плавает сфера из латуни. Сфера покрыта эбонитом. На сфере имеются электроды - две шапки и экватор. Через поддерживающую жидкость к электродам подводится трехфазный переменный ток. Внутри латунной сферы находятся два гироскопа, оси кожухов которых параллельны, кожухи гироскопов связаны спарником так, что они могут поворачиваться в разные стороны на равные углы $\varepsilon$ (рис.5). Со сферой, именуемой также гиросферой, свяжем систему координат $xyz$. Механическая система гироскопического компаса имеет шесть степеней свободы - углы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ определяют ориентацию гиросферы относительно так называемой географической системы координат, угол - $\varepsilon$ - поворот одного из кожухов гироскопов относительно сферы, углы $\varphi_1$, $\varphi_2$ - повороты роторов гироскопов относительно кожухов.

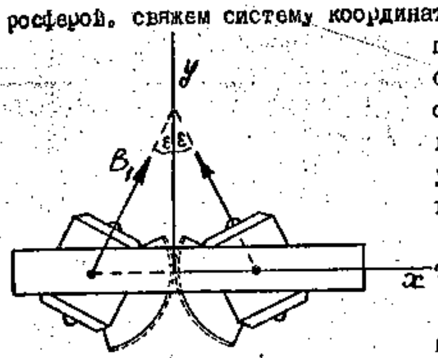

Рис.5

Будем считать собственные кинетические моменты гироскопов $B_1 = C_1 \frac{d\varphi_1}{dt}$, $B_2 = C_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$ равными одной и той же величине $B$. Следуя прецессионной теории гироскопов примем кинетический момент гирорамы равным $H = 2B\cos\varepsilon$, т.е. геометрической сумме собственных кинетических моментов $B_1$ и $B_2$. Применяя теоремы об изменении момента количества движения, можно составить прецессионные уравнения движения гирокомпаса. Они таковы

$$-\omega_z 2B\cos\varepsilon = M_x, \quad \omega_x 2B\cos\varepsilon = M_z;$$

$$\frac{d}{dt}(2B\cos\varepsilon) = M_y, \quad -\omega_y 2B\sin\varepsilon = N.$$

Здесь $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ - проекции угловой скорости гиросферы на оси системы координат $xyz$, жестко с нею связанной, $M_x$, $M_y$, $M_z$ - суммы моментов сил, действующих на гиросферу вокруг соответствующих осей. Момент $N$ стремится "развести" кожухи гироскопов. Он создается посредством специального пружинного устройства. Оказывается, что параметры гироскопического компаса можно подобрать так, чтобы при соблюдении надлежащих начальных условий ось $z$ была бы все время нормальна к сфере $S$, каким бы образом ни перемещался по ней центр гиросферы. Введем некоторую подвижную систему координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$, начало которой расположено в точке подвеса гиросферы, а оси $\xi^*$, $\eta^*$ и $\zeta^*$ ориентированы по неподвижным звездам. Уравнениями движения гиросферы относительно такой системы координат как раз и являются выписанные выше уравнения. Параметры гиросферы можно подобрать так, чтобы эти уравнения удовлетворялись тождественно при произвольном движении точки подвеса гиросферы.

Наряду с тяготением гиросферы к центру Земли и реакцией ее подвеса в число сил, действующих на гиросферу, следует включить переносные силы инерции, обусловленные поступательным перемещением системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Последние приводятся к единственной силе $Q$, приложенной к центру масс гиросферы. Проекции силы $Q$ на оси системы координат $xyz$ имеют вид

$$Q_x = -mW_x \ ; \quad Q_y = -mW_y \ ; \quad Q_z = -mW_z .$$

Здесь $m$ - масса гиросферы вместе с кожухами и роторами ее гироскопов, $W_x$, $W_y$, $W_z$ - проекции на оси системы координат ускорения точки подвеса гиросферы при ее движении по невращающейся сфере $S$. Согласно известным формулам кинематики

$$W_x = \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y ,$$

$$W_y = \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z ,$$

$$W_z = \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x ,$$

где $v_x$, $v_y$, $v_z$, $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ - проекции скорости центра подвеса и угловой скорости гиросферы на оси системы координат $xyz$. Ось $z$ должна быть нормальна к сфере $S$. Следовательно

$$v_x = \omega_y R \ , \quad v_y = -\omega_x R \ , \quad v_z = 0 .$$

Проекции силы $Q$ на оси системы координат $xyz$ теперь можно представить в виде

$$Q_x = -mR\left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x\right),$$

$$Q_y = -mR\left(-\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_z \omega_y\right),$$

$$Q_z = -mR\left(-\omega_x^2 - \omega_y^2\right).$$

Пусть центр масс гиросферы расположен на отрицательной части оси $z$ на расстоянии $\ell$ от точки подвеса. Сила тяготения в рассматриваемом случае невозмущенного движения гироскопического компаса направлена по оси $z$ и ее момент относительно точки подвеса равен нулю. То же относится к составляющей силы инерции $Q_z$ и силе реакции связи. Поэтому для нахождения $M_x$, $M_y$, $M_z$ достаточно в этом случае найти моменты сил $Q_x$

$Q_y$ относительно осей $x$, $y$, $z$. В результате получим

$$M_x = lQ_y, \quad M_y = -lQ_x, \quad M_z = 0.$$

Уравнения движения гироскопического компаса приводятся теперь к системе равенств

$$-\omega_z 2B\cos\varepsilon = mlR\left(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y\omega_z\right),$$

$$\frac{d}{dt}(2B\cos\varepsilon) = mlR\left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x\omega_z\right),$$

$$\omega_x 2B\cos\varepsilon = 0, \quad -\omega_y 2B\sin\varepsilon = N.$$

Гиросфера будет совершать описанное выше невозмущенное движение, при котором ось $z$ проходит через центр Земли, если эти равенства обратятся в тождества. Согласно третьему из них при $\varepsilon \neq \pi/2$ имеем $\omega_x = 0$. Теперь нетрудно видеть, что из первых двух равенств следует соотношение $2B\cos\varepsilon = H = mlR\omega_y$. Исключая затем величину $\omega_y$ из четвертого равенства, приходим к соотношению

$$N = -\frac{4B^2}{mlR}\cos\varepsilon\sin\varepsilon.$$

Это соотношение определяет форму зависимости момента $N$ от угла $\varepsilon$. Теперь можно найти начальные условия движения гиросферы, чтобы описываемое движение оказалось возможным. Согласно соотношениям $v_y = -\omega_x R$ и $\omega_x = 0$ имеем $v_y = 0$. Следовательно, в начальное мгновение времени ось $x$, связанная с гиросферой, должна быть направлена по касательной к траектории точки подвеса при ее движении по сфере $S$. Ось $x$ будет касаться упомянутой траектории во все время движения лишь при соблюдении и остальных приводимых ниже начальных условий.

В соответствии с формулами $v = v_x = \omega_y R$ и $2B\cos\varepsilon = mlR\omega_y$ получаем равенство $2B\cos\varepsilon = mlv$, где $v$ - величина скорости точки подвеса гиросферы относительно невращающейся сферы $S$.

Следовательно, если начальное значение скорости было $v_0$, то следует установить кожухи гироскопов так, чтобы начальное значение угла $\varepsilon$ было в согласии с формулой

$$\cos\varepsilon_0 = \frac{mlv_0}{2B}.$$

В дальнейшем при произвольном движении точки подвеса соотношение $2B\cos\varepsilon = mlv$ останется в силе в течение всего времени движения. Наконец, в начальное мгновение времени ось $z$, параллельная осям кожухов гироскопов должна быть нормальна к сфере $S$. При соблюдении перечисленных условий момент $N$ будет именно таким, чтобы исходная система уравнений удовлетворялась тождественно.

Если в начальный момент времени найденные условия удовлетворены с малой погрешностью и, в частности, ось $z$ отклонена от нормали к поверхности $S$ на небольшой угол, то движение гиросферы может быть исследовано посредством изучения малых колебаний около движения, при котором начальные условия соблюдаются точно.

Рассмотрим теперь движения гиросферы относительно Земли, принимая ее за шар радиуса $R$ и считая, что все условия в начальное мгновение выполнены точно.

Введем подвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ (географический трехгранник), ось $\xi$ которой направлена по касательной к параллели на Восток, ось $\eta$ – по касательной к меридиану на Север и ось $\zeta$ – по радиусу Земли кверху. Начало координат расположим в точке подвеса гиросферы. Обозначим через $V_E$ и $V_N$ – соответственно восточную и северную составляющие скорости начала системы $\xi\eta\zeta$ относительно Земли. Проекции на оси $\xi$ и $\eta$ скорости этой точки по отношению к невращающейся сфере $S$ представляются следующим образом:

$$v_\xi = V_E + UR\cos\varphi, \quad v_\eta = V_N.$$

Здесь $U$ – угловая скорость вращения Земли, $\varphi$ – широта места. Отсюда получаются известные формулы

$$u_\xi = -\frac{V_N}{R}, \quad u_\eta = \frac{V_E}{R} + U\cos\varphi$$

для проекций угловой скорости трехгранника $\xi\eta\zeta$ относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, ориентированной по неподвижным звездам. Проекция этой угловой скорости на ось $\zeta$ выражается формулой

$$u_\zeta = \frac{V_E}{R}\operatorname{tg}\varphi + U\sin\varphi.$$

Обозначим через $\vartheta$ угол между осями $y$ и $\eta$, отсчитывая положительное направление угла так, как показано на рис.6. Проекции угловой скорости системы координат $xyz$, связанной с гиросферой, на оси $x$, $y$ и $z$ имеют вид:

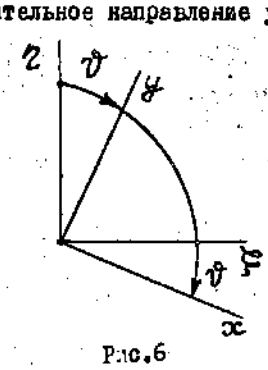


Рис.6

$$\omega_x = u_\xi\cos\vartheta - u_\eta\sin\vartheta,$$
$$\omega_y = u_\xi\sin\vartheta + u_\eta\cos\vartheta,$$
$$\omega_z = u_\zeta - \frac{d\vartheta}{dt}.$$

В соответствии с законами движения гироскопического компаса в первой из этих формул следует положить $\omega_x = 0$. В результате получим

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{u_\xi}{u_\eta} = -\frac{V_N}{V_E + RU\cos\varphi}.$$

Таким образом, ось $y$ , связанная с гиросферой, отклоняется от направления на Север на угол $\vartheta$ , определяемый полученной формулой. Последняя совпадает с известной формулой так называемой скоростной девиации гироскопического компаса. Пространственный гироскопический компас поставляет системе инерциальной навигации несравненно больше информации, чем маятник Шулера. При движении по поверхности Земли становится известной не только ориентация объекта в азимуте, но и его абсолютная скорость по отношению к сфере $S$ . В самом деле, согласно соотношению $\mathcal{B}\cos\varepsilon = m\ell v$ измеряя угол $\varepsilon$ можно определять $v$ .

Введем трехгранник $x_o y_o z_o$ следующим образом. Ось $x_o$ направим по касательной к сфере $S$ вдоль скорости точки подвеса гиросферы, ось $z_o$ - по радиусу Земли (по геоцентрической вертикали), ось $y_o$ , как и ось $x_o$ , лежит в касательной плоскости, образуя вместе с осями $x_o$ и $z_o$ правую систему координат. Трехгранник $x_o y_o z_o$ назовем естественным трехгранником Дарбу. Проекции абсолютной угловой скорости трехгранника Дарбу на его же оси имеют вид:

$$\omega_{x_o} = 0 \ , \quad \omega_{y_o} = \frac{v}{R} \ , \quad \omega_{z_o} = \tilde{\omega}.$$

В свою очередь проекции ускорения начала координат на те же оси таковы

$$W_{x_o} = \frac{dv}{dt} \ , \quad W_{y_o} = \tilde{\omega} v \ , \quad W_{z_o} = -\frac{v^2}{R}.$$

Движение трехгранника полностью определяется заданием $v$ и $\tilde{\omega}$ , как функцией времени. Гироскопический компас в сущности позволяет реализовать систему координат $xyz$ такую, что оси этой системы сливаются с осями трехгранника Дарбу. Для того, чтобы построить сферическую кривую, по которой движется точка подвеса, надо определять . А это можно сделать, например, с помощью гироскопа направления.

Если сформулированные выше начальные условия для пространственного гирокомпаса соблюдены не точно, то в случае малых отклонений от упомянутых условий гироскопический компас будет совершать малые колебания с соответствующими изменениями углов $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , $\varepsilon$ . Уравнения этих малых колебаний гиросферы в соответствии с элементарной теорией гироскопов можно привести к четырем линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. При условии $g \gg v^2/R$ ( $g$ - ускорение силы тяжести) систему уравнений малых колебаний можно проинтегрировать в квадратурах. В частном случае $v = const$ , $\tilde{\omega} = const$ уравнения можно проинтегрировать до конца. При этом, если обозначить через $\nu = \sqrt{g/R}$ частоту Шулера, то при $v = const$ , $\tilde{\omega} = const$ будет иметь место суперпозиция гармонических колебаний с частотами $\nu + \tilde{\omega}$ и $\nu - \tilde{\omega}$ .

В заключение рассмотрим некоторые вопросы, возникающие при интегрировании уравнений системы инерциальной навигации. Как известно, задача об определении местоположения движущегося объекта на земной сфере посредством инерциальных приборов - гироскопов и ньютонометров сводится в конечном счете к непрерывному интегрированию совокупности нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$\left(U+\frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\varphi\sin\chi-\frac{d\varphi}{dt}\cos\chi=\omega_x(t),$$

$$\left(U+\frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\varphi\cos\chi+\frac{d\varphi}{dt}\sin\chi=\omega_y(t),$$

$$\left(U+\frac{d\lambda}{dt}\right)\sin\varphi+\frac{d\chi}{dt}=\omega_z(t).$$

В этих уравнениях $\lambda$ и $\varphi$ - соответственно искомые долгота и широта места; $U$ - угловая скорость Земли; $\chi$ - угол (также подлежащий определению) между плоскостью меридиана места и горизонтальным ребром $y$ трехгранника $xyz$, жестко связанного со стабилизированной платформой инерциальной системы (рис.7). Ребро $z$ этого трехгранника непрерывно ориентируется по вертикали места; $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ - функции, представляющие собой проекции угловой скорости трехгранника $xyz$ на его ребра. Функции $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ вырабатываются приборами системы инерциальной навигации. Их текущие значения подаются вместе с начальными величинами углов $\lambda$, $\varphi$ и $\chi$ на вход устройства, интегрирующего совокупность приведенных выше уравнений.

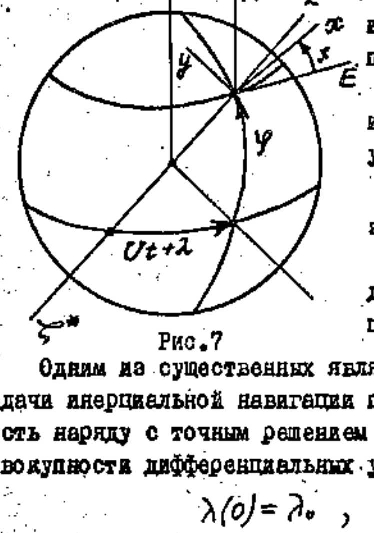


Рис.7

На выходе интегрирующего устройства образуются искомые функции $\lambda(t)$, $\varphi(t)$ и $\chi(t)$, определение которых и составляет содержание основной задачи инерциальной навигации.

Одним из существенных является вопрос об устойчивости решения основной задачи инерциальной навигации по отношению к начальным условиям. Именно, пусть наряду с точным решением $\lambda=\lambda(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $\chi=\chi(t)$ совокупности дифференциальных уравнений, удовлетворяющим начальным условиям

$$\lambda(0)=\lambda_0\ ,\quad \varphi(0)=\varphi_0\ ,\quad \chi(0)=\chi_0$$

строится также точное решение

$$\lambda=\lambda^*(t)\ ,\quad \varphi=\varphi^*(t),\ \chi=\chi^*(t)$$

той же совокупности, но при незначительно измененных начальных условиях

$$\lambda(0)=\lambda_0^*\ ,\quad \varphi(0)=\varphi_0^*\ ,\ \chi(0)=\chi_0^*.$$

Будут ли при этом функции $\lambda^*(t)$, $\varphi^*(t)$, $\chi^*(t)$ в любое мгновение времени столь же незначительно отличаться соответственно от $\lambda(t)$, $\varphi(t)$, $\chi(t)$, если правые части уравнений, т.е. $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, останутся одними и теми же.

В районе полюсов Земли малым смещениям объекта могут соответствовать очень большие изменения долготы $\lambda$ и азимутального угла $\chi$. Поэтому изложенная постановка вопроса об устойчивости решения основной задачи инерциальной навигации нуждается в некотором видоизменении.

Пусть в начальное мгновение $t = 0$ ориентации двух трехгранников $xyz$ отличаются на малый угол $\alpha_0$ конечного поворота и дальнейшее движение совершается так, что проекции угловой скорости каждого из них на соответствующие ребра $x$, $y$, $z$, т.е. функции $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ совершенно одинаковы.

Обозначим через $\alpha(t)$ угол конечного поворота $A(t)$, на который отличаются последующие положения описанных трехгранников, относящиеся к одному и тому же мгновению времени. Целесообразная постановка вопроса об устойчивости заключается в исследовании поведения угла $\alpha(t)$ при неограниченном возрастании времени $t$. Ответ на этот вопрос оказывается неожиданно простым: конечные повороты $A(t)$ и $A_0$ для любого мгновения времени совпадают один с другим, т.е. угол $\alpha(t)$ оказывается постоянным и равным своему начальному значению $\alpha_0$ и, кроме того, ось $a$ конечного поворота $A(t)$ не меняет своей ориентации в неподвижном пространстве.

Доказательство этого положения основывается на простой теореме. Два конечных поворота твердого тела $A$ и $B$, соответственно, вокруг неподвижно ориентированной оси $a$ на угол $\alpha$ и на угол $\beta$ вокруг оси $b$, жестко связанной с телом, переставимы.

## ЛИТЕРТУРА


1. Ишлинский А.Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, т.XX, вып.3, 1956.
2. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. Изд-во АН СССР, 1963.
3. Ишлинский А.Ю. Геометрическое рассмотрение устойчивости решения основной задачи инерциальной навигации. МТТ, № 3, 1968.