В сб.: Автоматика и электромеханика. М.: Наука, 1973, с. 18–29

ИДЕИ ТЕОРИИ ИНВАРИАНТНОСТИ И ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПОЛНОЙ КОМПЕНСАЦИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ИХ НЕРАВНОМЕРНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

А. Ю. Ишлинский

Вопросы инвариантности или компенсации внешних нагрузок имеют давнюю историю. Можно привести ряд примеров автоматических устройств, начиная с ветряных мельниц и кончая современными синхронными передачами, где в той или иной мере используется компенсация внешних нагрузок.

Некоторые теоретические разработки в этом направлении были не всегда безупречны и подвергались подчас ожесточенной критике. Сюда относятся в первую очередь попытки покойного Г. В. Щипанова сформулировать условия полной компенсации внешних возмущений в системах автоматического регулирования, действующих по отклонению регулируемой величины. Вместе с тем и сама критика в своих обобщениях оказалась недостаточно осторожной, утверждая, например, что ни в какой физически реальной системе полная компенсация внешних возмущений невозможна. Достойно также сожаления стремление придать спорам чуть ли не идеологический характер.

Как и всегда в подобных случаях, конкретные примеры полезнее общих рассмотрений, особенно примеры из практики фактически действующих устройств.

Следует различать по крайней мере два вида осуществления независимости хода изменения одного из параметров, характеризующих систему, от закона изменения одной или нескольких из действующих на нее внешних нагрузок.

К первому виду относится распадение совокупности дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы, на две или несколько подсовокупностей; в одну из них входит интересующий нас параметр, а в другую — упомянутые нагрузки. При этом процессы, которые соответствуют каждой подсовокупности уравнений, разыгрываются, вообще говоря, на одних и тех же элементах рассматриваемой системы; условия же распадения в сущности и являются так называемыми условиями инвариантности.

Электрическая система (рис. 1), схема которой образует мостик, может служить одним из простейших примеров подобного рода. Известно, что при соблюдении условий

$$R_1/R_3 = R_2/R_4 = L_1/L_3 = L_2/L_4 \tag{1}$$

сила тока i в диагонали bc совершенно не зависит от хода изменения напряжения $u(t)$, приложенного к другой его диагонали ad.

Академик В. С. Кулебакин показал, что только что приведенные условия так называемой балансировки мостика совпадают с условиями компенсации Г. В. Щипанова для системы с тремя степенями свободы.

Электрическая система мостика не является автоматическим регулятором в обычном смысле этого слова. Однако она представляет собой физически реальную систему, довольно распространенную в электротехнике. Академик В. С. Кулебакин дал ряд новых примеров, полезных для практики, где схемы типа мостика являются органической частью автоматического устройства.

Многочисленные примеры распадения имеются в области механики колебаний упругих систем, если ее рассматривать с этой новой точки зрения. Так, всевозможные движения балки, лежащей на двух опорах (рис. 2), описываются представлением уравнения ее упругой линии в виде ряда

$$v(x, t) = q_1 \sin\frac{\pi x}{l} + q_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + q_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots + q_k \sin\frac{k\pi x}{l} + \ldots, \quad (2)$$

где q_1, q_2, ... — подлежащие определению функции времени, которые следует считать параметрами этой механической системы или, как это принято называть в механике, обобщенными координатами.

Функции q_1, q_2 ... определяются как начальными условиями движения балки, так и законом меняющейся во времени нагрузки, действующей на балку.

Нетрудно представить себе такие нагрузки, которые не в состоянии оказать влияние на какую-либо из координат упругой системы или даже

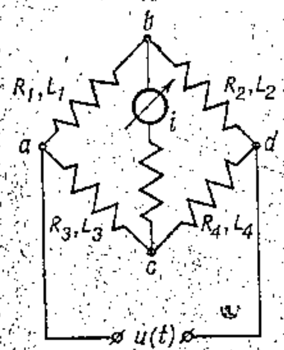

Рис. 1

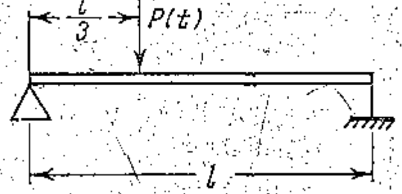

Рис. 2

множество координат. Так, переменная сила $P(t)$, приложенная на расстоянии одной трети длины балки от ее опоры, никак не влияет на изменение координаты q_3, а также и других, номера которых кратны трем. Это происходит потому, что для всех форм колебаний, соответствующих таким координатам, указанная точка приложения силы является узловой точкой.

Другой вид осуществления независимости одного из параметров системы от нагрузки состоит в использовании дополнительной информации об изменении самой нагрузки.

Пусть система описывается, например, уравнениями

$$\tau\frac{dx}{dt} + x = f(t), \qquad y = x - f(t). \quad (3)$$

Очевидно, что параметр y зависит от хода изменения нагрузки, представляемой функцией времени $f(t)$. Лишь в частном случае, когда нагрузка постоянна, т. е. $f(t) = \mathrm{const}$, параметр y асимптотически стремится к нулю.

Допустим теперь, что имеется независимая информация о значении $f(t)$ и, кроме того, сама функция $f(t)$ такова, что допускает первую производную. Тогда можно искусственно создать дополнительную нагрузку $\tau f'(t)$ и распорядиться ею так, чтобы первое из уравнений системы (3) приняло вид

$$\tau\frac{dx}{dt} + x = f(t) + \tau f'(t), \quad (4)$$

а второе осталось без изменения.

Нетрудно видеть, что теперь параметр y с точностью до переходного процесса

$$y = [x(0) - f(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

будет равен нулю при произвольном изменении нагрузки (однако достаточно гладком, чтобы существовала ограниченная производная функция $f(t)$ в любое мгновение времени).

Многочисленные примеры подобного рода встречаются, в частности, в теории и практике автоматически действующих гироскопических систем. Они составляют дальнейшее основное содержание данной статьи.

Необходимость дополнительной информации или наличия двух независимых каналов воздействия на систему особенно отчетливо была показана академиком Б. Н. Петровым. Только в этом случае возможно осуществление так называемой полной компенсации внешних нагрузок или, как это было названо выше, осуществление независимости одного из параметров системы от хода изменения действующей на нее нагрузки.

В некоторых случаях для осуществления полной компенсации достаточно иметь информацию о том, что нагрузка является суммой гармонических или экспоненциальных функций с заданными параметрами. Это также было показано академиком В. С. Кулебакиным.

Рассмотрим, например, систему, описываемую совокупностью дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} + \sigma = f(t), \qquad \varphi + \frac{d\rho}{\partial t} - 2\sigma = 0, \qquad -3\frac{d\varphi}{dt} + 2\rho + \frac{d\sigma}{dt} = 0. \quad (6)$$

Подобная система с точки зрения теории регулирования обладает так называемым статизмом. Действительно, при $f(t) = A = \text{const}$ регулируемый параметр φ стремится при любых начальных условиях к постоянной, равной $2A$.

Однородная, т. е. при $f(t) = 0$, совокупность дифференциальных уравнений (6) устойчива, так как корни характеристического уравнения соответственно равны числам -1 и $-1 \pm i$.

Пусть теперь $f(t) = B \sin 2t$, а начальные условия так называемые нулевые, т. е. $\varphi(0) = \rho(0) = \sigma(0) = 0$.

Нетрудно убедиться, что решение совокупности уравнений (6) имеет при этом вид

$$\varphi = B(1 - \cos t)\, e^{-t},$$
$$\sigma = B(1 - \cos t - \sin t)e^{-t} + B \sin 2t,$$
$$\rho = B/2(-2 + 3\cos t + \sin t)e^{-t} - B\cos 2t,$$

и, следовательно, после окончания переходного процесса регулируемый параметр φ обращается в нуль, несмотря на наличие переменной нагрузки $f(t)$.

Общее правило образования подобных систем следующее: в совокупности дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= f(t), \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

описывающих данную автоматическую систему с регулируемым параметром x_1, минор

$$\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

должен быть $K(D)$-изображением функции $f(t)$. Здесь a_{ij} — линейные операторы дифференцирования. Теория $K(D)$-изображений была, как известно, развита академиком В. С. Кулебакиным.

Изложенные выше замечания показывают теоретическую обоснованность применения идей инвариантности и компенсации внешних возмущений в автоматических системах.

Покажем теперь, как идеи инвариантности преломляются в теории гироскопов — области, наиболее близкой автору статьи.

Гироскопы используются на подвижных объектах в большинстве случаев в составе устройств, служащих для указания направлений и определенным образом ориентированных относительно неподвижных звезд. Такими устройствами являются, в частности, гироскопическая вертикаль (гирогоризонт), гироскопический компас, гироазимут и другие,

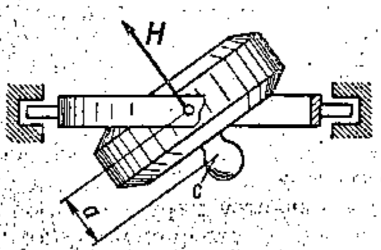

Рис. 3

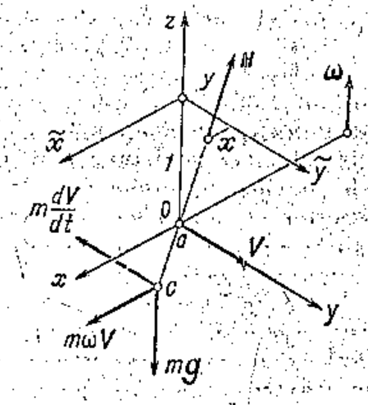

Рис.4

более сложные устройства, например гирогоризонткомпас (пространственный гироскопический компас).

Перемещение объекта, на котором расположено соответствующее гироскопическое устройство, относительно Земли, и связанные с этим движением инерционные воздействия на элементы устройства вызывают дополнительные отклонения осей гироскопов. В результате гироскопическое устройство указывает нужное направление с той или иной ошибкой. Можно, однако, указать целый ряд гироскопических устройств, где с принципиальной точки зрения такая ошибка полностью устраняется.

Идеи, лежащие в основе создания подобных устройств, близки к тем, которые в теории регулирования известны под названием компенсации внешних возмущений и условий инвариантности.

Ниже приводятся наиболее характерные примеры этих устройств.

Гироскопический маятник. Гироскопическим маятником называется гироскоп, подвешенный в кардановом подвесе так, что центр тяжести системы «ротор гироскопа — его кожух» отстоит на некотором расстоянии a от центра подвеса. Внешнее кольцо подвеса предполагается уравновешенным. Внутренним кольцом подвеса является сам кожух гироскопа.

Чтобы не усложнять дальнейшего изложения дополнительными обстоятельствами, не будем учитывать влияние на гироскопический маятник вращения Земли и поверхность Земли примем за плоскость, параллельно которой перемещается точка (центр) подвеса маятника.

Вначале рассмотрим гироскопический маятник, у которого вектор H собственного кинетического момента или, что то же, ось собственного вращения ротора гироскопа направлена по прямой, соединяющей центр тяжести маятника с центром его подвеса (рис. 3).

При сделанных предположениях, а также при отсутствии трения в осях подвеса такой гироскопический маятник будет устойчиво сохранять вертикальное направление оси собственного вращения, если его центр тяжести оказывается ниже точки подвеса, а сама эта точка или неподвижна, или движется равномерно и прямолинейно. Однако при движении точки подвеса гироскопического маятника по кривой или при неравномерном движении по прямой упомянутая ось будет совершать около вертикали сложное коническое движение, а в одном частном случае так называемой резонансной циркуляции вообще опрокинется.

Таким образом, гироскопический маятник без надлежащих усложнений для указания вертикали на движущемся объекте малопригоден.

Прежде чем перейти к описанию этих усложнений, которые представляют собой устройства для компенсации возмущающего действия на гироскопический маятник некоторых сил инерции переносного движения, приведем уравнения движения этой гироскопической системы.

Воспользуемся системой координат xyz с началом в точке подвеса гироскопического маятника и с осью z, направленной вертикально вверх. Ось y направим вдоль вектора скорости точки подвеса $\mathbf{V}$, а ось x — в правую сторону от этого вектора (рис. 4).

Положение оси собственного вращения ротора гироскопа относительно системы координат xyz удобно определять двумя числами x и y, представляющими собой координаты точки пересечения этой оси с плоскостью $\tilde{x}\tilde{y}$, параллельной координатной плоскости xy и отстоящей от нее на расстоянии, равном единице (т. е. с плоскостью $z = +1$).

В теории гироскопов плоскость $\tilde{x}\tilde{y}$ называется картинной плоскостью, а упомянутая точка пересечения — полюсом гироскопа. Будем предполагать, что ось собственного вращения гироскопа, а следовательно и вектор $\mathbf{H}$, проходят через точку подвеса гироскопического маятника. Если величины x и y малые, а это также будет предполагаться в дальнейшем, то с точностью до малых величин более высокого порядка они соответственно равны углам отклонения вектора собственного кинетического момента гироскопа $\mathbf{H}$ от координатных плоскостей yz и xz.

В рамках элементарной (прецессионной) теории гироскопов дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять переменные величины x и y (рис. 4), имеют следующий вид:

$$H\left(\frac{dx}{dt} - \omega y\right) = mgay - ma\frac{dV}{dt} + M_x^*,$$
$$H\left(\frac{dy}{dt} + \omega x\right) = -mgax - ma\omega V + M_y^*. \tag{7}$$

Здесь помимо обозначений, уже встречавшихся выше, ω — угловая скорость циркуляции, т. е. направленная по вертикали (по оси z) угловая скорость системы координат xyz относительно поверхности Земли, принимаемой, как уже было указано, за плоскость; m — масса системы «кожух — ротор»; g — ускорение силы тяжести (точнее, силы тяготения); M_x^* и M_y^* — моменты относительно осей x и y каких-либо дополнительных сил, действующих на систему «кожух — ротор».

Совокупность уравнений (7) имеет частное решение

$$x = 0, \quad y = 0, \tag{8}$$

если моменты M_x^* и M_y^* отсутствуют и, кроме того, скорость $\mathbf{V}$ точки подвеса постоянна по величине и не меняет направления (угловая скорость циркуляции ω равна нулю). Этому решению соответствует вертикальное направление вектора собственного кинетического момента $\mathbf{H}$, о чем уже упоминалось выше.

Члены, стоящие в правых частях уравнений (7)

$$-ma\frac{dV}{dt} = M_x' \quad \text{и} \quad -ma\omega V = M_y', \tag{9}$$

представляют собой моменты (соответственно относительно осей x и y) сил инерции переносного движения, обусловленных перемещением начала системы координат xyz. Они производят возмущающее действие на гироскопическую систему, вследствие чего частное решение (8) становится уже невозможным. Исключение составляет строгое выполнение двух условий:

$$M_x^* = ma\frac{dV}{dt} \text{ и } M_y^* = ma\omega V. \tag{10}$$

В этом случае возмущающее действие сил инерции оказывается скомпенсированным искусственно создаваемыми моментами M_x^* и M_y^*, приложенными к системе «кожух — ротор». Однако для создания таких моментов необходимо помимо специального счетно-решающего устройства для дифференцирования величины скорости V и умножения величины V на угловую скорость циркуляции ω (а также электромагнитного или какого-либо еще устройства для осуществления моментов M_x^* и M_y^*) еще знание самих текущих значений величин V и ω.

В реальных устройствах последнее достигается посредством использования показаний лага и гироазимута. При этом делается еще одно дополнительное предположение о том, что вектор $\mathbf{V}$ направлен по продольной оси объекта или его отклонение от этой оси (угол дрейфа) известно.

С точки зрения теории регулирования здесь имеет место введение в регулируемую систему, описываемую совокупностью уравнений (7), возмущений по второму каналу через дополнительные моменты M_x^* и M_y^*, которые и производят полную компенсацию непосредственно воздействующих внешних возмущений (9).

Для осуществления компенсации потребовалась дополнительная информация — знание текущих значений величин V и ω. Ниже будет показано, как, используя дополнительный гироскоп, можно достичь тех же целей и с меньшей информацией — знанием одной только величины V.

Отметим, что при наличии качки у объекта появятся еще инерционные воздействия на гироскоп, обусловленные соответствующим ускорением точки подвеса. Они вызовут колебательные движения оси гироскопа около вертикального направления той же частоты, с которой происходит качка объекта. Однако эти колебания будут иметь несравненно меньшую амплитуду, чем, например, у такого же маятника, но с невращающимся гироскопом. Гироскопическое устройство является своего рода фильтром относительно воздействующих на него переменных моментов высокой частоты.

Недостатком описанной гироскопической системы помимо сравнительно сложной системы компенсации являются также незатухающие (без учета сил трения в подвесе гироскопа) собственные движения оси ротора около вертикали, соответствующие решению однородной совокупности дифференциальных уравнений (7). Для неподвижного наблюдателя — это периодическое движение по круговому конусу, раствор которого определяется начальным положением оси ротора. Период собственного движения выражается формулой

$$T = 2\pi\frac{H}{mga}. \tag{11}$$

Существуют схемы гироскопических устройств, которые обеспечивают затухание собственных движений при любых начальных условиях. Они основаны на применении так называемой радиальной коррекции. В результате действия последней искусственно создаются моменты, которые приводят ось ротора кратчайшим путем к вертикали.

В этих схемах также вполне возможна и применяется на практике аналогичная система компенсации сил инерции переносного движения.

Гироскопический маятник с дополнительным ротором, угловая скорость которого изменяется пропорционально скорости объекта. Выше было указано, что для компенсации сил инерции переносного движения, обусловленных изменением скорости объекта и его циркуляцией, можно избежать введения в компенсирующую систему текущих значений угловой скорости циркуляции ω (по «второму каналу»), что требует наличия специального устройства для ее измерения (например, гироазимута с дифференцирующим элементом).

Для этой цели следует расположить на том же гироскопическом маятнике еще один ротор, ось собственного вращения которого была бы перпендикулярна как к оси ротора основного гироскопа, так и к вектору скорости объекта $\mathbf{V}$.

При рассмотрении движения маятника относительно введенной нами системы координат xyz на дополнительный ротор будут действовать кориолисовы силы инерции, которые приведутся к гироскопическому моменту M_y^*, имеющему направление оси y (рис. 5) и равному по величине

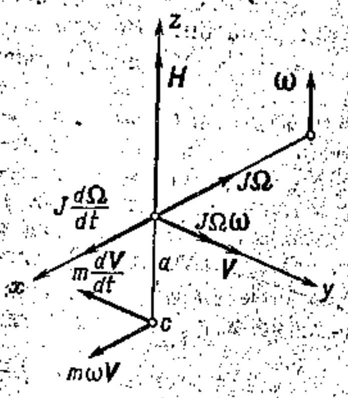

Рис. 5

$$M_y^* = J\Omega\omega. \tag{12}$$

Здесь J — момент инерции дополнительного ротора относительно его оси симметрии и Ω — его собственная угловая скорость. Направление оси собственного вращения основного гироскопа при этом расчете предполагается вертикальным.

Нетрудно убедиться (рис. 5), что если угловая скорость Ω направлена по отрицательной части оси x, то гироскопический момент M_y^* имеет направление, прямо противоположное моменту M_y' сил инерции переносного движения. Величина последнего выражается второй формулой (9). Поэтому, если угловая скорость дополнительного ротора регулируется так, чтобы осуществлялось соотношение

$$J\Omega = maV, \tag{13}$$

то тем самым один из моментов сил инерции переносного движения, действующих на гироскопический маятник, а именно момент M_y' уравновешивается.

Замечательно, что другой момент M_x' при этом также оказывается уравновешенным.

Действительно, при изменении собственной угловой скорости дополнительного ротора Ω на гироскопический маятник будут действовать реактивные силы с моментом

$$M_x^* = \frac{d}{dt} J\Omega, \tag{14}$$

направленным по оси x. Момент M_x^* направлен противоположно моменту сил инерции M_x' и в силу соотношения (13) и второй формулы (9) равен ему по величине.

Таким образом, в этом устройстве посредством использования текущих значений одной только скорости V (по данным от лага) также удается достичь полной компенсации возмущающего воздействия сил инерции переносного движения на положение гироскопического маятника.

Более внимательное рассмотрение и здесь обнаруживает два канала, по которым происходит влияние угловой скорости циркуляции ω на гироскопический маятник,— через центробежную силу инерции $m\omega V$ и через гироскопический момент $mJ\Omega$. Оба возмущения компенсируют друг друга. Однако непосредственного знания величины угловой скорости циркуляции для создания компенсирующих моментов, в отличие от рассмотренного выше случая, уже не требуется.

которое означает (рис. 7), что при соответствующих начальных условиях ось собственного вращения ротора гироскопического маятника будет отклоняться от радиуса Земли на угол, пропорциональный скорости v точки его подвеса относительно невращающейся сферы S в плоскости, перпендикулярной к этому вектору.

Если теперь представить себе другой гироскопический маятник с такими же параметрами, но с обратным вращением ротора, то в первой формуле (18) следует поменять знак у величины собственного кинетического момента H. В результате ось собственного вращения ротора этого

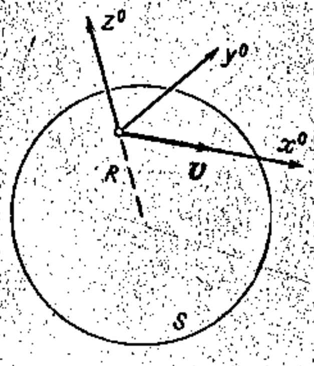

Рис. 6

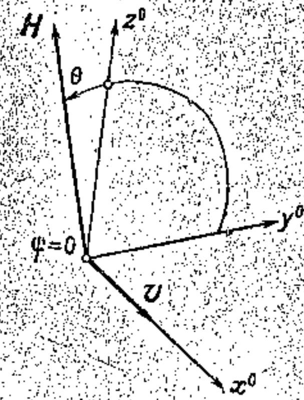

Рис. 7

второго маятника будет отклоняться от радиуса Земли на тот же угол и в той же плоскости, что и ось собственного вращения первого ротора, но в другую сторону. Очевидно, что биссектриса угла между осями собственного вращения роторов и будет направлена все время к центру Земли, как бы ни перемещался по земной сфере объект, на котором расположены точки подвесов обоих маятников.

Заметим также, что угол между осями обоих роторов пропорционален величине скорости v перемещения объекта относительно невращающейся сферы S и в принципе может служить мерой для ее измерения. Плоскость же, содержащая обе оси (точнее, плоскость, параллельная обеим осям), определяет направление вектора скорости v, так как последний направлен к ней по нормали.

Гирогоризонткомпас (пространственный гироскопический компас). Свойствами, которые в теории регулирования называются инвариантностью, т. е. независимостью по отношению к внешним возмущениям, в более совершенной форме, чем описанная комбинация двух гироскопических маятников Шулера, обладает двухгироскопическое устройство, именуемое пространственным гироскопическим компасом.

Чувствительный элемент этого устройства массы m состоит из двух гироскопов с одинаковым собственным кинетическим моментом B, укрепленных на одной раме так, что оси их кожухов параллельны (рис. 8). Сами кожухи посредством кинематической передачи, например зубчатых колес, могут поворачиваться относительно рамы на равные углы ε в разные стороны, вследствие чего суммарный собственный кинетический момент обоих гироскопов $H = 2B\cos\varepsilon$ направлен по одной и той же прямой, связанной с чувствительным элементом. Эту прямую проведем через точку подвеса чувствительного элемента и назовем осью y системы координат xyz, связанной с последним. Ось z этой системы направим также через точку подвеса параллельно осям кожухов, а ось x — так, чтобы в результате образовалась правая система прямоугольных координат.

которое означает (рис. 7), что при соответствующих начальных условиях ось собственного вращения ротора гироскопического маятника будет отклоняться от радиуса Земли на угол, пропорциональный скорости v точки его подвеса относительно невращающейся сферы S в плоскости, перпендикулярной к этому вектору.

Если теперь представить себе другой гироскопический маятник с такими же параметрами, но с обратным вращением ротора, то в первой формуле (18) следует поменять знак у величины собственного кинетического момента H. В результате ось собственного вращения ротора этого

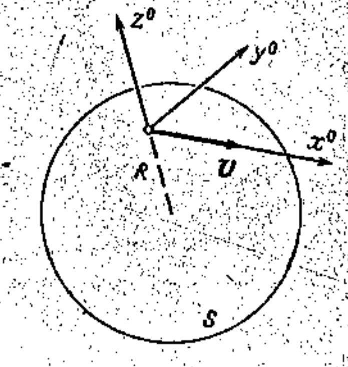

Рис. 6

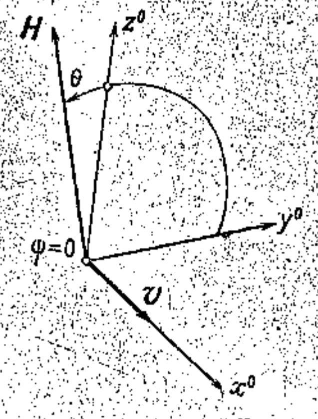

Рис. 7

второго маятника будет отклоняться от радиуса Земли на тот же угол и в той же плоскости, что и ось собственного вращения первого ротора, но в другую сторону. Очевидно, что биссектриса угла между осями собственного вращения роторов и будет направлена все время к центру Земли, как бы ни перемещался по земной сфере объект, на котором расположены точки подвесов обоих маятников.

Заметим также, что угол между осями обоих роторов пропорционален величине скорости v перемещения объекта относительно невращающейся сферы S и в принципе может служить мерой для ее измерения. Плоскость же, содержащая обе оси (точнее, плоскость, параллельная обеим осям), определяет направление вектора скорости v, так как последний направлен к ней по нормали.

Гирогоризонткомпас (пространственный гироскопический компас). Свойствами, которые в теории регулирования называются инвариантностью, т. е. независимостью по отношению к внешним возмущениям, в более совершенной форме, чем описанная комбинация двух гироскопических маятников Шулера, обладает двухгироскопическое устройство, именуемое пространственным гироскопическим компасом.

Чувствительный элемент этого устройства массы m состоит из двух гироскопов с одинаковым собственным кинетическим моментом B, укрепленных на одной раме так, что оси их кожухов параллельны (рис. 8). Сами кожухи посредством кинематической передачи, например зубчатых колес, могут поворачиваться относительно рамы на равные углы ε в разные стороны, вследствие чего суммарный собственный кинетический момент обоих гироскопов $H = 2B\cos\varepsilon$ направлен по одной и той же прямой, связанной с чувствительным элементом. Эту прямую проведем через точку подвеса чувствительного элемента и назовем осью y системы координат xyz, связанной с последним. Ось z этой системы направим также через точку подвеса параллельно осям кожухов, а ось x — так, чтобы в результате образовалась правая система прямоугольных координат.

Таким образом, для использования описанного устройства в качестве компаса требуется дополнительная информация — знание скорости V точки подвеса чувствительного элемента относительно самой поверхности Земли и направление этой скорости относительно гиронорда. Угол ϑ называется в теории гироскопических компасов курсовой поправкой.

Следует заметить, что при неточном осуществлении начальных условий чувствительный элемент гирогоризонткомпаса совершает малые незатухающие колебания относительно своего стационарного состояния, при котором оси систем координат xyz и $x^0y^0z^0$ соответственно совпадают и, кроме того, соблюдается соотношение (21).

Эти колебания состоят из двух парциальных, частоты которых ω_1, ω_2 с большой точностью выражаются формулами

$$\omega_1 = \nu + \omega^0, \qquad \omega_2 = \nu - \omega^0. \tag{23}$$

Здесь ν — частота, соответствующая периоду Шулера, а ω^0, как и выше, — составляющая угловой скорости системы координат $x^0y^0z^0$ вдоль оси z^0 — радиуса Земли.

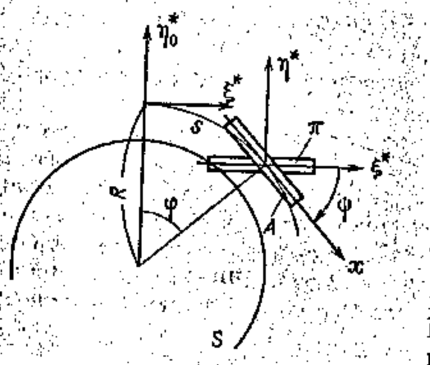

Рис. 10

К сожалению, по-видимому, невозможно создать такую гироскопическую систему, которая имела бы одновременно и свойство автономной компенсации инерционных воздействий, вызванных перемещением точки ее подвеса по земной сфере, и затухание колебаний около своего стационарного состояния.

Механические системы с автономной компенсацией — физический маятник Шулера и маятник Бойкова, описание которых приводится ниже, также не имеют затухания.

Физический маятник Шулера. Рассмотрим твердое тело, подвешенное за одну из его точек. Пусть центр тяжести этого тела находится на оси его динамической симметрии, проходящей через точку подвеса, на расстоянии a, удовлетворяющем соотношению

$$mRa = A, \tag{24}$$

где A — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной к оси динамической симметрии и проходящей через точку подвеса; m — масса маятника; R — радиус Земли.

Если в начальное мгновение времени направить ось динамической симметрии маятника точно по центру Земли и устранить составляющую его угловой скорости вдоль этой оси, то в дальнейшем при любом перемещении точки подвеса по земной сфере такое состояние маятника сохранится.

Практическое осуществление такого маятника затрудняется необходимостью выдерживать с большой точностью расстояние a, которое является весьма малой величиной (при обычных размерах маятника порядка долей микрона).

Соотношение (24) также можно рассматривать с точки зрения теории регулирования как условие инвариантности.

Маятник типа Бойкова. При движении по дуге большого круга невращающейся сферы S может быть осуществлено следующее устройство, непрерывно указывающее направление к центру Земли.

При помощи гироскопа или слежением за звездами стабилизируется платформа π. На ней под углом ψ располагается измеритель ускорений A (рис. 10). Его показания дважды интегрируются, и результат интегрирования воспроизводится с соответствующим коэффициентом пропорциональности k в виде угла ψ.

Если коэффициент пропорциональности k удовлетворяет условию

$$k = 1/R, \tag{25}$$

и соблюдены надлежащие начальные условия, то перпендикуляр к направлению оси чувствительности измерителя ускорений все время направлен к центру большого круга сферы S, а следовательно, и Земли. При недостаточно точном соблюдении начальных условий и соотношения (25) отклонение α от направления к центру Земли удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\left(j - \frac{v^2}{R}\right)\sin\alpha = \left(\frac{1}{R} - k\cos\alpha\right)\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{26}$$

Здесь j — ускорение силы тяготения к Земле и s — путь точки подвеса маятника по дуге большого круга сферы S.

Может быть осуществлена более сложная гироскопическая система с применением измерителей ускорения, которая при правильно выбранных начальных условиях и соотношениях между ее параметрами непрерывно указывает направление к центру Земли уже при произвольном перемещении ее точки подвеса по земной сфере.

Приведенные выше примеры гироскопических и им подобных систем показывают, как нам кажется, практическую и теоретическую значимость идей инвариантности и компенсации внешних возмущений при создании автоматически действующих устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. Гостехиздат, 1955.
2. *Ишлинский А. Ю.* Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры.— Прикладная математика и механика, 1956, XX, вып. 3.
3. *Ишлинский А. Ю.* Механика специальных гироскопических систем. Изд-во АН УССР, 1952.
4. *Ишлинский А. Ю.* К теории гирогоризонткомпаса.— Прикладная математика и механика, 1956, XX, вып. 4.
5. *Ишлинский А. Ю.* К теории гироскопического маятника.— Прикладная математика и механика, 1957, XXI, вып. 1.
6. *Ишлинский А. Ю.* Определение местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений.— Прикладная математика и механика, 1957, XXI, вып. 6.
7. *Ишлинский А. Ю.* Вступительное слово.— В кн. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах». Труды совещания, состоявшегося в г. Киеве 16—20 октября 1958 г. Киев, изд-во АН УССР, 1959.
8. *Ишлинский А. Ю.* Полная компенсация внешних возмущений, вызванных маневрированием, в гироскопических системах.— В кн. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах». Труды совещания, состоявшегося в г. Киеве 16—20 октября 1958 г. Киев, изд-во АН УССР, 1959.
9. *Кулебакин В. С.* Высококачественные инвариантные системы регулирования.— В кн. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах». Труды совещания, состоявшегося в г. Киеве 16—20 октября 1958 г. Киев, изд-во АН УССР, 1959.
10. *Петров Б. Н.* О реализуемости условий инвариантности.— В кн. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах». Труды совещания, состоявшегося в г. Киеве 16—20 октября 1958 г. Киев, изд-во АН УССР, 1959.