B215+B216

В сборнике представлены новые результаты по динамике и устойчивости деформируемых тел, а также по приближенным методам решения нелинейных краевых задач гидроупругости. Часть работ посвящена вопросам инерциальной навигации и синтезу дискретного управления.

Предназначен для математиков-прикладников, механиков, связанных с практическим решением задач проектирования современных управляемых систем.

Сб.: Динамика и устойчивость управляемых систем. Киев: Изд-е Ин-та матем. АН УССР, 1977. 208 с.

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ
Институт математики АН УССР, Киев, 1977

УДК 531.38

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НА СТРУНЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

А.Ю.Ишлинский, В.А.Стороженко, М.Е.Темченко

Определяются и исследуются стационарные движения однородного осесимметричного продолговатого твердого тела, подвешенного на струне, в предположении, что точка подвеса тела к струне не лежит на оси его динамической симметрии.

Рассмотрим однородное осесимметричное твердое тело массы m, подвешенное на струне длины ℓ в неподвижной точке O_1 (рис. I). Будем предполагать, что струна лишена массы, абсолютно гибкая и нерастяжимая, т.е. рассматривается лишь как геометрическая связь. Точка O_2 - крепления тела к струне - не лежит на оси динамической симметрии тела и отстоит от нее на расстоянии, равном ℓ_1. Определим и исследуем стационарные движения рассматриваемого тела.

I°. Выведем, прежде всего, уравнения движения тела. В центре его тяжести - точке G - поместим начало системы координат $x_1y_1z_1$, жестко с телом связанной. При этом ось z_1 направим по оси его симметрии. Оси x_1, y_1, z_1 будут, очевидно, главными центральными осями инерции рассматриваемого однородного твердого тела.

Введем систему координат xyz, поместив ее начало также в точке G. Ось z этой системы проведем через точку O_2, а ось y совместим с осью y_1; направление оси x тем самым определится однозначно.

Обозначим буквой δ угол между осями z и z_1 (или, что то же, между осями x и x_1). Тогда нетрудно видеть, используя рис. I, что для любой точки тела с координатами x, y, z имеют место равенства

$$x = x_1\cos\delta - z_1\sin\delta;\ y = y_1;\ z = x_1\sin\delta + z_1\cos\delta. \qquad (\mathrm{I})$$

Главные центральные моменты инерции рассматриваемого тела – соответственно осевой и экваториальный – обозначим через C и $A=B$. Моменты инерции тела относительно осей x, y, z можно выразить через A и C посредством очевидных формул:

$$J_{xx}=\int\limits_{(m)}(y^2+z^2)dm = A\cos^2\delta + C\sin^2\delta;\quad J_{xy}=\int\limits_{(m)} xy\,dm = 0;$$

$$J_{yy}=\int\limits_{(m)}(x^2+z^2)dm = A,\qquad J_{yz}=\int\limits_{(m)} yz\,dm=0; \qquad (2)$$

$$J_{zz}=\int\limits_{(m)}(x^2+y^2)dm = A\sin^2\delta + C\cos^2\delta;\quad J_{zx}=\int\limits_{(m)} zx\,dm = (C-A)\sin\delta\cos\delta.$$

2°. Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$, начало которой поместим в неподвижной точке O_1. Ось ζ этой системы направим вертикально вверх (рис. I).

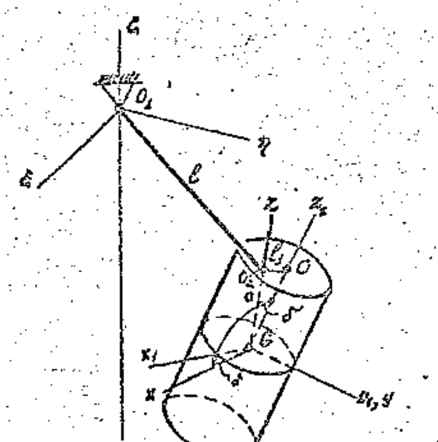

Рис.I

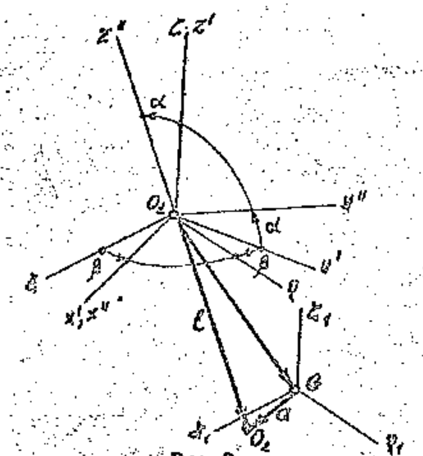

Рис.2

Положение струны в пространстве определим двумя углами α и β (рис. 2). Угол α характеризует отклонение струны от вертикали; угол β является углом между проекцией y' струны на горизонтальную плоскость и осью η.

Проекции струны на оси системы координат $\xi\eta\zeta$ определяются соотношениями

$$\xi=-\ell\sin\alpha\sin\beta;\ \eta=\ell\sin\alpha\cos\beta;\ \zeta=-\ell\cos\alpha. \qquad (3)$$

В центре тяжести тела G поместим начало поступательно перемещающейся вместе с телом системы координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$, оси которой во все время движения соответственно параллельны осям ξ, η, ζ (рис.2).

Положение твердого тела (или, что то же, жестко связанной с ним системы координат xyz) относительно системы $\xi\eta\zeta$ (или системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$) определим тремя углами Эйлера ψ, θ, φ (рис. 3). Таблица

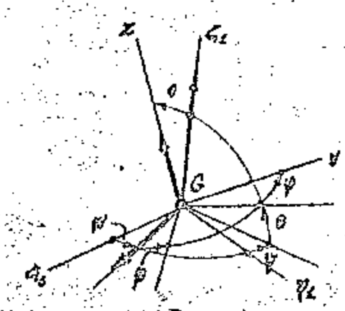

Рис.3

косинусов углов между осями систем координат xyz и $\xi_1\eta_1\zeta_1$ имеет вид

	ξ_1	η_1	ζ_1
x	$\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi$	$\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$
y	$-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi$	$-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\cos\varphi$
z	$\sin\psi\sin\theta$	$-\cos\psi\sin\theta$	$\cos\theta$.

(4)

Проекции p, q, r угловой скорости тела на оси жестко связанной с ним системы координат xyz имеют соответственно вид

$$p=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi;\ q=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi;\ r=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi \qquad (5)$$

Координаты точки O_2 в системе ξ, η, ζ нетрудно получить, пользуясь таблицей (4). Имеем

$$\xi_1 = a\sin\psi\sin\theta; \quad \eta_1 = -a\cos\psi\sin\theta; \quad \zeta_1 = a\cos\theta, \tag{6}$$

где a – расстояние между центром масс тела и точкой O_2.

Используя векторное равенство (см. рис. 2)

$$\overline{O_1G} = \overline{O_1O_2} - \overline{GO_2}; \tag{7}$$

а также соотношения (3) и (6), координаты центра тяжести тела в системе координат ξ, η, ζ представим следующим образом:

$$\xi_G = -l\sin\alpha\sin\beta - a\sin\psi\sin\theta; \; \eta_G = l\sin\alpha\cos\beta + a\cos\psi\sin\theta; \tag{8}$$
$$\zeta_G = -l\cos\alpha - a\cos\theta.$$

3°. Уравнения, описывающие движение исследуемого тела, выведем в форме уравнений Лагранжа II рода. В качестве обобщенных координат выберем введенные ранее углы α, β, ψ, θ и φ, т.к. исследуемая механическая система – подвешенное на струне твердое тело – имеет пять степеней свободы.

В рассматриваемом случае функция Лагранжа при использовании соотношений (2), (5) и (8) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = T - \Pi &= \frac{m}{2}(\dot\xi_G^2 + \dot\eta_G^2 + \dot\zeta_G^2) + \frac{1}{2}(J_{xx}p^2 + J_{yy}q^2 + J_{zz}r^2 - 2J_{xy}pq - 2J_{xz}pr - 2J_{yz}qr) - \\ &- mg\zeta_G = \frac{m}{2}(\dot\xi_G^2 + \dot\eta_G^2 + \dot\zeta_G^2) + \frac{1}{2}J_{xx}(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}J_{yy}(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2}J_{zz}(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2 - \\ &- J_{xz}(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi)(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi) + mg(l\cos\alpha + a\cos\theta).\end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения Лагранжа второго рода для исследуемого тела при использовании соотношений (2), (9) могут быть приведены к следующим:

$$\begin{aligned}&ml[(-\ddot\xi_G\sin\beta + \ddot\eta_G\cos\beta)\cos\alpha + \ddot\zeta_G\sin\alpha] + mgl\sin\alpha = 0, \\ &-ml(\ddot\xi_G\cos\beta + \ddot\eta_G\sin\beta)\sin\alpha = 0, \\ &ma[(-\ddot\xi_G\sin\psi + \ddot\eta_G\cos\psi)\cos\theta + \ddot\zeta_G\sin\theta] + A(\ddot\theta - \dot\psi^2\sin\theta\cos\theta) + \\ &+ C\dot\psi\sin\theta(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi) - (A-C)\sin^2\delta[\ddot\theta\cos^2\varphi - (2\dot\theta\dot\varphi - \dot\psi\sin\theta)\sin\varphi\cos\varphi - \\ &- 2\sin\theta\sin^2\varphi\dot\psi\dot\varphi - (1+\sin^2\varphi)\sin\theta\cos\theta\dot\psi^2] + (A-C)\sin\delta\cos\delta[\ddot\psi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\theta + \\ &+ (\ddot\psi\cos\varphi - 2\dot\psi\dot\varphi\sin\varphi)\cos\theta - \dot\psi^2\cos2\theta\sin\varphi] + mga\sin\theta = 0, \\ &-ma[(\ddot\xi_G\cos\psi + \ddot\eta_G\sin\psi)\sin\theta] + A(2\dot\psi\dot\theta\cos\theta + \ddot\psi\sin\theta)\sin\theta + C[(\ddot\psi\cos\theta + \ddot\varphi)\cos\theta - \\ &- (2\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)\dot\theta\sin\theta] - (A-C)\sin^2\delta[\ddot\psi(\sin^2\theta\sin^2\varphi - \cos^2\theta) - \ddot\varphi\cos\theta + \\ &+ 2\cos^2\varphi\sin\theta\dot\varphi\dot\theta + (\dot\theta^2\cos\theta + \ddot\theta\sin\theta + 2\dot\psi\dot\varphi\sin^2\theta)\sin\varphi\cos\varphi + \\ &+ 2\sin\theta\cos\theta(1+\sin^2\varphi)\dot\psi\dot\theta] + (A-C)\sin\delta\cos\delta[-\dot\theta^2\sin\theta\cos\varphi + \\ &+ 2\dot\psi\dot\theta\cos2\theta\sin\varphi + 2(\dot\psi\dot\varphi\cos\varphi + \ddot\psi\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta + \\ &+ \ddot\theta\cos\theta\cos\varphi + \ddot\varphi\sin\theta\sin\varphi + \dot\varphi^2\sin\theta\cos\varphi] = 0, \\ &(A\sin^2\delta + C\cos^2\delta)\frac{d}{dt}(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi) + (A-C)\sin\delta\cos\delta(\ddot\psi\sin\theta\sin\varphi + \\ &+ 2\dot\psi\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \ddot\theta\cos\varphi - \dot\psi^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi) + \\ &+ (A-C)\sin^2\delta(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi)(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \\ &- \dot\theta\sin\varphi) = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

4°. Совокупность уравнений (10) допускает частное решение

$$\alpha = \alpha_0; \quad \beta = \omega t + \beta_0; \quad \psi = \omega t + \psi_0; \quad \theta = \theta_0; \quad \varphi = \varphi_0, \tag{11}$$

соответствующее стационарным движениям тела. Проведем исследование этих движений при условии, что углы α_0 и θ_0 находятся в пределах

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}; \qquad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}.^{*)} \tag{12}$$

Согласно уравнениям (10) и выражениям (8), (11), между постоянными α_0, β_0, ψ_0, θ_0, φ_0 имеют место зависимости

$$-ml\omega^2\cos\alpha_0[l\sin\alpha_0 + a\sin\theta_0\cos(\beta_0 - \psi_0)] + mgl\sin\alpha_0 = 0,$$
$$mal\omega^2\sin\alpha_0\sin\theta_0\sin(\beta_0 - \psi_0) = 0.$$

*) Рассмотрение случаев, когда α_0 и θ_0 равны нулю, либо $\frac{\pi}{2}$, будет предметом отдельного исследования.

$$-ma\omega^2\cos\theta_0[l\sin\alpha_0\cos(\beta_0-\psi_0)+a\sin\theta_0]+(C-A)\omega^2[\cos^2\delta\sin\theta_0\cos\theta_0-$$
$$-\sin^2\delta\sin\theta_0\cos\theta_0\sin^2\varphi_0+\sin\delta\cos\delta\sin\varphi_0\cos 2\theta_0]+mga\sin\theta_0=0,$$
$$-mal\omega^2\sin\alpha_0\sin\theta_0\sin(\beta_0-\psi_0)=0, \qquad (I3)$$
$$-(C-A)\omega^2\sin\delta\sin\theta_0\cos\varphi_0(\sin\delta\sin\theta_0\sin\varphi_0-\cos\delta\cos\theta_0)=0.$$

Не представляет труда показать, что левые части второго и четвертого соотношений (I3) обращаются в нуль при условии

$$\sin(\beta_0-\psi_0)=0. \qquad (I4)$$

При учете неравенств (I2) это возможно лишь в двух случаях, именно:

$$\beta_0-\psi_0=0; \quad \beta_0-\psi_0=\pi. \qquad (I5)$$

Левая часть пятого соотношения (I3) обращается в нуль при выполнении одного из следующих равенств:

$$C=A; \quad \sin\delta\sin\theta_0\sin\varphi_0-\cos\delta\cos\theta_0=0; \quad \cos\varphi_0=0. \qquad (I6)$$

В настоящей работе мы остановимся лишь на рассмотрении стационарных движений продолговатого тела (для которого $A>C$) при выполнении третьего равенства (I6). Изучение стационарных движений тела при выполнении либо первого, либо второго условий (I6) будет проведено отдельно.

5^0. Третье условие (I6) имеет место в двух случаях:

$$\varphi_0=\frac{\pi}{2}; \quad \varphi_0=\frac{3\pi}{2}. \qquad (I7)$$

В сочетании с условиями (I5) соотношения (I7) определяют четыре случая стационарного движения твердого тела, в каждом из которых второе, четвертое и пятое равенства (I3) обращаются в тождества, а оставшиеся два являются уравнениями для определения углов α_0 и θ_0 в зависимости от величины ω. Эти четыре случая можно представить следующим образом:

I. $\beta_0=\psi_0$; $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$.

$$-m\omega^2 l\cos\alpha_0(l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)+mgl\sin\alpha_0=0, \qquad (I8)$$
$$-ma\omega^2\cos\theta_0(l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)+mga\sin\theta_0+\frac{1}{2}(C-A)\omega^2\sin 2(\theta_0+\delta)=0.$$

II. $\beta_0=\psi_0$; $\varphi_0=\frac{3\pi}{2}$.

$$-m\omega^2 l\cos\alpha_0(l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)+mgl\sin\alpha_0=0,$$
$$-ma\omega^2\cos\theta_0(l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)+mga\sin\theta_0+ \qquad (I9)$$
$$+\frac{1}{2}(C-A)\omega^2\sin 2(\theta_0-\delta)=0.$$

III. $\beta_0=\pi+\psi_0$; $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$.

$$-ml\omega^2\cos\alpha_0(l\sin\alpha_0-a\sin\theta_0)+mgl\sin\alpha_0=0,$$
$$-ma\omega^2\cos\theta_0(-l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)+mga\sin\theta_0+ \qquad (20)$$
$$+\frac{1}{2}(C-A)\omega^2\sin 2(\theta_0+\delta)=0.$$

IV. $\beta_0=\pi+\psi_0$; $\varphi_0=\frac{3\pi}{2}$.

$$-ml\omega^2\cos\alpha_0(l\sin\alpha_0-a\sin\theta_0)+mgl\sin\alpha_0=0,$$
$$-ma\omega^2\cos\theta_0(-l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0)+mga\sin\theta_0+ \qquad (2I)$$
$$+\frac{1}{2}(C-A)\omega^2\sin 2(\theta_0-\delta)=0.$$

6^0. Обратимся теперь к исследованию соотношений (I8)-(2I), т.е. к установлению зависимости между значениями параметра ω и углов α_0 и θ_0. При этом, как уже упоминалось ранее, будем рассматривать продолговатое тело вращения, для которого $A>C$.

I. $\beta_0-\psi_0=0$; $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$. Этому случаю соответствует стационарное движение, схематически представленное на рис. 4а. Углы α_0 и θ_0 определяются равенствами (I8). Пользуясь тем, что в рассматриваемом случае

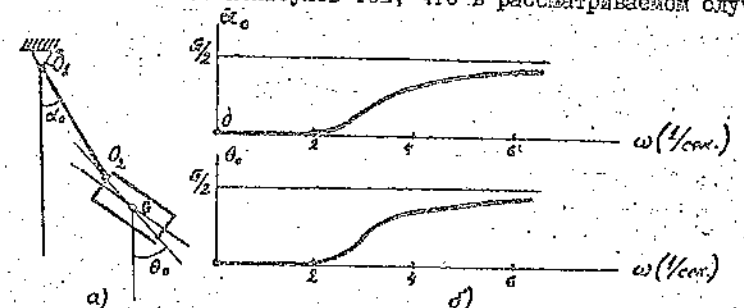

Рис. 4

$0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}$; $0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$, введем замену переменных

$$\sin\theta_0 = x;\quad \sin\alpha_0 = y;\quad \cos\theta_0=\sqrt{1-x^2};\quad \cos\alpha_0=\sqrt{1-y^2}. \tag{22}$$

В результате уравнения (I8) примут вид

$$x=\frac{y}{\varkappa}\left(\frac{\nu}{\sqrt{1-y^2}}-1\right),\quad y=\frac{x(\nu+\rho x)}{\sqrt{1-x^2}}-(\varkappa+\sigma)x-\rho\sqrt{1-x^2}, \tag{23}$$

где

$$\varkappa=\frac{a}{l};\qquad \sigma=\frac{A-C}{mal}\cos 2\delta,$$
$$\rho=\frac{A-C}{mal}\sin\delta\cos\delta;\quad \nu=\frac{g}{\omega^2 l}. \tag{24}$$

Используя равенства (23), исследуем поведение кривых

$$x=f_1(y,\nu)=\frac{y}{\varkappa}\left(\frac{\nu}{\sqrt{1-y^2}}-1\right),$$
$$y=f_2(x,\nu)=\frac{x(\nu+\rho x)}{\sqrt{1-x^2}}-(\varkappa+\sigma)x-\rho\sqrt{1-x^2} \tag{25}$$

на плоскости (x,y) в зависимости от изменения параметра ν при фиксированных значениях σ, ρ и $\varkappa$.

Рассмотрим вначале однопараметрическое семейство кривых $x=f_1(y,\nu)$. Оно имеет на плоскости (x,y) общую точку $(0,0)$, которая является точкой перегиба, и асимптоту y = I. При $0<\nu\leq 1$ кривая $x=f_1(x,\nu)$ имеет минимум в точке $x=-\frac{1}{\varkappa}(1-\nu^{2/3})^{3/2}$; $y=(1-\nu^{2/3})^{1/2}$; при $\nu>1$ экстремальных точек у нее нет. На всем интервале $0<y<1$ кривая $x=f_1(y,\nu)$ сохраняет постоянную выпуклость. При малых значениях ν кривая $x=f_1(y,\nu)$ попадает в область $(0<x<1;\ 0<y<1)$ лишь при значениях y, близких к единице; с ростом ν эта кривая (в интервале $0<x<1$) все далее отодвигается от асимптоты y = I. График этой кривой показан на рис.5 (тонкими сплошными линиями).

Рассмотрим теперь семейство кривых $y=f_2(x,\nu)$. Общей точкой этого семейства является точка с координатами $(0,-\rho)$; в интервале $0<x<1$ точек перегиба нет, все кривые в этом интервале – вогнутые. Асимптотой кривой $y=f_2(x,\nu)$ является прямая x = I. Согласно второму равенству (25), условие существования экстремума кривой $y=f_2(x,\nu)$ приводится к виду

$$(\varkappa+\sigma)(1-x^2)^{3/2}=\nu+3\rho x-2\rho x^3. \tag{26}$$

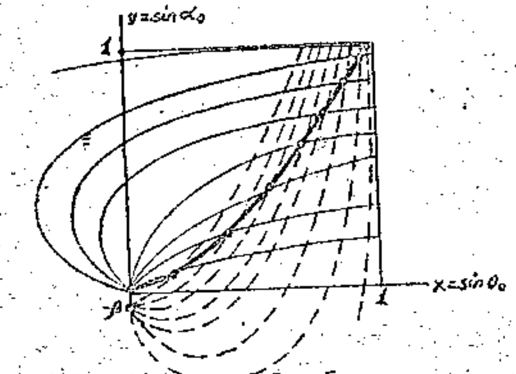

Рис.5

Из этого условия следует, что при $\nu=\varkappa+\sigma$ в точке x = 0 кривая $y=f_2(x,\nu)$ имеет минимум. Можно показать, что при $\nu>\varkappa+\sigma$ эта кривая в интервале $0<x<1$ не имеет экстремума. Действительно, пусть

$$\nu=\varkappa+\sigma+b\qquad (b>0). \tag{27}$$

Подставив выражение для ν в равенство (26), получим

$$(\varkappa+\sigma)[(1-x^2)^{3/2}-1]=b+\rho x(3-x^2),\qquad \text{где}\quad 0<x<1. \tag{28}$$

Однако последнее соотношение невозможно, т.к. его левая часть отрицательна, а правая положительна. В случае же, когда $b<0$ и $\nu<\varkappa+\sigma$ возможно удовлетворение последнего неравенства и, следовательно, существование экстремума.

При малых значениях ν кривые $y=f_2(x,\nu)$ расположены в интервале $0<x<1$ вблизи асимптоты x = I, а по мере увеличения ν от нее удаляются. На рис. 5 семейство кривых $y=f_2(x,\nu)$ показано тонкими пунктирными линиями.

Решениями системы (25) являются точки пересечения кривых $x=f_1(y,\nu)$ и $y=f_2(x,\nu)$. Перечисленные выше свойства этих кривых позволяют заключить, что в области $(0<x<1;\ 0<y<1)$ каждому значению ν соответствует лишь одна такая точка пересечения. Действительно, так как кривая $y=f_2(x,\nu)$ вогнута, а кривая $x=f_1(y,\nu)$ выпукла, то точек пересечения может быть только две. Однако левый конец вогнутой кривой – точка с координатами $(0,-\rho)$ – лежит всегда ниже, чем левый конец выпуклой кривой, вследствие чего одна из двух упомянутых точек пересечения не попадает в область $(0<x<1;\ 0<y<1)$. Используя рис. 5, нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае точка пересечения упомянутых кривых существует при любом ν. Действительно, при малых ν обе кривые в упомянутой выше области близки к своим асимптотам, пересекающимся в точке с координатами (I,I). Поэтому при малых значениях ν пересечение кривых (23) близко к точке с координатами (I,I). Напротив, при больших значениях параметра ν пересечение упомянутых кривых приближается к точке с координатами (0,0), являющейся предельной при $\nu \to \infty$ (или, что то же, при $\omega \to 0$).

Таким образом, форма стационарного движения, описываемая уравнениями (23), возможна при любом значении ν, или, что то же, ω. На рис. 4б изображены зависимости углов $\theta_0 = \arcsin \eta x$; $\alpha_0 = \arcsin y$ от изменения параметра ω в пределах от 0 до ∞.

II. Рассмотрим теперь случай, когда $\beta_0 - \varphi_0 = 0$; $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$, и условия равновесия определяются равенствами (19). Форма равновесия тела при

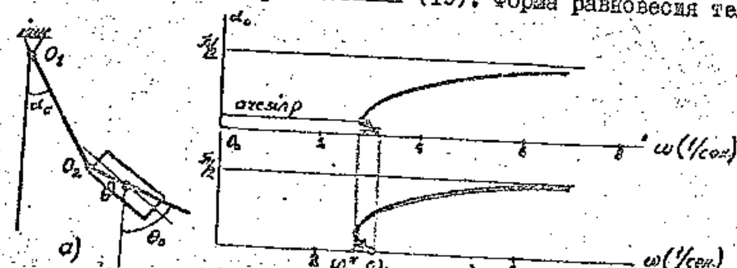

Рис.6

этом имеет вид, изображенный на рис. 6а. Используя обозначения (22), условия равновесия тела (19) представим в виде

$$x = \frac{y}{x}\left(\frac{\nu}{\sqrt{1-y^2}} - 1\right), \quad y = \frac{x(\nu - \rho x)}{\sqrt{1-x^2}} - (x+\delta)x + \rho\sqrt{1-x^2}. \qquad (29)$$

Первые уравнения в совокупностях (23) и (29) полностью совпадают. Поэтому для решения задачи в данном случае достаточно рассмотреть свойства однопараметрического семейства кривых

$$y = f_3(x,\nu) = \frac{x(\nu - \rho x)}{\sqrt{1-x^2}} - (x+\delta)x + \rho\sqrt{1-x^2}. \qquad (30)$$

Это семейство имеет общую точку с координатами $(0,\rho)$ и общую асимптоту $x = I$ (за исключением случая $\nu = \rho$, когда асимптота отсутствует). Легко показать, используя вторую производную кривой $y = f_3(x,\nu)$, что при $\nu < \rho$ эта кривая выпукла и может иметь один экстремум типа максимума. В этом случае линейный член в формуле (30) имеет преобладающее влияние ($x + \delta \gg \rho$), и кривая лишь для малых значений x попадает в исследуемую область ($0 < x < 1$; $0 < y < 1$). Но при этом кривая $x = f_1(y,\nu)$ близка к своей асимптоте $y = I$, и поэтому для данных значений $\nu \leq \rho$ не существует точек пересечения кривых $x = f_1(y,\nu)$ и $y = f_3(x,\nu)$, а, следовательно, и не существует рассматриваемой формы стационарного движения.

При значениях $\nu > \rho$ кривая $y = f_3(x,\nu)$ при $x = \frac{\rho}{\nu}$ имеет точку перегиба; правее от этой точки появляется второй экстремум – минимум функции $y = f_3(x,\nu)$. Правее своего минимального значения кривая $y = f_3(x,\nu)$ стремится к асимптоте $x = I$ и при этом имеет точку пересечения с кривой $x = f_1(y,\nu)$. В дальнейшем с ростом параметра ν координаты точки перегиба $x = \frac{\rho}{\nu}$; $y = \frac{\rho}{\nu}\left(-x - \delta + 2\sqrt{\nu^2 - \rho^2}\right)$ стремятся к значениям $x = 0$, $y = 2\rho$; к этим же значениям стремятся координаты минимума функции $y = f_3(x,\nu)$. Сама же эта функция становится практически вогнутой кривой без особых точек. При некотором значении ν, когда кривая $x = f_1(y,\nu)$ пересекает ось y в точке с координатами $x = 0$; $y = \nu$, появляется вторая точка пересечения кривых $x = f_1(y,\nu)$ и $y = f_3(x,\nu)$. Подставив координаты этой точки в первое уравнение (29), получим условие для нахождения величины ν, именно:

$$\nu' = \sqrt{1-\rho^2}. \qquad (3I)$$

Таким образом, при $\nu > \sqrt{1-\rho^2}$ существуют две точки пересечения кривых $x = f_1(y,\nu)$ и $y = f_3(x,\nu)$ и соответственно две формы стационарного движения тела. При дальнейшем увеличении ν упомянутые точки пересечения приближаются друг к другу и при определенном значении $\nu = \nu^*$ сливаются в одну, являющуюся точкой касания кривых $x = f_1(y,\nu)$ и $y = f_3(x,\nu)$ (рис. 7). При последующем увеличении параметра ν эти кривые не пересекаются в исследуемой области изменения переменных x и y.

Для определения величины ν^* воспользуемся условием касания кривых $x = f_1(y,\nu)$ и $y = f_3(x,\nu)$, именно:

$$\frac{\partial f_1(y,\nu)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_3(x,\nu)}{\partial x} = 1. \qquad (32)$$

Последнее при использовании первого равенства (25) и выражения (30) приводится к виду

$$\frac{1}{x}\left[\frac{\nu}{(1-y^2)^{3/2}} - 1\right]\left[-(x+\delta) + \frac{\nu - 3\rho x + 2\rho x^3}{(1-x^2)^{3/2}}\right] = 1. \qquad (33)$$

Выражение (33) совместно с равенствами (29) составляет систему трех уравнений для отыскания трех неизвестных величин ν^*, x^*, y^*,

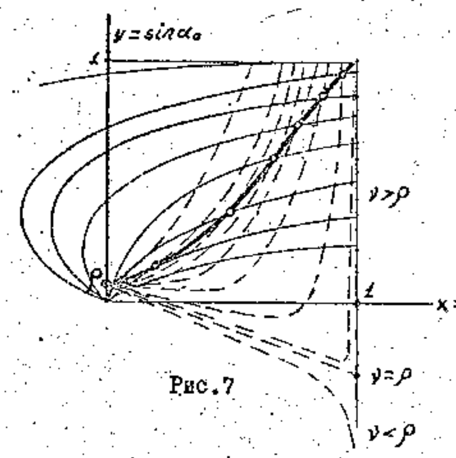

Рис.7

соответствующих предельному значению ν^*, после которого стационарное движение, схематически представленное на рис. 6а, становится невозможным.

На рис. 7 представлены сплошными и пунктирными линиями соответственно семейства кривых $x=f_1(y,\nu)$ и $y=f_3(x,\nu)$ в зависимости от изменения параметра ν.

На рис. 6б построены графики, характеризующие зависимость углов α_0, θ_0 от параметра ω. Согласно последнему равенству (24), значению ν^* соответствует величина $\omega^*=\sqrt{\frac{g}{\ell\nu^*}}$. При угловой скорости $\omega=\omega^*$ на каждом из приведенных выше графиков имеется точка, от которой ответвляются две ветви. Одна из них стремится к точке с абсциссой $\omega_1=\sqrt{\frac{g}{\ell\sqrt{1-\rho^2}}}$ (значения ординат в этой точке соответственно $\alpha_0=\arcsin\rho$; $\theta_0=0$). На второй ветви при $\omega\to\infty$ значения углов α_0 и θ_0 стремятся к $\frac{\pi}{2}$.

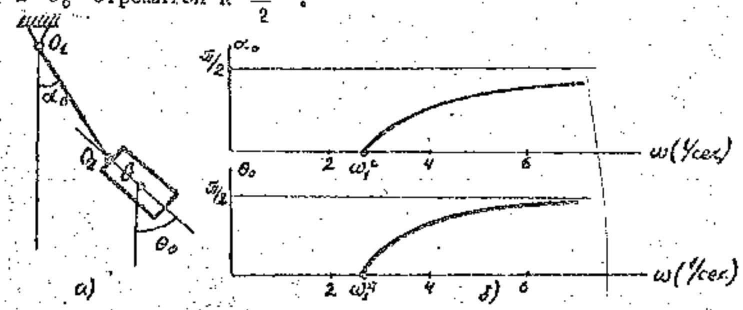

Рис.8

Следует отметить, что при $\delta\to 0$ $(\rho\to 0)$ рассмотренные выше положения динамического равновесия, схематически показанные на рис. 4а и 6а, стремятся к известному (см., например, [1-3]) положению динамического равновесия, изображенному на рис. 8а, и при $\delta=0$ с ним сливаются. При этом графики зависимости величин x и y при различных значениях ν, изображенные на рис. 5 и 7, между собой сливаются и полностью совпадают с графиком, представленным на рис. 9.

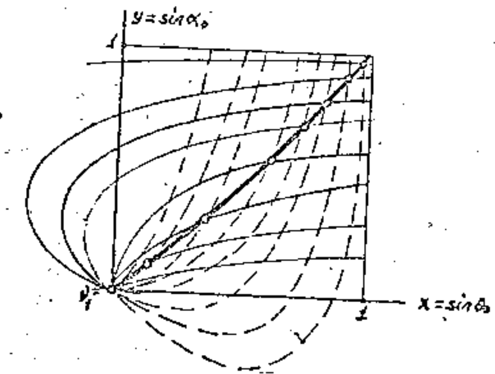

Рис.9

III. Обратимся теперь к рассмотрению стационарного движения, при котором $\beta_0-\varphi_0=\pi$, $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$, а условия равновесия определяются соотношениями (20). Эти условия при использовании обозначений (22) и (24) преобразуются к виду

$$x=-\frac{y}{\varkappa}\left(\frac{\nu}{\sqrt{1-y^2}}-1\right),$$
$$y=-\frac{x(\nu+\rho x)}{\sqrt{1-x^2}}+(\varkappa+\sigma)x+\rho\sqrt{1-x^2}. \tag{34}$$

Форма стационарного движения тела в рассматриваемом случае схематически представлена на рис. 10а. Для ее изучения следует рассматривать поведение на плоскости (x,y) двух однопараметрических семейств кривых:

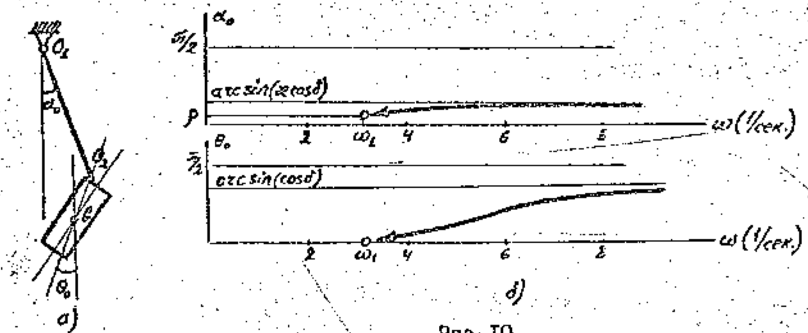

Рис.IO

$$x = f_4(y,\nu) = -\frac{y}{\varkappa}\left(\frac{\nu}{\sqrt{1-y^2}} - 1\right), \tag{35}$$

$$y = f_5(x,\nu) = -\frac{\nu + \rho x}{\sqrt{1-x^2}}\, x + (\varkappa+\sigma)x + \rho\sqrt{1-x^2}.$$

Сравнивая равенства (25) и (35), находим, что

$$f_4(y,\nu) = -f_1(y,\nu); \quad f_5(x,\nu) = -f_2(x,\nu). \tag{36}$$

Это дает возможность воспользоваться результатами, полученными выше в п.I. В частности, при $\nu < 1$ кривая $x = f_4(y,\nu)$ имеет максимум в точке с координатами (рис. II)

$$x = \frac{1}{\varkappa}(1-\nu^{2/3})^{3/2}; \quad y = (1-\nu^{2/3})^{1/2}. \tag{37}$$

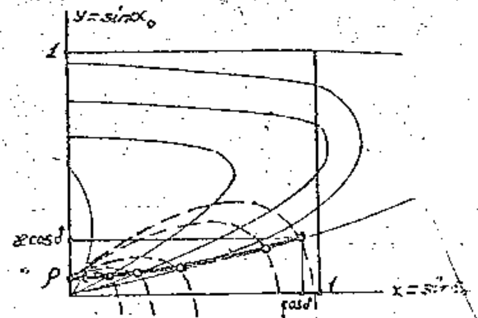

Рис.II

При значениях $\nu > 1$ кривая $x = f_4(y,\nu)$ не имеет экстремума. При малых ν вследствие того, что $\varkappa = \frac{a}{\ell} < 1$, максимум кривой $x = f_4(y,\nu)$, определяемый формулами (37), находится вне области $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Поэтому кривая $x = f_4(y,\nu)$ в только что указанной области состоит из двух ветвей. Одна из них выпукла и близка к асимптоте $y = 1$. Нижняя же ветвь вогнута и близка к прямой $y = (\varkappa+\sigma)x$ (т.к. $\varkappa+\sigma \gg \rho$). Кривая $y = f_5(x,\nu) = -f_2(x,\nu)$ при $\nu < \varkappa+\sigma$ имеет максимум и является выпуклой. Так как точка с координатами $(0, \rho)$, являющаяся левым концом выпуклой кривой $y = f_5(x,\nu)$, лежит выше точки с координатами $(0,0)$ – левого конца вогнутой части кривой $x = f_4(y,\nu)$ –, то эти кривые в области $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $0 < y < \frac{\pi}{2}$ могут пересекаться при любом ν лишь в одной точке. При малом ν эта точка близка к точке с координатами $x = \cos\delta$; $y = \varkappa\cos\delta$. Критическим значением ν, после которого пересечения уже не будет, является то значение, при котором кривая $x = f_4(y,\nu)$ пересекает ось y в точке с координатами $(0, \rho)$. Подставляя координаты последней в первое равенство (34), получим

$$\nu = \sqrt{1-\rho^2} = \nu_1. \tag{38}$$

Таким образом, рассматриваемая форма стационарного движения возможна при значениях параметра ν, находящихся в интервале $0 < \nu < \nu_1 = \sqrt{1-\rho^2}$, что соответствует, согласно последнему равенству (24), значениям угловой скорости ω, находящимся в интервале

$$\sqrt{\frac{g}{\ell\sqrt{1-\rho^2}}} \leq \omega < \infty. \tag{39}$$

На рис. II изображены графики кривых $x = f_4(y,\nu)$ и $y = f_5(x,\nu)$, показанные соответственно тонкими и пунктирными линиями, а на рис. IOб представлены зависимости углов $\alpha_0 = \arcsin y$, $\theta_0 = \arcsin x$ от изменения параметра ω.

IУ. Наконец, четвертую форму стационарного движения тела, изображенную схематически на рис. I2а, получим при условии, что

$$\beta_0 - \varphi_0 = \pi; \quad \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}. \tag{40}$$

Уравнения равновесия (21), соответствующие этому случаю, при использовании обозначений (22), (24) преобразуются к виду

$$x = -\frac{y}{\varkappa}\left(\frac{\nu}{\sqrt{1-y^2}} - 1\right), \; y = -\frac{x(\nu-\rho x)}{\sqrt{1-x^2}} + (\varkappa+\sigma)x - \rho\sqrt{1-x^2}. \tag{41}$$

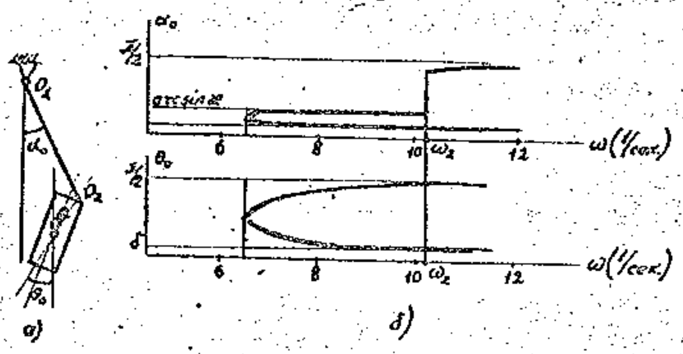

Рис.12

Сравнивая эти равенства соответственно с первым уравнением (23) и вторым равенством (29), а также учитывая первое выражение (25) и соотношение (30), заключаем, что в данном случае изучение формы стационарного движения состоит в исследовании поведения на плоскости (x,y) однопараметрических семейств кривых

$$x = f_6(y,\nu) = \frac{y}{x}\left(\frac{\nu}{\sqrt{1-y^2}} - 1\right) = f_4(y,\nu),$$

$$y = f_7(x,\nu) = -x\frac{\nu - \rho x}{\sqrt{1-x^2}} + (x+\sigma)x - \rho\sqrt{1-x^2} = f_3(x,\nu) \tag{42}$$

в области изменения переменных $0 < x < 1$; $0 < y < 1$.

Как и в предыдущем случае, кривые $x = f_6(y,\nu) = f_4(y,\nu)$, выходящие из общей точки с координатами (0,0), состоят при малых ν из двух ветвей: верхней – выпуклой и нижней – вогнутой, близкой к прямой $x = \frac{y}{x}$.

Семейство кривых $y = f_7(x,\nu)$ имеет общую точку с координатами $(0,-\rho)$. При $\nu < \rho$ кривая $y = f_7(x,\nu)$ вогнута и может иметь только один экстремум, именно, минимум. При $x \to 1$ кривая как угодно близко подходит к асимптоте $x = 1$ $(y \to \infty)$. С кривой $x = f_6(y,\nu)$ здесь имеются две точки пересечения, одна из которых близка к точке с координатами (1,1); вторая же точка пересечения будет определена несколько ниже.

При $\nu > \rho$ $y \to -\infty$; при $x \to 1$ кривая $y = f_7(x,\nu)$ имеет точку максимума, расположенную вблизи прямой $x = 1$. С кривой $x = f_6(y,\nu)$ кривая $y = f_7(x,\nu)$ также имеет две точки пересечения, однако пересекается уже не верхняя часть кривой $x = f_6(y,\nu)$, а нижняя. Таким образом, при $\nu = \rho$ кривая $x = f_6(y,\nu)$ имеет как бы разрыв *). В дальнейшем две точки пересечения кривых $y = f_6(x,\nu)$ и $x = f_7(y,\nu)$ по мере увеличения параметра ν сближаются и при определенном значении ν_1^* сливаются в одну точку. Для ее отыскания надлежит, как и в п.II, воспользоваться условием касания кривых $x = f_6(y,\nu)$ и $y = f_7(x,\nu)$. Нетрудно показать, используя равенства (42), что это условие полностью совпадает с условием (33). Оно в совокупности с равенствами (42) составляет три уравнения для определения величин ν_1^*, x_1^*, y_1^*. На рис. 13 построены графики функций $x = f_6(y,\nu)$, $y = f_7(x,\nu)$, показанные соот-

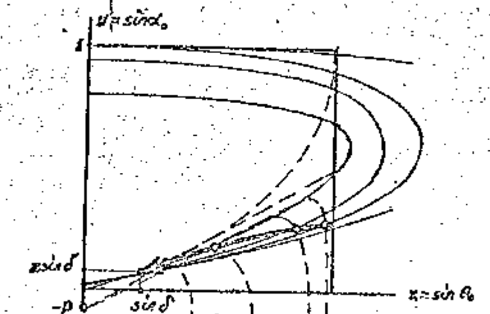

Рис.13

ветственно сплошными и пунктирными линиями в зависимости от изменения параметра ν. На рис. 12б показаны графики зависимости углов α_0, θ_0 от параметра ω. В частности, согласно последнему равенству (24), на рис. 12

$$(\omega_2^*)^2 = \frac{g}{\ell\nu_1^*}; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell\rho}. \tag{43}$$

*) Точки пересечения кривых $x = f_6(y,\nu)$ и $y = f_7(x,\nu)$, близкие к точке с координатами (1,1), как бы продолжают ветвь, которая является решением уравнений стационарного движения тела для случая, когда угол θ_0 изменяется в пределах $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$ (этот случай, как уже отмечалось, в данной работе не рассматривается). Таким образом, нижняя и верхняя части кривой на рис. 12б являются отрезками различных ветвей общего решения задачи. Этим и объясняется упомянутая кажущаяся разрывность решения.

В заключение отметим, что положения динамического равновесия исследуемого тела, рассмотренные в п.Ш и п.IУ данной работы, при $\delta \to 0$ стремятся к положению, изображенному на рис. 14а, и при $\delta = 0$ с ним сливаются [1,2]. При этом графики зависимости переменных x, y, а также α_0, θ_0 от изменения угловой скорости ω, показанные на рис. 10б, 11, 12б, 13, сливаются с соответствующими графиками, изображенными на рис. 14б, 15.

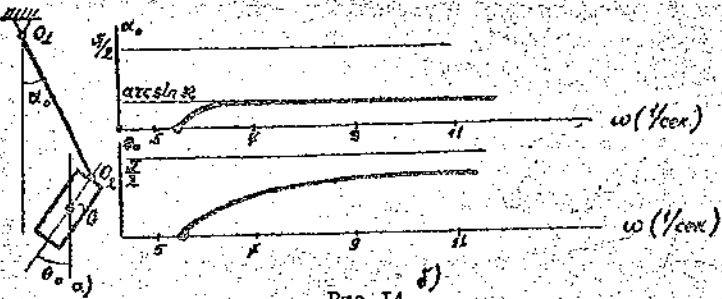

Рис.14

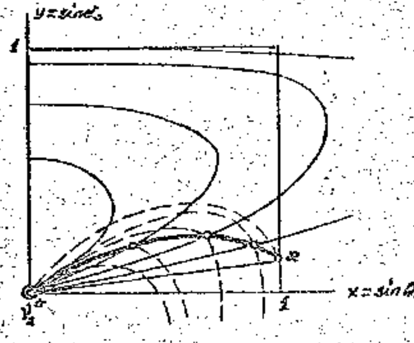

Рис.15

Литература

1. Ишлинский А.Ю. Примеры бифуркации, не приводящие к появлению неустойчивых форм стационарного движения. -ДАН СССР, 1957, 117, № 1, с.47-49.
2. Ишлинский А.Ю., Малашенко С.В., Темченко М.Е. О разветвлении устойчивых положений динамического равновесия одной механической системы. -Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 8, с.53-61.
3. Темченко М.Е. Об устойчивости одного из положений динамического равновесия одной механической системы. -ДАН СССР, 1957, 117, № 1, с.50-52.

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ
Институт математики АН УССР, Киев, 1977

УДК 629.191.2:62-56

ξ, μ - ФУНКЦИОНАЛ ИНЕРЦИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ПОСТРОЕНИЕ

Ю.А.Карпачёв, Д.Г.Кореневский

В продолжение исследований А.Ю.Ишлинского (РЖМех., 1968,8 А76) и авторов для основного баллистического уравнения получено выражение так называемого ξ, μ -функционала инерциального управления, строящегося на основе показаний интегратора кажущегося ускорения, жестко закрепленного относительно стабилизированного в инерциальном пространстве основания, с осью чувствительности, параллельной оси $O\xi$ стартовой, невращающейся системы координат, и показаний интегратора кажущегося ускорения, ось чувствительности которого ориентирована к оси чувствительности первого интегратора под постоянным углом μ. Структура полученного функционала в отличие от известного λ, μ -функционала требует предстартового разворота оси чувствительности только одного μ -интегратора, что позволяет уменьшить суммарную инструментальную ошибку функционала. Отдельно выделяется вариант приборной реализации ξ, μ -функционала с использованием показаний гироскопических интеграторов кажущегося ускорения, позволяющий обнаружить возможность дальнейшего упрощения построения ξ, μ -функционала путем исключения интегрирующих счетно-решающих устройств.