

**Институт проблем механики  
Российской академии наук**

**В.Н. Кукуджанов, А.Л. Левитин, В.С. Синюк**

**Численное моделирование  
повреждающихся упругопластических  
материалов**

ПРЕПРИНТ № 807

**Москва 2006**

## АННОТАЦИЯ

Целью данной работы является интегрирование определяющих соотношений повреждающихся пластических сред для GTN-модели методом расщепления, предложенным В.Н.Кукуджановым [30,31] для интегрирования уравнений общего вида при условии пластичности, зависящем от первых двух инвариантов тензора напряжения и реализация этого метода в вычислительном пакете ABAQUS. В частности для GTN модели упруго-пластической повреждающейся среды.

Решены задачи одноосного растяжения для полностью и полустесненной границ (плоская деформация), изгиб балки (плоская деформация), сдвига параллелепипеда (пространственная постановка).

Проведено сравнение методов интегрирования Кукуджанова и используемого в пакете ABAQUS, предложенного Аравасом [26]. Показано, что скорость расчета методом В.Н.Кукуджанова в несколько раз выше, чем используемого в пакете ABAQUS.

## ВВЕДЕНИЕ

Описание процессов разрушения основывается на представлениях о разрушении как о потере способности материала к сопротивлению деформации вследствие нарушения внутренних связей. Потеря способности материала к сопротивлению деформации может вызываться как внешними воздействиями нетермомеханической природы (химические реакции, облучение), так и термомеханически при достижении напряженно-деформированным состоянием некоторых пределов, определяемых критериями разрушения.

Эксперименты по деформированию и разрушению стандартных образцов при растяжении и сдвиге (кручении полых цилиндров) демонстрируют на диаграммах деформирования участки разупрочнения, на которых напряжения падают с ростом деформаций. При трактовках таких зависимостей надо учитывать, что напряжение и деформация являются не единственными параметрами состояния и, поэтому, такие диаграммы показывают лишь срез многопараметрического процесса.

Применение инкрементальных теорий пластичности типа Прандтля-Рейсса при описании разупрочнения (падение предела текучести с ростом деформации) приводит к некорректным краевым задачам из-за нарушения постулата Драккера или его математического аналога – критерия Адамара. В квазистатике это связано с утратой уравнениями свойств эллиптичности, а в динамике с нарушениями гиперболичности. Поэтому прямое описание процесса разрушения в рамках стандартных моделей упругопластических материалов оказывается неудачным.

С другой стороны, как уже упоминалось падение напряжений из-за потери материалом способности к сопротивлению деформации может происходить по нетермомеханическим причинам при неизменной деформации. Это говорит о том, что при континуальном описании процессы деформации и разрушения можно и нужно трактовать как независимые (что не исключает взаимовлияния), а развитие разрушения целесообразно ха-

рактизовать своим параметром состояния – **поврежденностью**. Этот важный шаг по пути разработки континуальных теорий разрушения был сделан в работах Качанова [6] и Работнова [7].

Под **поврежденностью** в современной механике деформируемого тела понимают нарушение сплошности структуры материала вследствие внешнего воздействия.

Исторически первые попытки описать континуальное разрушение материала основывались на критериях или теориях прочности, которые рассматривали разрушение не как *процесс*, развивающийся в течении нагружения, а как напряженно-деформированное *состояние* материала, при котором оно наступает. Этот подход во многом противоречил и экспериментальным наблюдениям и общим положениям механики сплошных сред. В шестидесятые годы прошлого века в работах советской школы механиков оформился новый подход, в котором *разрушение*, стало рассматриваться как процесс, связанный с нагружением. Такая точка зрения очень быстро завоевала признание и в течении короткого времени сложилось новое направление в механике сплошных сред – *механика повреждающихся сред* или *механика континуального разрушения*: Ильюшин А.А., Победря Б.Е. [8]; Качанов Л.М. [6]; Работнов Ю.Н. [7]; Кукуджанов В.Н. [9,32]; Curran D.R., Seaman L., Shockey D.A. [10]; Gurson A.L. [12], Tvergaard V. [13], Chu C.C., Nedelman A. [14] и многие другие.

Континуальный подход к описанию процессов разрушения предполагает построение теоретических моделей сплошной среды, описывающих разрушение как процесс на основе единых уравнений для разрушенного и неразрушенного состояний материала. Этот подход описывает появление и развитие поверхностей и зон разрушения без явного их выделения.

В первых работах по теории поврежденности на основе представления о разрушении как о процессе развития в материале микродефектов в виде микротрещин и микропор поврежденность ассоциировалась с образованием пустот (пористостью), что приводит к уменьшению площади, по которой действует напряжение и, следовательно, к уменьшению упругих моду-

лей материала, изменение которых легко поддается измерению в эксперименте.

Влияние микродефектов на несущую способность стержня при растяжении проявляется в уменьшении эффективного модуля Юнга  $\sigma = \tilde{E}\varepsilon$ , где  $\tilde{E} = E(1 - D)$  – эффективный модуль, уменьшающийся с ростом поврежденности  $D$ .

Следует подчеркнуть еще один существенный момент: до появления теории поврежденности критерий разрушения, как правило, не был связан с законами деформирования материала и предлагался независимо. С развитием понятия поврежденности и моделей, описывающих ее, деформация и континуальное разрушение рассматриваются в большинстве работ как единый процесс, то есть тело разрушается в процессе своего деформирования.

Поврежденность моделируется зарождением и ростом определенных микродефектов: дислокаций, микротрещин, микропор и т.д. вплоть до образования макротрещин. Такой подход подразумевает на определенном этапе усреднение или гомогенизацию свойств материала в микрообъеме (размеры микродефектов составляют  $10^{-15} \div 10^{-10}$  см) и определение его эффективных свойств, рассматриваемых уже в рамках сплошной среды (характерный мезомасштаб носителей поврежденности –  $10^{-4} \div 10^{-2}$  см)

Это **физический подход** к построению моделей повреждающихся материалов, когда в основу модели закладывается определенный механизм образования и развития неупругой деформации и континуального разрушения материала.

Альтернативным ему является **термодинамический подход** к построению континуального разрушения или поврежденности материала. Здесь поврежденный материал изначально предполагается сплошным, обладающим определенной внутренней структурой, которая характеризуется некоторым набором внутренних переменных (в частности поврежденностью, пластической необратимой деформацией и т.п.), связанных с напряженно-деформируемым состоянием материала. Для определения внутрен-

них переменных постулируются кинетические уравнения, согласованные с основными принципами термодинамики и теории определяющих соотношений. Система определяющих уравнений совместно с законами сохранения образуют замкнутую систему уравнений термомеханики, которая описывает поведение материала вплоть до разрушения. Этот подход хорошо описан в работах Кондаурова и Фортова [16] и Можена [17].

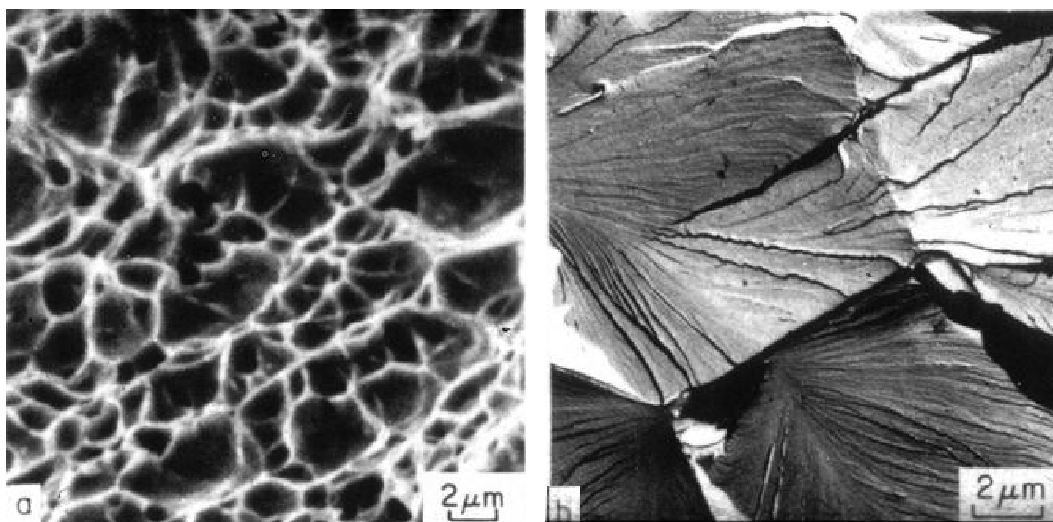
В **промежуточных подходах** вводятся объекты различной природы, из которых состоит материал промежуточного мезомасштаба (зерна, поликристаллы, макротрещины, молекулярные цепи, многофазные смеси и т.д.). Постулируется определенный механизм образования обратимых и необратимых деформаций материала. Разделы механики, развивающие такие подходы построения определяющих уравнений объединяются под названием «мезомеханика», «молекулярная механика», «механика трещин» и т.д.

Поврежденность может быть изначальной, может возникать только вследствие нагружения (зарождение пор) и иметь пороговое условие аналогичное условию пластичности.

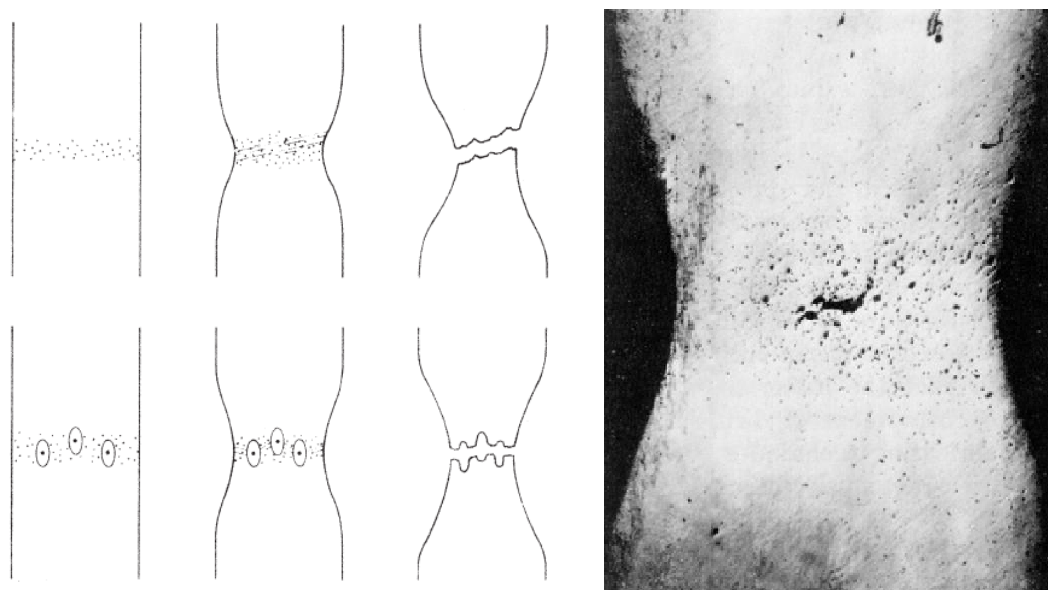
Физически механизмом нелинейной деформации является зарождение и развитие в материале дефектов кристаллической решетки под действием термомеханической нагрузки. Механизмы развития дефектов, как и их природа, многообразны и исследуются в физике твердого тела. В настоящее время хорошо изучены на микроуровне природа дислокаций и их связь с пластической деформацией.

Поврежденность можно разделить на два основных типа – это поврежденность *хрупких* упругих материалов и поврежденность *вязких* упруго-пластических материалов за пределом упругости. Характерные картины разрушения для вязких и хрупких материалов приведены на рис. 1.

Основные типы экспериментов по исследованию разрушения – это сдвиг (растяжение) при постоянной скорости деформации в квазистатике и соударение пластин (стержней) в динамике.



**Рисунок 1.** Характер разрушения на микроуровне для вязких (а) и хрупких (b) материалов

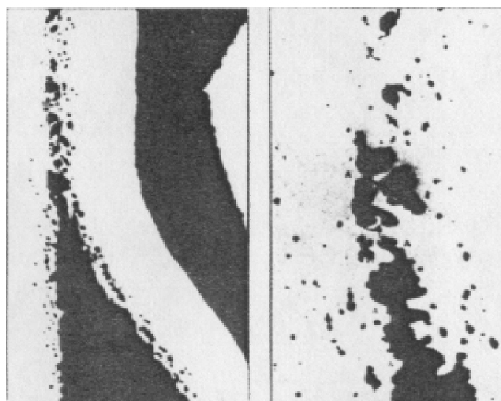


**Рисунок 2.** (слева сверху) схема образования полосы локализации при зарождении пор; (слева внизу) локализация при образовании больших пор; (справа) образование пор в образце при растяжении, характерный размер пор  $0.001 \div 0.1$  мм.

При сдвиге происходит сильный локальный разогрев и термическое разупрочнение, которое часто сопровождается фазовым превращением в полосе сдвига, т.е. это локальное явление (микротрещин много, но они сливаются в одну полосу адиабатического сдвига), в которой можно видеть и образование пор, но основное – *направленная микротрещина сдви-*

га. Полосы локализации могут наблюдаться не только в пластических, но и в хрупких материалах, что возможно вследствие сильного локального разогрева и разупрочнения. На рис. 2 [21] изображено образование пор в образце при растяжении.

Другой тип экспериментов – это *разрушение отколом при соударении пластин*. Это разрушение *растяжением* при взаимодействии волн растяжения, отраженных от свободной поверхности. Опыты Курана Д.Р., Симана Л., Шоки Д.А. [10], [11]; Каннеля Г.И., Разоренова С.В., Уткина А.В. Фортова В.Е. [23] и др. многократно подтвердили этот факт. Для пластических материалов здесь наблюдается вязкий откол с образованием сферических пор за счет всестороннего растяжения. Для разрушения требуется достаточная скорость соударения и *продолжительность* растягивающего импульса, чтобы механизм зарождения, роста и слияния привел бы к образованию трещины. На рис. 3 изображено образование макротрещины в следствии слияния микропор.



**Рисунок 3.** Образование макротрещины (слева) при слиянии микропор (справа) в экспериментах по соударению пластин.

В работах Гарсона и Твергаарда [12], [13] предложено условие пластичности для среды с периодическим расположением сферических пор, полученное из теоретического решения. На его основе Гарсоном, Твергардом и Нидельманом (Gurson, Tvergaard, Nedelman) была предложена модель (GTN-модель) поврежденности эффективного упругопластического материала, независящего от скорости деформации, со скалярной мерой поврежденности – пористостью. Модель учитывает зарождение и рост пор в



процессе пластической деформации. Описывает пластическую сжимаемость материала и эффект дилатансии. В качестве критерия разрушения принимается критическая величина пористости.

GTN-модель получила достаточно широкое распространение и использовалась при решении конкретных задач. Она хорошо описывает влияние первого инварианта на пластические свойства и сжимаемость разупрочняющегося пластического материала. Однако, как показали дальнейшие исследования, GTN-модель не лишена определенных недостатков, главными из которых являются независимость повреждаемости от скорости деформации и от остаточных напряжений. GTN-модель не учитывает влияние остаточных напряжений на разупрочнение-упрочнение материала. В ней используется скалярная мера повреждаемости, которая не в состоянии описать пространственный характер мод разрушения. Перечисленные недостатки приводят к тому, что уравнения GTN-модели не содержат ни масштабного, ни временного параметров и поэтому не в состоянии учесть масштабные эффекты при разрушении. Эти уравнения так же как и уравнения пластического течения при нарушении условия устойчивости Дракера дают некорректное описание равновесия среды. При численном моделировании это проявляется в зависимости решения от дискретизации задачи.

В работах Кукуджанова [18], [19] на основе модифицированного условия пластичности Гарсона была предложена новая модель, которая устраняет отмеченные недостатки GTN-модели. Эта модель построена на основе дислокационных представлений о развитии пластической деформации при термомеханическом нагружении поликристаллических материалов при умеренных пластических деформациях (стадия упрочнения) и на мезопредставлениях о зарождении и росте мезодефектов типа пор и микротрещин при больших деформациях (стадия разупрочнения). Постулирование определенной корреляции между микро- и макропараметрами позволило перейти от микроуравнений к определяющим соотношениям механики сплошных сред и получить кинетические уравнений для повреж-

денности. В результате такого подхода поврежденность описывается тензорной величиной, шаровая часть которой – пористость, фигурирующая в условии Гарсона, а дивергентная связана с релаксацией остаточных напряжений. Построенная таким образом модель учитывает зависимость повреждаемости от скорости пластической деформации и от остаточных напряжений. Модель является трехмасштабной моделью: микромасштаб определяется размером дислокаций, мезомасштаб – размерами пор, а макромасштаб – характерным размером тела.

**Моделирование процессов разрушения** состоит из двух основных частей: математическая модель и метод ее решения.

Целью данной работы является интегрирование определяющих соотношений повреждающихся пластических сред как независимых от скорости деформации, так и упруговязкопластических методом расщепления, предложенным Кукуджановым [31] для интегрирования уравнений общего вида при условии пластичности, зависящем от первых двух инвариантов тензора напряжения и реализация этого метода в вычислительном пакете ABAQUS. В частности GTN модель упругопластической повреждающейся среды.

# 1. GTN МОДЕЛЬ

## 1.1. Определяющие соотношения GTN модели.

В упругой области материал подчиняется закону Гука:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (1.1)$$

Скорости упругих и пластических деформаций можно считать аддитивными

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad (1.2)$$

Рассматриваемая модель описывает поведения металлов с не слишком большой долей пор. Хотя материал, содержащий поры (материал матрицы), предполагается пластически несжимаемым, поведение эффективного материала зависит от давления из-за наличия пор.

### Условие пластичности

Исходя из решения задачи о сферически симметричном деформировании сферической поры в идеальнопластическом материале, Гарсон предложил условие пластичности такого вида [12]

$$\Phi = \left( \frac{q}{\sigma_y} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left( -\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_y} \right) - (1 + q_3 f^2) \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{S} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$  - девиатор тензора напряжений Коши;

$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}$  - интенсивность касательных напряжений;

$p = -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$  - гидростатическое давление;

$f = \frac{V_{por}}{V}$  - пористость (объемная доля пор в материале);

$\sigma_y(\bar{\varepsilon}_m^{pl})$  - предел текучести сплошного материала (материала матрицы), зависящий от интенсивности пластических деформаций  $\bar{\varepsilon}_m^{pl}$ .

Твергард [13] ввел в это условие константы  $q_1$ ,  $q_2$ , и  $q_3 = q_1^2$  (как коэффициенты корректировки пористости и давления) для того, чтобы модель Гарсона давала согласие с численным расчетом модельной задачи. (задача о растяжении материала, с периодической пористой структурой, в случае плоской деформации). Он получил  $q_1 = 1.5$ ,  $q_2 = 1.0$ . В модели Гарсона эти константы равны единице  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ . Варьируя эти параметры, можно приблизить результаты численного расчета к экспериментальным данным.

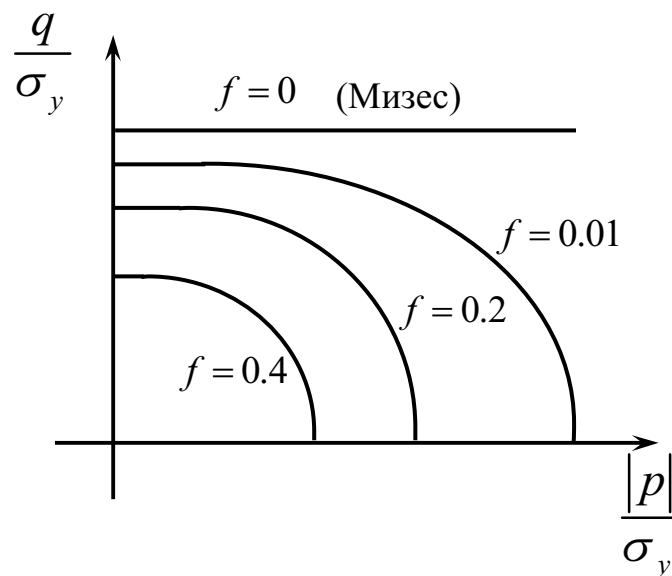


Рисунок 4. Поверхность текучести в  $p$ - $q$  плоскости

Подчеркнем, что при  $f = 0$  (сплошной материал) условие пластичности Гарсона переходит в условие текучести Мизеса. В случае  $f = 1$  (материал состоит из одних только пор) материал полностью теряет несущую способность. На рис. 4 показана поверхность текучести в  $p$ - $q$  плоскости для различной пористости материала.

На рис. 5 показана зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  для материала с начальной пористостью  $f_0$  при растяжении и сжатии. На этом же рисунке приведена диаграмма для идеальнопластического материала матрицы. Предел текучести пористого материала  $\sigma_{y_0}$ .

При сжатии материал упрочняется, так как поры уменьшаются, а при растяжении разупрочняется из-за роста и зарождения пор.

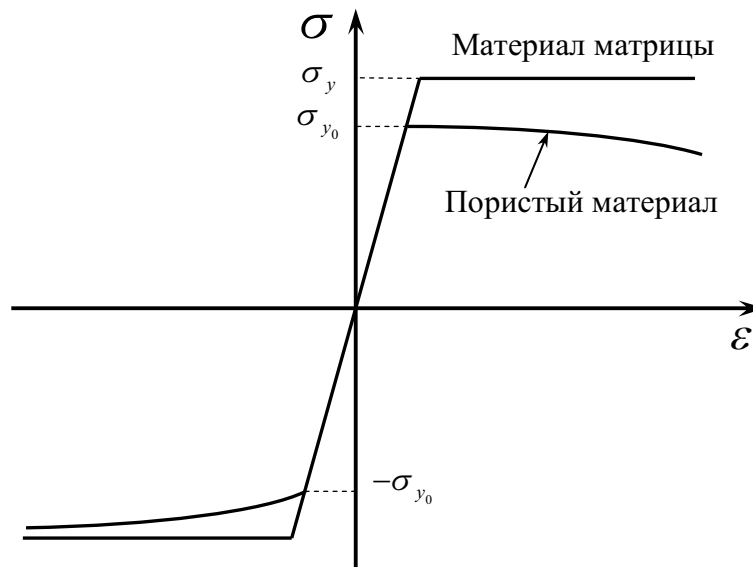


Рисунок 5. Поведение пористого материала при одноосном растяжении (сжатии).

### Закон ассоциированного течения

В качестве пластического потенциала принимается условие пластичности. Так, как пластический потенциал зависит от первого инварианта тензора напряжений, то пластическую деформацию можно представить в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{d\Phi}{d\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \left( -\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{I} + \frac{3}{2q} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \mathbf{S} \right) \quad (1.4)$$

где  $\dot{\lambda}$  – неотрицательный скалярный множитель.

### Эволюция интенсивности пластической деформации и пористости

Упрочнение материала матрицы описывается зависимостью  $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_m^{pl})$ . Исходя из того, что работа пластических деформаций выполняется только материалом матрицы, получим уравнение, описывающие эволюцию  $\bar{\varepsilon}_m^{pl}$ :

$$(1-f)\sigma_y \dot{\bar{\epsilon}}_m^{pl} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \quad (1.5)$$

где  $\bar{\epsilon}_m^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\epsilon}_m^{pl} : \boldsymbol{\epsilon}_m^{pl}}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_m^{pl}$  - пластическая деформация материала матрицы.

Изменение пористости материала происходит в следствии роста существующих пор и зарождения новых

$$\dot{f} = \dot{f}_{nuc} + \dot{f}_{gr}$$

Из уравнение неразрывности, считая материал матрицы пластически несжимаемым, получим уравнение для роста пор

$$\dot{f}_{gr} = (1-f)\dot{\bar{\epsilon}}_m^{pl} : I \quad (1.6)$$

Зарождение пор происходит вследствие относительного движения зерен и зависит от интенсивности пластических деформаций [14]

$$\dot{f}_{nuc} = A \dot{\bar{\epsilon}}_m^{pl} \quad (1.7)$$

где  $A = A(\dot{\bar{\epsilon}}_m^{pl}) = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\epsilon}_m^{pl} - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right]$ .

Интенсивность деформаций, при которой зарождаются поры подчиняется нормальному распределению со средней величиной  $\epsilon_N$  с дисперсией  $s_N$ . Объемная доля зарождающихся пор равна  $f_N$ . Поры зарождаются только при растяжении (объемная пластическая деформация больше нуля).

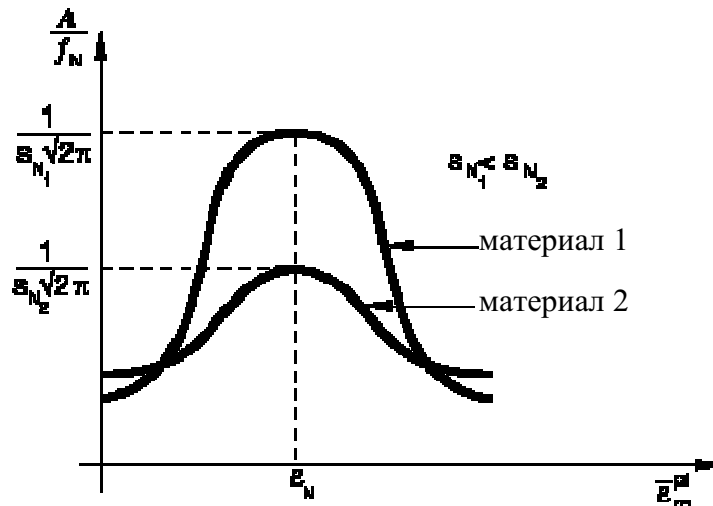


Рисунок 6. Функция распределения зарождения пор  $A$

## 1.2. Примеры расчета

Как уже было отмечено выше GTN модель широко распространена и применяется на практике. В качестве иллюстрации такого применения приведем несколько примеров расчета конкретных задач механики континуального разрушения.

### Изгиб балки

В [27] была решена задача изгиба балки из повреждающегося материала.

Балка, свободно опертая на концах, прогибается под действием цилиндрического штампа (случай плоской деформации). На рис. 7 приведен общий вид

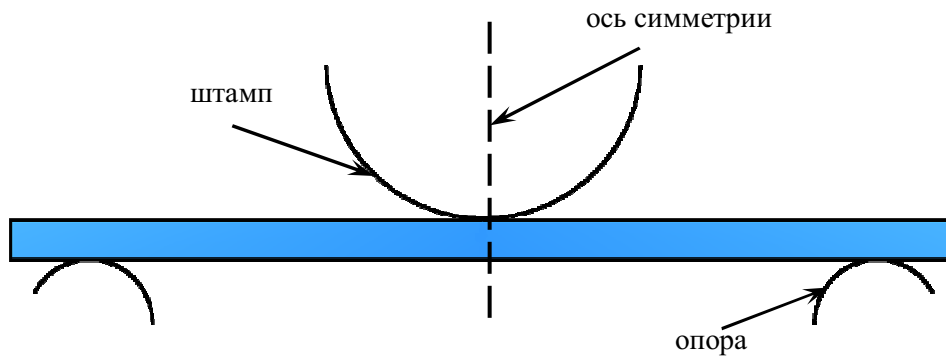


Рисунок 7. Изгиб балки под действием цилиндрического штампа

Между штампом и балкой, а также между балкой и опорами трение отсутствует.

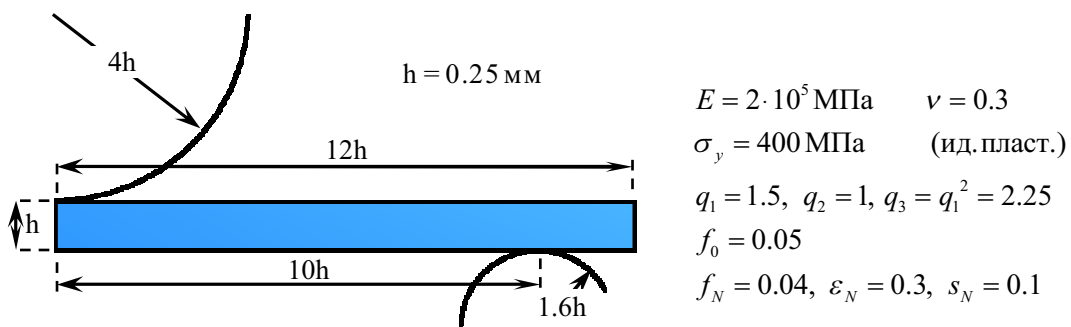
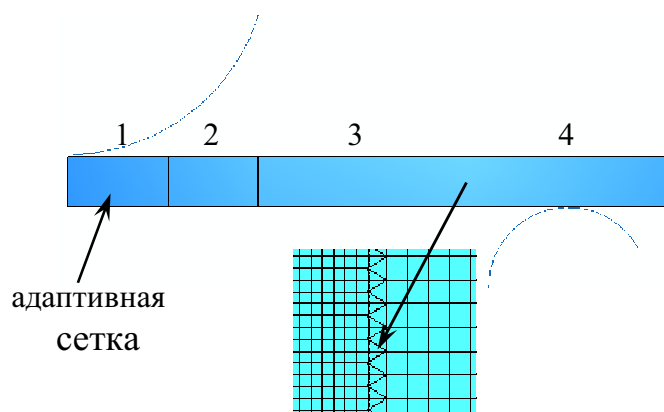


Рисунок 8. Геометрия задачи о изгибе балки и константы материала

В силу симметрии задачи будем рассматривать только правую часть балки. На рис. 8 приведена геометрия задачи и константы материала.

Так как наибольшие деформации балки возникают в области под штампом, то при расчете целесообразно ввести в этой области мелкую сетку. При больших деформациях элементы лагранжевой сетки сильно искажаются, при этом точность расчета сильно падает. Поэтому балка разделена на 4 области, в каждой из которых используется разная сетка. Переход в другую область осуществляется через треугольные элементы (при этом шаг разбиения изменяется в два раза). В области 1 используется адаптивная сетка, которая перестраивается на каждом временном шаге (время здесь фигурирует как параметр нагружения). В областях 2 - 4 используется обычная лагранжева сетка. Разбиение расчетной области приведено на рис. 9. При этом общее количество элементов – **28 977**, а количество узлов – **29 380**.



**Рисунок 9.** Разбиение расчетной области на конечные элементы

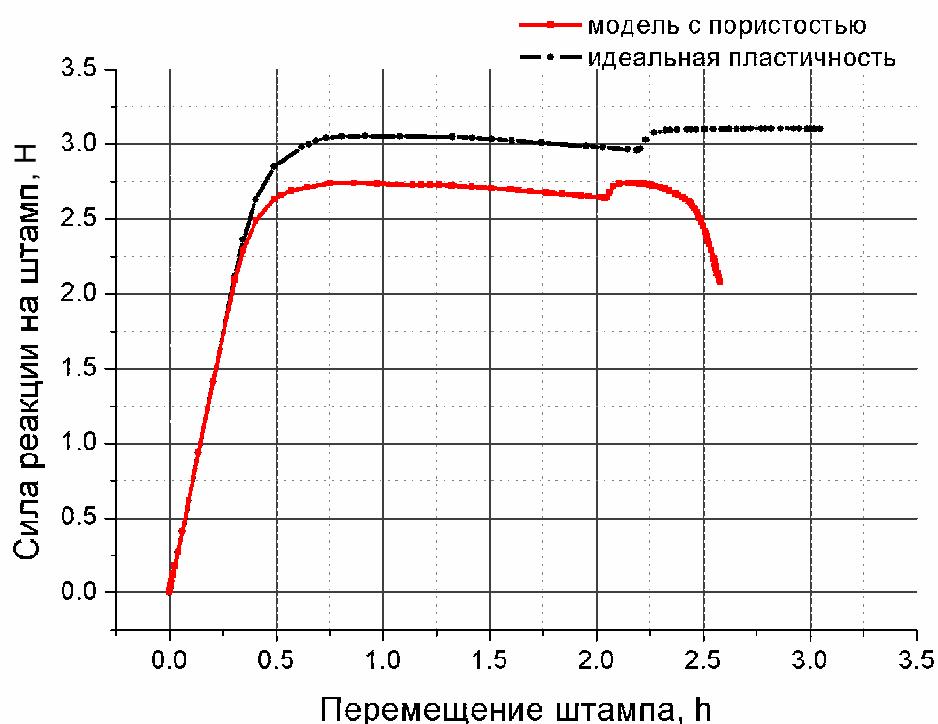
Расчет был выполнен в программном пакете ABAQUS. Результаты приведены на рисунках. На рис. 10 приведена сила реакции на штамп со стороны балки.

На графике (рис. 10) видно, что для пористого материала потеря устойчивости балки или образование пластического шарнира (горизонтальный участок кривой) происходит раньше, чем в случае идеальнопластического материала. Это обусловлено тем, что предел текучести  $\sigma_{y_0}$  для мате-



риала с поврежденностью ниже, чем для материала матрицы  $\sigma_y$ . Такое снижение предела текучести связано с начальной пористостью материала. В этой задаче она довольно большая и составляет 5%. Такое значение  $f_0$  было выбрано с целью проследить весь процесс образования полос скольжения более детально. В случае, когда  $f_0 = 0$  (начальной пористости нет, а есть только зарождение), также наблюдается полоса сдвига, но этот процесс происходит позднее.

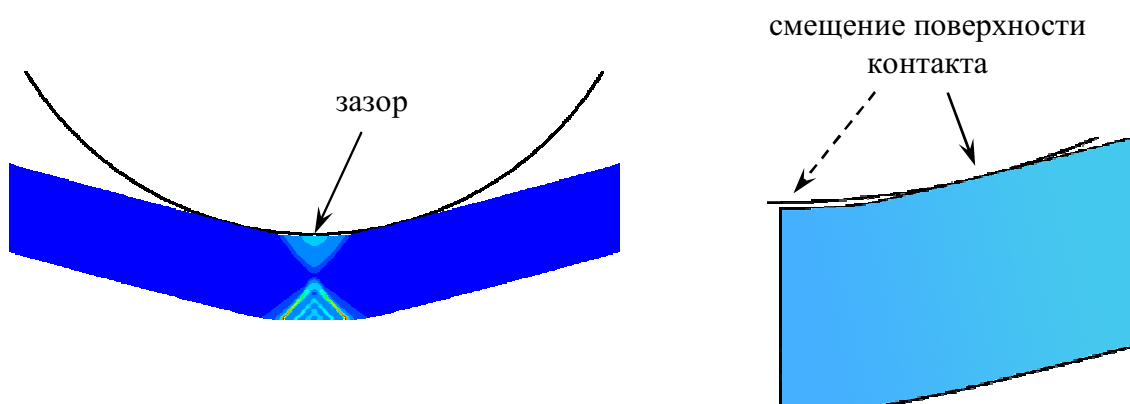
Скачек на графике (рис. 10) обусловлен смещением поверхности контакта между штампом и балкой (см. рис. 11). Стоит отметить, что определение поверхностей тел, которые находятся в контакте, представляет собой самостоятельную задачу. В используемом программном продукте это осуществляется итерационными методами [25].



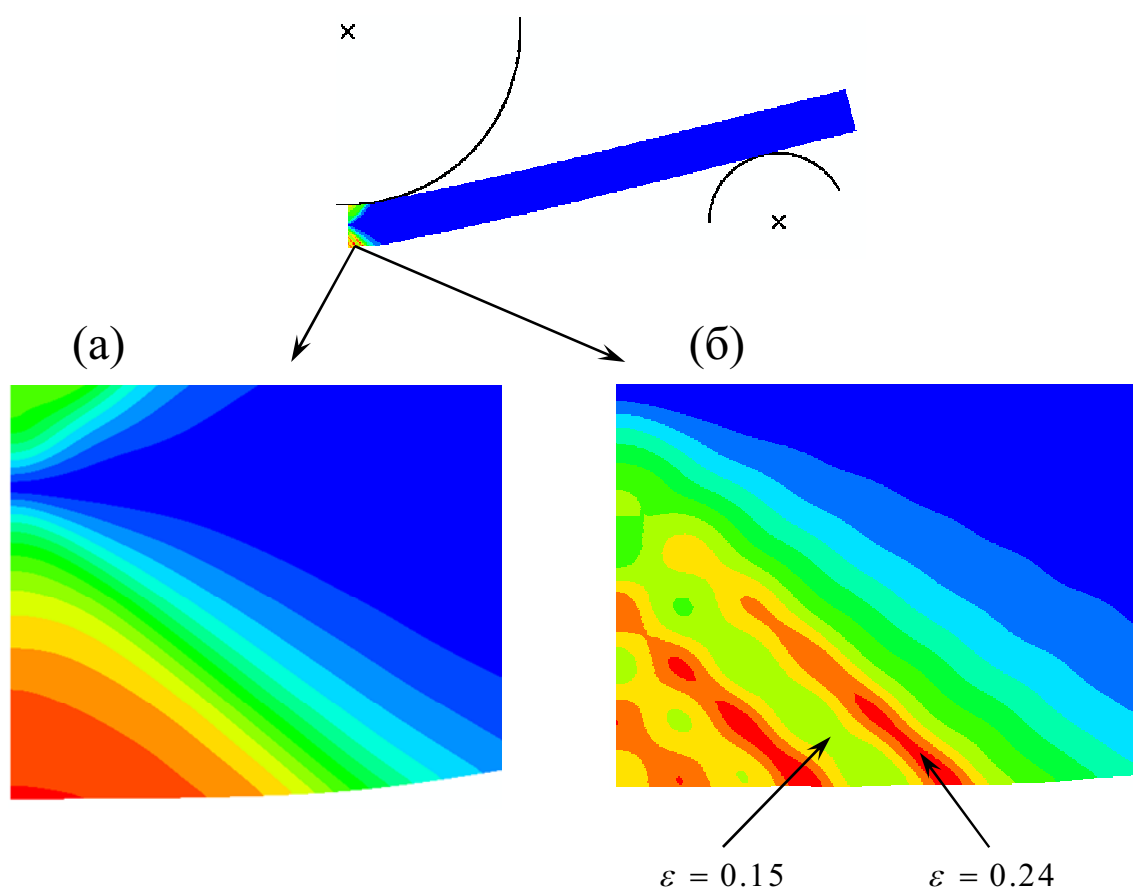
**Рисунок 10.** График зависимости силы, действующей на штамп, от его перемещения.

Из графика (рис. 10) видно, что в модели с повреждаемостью (пористостью) наблюдается резкое падение кривой, чего нет в случае идеальной пластичности. Такое резкое падение зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  свидетельствует о

разрушении материала. Этому разрушению предшествует локализация пластических деформаций (см. рис. 12).

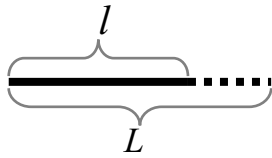


**Рисунок 11.** Образование зазора между балкой и штампом при больших деформациях.



**Рисунок 12.** Изгиб балки при перемещении штампа  $d = 2.2h$ . В случае GTN модели (б) наблюдается локализация пластических деформаций, чего нет в случае идеальной пластичности (а).

На рис. 12 под  $\varepsilon$  нужно понимать логарифмическую деформацию, которая обычно используется в теории пластичности металлов при больших деформациях. В одномерном случае  $\varepsilon = \ln \frac{L}{l} = \ln \left( 1 + \frac{u}{l} \right)$ , где  $u = L - l$ .

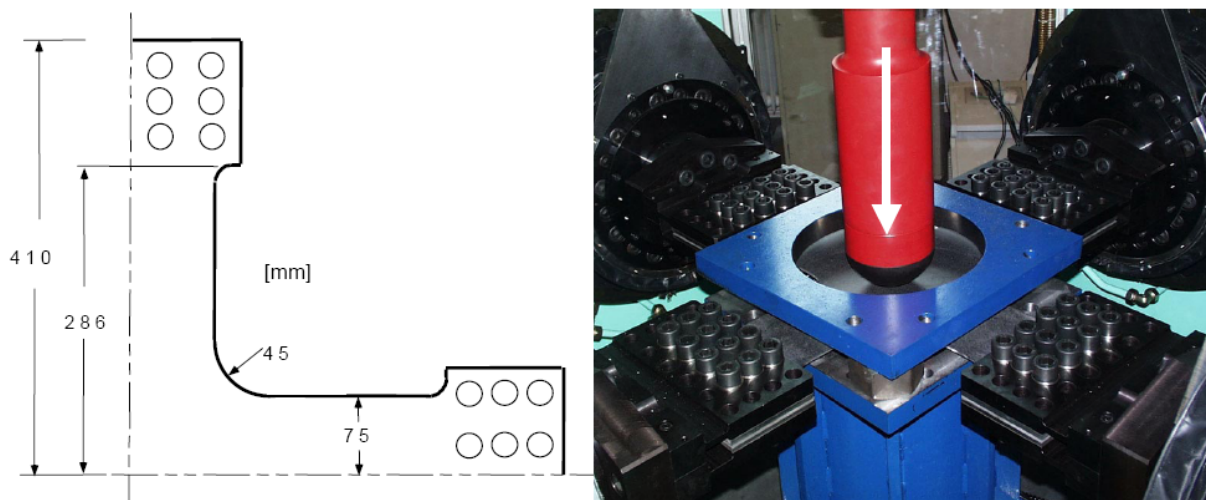


В случае малых деформаций логарифмическая деформация совпадает с относительным удлинением  $\varepsilon \approx \frac{\Delta l}{l} \approx \frac{\Delta l}{L}$ .

Таким образом, используя GTN модель, можно описать локализацию пластических деформаций, которая предшествует разрушению материала.

### Сравнение с экспериментом

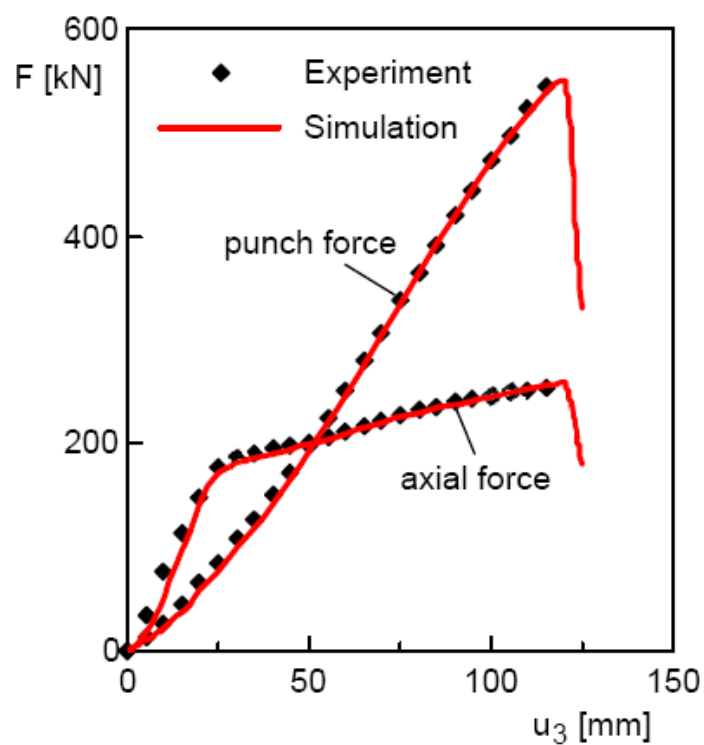
Приведем сравнение результатов моделирования (по GTN модели) с экспериментом, которое было сделано в [28]. Эксперимент состоял в разрушении пластины под действием штампа. Геометрия задачи и вид установки представлены на рис. 13.



**Рисунок 13.** Геометрические размеры пластины и вид экспериментальной установки.

Толщина пластины составляет 5 мм.

Сравнение результатов эксперимента и численного моделирования приведены на рис. 14.



**Рисунок 14.** График зависимости силы, действующей на штамп, от перемещения штампа (эксперимент и численное моделирование).

Из графика (рис. 14) видно, что результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с действительностью.

## 2. МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ

В работе [31] Кукуджанов предложил новый численно-аналитический метод интегрирования уравнений упругопластических сред с внутренними или структурными переменными, основанный на методе расщепления определяющих соотношений по физическим процессам.

Предложенный способ обладает и вычислительными преимуществами перед стандартными итерационными методами решения, так как на каждом шаге интегрирования задача сводится к решению упругой задачи и решению одного уравнения на этапе корректор для определения коэффициента корректировки, в то время как традиционными методами в каждой точке тела приходится решать систему  $6 + n$  определяющих нелинейных уравнений, где  $n$  – число внутренних переменных модели.

### 2.1. Общая схема метода расщепления

Общая схема метода расщепления очень проста и хорошо известна. Аддитивный оператор  $A(u)$  на малом отрезке времени  $\Delta t$  может быть заменен мультипликативным оператором. Пусть

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u) = (A_1 + A_2)u \quad (2.1)$$

где  $A_i$  – матрично-дифференциальные операторы по пространственным переменным,  $E$  – единичный оператор. Запишем конечно-разностную аппроксимацию 1-го порядка

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = (A_1 + A_2)u^n$$

где  $u^n = u(t)$ ,  $u^{n+1} = u(t + \Delta t)$ .

Из этого уравнения находим

$$u^{n+1} = [E + (A_1 + A_2)\Delta t]u^n$$

или

$$u(t + \Delta t) = [E + (A_1 + A_2)\Delta t]u(t) \quad (2.2)$$

Решение разностного уравнения (2.2) можно записать в виде мультипликативного оператора

$$u(t + \Delta t) = (E + A_1 \Delta t)(E + A_2 \Delta t)u(t) = (E + A \Delta t)u(t) + O(\Delta t^2) \quad (2.3)$$

Это позволяет при численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (2.1) решать последовательно задачи для каждого из операторов  $A_1, A_2$  отдельно, с начальными условиями, полученными при решении предыдущей задачи.

Данный метод решения широко используется в вычислительной математике при сведении многомерных задач к одномерным – расщепление по направлениям. При этом  $A_i$  – одномерные операторы дифференцирования по координатам  $x_i$ .

Другой вид расщепления заключается в расщеплении сложных операторов, которые описывают многофункциональные физические процессы, на более простые, описываемые каждым из операторов  $A_i$  в отдельности (расщепление по физическим процессам). Такие разностные методы получили широкое распространение в задачах механики жидкости и газа. Но в механике деформируемого твердого тела число работ, в которых применяется метод расщепления по физическим процессам единицы.

Далее рассматривается интегрирование методом расщепления определяющих уравнений упругопластической среды, связанной со структурными переменными. Задача интегрирования определяющих уравнений для нахождения напряжений и внутренних параметров среды при заданных деформациях представляет самостоятельную задачу независимо от того, в какой форме слабой или дифференциальной формулируются законы сохранения.

Общая схема расщепления выглядит следующим образом. Расщеплению подвергается только уравнение:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{D} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}) \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{D}$  – тензор упругих модулей материала,  $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}$  – объективная производная от тензора напряжений Коши.

Предиктор берется при  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = 0$ , тогда материал среды упругий и совместно с уравнениями движения на шаге  $\Delta t$  необходимо решать упругую задачу.

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.5)$$

После чего на этапе корректор решаются уравнения релаксации напряжений при  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$  совместно с уравнениями, описывающими внутреннюю структуру материала (упрочнение, повреждаемость и т.д.) при начальных условиях, полученных на предыдущем шаге для полной упруго-пластической задачи.

Корректор берется при  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$  в уравнении (2.4). Используя закон ассоциированного течения, получим уравнение релаксации напряжений

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} \mathbf{D} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.6)$$

$$\dot{H}_i = F_i(\boldsymbol{\sigma}, H_j) \quad (2.7)$$

где  $H_i$  – параметры, описывающие внутреннюю структуру материала.

Релаксация происходит до момента выполнения равновесного (статического) условия пластичности или упругой разгрузки

$$\Phi(p, q, H_i) = 0 \quad (2.8)$$

где  $p$  и  $q$  – первый и второй инварианты тензора напряжений соответственно.

В случае классической или равновесной упругопластической среды, свойства которой не зависят от изменения масштаба времени, в уравнении (2.6) и (2.7) можно исключить время  $t$  и перейти к переменной  $\lambda$ :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\lambda} = -\mathbf{D} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.9)$$

$$\frac{dH_i}{d\lambda} = \tilde{F}_i(\boldsymbol{\sigma}, H_j) \quad (2.10)$$

Решая уравнения (2.9) и (2.10) при начальных условиях,  $\sigma(\lambda_0) = \sigma^{el}$ ,  $H_i(\lambda_0) = H_i^{el}$  полученных после решения упругой задачи, на этапе корректора, найдем решение как функции параметра  $\lambda$ ,  $\sigma^{el}$  и  $H_i^{el}$ :

$$\sigma = \sigma(\lambda, \sigma^{el}, H_i^{el}), \quad H_i = H_i(\lambda, \sigma^{el}, H_j) \quad (2.11)$$

Подставляя найденные решения в условие пластичности (2.8) получаем уравнение для определения параметра  $\lambda$

$$\Phi(\lambda, p(\lambda), q(\lambda), H_i(\lambda)) = 0 \quad (2.12)$$

Решая это уравнение, находим  $\lambda$ , которое затем подставляем в (2.11), и получаем окончательное решение задачи.

## **2.2. Теория пластичности Мизеса. Изотропное упрочнение**

Применим эту общую схему метода расщепления к конкретному типу уравнений пластического течения. Рассмотрим теорию течения Мизеса с деформационным упрочнением.

Условие пластичности (2.8) в этом случае зависит только от второго инварианта девиатора напряжения.

$$\Phi = q - \sigma_y - 2\mu_1 H \quad (2.13)$$

где  $q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}$  – интенсивность касательных напряжений;  $\sigma_y$  – предел текучести;  $\mu_1$  – константа;  $H$  – параметр упрочнения, в качестве которого принимается интенсивность скоростей пластических деформаций

$$\dot{H} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}} \quad (2.14)$$

Ассоциированный закон примет вид

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{d\Phi}{d\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{3}{2q} \mathbf{S} = \dot{\Lambda} \mathbf{S}, \quad \dot{\Lambda} = \frac{3}{2q} \dot{\lambda} \quad (2.15)$$

Уравнение релаксации напряжений (2.6) примет вид

$$d\mathbf{S} = -2\mu S d\Lambda \quad (2.16)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига.



Интегрируя это уравнение при начальном условии, полученном после предиктора  $\Lambda = \Lambda_0$ ,  $\mathbf{S}(\Lambda_0) = \mathbf{S}^{el}$ , находим

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{el} \ell^{-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)}, \quad q = q^{el} \ell^{-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)} \quad (2.17)$$

Из уравнений (2.14) и (2.15) получаем эволюционное уравнение для параметра упрочнения

$$\dot{H} = \dot{\Lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \frac{2}{3} q \dot{\Lambda} \quad (2.18)$$

Интегрируя это уравнение с учётом (2.17), получим

$$H = H^{el} + \frac{2}{3} q^{el} \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} \ell^{-2\mu(\Lambda' - \Lambda_0)} d\Lambda' = H^{el} - \frac{1}{3\mu} q^{el} \left( \ell^{-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)} - 1 \right) \quad (2.19)$$

Введем обозначение  $x = \ell^{-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)}$  - коэффициент корректировки.

Подставляя значение  $H$  из (2.19) в условие пластичности (2.13), получим

$$q^{el} x - \sigma_y - 2\mu_1 \left( H^{el} - \frac{1}{3\mu} q^{el} (x - 1) \right) = 0$$

Откуда находим

$$x = \frac{\sigma_y + 2\mu_1 H^{el} + \frac{2\mu_1}{3\mu} q^{el}}{q^{el} \left( 1 + \frac{2\mu_1}{3\mu} \right)} \quad (2.20)$$

Таким образом, напряжения в точке равно

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S} = -p^{el}\mathbf{I} + \mathbf{S}^{el} x \quad (2.21)$$

где  $p = p^{el}$  - давление,  $\mathbf{I}$  - единичный тензор второго ранга.

В случае идеальной пластичности  $\mu_1 = 0$  получим

$$x = \sigma_y / q, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^{el} \frac{\sigma_y}{q^{el}} \quad (2.22)$$

Т.е. решение упругопластической задачи получается из решения упругой задачи простым умножением на коэффициент корректировки  $x$ , что означает нормировку тензора напряжения  $\mathbf{S}^{el} / q^{el}$  и приведение его на поверхность текучести (2.13) в пространстве напряжений. Это и есть извест-

ное правило корректировки Уилкинса, которое верно только для случая идеальнопластической среды.

В случае упрочнения из формулы (2.22) видно, что если его формально распространить на случай упрочняющейся среды, полагая  $x = \frac{\sigma_y + 2\mu_1 H^{el}}{q^{el}}$ , то получим неверный результат.

## Вычисление якобиана

При решении краевой задачи методом конечных элементов принцип возможных перемещений сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений. Для решения этой системы уравнений методом Ньютона нужно вычислить якобиан  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  ( $\boldsymbol{\varepsilon}$  – полная деформация).

При интегрировании определяющих соотношений методом расщепления, на этапе предиктор решалась упругая задача, в которой полная деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}$  считалась упругой. Поэтому можно записать

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} \quad (2.23)$$

Продифференцируем уравнение (2.21) по  $\boldsymbol{\varepsilon}$  с учетом (2.23)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = - \left( \frac{\partial p^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \otimes \mathbf{I} + \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) x + \mathbf{S}^{el} \left( \frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial p^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -K \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{S}^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2G \mathbf{I} - \frac{2}{3} G \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (2.25)$$

где  $K$  – модуль объемного сжатия,  $G = \mu$  – модуль сдвига,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор четвертого ранга.

Так как, выражение для коэффициента корректировки получено в явном виде, то нетрудно его продифференцировать

$$\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial x}{\partial q^{el}} \frac{\partial q^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q^{el}} = -\frac{\sigma_y + 2\mu_1 H^{el}}{\left(1 + \frac{2\mu_1}{3\mu}\right)(q^{el})^2}, \quad \frac{\partial q^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 3G \frac{\mathbf{S}^{el}}{q^{el}} \quad (2.27)$$

где  $q^{el} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}$ .

Собирая вместе выражения (2.24)-(2.27), получим окончательный результат

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2G x \mathbf{I} + \left(K - \frac{2}{3} G x\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{3G}{q^{el}} \left(\frac{\partial x}{\partial q^{el}}\right) \mathbf{S}^{el} \otimes \mathbf{S}^{el} \quad (2.28)$$

### 2.3. Результаты расчёта

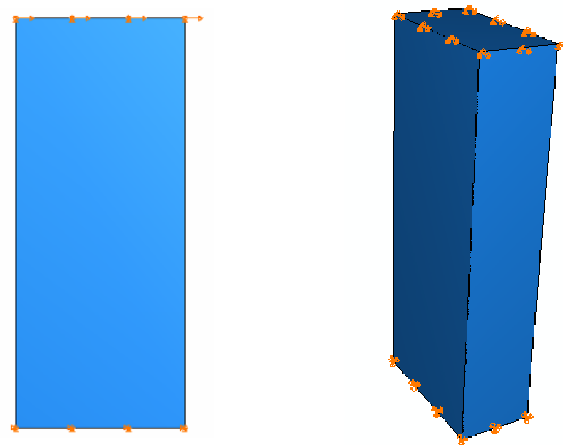
В качестве примера рассмотрим задачу о сдвиге бруска в 3-х мерном случае.

Стальной брусок размерами  $5 \times 2 \times 1$  мм жестко закреплен на торцах. Верхняя граница перемещается в одном направлении (на рис. 15 оно указано стрелками на верхней границе). Величина сдвига равна толщине бруска и равна 2мм. Безразмерные константы материала  $E = 500$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\mu_1 = 0.1$  (обезразмеренные на предел текучести).

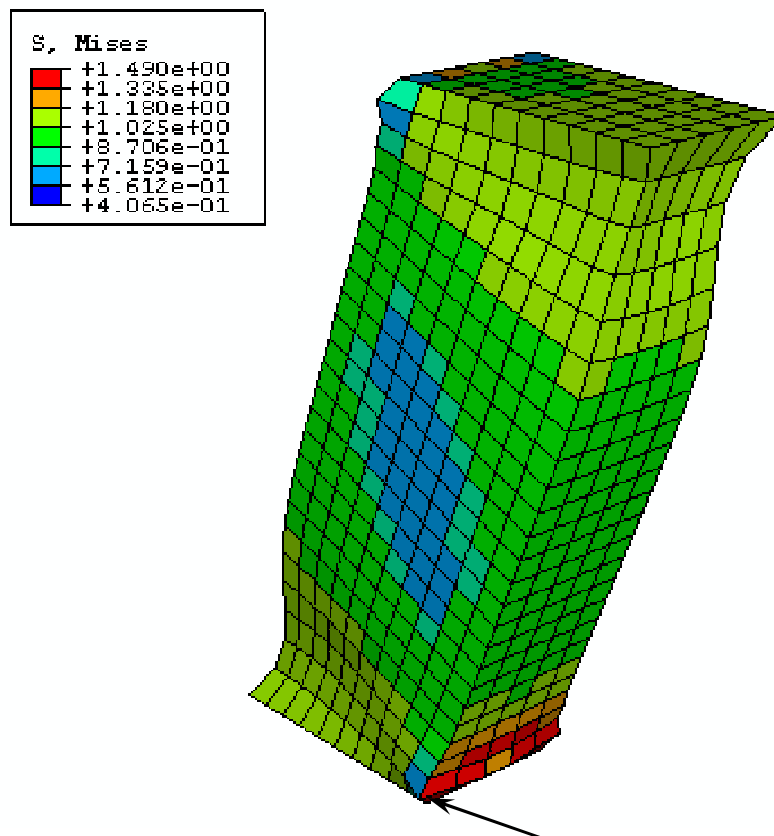
На рис. 16 изображена деформация бруска, показаны деформация лагранжевой сетки и интенсивность касательных напряжений в материале.

На рис. 17 изображена зависимость интенсивности касательных напряжений от параметра нагружения в элементе, выделенном стрелкой на рис. 16.

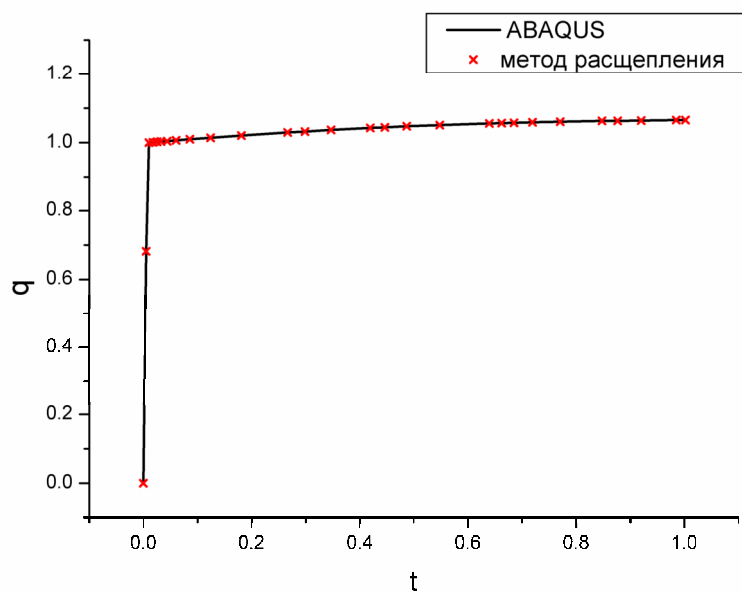
На рис. 18 изображена зависимость давления от параметра нагружения в элементе, выделенном стрелкой на рис. 16.



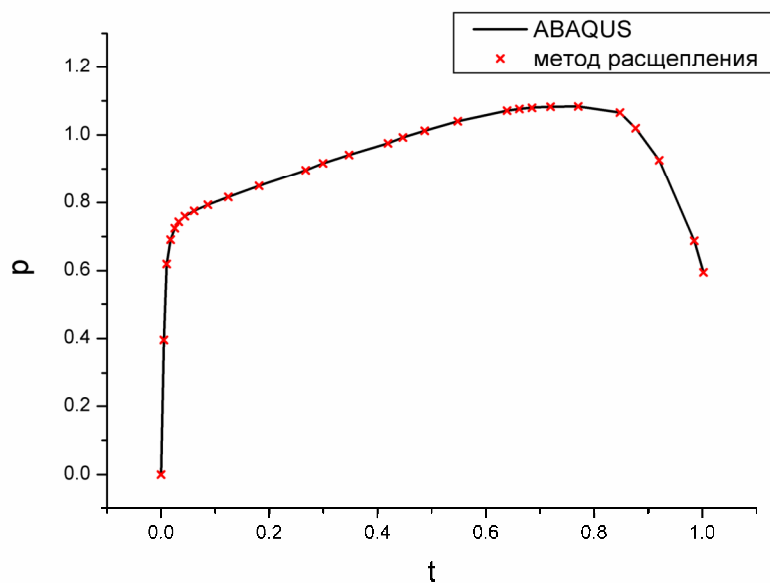
**Рисунок 15.** Сдвиг бруска в 3-х мерном случае.  
Направление сдвига указано стрелками.



**Рисунок 16.** Вид деформированного бруска и интенсивность касательных напряжений в нём.



**Рисунок 17.** График зависимости интенсивности касательных напряжений от времени (параметра нагружения) в элементе, выделенном стрелкой на Рис. 16.



**Рисунок 18.** График зависимости давления от времени (параметра нагружения) в элементе, выделенном стрелкой на рис. 16.

Вычисления проводились при автоматическом шаге двумя разными методами: методом, заложенным в программе ABAQUS [24-26] и методом расщепления. При решении задачи методом расщепления был написан отдельный программный модуль, в котором было реализовано интегрирова-

ние определяющих соотношений по схеме, изложенной выше. Этот внешний модуль использует пакет ABAQUS. Таким образом, отличие в решениях лишь в способе интегрирования определяющих соотношений.

Были получены следующие результаты:

- шаг по времени в точности совпадает в обоих методах;
- количество итераций в методе Ньютона одинаковое в обоих случаях;
- время расчета методом расщепления меньше на 10% (12 мин 18 с по сравнению с 13 мин 26 с);
- значения для интенсивности совпали с хорошей точностью. Относительная погрешность не превышает  $\varepsilon = 10^{-5}$ ;
- значения для давления совпали с той же точностью.

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ GTN МОДЕЛИ

#### 3.1. Решение системы определяющих уравнений

Принимаемые упрощения :

- нет зарождения пор;
- предел текучести материала матрицы – постоянная величина.

В этих предположениях уравнение для определения  $\bar{\varepsilon}_m^{pl}$  рассматривать не нужно, а уравнение для роста пор будет иметь вид  $\dot{f} = \dot{f}_{gr}$ .

#### Преобразование системы определяющих соотношений

В уравнении (2.4) можно исключить время и записать закон Гука в полных дифференциалах

$$d\sigma = \mathbf{D} : (d\varepsilon - d\varepsilon^{pl}) \quad (3.1)$$

где  $d\varepsilon^{pl} = d\lambda \frac{d\Phi}{d\sigma}$ ,  $\frac{d\Phi}{d\sigma} = -\frac{1}{3} \frac{\partial\Phi}{\partial p} \mathbf{I} + \frac{3}{2q} \frac{\partial\Phi}{\partial q} \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{D} = 2G\mathbf{I} + (K - \frac{2}{3}G)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ .

Подставляя эти выражения, получим

$$d\sigma = \mathbf{D} : d\varepsilon + \frac{d\lambda}{3} \frac{\partial\Phi}{\partial p} \mathbf{D} : \mathbf{I} - \frac{3d\lambda}{2q} \frac{\partial\Phi}{\partial q} \mathbf{D} : \mathbf{S} \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{D} : \mathbf{S} = 2GS$ ,  $\mathbf{D} : \mathbf{I} = 3KI$ .

Запишем уравнение (2.21) в другой форме

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{S} = -p\mathbf{I} + q\mathbf{n} \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{S}}{q}$ .

Уравнение для давления имеет вид

$$dp = -K(d\varepsilon : \mathbf{I}) - d\lambda K \frac{\partial\Phi}{\partial p} \quad (3.4)$$

Уравнение для девиатора напряжений

$$d\mathbf{S} = 2Gd\boldsymbol{\varepsilon} - 6GSd\lambda \quad (3.5)$$

здесь учтено, что  $\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 2q$ .

Осталось преобразовать уравнение (1.6) для пористости

$$df_{gr} = (1-f)d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \mathbf{I} = (1-f)d\lambda \left( \frac{d\Phi}{d\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I} \right) = -d\lambda(1-f) \frac{d\Phi}{dp}$$

С учётом предположения, что  $\dot{f} = \dot{f}_{gr}$ , окончательно можно записать

$$df = -d\lambda(1-f) \frac{d\Phi}{dp} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.4)-(3.6) а также условие пластичности представляют собой замкнутую систему определяющих соотношений. Расщеплению подвергаются только уравнения (3.4) и (3.5). В Таблице 1 приведено сравнение системы определяющих уравнений в обычной постановке задачи и в методе расщепления.

**Таблица 1.** Система определяющих уравнений в пакете ABAQUS [26] и в методе расщепления на этапе корректора [31]

Пакет ABAQUS	Метод расщепления
$dp = -K(d\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}) - d\lambda K \frac{\partial\Phi}{\partial p}$	$dp = -d\lambda K \frac{\partial\Phi}{\partial p}$
$d\mathbf{S} = 2Gd\boldsymbol{\varepsilon} - 6GSd\lambda$	$d\mathbf{S} = -6GSd\lambda$
$df = -d\lambda(1-f) \frac{d\Phi}{dp}$	$df = -d\lambda(1-f) \frac{d\Phi}{dp}$
начальные условия берутся с предыдущего шага	в качестве начальных условий берется упругое решение
$\Phi = \left( \frac{q}{\sigma_y} \right)^2 + 2q_1 f \operatorname{ch} \left( -\frac{3}{2} \frac{q_2 p}{\sigma_y} \right) - (1 + q_3 f^2)$	



## Метод расщепления. Этап корректор.

Далее решаем задачу методом расщепления, считая решение на стадии предиктор известным (упругое решение). Для начала обезразмерим наши уравнения

$$[p] = [q] = [K] = [G] = [\lambda] = [\sigma_y] = \frac{H}{M^2}$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\sigma_y}, \quad \bar{K} = \frac{K}{\sigma_y}, \quad \bar{G} = \frac{G}{\sigma_y}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\sigma_y}$$

$f$  – безразмерная величина.

Система уравнений в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}} = -\bar{K} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{p}} \quad (3.7)$$

$$d\bar{S} = -6\bar{G}\bar{S}d\bar{\lambda} \quad (3.8)$$

$$\frac{df}{d\bar{\lambda}} = -(1-f) \frac{d\Phi}{d\bar{p}} \quad (3.9)$$

$$\Phi = \bar{q}^2 + 2q_1 f \operatorname{ch}\left(\frac{3}{2}q_2 \bar{p}\right) - (1 + q_3 f^2) = 0 \quad (3.10)$$

где  $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{p}} = 3q_1 q_2 f \operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}q_2 \bar{p}\right)$  – функция, зависящая от пористости и давления нелинейным образом.

Начальные условия берутся из решения упругой задачи

$$\bar{p}(\bar{\lambda}_0) = \bar{p}_0 \quad (3.11)$$

$$\bar{S}(\bar{\lambda}_0) = \bar{S}_0 \Rightarrow \bar{q}(\bar{\lambda}_0) = \bar{q}_0 \quad (3.12)$$

$$f(\bar{\lambda}_0) = f_0 \quad (3.13)$$

Эту систему не удастся проинтегрировать точно как в пункте 2.1. Только уравнение (3.12) интегрируется точно. Переходя к интенсивности касательных напряжений, получим

$$\frac{d\bar{q}}{\bar{q}} = -6\bar{G}d\bar{\lambda} \quad (3.14)$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии (3.12), получим

$$\bar{q} = \bar{q}_0 \ell^{-6\bar{G}(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)} \quad (3.15)$$

Из (3.7) и (3.9) получим:

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}} = \frac{\bar{K}}{(1-f)} \frac{df}{d\bar{\lambda}} \Rightarrow d\bar{p} = \frac{\bar{K}}{(1-f)} df \quad (3.16)$$

Интегрируя это уравнение с учётом начальных условий, получим

$$\bar{p} = \bar{p}_0 - \bar{K} \ln \frac{(1-f)}{(1-f_0)} \quad (3.17)$$

или обращая, найдем пористость через давление

$$f = 1 - (1-f_0) \ell^{\frac{\bar{p} - \bar{p}_0}{\bar{K}}} \quad (3.18)$$

Таким образом находим точную связь между пористостью и давлением.

Осталось проинтегрировать уравнение (3.7), которое имеет вид

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}} = -3\bar{K}q_1q_2f \operatorname{sh} \left( \frac{3}{2}q_2\bar{p} \right) \quad (3.19)$$

Исключая пористость  $f$  из (3.19), получаем дифференциальное уравнение относительно  $\bar{p}$

Это уравнение проинтегрировать в аналитическом виде не удастся, но его численное решение на отрезке  $\Delta\lambda$  с заданными начальными условиями, получаемыми из упругого решения задачи, может быть легко получено с любой требуемой точностью. Найденные  $p(\lambda)$  и  $f(\lambda)$  подставляются в условие пластичности Гарсона, из которой также численно определяется значение  $\lambda = \lambda_*$ , отвечающее коэффициенту корректировки.

Однако нетрудно найти приближенные аналитические выражения для  $p(\lambda)$  и  $f(\lambda)$ , используя на малом шаге  $\Delta\lambda$  линеаризацию уравнений (3.18)-(3.29). В дальнейшем используется последний подход, основанный на линеаризации.

Для начала проведем некоторые оценки величин

$$(1-f) \square (1-f_0) \Rightarrow \ell^{\frac{\bar{p} - \bar{p}_0}{\bar{K}}} \quad 1$$

$$\bar{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)\sigma_y} \cong \frac{200 \cdot 10^3}{3 \cdot 0.4 \cdot 400} \approx 400$$

Учитывая то, что  $\bar{p} \ll 1$ , разложим зависимость  $f(\bar{p})$  в ряд относительно  $\bar{p}_t$ -решения на предыдущем временном шаге. Получим

$$f = C_0^f + C_{\Delta p}^f \Delta \bar{p} \quad (3.20)$$

где  $\Delta \bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_t$ ,  $C_{\Delta p}^f = \frac{(1-f_0)}{\bar{K}} \ell^{-\frac{\bar{p}_t - \bar{p}_0}{\bar{K}}}$ ,  $C_0^f = 1 - (1-f_0) \ell^{-\frac{\bar{p}_t - \bar{p}_0}{\bar{K}}}$ .

Линеаризуем гиперболический синус

$$\text{sh}\left(\frac{3}{2} q_2 \bar{p}\right) = C_0^{sh} + C_{\Delta p}^{sh} \Delta \bar{p} \quad (3.21)$$

где  $C_0^{sh} = \text{sh}\left(\frac{3}{2} q_2 \bar{p}_t\right)$ ,  $C_{\Delta p}^{sh} = \frac{3}{2} q_2 \text{ch}\left(\frac{3}{2} q_2 \bar{p}_t\right)$ .

Перепишем уравнение (3.7) с учётом этой линеаризации, пренебрегая членами более высокого порядка малости. В результате получим

$$\frac{d\bar{p}}{d\lambda} = C_0^p + C_p^p \bar{p} \quad (3.22)$$

где  $C_0^p = -3\bar{K}q_1q_2C_0^fC_0^{sh} - C_p^p\bar{p}_t$ ,  $C_p^p = -3\bar{K}q_1q_2(C_0^{sh}C_{\Delta p}^f + C_0^fC_{\Delta p}^{sh})$ .

Это уравнение теперь можно проинтегрировать

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{d\lambda} = C_0^p + C_p^p \bar{p} &\Rightarrow \frac{d\bar{p}}{d\lambda} - C_p^p \bar{p} = C_0^p \\ \bar{p} &= C \ell^{C_p^p \bar{\lambda}} - \frac{C_0^p}{C_p^p} \end{aligned}$$

Учитывая начальное условие  $\bar{p}(\bar{\lambda}_0) = \bar{p}_0$ , найдем значение постоянной интегрирования

$$\bar{p}_0 = C \ell^{C_p^p \bar{\lambda}_0} - \frac{C_0^p}{C_p^p} \Rightarrow C = \left( \bar{p}_0 + \frac{C_0^p}{C_p^p} \right) \ell^{-C_p^p \bar{\lambda}_0}$$

Теперь окончательно можем записать зависимость  $\bar{p}(\bar{\lambda})$  в явном виде

$$\bar{p} = \left( \bar{p}_0 + \frac{C_0^p}{C_p^p} \right) \ell^{C_p^p (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)} - \frac{C_0^p}{C_p^p} \quad (3.23)$$

С помощью уравнения (3.20) можем найти явную зависимость  $f(\bar{\lambda})$ . Прежде чем подставлять найденные выражения в условие пластичности введем коэффициент корректировки  $X = \ell^{-1000(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0)}$ . Дополнительный множитель 1000 нужен для того, чтобы не было высоких степеней (в выражениях для давления и интенсивности).

Перепишем уравнения (3.15) и (3.23) с учетом введенного коэффициента корректировки

$$\bar{q} = \bar{q}_0 X^\beta \quad (3.24)$$

$$\bar{p} = a + b X^\alpha \quad (3.25)$$

где  $\alpha = -0.001 \cdot C_p^p$ ,  $\beta = 0.006 \cdot \bar{G}$ ,  $a = -\frac{C_0^p}{C_p^p}$ ,  $b = \bar{p}_0 - a$ . В этих обозначениях

$\beta \square 1$ .

Учитывая уравнения (3.20) и (3.25) найдем пористость

$$f = c + d X^\alpha \quad (3.26)$$

где  $c = C_0^f - C_{\Delta p}^f \bar{p}_t + C_{\Delta p}^f a$ ,  $d = C_{\Delta p}^f b$ .

Подставляя выражения (3.24), (3.25) и (3.26) в условие пластичности (3.10), получим нелинейное уравнение относительно коэффициента корректировки. Это уравнение решаем методом Ньютона

$$X_{n+1} = X_n - \frac{\Phi(X_n)}{\Phi'(X_n)} \quad (3.27)$$

где  $\Phi(X)$  – условие пластичности (3.10) после подстановки давления, интенсивности касательных напряжений и пористости. Выражение для производной имеет вид

$$\Phi'(X) = 2\beta \bar{q}_0^2 X^{2\beta-1} + \alpha X^{\alpha-1} [2q_1 d \operatorname{ch}(1.5q_2 \bar{p}) + 3q_1 q_2 b f \operatorname{sh}(1.5q_2 \bar{p}) - 2q_3 f d]$$

В качестве начального приближения берется  $X_0 = 1$ . Итерационный процесс (3.27) продолжается до тех пор, пока относительная погрешность  $\varepsilon$  в определении  $X$  не станет меньше чем  $\varepsilon_0 = 10^{-7}$ .

## Вычисление якобиана

При решении полной системы уравнений методом Ньютона, нужно вычислить якобиан  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Выражение для напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + q\mathbf{n}, \quad (3.28)$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{S}}{q}$ .

Так как  $\mathbf{S}^{el}$  и  $\mathbf{n}$  коллинеарны (см. [26]), то  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{S}^{el}}{q^{el}} = \frac{\mathbf{S}_0}{q_0}$

Общее выражение для якобиана имеет вид

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \otimes \mathbf{I} + \left( \frac{\partial \bar{q}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \otimes \mathbf{n} + \bar{q} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (3.29)$$

где

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = C_0^{p,\varepsilon} \mathbf{I} + C_X^{p,\varepsilon} \left( \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = C_0^{q,\varepsilon} \mathbf{n} + C_X^{q,\varepsilon} \left( \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (3.31)$$

$$\left( \frac{\partial X}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = C_I^X \mathbf{I} + C_n^X \mathbf{n} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{2G}{q^{el}} \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right] \quad (3.33)$$

В выражениях (3.30) и (3.31) коэффициенты  $C_0^{p,\varepsilon}$ ,  $C_X^{p,\varepsilon}$ ,  $C_0^{q,\varepsilon}$ ,  $C_X^{q,\varepsilon}$  можно посчитать в явном виде исходя из формул (3.24)-(3.26). Выражения для указанных коэффициентов приведены в Приложении.

Продифференцируем условие пластичности (3.10) по полной деформации

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2\bar{q} \left( \frac{\partial \bar{q}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \Phi_1 \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \Phi_2 \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = 0 \quad (3.34)$$

где  $\Phi_1 = 2q_1 \operatorname{ch} \left( \frac{3}{2} q_2 \bar{p} \right) - 2q_3 f$ ,  $\Phi_2 = 2q_1 f \operatorname{sh} \left( \frac{3}{2} q_2 \bar{p} \right)$ .

Используя выражение (3.20) можно выразить производную  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  в (3.34) через  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ . Подставляя выражения (3.30) и (3.31) в (3.34) и получим уравнение для определения коэффициентов  $C_I^X$  и  $C_n^X$ . Выражения для этих коэффициентов приведены в Приложении.

Окончательное выражение для якобиана будет иметь вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = C_I \mathbf{I} + C_{II} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + C_{nl} \mathbf{n} \otimes \mathbf{I} + C_{ln} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n} + C_{nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.35)$$

Как видно, в общем случае якобиан не симметричный. Оценки величин показывают, что коэффициенты  $C_{nl}$  и  $C_{ln}$  на два порядка меньше чем коэффициенты при симметричных членах. Поэтому, выражение (3.35) можно записать в симметричном виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cong C_I \mathbf{I} + C_{II} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{2}(C_{nl} + C_{ln})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}) + C_{nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.36)$$

ABAQUS работает только с симметричным якобианом. Так как он является положительно определенным, то в этом случае гарантировано существование обратной матрицы, которая фигурирует в методе Ньютона для полной краевой задачи.

Значения коэффициентов в выражении (3.36) приведено в Приложении.

## 3.2. Результаты расчета

### Одноосное растяжение

В качестве модельной задачи рассмотрим одноосное растяжение квадратного элемента, изображенного на рис. 19 в случае плоской деформации.

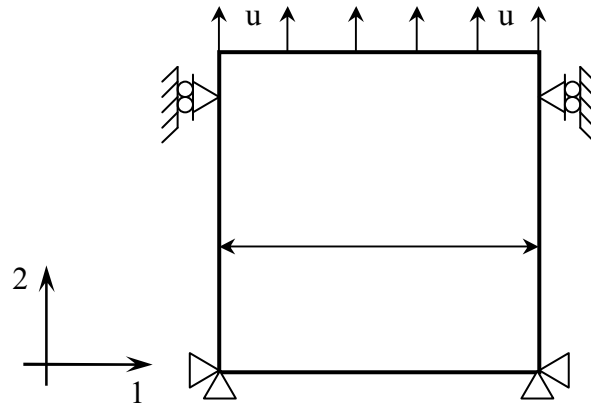
Тензор деформаций для этого элемента имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Здесь использовалась логарифмическая мера деформаций

$$\varepsilon = \ln\left(1 + \frac{u(t)}{l}\right) \quad (3.38)$$

где  $u(t)$  линейная функция времени.  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0.5$ .



**Рисунок 19.** Одноосное растяжение квадратного элемента в случае плоской деформации

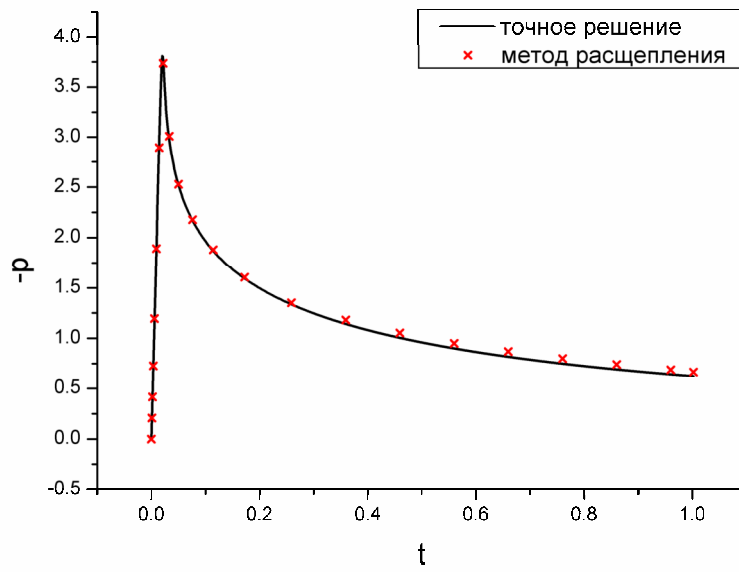
Начальная пористость материала  $f = 0.001$ .

Эта тестовая задача была решена двумя методами: методом, заложенным в программе ABAQUS и методом расщепления. Причем решение методом программы ABAQUS осуществлялось с маленьким шагом в  $0.001t$ , а решение методом расщепления проводилось в начале с автоматическим шагом, а потом с шагом в  $0.1t$ .  $t = 1$ . В остальном отличие лишь в способе интегрирования определяющих соотношений.

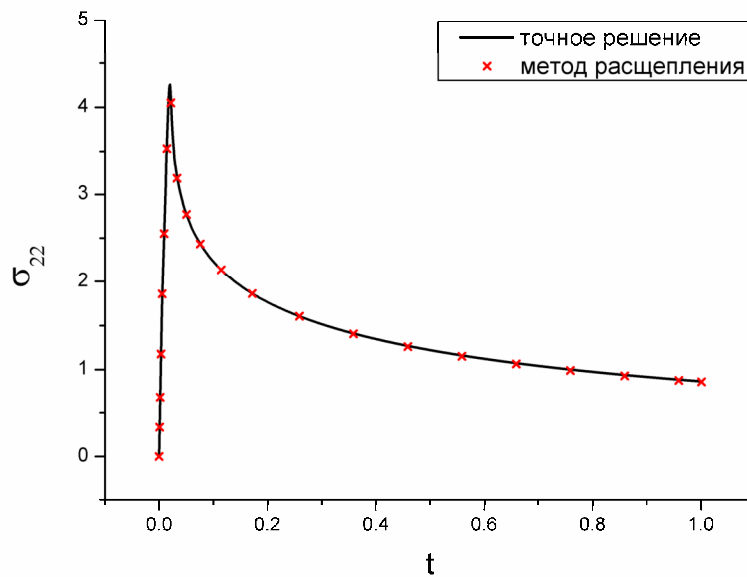
Результаты моделирования приведены на графиках.

На рис. 20 изображена зависимость давления от параметра нагружения.

На рис. 21 изображена зависимость нормального напряжения  $\sigma_{22}$  от параметра нагружения.



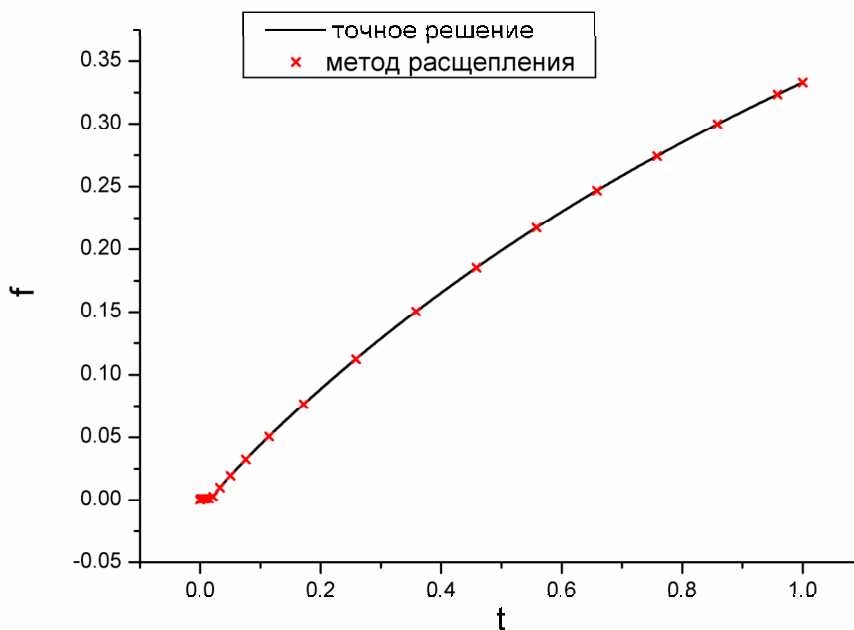
**Рисунок 20.** График зависимости давления от времени (параметра нагружения)



**Рисунок 21.** График зависимости нормального напряжения от времени (параметра нагружения)

На рис. 22 изображена зависимость пористости от параметра нагружения.





**Рисунок 22.** График зависимости пористости от времени (параметра нагружения)

Как видно из графиков совпадение в этом случае довольно хорошее. Максимальная относительная погрешность в определении давления не превышает  $\varepsilon = 5\%$ . Остальные величины найдены с большей точностью.

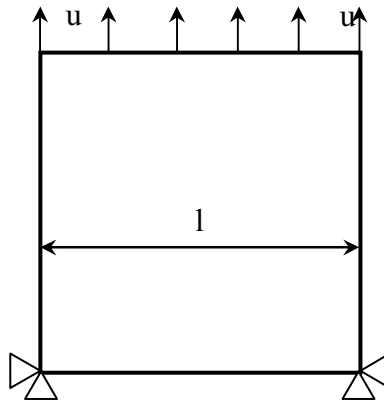
Выше было отмечено, что материал матрицы пластически несжимаем, а пластическая сжимаемость эффективного материала происходит за счет изменения пористости. В приведенном выше примере, тело увеличивает объем в 1,5 раза, а упругая деформация при этом составляет всего  $\varepsilon^{el} = 0.002$ .

### **Одноосное растяжение с не стесненной верхней границей**

Этот пример отличается от предыдущего тем, что на верхней границе элемента разрешены перемещения в горизонтальном направлении (см. рис. 23).

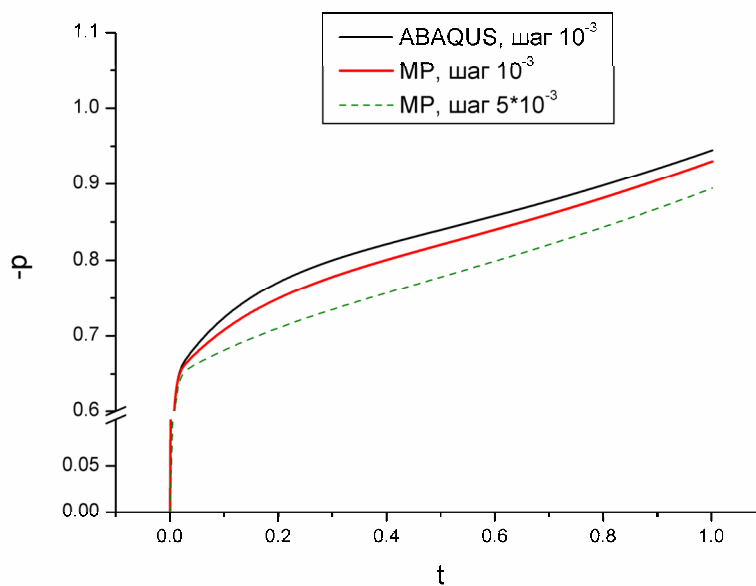
Эта задача также была решена двумя методами. Только в этом случае шаг по времени был фиксирован в обоих случаях. Как и прежде решение методом программы ABAQUS осуществлялось с шагом в  $0.001t$ . Решение методом расщепления проводилось с шагами в  $0.005t$  и  $0.001t$ .  $t = 1$ .

Результаты моделирования приведены на графиках.



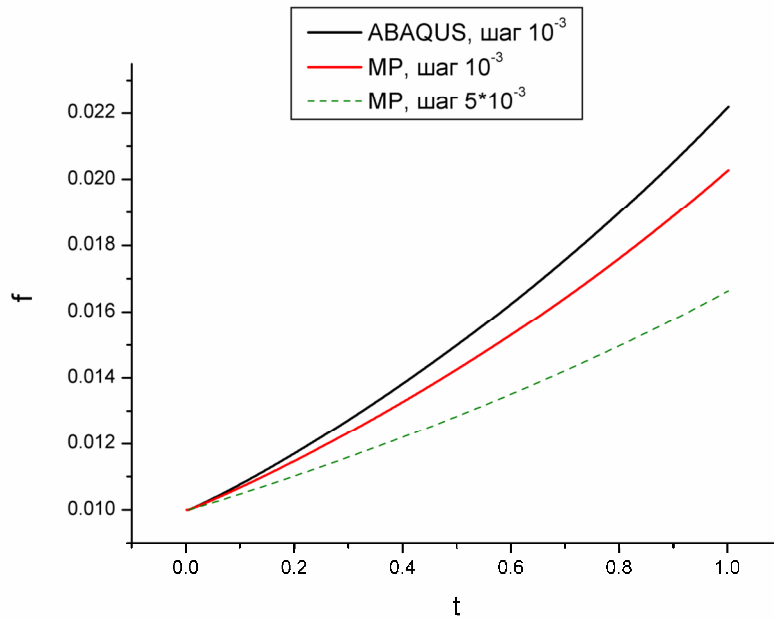
**Рисунок 23.** Растяжение квадратного элемента с не стесненной верхней границей.

На рис. 24 изображена зависимость давления материала от параметра нагружения при разных способах вычисления.



**Рисунок 24.** График зависимости давления от времени (параметра нагружения)

На рис. 25 изображена зависимость пористости материала от параметра нагружения при разных способах вычисления.



**Рисунок 25.** График зависимости пористости от времени (параметра нагружения)

На рис. 25 изображена зависимость пористости материала от параметра нагружения при разных способах вычисления.

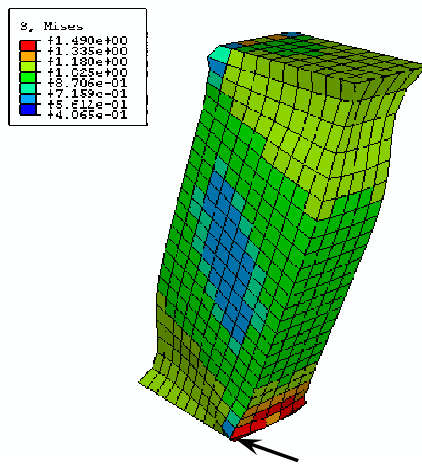
Из графиков видно, что при уменьшении шага интегрирования результат, полученный методом расщепления, сходится к точному значению.

Относительная погрешность расчета при временном шаге  $10^{-3}$  при вычислении

- пористости  $\varepsilon = 10\%$ ;
- давления  $\varepsilon = 1\%$ ;
- интенсивности касательных напряжений  $\varepsilon = 1\%$ .

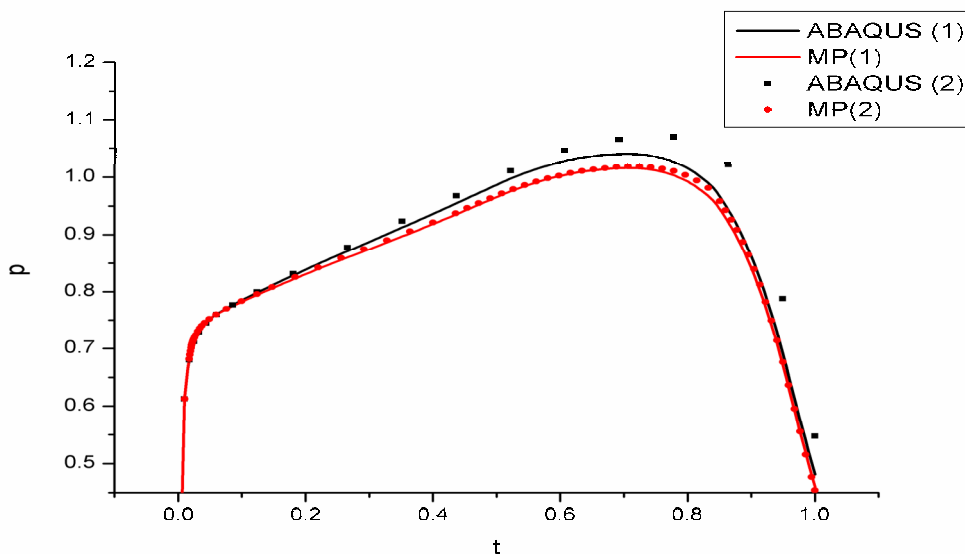
### Краевая задача

Рассмотрим задачу о сдвиге бруска в 3-х мерном случае. Выше эта задача была решена для упругопластического материала с условием пластичности Мизеса. Приведем результаты расчета той же краевой задачи для случая повреждающейся среды с условием пластичности Гарсона. (GTN модель).



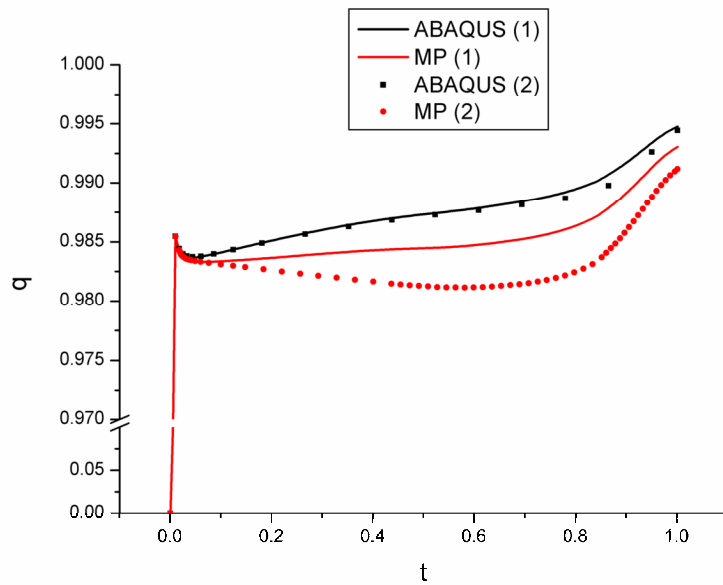
**Рисунок 26.** Вид деформированного бруска и интенсивность касательных напряжений в нём.

На рис. 27 изображен график зависимости давления от параметра нагружения в элементе, выделенном стрелкой на рис. 26. Расчеты проводились двумя разными методами при различном временном шаге.

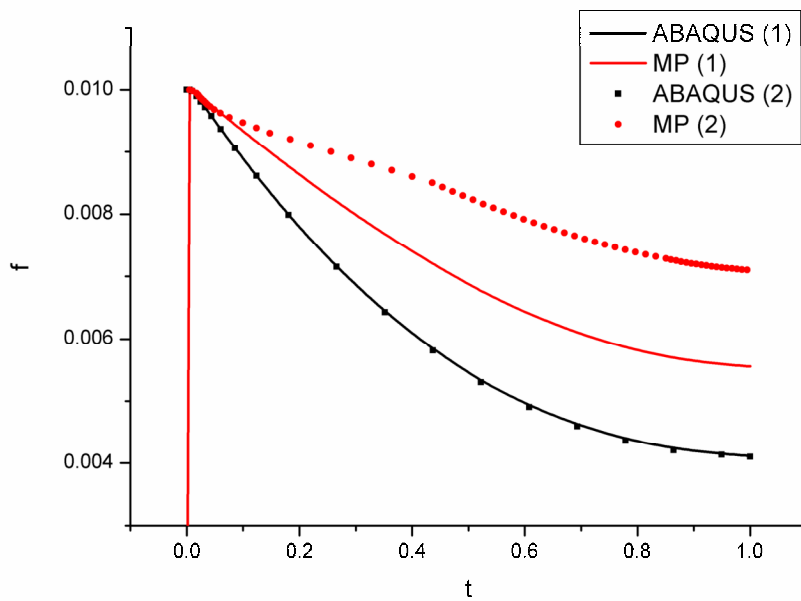


**Рисунок 27.** График зависимости давления от времени (параметра нагружения); ABAQUS (1) – решение пакета с шагом 0.05; ABAQUS (2) – автоматический шаг; MP (1) – решение, полученное методом расщепления с шагом 0.05; MP (2) – автоматический шаг.

На рис. 28 изображен график зависимости интенсивности касательных напряжений, рис. 29 – график зависимости пористости от параметра нагружения в элементе, выделенном стрелкой на рис. 26.



**Рисунок 28.** График зависимости интенсивности касательных деформаций от времени (параметра нагружения); ABAQUS (1) – решение пакета с шагом  $5 \cdot 10^{-3}$ ; ABAQUS (2) – автоматический шаг; MP (1) – решение, полученное методом расщепления с шагом  $5 \cdot 10^{-3}$ ; MP (2) – автоматический шаг.



**Рисунок 29.** График зависимости пористости от времени (параметра нагружения); ABAQUS (1) – решение пакета с шагом 0.05; ABAQUS (2) – автоматический шаг; MP (1) – решение, полученное методом расщепления с шагом 0.05; MP (2) – автоматический шаг.

При решении общей краевой задачи методом Ньютона, в расчёте методом расщепления относительная погрешность при шаге 0.005 в определении: пористости – 37%; давления – 4%; интенсивности касательных напряжений – 4%.

Здесь приведены максимальные относительные погрешности (для пористости при  $t = 1$ , для интенсивности при шаге  $t = 0.7$ , для давления при  $t = 1$ ).

При фиксированном шаге, для решения задачи методом расщепления требуется выполнить в 2.4 раза больше итераций, чем при решении этой же задачи методом вычислительного пакета, тогда как время расчета примерно одинаковое (MP – 1 час 31 мин., а ABAQUS – 1 час 27 мин.).

Таким образом, предложенный метод интегрирования определяющих соотношений оказался **в два с половиной раза быстрее**, чем стандартный.

Следует подчеркнуть, что кроме гипотез, принятых в методе расщепления, здесь была проведена линеаризация уравнений. В первом тестовом примере, не смотря на такое огрубление (линеаризацию) уравнений, результат, полученный методом расщепления, хорошо совпадает с точным решением. Во втором примере совпадение результатов наблюдается только при значительном уменьшении шага, что еще раз говорит о том, что линеаризация уравнений – это сильное огрубление. Следовательно на этапе корректора (при решении задачи методом расщепления) для определения давления и пористости нужно применять численное интегрирование. Несмотря на расхождение результатов, связанные с линеаризацией уравнений (3.18)-(3.19) следует отметить преимущество рассматриваемого метода, которое заключается в скорости интегрирования определяющих соотношений.

## ВЫВОДЫ

Работа посвящена моделированию процессов разрушения в рамках континуальной механики. Моделирование процессов разрушения состоит из двух основных частей: математическая модель и метод ее решения.

Общий метод построения модели повреждающейся среды состоит из следующих этапов:

- изначально есть сплошной неповрежденный материал матрицы, свойства которого известны;

- исходя из физической природы разрушения, в модель вводится поврежденность;

- в зависимости от подхода постулируются уравнения для эволюции поврежденности: в физическом подходе они получаются из микромеханических представлений путем усреднения (гомогенизации), а в термодинамическом – из общих принципов термодинамики и теории определяющих соотношений.

Исследование GTN модели показало, что она довольно хорошо описывает поведение материала, вплоть до разрушения в условиях медленного квазистатического нагружения. Результаты моделированию хорошо согласуются с экспериментальными данными по разрушению пластин при вдавливании штампом.

Все расчеты проводились с использованием пакета прикладных программ ABAQUS, предназначенного для решения задач механики сплошной среды методом конечных элементов. При численном моделировании задачи об изгибе балки была получена локализация пластических деформаций в виде полос скольжения.

В пакете программ ABAQUS можно вводить блок с уравнениями своей модели сплошной среды (не встроенную в оболочку). При этом нужно задать связь  $\sigma(\varepsilon)$  на малом интервале времени (здесь время выступает как параметр, по которому происходит нагружение). Таким образом, задача сводится к интегрированию определяющих соотношений на малом интер-

вале времени, а значит в этом пакете, можно применять различные методы интегрирования системы определяющих уравнений.

Расчеты показали, что применение метода расщепления, который предложил Кукуджанов, является довольно эффективным.

В случае, когда определяющие соотношения удается проинтегрировать точно, как это сделано в случае упругопластической среды Мизеса, метод расщепления дает очень высокую точность.

В случае повреждающейся среды, которая описывается условием пластичности Гарсона, трудно точно указать на преимущества метода расщепления на основании проделанных вычислений, так как был сделан ряд других, более грубых допущений.

Система определяющих соотношений GTN модели сильно нелинейная. Кроме того была проведена линеаризация неинтегрируемых уравнений с целью получения аналитического решения. В таких предположениях, решение системы 3-х дифференциальных уравнений и одного конечного соотношения (условия пластичности) свелось к одному нелинейному трансцендентному уравнению относительно коэффициента корректировки. Одно уравнение проинтегрировалось точно благодаря применению метода расщепления, а два других были линеаризованы.

Как показывают расчёты, такая линеаризация применима только в некоторых тестовых примерах. Применяя метод расщепления, удастся упростить исходную систему уравнений таким образом, что одно уравнение можно решить в аналитическом виде. Оставшуюся систему уравнений нужно решать численно.

Несмотря на некоторое расхождение результатов, из приведенных расчетов можно сделать следующие выводы.

Сравнение расчётов краевой задачи (при фиксированном шаге интегрирования) двумя разными методами: методом, заложенным в программе ABAQUS и методом расщепления показывает, что интегрирование системы определяющих соотношений методом расщепления (с линеаризацией) происходит в **2.5 раза быстрее**, чем в методе программы ABAQUS.



Несмотря на то что в экспериментах при медленном квазистатическом нагружении GTN модель дает весьма адекватное описание, она не лишена недостатков, главными из которых являются независимость повреждаемости от скорости деформации и от остаточных напряжений.

В.Н.Кукуджанов предложил модель, основанную на физических представлениях о разрушении поликристаллических материалов [18], [19], которая лишена отмеченных недостатков. В этой модели используется модифицированное условие пластичности Гарсона.

Поэтому дальнейшим направлением работы будет введение модели В.Н.Кукуджанова и обобщение метода расщепления на модель, зависящую от скорости деформаций. Это позволит расширить возможности вычислительного пакета ABAQUS при решении задач континуального разрушения. Интегрирование определяющих соотношений лучше проводить методом расщепления, а не стандартными методами.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении приведены коэффициенты, которые возникают при вычислении якобиана в пункте 3.1.

$$C_0^{q,\varepsilon} = 3\bar{G}X^\beta$$

$$C_X^{q,\varepsilon} = \bar{q}_0\beta X^{\beta-1}$$

$$C_0^{p,\varepsilon} = 3q_1q_2\bar{K} \frac{C_{\Delta p}^f}{C_p} \left[ \bar{K}C_0^{sh} + (\bar{p}_t - a)(C_0^{sh} - C_{\Delta p}^{sh}\bar{K}) \right] (1 + X^\alpha) - \\ - \bar{K}X^\alpha - \frac{3\bar{K}bq_1q_2}{1000} (C_0^{sh} - C_{\Delta p}^{sh}\bar{K}) C_{\Delta p}^f X^\alpha \ln X$$

$$C_X^{p,\varepsilon} = \alpha bX^{\alpha-1}$$

$$C_n^X = -\frac{2\bar{q}C_0^{q,\varepsilon}}{2\bar{q}C_X^{q,\varepsilon} + \Phi_p^\varepsilon C_X^{p,\varepsilon}}$$

$$C_I^X = -\frac{\Phi_0^\varepsilon + \Phi_p^\varepsilon C_0^{p,\varepsilon}}{2\bar{q}C_X^{q,\varepsilon} + \Phi_p^\varepsilon C_X^{p,\varepsilon}}$$

Коэффициенты в выражении (3.36) для якобиана

$$C_I = 2G \frac{\bar{q}}{q_0}$$

$$C_{II} = -C_0^{p,\varepsilon} - C_X^{p,\varepsilon} C_I^X - \frac{1}{3} C_I$$

$$C_{mn} = C_0^{q,\varepsilon} + C_X^{q,\varepsilon} C_n^X - \frac{3}{2} C_I$$

$$C_{nI} = C_X^{q,\varepsilon} C_I^X$$

$$C_{In} = -C_X^{p,\varepsilon} C_n^X$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [2] Работнов Ю.Н. Механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
- [3] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [4] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [5] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
- [6] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. С. 26-31.
- [7] Работнов Ю.Н. Механизм длительного разрушения // Сб. Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5-7.
- [8] Ильюшин Ф.Ф., Победря Б.Е. Основы математической теории термо-вязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
- [9] Кукуджанов В.Н. К численному моделированию процессов деформирования и разрушения упруго-пластических тел при больших деформациях. Математические методы в механике деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1986. С. 75-85.
- [10] Curran D.R., Seaman L., Shockey D.A. Dynamic failure in solids // Physics Today. January, 1977. P. 46-55.
- [11] Curran D.R., Seaman L., Shockey D.A. Dynamic failure of solids // Physics Reports. 1987. № 147. P. 253-388.
- [12] Gurson A.L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Materials // Journal of Engineering Materials and Technology. 1977. vol. 99. P. 2–15.

- [13] Tvergaard V. Influence of Voids on Shear Band Instabilities under Plane Strain Condition // International Journal of Fracture Mechanics. 1981. vol. 17. P. 389–407.
- [14] Chu C.C. and Needleman A. Void Nucleation Effects in Biaxially Stretched Sheets // Journal of Engineering Materials and Technology. 1980. vol. 102. P. 249–256.
- [15] Кондауров В.И. Энергетический подход к задаче континуального разрушения твердого тела // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. №6. С. 17-22.
- [16] Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. М.: Изд-во МФТИ, 2002. 336 с.
- [17] Maugin G.A. The Thermodynamics of Plasticity and Fracture, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1992, 350 pages.
- [18] Кукуджанов В.Н., Иванов В.Л., Ковшов А.Н., Шнейдерман Д.Н. Исследование локализации пластических деформаций при потере устойчивости откосов // Препринт № 538. М.: ИПМ РАН, 1994. 67 с.
- [19] Кукуджанов В.Н. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее решение к исследованию локализации деформаций // Механика твердого тела. 1999. №5. С. 72-86.
- [20] Barbee T.W., Seaman L, Curran R. Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals // Mater. J., 1972. № 7. P. 393-401.
- [21] Puttick K.E. Phil. Mag. 1959. vol. 4. P. 964.
- [22] Cho K., Chi Y.C., Duffy J. Microscopic observation of adiabatic shear bands in three different steels // Brown University Report, 1989.
- [23] Каннель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 408 с.
- [24] ABAQUS Theory Manual.
- [25] ABAQUS Analysis User's Manual.

- [26] Aravas N. On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1987. vol. 24. P. 1395–1416.
- [27] Синюк В.С. Численное моделирование пористых упругопластических материалов // Механика и моделирование материалов и технологий: Тр. Международной молодёжной научной конференции «XXXII Гагаринские чтения». М.: ИПМех РАН, 2006. С. 73-74.
- [28] Steglich D., Brocks W., Heerens J. Punch Test for the Simulation of Ships Hull Damage. Experiment and Simulation. FENet, NAFEMS 2003. (Материал доступен в Интернете по адресу: <http://www.gkss.de/Themen/W/WMS>).
- [29] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численное решение задач континуального разрушения // Препринт №746. М.: ИПМ РАН, 2004. 40 с.
- [30] Кукуджанов В.Н. Разностные методы решения задач механики деформируемых тел. Изд-во Высшая школа, МФТИ. М.: 1992, 125 с.
- [31] Кукуджанов В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений // Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 98-107.
- [32] Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения // Успехи механики. 1985, №4. С. 21-65.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>АННОТАЦИЯ</b> .....	<b>2</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>3</b>
<b>1. GTN МОДЕЛЬ</b> .....	<b>11</b>
1.1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ GTN МОДЕЛИ.....	11
1.2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА .....	15
<b>2. МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ</b> .....	<b>21</b>
2.1. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ.....	21
2.2. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА. ИЗОТРОПНОЕ УПРОЧНЕНИЕ .....	24
2.3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА.....	27
<b>3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ GTN МОДЕЛИ</b> .....	<b>31</b>
3.1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ .....	31
3.2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА.....	38
<b>ВЫВОДЫ</b> .....	<b>47</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b> .....	<b>50</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	<b>51</b>

Владимир Николаевич Кукуджанов  
Александр Леонидович Левитин  
Владимир Сергеевич Синюк

**Численное моделирование повреждающихся  
упругопластических материалов**

Подписано к печати 31 августа 2006 г. Заказ № 14-2006. Тираж 50 экз.

---

Москва, 119526, пр-т. Вернадского д.101, корп.1