**Задача протекания для уравнений Навье-Стокса**

*В.В. Пухначев*

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,

Новосибирский государственный университет

Рассматриваются стационарные решения уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости в ограниченной области с границей, имеющей несколько связных компонент. На границе области течения задан вектор скорости. Вследствие уравнения неразрывности, суммарный поток жидкости через границу равен нулю. В 1933 году Ж. Лерэ доказал разрешимость этой задачи при условии, что частичный поток через каждую компоненту границы равен нулю. Его доказательство основывалось на рассуждении от противного и не содержало априорной оценки интеграла Дирихле вектора скорости. Такая оценка была получена Э. Хопфом (1941). Следующий шаг был сделан в 1961 году независимо Р. Финном и Х. Фуджита, которые заменили условие нулевых частичных потоков условием их малости.

В общем случае больших частичных потоков проблема разрешимости задачи протекания остается открытой. В докладе дается обзор предыдущих работ, которые относятся к частным случаям этой задачи. В частности, Х. Фуджита и Х. Моримото (1997) рассмотрели течения, близкие к потенциальным. Ч.Дж. Эмик (1984) изучил плоские движения с линией симметрии. Его доказательство разрешимости задачи использовало рассуждение от противного. Л.И. Сазонов (1993) и независимо Х. Фуджита (1997) ввели понятие виртуальной дрены, что позволило получить эффективную оценку интеграла Дирихле. Это обеспечило разрешимость задачи протекания в классе симметричных плоских течений без ограничений на частичные потоки.

Существенное продвижение в исследовании проблемы было достигнуто в серии совместных работ М.В. Коробкова, К. Пилецкаса и Р. Руссо (2011-2014). Авторы доказали разрешимость плоской задачи без условий симметрии и общей осесимметричной задачи. Доказательство использует обобщение классической теоремы Морса-Сарда на случай функций, принадлежащих пространствам Соболева, и модификацию рассуждения от противного Ж. Лерэ.

В докладе дается априорная оценка интеграла Дирихле вектора скорости для трехмерных течений в области, имеющей две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, каждая из которых пересекает все компоненты границы. Это позволяет доказать разрешимость трехмерной задачи протекания в классе симметричных решений с произвольными частичными потоками. Кроме того, установлена теорема существования в задаче о течении в области типа сферического слоя при дополнительных условиях симметрии относительно плоскости и положительности потока через внутреннюю границу слоя.

Рассмотрены также сингулярные аналоги задачи протекания. В первой из них граница плоской области течения состоит из жордановой кривой и точки внутри нее, в которой помещен источник или сток. Соответствующее решение уравнений Навье-Стокса имеет бесконечный интеграл Дирихле. Доказывается разрешимость задачи для умеренных значений мощности источника или стока. Дается эффективная оценка интеграла Дирихле регулярной компоненты решения. Во второй задаче течение осесимметричное. На оси симметрии равномерно распределены источники или стоки. Интересно заметить, что в этом случае ограничение накладывается лишь на мощность источников; мощность стоков может быть произвольной.

Следует отметить, что трудности в изучении задачи протекания не возникают в случае нестационарных движений (О.А. Ладыженская, 1970). Исключение составляют движения, периодические по времени. Т. Кобаяши (2010) доказал разрешимость плоской симметричной периодической задачи. В докладе этот результат обобщается на случай пространственных периодических решений.