

# О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРЭДА — ШАФРАНОВА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Безродных С.И., Власов В.И. (ФИЦ ИУ РАН)

Расчет магнитного поля в токамаке сводится согласно известной модели [1] к решению уравнения Грэда — Шафранова  $\Delta u(x) = au(x) + b$ ,  $x \in G$ , с однородным условием Дирихле на границе  $\Gamma = \partial G$ . Жорданова область  $G$  с кусочно  $C^{3,\alpha}$ -гладкой границей  $\Gamma$  представляет собой поперечное сечение торообразного потока плазмы в токамаке,  $u(x)$  — ортогональная этому сечению компонента магнитного потенциала (остальные компоненты тождественно равны нулю). Основная трудность этой модели заключается в том, что параметры  $a$  и  $b$  уравнения заранее неизвестны, в связи с чем и возникает задача об их отыскании, называемая обратной задачей для рассматриваемого уравнения. В [2] постановка этой задачи была дополнена нелокальным условием  $\int_{\Gamma} \partial_{\nu} u(x) ds = 1$ , где  $ds$  — элемент длины дуги  $\Gamma$ , а  $\partial_{\nu}$  — производная по внешней нормали к  $\Gamma$ . Это условие, физически означающее задание величины полного тока, связывает параметры  $a$  и  $b$  явно выписываемой зависимостью и, тем самым, сводит рассматриваемую задачу к нахождению лишь параметра  $a$ .

В работе предложена модифицированная формулировка этой обратной задачи. Она заключается в нахождении параметра  $a$  по заданному значению нормальной производной  $\partial_{\nu} u(x)$  в любой точке  $x$  из специального подмножества  $\tilde{\Gamma}$  границы  $\Gamma$ .

Для обратной задачи в такой формулировке установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости и разработан эффективный аналитико-численный метод ее решения, включающий алгоритм построения множества  $\tilde{\Gamma}$ . После нахождения параметров  $a$  и  $b$  исходная задача Дирихле для уравнения Грэда — Шафранова вполне определена, и ее решение может быть найдено при помощи метода мультиполей [3], обеспечивающего высокоточное вычисление как самого решения  $u(x)$ , так и его нормальной производной на границе  $\Gamma$ . Эти результаты основаны на применении метода мультиполей и на использовании асимптотик [4] при  $a \rightarrow \infty$  для величин  $\partial_{\nu} u(x)$  и  $\frac{d}{da} \partial_{\nu} u(x)$ ,  $x \in \Gamma$ . Результаты работы опубликованы в [5].

- [1] M.Vogelius, *An inverse problem for the equation  $\Delta u = -cu - d$* , Ann. Inst. Fourier. 1994. Vol. 44. №4. P. 1181–1204.
- [2] A.Demidov, *On the inverse problem for the Grad — Shafranov equation with affine right-hand side*, 2nd Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization. Carthage, Tunisie, April 10-12, 2002. Abstracts, P. 93–94.
- [3] В.И.Власов, *Краевые задачи в областях с криволинейной границей*, М.: ВЦ АН СССР, 1987.
- [4] A.S.Demidov, M.Moussaoui, *An inverse problem originating from magnetohydrodynamics*, Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 137–154.
- [5] С.И.Безродных, В.И.Власов, *Применение метода мультиполей к прямым и обратным задачам для уравнения Грэда — Шафранова с нелокальным условием*, Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, №4. С. 619–685.