

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРЭДА — ШАФРАНОВА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Безродных С.И., Власов В.И. (ФИЦ ИУ РАН)

Расчет магнитного поля в токамаке сводится согласно известной модели [1] к решению уравнения Грэда — Шафранова $\Delta u(x) = au(x) + b$, $x \in G$, с однородным условием Дирихле на границе $\Gamma = \partial G$. Жорданова область G с кусочно $C^{3,\alpha}$ -гладкой границей Γ представляет собой поперечное сечение торообразного потока плазмы в токамаке, $u(x)$ — ортогональная этому сечению компонента магнитного потенциала (остальные компоненты тождественно равны нулю). Основная трудность этой модели заключается в том, что параметры a и b уравнения заранее неизвестны, в связи с чем и возникает задача об их отыскании, называемая обратной задачей для рассматриваемого уравнения. В [2] постановка этой задачи была дополнена нелокальным условием $\int_{\Gamma} \partial_{\nu} u(x) ds = 1$, где ds — элемент длины дуги Γ , а ∂_{ν} — производная по внешней нормали к Γ . Это условие, физически означающее задание величины полного тока, связывает параметры a и b явно выписываемой зависимостью и, тем самым, сводит рассматриваемую задачу к нахождению лишь параметра a .

В работе предложена модифицированная формулировка этой обратной задачи. Она заключается в нахождении параметра a по заданному значению нормальной производной $\partial_{\nu} u(x)$ в любой точке x из специального подмножества $\tilde{\Gamma}$ границы Γ .

Для обратной задачи в такой формулировке установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости и разработан эффективный аналитико-численный метод ее решения, включающий алгоритм построения множества $\tilde{\Gamma}$. После нахождения параметров a и b исходная задача Дирихле для уравнения Грэда — Шафранова вполне определена, и ее решение может быть найдено при помощи метода мультиполей [3], обеспечивающего высокоточное вычисление как самого решения $u(x)$, так и его нормальной производной на границе Γ . Эти результаты основаны на применении метода мультиполей и на использовании асимптотик [4] при $a \rightarrow \infty$ для величин $\partial_{\nu} u(x)$ и $\frac{d}{da} \partial_{\nu} u(x)$, $x \in \Gamma$. Результаты работы опубликованы в [5].

- [1] M.Vogelius, *An inverse problem for the equation $\Delta u = -cu - d$* , Ann. Inst. Fourier. 1994. Vol. 44. №4. P. 1181–1204.
- [2] A.Demidov, *On the inverse problem for the Grad — Shafranov equation with affine right-hand side*, 2nd Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization. Carthage, Tunisie, April 10-12, 2002. Abstracts, P. 93–94.
- [3] В.И.Власов, *Краевые задачи в областях с криволинейной границей*, М.: ВЦ АН СССР, 1987.
- [4] A.S.Demidov, M.Moussaoui, *An inverse problem originating from magnetohydrodynamics*, Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 137–154.
- [5] С.И.Безродных, В.И.Власов, *Применение метода мультиполей к прямым и обратным задачам для уравнения Грэда — Шафранова с нелокальным условием*, Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, №4. С. 619–685.