С. Лычев

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КЛАССИЧЕСКАЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

14 ноября 2023 г.

Обо всех найденных опечатках и ошибках просьба сообщать Константину Койфману на почту koifman.bmstu@yandex.ru

Файл периодически обновляется, следите за обновлениями!

Оглавление

Глава 1.

Механика Ньютона

1.1. Законы Ньютона

1.1.1. Два закона Ньютона: формулировки и комментарии

Четыре закона Ньютона — это работа чистого разума, которая мотивировалась, с одной стороны, большим количеством экспериментальных наблюдений, в частности, наблюдениями за планетами, законами Кеплера, с другой стороны, — мотивировалась достаточно абстрактной геометрической теорией Евклида, и, наконец, мотивировалась законами статики, которые были развиты до Ньютона. Ньютон создал универсальную удобную аксиоматику. Аксиоматика — это всегда работа чистого разума, которая, конечно, мотивируется наводящими соображениями. Но аксиоматика, сама по себе, не апеллирует к какому-то эксперименту. Как все обычно работает? Строится некоторая аксиоматика, а затем на ее основе решаются задачи и происходит верификация, сравнение с известными данными. Если совпало, то хорошо. Если не совпало — значит, надо переходить к другой аксиоматике. Так, ньютоновой механике предшествовали аристотелева и птолемеева механики, но они не выдержали верификацию, поскольку не объясняли движение планет.

Первый закон, **Lex Prima**, имеет следующую формулировку (Ньютон, Математические Начала, стр. 39): *Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

В современном изложении роль первого закона Ньютона часто принижают, наделяя его статусом следствия из второго закона Ньютона (если силы равны нулю, то ускорение равно нулю). В другом толковании под первым законом Ньютона понимается утверждение о существовании инерциальной системы отсчета — туманном и до сих пор толком не формализованном понятии, являющемся попыткой исключить из употребления словосочетание «абсолютное пространство». Вместе с тем, как представляется, первый закон Ньютона имеет особый статус. В нем зашифрованы основные геометрические положения, необходимые для построения классической физики.

Принимается подход Демиурга: создаем собственную вселенную в голове, которая, в некотором смысле, похожа на нашу Вселенную. Мы получаем не законы Природы, а лишь некоторую аппроксимацию.

Что происходит в Lex Prima? Мы хотим единым взором описать все Мироздание и нам нужны какие-то опорные точки для этого описания. Эти опорные точки — мощь Демиурга, мощь Создателя. Во-первых, все вокруг — это ни что иное, как массивные тела, т.е. тела, которые обладают массой. Это все, из чего создано Мироздание. Эти тела взаимосвязаны, они чувствуют друг друга за счет взаимодействия, которое отражается на их движении. Теперь мгновенно отключим все взаимодействия. Тогда останутся только массивные тела. Но они — в движении. Траектории, которые они будут очерчивать, — суть те самые прямые, которые появляются в евклидовой геометрии. Мы можем проверить все аксиомы евклидовой геометрии. Да, это уже экспериментальная проверка — наблюдением в лаборатории или мысленным экспериментом, или же элемент веры. То есть, мы верим в то, что если отключить все мыслимые взаимодействия, то тогда все массивные тела будут двигаться и прочерчивать вокруг нас объекты, полностью удовлетворяющие понятию прямой в евклидовом пространстве. Более того,они будут проходить отрезки одинаковой длины за один и тот же интервал времени. При этом, будучи Демиургами мы предполагаем, что есть «божественные часы», одинаково идущие повсюду, и мы можем отмерять отрезки времени, апеллируя к такому понятию, как часы (механические, маятниковые, биение сердца). В этом состоит Lex Prima. Итак, Lex Prima — это две гипотезы:

(1) Весь мир создан из массивных тел, которые находятся в постоянном движении. Это движение очень сложное, поскольку все тела «чувствуют» друг друга за счет взаимодействия.

(2) Если мгновенно, некоторой суперволей, некоторым повелением, «отключим» взаимодействие между телами, то их движение изменится. Тела будут двигаться по траекториям, полностью удовлетворяющим тем постулатам, которые придумал Евклид. Вдоль этих траекторий (прямых) тела проходят за равные единицы времени равные расстояния.

При этом, понятие единицы времени и понятие расстояния, конечно, здесь интерпретируются в некотором примитивном смысле. Они ассоциируются с реальными физическими часами и физическими линейками.

Евклидова геометрия — это «игра в бисер», которая неожиданно оказалась полезной. В Древней Греции это было своего рода развлечением.

Все три закона Ньютона обладают свойством «создания Вселенной» (Вселенная Ньютона). Это вымышленный, абстрактный мир, который не реализуется вокруг нас, но который в чем то похож на наш мир. Нужно сказать малое количество слов, которые уцепились бы друг за друга и породили многообразие всяческих результатов, похожих на все вокруг. Именно Lex Prima предполагает божественную возможность отключения взаимодействия.

Тем самым мы пытаемся обойти сложный, тяжелый момент, связанный с тем, что означает, что «точка движется в отсутствие действия сил». Это проблема, которую все обсуждают. В Lex Prima мы говорим о траектории движения точки, на которую не действует сила. Но понятие силы мы еще не ввели. В Lex Secunda мы определяем понятие силы, но при этом используем Lex Prima, потому что утверждаем, опираясь на первый закон, что мы говорим об инерциальных системах отсчета. Получается, что одно определяется через второе, а второе определяется через первое. Как вытащить конец и начало — неясно. В качестве такой попытки предложена интерпретация выше.

Механика Галилея-Ньютона является, в некотором смысле, развитием геометрии Евклида. Это просто дополнительная глава в геометрии.

Можно предложить следующее рассуждение. Мы в основу кладем идею о том, что наблюдаемый вокруг нас мир отражается в нашем сознании и мы творим некоторую упрощенную версию этого мира. Мы предполагаем что в этом мире все тела обладают массой и движутся по хитрыми траекториям, взаимодействуя друг с другом. Само понятие движения для нас пока не формализовано. Далее, мы хотим вычленить из наших рассуждений именно понятие движения. Допустим, что мы как то это сделали. А затем, мы, исходя из принципа простоты, попытаемся выделить из всех мыслимых траекторий какие-нибудь наиболее простые. Здесь мы все равно должны предположить, что мы отключили взаимодействие между телами и дальше, мысленно наблюдая за этими траекториями (мы не можем в физической лаборатории построить прямую, а лишь внутри фантазии), и дальше непонятно что дальше. В том что выше — про прямые, мы пользуемся тем, с чем уже знакомы. Может, мы будем апеллировать к окружности? В Lex Prima очень сильная апелляция к Евклиду.

Ньютон «стоял на плечах гигантов»! Перед Ньютоном был Галилей, а перед Галилеем были Тихо Браге и Кеплер. Именно Кеплер, наблюдая за движением планет, сформулировал для них три закона Ньютона. Теория Ньютона проверялась исключительно движением планет. Это — теория Солнечной системы. Это и есть экспериментальная мотивация, которая подсказала абстракцию в виде законов Ньютона.

Второй закон, **Lex Secunda**, имеет следующую формулировку (Ньютон, Математические Начала, стр. 40): *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Мы предположили, что наш мир состоит из тел с массами. Эти массы движутся по сложным и запутанным траекториям, потому что они взаимодействуют друг с другом. Далее мы предположили, что если вдруг мы взаимодействие мгновенно отключим, то эти траектории станут прямыми. Вернувшись обратно к сложному и запутанному случаю, мы хотим навести порядок в траекториях. Из всех мыслимых и сложных кривых выделяются прямые и параболы. Прямые мы уже научились идентифицировать. В качестве другого простого класса выберем параболы. Снаряд летит по параболе и т.д. Теперь мы хотим связать это с силами. Мы знаем пример силы — это гравитационная сила, постулируемая в четвертом законе Ньютона. То есть, в действительности есть четыре, а не три закона Ньютона! Силы — это Стевин, силовые многоугольники, статика Роберваля.

У нас есть траектория. Траектория довольно сложная, и поэтому мы зададим ее с помощью ряда. Коэффициенты этого ряда характеризуются последовательными производными. Мы хотим описать причину, почему точка движется не по прямой, а по более сложной траектории. Прямая — это ряд, у которого отличны от нуля лишь нулевой и первый коэффициенты. Сила, как причина, отклонила от нуля все члены, выше первого порядка. Математически, мы связываем силу и член второго порядка. Почему мы не можем рассмотреть пропорциональность с членом третьего и т.д. порядков? Потому что, если мы предположим зависимость силы от третьей производной, то она потеряет свою векторную природу. А векторная природа силы проистекает из чего-то глубокого. Это тоже подготовленный, глубокий материал, которым здесь Ньютон воспользовался (второй, помимо евклидовой геометрии). А именно, Ньютон воспользовался статикой, разработанной Архимедом, Стевином и Робервалем. Поэтому, если бы Ньютон предположил, что эта причина отклоняет еще и третью производную, то тогда ему пришлось бы отказаться от ассоциации этой причины со статическими силами, для которых была написана теория до него. Поэтому, остается лишь один вариант: качнуть только вторую производную. Отсюда и вытекает $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, где m — просто коэффициент пропорциональности.

Если мы попытаемся включить третью производную в зависимость для силы, то сила, в таком случае, потеряет статус векторной величины. В этом нет ничего плохого, просто тогда слетит та теория сил, которая была создана до Ньютона. Безусловно, мы можем пойти дальше, построив а-ля законы Ньютона, но более высокого порядка, со следующими производными. В этом случае силы будут на расслоении джетов, а не на касательном расслоении. Тогда мы должны будем говорить не о скорости, а о некоторых джетах, которые представляют скорости с более старшими производными. Но мы отказываемся, тем самым, от правила параллелограмма сложения сил, проекций сил на оси и т.д.

1.1.2. Законы Ньютона в математической форме

N_1) Точка, на которую не действуют внешние поля, движется прямолинейно и равномерно: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

N_2) Сила, действующая на материальную точку, пропорциональна ускорению точки, которое она вызывает: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Коэффициент пропорциональности — масса частицы.

N_3) Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю, но противоположно направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки: $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$.

N_4) Две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, модуль которой равен $|F| = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$, где $G = 6.6743 \times 10^{-11}$м^{3}с$^{-2}$кг$^{-1}$ — гравитационная постоянная.

В п. N_2) (второй закон Ньютона) подразумевается инерционная масса (мера сопротивления внешнему воздействию), а в п. N_4) (четвертый закон Ньютона) — гравитационная масса (мера интенсивности притяжения). Эти две массы отождествляются (принцип эквивалентности инерционной и гравитационной масс).

Постулируется, что силы, действующие на частицу со стороны других, складываются по правилу параллелограмма, что дает результирующую силу.

Экспериментальное подтверждение: законы Кеплера:

K_1) Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

K_2) Радиус-вектор от Солнца до планеты заметает равные площади в равные интервалы времени.

K_3) Квадрат времени обращения двух планет пропорционален кубам больших полуосей их орбит

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

1.2. Гравитационный потенциал

1.2.1. Уравнения Лапласа и Пуассона

Напоминание: уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Здесь u — искомая функция

$$u : \mathbb{R}^3 \supset D \to \mathbb{R}, \quad u \in C^2(D),$$

u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} — обозначения частных производных:

$$u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yy} := \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{zz} := \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Уравнение Пуассона — это уравнение вида

$$\Delta u = f.$$

Здесь f — заданная функция

$$f : \mathbb{R}^3 \supset D \to R, \quad f \in C(D).$$

Функция называется **гармонической**, если она удовлетворяет уравнению Лапласа.

Пример гармонической функции:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Покажем, что эта функция действительно удовлетворяет уравнению Лапласа. Вычислим первую производную по переменной x:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = -\frac{1}{r^2} r_x = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{r^3}.$$

Вычислим вторую производную по переменной x:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{xx} = \left(-\frac{x}{r^3}\right)_x = -\frac{r^3 - 3xr^2 r_x}{r^6} = -\frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5}$$

Аналогично вычислим вторые производные по переменным y, z. Имеем:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r}\right)_{xx} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5},\\
\left(\frac{1}{r}\right)_{yy} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{y^2}{r^5},\\
\left(\frac{1}{r}\right)_{zz} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{z^2}{r^5}.
\end{aligned}$$

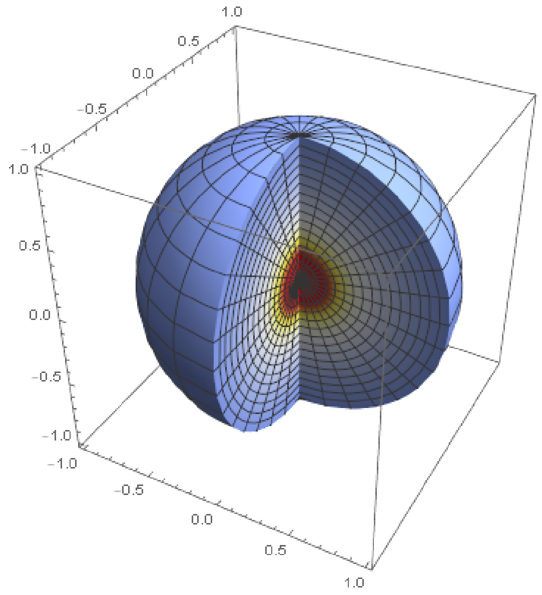
Найдем лапласиан, сложив полученные результаты:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)_{xx} + \left(\frac{1}{r}\right)_{yy} + \left(\frac{1}{r}\right)_{zz}.$$

Все слагаемые взаимно уничтожились!

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -3\frac{1}{r^3} + 3\frac{1}{r^5}\underbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)}_{r^2} = 0.$$

Изобразить эту функцию в трехмерном пространстве можно с помощью окраски координатных поверхностей сферической системы координат:

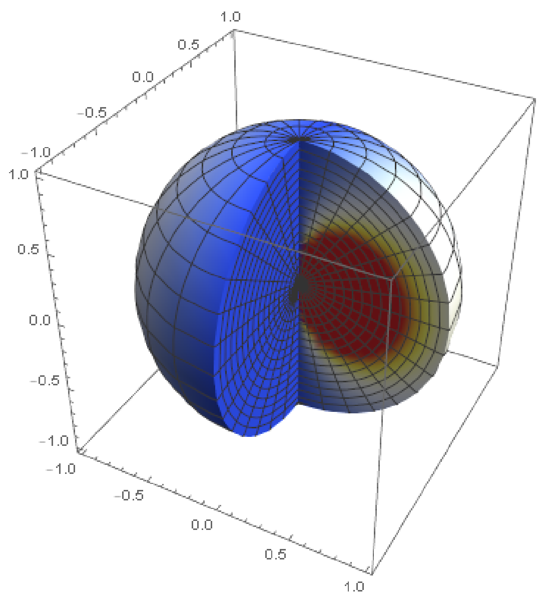


Эта гармоническая функция имеет большое значение в математической физике и определяет потенциал гравитационного или электростатического поля, порожденного точечной массой или зарядом.

Еще один пример гармонической функции:

$$\frac{x}{r^3} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Эта функция может быть изображена следующим образом:

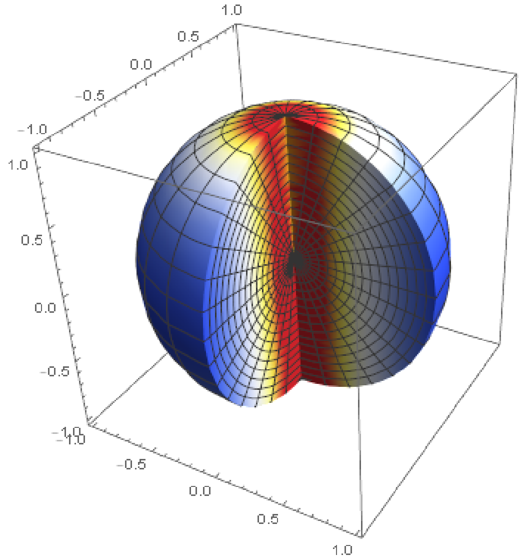


Она определяет потенциал гравитационного или электростатического поля, порожденного диполем, расположенном в начале координат и ориентированном вдоль оси x.

Еще один пример гармонической функции:

$$-\ln(x^2 + y^2).$$

Эта функция может быть изображена следующим образом:

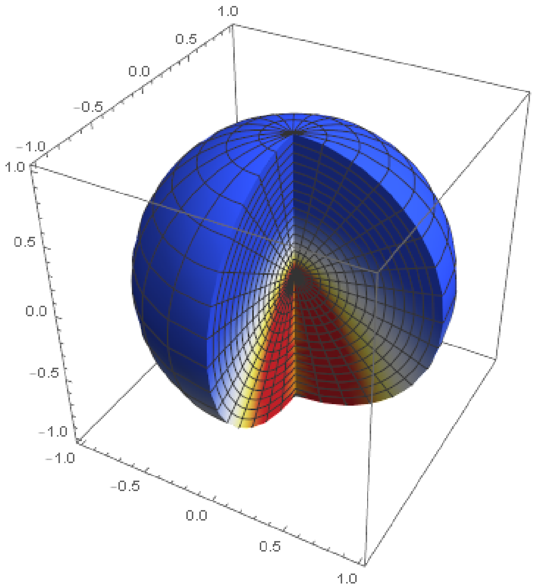


Она определяет потенциал гравитационного или электростатического поля, порожденного единичными зарядами, распределенными вдоль оси z.

Еще один пример гармонической функции:

$$-\ln(\sqrt{(}x^2 + y^2 + z^2) + z).$$

Эта функция может быть изображена следующим образом



Она определяет потенциал гравитационного или электростатического поля, порожденного единичными зарядами, распределенными вдоль отрицательной полуоси z.

1.2.2. Гравитационный потенциал Ньютона

Ньютон предложил вместо гравитационной силы ввести потенциал

$$U = \gamma \frac{M}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

где $\gamma = Gm_1$, $M = m_2$, (x_0, y_0, z_0) — декартовы координаты точки с массой m_1, (x, y, z) — декартовы координаты точки с массой m_2. Как правило, полагают, что $m_1 \gg m_2$, и точку с массой m_1 называют притягивающим центром.

Декартовы компоненты вектора силы, действующей на тело единичной массы, которое расположено в точке с координатами (x, y, z) могут быть найдены по формулам

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\, U_x + \boldsymbol{j}\, U_y + \boldsymbol{k}\, U_z = \nabla U, \quad \text{где} \quad \nabla := \boldsymbol{i}\, \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\, \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\, \frac{\partial}{\partial z}.$$

Действительно,

$$U_x = -\gamma M \frac{x-x_0}{r^3}, \quad U_y = -\gamma M \frac{y-y_0}{r^3}, \quad U_z = -\gamma M \frac{z-z_0}{r^3},$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{i}\, U_x + \boldsymbol{j}\, U_y + \boldsymbol{k}\, U_z \\ &= -\boldsymbol{i}\gamma M \frac{x-x_0}{r^3} - \boldsymbol{j}\gamma M \frac{y-y_0}{r^3} - \boldsymbol{k}\gamma M \frac{y-y_0}{r^3} \\ &= -\frac{\gamma M}{r^3} \underbrace{\left((x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) - (x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k})\right)}_{\boldsymbol{r}} \\ &= -\frac{\gamma M}{r^3}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(x-x_0) + \boldsymbol{j}(y-y_0) + \boldsymbol{k}(z-z_0), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Заметим, что последнее выражение можно эквивалентно представить в виде

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\gamma M}{r^2}\boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad |\boldsymbol{s}| = 1,$$

и

$$|\boldsymbol{F}| = -\frac{\gamma M}{r^2}.$$

1.2.3. Вывод уравнения Лапласа для гравитационного потенциала

Принцип суперпозиции: Если имеются n тел (с массами $M_i, i = 1, 2, \ldots, n$), то в качестве потенциала можно взять

$$U = \gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}}.$$

Лаплас: Можно использовать не саму функцию U, а дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет. Как его получить?

Рассмотрим только одно слагаемое

$$U_i = \gamma \frac{M_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}}.$$

Вычислим первые и вторые производные ($r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$):

$$\begin{aligned}
U_{ix} &= -\gamma M_i \frac{x - x_i}{r_i^3}, &\qquad U_{ixx} &= \gamma M_i \left(-\frac{1}{r_i^3} + 3\frac{(x - x_i)^2}{r_i^5} \right), \\
U_{iy} &= -\gamma M_i \frac{y - y_i}{r_i^3}, &\qquad U_{iyy} &= \gamma M_i \left(-\frac{1}{r_i^3} + 3\frac{(y - y_i)^2}{r_i^5} \right), \\
U_{iz} &= -\gamma M_i \frac{z - z_i}{r_i^3}, &\qquad U_{izz} &= \gamma M_i \left(-\frac{1}{r_i^3} + 3\frac{(z - z_i)^2}{r_i^5} \right).
\end{aligned}$$

А теперь сложим результаты. Имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta U_i &= U_{ixx} + U_{iyy} + U_{izz} \\
&= \gamma M_i \left(-\frac{3}{r_i^3} + \frac{3}{r_i^3} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta U_1 = 0, \quad \Delta U_2 = 0, \ldots, \Delta U_n = 0 \quad \Delta U = 0$$

1.2.4. Распределенная масса

Пусть задана плотность

$$\rho = \rho(x, y, z),$$

причем

$$\rho(x, y, z) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2,$$

т.е. вещество, обладающее массой, распределено в шаре радиуса R. Разобъем этот шар на элементарные объемы со сторонами $\Delta a, \Delta b, \Delta c$. В каждом из них сосредоточена масса

$$\rho(a,b,c)\Delta a \Delta b \Delta c.$$

Эта масса возбуждает потенциал

$$\gamma \frac{\rho(a,b,c)\Delta a \Delta b \Delta c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

Потенциал всей совокупности масс может быть представлен в виде суммы (принцип суперпозиции!)

$$U = \gamma \sum_{a,b,c} \frac{\rho(a,b,c)\Delta a \Delta b \Delta c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

Осуществляя предельный переход, приходим к объемному интегралу (объемный потенциал)

$$U = \gamma \iiint\limits_{a^2+b^2+c^2 \le R^2} \frac{\rho(a,b,c)\,da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

1.2.5. Вывод уравнения Пуассона

Далее будем полагать, что $\gamma = 1$. Запишем объемный потенциал в виде

$$U = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(a,b,c)\,da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

где интегрирование ведется по всему пространству.

Осуществим замену переменных

$$\xi = a - x, \quad \eta = b - y \quad \zeta = c - z.$$

Тогда в новых переменных

$$U = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\xi+x, \eta+y, \zeta+z)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}.$$

Пусть

$$x^2+y^2+z^2 < \hat{R}^2, \quad \hat{R} > R.$$

Тогда, поскольку $\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0$ при

$$(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2 + (z+\zeta)^2 \geq R^2,$$

то область интегрирования можно ограничить шаром

$$D\,:\,\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq (R+\hat{R})^2 = L^2, \quad L = R+\hat{R}.$$

Следовательно,

$$U = \iiint\limits_D \frac{\rho(\xi+x, \eta+y, \zeta+z)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}. \tag{1.1.21}$$

Этот интеграл несобственный, так как подынтегральная функция имеет особенность в начале координат. Но он сходится равномерно относительно x, y, z, потому что подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту

$$\frac{\rho^*}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}, \qquad \rho^* = \max|\rho|.$$

Действительно,

$$U \leq \iiint\limits_D \frac{\rho^*\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},$$

$$U \leq \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{L} dr \frac{\rho^*}{r} r^2 \sin\theta,$$

$$U \leq \rho^* \phi\Big|_0^{2\pi} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} \int\limits_0^{L} dr \frac{r^2}{r},$$

$$U \leq \rho^*\, 2\pi\, 2 \frac{L^2}{2},$$

$$U \leq 2\pi\rho^* L^2.$$

Интегралы, полученные формальным дифференцированием (1.1.21) по параметрам x, y, z, так же сходятся. Следовательно,

$$U_x = \iiint\limits_D \frac{\frac{\partial}{\partial x}\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Учитывая то, что, согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = \frac{\partial}{\partial \xi}\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta),$$

преобразуем интеграл к виду

$$U_x = \iiint\limits_D \frac{\frac{\partial}{\partial \xi}\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Воспользуемся интегрированием по частям. Поскольку

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \xi}\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} = \\ = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\right) + \frac{\xi\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}},$$

и на сфере радиусом $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = L^2$ $\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0$, то

$$U_x = \iiint\limits_D \frac{\xi\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Этот интеграл так же сходится, так как обладает интегрируемой мажорантой $\frac{\rho^*}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$:

$$\iiint\limits_D \frac{\rho^*}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 4\pi\rho^* \int\limits_0^L \frac{r^2\, dr}{r^2} = 4\pi\rho^* L.$$

Производная от подынтегральной функции так же обладает интегрируемой мажорантой. Следовательно,

$$U_{xx} = \iiint\limits_D \frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi}\rho(x+\xi, y+\eta, x+\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Производя аналогичные преобразования относительно переменных η,

ζ, получим

$$U_{xx}=\iiint\limits_D \frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\rho(x+\xi,y+\eta,x+\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$U_{yy}=\iiint\limits_D \frac{\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\eta}\rho(x+\xi,y+\eta,x+\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$U_{zz}=\iiint\limits_D \frac{\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\rho(x+\xi,y+\eta,x+\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Складывая левые и правые части этих равенств, приходим к уравнению

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=\iiint\limits_D \frac{\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2}}\rho(x+\xi,y+\eta,x+\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Для вычисления интеграла по области D в правой части уравнения запишем его в форме повторного интеграла

$$\int\limits_0^L\left\{\iint_{S_r}\ldots dS_r\right\}dr,$$

где S_r — сфера радиуса r с центром в начале координат, dS_r - элемент площади этой сферы. Поскольку

$$\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\rho=r\frac{\partial\rho}{\partial r},\quad r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

то

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=\int\limits_0^L\left\{\iint_{S_r}\frac{\frac{\partial}{\partial r}\rho(x+\xi,y+\eta,z+\zeta)}{r^2}\,dS_r\right\}dr.$$

Рассмотрим теперь единичную сферу Ω. Пусть $d\Omega$ — элемент площади этой сферы. Введем новые переменные

$$\xi_0=\frac{\xi}{r},\quad \eta_0=\frac{\eta}{r},\quad \zeta_0=\frac{\zeta}{r}.$$

В этих переменных, с учетом соотношения $dS_r=r^2d\Omega$ интеграл может быть записан в виде

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=\int\limits_0^L\left\{\iint_{\Omega}\frac{\partial}{\partial r}\rho(x+\xi_0 r,y+\eta_0 r,z+\zeta_0 r)\,d\Omega\right\}dr.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = \iint_\Omega \left\{ \int\limits_0^L \frac{\partial}{\partial r} \rho(x + \xi_0 r, y + \eta_0 r, z + \zeta_0 r)\, dr \right\} d\Omega,$$

и вычислим внутренний интеграл

$$\int\limits_0^L \frac{\partial}{\partial r} \rho(x+\xi_0 r, y+\eta_0 r, z+\zeta_0 r)\, dr = \rho(x+\xi_0 L, y+\eta_0 L, z+\zeta_0 L) - \rho(x, y, z),$$

но

$$\rho(x + \xi_0 L, y + \eta_0 L, z + \zeta_0 L) = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^L \frac{\partial}{\partial r} \rho(x + \xi_0 r, y + \eta_0 r, z + \zeta_0 r)\, dr = -\rho(x, y, z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} &= \iint_\Omega \{-\rho(x, y, z)\}\ d\Omega \\ &= -\rho(x, y, z) \iint_\Omega d\Omega \\ &= -4\pi\rho(x, y, z). \end{aligned}$$

1.3. Задача двух тел

1.3.1. Постановка задачи

Будем полагать физическое пространство $\mathscr{E}$ трехмерным евклидовым, с трансляционным векторным пространством $\mathscr{V}$, скалярным произведением $(\cdot)$ и векторным произведением $(\times)$. Наличие векторного произведения означает выбор некоторой ориентации пространства $\mathscr{V}$, указанной посредством фиксации ортонормированного базиса[1] $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

Движение материальной точки характеризуется векторным полем радиус-вектора

$$\boldsymbol{r} :\ [t_0,\ t_1] \ni t \mapsto \boldsymbol{r}(t) := x(t) - o \in \mathscr{V},$$

[1] Или, что эквивалентно, выбор «ориентированного параллелепипеда» — тривектора $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}$.

где $o \in \mathscr{E}$ — начало отсчета. Скорость точки определяется как первая производная радиус-вектора:

$$\boldsymbol{v} := \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

а ускорение — либо как первая производная скорости, либо как вторая производная радиус-вектора:

$$\boldsymbol{a} := \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}.$$

Полагаем, что справедливы законы Ньютона. В частности, второй закон Ньютона представлен векторным равенством

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k,$$

где m — инертная масса частицы (мера сопротивления действию сил), а $\boldsymbol{F}_k$ — сила, действующая на частицу.

Рассмотрим движение двух точек с массами m_1 и m_2 в $\mathscr{E}$. Согласно четвертому закону Ньютона, они притягиваются друг к другу. Пусть $\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2 :\ [t_0,\ t_1] \to \mathscr{V}$ — радиус-векторы этих точек, тогда

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{12},$$
$$m_2\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{21},$$

где предполагается, что влияние других тел пространства на движение рассматриваемых точек незначительно. $\boldsymbol{F}_{12}$ — это сила, действующая на первую точку со стороны второй, а $\boldsymbol{F}_{21}$ — сила, действующая на вторую точку со стороны первой. Согласно третьему закону Ньютона,

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}.$$

Но четвертый закон Ньютона говорит не только о том, что частицы притягиваются друг к другу. Он также дает явное выражение для силы притяжения:

$$\boldsymbol{F}_{12} = G\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ — радиус вектор точки массы m_2 относительно точки массы m_1, $r = \|\boldsymbol{r}\| := \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}}$, G — гравитационная постоянная, а $\widetilde{m}_1$,

$\widetilde{m}_2$ — гравитационные массы частиц (меры притяжения). Таким образом, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = G \frac{\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{1.1.31}$$

$$m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -G \frac{\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2}{r^3} \boldsymbol{r}. \tag{1.1.32}$$

Для ее однозначного решения необходимы начальные условия $\boldsymbol{r}_i(t_0) = \boldsymbol{r}_{0i}$, $\boldsymbol{v}_i(t_0) = \boldsymbol{v}_{0i}$, $i = 1,\ 2$.

Далее будем полагать, что справедлив **принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс**[2]:

$$m_1 = \widetilde{m}_1, \quad m_2 = \widetilde{m}_2.$$

В таком случае система уравнений (1.1.31) и (1.1.32) примет вид

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{1.1.33}$$

$$m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{1.1.34}$$

или, после сокращений на массы,

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = G \frac{m_2}{r^3} \boldsymbol{r},$$

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1}{r^3} \boldsymbol{r}.$$

Система (1.1.33), (1.1.34) является отправной точкой наших рассуждений.

1.3.2. Расщепление движения на движение центра масс и движение относительно первой точки

Покажем, что систему (1.1.33), (1.1.34) двух векторных уравнений (или, шести скалярных уравнений) можно свести к одному векторному уравнению (соответственно, трем скалярным). Прежде всего, заметим, что рассматриваемая система не является линейной, так как правая

[2]Это утверждение является отдельной гипотезой. У Мизнера в «Гравитации» описан эксперимент, устанавливающий справедливость принципа эквивалентности.

часть содержит множитель, пропорциональный r^{-2}. Кроме того, видно, что правые части отличаются лишь знаками. Поэтому если сложить уравнения (1.1.33) и (1.1.34), то правые части исчезнут и сумма будет линейным уравнением:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \mathbf{0}. \tag{1.1.35}$$

Получили частичную линеаризацию системы. Частичную, — потому, что исходных уравнений было два, а стало одно, т.е., системы не эквивалентны. Тем не менее, из двух нелинейных уравнений мы смогли вытащить одно линейное, используя тот факт, что правые части в (1.1.33) и (1.1.34) одинаковы по абсолютному значению и различаются лишь знаком.

Уравнение (1.1.35) есть линейное уравнение второго порядка относительно двух функций: $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$. Разумно это уравнение записать относительно только одной функции. Пусть она не полностью представляет исходную систему, но, по крайней мере, она позволит говорить о некотором замкнутом уравнении относительно одной функции. Поскольку производные являются линейными операциями, то можно в качестве этой новой функции взять сумму $\widetilde{\boldsymbol{R}} = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2$. Тогда уравнение (1.1.35) станет уравнением типа уравнения Ньютона, но только с единичной массой:

$$\ddot{\widetilde{\boldsymbol{R}}} = \mathbf{0}.$$

Сделаем «косметический» шаг[3], обусловленный желанием, чтобы итоговое уравнение в точности повторяло уравнение Ньютона. Для этого мы отмасштабируем новую функцию, поделив ее на $M = m_1 + m_2$:

$$\boldsymbol{R} := \frac{1}{M}\widetilde{\boldsymbol{R}} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{M}.$$

Тогда уравнение (1.1.35) принимает вид

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \mathbf{0}.$$

Новая функция $\boldsymbol{R}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка и представлена равенством

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}_0 t, \tag{1.1.36}$$

получаемым после двукратного интегрирования уравнения. Здесь $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{V}_0$ — постоянные векторы. Таким образом, если мы ассоциируем движение с изменением $\boldsymbol{R}$, то это движение будет прямолинейным и равномерным.

[3] Этот шаг — не принципиальный.

Заметим, что систему (1.1.33) и (1.1.34) можно переписать в другом виде, сложив оба уравнения и вычтя одно из другого. Сложение уравнений дает линейное уравнение (1.1.35), решением которого является функция (1.1.36). После вычитания (предварительно сократив на массы) мы придем к новому нелинейному уравнению

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -G(m_1 + m_2)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{1.1.37}$$

относительно радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ второй частицы относительно первой. Поскольку системы (1.1.35) и (1.1.37) эквивалентны, то зная $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}$, мы можем определить исходные радиус-векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ по формулам:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r},$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}.$$

Таким образом, для решения исходной задачи двух тел осталось рассмотреть движение второй частицы (массой m_2) относительно первой (массы m_1), характеризуемое уравнением (1.1.37). В этой связи, далее будем рассматривать уравнение (1.1.37).

Пусть $\boldsymbol{r}$ — решение уравнения (1.1.37). В таком случае ускорение $\ddot{\boldsymbol{r}}$ соосно с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, и поскольку для последнего $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, то получаем:

$$\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}. \tag{1.1.38}$$

Векторное поле $\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$ имеет первообразную — $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$, что может быть показано непосредственным вычислением:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}.$$

Тогда

$$\int \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}\, dt = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C}_1,$$

где $\boldsymbol{C}_1$ — постоянный вектор. Поскольку в правой части (1.1.38) — нулевой вектор, то ее интеграл есть некоторый постоянный вектор $\boldsymbol{C}_2$. Следовательно, интегрирование обеих частей равенства (1.1.38) в итоге приводит к соотношению

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{L}, \tag{1.1.39}$$

где $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_1$ — постоянный вектор. Будем полагать, что $\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{0}$, а случай равенства нулю рассмотрим отдельно. Тогда равенство (1.1.39) означает, что кривая, описываемая радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, целиком лежит в плоскости с нормальным вектором $\boldsymbol{L}$ и то же самое верно для ее поля скорости[4]. Таким образом, орбиты точки массы m_2 в относительном движении являются плоскими.

Введя обозначение $\mu = G(m_1 + m_2)$, мы представим (1.1.37) в виде

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{1.1.310}$$

Полученное уравнение (1.1.310) есть уравнение движения[5] материальной точки массы 1 в плоскости с нормальным вектором $\boldsymbol{L}$ — постоянным моментом импульса относительно точки массой m_1. На эту точку действует сила $\boldsymbol{F} = -\mu \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

Мы сделали переход к новой задаче. Вместо системы двух тел мы имеем систему, состоящую из материальной точки единичной массы, которая движется на плоскости Π с нормальным вектором $\boldsymbol{L}$ и ее движение подчиняется уравнению (1.1.310). Наша общая схема рассуждений, таким образом, имела вид:

$$(1.1.33) \text{ и } (1.1.34) \overset{\text{расщепление}}{\to} (1.1.36) \text{ и } (1.1.310) \to (1.1.310) \to \text{орбиты}$$

1.3.3. Решение уравнения (1.1.310)

Уравнение (1.1.310) имеет интегрирующим множителем $\dot{\boldsymbol{r}}$. Действительно, домножим скалярно обе части уравнения (1.1.310) на $\dot{\boldsymbol{r}}$:

$$\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \frac{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Полученное соотношение между скалярами можно проинтегрировать:

$$\int \left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} + \mu \frac{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \right) dt = E.$$

[4]Действительно, согласно определению векторного произведения, его результат ортогонален каждому из сомножителей. Поэтому радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ всегда находится в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{L}$. Конец этого вектора описывает множество точек, которые, следовательно, лежат в этой плоскости.

[5]Интерпретация весьма условна, поскольку рассматривается неинерциальная система отсчета, связанная с частицей массой m_1.

Здесь E — константа интегрирования. Преобразуем подынтегральное выражение. Поскольку[6]

$$\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}\, dt = \dot{\boldsymbol{r}}\, d\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2} d(\dot{\boldsymbol{r}}^2),$$

$$\frac{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} dt = \frac{\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{2} \frac{d(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})}{r^3} = \frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{r^3} = \frac{r dr}{r^3} = \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right),$$

где $r = \|\boldsymbol{r}\|$, то

$$\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = E. \tag{1.1.311}$$

Мы пришли к закону сохранения энергии для относительного движения. Уравнение (1.1.310) — это уравнение второго порядка. Но после того, как мы домножили его на интегрирующий множитель, мы получили в итоге уравнение первого порядка (1.1.311). Полученное уравнение представляет первый интеграл исходного уравнения.

Уравнение (1.1.311) — это уравнение относительно двух координатных функций, явно содержащее расстояние от движущейся частицы до подвижного центра. Поэтому введем на плоскости Π полярные координаты $(r,\ \varphi)$ с полюсом в точке массы m_1. Они связаны с декартовыми координатами $(\xi^1,\ \xi^2)$ на Π соотношениями:

$$\xi^1 = r\cos\varphi, \quad \xi^2 = r\sin\varphi,$$

где $r > 0$, а $\varphi \in [0,\ 2\pi]$. Поле локальных базисов определено разложениями

$$\boldsymbol{e}_r := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \cos\varphi \boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{i}_2,$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi \boldsymbol{i}_1 + r\cos\varphi \boldsymbol{i}_2,$$

где $(\boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{i}_2)$ — ортонормированный базис на Π. От локальных базисов перейдем к нормированным полям:

$$\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} := \boldsymbol{e}_r, \quad \boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle} := \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ имеет представление

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle},$$

[6]Здесь и далее используется обозначение $\boldsymbol{a}^2 := \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$.

что влечет следующие выражения для производных:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} + r\dot{\boldsymbol{e}}_{\langle r\rangle} = \dot{r}\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle},$$
$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} + \dot{r}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle} + (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle} - r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle}. \tag{1.1.312}$$

Использовав интегрирующий множитель мы получили скалярное уравнение (1.1.311). Но исходное уравнение (1.1.310) — векторное, относительно двух неизвестных функций r и φ. Поэтому одного лишь уравнения (1.1.311) недостаточно (недоопределенная система). Вспомним теперь, что другим следствием (1.1.310) являлось уравнение (1.1.39). Система из этих двух уравнений, записанных в полярных координатах, является следствием исходного уравнения.

Подставляя разложения радиус-вектора и его производной по нормированному локальному базису, получаем

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = (r\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle}) \times (\dot{r}\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle}) = r^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} \times \boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle} = r^2\dot{\varphi}\boldsymbol{i}_3,$$

где $\boldsymbol{i}_3$ — единичный вектор, перпендикулярный П. Поскольку $\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, $\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{i}_3$, где L — постоянное число, то мы приходим к равенствам

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu}{r} = E, \tag{1.1.313}$$
$$r^2\dot{\varphi} = L. \tag{1.1.314}$$

Таким образом, мы получили систему уравнений первого порядка. Теперь заметим, что используя уравнение (1.1.314), мы можем осуществить декомпозицию системы, исключив из уравнения (1.1.313) функцию $\dot{\varphi}$. В результате придем к уравнению

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = E, \tag{1.1.315}$$

относительно лишь одной функции r! Если бы мы решили уравнение (1.1.315), то, используя уравнение (1.1.314), мы определили бы вторую функцию φ.

Форма уравнения (1.1.315) подобна закону сохранения энергии движения некоторой фиктивной материальной точки, которая обладает фиктивным потенциалом $U_{eff}(r) := -\frac{\mu}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$. Поэтому удобно использовать сокращенное представление

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E. \tag{1.1.316}$$

Потенциал U_{eff}, называемый **эффективным потенциалом**, чувствует реальный потенциал, а также инертность системы за счет кинетической добавки. Заметим, что здесь, в некотором смысле, произошла «подмена» исходной задачи о движении двух материальных частиц с гравитационным потенциалом на одномерное движение частицы с некоторым фиктивным потенциалом. Приходим к следующей интерпретации: уравнение (1.1.315) описывает часть сложного движения, где точка движется по довольно сложной траектории, определяемой двумя координатами. Но если ввести эффективный потенциал, то уравнение (1.1.316) можно будет интерпретировать как простое движение вдоль прямой.

Можно получить аналитическое решение для системы уравнений (1.1.313) и (1.1.314). Действительно, разрешая уравнение (1.1.316) относительно $\dot{r}$, мы находим, что

$$\dot{r} = \pm\sqrt{2(E - U_{eff}(r))},$$

где правая часть зависит лишь от r. Тогда, поскольку $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$, то

$$dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{2(E - U_{eff}(r))}}.$$

Следовательно,

$$t - t_0 = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau = \pm\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U_{eff}(x))}}. \tag{1.1.317}$$

Мы получили зависимость $t = t(r)$. Локально, ее можно представить в виде $r = r(t)$. Тогда функцию $\varphi = \varphi(t)$ можно найти из соотношения (1.1.314):

$$\varphi - \varphi_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{L}{r(\tau)^2} d\tau.$$

Таким образом, как и ожидалось, первые интегралы (1.1.314) и (1.1.316) позволили получить решение уравнения (1.1.310). На этом мы закончили процедуру расщепления исходной задачи (1.1.33) и (1.1.34).

Получен частичный успех: удалось найти зависимость времени от радиальной координаты. Больше ничего не нашли, поскольку зависимость $r = r(t)$ неизвестна. Дальнейшее продвижение сложное (это отмечалось еще Кеплером). Хотелось бы, по меньшей мере, получить орбиты движения тел, т.е., зависимость $r = r(\varphi)$. Оказывается, что как раз орбиты мы и можем определить.

1.3.4. Орбиты: рассуждение Honerkamp

Будем исходить из равенств (1.1.314) и (1.1.316). Рассматривая r как функцию φ, получаем

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm\frac{\sqrt{2(E - U_{eff}(r))}}{L/r^2} = \pm r^2\frac{\sqrt{2(E - U_{eff}(r))}}{L}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\frac{L}{\sqrt{2}}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dx}{x^2\sqrt{E - U_{eff}(x)}}.$$

Подставляя выражение для U_{eff} и выбирая знак $+$ перед интегралом (угол увеличивается), приходим к соотношению

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{2}}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dx}{x^2\sqrt{E + \dfrac{\mu}{x} - \dfrac{L^2}{2x^2}}}.$$

Сделаем замену $x = \dfrac{1}{s}$, тогда получим равенство

$$\varphi - \varphi_0 = -\int\limits_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{2E/L^2 + 2\mu s/L^2 - s^2}}.$$

Здесь мы полагаем что $L > 0$. Интеграл в правой части вычисляется аналитически:

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos\frac{\frac{1}{r} - \mu/L^2}{\sqrt{\mu^2/L^4 + 2E/L^2}} = \arccos\frac{\frac{L^2}{\mu r} - 1}{\sqrt{1 + 2EL^2/\mu^2}}.$$

Положим $p = \dfrac{L^2}{\mu}$ и $\varepsilon = \sqrt{1 + 2EL^2/\mu^2}$. Тогда мы придем к равенству

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos\left(\frac{p/r - 1}{\varepsilon}\right),$$

что влечет соотношение

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{1.1.318}$$

для орбиты относительного движения точки. Соотношение (1.1.318) является уравнением конического сечения:

- случай $0 \leqslant \varepsilon < 1$ соответствует эллипсу,
- случай $\varepsilon = 1$ соответствует параболе,
- случай $\varepsilon > 1$ соответствует гиперболе.

1.3.5. Орбиты: рассуждение Роя

Можно рассуждать другим способом. Подставляя (1.1.312) в (1.1.310), приходим к уравнению

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle} + \frac{\mu}{r^3}r\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} = \mathbf{0}.$$

Используя линейную независимость семейства полей $(\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle},\ \boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle})$, мы получаем два скалярных уравнения:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \tag{1.1.319}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{1.1.320}$$

Вначале рассмотрим уравнение (1.1.320). Сокращение на $\frac{1}{r}$ и интегрирование дают $r^2\dot{\varphi} = L_1$, где L_1 — постоянное число. Сравнивая полученное соотношение с (1.1.314), заключаем отсюда, что $L_1 = L$.

Цель дальнейших рассуждений — определить зависимость $r = r(\varphi)$, орбиту относительного движения, основываясь на уравнениях (1.1.319) и (1.1.320). Для этого проделаем следующие преобразования. Вначале положим $u(t) = \dfrac{1}{r(t)}$. Поделив обе части уравнения (1.1.319) на $r^2\dot{\varphi}^2$ и учитывая (1.1.320), приходим к уравнению

$$\frac{\ddot{r}}{r^2\dot{\varphi}^2} - \frac{1}{r} = -\frac{\mu}{L^2}.$$

Здесь, поскольку $\dot{r} = -\dfrac{\dot{u}}{u^2}$,

$$\frac{\ddot{r}}{r^2\dot{\varphi}^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\dot{u}}{u^2}\right)\frac{u^2}{\dot{\varphi}^2} = -\frac{\ddot{u}u - 2\dot{u}^2}{u\dot{\varphi}^2}.$$

Таким образом,

$$-\frac{\ddot{u}u - 2\dot{u}^2}{u\dot{\varphi}^2} - u = -\frac{\mu}{L^2}. \tag{1.1.321}$$

Чтобы полностью исключить φ из (1.1.321), введем функцию $\tilde{u}(\varphi) := u(t(\varphi))$. Тогда

$$\tilde{u}' = \frac{\dot{u}}{\dot{\varphi}}, \quad \tilde{u}'' = \frac{\ddot{u}\dot{\varphi} - \ddot{\varphi}\dot{u}}{\dot{\varphi}^3}.$$

Здесь штрихами обозначена производная по φ. Рассмотрим более детально выражение $\dfrac{\ddot{u}u - 2\dot{u}^2}{u\dot{\varphi}^2}$ в (1.1.321):

$$\frac{\ddot{u}u - 2\dot{u}^2}{u\dot{\varphi}^2} = \frac{\ddot{u}\dot{\varphi} - 2\dfrac{\dot{\varphi}}{u}\dot{u}^2}{\dot{\varphi}^3}.$$

Поскольку $\dot{\varphi} = Lu^2$, то $Lu = \dfrac{\dot{\varphi}}{u}$. Мы получаем тогда, что

$$\frac{\ddot{u}u - 2\dot{u}^2}{u\dot{\varphi}^2} = \frac{\ddot{u}\dot{\varphi} - 2Lu\dot{u}^2}{\dot{\varphi}^3} = \frac{\ddot{u}\dot{\varphi} - L\dot{u}(u^2)^{\cdot}}{\dot{\varphi}^3} = \frac{\ddot{u}\dot{\varphi} - \ddot{\varphi}\dot{u}}{\dot{\varphi}^3} = \tilde{u}'',$$

где в последнем преобразовании учтено, что $Lu^2 = \dot{\varphi}$. Следовательно, от уравнения (1.1.321) мы пришли к уравнению

$$\tilde{u}'' + \tilde{u} = \frac{\mu}{L^2}. \tag{1.1.322}$$

Уравнение (1.1.322) является линейным, с постоянной правой частью. Его общее решение имеет вид

$$\tilde{u}(\varphi) = \frac{\mu}{L^2} + A\cos(\varphi - \varphi_0),$$

где A и φ_0 — постоянные. Переходя обратно к переменной r, мы имеем, что

$$r(\varphi) = \frac{L^2/\mu}{1 + (AL^2/\mu)\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Полагая $p = \dfrac{L^2}{\mu}$, $\varepsilon = \dfrac{AL^2}{\mu}$, мы получаем уравнение

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)},$$

совпадающее с (1.1.318).

1.3.6. Верификация: законы Кеплера

Согласно **первому закону Кеплера**, *каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.* Но соотношение (1.1.318) как раз содержит в себе эту ситуацию, если $\varepsilon \in [0,\ 1[$. Фокус соответствует $r = 0$, т.е., частице массой m_1. Минимальное и максимальное расстояния до фокуса представлены выражениями

$$r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}, \quad r_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon}.$$

Для удвоенной большой полуоси a справедливо соотношение

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2},$$

что влечет

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}.$$

Далее, малая полуось находится из равенства $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Согласно **второму закону Кеплера**, *каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает собой равные площади.* Действительно, рассмотрим элемент площади, образованный треугольником со сторонами $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{r}(t+dt)$. Его площадь равна

$$dA = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}\| = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}\|dt$$

(площадь, заметаемая $\boldsymbol{r}$ за время dt). Таким образом,

$$dA = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{L}\|dt.$$

Отсюда и следует второй закон Кеплера $\dfrac{dA}{dt} = \text{const}$ (поскольку вектор $\boldsymbol{L}$ постоянный).

Наконец, согласно **третьему закону Кеплера**, *квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет.* Действительно, используя то, что орбиты эллиптические, мы получаем, отсюда что за один период обращения, $A = \pi ab$. Таким образом,

$$\pi ab = \frac{1}{2}LT,$$

где T — период (время одного полного обращения). Отсюда следует, что

$$T = \frac{2\pi}{L} ab = \frac{2\pi}{L} a\sqrt{pa} = \frac{2\pi}{L} a^{3/2} \sqrt{\frac{L^2}{\mu}},$$

и, принимая, что $L > 0$, получаем отсюда равенство

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}.$$

Напомним, что $\mu = G(m_1 + m_2)$. Если m_1 соответствует Солнцу, то можно считать, что $m_2 \ll m_1$. Тогда приближенно,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{Gm_1}} a^{3/2},$$

и

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}.$$

Таким образом, решение задачи двух тел позволяет попутно заключить, что законы Кеплера являются следствиями законов Ньютона.

1.3.7. Случай $\boldsymbol{L} = \mathbf{0}$

Предыдущие рассуждения основывались на том, что

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{L} \neq \mathbf{0}.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{L} = \mathbf{0}$. Введем сферическую систему координат с началом в точке массы m_1:

$$\omega^1 = r \sin\theta \cos\varphi, \quad \omega^2 = r \sin\theta \sin\varphi, \quad \omega^3 = r\cos\theta,$$

где $r > 0$, $\theta \in [0,\ \pi]$, $\varphi \in [0,\ 2\pi]$. Тогда

$$\boldsymbol{r} = r \sin\theta \cos\varphi \boldsymbol{i} + r \sin\theta \sin\varphi \boldsymbol{j} + r\cos\theta \boldsymbol{k}.$$

Поле нормированных локальных базисов представлено разложениями:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} &= \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{e}_{\langle \theta\rangle} &= \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{e}_{\langle \varphi\rangle} &= -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}.
\end{aligned}$$

Тогда $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle}$. Выражение для производной имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} + r\left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\langle r\rangle}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_{\langle r\rangle}}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right),$$

где

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\langle r\rangle}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_{\langle\theta\rangle},$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\langle r\rangle}}{\partial\varphi} = \sin\theta\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle}.$$

Таким образом,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle} + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\langle\theta\rangle} + r\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle},$$

и

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} = r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle}\times\boldsymbol{e}_{\langle\theta\rangle} + r\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle}\times\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle}.$$

Тогда равенство $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$ дает

$$r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle} - r\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{\langle\theta\rangle} = \boldsymbol{0}.$$

Последнее равенство приводит к следующим соотношениям, выполняющимся для любого момента времени t:

$$r\dot{\theta} = 0 \quad \text{и} \quad r\sin\theta\dot{\varphi} = 0.$$

Но $r > 0$, поэтому остаются лишь случаи

$$\dot{\theta} = 0 \quad \text{и} \quad \sin\theta\dot{\varphi} = 0.$$

Из первого равенства следует, что $\theta = \theta_0 = \text{const}$, а из второго, — что либо $\sin\theta = 0$, либо $\dot{\varphi} = 0$. Если $\sin\theta = 0$, то мы имеем тогда, что $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. В таком случае частица движется вдоль оси ω^3. Пусть теперь $\theta \neq 0$ или $\theta \neq \pi$, тогда необходимо должно выполняться равенство $\dot{\varphi} = 0$. Значит,

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{r}(t) = r(t)\boldsymbol{e}_{\langle r\rangle}|_{\theta=\theta_0,\,\varphi=\varphi_0},$$

и точка движется в радиальном направлении относительно частицы с массой m_1. Заметим, что случаи $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ также соответствуют движению в радиальном направлении.

1.3.8. Уравнение Кеплера

Зависимость $t = t(r)$, представленная формулой (1.1.317), является достаточно сложной и глобально не может быть разрешена относительно r. В этой связи, для определения траекторий используется другой метод. Рассмотрим его для случая эллиптических орбит, то есть, при $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

Мы знаем, что согласно второму закону Кеплера,

$$\pi ab = \frac{1}{2}LT,$$

где $L > 0$ — проекция момента импульса на вектор нормали к плоскости орбиты, а T — период одного обращения по орбите. Поскольку $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, то мы приходим к равенству

$$\frac{2\pi a^2(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{T} = L. \tag{1.1.323}$$

Обозначим

$$n = \frac{2\pi}{T}.$$

Тогда n представляет **среднюю угловую скорость**. Используя новое обозначение, можно представить равенство (1.1.323) в виде

$$na^2(1-\varepsilon^2)^{1/2} = L. \tag{1.1.324}$$

Равенство (1.1.324) есть равенство для определения n.

Пусть τ — момент времени, соответствующий значению $r = r_{\min}$ (перигелий). Определим величину

$$M = n(t-\tau),$$

называемую **средней аномалией**. Также введем (см. Рис. 1.1) **эксцентрическую аномалию**[7] E, равную углу QCA и **истинную аномалию** $f = \varphi - \varphi_0$, равную углу PSA. На рисунке: $AA' = 2a$, Q — точка на окружности радиуса a, центр C которой есть центр эллипса, P — точка на эллипсе, S — фокус, а R — точка пересечения прямой AA' и перпендикуляра QP к ней. Здесь мы движению вдоль эллипса ставим в соответствие движение вдоль окружности. Это движение происходит следующим образом. Если P — положение материальной точки на эллипсе в текущий момент времени, то точка пересечения Q перпендикуляра RP с окружностью есть положение частицы, движущейся по окружности, в тот же момент времени. «Аномалия» заключается в отклонении истинной траектории от окружности.

[7]Здесь E обозначает не энергию, а угол в радианах. Путаницы не возникнет, поскольку мы не используем явно в выкладках соотношение для энергии.

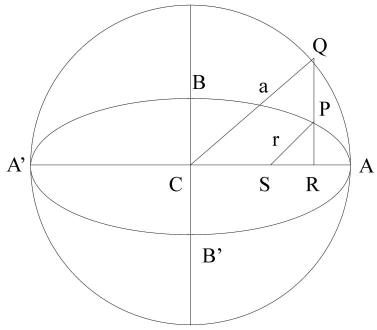


Рис. 1.1. Эллиптическая орбита

Свяжем между собой углы E и f. Сначала заметим, что

$$SR = CR - CS = a\cos E - a\varepsilon.$$

С другой стороны, $SR = r\cos f$, что влечет равенство

$$r\cos f = a(\cos E - \varepsilon). \tag{1.1.325}$$

Теперь заметим, что $\dfrac{PR}{QR} = \dfrac{b}{a}$. Действительно, вводя декартову систему координат с началом в C и осью $0x$, лежащей на AA', получим, что

$$QR = y_Q = \sqrt{a^2 - CR^2} = \sqrt{a^2 - x_R^2},$$

$$PR = y_P = b\sqrt{1 - \frac{x_R^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_R^2},$$

что дает

$$\frac{PR}{QR} = \frac{y_P}{y_R} = \frac{b}{a}.$$

С другой стороны,

$$PR = r\sin f, \quad QR = a\sin E,$$

что влечет

$$r\sin f = b\sin E,$$

или,

$$r\sin f = a(1-\varepsilon^2)^{1/2}\sin E. \tag{1.1.326}$$

Возводя каждое из уравнений (1.1.325) и (1.1.326) в квадрат, а затем складывая, получаем:

$$\begin{aligned} r^2 = a^2(\cos^2 E - 2\varepsilon\cos E + \varepsilon^2) + a^2(1-\varepsilon^2)\sin^2 E = \\ = a^2(1 - 2\varepsilon\cos E + \varepsilon^2 - \varepsilon^2\sin^2 E) = \\ = a^2(1 - 2\varepsilon\cos E + \varepsilon^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2\cos^2 E), \end{aligned}$$

что в итоге приводит к соотношению

$$r^2 = a^2(1 - \varepsilon \cos E)^2,$$

или,

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E). \tag{1.1.327}$$

Полученное равенство связывает E и r и мы к нему еще вернемся.

Справедливо тождество

$$r \cos f = r \left(1 - 2 \sin^2 \frac{f}{2}\right),$$

откуда следует, что

$$2r \sin^2 \frac{f}{2} = r(1 - \cos f).$$

Из равенств (1.1.325) и (1.1.327) мы имеем, что

$$2r \sin^2 \frac{f}{2} = r - r \cos E = a(1 - \varepsilon \cos E) - a(\cos E - \varepsilon) = a(1 - \varepsilon \cos E - \cos E + \varepsilon),$$

и потому

$$2r \sin^2 \frac{f}{2} = a(1 + \varepsilon)(1 - \cos E). \tag{1.1.328}$$

Аналогично,

$$r \cos f = r \left(2 \cos^2 \frac{f}{2} - 1\right),$$

и, в силу (1.1.327) и (1.1.325),

$$2r \cos^2 \frac{f}{2} = r(1 + \cos f) = a(1 - \varepsilon \cos E) + a(\cos E - \varepsilon),$$

что приводит к равенству

$$2r \cos^2 \frac{f}{2} = a(1 - \varepsilon)(1 + \cos E). \tag{1.1.329}$$

Поделив (1.1.328) на (1.1.329), получим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{f}{2} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}.$$

Поскольку $1 - \cos E = 2 \sin^2 \frac{E}{2}$, а $1 + \cos E = 2 \cos^2 \frac{f}{2}$, то

$$\operatorname{tg}^2 \frac{f}{2} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2},$$

что в итоге дает равенство

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{1.1.330}$$

Зная E, мы могли бы из уравнения (1.1.330) определить f, что в итоге даст нам θ. Но для нахождения E нужно еще одно уравнение.

Из второго закона Кеплера мы имеем, что

$$\frac{A_{SPA}}{\pi ab} = \frac{t-\tau}{T},$$

где A_{SPA} — площадь сектора SPA. Это влечет равенство

$$A_{SPA} = \frac{\pi ab(t-\tau)}{T} = \frac{1}{2}abM. \tag{1.1.331}$$

С другой стороны,

$$A_{SPA} = A_{SPR} + A_{RPA}.$$

Рассмотрим площадь A_{RPA} более внимательно. Прибегая к методу исчерпания, можно приближенно записать, что

$$A_{RQA} \approx \sum_i y_{Q_i}\Delta x_i,$$
$$A_{RPA} \approx \sum_i y_{P_i}\Delta x_i = \frac{b}{a}\sum_i y_{Q_i}\Delta x_i.$$

Таким образом, при $\max \Delta x_i \to 0$,

$$A_{RPA} = \frac{b}{a}A_{RQA}.$$

Следовательно,

$$A_{SPA} = A_{SPR} + \frac{b}{a}A_{RQA} = A_{SPR} + \frac{b}{a}(A_{QCA} - A_{QCR}) =$$
$$= \frac{1}{2}r^2\sin f\cos f + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}a^2\sin E\cos E\right).$$

Формулы (1.1.325) и (1.1.326) дают

$$A_{SPA} = \frac{1}{2}(ab\sin E(\cos E - \varepsilon) + abE - ab\sin E\cos E),$$

и потому

$$A_{SPA} = \frac{1}{2}ab(E - \varepsilon \sin E). \tag{1.1.332}$$

Сравнивая (1.1.331) и (1.1.332), получаем **уравнение Кеплера**

$$E - \varepsilon \sin E = M. \tag{1.1.333}$$

Таким образом, мы приходим к следующему способу определения траектории частицы. При заданных (или измеренных) значениях τ и n, для заданного t мы определяем значение M. Решая трансцендентное уравнение (1.1.333), определяем значение $E(t)$, соответствующее t. Из равенства (1.1.327) определяем значение $r(t)$, а из равенства (1.1.330), решая трансцендентное уравнение, находим f. По найденному f определяем $\varphi(t)$. Таким образом, вместо решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, мы должны решить два трансцендентных уравнения, что даст относительное положение $(r(t),\ \varphi(t))$ точки в текущий момент времени. В частности, задавая равные промежутки времени, можно получить значения для **эфемерид**.

Следует отметить, что уравнение Кеплера было нами получено, исходя из законов Кеплера. Вместе с тем, его можно получить напрямую, как следствие уравнения Ньютона. В связи с этим см. Википедию по запросу «уравнение Кеплера». Уравнение (1.1.330), при этом, возникает как подстановка для интеграла.

1.4. Задача трех тел

1.4.1. Постановка задачи и уравнения движения

Пусть три материальные точки с массами m_1, m_2, m_3 движутся в трехмерном евклидовом точечном пространстве $\mathscr{E}$. Положение точки с массой m_i $(i = 1, 2, 3)$ в пространстве $\mathscr{E}$ характеризуется полем ее радиус-векторов

$$\boldsymbol{r}_i : [t_0,\ t_1] \to \mathscr{V}, \quad \boldsymbol{r}_i(t) := P_i(t) - O,$$

где $O \in \mathscr{E}$ — начало отсчета (одно и то же для всех частиц), а $\mathscr{V}$ — ассоциированное векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot)$ и векторным произведением $(\times)$.

Полагаем, что действием окружающих тел на рассматриваемую механическую систему можно пренебречь, а между точками P_i и P_j действуют силы притяжения, определенные согласно формуле

$$\boldsymbol{F}_{ij} = G\frac{\widetilde{m}_i\widetilde{m}_j}{r_{ij}^3}\boldsymbol{r}_{ij},$$

где $\boldsymbol{F}_{ij}$ — сила, с которой точка P_j притягивает к себе точку P_i, $\boldsymbol{r}_{ij} := \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор точки P_j относительно точки P_i, а $r_{ij} = \sqrt{\boldsymbol{r}_{ij}^2}$. Символ G обозначает гравитационную постоянную, а $\widetilde{m}_i$, $\widetilde{m}_j$ — гравитационные массы частиц P_i и P_j.

Согласно второму закону Ньютона, для точки P_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ справедливо уравнение движения

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = G\sum_{j=1,\, j\neq i}^{3}\frac{\widetilde{m}_i\widetilde{m}_j}{r_{ij}^3}\boldsymbol{r}_{ij}.$$

Приходим к системе уравнений движения:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= G\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} + G\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_3}{r_{13}^3}\boldsymbol{r}_{13},\\
m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= G\frac{\widetilde{m}_2\widetilde{m}_1}{r_{21}^3}\boldsymbol{r}_{21} + G\frac{\widetilde{m}_2\widetilde{m}_3}{r_{23}^3}\boldsymbol{r}_{23},\\
m_3\ddot{\boldsymbol{r}}_3 &= G\frac{\widetilde{m}_3\widetilde{m}_1}{r_{31}^3}\boldsymbol{r}_{31} + G\frac{\widetilde{m}_3\widetilde{m}_2}{r_{32}^3}\boldsymbol{r}_{32}.
\end{aligned}\tag{1.1.41}$$

Здесь $\boldsymbol{r}_{12} = -\boldsymbol{r}_{21}$, $\boldsymbol{r}_{13} = -\boldsymbol{r}_{31}$, $\boldsymbol{r}_{23} = -\boldsymbol{r}_{32}$. Полагаем справедливым принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс:

$$m_1 = \widetilde{m}_1, \quad m_2 = \widetilde{m}_2, \quad m_3 = \widetilde{m}_3.$$

Тогда система (1.1.41) примет окончательный вид:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= G\frac{m_1m_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} + G\frac{m_1m_3}{r_{13}^3}\boldsymbol{r}_{13},\\
m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= G\frac{m_2m_1}{r_{21}^3}\boldsymbol{r}_{21} + G\frac{m_2m_3}{r_{23}^3}\boldsymbol{r}_{23},\\
m_3\ddot{\boldsymbol{r}}_3 &= G\frac{m_3m_1}{r_{31}^3}\boldsymbol{r}_{31} + G\frac{m_3m_2}{r_{32}^3}\boldsymbol{r}_{32}.
\end{aligned}\tag{1.1.42}$$

Для последующих рассуждений удобно не сокращать на массы.

1.4.2. Интегралы системы (1.1.42)

Движение центра масс

Если правая часть некоторого уравнения системы (1.1.42) содержит слагаемое $\boldsymbol{\alpha}$, то найдется уравнение этой системы, правая часть которой содержит слагаемое вида $-\boldsymbol{\alpha}$. В этой связи, представляется естественным сложить три уравнения друг с другом. В результате получится линейное уравнение:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 + m_3\ddot{\boldsymbol{r}}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{1.1.43}$$

являющееся следствием исходной системы. Удобно записать (1.1.43) в виде уравнения относительно одного векторного поля. Для этого положим

$$\widetilde{\boldsymbol{R}} := m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3.$$

Пользуясь линейностью уравнения (1.1.43), можно придать ему форму

$$\ddot{\widetilde{\boldsymbol{R}}} = \boldsymbol{0}.$$

Преобразуем полученное уравнение к форме, подобной уравнению Ньютона. Для этого мы модифицируем поле $\widetilde{\boldsymbol{R}}$:

$$\boldsymbol{R} := \frac{1}{M}\widetilde{\boldsymbol{R}} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{M}.$$

Здесь $M = m_1 + m_2 + m_3$. С геометрической точки зрения, $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор барицентра наименьшего выпуклого множества, натянутого на точки P_1, P_2, P_3 (3-симплекс). Таким образом, приходим к соотношению

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}.$$

Интегрируя последнее уравнение дважды по t, получаем выражение

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}_0 t, \tag{1.1.44}$$

где $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{V}_0$ — постоянные векторы. Таким образом, с механической точки зрения, соотношение (1.1.44) означает, что барицентр системы трех тел движется прямолинейно и равномерно.

Закон сохранения момента импульса

Сложив друг с другом уравнения системы (1.1.42), мы получили следствие системы — линейное уравнение (1.1.43), решением которого является векторное поле (1.1.44). Но уравнение (1.1.43) не эквивалентно исходной системе, поэтому нужны еще уравнения. Заметим, что если бы уравнений было два (задача двух тел), то нам было бы достаточно вычесть одно уравнение из другого, что приведет к уравнению, записанному в терминах относительного движения. Как мы уже знаем, из такого уравнения можно получить относительные орбиты частиц. Но в нашем случае уравнений три и их взаимное вычитание приведет к двум уравнениям, записанным в терминах относительного движения. Эти уравнения будут взаимосвязаны, поэтому их не получится рассматривать по отдельности. Поэтому мы пойдем другим путем: будем искать интегрирующие множители, домножение на которые приходит к понижению порядка системы.

Домножим первое уравнение системы (1.1.42) векторно на $\boldsymbol{r}_1$ слева, второе — на $\boldsymbol{r}_2$, третье — на $\boldsymbol{r}_3$ и сложим результаты:

$$m_1\boldsymbol{r}_1\times\ddot{\boldsymbol{r}}_1+m_2\boldsymbol{r}_2\times\ddot{\boldsymbol{r}}_2+m_3\boldsymbol{r}_3\times\ddot{\boldsymbol{r}}_3 = G\frac{m_1m_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_{12}+G\frac{m_1m_3}{r_{13}^3}\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_{13}-$$
$$-G\frac{m_2m_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_{12}+G\frac{m_2m_3}{r_{23}^3}\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_{23}-G\frac{m_3m_1}{r_{13}^3}\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_{13}-G\frac{m_3m_2}{r_{23}^3}\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_{23}. \tag{1.1.45}$$

Заметим, что

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2,\quad \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_{13}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3,$$
$$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2,\quad \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_{23}=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3,$$
$$\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_{13}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3,\quad \boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_{23}=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3.$$

Поэтому, в действительности, правая часть (1.1.45) равна нулю и мы приходим к равенству

$$m_1\boldsymbol{r}_1\times\ddot{\boldsymbol{r}}_1+m_2\boldsymbol{r}_2\times\ddot{\boldsymbol{r}}_2+m_3\boldsymbol{r}_3\times\ddot{\boldsymbol{r}}_3=\boldsymbol{0}. \tag{1.1.46}$$

Векторное поле $\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i$ является первообразной для $\boldsymbol{r}_i\times\ddot{\boldsymbol{r}}_i$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{r}_i\times\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{r}_i\times\ddot{\boldsymbol{r}}_i.$$

В этой связи, интегрирование левой части (1.1.46) дает

$$\int(m_1\boldsymbol{r}_1\times\ddot{\boldsymbol{r}}_1+m_2\boldsymbol{r}_2\times\ddot{\boldsymbol{r}}_2+m_3\boldsymbol{r}_3\times\ddot{\boldsymbol{r}}_3)\,dt=$$
$$=m_1\boldsymbol{r}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_1+m_2\boldsymbol{r}_2\times\dot{\boldsymbol{r}}_2+m_3\boldsymbol{r}_3\times\dot{\boldsymbol{r}}_3+\boldsymbol{C}_1,$$

Поскольку в правой части (1.1.46) — нулевой вектор, то интеграл от нее дает постоянный вектор $\boldsymbol{C}_2$. Таким образом, приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{L}, \tag{1.1.47}$$

где $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_1$ — постоянный вектор. Соотношение (1.1.47) утверждает, что суммарный момент импульса системы трех тел сохраняется. Проектируя (1.1.47) на оси Ox, Oy, Oz декартовой системы координат, получим:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = L_x,$$
$$\sum_{i=1}^{3} m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = L_y,$$
$$\sum_{i=1}^{3} m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) = L_z,$$

где $\boldsymbol{L} = L_x\boldsymbol{i}+L_y\boldsymbol{j}+L_z\boldsymbol{k}$. Можно, таким образом, сказать, что $\boldsymbol{r}_i$ являются интегрирующими множителями системы (1.1.42).

Закон сохранения энергии

Функции $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ также являются интегрирующими множителями системы (1.1.42). Действительно, домножим скалярно первое уравнение на $\dot{\boldsymbol{r}}_1$, второе — на $\dot{\boldsymbol{r}}_2$, а третье – на $\dot{\boldsymbol{r}}_3$, и сложим результаты. Тогда придем к равенству:

$$m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{r}}_3\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_3 = G\frac{m_1m_2}{r_{12}^3}\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\boldsymbol{r}_{12} + G\frac{m_1m_3}{r_{13}^3}\dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\boldsymbol{r}_{13}-$$
$$- G\frac{m_2m_1}{r_{12}^3}\dot{\boldsymbol{r}}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12} + G\frac{m_2m_3}{r_{23}^3}\dot{\boldsymbol{r}}_2\cdot\boldsymbol{r}_{23} - G\frac{m_3m_1}{r_{13}^3}\dot{\boldsymbol{r}}_3\cdot\boldsymbol{r}_{13} - G\frac{m_3m_2}{r_{23}^3}\dot{\boldsymbol{r}}_3\cdot\boldsymbol{r}_{23}. \tag{1.1.48}$$

Заметим, что справедливы равенства

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{r}_{ij} = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i),$$
$$\dot{\boldsymbol{r}}_j\cdot\boldsymbol{r}_{ji} = \dot{\boldsymbol{r}}_j\cdot(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j).$$

Складывая их, получаем

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{r}_{ij} + \dot{\boldsymbol{r}}_j\cdot\boldsymbol{r}_{ji} = -(\dot{\boldsymbol{r}}_j - \dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i),$$

или

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{r}_{ij} - \dot{\boldsymbol{r}}_j\cdot\boldsymbol{r}_{ij} = -(\dot{\boldsymbol{r}}_j - \dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i).$$

Учитывая полученные соотношения, равенству (1.1.48) можно придать вид

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -G\frac{m_1m_2}{r_{12}^3}(\dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1)\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)-G\frac{m_1m_3}{r_{13}^3}(\dot{\boldsymbol{r}}_3-\dot{\boldsymbol{r}}_1)\cdot(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)- \\ - G\frac{m_2m_3}{r_{23}^3}(\dot{\boldsymbol{r}}_3-\dot{\boldsymbol{r}}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2). \quad (1.1.49)$$

Проинтегрируем обе части равенства (1.1.49). Прежде всего, заметим, что

$$\int m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i\,dt = \int m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot d\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{1}{2}\int m_i\,d(\dot{\boldsymbol{r}}_i^2) = \frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 + C_{1,\,i},$$

и

$$\int \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}_j-\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)}{r_{ij}^3}\,dt = \int\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\,dt = \int\frac{\boldsymbol{r}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3} = \frac{1}{2}\int\frac{d(\boldsymbol{r}_{ij}^2)}{r_{ij}^3} = \\ = \frac{1}{2}\int\frac{d(r_{ij}^2)}{r_{ij}^3} = \int\frac{dr_{ij}}{r_{ij}^2} = -\frac{1}{r_{ij}} + C_{2,\,ij},$$

где $C_{1,\,i}$ и $C_{2,\,ij}$ — постоянные. Таким образом, приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 + U(r_{12},\,r_{13},\,r_{23}) = E, \qquad (1.1.410)$$

где $E = -C_{2,\,12} - C_{2,\,13} - C_{2,\,23} - C_{1,\,1} - C_{1,\,2} - C_{1,\,3}$ — постоянная интегрирования, а

$$U(r_{12},\,r_{13},\,r_{23}) = -G\frac{m_1m_2}{r_{12}} - G\frac{m_1m_3}{r_{13}} - G\frac{m_2m_3}{r_{23}}.$$

Равенство (1.1.410) является законом сохранения энергии; здесь $U(r_{12},\,r_{13},\,r_{23})$ — потенциальная энергия системы.

Теорема Брунса – Пуанкаре

Таким образом, получены следующие соотношения: равенство (1.1.44), выражающее закон движения центра масс системы, соотношение (1.1.47) — закон сохранения момента импульса и равенство (1.1.410) — закон сохранения энергии. Эти равенства являются следствиями исходной системы (1.1.42) и им соответствует 10 скалярных соотношений и 10 постоянных интегрирования. Вместе с тем, исходная система (1.1.42) состоит из 9 скалярных дифференциальных уравнений второго порядка. Для полного определения поведения тел надо знать $6 \cdot 3 = 18$ постоянных интегрирования. Следовательно, нужны еще уравнения! Однако, не все так просто...

Теорема 1.1 (Брунс & Пуанкаре)**.** *В задаче трех тел кроме равенств* (1.1.44), (1.1.47) *и* (1.1.410) *не существует других интегралов, которые выражались бы соотношениями, включающими только алгебраические и интегральные функции координат и скоростей тел, были бы справедливы для любых тел и удовлетворяли уравнениям движения*

Следовательно, мы не можем получить систему обыкновенных уравнений первого порядка, эквивалентную (1.1.42). По этой причине, не существует решения задачи трех тел в конечных формулах. Но, следует отметить, что имеется полученное Зюндманом решение в форме рядов. Правда, для вычисления коэффициентов рядов нужно столько времени, что проще решать задачу численно.

1.4.3. Случай Лагранжа

Постановка частной задачи трех тел

Хотя в общем случае задача трех тел не имеет решения, представимого в конечном аналитическом виде, в частных случаях такое решение возможно найти. Для этого необходимо ввести дополнительные гипотезы. Следуя Лагранжу, предположим, что

Форма геометрической фигуры, образованной точками P_1, P_2 и P_3 остается неизменной и в каждый момент времени лежит в фиксированной плоскости. При этом, размеры и положение фигуры могут меняться.

Точный смысл гипотезы будет дан ниже.

Уравнения движения системы трех тел имеют вид

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = G \sum_{j=1,\, j \neq i}^{3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \boldsymbol{r}_{ij}, \quad i = 1,\, 2,\, 3, \tag{1.1.411}$$

где, напомним, $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$. Понизим порядок системы, используя полученные соотношения (1.1.44), (1.1.47) и (1.1.410).

Принимая во внимание закон движения центра масс (1.1.44), перейдем к рассмотрению относительного движения, положив для $i = 1,\, 2,\, 3$,

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}. \tag{1.1.412}$$

Согласно формуле (1.1.44), центр масс движется прямолинейно и равномерно; таким образом, мы разложили движение каждой частицы на известное движение центра масс и неизвестное относительное движение вокруг центра масс.

Теперь мы можем придать точный смысл гипотезе Лагранжа. Полагаем, что выполняются соотношения

$$\frac{r_{12}}{(r_{12})_0} = \frac{r_{13}}{(r_{13})_0} = \frac{r_{23}}{(r_{23})_0} = f(t), \tag{1.1.413}$$

где $(r_{ij})_0 = r_{ij}(0)$. Далее, полагаем справедливыми равенства

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}(t), \tag{1.1.414}$$

где $\dot{\theta}_i$ — угловая скорость частицы P_i относительно центра масс. Равенства (1.1.413), (1.1.414), а также то, что движение происходит в фиксированной плоскости, составляют гипотезу Лагранжа. Функции f и $\dot{\theta}$ от t являются неизвестными. Из предположения следует, в частности, что угол между r_{12} и r_{13} остается постоянным и аналогично для других углов.

Следствия из гипотез Лагранжа

Прежде чем приступать к решению задачи, получим несколько следствий из гипотезы Лагранжа.

В качестве первого следствия из гипотезы Лагранжа докажем, что для любых $i = 1,\ 2,\ 3$ справедливо равенство

$$x_i = (x_i)_0 f(t), \tag{1.1.415}$$

где $(\boldsymbol{x}_i)_0 = \boldsymbol{x}_i(0)$. Проведем рассуждение для $i = 1$; остальные случаи рассматриваются аналогично. Из формулы (1.1.412) вытекает равенство

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{r}_i - M\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}, \tag{1.1.416}$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$. Замечая, что

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i,$$

можно представить (1.1.416) в виде

$$(m_1 + m_2 + m_3)\boldsymbol{x}_1 + m_2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + m_3(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0},$$

то есть, в виде

$$M\boldsymbol{x}_1 = -m_2\boldsymbol{r}_{12} - m_3\boldsymbol{r}_{13}. \tag{1.1.417}$$

Возведем обе части (1.1.417) в квадрат:

$$M^2x_1^2 = m_2^2r_{12}^2 + m_3^2r_{13}^2 + 2m_2m_3\boldsymbol{r}_{12}\cdot\boldsymbol{r}_{13}. \tag{1.1.418}$$

Справедливо равенство $\boldsymbol{r}_{12}\cdot\boldsymbol{r}_{13} = r_{12}r_{13}\cos\alpha_1$, где α_1, согласно (1.1.414), — постоянный угол. Тогда, применяя (1.1.413), получаем

$$M^2x_1^2 = f(t)^2\{m_2^2(r_{12})_0^2 + m_3^2(r_{13})_0^2 + 2m_2m_3(r_{12})_0(r_{13})_0\cos\alpha_1\}. \tag{1.1.419}$$

Выражение в фигурных скобках (1.1.419) соответствует $M^2(x_1)_0^2$, поэтому

$$M^2x_1^2 = f(t)^2M_2(x_1)_0^2,$$

что влечет равенство

$$x_1 = (x_1)_0f(t).$$

Напомним, что x_1, $(x_1)_0 \geqslant 0$ как длины соответствующих векторов. Аналогичным образом получаются соотношения для $\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_3$. Равенство (1.1.415) доказано.

Пусть $\boldsymbol{F}_i$ обозначает суммарную силу, отнесенную к m_i, которая действует на точку P_i, $i = 1, 2, 3$. То есть, $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i$. Используя закон сохранения момента импульса (1.1.47), докажем, что *поле $\boldsymbol{F}_i$ коллинеарно $\boldsymbol{x}_i$ в любой момент времени t* (второе следствие из гипотезы Лагранжа).

Согласно равенству (1.1.47),

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{L},$$

то есть, момент импульса относительно точки O (начало отсчета) сохраняется. В силу соотношений (1.1.412),

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{3} m_i(\boldsymbol{x}_i + R)\times(\dot{\boldsymbol{x}}_i + \dot{\boldsymbol{R}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{3} m_i\left(\boldsymbol{x}_i\times\dot{\boldsymbol{x}}_i + \boldsymbol{x}_i\times\dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{x}}_i + \boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{R}}\right). \tag{1.1.420}$$

Поскольку, согласно (1.1.416), $\sum\limits_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$, то $\sum\limits_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{x}_i \times \dot{\boldsymbol{R}} = \mathbf{0}$, $\sum\limits_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{x}}_i = \mathbf{0}$ и соотношение (1.1.420) примет вид

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{x}_i \times \dot{\boldsymbol{x}}_i + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}, \tag{1.1.421}$$

где $\boldsymbol{P} = \sum\limits_{i=1}^{3} m_i \dot{\boldsymbol{R}} = M\dot{\boldsymbol{R}}$. Таким образом, закон сохранения момента импульса принимает вид

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{x}_i \times \dot{\boldsymbol{x}}_i + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} = \boldsymbol{L}. \tag{1.1.422}$$

Но, в силу (1.1.44), $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}_0 t$, и потому

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} = M(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}_0 t) \times \boldsymbol{V}_0 = M\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{L}_1,$$

где $\boldsymbol{L}_1$ — постоянный вектор. В этой связи, равенство (1.1.422) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{x}_i \times \dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{C}, \tag{1.1.423}$$

где $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_1$ — постоянный вектор. Таким образом, мы получили закон сохранения момента импульса для относительного движения вокруг центра масс.

Поскольку относительное движение плоское и заданы условия на углы (1.1.414), то для дальнейших рассуждений удобно перейти к полярным координатам $(\rho,\ \varphi)$, полюс которых — в центре масс, связанным с декартовыми координатами $(\xi^1,\ \xi^2)$ на плоскости равенствами

$$\xi^1 = \rho \cos\varphi, \quad \xi^2 = \rho \sin\varphi.$$

Векторы нормированного локального базиса имеют вид

$$\boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle} = \cos\varphi\, \boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{i}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle} = -\sin\varphi\, \boldsymbol{i}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{i}_2,$$

где $(\boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{i}_2)$ — базис декартовой системы координат. Тогда для поля радиус-векторов $\boldsymbol{\rho}:\ t \mapsto \boldsymbol{\rho}(t)$ справедливо разложение

$$\boldsymbol{\rho} = \rho\, \boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle},$$

что влечет равенство

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\rho}\, \boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle} + \rho\, \dot{\boldsymbol{e}}_{\langle\rho\rangle} = \dot{\rho}\, \boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle} + \rho\dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} = \rho^2\dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle} \times \boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle} = \rho^2\dot{\varphi}\, \boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{k}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости.

С учетом полученных соотношений для полярных координат, равенство (1.1.423) примет вид

$$\sum_{i=1}^{3} m_i x_i^2 \dot{\theta}_i\, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{C} = C\boldsymbol{k},$$

что дает скалярное равенство

$$\sum_{i=1}^{3} m_i x_i^2 \dot{\theta}_i = C. \tag{1.1.424}$$

Принимая во внимание гипотезу (1.1.414) и равенство (1.1.415), получаем

$$\sum_{i=1}^{3} m_i (x_i)_0^2\, f^2 \dot{\theta} = C,$$

или,

$$f^2\dot{\theta} = \frac{C}{\displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_i (x_i)_0^2} = \text{const}. \tag{1.1.425}$$

Все готово для доказательства утверждения о коллинеарности $\boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{F}_i$. Момент количества движения точки P_i, $i = 1,\ 2,\ 3$, относительно центра масс равен

$$m_i \boldsymbol{x}_i \times \dot{\boldsymbol{x}}_i = m_i x_i^2 \dot{\theta}_i\, \boldsymbol{k} = m_i (x_i)_0^2 f^2 \dot{\theta}\, \boldsymbol{k}.$$

Но, в силу (1.1.425), произведение $f^2\dot{\theta}$ постоянно, что влечет соотношение

$$m_i \boldsymbol{x}_i \times \dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{D},$$

в котором $\boldsymbol{D}$ — постоянный вектор. Но такое соотношение может быть выполнено лишь тогда, когда суммарная сила, действующая на точку P_i, направлена к центру масс. Действительно, момент $\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_i$ равен нулю, поскольку

$$\frac{d}{dt}(m_i \boldsymbol{x}_i \times \dot{\boldsymbol{x}}_i) = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_i \times m_i \boldsymbol{F}_i.$$

Таким образом, поля $\boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{F}_i$ коллинеарны в любой момент времени.

Третье следствие из гипотезы Лагранжа заключается в том, что *суммарная сила, действующая на тело, прямо пропорциональна расстоянию тела от центра масс с одинаковым коэффициентом пропорциональности для всех тел*[8]:

$$F_1 : F_2 : F_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

Поскольку, как уже установлено, $\boldsymbol{F}_i$ коллинеарно $\boldsymbol{x}_i$ (радиус-вектор с началом в центре масс), то справедливо разложение

$$\boldsymbol{F}_i = F_i \boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle}.$$

Вспоминая, что $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{R}$ и учитывая (1.1.44), получаем отсюда, что $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \ddot{\boldsymbol{x}}_i$, и уравнение движения (1.1.411) для P_i примет вид

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_i = F_i \boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle}, \tag{1.1.426}$$

где произведено сокращение на массу m_i.

Из равенства

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \dot{x}_i \, \boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle} + x_i \dot{\theta}_i \, \boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle},$$

следует, что

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_i = (\ddot{x}_i - x_i \dot{\theta}_i^2)\boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle} + \frac{1}{x_i}\frac{d}{dt}(x_i^2 \dot{\theta}_i)\boldsymbol{e}_{\langle\varphi\rangle}.$$

Принимая во внимание полученное соотношение, можно представить уравнение (1.1.426) в виде системы скалярных уравнений:

$$\begin{gathered} \ddot{x}_i - x_i \dot{\theta}_i^2 = F_i, \\ \frac{1}{x_i}\frac{d}{dt}(x_i^2 \dot{\theta}_i) = 0. \end{gathered} \tag{1.1.427}$$

Второе соотношение системы (1.1.427) является законом сохранения момента импульса, а первое, с учетом гипотезы (1.1.413), (1.1.414), принимает вид

$$\ddot{f}(x_i)_0 - x_i \dot{\theta}^2 = F_i,$$

[8] Тройная пропорция $a : b : c = x : y : z$ означает, что $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ и $\frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

или

$$F_i = x_i\left(\frac{\ddot f}{f} - \dot\theta^2\right). \qquad (1.1.428)$$

Таким образом, из (1.1.428) следует, что

$$\frac{F_i}{x_i} = \frac{\ddot f}{f} - \dot\theta^2,$$

и потому

$$\frac{F_1}{x_1} = \frac{F_2}{x_2}, \quad \frac{F_2}{x_2} = \frac{F_3}{x_3},$$

т.е., $F_1 : F_2 : F_3 = x_1 : x_2 : x_3$.

Резюмируем полученные следствия:

Предложение 1.1. *Если справедлива гипотеза Лагранжа (1.1.413) и (1.1.414), то*

(a) *Расстояние x_i тела от центра масс в любой момент времени прямо пропорционально его начальному расстоянию $(x_i)_0$. Коэффициент пропорциональности $f(t)$ одинаков для всех тел.*

(b) *Поле $\boldsymbol{F}_i$ коллинеарно $\boldsymbol{x}_i$ в любой момент времени t.*

(c) $F_1 : F_2 : F_3 = x_1 : x_2 : x_3$.

Теперь, используя доказанное предложение, мы можем решить исходную задачу. Согласно (b), справедливо равенство $\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$, которое, в силу второго закона Ньютона, влечет равенство $\boldsymbol{x}_i \times \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{0}$.

Возвращаясь к (1.1.411) и учитывая, что $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{R}$, а $\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$, получаем

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_i = G\sum_{j=1,\, j\neq i}\frac{m_j}{r_{ij}^3}\boldsymbol{r}_{ij}. \qquad (1.1.429)$$

Пусть $i = 1$. Домножим левую и правую части (1.1.429) на $\boldsymbol{x}_1$ векторно:

$$\frac{m_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{r}_{12} + \frac{m_3}{r_{13}^3}\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{r}_{13} = \boldsymbol{0}.$$

Поскольку $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i$, то

$$\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{r}_{13} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_3,$$

и потому полученное равенство примет вид

$$\boldsymbol{x}_1 \times \left(\frac{m_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{x}_2 + \frac{m_3}{r_{13}^3}\boldsymbol{x}_3\right) = \boldsymbol{0}.$$

Преобразуем соотношение, используя равенство (1.1.416): поскольку $m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 + m_3\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$, то

$$\boldsymbol{x}_1 \times m_3\boldsymbol{x}_3 = -m_2\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2,$$

и мы окончательно придем к соотношению

$$\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2 \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) = \mathbf{0}. \qquad (1.1.430)$$

Аналогичным образом получаются равенства

$$\boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_3 \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{12}^3}\right) = \mathbf{0}, \qquad (1.1.431)$$

и

$$\boldsymbol{x}_3 \times \boldsymbol{x}_1 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3}\right) = \mathbf{0}. \qquad (1.1.432)$$

Полученной системе (1.1.430), (1.1.431) и (1.1.432) удовлетворяют ровно два решения:

(1) $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r$, то есть, точки находятся в вершинах равностороннего треугольника,

(2) $\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_3 \times \boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$, то есть, точки расположены на прямой линии.

Случай 1: точки находятся в вершинах равностороннего треугольника

Мы покажем, что исходная задача становится эквивалентной трем задачам двух тел. Пусть $i = 1$. Уравнение (1.1.411) принимает вид

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{G}{r^3}(m_2\boldsymbol{r}_{12} + m_3\boldsymbol{r}_{13}).$$

Принимая во внимание равенство (1.1.417), мы можем переписать рассматриваемое уравнение в виде

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_1 + \frac{GM}{r^3}\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}. \qquad (1.1.433)$$

Чтобы исключить r из (1.1.433), мы воспользуемся соотношением (1.1.418), в котором $r_{12} = r_{13} = r$, а $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$:

$$M^2x_1^2 = r^2(m_2^2 + m_3^2 + m_2m_3),$$

что влечет

$$r = \frac{Mx_1}{(m_2^2 + m_3^2 + m_2m_3)^{1/2}}.$$

Подстановка полученного соотношения в (1.1.433) дает

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_1 + \frac{GM_1}{x_1^3}\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}, \tag{1.1.434}$$

где

$$M_1 = \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2m_3)^{3/2}}{M^2}.$$

Уравнение (1.1.434) — это уравнение движения частицы массы 1 в поле тяготения частицы массой M_1. Аналогичным образом получаются два других уравнения:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{GM_2}{x_2^3}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}, \tag{1.1.435}$$

и

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_3 + \frac{GM_3}{x_3^3}\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}, \tag{1.1.436}$$

где

$$M_2 = \frac{(m_1^2 + m_3^2 + m_1m_3)^{3/2}}{M^2}, \quad M_3 = \frac{(m_1^2 + m_2^2 + m_1m_2)^{3/2}}{M^2}.$$

В результате мы свели исходную задачу к трем независимым уравнениям (1.1.434), (1.1.435) и (1.1.436), каждое из которых является задачей двух тел. Орбиты каждой частицы P_i — конические сечения.

Случай 2: точки находятся на одной прямой

Пусть теперь точки P_i располагаются на прямой с направляющим вектором $\boldsymbol{e}_{\langle\rho\rangle}$, вращающимся с угловой скоростью $\dot{\theta}$. Проекции сил F_i на эту прямую представлены выражениями

$$\begin{aligned}
F_1 &= Gm_2\frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} + Gm_3\frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3}, \\
F_2 &= Gm_1\frac{x_1 - x_2}{x_{12}^3} + Gm_3\frac{x_3 - x_2}{x_{23}^3}, \\
F_3 &= Gm_1\frac{x_1 - x_3}{x_{13}^3} + Gm_2\frac{x_2 - x_3}{x_{23}^3}.
\end{aligned}$$

Согласно предложению 1 (a), $x_i = (x_i)_0 f(t)$, что влечет соотношения

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{f^2}\left[Gm_2\frac{x_2-x_1}{x_{12}^3} + Gm_3\frac{x_3-x_1}{x_{13}^3}\right]_0 = -\frac{\kappa_1}{x_1^2},\\
F_2 &= \frac{1}{f^2}\left[Gm_1\frac{x_1-x_2}{x_{12}^3} + Gm_3\frac{x_3-x_2}{x_{23}^3}\right]_0 = -\frac{\kappa_2}{x_2^2},\\
F_3 &= \frac{1}{f^2}\left[Gm_1\frac{x_1-x_3}{x_{13}^3} + Gm_2\frac{x_2-x_3}{x_{23}^3}\right]_0 = -\frac{\kappa_2}{x_2^2},
\end{aligned}$$

где κ_i — постоянные, зависящие от гравитационной постоянной, масс, и начальных условий на x_i. Следовательно, уравнение движения каждой точки P_i имеет вид

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_i + \frac{\kappa_1}{x_i^3}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0},$$

и задача снова сведена к трем задачам двух тел. В частности, орбиты каждой точки — конические сечения.

Можно показать, что относительные расстояния между точками сохраняются. Действительно, согласно предложению 1 (c) существует функция $A(t)$, такая, что

$$GAx_i = F_i.$$

В развернутом виде,

$$Ax_1 = m_2\frac{x_2-x_1}{x_{12}^3} + m_3\frac{x_3-x_1}{x_{13}^3}, \tag{1.1.437}$$

$$Ax_2 = m_1\frac{x_1-x_2}{x_{12}^3} + m_3\frac{x_3-x_2}{x_{23}^3}, \tag{1.1.438}$$

$$Ax_3 = m_1\frac{x_1-x_3}{x_{13}^3} + m_2\frac{x_2-x_3}{x_{23}^3}. \tag{1.1.439}$$

Возможны следующие варианты взаимного расположения тел:

$$321, \quad 231, \quad 213,$$

отсчитываемые от центра масс. Рассмотрим первый из них (остальные случаи рассматриваются аналогично). Определим величину

$$X = \frac{x_2-x_3}{x_1-x_2} > 0,$$

тогда

$$1 + X = \frac{x_1-x_3}{x_2-x_2}.$$

Покажем, что рассматриваемому расположению частиц отвечает единственное и постоянное значение X. Вычитая (1.1.438) из (1.1.437) и (1.1.439) из (1.1.438), получаем[9]

$$Ax_{12} = -\frac{m_1+m_2}{x_{12}^2} + m_3\left(\frac{1}{x_{23}^2} - \frac{1}{x_{13}^2}\right), \tag{1.1.440}$$

$$Ax_{23} = -\frac{m_2+m_3}{x_{23}^2} + m_1\left(\frac{1}{x_{12}^2} - \frac{1}{x_{13}^2}\right). \tag{1.1.441}$$

Преобразуем уравнения (1.1.440) и (1.1.441):

$$Ax_{12}^3 = -(m_1+m_2) + m_3\left(\left(\frac{x_{12}}{x_{23}}\right)^2 - \left(\frac{x_{12}}{x_{13}}\right)^2\right),$$

$$Ax_{23}^3 = -(m_2+m_3) + m_1\left(\left(\frac{x_{23}}{x_{12}}\right)^2 - \left(\frac{x_{23}}{x_{13}}\right)^2\right).$$

Поскольку

$$X = \frac{x_{32}}{x_{21}}, \quad 1+X = \frac{x_{31}}{x_{21}},$$

то последние равенства примут вид

$$Ax_{12}^3 = -(m_1+m_2) + m_3\left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{(X+1)^2}\right),$$

$$Ax_{23}^3 = -(m_2+m_3) + m_1\left(X^2 - \left(\frac{X}{1+X}\right)^2\right).$$

Поделив второе уравнение на первое и приведя подобные, приходим к соотношению

$$X = \frac{-(m_2+m_3)(1+X)^2 + m_1X^2(1+X)^2 - m_1X^2}{-(m_1+m_2)X^2(1+X)^2 + m_3(1+X)^2 - m_3X^2}.$$

Окончательно, приходим к уравнению

$$(m_1+m_2)X^5 + (3m_1+2m_2)X^4 + (3m_1+m_2)X^3 - \\ - (m_2+3m_3)X^2 - (2m_2+3m_3)X - (m_2+m_3) = 0. \tag{1.1.442}$$

Из правила знаков Декарта вытекает, что уравнение (1.1.442) имеет ровно один положительный корень (поскольку коэффициенты при степенях меняют знак лишь один раз). Полученное значение X однозначно определяет взаимное расположение точек P_i.

[9]При выводе равенств (1.1.440) и (1.1.441) учтено, что поскольку уравнения записаны в проекции на прямую, то $x_{ij} = x_j - x_i$.

1.5. Искривленное пространство-время Ньютона

1.5.1. Классические силы инерции

Пусть движение точки $\boldsymbol{X}$ задается радиус-вектором $\boldsymbol{X}$ относительно подвижного фрейма. Точка отсчета фрейма задается (относительно неподвижного фрейма) радиус-вектором $\boldsymbol{X}_0$, а поворот – ортогональным тензором $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$). Тогда говорят, что X совершает сложное движение, которое определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Y}.$$

<Статическое изображение двух фреймов и векторов $\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{Y}$ в физическом и координатном пространствах>

Ортогональный тензор $\boldsymbol{R}$ может быть представлен различными способами. Нам удобно формула Родрига для конечных поворотов

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \sin\theta\, \boldsymbol{K} + (1 - \cos\theta)\boldsymbol{K}^2, \quad \boldsymbol{K}.$$

Здесь $\boldsymbol{K}$ — кососимметричный тензор, определяющий ось вращения

$$[\boldsymbol{k}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix},$$

а θ — угол поворота.

Скорость при сложном движении вычисляется дифференцированием по времени этого выражения, которое в результате правила Лейбница приводит к трем слагаемым:

$$\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{X}} = \dot{\boldsymbol{X}}_0 + \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{Y}}.$$

Полученное выражение можно преобразовать, используя тот факт, что $\boldsymbol{R}$ — ортогональный тензор. Для этого вначале определим вспомогательный тензор $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{R}},$$

который оказывается кососимметричным:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{R}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{R}}\right)^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R}.$$

но, поскольку

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$$

то, следовательно,

$$\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}=-\boldsymbol{R}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}=-\boldsymbol{A}.$$

Возвращаясь к выражению для скорости, преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V} &= \dot{\boldsymbol{X}}_0+\underbrace{\boldsymbol{R}\cdot\overbrace{\boldsymbol{R}^{-1}}^{}}_{\boldsymbol{I}}\overbrace{\cdot\dot{\boldsymbol{R}}}^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{Y}}\\
&= \dot{\boldsymbol{X}}_0+\boldsymbol{R}\cdot\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{Y}}\\
&= \underbrace{\dot{\boldsymbol{X}}_0+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{V}_e}+\underbrace{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{Y}}}_{\boldsymbol{V}_r}\\
&= \boldsymbol{V}_e+\boldsymbol{V}_r.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что любому кососимметричному тензору в трехмерном пространстве может быть поставлен в соответствие вектор:

$$\exists\omega\quad\forall\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}=\omega\times\boldsymbol{v}.$$

Этот вектор будем называть угловой скоростью вращения фрейма.

Скорость относительно подвижного фрейма может быть определена преобразованием $\boldsymbol{R}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{R}^{-1}\cdot(\boldsymbol{V}_e+\boldsymbol{V}_r)\\
&= \underbrace{\boldsymbol{R}^{-1}\cdot\vec{X}_0+\omega\times\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{v}_e}+\underbrace{\dot{\boldsymbol{Y}}}_{\boldsymbol{v}_r}\\
&= \boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r.
\end{aligned}$$

<Иллюстрация, показывающая в физическом и координатном (двух) пространствах векторы скорости>

Перейдем теперь к вычислению ускорения, выполняя двукратное дифференцирование $\boldsymbol{X}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \ddot{\boldsymbol{X}}\\
&= \ddot{\boldsymbol{X}}_0+\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{Y}}+\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{Y}}+\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\omega\times\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{R}\cdot\dot{\omega}\times\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{R}\cdot\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}}
\end{aligned}$$

Умножая некоторые слагаемые на тождественный оператор $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{-1}$ (что, очевидно, их не меняет)

$$\boldsymbol{A}=\ddot{\boldsymbol{X}}_0+\boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{Y}}+\underbrace{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{-1}}_{\boldsymbol{I}}\overbrace{\cdot\dot{\boldsymbol{R}}}^{\boldsymbol{A}}\dot{\boldsymbol{Y}}+\underbrace{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{-1}}_{\boldsymbol{I}}\overbrace{\cdot\dot{\boldsymbol{R}}}^{\boldsymbol{A}}\omega\times\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{R}\cdot\dot{\omega}\times\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{R}\cdot\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}}$$

и выделяя тензор $\boldsymbol{A}$, приходим к соотношению

$$\boldsymbol{A} = \ddot{\boldsymbol{X}}_0 + \boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{R}\cdot\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{Y}}}_{\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}}} + \boldsymbol{R}\cdot\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\omega\times\boldsymbol{Y}}_{\omega\times(\omega\times\boldsymbol{Y})} + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\omega}\times\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{R}\cdot\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}}$$

Воспользовавшись тем, что тензору $\boldsymbol{A}$ поставлен в соответствие вектор ω, запишем полученное выражение в несколько ином виде

$$\boldsymbol{A} = \ddot{\boldsymbol{X}}_0 + \boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{Y}} + \underline{\boldsymbol{R}\cdot\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}}} + \boldsymbol{R}\cdot(\omega\times(\omega\times\boldsymbol{Y})) + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\omega}\times\boldsymbol{Y} + \underline{\boldsymbol{R}\cdot\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}}}.$$

Осталось лишь привести подобные слагаемые (они подчеркнуты)

$$\boldsymbol{A} = \ddot{\boldsymbol{X}}_0 + \boldsymbol{R}\cdot\ddot{\boldsymbol{Y}} + 2\boldsymbol{R}\cdot\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{R}\cdot(\omega\times(\omega\times\boldsymbol{Y})) + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\omega}\times\boldsymbol{Y}.$$

Полученное выражение определяет ускорение в неподвижном фрейме по закону движения подвижного фрейма $\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{R}$ и закону движения точки $\boldsymbol{Y}$ относительно него. Ускорение относительно подвижного фрейма можно получить, как и ранее, преобразованием $\boldsymbol{R}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{R}^{-1}\cdot\ddot{\boldsymbol{X}}_0 \\ &= \boldsymbol{R}^{-1}\cdot\ddot{\boldsymbol{X}}_0 + \ddot{\boldsymbol{Y}} + 2\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}} + \omega\times(\omega\times\boldsymbol{Y}) + \dot{\omega}\times\boldsymbol{Y}. \end{aligned}$$

Теперь закон Ньютона может быть записан в виде

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{R}^{-1}\cdot\ddot{\boldsymbol{X}}_0 + m\ddot{\boldsymbol{Y}} + 2m\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}} + m\omega\times(\omega\times\boldsymbol{Y}) + m\dot{\omega}\times\boldsymbol{Y}.$$

Отдельные слагаемые в правой части уравнения имеют исторически обусловленные названия. Член

$$-2m\omega\times\dot{\boldsymbol{Y}}$$

называется силой Кориолиса,

$$-m\omega\times(\omega\times\boldsymbol{Y})$$

центробежной силой, а

$$-m\dot{\omega}\times\boldsymbol{Y}$$

силой Эйлера.

1.5.2. Криволинейные координаты

Несколько иную форму приобретают кинематические соотношения в криволинейных координатах. Особенность состоит в том, что вектор скорости удобно представлять в форме разложения по элементам локального базиса, который изменяется при переходе от точки к точке и, в этом смысле, является подвижным. Надо лишь иметь в виду, что движение локального базиса, в отличие от рассмотренного выше подвижного фрейма, не произвольно, а определяется функциями перехода между декартовыми и криволинейными координатами. Итак, пусть позиция точки задается криволинейными координатами $q^1(t)$, $q^2(t)$, $q^3(t)$, т.е.

$$\boldsymbol{X} = X(q^1(t), q^2(t), q^3(t))\boldsymbol{i} + Y(q^1(t), q^2(t), q^3(t))\boldsymbol{j} + Z(q^1(t), q^2(t), q^3(t))\boldsymbol{k}$$

<Иллюстрация физического и координатного пространств>

Тогда скорость может быть вычислена следующим образом

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{X}} &= \frac{\partial X}{\partial q^i}\dot{q}_i\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial Y}{\partial q^i}\dot{q}_i\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial Z}{\partial q^i}\dot{q}_i\,\boldsymbol{k} \\ &= \dot{q}_i \underbrace{\left(\frac{\partial X}{\partial q^i}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial Y}{\partial q^i}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial Z}{\partial q^i}\,\boldsymbol{k}\right)}_{\boldsymbol{e}_i} \\ &= \dot{q}^i\,\boldsymbol{e}_i,\end{aligned}$$

где выражение в скобках, очевидно, представляет собой разложение элементов локального базиса по декартовому. Соответственно, ускорение вычисляется как производная

$$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{V}} = \left(\dot{q}^i\boldsymbol{e}_i\right)^{\cdot} = \ddot{q}^i\boldsymbol{e}_i + \dot{q}^i\dot{q}^j\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q^j}$$

В полученном выражении можно выделить символы Кристоффеля. Для этого домножим производную базисного вектора на единичный тензор $\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}^k$

$$\boldsymbol{A} = \ddot{q}^i\boldsymbol{e}_i + \dot{q}^i\dot{q}^j\underbrace{\boldsymbol{e}_k \otimes \overbrace{\boldsymbol{e}^k}^{}}_{\boldsymbol{I}}\overbrace{\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q^j}}^{\Gamma^k_{ij}}$$

и выделим Γ^k_{ij}. Имеем:

$$\boldsymbol{A} = \ddot{q}^i\boldsymbol{e}_i + \dot{q}^i\dot{q}^j\boldsymbol{e}_k\Gamma^k_{ij}$$

После переобозначения немых индексов вынесем $\boldsymbol{e}_i$ за скобку:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \ddot{q}^i \boldsymbol{e}_i + \dot{q}^k \dot{q}^j \boldsymbol{e}_i \Gamma^i_{kj} \\ &= \boldsymbol{e}_i \left(\ddot{q}^i + \dot{q}^k \dot{q}^j \Gamma^i_{kj}\right).\end{aligned}$$

1.5.3. Попытка Лапласа

Полученное соотношение определяет ускорение в форме суммы двух слагаемых. Может ли второе слагаемое скрывать то, что мы воспринимаем как гравитационное поле? Другими словами, может ли случиться так, что мы ошибочно полагаем окружающий физический мир плоским, воспринимая его искривление как фиктивную силу, которую называем гравитацией? Это вопрос впервые был поставлен Лапласом "Может ли гравитация быть закодированной в кривизне пространства, так, что её действие на частицы сводися лишь к принуждению движения по "прямым"в этом пространстве?"

Несмотря на революционность вопроса, Лаплас получил отрицательный ответ на него. Поясним этот момент подробнее. Пусть на точку действует гравитационная сила и её движение в неподвижном (инерциальном) фрейме имеет вид

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F} = m_0 \boldsymbol{f},$$

Из принцип эквивалентности (который не столь тривиален, как кажется!) следует

$$(m = m_0) \Rightarrow \left(\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{f}\right).$$

В рамках теории ньютонова потенциала

$$-\frac{\partial}{\partial x^i} f^i = 4\pi\, G\, \rho,$$

где G — гравитационная постоянная, ρ — плотность распределения массы. Попробуем записать уравнения движения в некоторых (заранее неизвестных) криволинейных координатах

$$\ddot{q}^i + \dot{q}^k \dot{q}^j \Gamma^i_{kj} = f^i.$$

Можно ли подобрать координаты таким образом, что бы

$$\ddot{q}^I = \underbrace{f^i}_{=0?} - \dot{q}^k \dot{q}^j \Gamma^i_{kj},$$

а роль "силы"играли члены, определяемые символами Кристоффеля?

$$\ddot{q}^I = \underbrace{-\dot{q}^k \dot{q}^j \Gamma^i_{kj}}_{=f^i?}$$

Здесь ответ отрицательный, поскольку, предположив это, мы получим выражения для символов Кристоффеля, в которые явно входят производные криволинейных координат по времени. Поскольку гравитационная сила f^i не зависит от скорости, то мы должны были бы получить зависимость символов Кристоффеля от скорости, чего быть не может.

$$\left(f^i = -\dot{q}^k \dot{q}^j \Gamma^i_{kj}\right) \Rightarrow \left(\Gamma^i_{kj} = -\frac{f^i}{\dot{q}^k \dot{q}^j}\right)$$

Однако ситуацию спасает новый взгляд на движение с позиций четырехмерного пространства-времени.

1.5.4. Переход к четвертому измерению

1. Для рассуждений нам достаточно упрощенное представление о многообразии, которое полагается тривиальным (т.е. целиком покрываемым одной картой, которая однозначно определяет топологию $\mathbb{R}^n$ на нем). Тогда все, что нужно знать о многообразии, закодировано в картрирующем отображении

$$\varphi \,:\, \mathscr{M} \to \mathbb{R}^n$$

Мы специально оставили возможность изменять размерность n, поскольку, несмотря на то, что в реальном физическом мире $n = 4$, в демонстрационных целях удобно снижать её до 3 или даже 2. 2.Кривая на многообразии задается отображением

$$\gamma \,:\, \mathbb{R} \ni t \mapsto p \in \mathscr{M}.$$

Её координатное представление относительно выбранного картрирующего отображение имеет вид:

$$\varphi \circ \gamma \,:\, \mathbb{R} \ni t \mapsto (q^1, \ldots, q^n) \in \mathbb{R}^n.$$

3. Касательный вектор к кривой может быть записан в абстрактной форме

$$\boldsymbol{v}_\gamma := \dot{q}^i \partial_i,$$

либо, в терминах моделирующего вложения,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_\gamma &= \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}\left(X(q^1, q^2, \ldots, q^n)\boldsymbol{i} + Y(q^1, q^2, \ldots, q^n)\boldsymbol{j} + Z(q^1, q^2, \ldots, q^n)\boldsymbol{k}\right)\\ &= \dot{q}^i \boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

4. Наконец, связность, или ковариантная производная, характеризуются набором функций Γ^j_{in}:

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = \left(u^i \frac{\partial v_j}{\partial q^i} + u^i v^j \Gamma^j_{in}\right).$$

Важно отметить, что эти функции могут содержать физический смысл, и именно в них мы попытаемся закодировать гравитацию. Как Вы помните, подобная попытка один раз уже потерпела неудачу, но тогда мы пытались построить геометрическую теорию гравитации в трехмерном пространстве, а теперь – в четырехмерном пространстве-времени.

Итак, пространственно-временное многообразие населено кривыми, которые локально могут быть представлены касательными векторами. Прежде всего выделим среди всех кривых особые – автопараллельные. Это кривые, у которых все касательные векторы параллельны (переносятся параллельным переносом). В евклидовом пространстве такие кривые, очевидно, прямые. Именно они фигурируют в первом уравнении Ньютона. В пространстве с иной связностью всё может быть иначе.

Выделить автопараллельные – значит указать свойство, их характеризующее. то свойство – автопараллельность – определяется уравнением

$$\underbrace{\nabla_{\boldsymbol{v}_\gamma}\boldsymbol{v}_\gamma}_{\left(\ddot{\gamma}^j + \dot{\gamma}^m\dot{\gamma}^n\Gamma^j_{nm}\right)\partial_j} = 0$$

то есть

$$\ddot{\gamma}^j + \dot{\gamma}^m\dot{\gamma}^n\Gamma^j_{nm} = 0$$

Например, на сфере ($q^1 = \theta$, $q^2 = \varphi$)

$$\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta$$

уравнения автопараллельных принимают вид

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \Gamma^1_{22}\dot{\varphi}\dot{\varphi} &= \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0,\\ \ddot{\varphi} + 2\Gamma^2_{12}\dot{\varphi}\dot{\theta} &= \ddot{\varphi} + 2\cot\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0\end{aligned}$$

Одно из решений этого уравнения имеет вид

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi(t) = \omega\, t + \varphi_0, \quad \omega, \varphi_0 \in \mathbb{R}$$

Ясно, что это экваториальная кривая. Все другие экваториальные кривые тоже автопараллельны (вспомните сферические треугольники!).

1.5.5. Еще одна попытка геометризации гравитации

Предпримем еще одну попытку геометризации гравитации, теперь уже в 4D. Пусть движение точки определяется мировой линией

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(t, x^1(t), x^2(t), x^3(t)\big) := \big(\gamma^0(t), \gamma^1(t), \gamma^2(t), \gamma^3(t)\big)\,.$$

Для построения динамических уравнений воспользуемся копией классического уравнения Ньютона (в трехмерном подпространстве)

$$\ddot{\gamma}^i(t) = f^i(\boldsymbol{x}(t)), \quad i = 1, 2, 3.$$

и дополнительным уравнением, смысл которого станет ясен чуть позже, а пока его выбор продиктован желанием "что бы всё сошлось"

$$\ddot{\gamma}^0 = 0.$$

Из последнего уравнения (при определенных начальных условиях) следует

$$\dot{\gamma}^0 = 1.$$

Окончательно, полагая $f^0 = 0$, полную систему запишем в виде

$$\ddot{\gamma}^i - f^i \dot{\gamma}_0 \dot{\gamma}_0 = 0$$

или

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma^i_{mn} \dot{\gamma}_m \dot{\gamma}_n = 0$$

где

$$\Gamma^i_{00} = -f^i.$$

Теперь действительно все сошлось! Последние три уравнения, с одной стороны, часть уравнений для автопараллельных (с символами Кристоффеля, которые теперь, как положено, зависят только от координат), а с другой – с учетом переобозначения – уравнения Ньютона для гравитационного взаимодействия.

1.5.6. Кривизна пространства-времени

В чем особенность построенного таким образом 4D многообразия? Оно искривленное! Не правда ли, неожиданный результат? Мы все привыкли к тому, что классическая механика предполагает евклидовость, а тут такое! Но в этом нет ничего удивительного. Ведь искривление проявляется относительно дополнительного измерения, которое связано со временем. В классической механике время играет роль параметра и не связано с геометрией. Более точно, меру искривления характеризует тензор Римана, в котором только одна компонента отлична от нуля

$$R^i_{0j0} = -\partial_j f^i.$$

Свертка тензора Римана по двум индексам дает тензор Риччи, выражение для единственной отличной от нуля компоненты обладает явным физическим смыслом:

$$\mathrm{Ric}_{00} = -\partial_i f^i = 4\pi G\rho$$

то равенство можно записать иначе

$$\mathrm{Ric}_{00} = 8\pi G T_{00}, \quad T_{00} = \rho/2.$$

где T_{00} — компонента тензора энергии-импульса. А все последнее уравнение – прототип уравнения Эйнштейна, о котором мы будем говорить на следующей лекции.

1.5.7. Силы инерции и гравитация – псевдосилы

Несколько заключительных слов об уравнениях Ньютона в геометрической формулировке. В терминах автопараллельных они могут быть записаны в виде

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_\gamma} \boldsymbol{v}_\gamma = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$$

или, раскрывая выражение ковариантной производной,

$$(\gamma^a)'' + \Gamma^a_{nm}(\gamma^n)'(\gamma^m)' + 2\Gamma^a_{0m}(\gamma^0)'(\gamma^m)' + \Gamma^a_{00}(\gamma^0)'(\gamma^0)' = \frac{F^a}{m}, \quad a = 1, 2, 3$$

$$(\gamma^0)'' + \underbrace{\Gamma^0_{nm}}_{0}(\gamma^n)'(\gamma^m)' = 0, \quad a = 0.$$

Из последнего уравнения сразу следует

$$(\gamma^0)'' = 0$$

то есть

$$\gamma^0 = \alpha\lambda + \beta$$

Таким образом, λ — времяподобный параметр (с масштабом α). Относительно нового параметра уравнения принимают почти знакомый вид:

$$\ddot{\gamma}^a + \Gamma^a_{nm}\dot{\gamma}^n\dot{\gamma}^m + 2\Gamma^a_{0m}\dot{\gamma}^0\dot{\gamma}^m + \Gamma^a_{00}\dot{\gamma}^0\dot{\gamma}^0 = \frac{F^a}{\alpha^2 m}.$$

Член

$$\Gamma^a_{nm}\dot{\gamma}^n\dot{\gamma}^m$$

соотвествует члену, входящему в классические уравнения, записанные в криволинейных координатах,

$$2\Gamma^a_{0m}\dot{\gamma}^0\dot{\gamma}^m$$

членам, определяющим силы инерции, а член

$$\Gamma^a_{00}\dot{\gamma}^0\dot{\gamma}^0$$

не имеет аналога в классических уравнениях и соответствует искажению пространства-времени, которое проявляется в виде гравитационного взаимодействия. Заметим, что все эти слагаемые можно классифицировать как "псевдосилы".

Библиография