Основы общей алгебры

С. А. Лычев

а также Костя, Дима и Никита (KoDiNi)
и другие хорошие люди

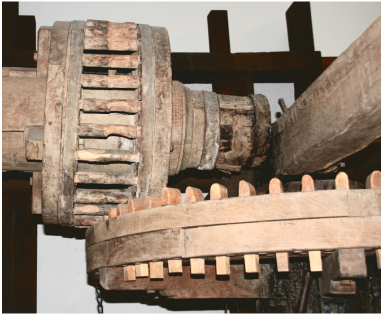
Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН

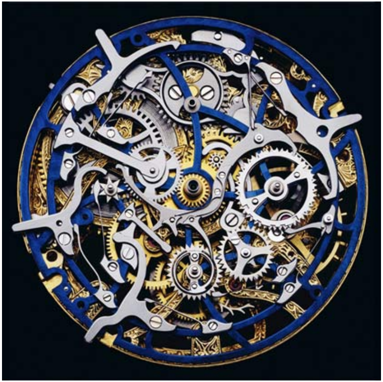
lychevsa@mail.ru

http://ipmnet.ru/~lychev

Москва, 2019

Введение





Арифметика

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Leopold Kronecker.

$$\varnothing$$

Арифметика

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Leopold Kronecker.

$$\varnothing \subset \{\varnothing\}$$

Арифметика

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
Leopold Kronecker.

$$\varnothing \subset \{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

Арифметика

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Leopold Kronecker.

$$\varnothing \subset \{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
Leopold Kronecker.

$$\varnothing \subset \{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \subset \ldots$$

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Leopold Kronecker.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varnothing & \subset & \{\varnothing\} & \subset & \{\varnothing,\{\varnothing\}\} & \subset & \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} & \subset & \ldots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & < & 1 & < & 2 & < & 3 & &
\end{array}$$

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Leopold Kronecker.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\varnothing & \subset & \{\varnothing\} & \subset & \{\varnothing,\{\varnothing\}\} & \subset & \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\} & \subset & \dots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & < & 1 & < & 2 & < & 3 & &
\end{array}$$

Схема аксиом Пеано

- $1 \in \mathbb{N}$;
- $x \in \mathbb{N} \Rightarrow S(x) \in \mathbb{N}$;
- $\nexists x \in \mathbb{N}: \ (S(x) = 1)$;
- $(S(b) = a \wedge S(c) = a) \Rightarrow b = c$;
- $P(1) \wedge \forall n\, (P(n) \Rightarrow P(S(n))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, (P(n))$.

- $x + 0 = x$;
- $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$.

Сложение:

	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

- $x \cdot 0 = 0$;
- $x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1$.

Умножение:

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

Теорема

$$(p+q)+r = p+(q+r)$$

Доказательство.

База индукции $r = 1$:

$$\big((p+q)' = p+q'\big) \Leftrightarrow \big((p+q)+1 = p+(q+1)\big)$$

Шаг индукции. Предположение:

$$(p+q)+r = p+(q+r).$$

Следствие:

$$(p+q)+r' = ((p+q)+r)' = (p+(q+r))' = p+(q+r)' = p+(q+r').$$

$\square$

Группы, кольца, поля

Определение

Пусть X — множество. Бинарная операция на X (внутренний закон композиции на X) — это отображение вида

$$\top : X \times X \to X.$$

Будем использовать обозначение

$$x \top y := \top(x, y).$$

Операция, не являющаяся бинарной

Соответствие $(m, n) \mapsto m - n$ на $\mathbb{N}$ не является бинарной операцией, поскольку ее результат, в общем случае, не лежит в $\mathbb{N}$.

Ассоциативность

Бинарная операция $\top$ на множестве X называется ассоциативной, если

$$\forall x,\ y,\ z \in X:\ (x \top y) \top z = x \top (y \top z).$$

Ассоциативность

Бинарная операция $\top$ на множестве X называется коммутативной, если

$$\forall x,\ y \in X:\ x \top y = y \top x.$$

Независимость ассоциативности и коммутативности

Пусть на $\mathbb{Z}$ задана операция $x \top y := -x - y$. Операция $\top$ коммутативна, но не ассоциативна, поскольку

$$(1 \top 2) \top 3 = 0 \neq 4 = 1 \top (2 \top 3).$$

Теорема

Если бинарная операция $\top$ на X ассоциативна, то результат ее последовательного применения к $n \in \mathbb{N}$ элементам множества X не зависит от расстановки скобок.

Доказательство. (Кострикин) Будем рассуждать индукцией по n. При $n = 1, 2$ доказывать нечего. При $n = 3$ утверждение теоремы совпадает с законом ассоциативности. Пусть теперь $n > 3$ и для числа элементов $< n$ справедливость утверждения установлена. Нужно лишь показать, что

$$(x_1 \top \cdots \top x_k) \top (x_{k+1} \top \cdots \top x_n) = (x_1 \top \cdots \top x_l) \top (x_{l+1} \top \cdots \top x_n)$$

для любых k, l, где $1 \leqslant k, \ l \leqslant n-1$. Была выписана только внешняя пара скобок, поскольку по предположению индукции расстановка внутренних скобок несущественна. Рассмотрим два случая:

(1) $k = n-1$. Тогда $(x_1 \top \cdots \top x_{n-1}) \top x_n = (\cdots (x_1 \top x_2) \top \cdots \top x_{n-1}) \top x_n$.

(2) $k < n-1$. Тогда, в силу ассоциативности,

$$\begin{aligned}
(x_1 \top \cdots \top x_k) \top (x_{k+1} \top \cdots \top x_n) = \\
&= (x_1 \top \cdots \top x_k) \top ((x_{k+1} \top \cdots \top x_{n-1}) \top x_n) = \\
&= ((x_1 \top \cdots \top x_k) \top (x_{k+1} \top \cdots \top x_{n-1})) \top x_n = \\
&= (\cdots ((\cdots (x_1 \top x_2) \top \cdots \top x_k) \top x_{k+1}) \top \cdots \top x_{n-1}) \top x_n.
\end{aligned}$$

К такому же виду приводится и правая часть доказываемого равенства. **Доказано.**

Определение

Структура $(X, \top)$, в которой X — множество, а $\top$ — ассоциативная бинарная операция на X, называется полугруппой.

Пример полугруппы

Структура $(n\mathbb{Z}, \cdot)$, в которой $n\mathbb{Z} := \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$ — множество целых чисел, делящихся на $n \in \mathbb{N}$, а $(\cdot)$ — умножение в $\mathbb{Z}$, является полугруппой.

Нейтральный элемент

Элемент $\mathbb{1} \in X$ называется нейтральным относительно бинарной операции $\top$, если

$$\forall x \in X: \; x \top \mathbb{1} = \mathbb{1} \top x = x.$$

Единственность нейтрального элемента

Пусть $\mathbb{1}, \mathbb{1}' \in X$ — нейтральные элементы относительно бинарной операции $\top$. Тогда

$$\mathbb{1}' = \mathbb{1}' \top \mathbb{1} = \mathbb{1}.$$

Моноид

Полугруппа $(X, \top)$, в которой $\top$ обладает нейтральным элементом, называется полугруппой с единицей, или моноидом.

Пример моноида #1

Пусть X — множество, а X^X — множество всех отображений X в себя. Тогда структура $(X^X, \circ)$, где $\circ$ — бинарная операция, порожденная операцией композиции отображений, является моноидом; единица представлена тождественным отображением Id_X.

Пример моноида #2

Пусть $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ — множество всех квадратных $n \times n$ матриц с вещественными элементами, а $(+)$ и $(.)$ — операции сложения и умножения матриц. Тогда $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), +)$ и $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), .)$ — моноиды. В первом случае нейтральным элементом является нулевая матрица 0, а во втором случае — единичная матрица E.

Обратимый элемент

Пусть $(X, \top)$ — моноид с нейтральным элементом $\mathbb{1}$. Элемент $x \in X$ называется обратимым относительно бинарной операции $\top$, если

$$\exists x' \in X : \ x \top x' = x' \top x = \mathbb{1}.$$

Если $x', x'' \in X$ таковы, что $x \top x' = x' \top x = \mathbb{1}$ и $x \top x'' = x'' \top x = \mathbb{1}$, то

$$x'' = \mathbb{1} \top x'' = (x' \top x) \top x'' = x' \top (x \top x'') = x' \top \mathbb{1} = x'.$$

Обратный элемент

Если $x \in X$ — обратимый элемент относительно операции $\top$, то тот единственный элемент $x' \in X$, для которого $x \top x' = x' \top x = \mathbb{1}$, обозначается через x^{-1} и называется обратным к x.

Определение

Моноид $(G, \top)$, все элементы которого обратимы, называется **группой**. Таким образом, группой называется структура $(G, \top)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

(G_0) $\top$ — бинарная операция на G.

(G_1) Операция $\top$ ассоциативна:

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G: \ (g_1 \top g_2) \top g_3 = g_1 \top (g_2 \top g_3).$$

(G_2) $\top$ обладает нейтральным элементом $\mathbb{1}$:

$$\forall g \in G: \ g \top \mathbb{1} = \mathbb{1} \top g = g.$$

(G_3) Для каждого элемента $g \in G$ существует обратный $g^{-1} \in G$:

$$g \top g^{-1} = g^{-1} \top g = \mathbb{1}.$$

Теорема

Пусть $(G, \top)$ — группа. Если $g\top h_1 = g\top h_2$, то $h_1 = h_2$.

Доказательство. Подействуем на обе части равенства $g\top h_1 = g\top h_2$ отображением

$$g^{-1}\top\cdot : \ G \to G, \quad g^{-1}\top\cdot(h) := g^{-1}\top h,$$

тогда из равенства аргументов следует равенство образов:

$$g^{-1}\top(g\top h_1) = g^{-1}\top(g\top h_2).$$

Используя свойство ассоциативности, получаем

$$(g^{-1}\top g)\top h_1 = (g^{-1}\top g)\top h_2.$$

Поскольку $g^{-1}\top g = \mathbb{1}$, то приходим к равенству $\mathbb{1}\top h_1 = \mathbb{1}\top h_2$, откуда $h_1 = h_2$. **Доказано.**

Определение

Пусть $(G, \top_G)$ — группа, а $H \subset G$ — множество. Структура $(H, \top_H)$ называется **подгруппой** группы $(G, \top_G)$, если:

(H_1) $\top_H$ — бинарная операция на H и

$$\forall h_1, h_2 \in H: \ h_1 \top_H h_2 = h_1 \top_G h_2.$$

(H_2) $\mathbb{1} \in H$, где $\mathbb{1}$ — единица группы G.

(H_3) Если $h \in H$, то $h^{-1} \in H$, где h^{-1} — элемент, обратный к h относительно $\top_G$.

Полная (общая) линейная группа

Пусть
$$\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}.$$
Тогда $(\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R}),\ .)$ — группа. Она называется полной (общей) линейной группой ранга n.

Специальная линейная группа

Пусть
$$\mathrm{SL}(n;\ \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$
Тогда $(\mathrm{SL}(n;\ \mathbb{R}),\ .)$ — подгруппа группы $(\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R}),\ .)$. Она называется специальной линейной группой ранга n.

Ортогональная группа

Положим

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R}) \mid A^T.A = E\},$$

тогда $(\mathrm{O}(n),\ .)$ — подгруппа $(\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R}),\ .)$. Она называется ортогональной группой ранга n.

Специальная ортогональная группа

Положим

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n;\ \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R}) \mid (A^T.A = E) \wedge (\det A = 1)\},$$

тогда $(\mathrm{SO}(n),\ .)$ — подгруппа $(\mathrm{O}(n),\ .)$, называемая специальной ортогональной группой ранга n. Например, в случае $n = 2$,

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R}) & \\
\mathrm{SL}(n;\ \mathbb{R}) \arrow[ur, dash, dashed, "\subset" description] & & \mathrm{O}(n) \arrow[ul, dash, dashed, "\supset" description] \\
 & \mathrm{SO}(n) \arrow[ul, dash, dashed, "\supset" description] \arrow[ur, dash, dashed, "\subset" description] &
\end{tikzcd}$$

Единичная окружность

Отождествляя $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ в силу биекции $(x, y) \mapsto x + iy$, рассмотрим единичную окружность $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ с центром в нуле как множество

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Тогда $(\mathbb{S}^1, \cdot)$, где $(\cdot)$ — умножение комплексных чисел, является группой. Для проверки того, что $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ — группа, достаточно заметить, что элемент $z \in \mathbb{S}^1$ имеет вид $z = e^{i\varphi}$, поэтому

- (G_0) Если $z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$, то $z_1 = e^{i\varphi_1}$, $z_2 = e^{i\varphi_2}$ и $z_1 \cdot z_2 = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \in \mathbb{S}^1$.
- (G_1) $(\cdot)$ — ассоциативная операция.
- (G_2) $\mathbb{1} = 1$.
- (G_3) Если $z = e^{i\varphi}$, то $z^{-1} = e^{-i\varphi} \in \mathbb{S}^1$.

Группа перестановок

Пусть $X_n = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Обозначим через S_n множество всевозможных биекций (перестановок)

$$\sigma : X_n \to X_n, \quad \sigma_i := \sigma(i).$$

Тогда $(S_n, \circ)$ — группа.

Группа диффеоморфизмов

Пусть M — гладкое многообразие, а $\mathrm{Diff}(M)$ — множество всех диффеоморфизмов $f : M \to M$, то есть, гладких биективных отображений, обратные к которым тоже гладкие. Тогда $(\mathrm{Diff}(M), \circ)$ — группа.

Произведение групп

Пусть $(G_1, \top_1)$ и $(G_2, \top_2)$ — группы. Определим бинарную операцию на $G_1 \times G_2$:

$$\top : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2, \ (a_1, a_2) \top (b_1, b_2) := (a_1 \top_1 b_1, a_2 \top_2 b_2).$$

Тогда $(G_1 \times G_2, \top)$ — группа. Пара $(\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2)$ является нейтральным элементом относительно $\top$. Далее, если $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$, то $(a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1})$.

Пример произведения групп

Множество $\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ раз}}$ называется *n-тором*. Как произведение групп, $\mathbb{T}^n$ — группа.

Определение

Группа $(G, \top)$ называется **коммутативной** или **абелевой**, если $\top$ — коммутативная операция

Примеры абелевых групп

Группы $(\mathbb{Z}, +)$ и $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ — абелевы.

Пример неабелевой группы

Группа $(\mathrm{GL}(n; \mathbb{R}), .)$ неабелева, поскольку произведение матриц некоммутативно.

Виды отображений

Пусть $(G_1, \top_1)$ и $(G_2, \top_2)$ — группы, а $f : G_1 \to G_2$ — отображение. Тогда

- f называется гомоморфизмом, если
$$\forall a, b \in G_1 : f(a \top_1 b) = f(a) \top_2 f(b),$$
- f называется изоморфизмом, если оно является биективным гомоморфизмом,
- f называется эндоморфизмом, если $G_1 = G_2$ и f — гомоморфизм,
- f называется автоморфизмом, если оно является биективным эндоморфизмом.

Примеры гомоморфизмов

Пусть $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тогда $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ — группа. Отображение

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*, \quad \exp(t) := e^t,$$

является гомоморфизмом групп $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, а отображение

$$\det : \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*,$$

является гомоморфизмом групп $(\mathrm{GL}(n; \mathbb{R}), .)$ и $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Определение

Пусть $(X, \top, \perp)$ — некоторая структура, в которой $\top$ и $\perp$ — бинарные операции. Операция $\perp$ называется дистрибутивной относительно $\top$, если

$$\forall x,\ y,\ z \in X:\ (x \top y) \perp z = (x \perp z) \top (y \perp z),$$
$$\forall x,\ y,\ z \in X:\ z \perp (x \top y) = (z \perp x) \top (z \perp y).$$

Пример дистрибутивной операции

Операция $(.)$ матричного умножения дистрибутивна относительно операции $(+)$ сложения матриц в $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Пример недистрибутивной операции

Пусть $(\mathbb{Z},\ +,\ \diamond)$, где $x \diamond y := x + y + xy$. Тогда $\diamond$ не дистрибутивно относительно $+$:

$$(1 + 2) \diamond 3 = 15 \neq 18 = (1 \diamond 3) + (2 \diamond 3).$$

Определение

Кольцом называется любая структура $(R, \top, \perp)$, в которой

- (R_1) подструктура $(R, \top)$ является абелевой группой;
- (R_2) подструктура $(R, \perp)$ является полугруппой;
- (R_3) выполняются соотношения дистрибутивности:

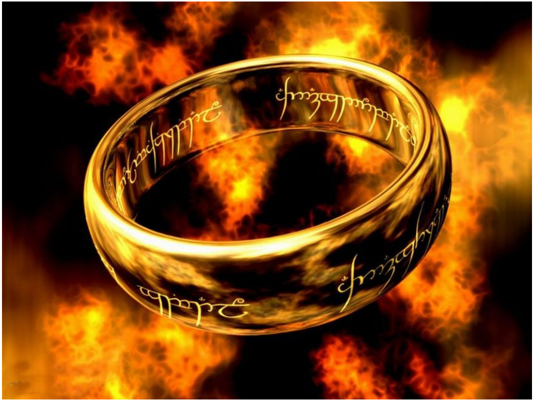
$$\forall x,\ y,\ z \in R:\ (x \top y) \perp z = (x \perp z) \top (y \perp z),$$
$$\forall x,\ y,\ z \in R:\ z \perp (x \top y) = (z \perp x) \top (z \perp y).$$

Коммутативное кольцо

Кольцо $(R, \top, \bot)$ называется **коммутативным**, если операция $\bot$ коммутативна.

Кольцо с единицей

Кольцо $(R, \top, \bot)$ называется **кольцом с единицей**, если $(R, \bot)$ — моноид.



(взято из `https://tolkienists.ru`)

Кольцо целых чисел

Структура $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — коммутативное кольцо с единицей. Нейтральным элементом группы $(\mathbb{Z}, +)$ является 0, а нейтральным элементом полугруппы $(\mathbb{Z}, \cdot)$ является 1.

Кольцо квадратных матриц

Структура $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), +, .)$ — кольцо с единицей. Оно некоммутативно, так как умножение матриц некоммутативно. Нейтральным элементом группы $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), +)$ является нулевая матрица 0, а нейтральным элементом полугруппы $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), .)$ является единичная матрица E.

Кольцо функций

Пусть X — множество, а $(R, \oplus, \odot)$ — кольцо. На множестве $R^X = \{X \to R\}$ всех отображений из X в R можно ввести структуру кольца. Определим поточечную сумму и поточечное произведение отображений $f, g \in R^X$:

$$(f + g)(x) := f(x) \oplus g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \odot g(x).$$

Тогда $(R^X, +, \cdot)$ — кольцо. Нейтральный элемент группы $(R^X, +)$ — отображение $0_X : x \mapsto 0$, где 0 — нейтральный элемент группы $(R, \oplus)$.

Кольца функций над $\mathbb{R}$

Структура $(\mathbb{R}^{[0,\,1]}, +, \cdot)$ — коммутативное кольцо с единицей. Оно содержит:

- кольцо $M([0,\,1];\,\mathbb{R})$ всех ограниченных функций;
- кольцо $C([0,\,1];\,\mathbb{R})$ всех непрерывных функций;
- кольцо $C^1([0,\,1];\,\mathbb{R})$ всех непрерывно–дифференцируемых функций,

и т.д.

$$\mathbb{R}^{[0,\,1]} \dashrightarrow\supset \dashrightarrow M([0,\,1];\,\mathbb{R}) \dashrightarrow\supset \dashrightarrow C([0,\,1];\,\mathbb{R}) \dashrightarrow\supset \dashrightarrow C^1([0,\,1];\,\mathbb{R}) \dashrightarrow\supset \dashrightarrow \ldots$$

Нуль и единица

Пусть $(R, +, \cdot)$ — кольцо. Нейтральный элемент относительно $(+)$ будем называть нулем и обозначать через 0, а нейтральный элемент относительно $(\cdot)$ будем называть единицей и обозначать через 1.

Делители нуля

Если $x \cdot y = 0$ при $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то x называют левым, а y — правым делителем нуля. В случае коммутативного кольца левый и правый делители нуля совпадают; тогда говорят о делителях нуля.

Пример делителей нуля

В кольце $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$ есть делители нуля:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение

Коммутативное кольцо $(F, +, \cdot)$ с $1 \neq 0$, каждый элемент $a \neq 0$ которого обратим относительно $(\cdot)$, называется **полем**. Таким образом, если обозначить $F^* := F \setminus \{0\}$, то $(F, +, \cdot)$ — поле, если

- (F_1) $(F, +)$ — абелева группа с нулем 0;
- (F_2) $(F^*, \cdot)$ — абелева группа с единицей 1;
- (F_3) операция $(\cdot)$ дистрибутивна относительно $(+)$.

Поле $\mathbb{Q}$ и его расширение

Структура $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ является полем. Здесь $(+)$ и $(\cdot)$ — операции сложения и умножения рациональных чисел. Расширим это поле на $\sqrt{2}$ (решение уравнения $x^2 = 2$):

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}.$$

На $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ определяются операции сложения

$$+ :\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \times \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$
$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2},$$

и умножения

$$\cdot :\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \times \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$
$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) := (a_1 a_2 + 2b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{2},$$

превращающие его в поле.

Определение

Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ — это расширение поля $\mathbb{R}$ на решение уравнения $x^2 + 1 = 0$. Пусть i — символ, обозначающий решение этого уравнения, тогда

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}(i) = \{x + iy \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

На $\mathbb{C}$ вводятся операции сложения

$$+ :\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$
$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

и умножения

$$\cdot :\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$
$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2),$$

определяющие структуру $(\mathbb{C},\ +,\ \cdot)$ — поле комплексных чисел.

Сопряжение

На $\mathbb{C}$ вводится операция

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C},$$

сопоставляющая каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопряженное к нему, $\bar{z} := x - iy$. Свойства сопряжения:

- $\forall z \in \mathbb{C}: \ \bar{\bar{z}} = z,$
- $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}: \ \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$
- $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}: \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$
- $\forall z \in \mathbb{C}: \ z \cdot \bar{z} \geqslant 0.$

Модули,

векторные пространства,

алгебры

Определение

Пусть $(R, \top, \perp)$ — коммутативное кольцо с единицей 1, а X — множество. Тогда *R-модулем* называется структура

$$(X,\, R,\, \top,\, \perp,\, +,\, \cdot),$$

в которой отображения

$$\begin{aligned} +:\; X \times X \to X, &\quad (x,\, y) \mapsto x + y,\\ \cdot:\; R \times X \to X, &\quad (r,\, y) \mapsto r \cdot y = ry, \end{aligned}$$

таковы, что

(i) $(X,\, +)$ — абелева группа;

(ii) для любых $r,\, q \in R$ и для любых $x,\, y \in X$ выполняются следующие равенства:

$$r \cdot (x + y) = (r \cdot x) + (r \cdot y), \quad (r \top q) \cdot x = (r \cdot x) + (q \cdot x),$$
$$(r \perp q) \cdot x = r \cdot (q \cdot x), \quad 1 \cdot x = x.$$

Векторное пространство

Вещественное (соответственно, комплексное) векторное пространство — это $\mathbb{R}$-модуль (соответственно, $\mathbb{C}$-модуль).

Модуль векторных полей на многообразии

Пусть M — гладкое многообразие, а $C^\infty(M)$ — кольцо вещественнозначных гладких функций, заданных на M. Тогда множество $\mathrm{Vec}(M)$ гладких векторных полей на M является $C^\infty(M)$-модулем относительно операций поточечного сложения

$$u + v : \ p \mapsto u_p + v_p,$$

и поточечного умножения на функцию

$$f \cdot u : \ p \mapsto f(p) u_p.$$

Векторное пространство над полем

Пусть $(F, \oplus, \odot)$ — поле с нулем 0 и единицей 1. Здесь $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Структура $(V, F, +, \cdot)$, в которой

- V — множество,
- $+ : V \times V \to V$ — внутренний закон композиции,
- $\cdot : F \times V \to V$ — внешний закон композиции,

называется векторным пространством над F, если для нее выполняются следующие аксиомы:

C^+ $\forall v, w \in V : v+w = w+v$,
A^+ $\forall u, v, w \in V : (u+v)+w = u+(v+w)$,
N^+ $\exists 0_V \in V \, \forall v \in V : v+0_V = v$,
I^+ $\forall v \in V \exists (-v) \in V : v+(-v) = 0_V$,
A $\forall \lambda, \mu \in F \, \forall v \in V : \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \odot \mu) \cdot v$,
D $\forall \lambda, \mu \in F \, \forall v \in V : (\lambda \oplus \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
D $\forall \lambda \in F \, \forall v, w \in V : \lambda \cdot v + \lambda \cdot w = \lambda \cdot (v+w)$,
U $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$.

Базис

Пусть $(V,\ F,\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство над полем F. Подмножество $B \subset V$ называется базисом, если

$$\forall v \in V\ \exists!\ \text{конечный}\ \{f_1,\ \ldots,\ f_n\} \subset B : \exists!\ v^1,\ \ldots,\ v^n :\ v = v^1 f_1 + \cdots + v^n f_n.$$

Размерность векторного пространства

Если для заданного векторного пространства существует базис B с конечным числом n элементов, то говорят, что векторное пространство n-мерное:

$$\dim V := n.$$

Компоненты вектора

Выбрав конкретный базис $(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ конечномерного векторного пространства $(V,\ F,\ +,\ \cdot)$, мы можем единственным образом сопоставить вектору упорядоченную n-ку чисел

$$v \mapsto (v^1,\ \ldots,\ v^n),$$

так, чтобы

$$v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n = v.$$

Число v^i называется i-й компонентой вектора в выбранном базисе.

Пространство F^n

На множестве

$$F^n := \{(x^1, \ldots, x^n) \mid x^i \in F, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

всех упорядоченных наборов из n элементов поля F вводится структура векторного пространства над F посредством операций покоординатного сложения и умножения на скаляр:

$$+ : \ F^n \times F^n \to F^n,$$
$$(x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n) := (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n);$$

$$\cdot : \ F \times F^n \to F^n,$$
$$\lambda \cdot (x^1, \ldots, x^n) := (\lambda x^1, \ldots, \lambda x^n).$$

Базис и размерность

Базис пространства F^n образуют n кортежей $I_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $k = 1, \ldots, n$, где 1 стоит на k-м месте. Поэтому $\dim F^n = n$.

Линейное отображение

Пусть $(V_1,\ F,\ +_1,\ \cdot_1)$ и $(V_2,\ F,\ +_2,\ \cdot_2)$ — векторные пространства над одним и тем же полем F. Отображение $L:\ V_1 \to V_2$ называется линейным, если

(i) $\forall u,\ v \in V_1 :\ L(u +_1 v) = L(u) +_2 L(v)$ (аддитивность),

(ii) $\forall u \in V_1\, \forall \lambda \in F :\ L(\lambda \cdot_1 u) = \lambda \cdot_2 L(u)$ (однородность).

Изоморфизм

Пусть $(V_1,\ F,\ +_1,\ \cdot_1)$ и $(V_2,\ F,\ +_2,\ \cdot_2)$ — векторные пространства над одним и тем же полем F. Отображение $\varphi:\ V_1 \to V_2$ называется изоморфизмом, если

(i) φ — биекция,

(ii) φ — линейное отображение.

Если $\varphi:\ V_1 \to V_2$ — изоморфизм, то пространства V_1 и V_2 называются изоморфными. Обозначение: $V_1 \cong V_2$.

Векторное пространство линейных отображений

Пусть $(V_1,\ F,\ +_1,\ \cdot_1)$ и $(V_2,\ F,\ +_2,\ \cdot_2)$ — векторные пространства над полем F. Рассмотрим множество линейных отображений

$$\mathrm{Lin}(V_1;\ V_2) := \{L \in V_2^{V_1} \mid L \text{ — линейное отображение}\}.$$

Наделим это множество операциями сложения и умножения на число так, чтобы получить векторное пространство:

$$\begin{gathered} +:\ \mathrm{Lin}(V_1;\ V_2) \times \mathrm{Lin}(V_1;\ V_2) \to \mathrm{Lin}(V_1;\ V_2), \\ (L_1,\ L_2) \mapsto L_1 + L_2, \\ (L_1 + L_2)(u) := L_1(u) +_2 L_2(u); \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \cdot:\ F \times \mathrm{Lin}(V_1;\ V_2) \to \mathrm{Lin}(V_1;\ V_2), \\ (\lambda,\ L) \mapsto \lambda \cdot L, \\ (\lambda \cdot L)(u) := \lambda \cdot_2 L(u). \end{gathered}$$

Структура $(\mathrm{Lin}(V_1;\ V_2),\ F,\ +,\ \cdot)$ — пространство линейных отображений.

k-линейные отображения

Пусть $V_1, \ldots, V_k$ и W — векторные пространства над F, а $L \in W^{V_1 \times \cdots \times V_k}$ — отображение. Зафиксируем k векторов $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, k$, и определим частные отображения:

$$L(v_1, \ldots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \ldots, v_k) \colon V_i \to W,$$
$$L(v_1, \ldots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \ldots, v_k) \colon u \mapsto L(v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_k).$$

Отображение $L \in W^{V_1 \times \cdots \times V_k}$ называется *k-линейным*, если для любых векторов $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, k$, и для любого $i = 1, \ldots, k$, частное отображение $L(v_1, \ldots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \ldots, v_k) \colon V_i \to W$ является линейным.

Пространство k-линейных отображений

Множество всех k-линейных отображений из $V_1 \times \cdots \times V_k$ в W обозначается через

$$\mathrm{Lin}_k(V_1, \ldots, V_k;\ W) := \{L \in W^{V_1 \times \cdots \times V_k} \mid L \text{ — } k\text{-линейное отображение}\}.$$

На $\mathrm{Lin}_k(V_1, \ldots, V_k;\ W)$ поточечно определяются операции сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$ на скаляр.

Теорема

Если V — n-мерное векторное пространство над полем F, то $V \cong F^n$.

Доказательство: Выберем базис $(e_i)_{i=1}^n$ пространства V. Тогда искомый изоморфизм определяется как

$$\Phi: \ V \to F^n, \quad \Phi(v) := (v^1, \ldots, v^n), \quad \text{для} \quad v = v^i e_i.$$

Доказано.

Следствие

Если V_1 и V_2 — два векторных пространства одинаковой размерности над одним и тем же полем F, то $V_1 \cong V_2$.

Доказательство: Пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Поскольку отношение изоморфности является отношением эквивалентности, то из $V_1 \cong F^n$ и $F^n \cong V_2$ следует $V_1 \cong V_2$. **Доказано.**

Определение

Пусть $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Скалярное произведение на V — это отображение

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющее условиям

(i) Симметричность. $\forall u, v \in V : (u|v) = (v|u)$.

(ii) Линейность по первому аргументу.

$$\forall v_1, v_2, w \in V \, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : ((\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)|w) = \lambda_1(v_1|w) + \lambda_2(v_2|w).$$

(iii) Положительная определенность. $\forall v \in V : (v|v) \geqslant 0$. Более того,

$$\forall v \in V : ((v|v) = 0 \Leftrightarrow v = 0).$$

Норма и угол

- Норма вектора v: число $\|v\| := \sqrt{(v|v)}$.
- Угол между векторами u и v: число $\varphi \in [0, \pi]$, такое, что $\cos\varphi = \dfrac{(u|v)}{\|u\|\|v\|}$.

Дуальный векторный базис

Пусть V — n-мерное векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)$. Если $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^n$ — базис V, то можно построить дуальный векторный базис $(\boldsymbol{e}^i)_{i=1}^n$. Он определяется равенствами

$$(\boldsymbol{e}^i|\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Обозначим $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда $n \times n$ матрица $[g_{ij}]$ симметрична, невырождена и $g = \det[g_{ij}] > 0$. Элементы дуального базиса $(\boldsymbol{e}^i)_{i=1}^n$ можно разложить по базису $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^n$:

$$\boldsymbol{e}^i = g^{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $[g^{ij}]$ обратная матрица: $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$.

Разложение вектора по исходному и дуальному базисам

Вектор $\boldsymbol{v} \in V$ можно разложить по любому из базисов $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^n$ и $(\boldsymbol{e}^i)_{i=1}^n$:

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v_i \boldsymbol{e}^i,$$

где

$$v^i = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}^i), \quad v_i = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

v^i — контравариантные компоненты $\boldsymbol{v}$, а v_i — ковариантные компоненты $\boldsymbol{v}$.

Теорема

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — векторное нормированное пространство над $\mathbb{R}$. Предположим, что норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет правилу параллелограмма:

$$\forall u,\ v \in V:\ 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2.$$

Тогда на V можно ввести скалярное произведение $(\cdot|\cdot)$ так, что $\|u\|^2 = (u|u)$ для всех $u \in V$.

Искомое скалярное произведение определяется согласно поляризационному тождеству:

$$(u|v) := \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2).$$

Определение

Пусть $(V, \mathbb{C}, +, \cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Скалярное произведение на V — это отображение

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C},$$

удовлетворяющее условиям

(i) Эрмитовость. $\forall u, v \in V : (u|v) = \overline{(v|u)}$.

(ii) Линейность по первому аргументу.

$$\forall v_1, v_2, w \in V\, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : ((\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)|w) = \lambda_1 (v_1|w) + \lambda_2 (v_2|w).$$

(iii) Положительная определенность. $\forall v \in V : (v|v) \geqslant 0$. Более того,

$$\forall v \in V : ((v|v) = 0 \Leftrightarrow v = 0).$$

Норма и угол

- Норма вектора v: число $\|v\| := \sqrt{(v|v)}$.
- Угол между векторами u и v: число $\varphi \in [0, \pi]$, такое, что $\cos\varphi = \dfrac{|(u|v)|}{\|u\|\|v\|}$.

Теорема

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — векторное нормированное пространство над $\mathbb{C}$. Предположим, что норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет правилу параллелограмма:

$$\forall u,\ v \in V:\ 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2.$$

Тогда на V можно ввести скалярное произведение $(\cdot|\cdot)$ так, что $\|u\|^2 = (u|u)$ для всех $u \in V$.

Искомое скалярное произведение определяется согласно поляризационному тождеству:

$$(u|v) := \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u-iv\|^2 - i\|u+iv\|^2).$$

Определение

Алгебра над полем F — это структура $(V,\ F,\ +,\ \cdot,\ [\cdot,\ \cdot])$, в которой подструктура $(V,\ F,\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство, а $[\cdot,\ \cdot]:\ V \times V \to V$ — билинейное (2-линейное) отображение.

Элементарная классификация алгебр

Алгебра $(V,\ F,\ +,\ \cdot,\ [\cdot,\ \cdot])$ называется

- коммутативной, если
$$\forall u,\ v \in V:\ [u,\ v] = [v,\ u],$$
- ассоциативной, если
$$\forall u,\ v,\ w \in V:\ [[u,\ v],\ w] = [u,\ [v,\ w]].$$

Алгебра Ли

Алгебра Ли над полем F — это алгебра $(\mathfrak{g},\ F,\ +,\ \cdot,\ [\cdot,\ \cdot])$ над F, такая, что

(1) $\forall A \in \mathfrak{g}:\ [A,\ A] = 0$ (антисимметричность),

(2) $\forall A,\ B,\ C \in \mathfrak{g}:\ [A,\ [B,\ C]] + [B,\ [C,\ A]] + [C,\ [A,\ B]] = 0$ (тождество Якоби).

В таком случае отображение $[\cdot,\ \cdot]:\ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ называется скобкой Ли.

Матричная алгебра Ли

Структура $(\mathrm{M}_n(F),\ F,\ +,\ \cdot,\ [\cdot,\ \cdot])$, в которой $(+)$ и $(\cdot)$ — операции сложения матриц и умножения их на скаляр, а $[\cdot,\ \cdot]$ — коммутатор,

$$[A,\ B] := A.B - B.A,$$

является алгеброй Ли.

Алгебра Ли геометрических векторов

Векторное пространство геометрических векторов с векторным произведением $[\cdot,\ \cdot]$ является алгеброй Ли.

Алгебра Ли векторных полей

Пусть M — гладкое многообразие. Векторное пространство $\mathrm{Vec}(M)$ всех гладких векторных полей является алгеброй Ли относительно скобки Ли

$$[\cdot,\ \cdot] : \ \mathrm{Vec}(M) \times \mathrm{Vec}(M) \to \mathrm{Vec}(M),$$
$$[u,\ v] \in \mathrm{Vec}(M), \quad [u,\ v](f) := u(vf) - v(uf).$$

Алгебра Ли эндоморфизмов

На векторном пространстве $\mathrm{Lin}(V;\ V)$ линейных отображений $L : \ V \to V$ (эндоморфизмов) можно ввести структуру алгебры Ли, определив коммутатор

$$[\cdot,\ \cdot] : \ \mathrm{Lin}(V;\ V) \times \mathrm{Lin}(V;\ V) \to \mathrm{Lin}(V;\ V),$$
$$[L,\ M] := L \circ M - M \circ L.$$

Алгебра кватернионов

Пусть $\mathbb{H}$ — вещественное векторное пространство с базисом $(\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Определим на $\mathbb{H}$ операцию умножения

$$\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H},$$

так, чтобы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 &= -\mathbf{1}, \\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} &= \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} &= \boldsymbol{i}, \\ \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} &= \boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Тогда $\mathbb{H}$ превращается в вещественную ассоциативную алгебру — алгебру кватернионов. Вектор $\mathbf{1}$ является единицей относительно умножения. Любой ненулевой элемент обратим относительно $(\cdot)$. В этой связи, $\mathbb{H}$ — «почти» поле (умножение некоммутативно).

Алгебра кватернионов и матрицы

Имеется соответствие

$$\mathbb{H} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C}),$$

определенное следующим образом:

$$\mathbf{1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{i} \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{j} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{k} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Левый $\mathbb{H}$-модуль

Левый $\mathbb{H}$-модуль — это вещественное векторное пространство V с внешней операцией

$$\cdot : \mathbb{H} \times V \to V, \quad (q, v) \mapsto q \cdot v,$$

удовлетворяющей условиям:

- $(\cdot)$ билинейна,
- $\forall p, q \in \mathbb{H} \, \forall v \in V : \; p \cdot (q \cdot v) = (pq) \cdot v.$

Правый $\mathbb{H}$-модуль

Правый $\mathbb{H}$-модуль — это вещественное векторное пространство V с внешней операцией

$$\cdot : V \times \mathbb{H} \to V, \quad (v, q) \mapsto v \cdot q,$$

удовлетворяющей условиям:

- $(\cdot)$ билинейна,
- $\forall p, q \in \mathbb{H} \, \forall v \in V : \; (v \cdot q) \cdot p = v \cdot (qp).$

Пространство ковекторов

Пусть $(V,\ F,\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство. Введем обозначение

$$V^* := \mathrm{Lin}(V;\ F) = \{\varphi \in F^V \mid \varphi \text{ — линейное отображение}\}.$$

Элементы множества V^* называются ковекторами или линейными функционалами.
На V^*, как и в общем случае линейных отображений, определяются поточечные операции сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$. Векторное пространство $(V^*,\ F,\ +,\ \cdot)$ называется векторным пространством, дуальным к V.

Теорема

Пусть $(V, F, +, \cdot)$ *— векторное пространство размерности* n*. Тогда сопряженное пространство* $(V^*, F, +, \cdot)$ *имеет ту же размерность* n*.*

Доказательство: Достаточно установить изоморфизм $V^* \cong F^n$. Выберем базис $(e_i)_{i=1}^n$ в V и определим отображение

$$\Phi: V^* \to F^n, \quad \Phi(\varphi) := (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

Отображение Φ линейно и инъективно. Для доказательства сюръективности выберем $w = (w_1, \dots, w_n) \in F^n$. Определим отображение

$$\varphi_w: V \to F, \quad \varphi_w(x) = x^i w_i,$$

где x^i — i-я компонента вектора x в базисе $(e_i)_{i=1}^n$. Тогда $\varphi_w \in V^*$ и $\Phi(\varphi_w) = w$, что влечет сюръективность Φ. Таким образом, Φ — изоморфизм. **Доказано.**

Следствие

Если V конечномерно, то $V \cong V^*$.

Пусть $(V, F, +, \cdot)$ — векторное пространство размерности n. Выберем базис $(e_i)_{i=1}^n$ в V. Изоморфизм

$$\Phi: V^* \to F^n, \quad \Phi(\varphi) := (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)),$$

определяет базис $(e^i)_{i=1}^n$ пространства V^* согласно равенствам

$$e^i := \Phi^{-1}(0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

где 1 стоит на i-м месте. Таким образом определенный базис $(e^i)_{i=1}^n$ удовлетворяет соотношениям

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}.$$

Определение

Базис $(e^i)_{i=1}^n$ называется дуальным базисом.

Определение

Вторым сопряженным называется векторное пространство

$$V^{**} := (V^*)^* = \{f \in F^{V^*} \mid f \text{ — линейное отображение}\}.$$

Как сопряженное к V^*, пространство V^{**} имеет одну и ту же с ним размерность.

Теорема

Пусть V — конечномерное векторное пространство. Тогда V и V^{**} канонически изоморфны.

Изоморфизм представлен каноническим отображением

$$\varepsilon : V \to V^{**}, \quad \varepsilon(u) = \varepsilon_u,$$

где $\varepsilon_u : V^* \to F$ — отображение, которое действует на ковектор ν по правилу

$$\varepsilon_u(\nu) := \nu(u).$$

Соглашение (для конечномерных пространств)

Вектор u отождествляется с функционалом ε_u и используется запись $u(\nu)$ вместо $\varepsilon_u(\nu)$.

Каноническое спаривание

Значение $\nu(u)$ ковектора ν на векторе u записывается в виде

$$\langle \nu,\ u\rangle = \langle u,\ \nu\rangle := \nu(u).$$

Теорема

Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)$. Для любого линейного функционала $\nu \in V^*$ существует единственный вектор $\boldsymbol{w} \in V$, такой, что

$$\forall \boldsymbol{v} \in V : \ \nu(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}).$$

Доказательство: 1. Единственность. Пусть $\nu \in V^*$. Предположим, что существуют по меньшей мере два вектора $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in V$, такие, что $\nu(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}_2)$, для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V$. Используя свойство линейности скалярного произведения, получаем, что $(\boldsymbol{v}|(\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2)) = 0$ для любого вектора $\boldsymbol{v} \in V$. В частности, это равенство выполняется для $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2$ и тогда свойство положительной определенности влечет, что $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2$. Единственность доказана.
2. Существование. Доказательство существования можно провести следующим способом. Пусть $\dim V = n$. Выберем базис $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$ пространства V и соответствующие дуальные базисы $(e^k)_{k=1}^n$ пространства V^* и $(\boldsymbol{e}^k)_{k=1}^n$ пространства V. Для ковектора $\nu \in V^*$ имеем $\nu = \nu_k e^k$. Если $\boldsymbol{v} \in V$, то $\nu(\boldsymbol{v}) = v^k \nu_k$, где $\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{e}_k$. Положим $\boldsymbol{w} := \nu_k \boldsymbol{e}^k$. Тогда $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = v^k \nu_k$ и $\boldsymbol{w}$ — искомый вектор. **Доказано.**

Музыкальные изоморфизмы

Взаимно обратные отображения

$$(\cdot)^\flat : V \to V^* \quad \text{и} \quad (\cdot)^\sharp : V^* \to V,$$

определенные соотношениями

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in V : &\quad \langle \boldsymbol{v}^\flat,\ \boldsymbol{w} \rangle = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}), \\ \forall \boldsymbol{w} \in V\, \forall \nu \in V^* : &\quad (\nu^\sharp|\boldsymbol{w}) = \langle \nu,\ \boldsymbol{w} \rangle, \end{aligned}$$

являются изоморфизмами, зависящими от скалярного произведения. Они называются музыкальными изоморфизмами.

Тензорные произведения векторных пространств

Определение

Пусть V — конечномерное векторное пространство. Подмножество $U \subset V$, рассматриваемое с ограничениями на нем операций $(+)$ и $(\cdot)$, называется подпространством V, если оно замкнуто относительно этих ограничений, то есть,

$$\forall u,\, v \in U:\ u + v \in U,$$
$$\forall \lambda \in F\, \forall u \in U:\ \lambda u \in U.$$

Отношение эквивалентности

Пусть U — подпространство векторного пространства V. Рассмотрим отношение $\sim_U$ на V:

$$\forall u, v \in V: \ (u \sim_U v) \Leftrightarrow (u - v \in U).$$

Отношение $\sim_U$ — отношение эквивалентности на V.

Классы эквивалентности

Пусть $x \in V$, а $[x]$ — соответствующий класс эквивалентности. Тогда

$$[x] = \{x + u \mid u \in U\}.$$

Фактормножество

Фактормножество V по отношению $\sim_U$ обозначается через

$$V/U.$$

Операции на фактормножестве

Пусть $a,\ b \in V/U$, а $\lambda \in F$. Выбирая $u \in a$, $v \in b$, положим

$$\begin{aligned} a + b &:= [u + v], \\ \lambda a &:= [\lambda u]. \end{aligned}$$

Эти определения не зависят от представителей u и v. Таким образом, корректно определены операции

$$\begin{aligned} + &: \ V/U \times V/U \to V/U, \quad (a,\ b) \mapsto a + b, \\ \cdot &: \ F \times V/U \to V/U, \quad (\lambda,\ a) \mapsto \lambda a. \end{aligned}$$

Определение

Векторное пространство $(V/U,\ F,\ +,\ \cdot)$ называется факторпространством.

Пространство формальных линейных комбинаций

Пусть X — множество, а F — поле. Формальной линейной комбинацией элементов X называется скалярнозначная функция $f : X \to F$, такая, что множество

$$K_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = f^{-1}(F \setminus \{0\})$$

точек, в которых f отлична от нуля, является конечным. Множество $M(X)$ всех таких функций образует векторное пространство относительно поточечных операций сложения и умножения на число.

Базис $M(X)$

Базис $M(X)$ образован функциями $(\delta_x)_{x\in X}$ из $M(X)$, определенными следующим образом:

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1, & y = x, \\ 0, & y \neq x. \end{cases}$$

Каждый элемент $f \in M(X)$ имеет единственное разложение $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}$, где $x_1, \ldots, x_k$ — элементы X, для которых $f(x) \neq 0$, а $a_i = f(x_i)$. По определению K_f, эта сумма состоит из конечного числа слагаемых.

Соглашение

Как правило, функция δ_x отождествляется с x и множество X рассматривается как подмножество $M(X)$. В этой связи, пишут $f = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$.

Пространство $M(V_1 \times V_2)$

Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над одним и тем же полем F. Множество $V_1 \times V_2$ состоит из всевозможных упорядоченных пар (v_1, v_2), $v_i \in V_i$, и на нем может быть задана структура векторного пространства $M(V_1 \times V_2)$ формальных линейных комбинаций. Тогда выражения (где v_i, v_i', $v_i'' \in V_i$, $\lambda \in F$)

$$\begin{gathered}(v_1' + v_1'', v_2) - (v_1', v_2) - (v_1'', v_2), \quad (v_1, v_2' + v_2'') - (v_1, v_2') - (v_1, v_2''), \\ \lambda(v_1, v_2) - (\lambda v_1, v_2), \quad \lambda(v_1, v_2) - (v_1, \lambda v_2),\end{gathered} \tag{$\bigstar$}$$

отличны от нуля.

Определение

Рассмотрим пространство $M(V_1 \times V_2)$ всевозможных формальных линейных комбинаций. Пусть N — его подпространство, натянутое на всевозможные разности ($\bigstar$). Тензорным произведением $V_1 \otimes V_2$ называется факторпространство

$$V_1 \otimes V_2 := M(V_1 \times V_2)/N.$$

Тензорное произведение векторов

Класс эквивалентности элемента $(v_1,\ v_2)$ обозначается через

$$v_1 \otimes v_2 := [(v_1,\ v_2)],$$

и называется тензорным произведением v_1 и v_2. Для тензорного произведения $\otimes$ справедливы равенства

$$(v_1' + v_1'') \otimes v_2 = v_1' \otimes v_2 + v_1'' \otimes v_2, \quad v_1 \otimes (v_2' + v_2'') = v_1 \otimes v_2' + v_1 \otimes v_2'',$$
$$\lambda(v_1 \otimes v_2) = (\lambda v_1) \otimes v_2, \quad \lambda(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes (\lambda v_2).$$

Ассоциативность

Пусть U, V, W — три векторных пространства над F. Поскольку $(U \otimes V) \otimes W$ канонически изоморфно $U \otimes (V \otimes W)$, то можно записать $U \otimes V \otimes W$ для этих множеств и $u \otimes v \otimes w$ для их элементов. Таким образом, индуктивно приходим к произведениям $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ и $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ для k векторных пространств и их элементов.

Базис и размерность

Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над F размерностей n_1 и n_2. Если $(e_j^{(i)})_{j=1}^{n_i}$ — базисы V_i, $i = 1, 2$, то совокупность

$$(e_{i_1}^{(1)} \otimes e_{i_2}^{(2)})_{1 \leqslant i_1 \leqslant n_1,\, 1 \leqslant i_2 \leqslant n_2},$$

образует базис $V_1 \otimes V_2$. Таким образом, $\dim(V_1 \otimes V_2) = n_1 n_2$.

Тензорное произведение и линейные отображения

Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — конечномерные векторные пространства над F. Тогда имеются следующие канонические изоморфизмы:

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \cong \mathrm{Lin}_k(V_1^*, \ldots, V_k^*; F),$$
$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \cong \mathrm{Lin}_k(V_1, \ldots, V_k; F).$$

Таким образом, тензорное произведение k векторных пространств канонически изоморфно векторному пространству k-линейных отображений.

Типовые пространства

- Пространство $T^k(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ раз}}$ контравариантных тензоров ранга k.

  Базис: $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})_{1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant n}$. Здесь $(e_i)_{i=1}^n$ — базис V.
- Пространство $T^k(V^*) := \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ раз}}$ ковариантных тензоров ранга k.

  Базис: $(\vartheta^{i_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{i_k})_{1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant n}$. Здесь $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — базис V^*.
- Пространство смешанных тензоров типа (k, l):

$$T^{(k,\, l)}(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ раз}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{l \text{ раз}}.$$

  Базис этого пространства имеет вид:

$$(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes \vartheta^{j_1} \otimes \dots \otimes \vartheta^{j_l})_{1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant n, \quad 1 \leqslant j_1, \dots, j_l \leqslant n},$$

  где $(e_i)_{i=1}^n$ — базис V, а $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — дуальный базис V^*.

Соглашения

$$T^0(V) = T^0(V^*) := F,$$
$$T^{(0,\,k)}(V) = T^k(V^*), \quad T^{(k,\,0)}(V) = T^k(V), \quad \dots$$

Внешние формы

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$. В силу канонического изоморфизма удобно рассматривать каждый элемент $T \in T^k(V^*)$ как k-линейное отображение

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ раз}} \to \mathbb{R}.$$

Определение

Отображение $\omega \in T^k(V^*)$ называется внешней k-формой (или, антисимметричным тензором, если для любых векторов $u_1, \ldots, u_k \in V$ и любой пары различных индексов $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ справедливо равенство

$$\omega(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_k) = -\omega(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_k).$$

Множество $\Lambda^k(V^*) \subset T^k(V^*)$ всех внешних k-форм является подпространством $T^k(V^*)$.

Операция $\otimes$ не переводит внешние формы во внешнюю форму!

Перестановки

Напомним, что перестановка — это биекция $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть S_k — множество всех перестановок. Вместе с операцией композиции $\circ$ оно образует группу. Для любого тензора $T \in T^k(V^*)$ перестановка $\sigma \in S_k$ определяет новый тензор ${}^{\sigma}T \in T^k(V^*)$:

$$\forall u_1, \ldots, u_k \in V : {}^{\sigma}T(u_1, \ldots, u_k) := T(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}).$$

Для перестановки $\sigma \in S_k$ ее знак определяется как число

$$\operatorname{sgn}\sigma := \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ четная}, \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетная}. \end{cases}$$

Эквивалентное определение внешней формы: $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ если и только если $\omega \in T^k(V^*)$ и для любых векторов $u_1, \ldots, u_k \in V$, и любой перестановки $\sigma \in S_k$ справедливо равенство

$$\omega(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\omega(u_1, \ldots, u_k).$$

Операция альтернирования

Отображение $\mathrm{Alt}: T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$,

$$\mathrm{Alt}\, T := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma)({}^{\sigma} T),$$

называется **альтернированием**. В явном виде, для всех $u_1, \ldots, u_k \in V$ имеем

$$\mathrm{Alt}\, T(u_1, \ldots, u_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) T(u_1, \ldots, u_k).$$

Определение внешнего произведения

Пусть $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ и $\eta \in \Lambda^l(V^*)$. Тогда их **внешнее произведение** $\omega \wedge \eta$ определяется как

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}\,(\omega \otimes \eta).$$

Частный случай: ковекторы

Если α, $\beta \in V^*$, то
$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha.$$

Приходим к операции $\wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^l(V^*) \to \Lambda^{k+l}(V^*)$. Ее свойства:

($\wedge_1$) Билинейность. Для $\omega,\ \omega' \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta,\ \eta' \in \Lambda^l(V^*)$ и $a,\ a' \in \mathbb{R}$,

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$
$$\omega \wedge (a\eta + a'\eta') = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega \wedge \eta').$$

($\wedge_2$) Ассоциативность. Для $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ и $\mu \in \Lambda^r(V^*)$,

$$\omega \wedge (\eta \wedge \mu) = (\omega \wedge \eta) \wedge \mu.$$

($\wedge_3$) Антикоммутативность. Для $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^l(V^*)$,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

($\wedge_4$) Если $\nu^1, \ldots, \nu^k \in V^*$ и $u_1, \ldots, u_k \in V$, то

$$\nu^1 \wedge \cdots \wedge \nu^k(u_1, \ldots, u_k) = \det[\nu^i(u_j)].$$

Пусть $(e_i)_{i=1}^n$ — базис V, а $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — базис V^*, дуальный к $(e_i)_{i=1}^n$. Совокупность

$$(\vartheta^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{i_k})_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n}$$

образует базис $\Lambda^k(V^*)$. Для каждой внешней k-формы ω справедливо разложение:

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k} \vartheta^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{i_k},$$

где $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. В этой связи, $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$.

Для $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ и векторов $u_1, \ldots, u_k \in V$ имеется связь между значением внешней k-формы и определителем:

$$\omega(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k} \begin{vmatrix} u_1^{i_1} & \ldots & u_1^{i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_k^{i_1} & \ldots & u_k^{i_k} \end{vmatrix},$$

где $\vartheta^{i_j}(u_l) = u_l^j$. В частности, для $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ и векторов $u_1, \ldots, u_n \in V$ имеем

$$\omega(u_1, \ldots, u_n) = \omega_{1\ldots n} \begin{vmatrix} u_1^1 & \ldots & u_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n^1 & \ldots & u_n^n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, формализм внешнего произведения, как и исчисление внешних форм в целом, тесно связаны с теорией определителей, развитие которой привело к появлению геометрических концепций ориентированной площади и объема.

Литература

Литература

Кострикин А.И.
Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры
ФИЗМАТЛИТ, 2004

Кострикин А.И.
Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра
ФИЗМАТЛИТ, 2000

Кострикин А.И., Манин Ю.И.
Линейная алгебра и геометрия
Наука, 1986

Халмош П.
Конечномерные векторные пространства
ГИФМЛ, 1963

Бурбаки Н.
Алгебра. Часть 1. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра
ГИФМЛ, 1962