

Нелинейная механика деформируемого твёрдого тела

Теоретическая часть

С. А. Лычев

Составители презентации: С. А. Лычев и К. Г. Койфман

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН
Москва

lychevsa@mail.ru

<http://ipmnet.ru/~lychev>

19 апреля 2017 г.

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразиие физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Тело как топологическое пространство

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразиие физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Тело и физическое пространство

■ Работаем с двумя объектами — телом и физическим пространством. Наблюдения происходят над «воплощениями» тела в физическом пространстве.

■ Тело, само по себе, не обязано повторять полностью геометрическую структуру физического пространства. В эксперименте мы наблюдаем лишь деформированные образы этого тела. Эта мысль аллегорически указана в работе Эпштейна: «Тело пребывает в платоновом мире чистых идей, который мы никогда не сможем увидеть, однако проявления этого мира мы ощущаем в облике конфигураций, т.е. «воплощений» тела в физическом пространстве».

Noll, W., A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. Arch. Rational Mech. Anal. 2,197-226 (1958).

*A Mathematical Theory
of the Mechanical Behavior of Continuous Media*

WALTER NOLL

Communicated by C. TRUESDELL

Contents		Page
1. Introduction		198
I. Local kinematics		
2. Basic concepts		200
3. Deformations and linear transformations		200
4. Local configurations		202
5. Gradients		203
6. Rotation and strain tensors		204
7. Histories		205
8. Rate of strain and spin		205
9. Rational expressions for the rates		206
II. The general constitutive equation		
10. Basic concepts		207
11. The principle of objectivity of material properties		208
12. The principle of determinism for the stress		209
13. The general constitutive equation		210
14. Material isomorphisms		211
15. Constitutive functionals		212
16. The local isotropy group		213

Основное соображение

Тело \mathfrak{B} — это множество материальных точек $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \dots$. Каждая материальная точка «соседствует» с другими материальными точками, непрерывно заполняющими ее «окрестность». Это заполнение подобно заполнению интервала вещественной оси действительными числами.

Идея «соседства» тесно связана с понятием топологической структуры. Топологическая структура (или, короче, топология), задаваемая на множестве, позволяет формализовать понятие близости между элементами множества. Т.е. придается точный смысл высказыванию «такое то свойство выполняется для всех точек, достаточно близких к точке X ». Множество точек, обладающее этим свойством, образует некоторую окрестность элемента X в данной топологии.

Определение топологической структуры

Множество \mathfrak{B} наделено топологической структурой (или, короче, **топологией**), если каждому элементу $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ отнесено множество $\mathcal{N}(\mathfrak{X})$ подмножеств \mathfrak{B} , называемых **окрестностями** \mathfrak{X} , которое удовлетворяет следующим условиям:

- (i) элемент \mathfrak{X} принадлежит каждому множеству из $\mathcal{N}(\mathfrak{X})$;
- (ii) всякое подмножество \mathfrak{B} , содержащее какое-нибудь множество из $\mathcal{N}(\mathfrak{X})$, принадлежит $\mathcal{N}(\mathfrak{X})$;
- (iii) пересечение конечного числа элементов из $\mathcal{N}(\mathfrak{X})$ само будет элементом из $\mathcal{N}(\mathfrak{X})$;
- (iv) для каждого $V \in \mathcal{N}(\mathfrak{X})$ существует $W \in \mathcal{N}(\mathfrak{X})$, такое, что $V \in \mathcal{N}(\mathfrak{W})$ для любого $\mathfrak{W} \in W$.

Замечание

Из условия (iv) следует, что $W \subset V$.

Открытое множество

В рамках определенной на \mathfrak{B} топологической структуры определяются множества специального вида — открытые множества. Множество $O \subset \mathfrak{B}$ называется **открытым** в \mathfrak{B} , если оно является окрестностью каждой своей точки:

$$\forall x \in O \quad (O \in \mathcal{N}(x)).$$

Будем обозначать совокупность всех открытых в \mathfrak{B} множеств через \mathfrak{S} , или $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$, если хотим указать \mathfrak{B} явно.

Свойства открытых множеств

- (i) $\emptyset \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{B} \in \mathfrak{S}$;
- (ii) объединение **любого** семейства элементов из \mathfrak{S} есть элемент \mathfrak{S} ;
- (iii) пересечение **конечного** семейства элементов из \mathfrak{S} есть элемент \mathfrak{S} .

Свойство окрестности

Пусть $V \in \mathcal{N}(\mathfrak{X})$. Тогда существует $O \in \mathfrak{S}$, такое, что

$$\mathfrak{X} \in O \subset V.$$

Замкнутое множество

Множество $F \subset \mathfrak{B}$ называется **замкнутым** в \mathfrak{B} , если $\mathfrak{B} \setminus F \in \mathfrak{G}$.

Будем обозначать совокупность всех замкнутых в \mathfrak{B} множеств через \mathfrak{D} , или $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}$, если хотим указать \mathfrak{B} явно.

Свойства замкнутых множеств

- (i) $\emptyset \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B} \in \mathfrak{D}$;
- (ii) объединение **конечного** семейства элементов из \mathfrak{D} есть элемент \mathfrak{D} ;
- (iii) пересечение **любого** семейства элементов из \mathfrak{D} есть элемент \mathfrak{D} .

Замечание

■ Топологическую структуру на \mathfrak{B} можно задавать одним из эквивалентных способов, указывая семейство $\{\mathcal{N}(\mathfrak{X})\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$, либо указывая $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ или $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}$. Доказательство эквивалентности определений топологических структур можно найти в *Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры.* — М.: Наука, 1968. — 275 с. (Глава I, §1)

■ Множество \mathfrak{B} , вместе со своей топологической структурой называется **топологическим пространством**. По отношению к нему \mathfrak{B} — **носитель** топологического пространства.

■ В зависимости от способа задания топологической структуры на \mathfrak{B} , соответствующее топологическое пространство обозначается одним из трех способов:

$$(\mathfrak{B}, \{\mathcal{N}(\mathfrak{X})\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}), \quad \text{или} \quad (\mathfrak{B}, \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}), \quad \text{или} \quad (\mathfrak{B}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}).$$

Таким образом, математическая формализация основного соображения выглядит следующим образом: предполагается, что тело \mathfrak{B} наделено некоторой топологической структурой. Помимо этого, мощность \mathfrak{B} равна мощности континуума, т.е. мощности \mathbb{R} .

Относительно топологической структуры на \mathfrak{B} сделаем два предположения. Первое из них имеет вид:

Предположение I

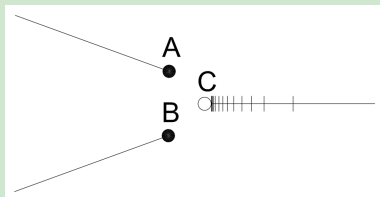
Топологическое пространство $(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа: любые две различные точки пространства имеют непересекающиеся окрестности.

Следствия:

- (i) любое конечное подмножество \mathfrak{B} замкнуто;
- (ii) если последовательность точек \mathfrak{B} сходится, то этот предел единственный.

Пример нехаусдорфова топологического пространства

Пусть $(-\infty, A]$, $(-\infty, B]$, $(C, +\infty)$, $A \neq B \neq C$ — числовые промежутки, лежащие на разных прямых. В их объединении введем топологию: окрестности точек на множестве $(-\infty, A) \cup (-\infty, B) \cup (C, +\infty)$ такие же, как на вещественной прямой. Окрестностями точек A и B назовем множества $(A - \varepsilon, C + \varepsilon)$, $(B - \varepsilon, C + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Тогда точки A и B не имеют непересекающихся окрестностей, и, следовательно, неотделимы.



База топологии

Базой топологического пространства $(\mathfrak{B}, \mathfrak{S})$ называется всякая совокупность $\mathcal{B} \subset \mathfrak{S}$ открытых множеств, такая, что любой элемент \mathfrak{S} является объединением некоторого семейства элементов из \mathcal{B} .

Критерий базы

■ Пусть \mathcal{B} — некоторая совокупность подмножеств \mathfrak{B} . Оно является базой для некоторой топологии на \mathfrak{B} тогда и только тогда, когда \mathcal{B} удовлетворяет следующим условиям:

① $\mathfrak{B} = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U;$

② Для любых $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ и каждого $x \in U_1 \cap U_2$ существует $U_3 \in \mathcal{B}$, такое, что $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

■ В доказательстве теоремы явно строится нужная топология. Это всевозможные объединения элементов \mathcal{B} .

Предположение II

Топологическое пространство $(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, т.е. имеет счетную базу (мощность базы равна мощности \mathbb{N}).

Следствия:

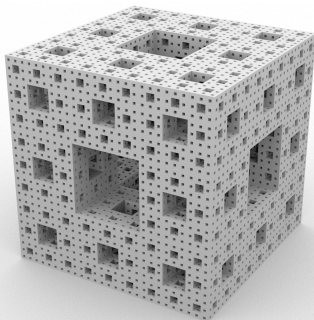
- (i) пространство $(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ сепарабельно (наличие счетного, всюду плотного подмножества);
- (ii) для $(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ справедлива **теорема Линделёфа**: Если топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности, то из всякого открытого покрытия этого пространства можно выделить не более чем счётное подпокрытие.

Соображение о размерности тела

Тело \mathfrak{B} имеет в каждой своей точке одну и ту же топологическую размерность Менгера-Урысона.

Таким образом, рассматриваются трехмерные тела, двумерные материальные поверхности (мембраны) и нити.

Следующий пример не удовлетворяет соображению о размерности (губка Менгера):



Alexander S. Balankin, A continuum framework for mechanics of fractal materials I: from fractional space to continuum with fractal metric. The European Physical Journal B, April 2015.

Eur. Phys. J. B (2015) 88: 90
DOI: 10.1140/epjyb/e2015-60189-y

THE EUROPEAN
PHYSICAL JOURNAL B

Regular Article

A continuum framework for mechanics of fractal materials I: from fractional space to continuum with fractal metric

Alexander S. Balankin*

Grupo "Mecánica Fractal", ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México D.F. 07738, Mexico

Received 12 October 2014 / Received in final form 18 December 2014
Published online 8 April 2015 - © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2015

Abstract. This paper is devoted to the mechanics of fractally heterogeneous media. A model of fractal continuum with a fractional number of spatial degrees of freedom and a fractal metric is suggested. The Jacobian matrix of the fractal continuum deformation is defined and the kinematics of deformations is elucidated. The symmetry of the Cauchy stress tensor for continua with the fractal metric is established. A homogenization framework accounting for the connectivity, topological, and metric properties of fractal domains in heterogeneous materials is developed. The mapping of mechanical problems for fractal media into the corresponding problems for the fractal continuum is discussed. Stress and strain distributions in elastic fractal bars are analyzed. An approach to fractal bar optimization is proposed. Some features of acoustic wave propagation and localization in fractal media are briefly highlighted.

1 Introduction

Most natural and engineering materials are inherently heterogeneous [1]. Traditional homogenization methods pro-

and dynamical degrees of freedom, as well as the scaling properties of fractal materials. Section 4 is devoted to the mechanics of fractal continua. The mapping of mechanical problems for fractal materials into the corresponding

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия**
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразия физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Будем интенсивно использовать теорию гладких многообразий для тела и физического пространства. Приведем некоторые вспомогательные сведения.

Определение топологического многообразия

Будем называть топологическое пространство \mathfrak{M} топологическим многообразием размерности $\dim \mathfrak{M} = n$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) \mathfrak{M} удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа;
- (ii) \mathfrak{M} имеет счетную базу топологии;
- (iii) существует семейство $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ открытых подмножеств \mathfrak{M} , таких, что:

$$1) \mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha,$$

2) для любого $\alpha \in I$ существует гомеоморфизм $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow O_\alpha$, где $O_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

Терминология

- Упорядоченная пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где U_α и φ_α определены в (iii), называется картой в \mathfrak{M} ;
- U_α — район действия карты, φ_α — картирующее отображение;
- совокупность карт $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, где $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — открытое покрытие \mathfrak{M} , составляет атлас многообразия \mathfrak{M} .
- Пусть $p \in \mathfrak{M}$ — некоторая точка многообразия. Карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, для которой $p \in U_\alpha$, будем называть картой, содержащей точку p .

Замечание 1

В (iii) можно заменить O_α на \mathbb{R}^n . Это не изменит класс всех топологических многообразий. Действительно, любое открытое в \mathbb{R}^n множество представимо в виде объединения некоторых открытых шаров. Измельчая районы действия карт, можно сузить области значений картирующих отображений на эти шары. Но любой открытый шар в \mathbb{R}^n гомеоморфен самому \mathbb{R}^n . Таким образом, получим картирующие гомеоморфизмы на \mathbb{R}^n .

Замечание 2

В (iii) можно изменить направление действия картирующих отображений. Очевидно, что определение от этого не изменится.

Атлас порождает систему локальных координат на многообразии, а именно: всякая точка p , принадлежащая \mathfrak{M} , содержится хотя бы в одном из множеств U_α , поэтому ей однозначно соответствует упорядоченная n -ка $(\xi^1, \dots, \xi^n) = \varphi_\alpha(p)$. Этот упорядоченный набор — локальные координаты точки p . Если пересечение $U_\alpha \cap U_\beta$, где U_α, U_β взяты из одного атласа, не пусто, то любая точка p из этого пересечения имеет локальные координаты $(\xi^1, \dots, \xi^n) = \varphi_\alpha(p)$ и $(\eta^1, \dots, \eta^n) = \varphi_\beta(p)$, связанные друг с другом формулами пересчета: отображение

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta), \quad (1)$$

как композиция гомеоморфизмов, есть гомеоморфизм, который связывает локальные координаты (ξ^1, \dots, ξ^n) и (η^1, \dots, η^n) .

Обозначение

Символом \mathfrak{M}^n обозначается абстрактное топологическое многообразие размерности n , то есть топологическое пространство, удовлетворяющее условиям (i)–(iii).

Абстрактное многообразие формализует свойство непрерывности, присущее телу и физическому пространству, однако, при этом ничего не говорится о гладкости отображений, определенных на них. Для этого на \mathfrak{M}^n вводится дифференциальная структура.

C^r -атлас

Карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) в \mathfrak{M}^n являются C^r -согласованными, если либо **1)** $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, либо **2)** $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ и гомеоморфизм пересчета (1) есть C^r -диффеоморфизм на $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Атлас, в котором любые две карты C^r -согласованы, называется C^r -атласом.

Если объединение двух C^r -атласов многообразия \mathfrak{M}^n дает C^r -атлас, то есть любая карта из одного атласа C^r -согласована с любой другой картой из второго атласа, то такие атласы равноправны. Гладкость отображения, заданного на многообразии, должна зависеть не от конкретного C^r -атласа, а от совокупности всех возможных C^r -атласов, равноправных между собой: заменив атлас данной совокупности на другой, мы должны получить отображение такого же класса гладкости.

C^r -структура

Говорят, что два C^r -атласа $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, $B = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$ эквивалентны ($A \sim B$), если их объединение $A \cup B$ дает C^r -атлас. Введенное отношение есть отношение эквивалентности в его теоретико-множественном определении, и множество всех C^r -атласов распадается на классы эквивалентности $D = [A]$. Эти классы эквивалентности называют C^r -структурами на многообразии \mathfrak{M}^n .

Замечание о порядке C^r -структуры

C^0 -структуру называют топологической, а C^r -структуру при $r \geq 1$ называют дифференциальной. Отметим, что для задания C^r -структуры достаточно указать один C^r -атлас. Если объединить все атласы данной C^r -структуры, то получается C^r -атлас, называемый максимальным. Задание C^r -структуры эквивалентно заданию соответствующего максимального атласа.

C^r -многообразиие

Многообразиие \mathcal{M}^n с заданной на нем C^r -структурой, то есть, упорядоченную пару (\mathcal{M}^n, D) , называют C^r -многообразиием. Если $r \geq 1$, то C^r -многообразиие называют гладким, а при $r = 0$ — топологическим.

Пусть \mathfrak{B} — двумерное тело, которое может быть представлено единичной сферой в трехмерном евклидовом пространстве: его образ описывается уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты. На этом теле может быть определен атлас $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$, в котором картирующие отображения определяются как стереографические проекции.

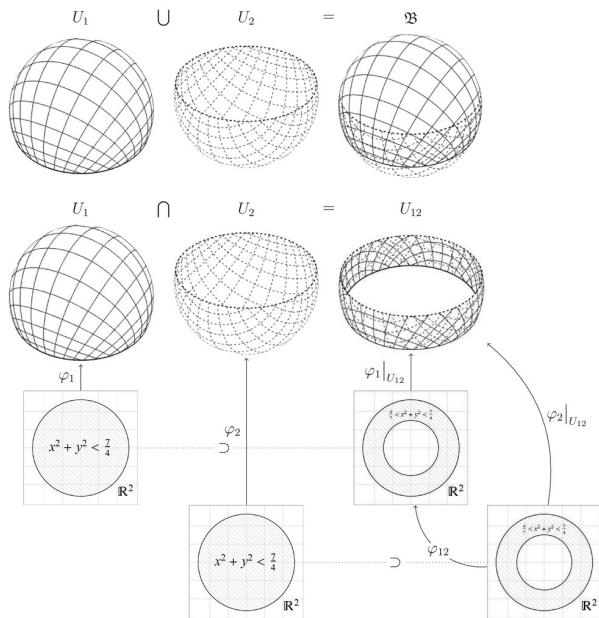
Стереографические проекции частей сферы на плоскость, точки которой имеют нулевую координату x_3 , при отождествлении этой плоскости с \mathbb{R}^2 , представляются следующими отображениями:

$$h_1 : \mathfrak{B} \setminus (0, 0, -1) \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right),$$

$$h_2 : \mathfrak{B} \setminus (0, 0, 1) \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right),$$

первое из которых устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками сферы и плоскости, которые «прокалывает» луч с началом в точке «южного полюса» с координатами $(0, 0, -1)$, а второе устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками сферы и плоскости, которые «прокалывает» луч с началом в точке «северного полюса» с координатами $(0, 0, 1)$.

Гладкие многообразия



В качестве районов действия карт, U_1 и U_2 , используются прообразы $h_1^{-1}(D)$, $h_2^{-1}(D)$ открытого диска

$D = \{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 < \frac{7}{4}\}$. Сужения отображений h_1^{-1} и h_2^{-1} на D обозначим как $\varphi_1 : D \rightarrow U_1$ и $\varphi_2 : D \rightarrow U_2$:

$$\varphi_1 : (\xi^1, \xi^2) \mapsto \left(\frac{2\xi^1}{1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}, \frac{2\xi^2}{1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}, \frac{\xi^1 + \xi^2 - 1}{1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} \right);$$

$$\varphi_2 : (\eta^1, \eta^2) \mapsto \left(\frac{2\eta^1}{1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, \frac{2\eta^2}{1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, -\frac{\eta^1 + \eta^2 - 1}{1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2} \right).$$

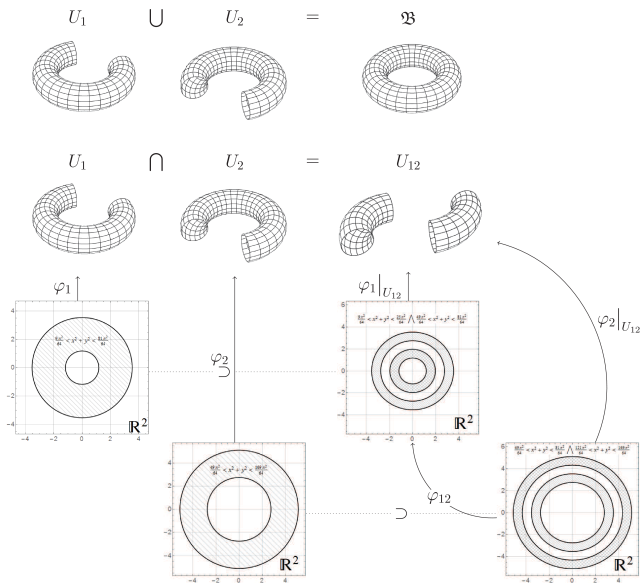
Области $U_{12} = U_1 \cap U_2$ в \mathbb{R}^2 соответствует множество пар (ξ^1, ξ^2) , таких, что $\frac{4}{7} < (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 < \frac{7}{4}$. Гомеоморфизм перехода $\varphi_{12} : U_{12} \rightarrow U_{12}$, при этом, имеет вид

$$\varphi_{12} : (\eta^1, \eta^2) \mapsto (\xi^1, \xi^2) = \left(\frac{(\eta^1)^2}{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, \frac{(\eta^2)^2}{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2} \right),$$

и является C^∞ -диффеоморфизмом. Таким образом, сфера \mathfrak{B} является 2-мерным многообразием со C^∞ -структурой, индуцированной построенным атласом.

Пусть \mathfrak{B} — двумерное тело, которое может быть представлено тором в трехмерном евклидовом пространстве. На следующем рисунке показано картирование этой поверхности. Атлас тора также состоит из двух карт.

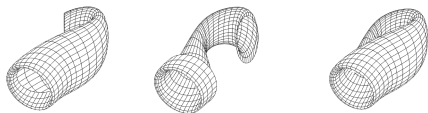
Гладкие многообразия



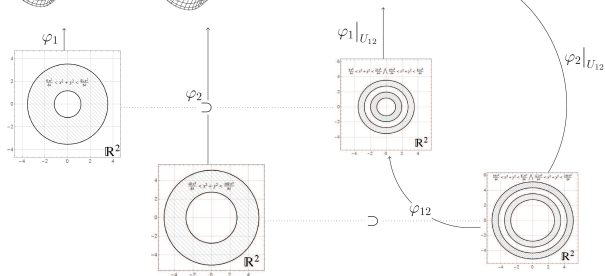
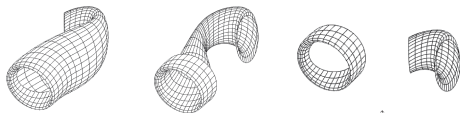
Наконец, пусть \mathfrak{B} — двумерное тело, которое может быть представлено поверхностью (бутылкой) Клейна в трехмерном евклидовом пространстве. На следующем рисунке показано картирование этой поверхности. Атлас бутылки Клейна также состоит из двух карт.

Гладкие многообразия

$$U_1 \cup U_2 = \mathfrak{B}$$



$$U_1 \cap U_2 = U_{12}$$



Плотность упругой энергии, запасаемая телом при деформации, или плотность действия (лагранжиан), являются примерами вещественнозначных функций, заданных на многообразии. C^r -структура позволяет определить на многообразии классы гладкости таких отображений. Поясним это подробнее.

Пусть на \mathcal{M}^n задана C^r -структура. Функция $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией класса C^r в окрестности точки $p \in \mathcal{M}^n$, если найдется карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ из атласа данной C^r -структуры, содержащая точку p , такая, что отображение $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : O_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ есть C^r -отображение на O_α . В силу C^r -согласованности, это определение не зависит от атласа из данной структуры. Приведенные соображения иллюстрируются диаграммой

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \downarrow \varphi_\alpha & \nearrow f \circ \varphi_\alpha^{-1} & \\ O_\alpha & & \end{array}$$

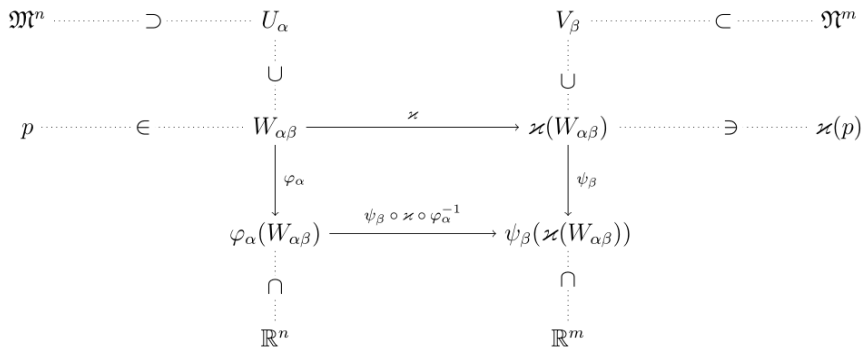
Основную роль в дальнейших построениях играют отображения между многообразиями. К ним, например, относятся конфигурации — отображения тела в физическое пространство. Для таких отображений свойство гладкости вводится следующим образом. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathcal{X} : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^m$ двух C^r -многообразий в произвольной точке $p \in \mathcal{M}^n$. Выберем карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ многообразия \mathcal{M}^n , содержащую p , и карту (V_β, ψ_β) многообразия \mathcal{N}^m , содержащую $\mathcal{X}(p)$.

Обозначим $W_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap \varkappa^{-1}(V_\beta)$ и рассмотрим отображение

$$\psi_\beta \circ \varkappa \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(W_{\alpha\beta})} : \varphi_\alpha(W_{\alpha\beta}) \rightarrow \psi_\beta(\varkappa(W_{\alpha\beta})),$$

которое называется *координатным представлением отображения \varkappa в окрестности точки p* . Это отображение вида $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, и оно не зависит от выбора координатных карт в данных C^r -структурах на \mathfrak{M}^n и \mathfrak{N}^m , ибо карты на этих многообразиях C^r -согласованы.

Приведенные построения иллюстрирует диаграмма



Обозначения. Диффеоморфизм

В дальнейшем через $C^r(\mathcal{M}^n; \mathcal{N}^m)$ обозначается множество всех C^r — отображений из C^r —многообразия \mathcal{M}^n в C^r —многообразии \mathcal{N}^m . В частности, $C^r(\mathcal{M}^n; \mathbb{R})$ есть множество всех C^r — отображений из C^r —многообразия \mathcal{M}^n в тривиальное C^r —многообразие \mathbb{R} . В рамках этой терминологии диффеоморфизмом из C^r —многообразия \mathcal{M}^n в C^r —многообразии \mathcal{N}^n будем называть любое отображение $\chi \in C^r(\mathcal{M}^n; \mathcal{N}^n)$, такое что 1) существует χ^{-1} и 2) $\chi^{-1} \in C^r(\mathcal{N}^n; \mathcal{M}^n)$.

Замечание о существовании C^r -структур

■ Хотя C^0 -структура на любом пространстве \mathfrak{M}^n единственна, при $r \geq 1$ пространство \mathfrak{M}^n может допускать несколько различных C^r -структур. Если D_1, D_2 — различные C^r -структуры на \mathfrak{M}^n , то $(\mathfrak{M}^n, D_1), (\mathfrak{M}^n, D_2)$ — два разных C^r -многообразия.

■ Если на пространстве \mathfrak{M}^n существует C^r -структура ($r \geq 1$), то на нем существует и C^∞ -структура, диффеоморфная данной. Исключением является случай $r = 0$. На любом C^0 -многообразии размерности $n < 4$ можно ввести C^1 -структуру, а, следовательно, и C^∞ -структуру. Но для любого $n \geq 4$ существуют многообразия, не допускающие введения C^1 -структуры. В настоящем курсе такие случаи не рассматриваются, ибо a-priori и тело, и физическое пространство снабжены C^0 -структурами, и размерности этих двух многообразий не превосходят 3.

Соглашение

Одно и то же топологическое многообразие с двумя различными C^r -структурами представляет два различных гладких многообразия. В математической литературе гладкое многообразие, как правило, указывается, как упорядоченная пара: исходное топологическое многообразие и выбранная дифференциальная структура. Мы считаем, что тело и физическое пространство наделены фиксированными дифференциальными структурами, поэтому явно в рассуждениях их не выделяем, ибо вопрос о смене одной структуры на другую выходит за рамки настоящего курса.

Тело как гладкое многообразие

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 **Тело как гладкое многообразие**
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразия физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Из предыдущих соображений и допущений имеем: тело \mathfrak{B} наделено некоторой топологической структурой. Например, выделена совокупность \mathfrak{S} открытых множеств. При этом, топологическое пространство $(\mathfrak{B}, \mathfrak{S})$ является хаусдорфовым, со счетной базой и имеет одну и ту же топологическую размерность в каждой точке \mathfrak{B} . Но этого нам не достаточно!

Соображение об идентификации материальных точек

Для идентификации материальных точек тела \mathfrak{B} необходимо иметь способ их аналитического описания. Для такого описания будем использовать идею картирования топологического пространства, развитую в теории гладких многообразий. Картирование устанавливает аналитическую структуру на \mathfrak{B} , определяя на нем понятие гладкости.

Теория гладких многообразий начала интенсивно развиваться с середины прошлого века. Именно тогда формализация тела как гладкого многообразия стала встречаться в работах представителей школы рациональной механики W. Noll, С.-С. Wang и др.

Приведем определение непрерывного тела, которое сформулировал W. Noll.

Пусть задан класс \mathcal{C} отображений из множества \mathfrak{B} , представляющего совокупность материальных точек, образующих тело, в абсолютное (евклидово) физическое пространство \mathcal{E} , т.е. $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$. Такие отображения будем называть конфигурациями. Тело \mathfrak{B} называется непрерывным телом класса C^p , если класс конфигураций \mathcal{C} удовлетворяет следующим условиям:

- (i) Каждая конфигурация $\kappa \in \mathcal{C}$ — гомеоморфизм, а область значений $\kappa(\mathfrak{B})$ — открытое множество в \mathcal{E} .
- (ii) Если $\gamma, \kappa \in \mathcal{C}$, то композиция

$$\lambda = \gamma \circ \kappa^{-1} : \kappa(\mathfrak{B}) \rightarrow \gamma(\mathfrak{B})$$

представляет собой отображение класса C^p , которое называется деформацией тела \mathfrak{B} из конфигурации κ в конфигурацию γ .

- (iii) Если $\kappa \in \mathcal{C}$ и если $\lambda : \kappa(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{E}$ — отображение класса C^p , то $\lambda \circ \kappa \in \mathcal{C}$.

Определение Нолла сформулировано для трехмерных тел. Причем, эти тела обладают простой структурой: они являются тривиальными многообразиями, т.е. многообразиями, атлас которых состоит из одной карты. Такое определение не охватывает ряд физических объектов, которые хотим моделировать.

Формализация тела

Учитывая высказанные ранее соображения, принимаем следующее определение тела:

Тело \mathfrak{B} — гладкое n -мерное многообразие. Значениям n соответствуют следующие случаи:

$n = 1$ — материальная нить;

$n = 2$ — материальная поверхность (мембрана);

$n = 3$ — трехмерное тело.

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство**
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразия физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

■ Физическое пространство — гладкое многообразие \mathcal{P} размерности m . Это пространство, в котором живет наблюдатель.

Предположение

$$\dim \mathfrak{B} = n \leq m = \dim \mathcal{P} \leq 3.$$

■ Физическое пространство \mathcal{P} должно быть описано структурой, подобной формализации тела, т.е. гладким многообразием, размерность которого не меньше размерности тела (в противном случае, нельзя было бы говорить о вложении тела в физическое пространство). Вместе с тем, в отличие от тела, при формализации физического пространства необходимо учитывать данные извне ограничения: например, оно должно быть евклидовым (классическая механика Галилея — Ньютона) или римановым, с заданной кривизной (общая теория относительности).

В классической механике физическое пространство рассматривается в рамках концепции Ньютона, как абсолютное пространство–время, являющееся четырехмерным многообразием \mathfrak{S} . Точки такого многообразия представляют события. Между двумя событиями устанавливается отношение: одно из них произошло не позже другого. С абстрактной точки зрения это означает, что на \mathfrak{S} задано абсолютное время, которое устанавливает на нем отношение порядка. Это можно сформулировать математически, как существование сюръективного отображения $t : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{T}$, где \mathbb{T} — линейно упорядоченное (хронометрическое) многообразие, диффеоморфное \mathbb{R} .

Первый закон Ньютона (существование инерциальной системы отсчета) утверждает существование класса глобальных координатных систем $\Gamma : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^4$, и класса кривых на многообразии \mathcal{S} , называемых мировыми линиями свободных материальных точек, определяемых координатами Γ посредством линейных однородных уравнений. Это устанавливает аффинную структуру на \mathcal{S} и \mathbb{T} , т.е. представление пространства событий как декартово произведение $\mathcal{S} = \mathbb{T} \times \mathcal{E}$, где \mathcal{E} является точечным аффинным пространством.

Определение аффинного пространства

Аффинным пространством называется упорядоченная тройка $(\mathcal{E}, \mathcal{V}, \psi)$, где:

- а) \mathcal{E} — непустое множество, элементы которого называются точками;
- б) \mathcal{V} — вещественное векторное пространство, называемое трансляционным пространством;
- с) $\psi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ — отображение, сопоставляющее любой упорядоченной паре (A, B) точек $A, B \in \mathcal{E}$ некоторый вектор из \mathcal{V} , обозначаемый символом \overrightarrow{AB} или $B - A$, и называемый вектором с началом в A и концом в B . При этом, выполнены условия:

(i) для любых точек $A, B, C \in \mathcal{E}$ справедливо соотношение Шаля: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0} \in \mathcal{V}$;

(ii) для любой точки $A \in \mathcal{E}$ отображение $\varphi_A : \mathcal{E} \ni X \mapsto \overrightarrow{AX} \in \mathcal{V}$ является биекцией \mathcal{E} на \mathcal{V} .

- Условия (i) и (ii) будем называть **аксиомами Вейля**.
- В силу аксиомы (ii), можно определить внешнюю операцию (сдвиг из точки на вектор)

$$+ : \mathcal{E} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}, \quad + : (A, \underline{\mathbf{v}}) \mapsto A + \underline{\mathbf{v}} := \varphi_A^{-1}(\underline{\mathbf{v}}),$$

сопоставляющую упорядоченной паре $(A, \underline{\mathbf{v}})$ ту единственную точку $B \in \mathcal{E}$, для которой $\overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{v}}$.

- Для краткости, вместо $(\mathcal{E}, \mathcal{V}, \psi)$ далее будем писать $(\mathcal{E}, \mathcal{V})$, или, еще короче, \mathcal{E} .
- Размерностью аффинного пространства \mathcal{E} называется размерность трансляционного пространства \mathcal{V} : $\dim \mathcal{E} := \dim \mathcal{V}$. В соответствии с принятыми в настоящем курсе обозначениями, запись $(\mathcal{E}^m, \mathcal{V}^m)$ обозначает аффинное пространство размерности m с ассоциированным векторным пространством \mathcal{V}^m .

Согласно классификации Ф. Клейна, аффинность точечного пространства определяется свойством геометрических объектов сохранять свой класс (быть инвариантными) при аффинных, т.е. линейных неоднородных преобразованиях $(x^s)_{s=1}^m \mapsto (\tilde{x}^s)_{s=1}^m$, которые в координатной форме имеют вид $\tilde{x}^k = A_s^k x^s + c^k$, $\det A \neq 0$, где \tilde{x}^s , x^s — новые и старые координаты соответственно, $A = (A_s^k)$ — невырожденная матрица, осуществляющая линейное преобразование, $c = (c^k)$ — арифметический вектор, определяющий сдвиг начала координат. При этом под инвариантными геометрическими объектами понимаются точки, прямые, плоскости (и, в случае высокой размерности, точечные множества, определяемые линейными уравнениями). Термин «аффинность» означает, что при допустимых преобразованиях бесконечно удаленные точки не изменяются, т.е. «концы пространства остаются на своих местах». Таким образом, аффинное пространство — это абсолютный мир классических прямых и плоскостей, таких, какими их представляли еще в античности.

Аффинная структура \mathcal{E}^m позволяет ввести глобальный репер с базисными трансляционными векторами \underline{i}_k , $k = 1, \dots, m$, ассоциированных с некоторой «начальной» точкой O ; все иные реперы получаются из глобального сдвигами вдоль векторов из \mathcal{V}^m .

Замечание

С физической точки зрения выбор единого репера означает существование в физическом пространстве жестких масштабов.

Определим отображение $\mathcal{X}_m : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{V}^m$, называемое полем векторов места, равенством

$$\forall P \in \mathcal{E}^m \quad \mathcal{V}^m \ni \underline{x} = \mathcal{X}_m(P) = P - O. \quad (2)$$

Это биективное отображение («векторизация») реализует изоморфизм $\mathcal{E}^m \cong \mathcal{V}^m$, где \mathcal{V}^m рассматривается как аффинное пространство. Как известно, $\mathcal{V}^m \cong \mathbb{R}^m$, то есть существует отображение $\mathcal{A}_m : \mathcal{V}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, которое является изоморфизмом (декартова «арифметизация»). Таким образом, $\mathcal{E}^m \cong \mathbb{R}^m$. Если через $(\underline{\mathbf{1}}_k)_{k=1}^m$ обозначить естественный базис \mathbb{R}^m , то $\mathcal{A}_m = \underline{\mathbf{1}}_k \otimes i^k$, где $(i^k)_{k=1}^m$ — дуальный репер к $(\underline{\mathbf{i}}_k)_{k=1}^m$.

Следующая диаграмма иллюстрирует соотношения между \mathcal{E}^m , \mathcal{V}^m , \mathbb{R}^m :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^m & \xrightarrow{\chi_m} & \mathcal{V}^m \\ & \searrow \mathcal{D}_m = \mathcal{A}_m \circ \chi_m & \downarrow \mathcal{A}_m \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

■ В силу изоморфизма, \mathcal{E}^m и \mathbb{R}^m часто отождествляют. Мы будем избегать таких отождествлений, всегда понимая под \mathbb{R}^m множество всех упорядоченных наборов из n действительных чисел, а под \mathcal{E}^m — m -мерное евклидово аффинное пространство с фиксированной декартовой системой координат. Формализованное таким образом физическое пространство может быть представлено тривиальным (его атлас состоит из одной карты) m -мерным многообразием класса C^∞ с картой $(\mathcal{E}^m, \mathcal{D}_m)$, где $\mathcal{D}_m = \mathcal{A}_m \circ \mathcal{X}_m$; топология в \mathcal{E}^m индуцируется из \mathbb{R}^m .

■ Поскольку в ходе изложения аффинные пространства разных размерностей одновременно не рассматриваются, то индекс m у $\mathcal{X}_m, \mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m$ далее не указываем.

С более общей точки зрения физическое пространство \mathcal{P} формализуется как риманово многообразие с отличной от нуля кривизной. В этом случае места материальных точек определяются как точки гладкого многообразия в терминах картирующих отображений. Поскольку аксиомы Вейля уже не выполняются, то понятие трансляционного пространства теряет смысл. Локально, векторные поля представляются с помощью дополнительной надстройки над \mathcal{P} — векторным расслоением. В рамках этих представлений аффинно-евклидово физическое пространство можно рассматривать как частный случай: все слои касательного расслоения отождествляются и представляются единым векторным пространством — трансляционным пространством \mathcal{V} . Определяется риманова метрика, как функция $\underline{\mathbf{g}} : \mathcal{P} \rightarrow T\mathcal{P} \otimes T\mathcal{P}$, значения которой есть дефинитные симметричные билинейные отображения на $T_x\mathcal{P}$.

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения**
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразии физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Среди отображений класса $C^r(\mathcal{M}^n; \mathcal{N}^m)$ выделим те, которые удовлетворяют требованию регулярности в каждой точке \mathcal{M}^n .

Регулярная точка отображения

Точка $p \in \mathcal{M}^n$ называется **регулярной точкой отображения** $\kappa \in C^r(\mathcal{M}^n; \mathcal{N}^m)$, если координатное представление κ в окрестности точки p имеет матрицу Якоби в точке $\varphi(p)$ (где (U, φ) — карта, содержащая p) ранга $\min\{m, n\}$.

C^r -иммерсия

В случае $n \leq m$, отображение $\kappa \in C^r(\mathcal{M}^n; \mathcal{N}^m)$, регулярное в каждой точке $p \in \mathcal{M}^n$, называется **C^r -иммерсией (погружением)**.

Пусть $n \leq m$.

C^r -вложения

Отображение $\kappa \in C^r(\mathcal{M}^n; \mathcal{N}^m)$ называется C^r -вложением, если

- (i) κ является C^r -иммерсией;
- (ii) κ является гомеоморфизмом на свой образ, т.е. на подпространство $\kappa(\mathcal{M}^n)$ топологического пространства \mathcal{N}^m .

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации**
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразия физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Соображение о порядке гладкости

Полагаем, что тело и физическое пространство наделены C^r -структурами с одинаковыми $r \geq 1$.

Конфигурации

Связь между телом, как континуальным множеством материальных точек, и множеством мест этих точек в физическом пространстве, устанавливается посредством отображения $\kappa: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$, называемого **конфигурацией**.

Предположение

Конфигурация $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{P}$ является C^r -иммерсией.

Образ конфигурации, как C^r -иммерсии \mathfrak{B} на \mathcal{P} , может иметь точки *самопересечения*. В некоторых случаях самопересечения допустимы (сетчатые оболочки), в других им соответствует физически неосуществимое самопроникновение. Для выделения класса конфигураций, образы которых не имеют самопересечений, будем рассматривать более узкий класс конфигураций.

Регулярные конфигурации

Под **регулярной конфигурацией** κ тела \mathfrak{B} мы будем понимать C^r -вложение \mathfrak{B} в \mathcal{P} .

Для иллюстрации приведем примеры двумерных тел, представляемых многообразиями: лентой Мебиуса и поверхностью Клейна.

Возможность вложения или погружения этих тел в физическое пространство зависит от его размерности и топологической структуры. Действительно, для ленты Мебиуса можно определить конфигурацию, образ которой — точечное множество в трехмерном евклидовом пространстве \mathcal{E}^3 :

$$\underline{x}(r, \varphi) = \left(3 + r \cos \frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi \underline{i} + \left(3 + r \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi \underline{j} + r \sin \frac{\varphi}{2} \underline{k},$$

где $(r, \varphi) \in]-1, 1[\times [0, 2\pi[$. Здесь \underline{i} , \underline{j} , \underline{k} — орты декартовой системы координат, а \underline{x} — вектор места точки поверхности. Это множество не имеет самопересечений и, следовательно, конфигурация регулярна. В то же время, проекция этого множества на любую плоскость, например, XOY , не является вложением в двумерное евклидово пространство.

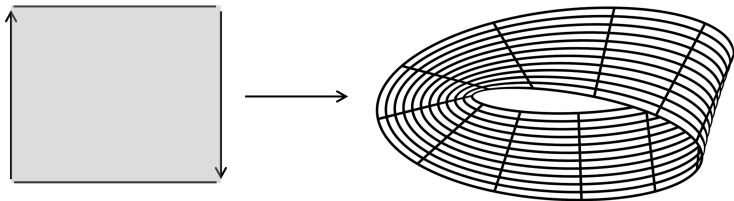


Рис.: Двумерное тело — лента Мебиуса

Поверхность («бутылка») Клейна может быть представлена в \mathcal{E}^3 отображением

$$\underline{x}(t, \theta) = \underline{\alpha}(t) + r(t) (\cos \theta G(\underline{\tau}(t)) + \sin \theta \underline{k}), \quad (t, \theta) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[,$$

где $\underline{\alpha}(t) = a(1 - \cos t)\underline{i} + b \sin t(1 - \cos t)\underline{j}$,

$$r(t) = c - d(t - \pi)\sqrt{t(2\pi - t)}, \quad G(x\underline{i} + y\underline{j}) = -y\underline{i} + x\underline{j},$$

$\underline{\tau}(t) = \|\underline{\alpha}'(t)\|^{-1}\underline{\alpha}'(t)$. Это отображение является гладким и, следовательно, оно является погружением. Однако, его образ в \mathcal{E}^3 имеет самопересечения.

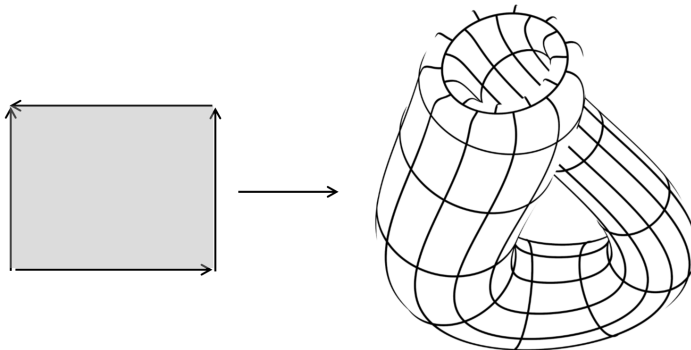


Рис.: Двумерное тело — поверхность Клейна

Наименьшим по размерности пространством, в которое можно вложить поверхность Клейна, является $\mathcal{E}^4 \cong \mathbb{R}^4$.

Слабая теорема Уитни

Для любого компактного n -мерного C^r -многообразия \mathfrak{M}^n , где $r \geq 2$, существует C^r -вложение \mathfrak{M}^n в \mathbb{R}^{2n+1} .

Сильная теорема Уитни

Любое гладкое n -мерное ($n > 1$) многообразие можно погрузить в \mathbb{R}^{2n-1} и можно вложить в \mathbb{R}^{2n} . При этом, значения $2n - 1$ и $2n$ неулучшаемы.

По поводу теорем Уитни см. следующую литературу:

(i) Хирш М. Дифференциальная топология. — М.: ИО НФМИ, 1999. — 280 с.

(ii) Adachi M. Embeddings and immersions. — American Mathematical Soc., 2012. — 183 p.

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия**
- 8 Образ тела как подмногообразии физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Индукцированная топология

Пусть $(\mathcal{M}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}})$ — топологическое пространство, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ — непустое множество. Его можно превратить в топологическое пространство, определив совокупность множеств

$$\mathcal{G}_{\mathcal{N}} = \{V \in 2^{\mathcal{N}} \mid \exists U \in \mathcal{G}_{\mathcal{M}} \quad (V = \mathcal{N} \cap U)\}.$$

Можно доказать (проверив выполнение аксиом топологического пространства), что $(\mathcal{N}, \mathcal{G}_{\mathcal{N}})$ — топологическое пространство. Оно называется **подпространством** топологического пространства $(\mathcal{M}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}})$, а топология $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ — **индуцированной**, или **наследственной топологией**.

Каноническая инъекция

Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Отображение

$$j_{\mathfrak{N}} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}, \quad p \mapsto p,$$

называется **канонической инъекцией**.

Замечание

Отображения

$$j_{\mathfrak{N}} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}, \quad \text{Id} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N},$$

где Id — тождественное отображение, являются **разными** отображениями, так как имеют разные области прибытия.

До этого мы не акцентировали внимание на том, что мы понимаем под отображением. Однако, в связи с последним замечанием, необходимо пояснение.

Определение отображения

Пусть \mathfrak{M} , \mathfrak{N} — множества. Отображением $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ называется упорядоченная тройка $f = (\mathfrak{M}, F, \mathfrak{N})$, где множество $F \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\forall x \in \mathfrak{M} \quad \exists! y \in \mathfrak{N} \quad ((x, y) \in F).$$

Тот единственный элемент y , который в паре с x содержится в F , обозначается через $f(x)$. Таким образом,

$$((x, y) \in F) \Leftrightarrow (y = f(x)).$$

Литература:

Бурбаки Н. Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 456 с. (Глава II, стр. 90)

Пусть \mathfrak{M}^n — C^r -многообразие.

Определение подмногообразия

Множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, являющееся топологическим многообразием в индуцированной топологии и снабженное гладкой структурой, по отношению к которой каноническая инъекция $j_{\mathfrak{N}} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$ будет C^r -вложением, называется **вложенным C^r -подмногообразием \mathfrak{M}^n** .

Коразмерность

Назовем число $k = \dim \mathfrak{M} - \dim \mathfrak{N}$ **коразмерностью \mathfrak{N} в \mathfrak{M}** .

Пример

Вложенные подмногообразия коразмерности 1 — **гиперповерхности**.

Пусть снова \mathcal{M}^n — C^r -многообразиие.

Пример

Любое открытое множество $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}^n$ можно наделить структурой C^r -многообразия. Для этого вводятся индуцированная топология и C^r -структура, которая получена сужением карт \mathcal{M}^n на \mathcal{D} . Полученное C^r -многообразиие называется **открытым подмногообразиием** \mathcal{M}^n .

Теорема

Вложенные подмногообразия \mathcal{M}^n , имеющие коразмерность 0 — открытые подмногообразия \mathcal{M}^n и только они.

Литература:

Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. — Springer New York, 2012. — 708 p. doi: 10.1007/978-1-4419-9982-5

Образ тела как подмногообразиие физического пространства

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразиие физического пространства**
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Образ тела как подмногообразиие физического пространства

Регулярная конфигурация κ позволяет индуцировать на множество $\kappa(\mathfrak{B})$ C^r -структуру тела \mathfrak{B} и, тем самым, установить на $\kappa(\mathfrak{B})$ структуру гладкого подмногообразия \mathcal{P} . Прежде всего заметим, что как подпространство \mathcal{P} , пространство $\kappa(\mathfrak{B})$ является хаусдорфовым, со счетной базой.

О $\hat{\kappa}^{-1}$

Отображение

$$\hat{\kappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \kappa(\mathfrak{B}), \quad \hat{\kappa}(\mathfrak{x}) = \kappa(\mathfrak{x}),$$

является гомеоморфизмом. Обратный гомеоморфизм — $\hat{\kappa}^{-1} : \kappa(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}$.

Образ тела как подмногообразиие физического пространства

Замечание

Чаще всего в работах по механике континуума пишут не $\widehat{\varkappa}^{-1}$, а \varkappa^{-1} , что является удобным, но формально неправильным. Мы будем стараться избегать таких обозначений.

Атлас на $\varkappa(\mathfrak{B})$

Пусть на теле \mathfrak{B} выбран некоторый C^r -атлас

$A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Так как $\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, то $\varkappa(\mathfrak{B}) = \bigcup_{\alpha \in I} \varkappa(U_\alpha)$.

Композиции $\varphi_\alpha \circ \widehat{\varkappa}^{-1}|_{\varkappa(U_\alpha)}$ являются гомеоморфизмами $\varkappa(U_\alpha)$ на $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{B}}$. Непосредственно проверяется, что

$A_\varkappa = \{(\varkappa(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ \widehat{\varkappa}^{-1}|_{\varkappa(U_\alpha)})\}_{\alpha \in I}$ есть C^r -атлас на $\varkappa(\mathfrak{B})$ и он порождает соответствующую C^r -структуру.

Следовательно, $\varkappa(\mathfrak{B})$ есть гладкое многообразие размерности $\dim \mathfrak{B}$ с определенной выше C^r -структурой.

Образ тела как подмногообразиие физического пространства

Рассмотрим каноническую инъекцию $j_{\mathcal{X}(\mathfrak{B})} : \mathcal{X}(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{P}$.

Можно записать, что

$$j_{\mathcal{X}(\mathfrak{B})} = \mathcal{X} \circ \hat{\mathcal{X}}^{-1}.$$

В картах из атласа $A_{\mathcal{X}}$ на $\mathcal{X}(\mathfrak{B})$ и атласа $B = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ на \mathcal{P} имеем:

$$\begin{aligned} \psi \circ j_{\mathcal{X}(\mathfrak{B})} \circ (\varphi_{\alpha} \circ \hat{\mathcal{X}}^{-1})^{-1} &= \psi \circ \mathcal{X} \circ \hat{\mathcal{X}}^{-1} \circ \hat{\mathcal{X}} \circ \varphi_{\alpha}^{-1} = \\ &= \psi \circ \mathcal{X} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}, \end{aligned}$$

что совпадает с координатным представлением \mathcal{X} .

Следовательно, $j_{\mathcal{X}(\mathfrak{B})}$ является C^r -иммерсией. Поскольку при этом $j_{\mathcal{X}(\mathfrak{B})}$ — гомеоморфизм на свой образ, то окончательно получаем, что $j_{\mathcal{X}(\mathfrak{B})}$ является C^r -вложением. Следовательно, пространство $\mathcal{X}(\mathfrak{B})$ с C^r -структурой, порождаемой атласом $A_{\mathcal{X}}$, является вложенным C^r -подмногообразием \mathcal{P} .

Образ тела как подмногообразиие физического пространства

Классическим является случай $\mathfrak{B} = \mathcal{E}^3$. Пусть \mathfrak{B} — двумерное тело. В этом случае, регулярная конфигурация $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}^3$ есть вложение двумерного тела в трехмерное евклидово пространство. Обозначим $\mathcal{S} = \varkappa(\mathfrak{B})$. Если $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ есть C^r -атлас на теле, то $A_\varkappa = \{(\varkappa(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ \widehat{\varkappa}^{-1}|_{\varkappa(U_\alpha)})\}_{\alpha \in I}$, как отмечалось выше, есть C^r -атлас на \mathcal{S} . Таким образом, точки \mathcal{S} локально описываются координатами (ξ^1, ξ^2) — образами точек \mathcal{S} при отображении

$$\varphi_\alpha \circ \widehat{\varkappa}^{-1}|_{\varkappa(U_\alpha)} : \varkappa(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

В классической теории поверхностей числа ξ^1, ξ^2 называют криволинейными координатами на поверхности.

Образ тела как подмногообразиие физического пространства

Точка $P(\xi^1, \xi^2) = (\varkappa \circ \varphi_\alpha^{-1})(\xi^1, \xi^2)$ является элементом \mathcal{E}^3 , поэтому можно говорить о значении поля векторов места \mathcal{X} на ней: $\mathcal{X}(P(\xi^1, \xi^2)) = (\mathcal{X} \circ \varkappa \circ \varphi_\alpha^{-1})(\xi^1, \xi^2) - O$. Таким образом, в рамках одной карты имеем параметрическое описание поверхности:

$$(\xi^1, \xi^2) \mapsto (\mathcal{X} \circ \varkappa \circ \varphi_\alpha^{-1})(\xi^1, \xi^2).$$

Высказанные соображения иллюстрируются следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{\varkappa} & \varkappa(U_\alpha) \\ \downarrow \varphi_\alpha & & \downarrow \mathcal{X} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathcal{X} \circ \varkappa \circ \varphi_\alpha^{-1}} & \mathcal{V}^3 \end{array}$$

Образ тела как подмногообразиие физического пространства

С точки зрения наблюдателя, пребывающего в физическом пространстве, и определившего на нем некоторую систему локальных координат (атлас), образ тела $\kappa(\mathfrak{B})$ должен описываться локальными координатами, индуцированными введенной системой координат в \mathfrak{B} . При этом, удобно подобрать такую систему координат в \mathfrak{B} , соответствующую рассматриваемому телу, чтобы число независимых значений координат на образе тела соответствовало его размерности. Например, в трехмерном случае сфера является координатной поверхностью сферических координат, цилиндр — цилиндрических, и так далее. Им соответствуют два независимых параметра, а не три, как для всего пространства. Для общего случая это также справедливо. Он будет рассмотрен далее.

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразиие физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении**
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Результат, который мы рассмотрим, использует следующую теорему:

Теорема о выпрямлении отображения

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ — C^r -отображение с $r \geq 1$, а p — регулярная точка f . При этом, $n \leq m$. Тогда существуют открытая окрестность W точки $f(p)$, открытое множество $W_1 \subset \mathbb{R}^m$ и C^r -диффеоморфизм $F : W \rightarrow W_1$ такие, что для некоторой открытой окрестности $V \subset \mathbb{R}^n$ точки p ,

$$F \circ f : (x^1, \dots, x^n) \mapsto \mathbb{R}^n \ni (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

Приведена сокращенная формулировка теоремы. Полную формулировку и доказательство можно найти в Введение в топологию. 2-е изд., доп. / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 416 с.

Смысл с точки зрения замены координат

Диффеоморфизм F^{-1} определяет криволинейные координаты (ξ^1, \dots, ξ^n) в пространстве \mathbb{R}^m , в которых отображение f имеет вид:

$$\xi^1 = x^1, \dots, \xi^n = x^n, \xi^{n+1} = 0, \dots, \xi^m = 0.$$

Теорема о выпрямлении используется при доказательстве результата, изложенного далее.

Рассмотрим C^r -вложение $\varkappa : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathfrak{N}^m$ одного C^r -многообразия в другое; здесь $n \leq m$. В максимальном атласе заданной C^r -структуры на \mathfrak{N}^m существует подмножество $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, покрывающее $\varkappa(\mathfrak{M}^n)$ и удовлетворяющее условию: гомеоморфизмы

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n},$$

таковы, что $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^n) = U_\alpha \cap \varkappa(\mathfrak{M}^n)$. Таким образом, открытые в $\varkappa(\mathfrak{M}^n)$ множества $U_\alpha \cap \varkappa(\mathfrak{M}^n)$ в совокупности с отображениями

$$\varphi_\alpha^{-1}|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha \cap \varkappa(\mathfrak{M}^n),$$

задают C^r -атлас, определяющий структуру n -мерного C^r -многообразия на $\varkappa(\mathfrak{M}^n)$. Ее называют структурой, согласованной со структурой \mathfrak{N}^m .

Приведенные рассуждения соответствуют диаграмме

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap \mathcal{K}(\mathcal{M}^n) & \cdots \subset \cdots & U_\alpha \\ \downarrow \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \mathcal{K}(\mathcal{M}^n)} & & \downarrow \varphi_\alpha \\ \mathbb{R}^n & \cdots \subset \cdots & \mathbb{R}^m \end{array}$$

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразия физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения**
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Любое C^r -погружение $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$ будем называть C^r -конфигурацией, или просто конфигурацией, а любое C^r -вложение $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$ — **регулярной конфигурацией**. Через $\widehat{\mathcal{C}}(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$ обозначается множество всех конфигураций тела \mathfrak{B} , а через $\mathcal{C}(\mathfrak{B}; \mathfrak{P}) \subset \widehat{\mathcal{C}}(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$ — множество всех регулярных конфигураций тела \mathfrak{B} .

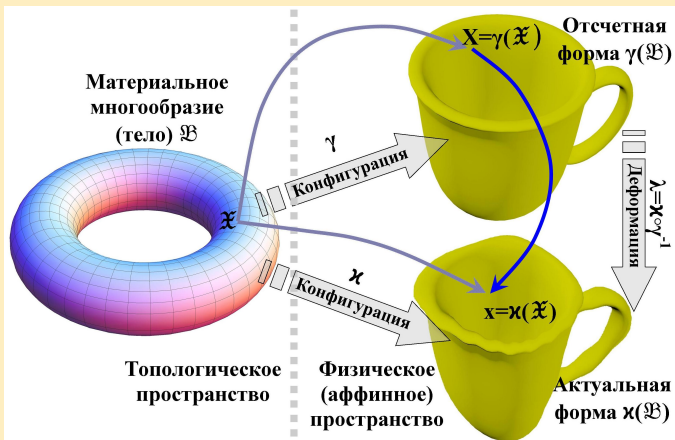
Замечание

В настоящем курсе под конфигурацией понимается отображение, а не точечное множество мест в физическом пространстве. Последнее есть образ множества \mathfrak{B} , т.е. $\kappa(\mathfrak{B})$. Это множество будем называть **формой** тела \mathfrak{B} .

Движение

Движение тела в физическом пространстве характеризуется непрерывной последовательностью конфигураций, определяющих непрерывное семейство форм. Формализация этого понятия может быть осуществлена следующим образом. Пусть $]t_1, t_2[= \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ — хронометрическое многообразие (t_1, t_2 могут быть конечными, либо бесконечными). отображение $\mathbb{T} \rightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$, которое ставит в соответствие каждому $t \in \mathbb{T}$ некоторую конфигурацию \mathcal{K}_t , т.е. $t \mapsto \mathcal{K}_t$, представляет движение \mathfrak{B} за интервал \mathbb{T} .

Конфигурации и деформации

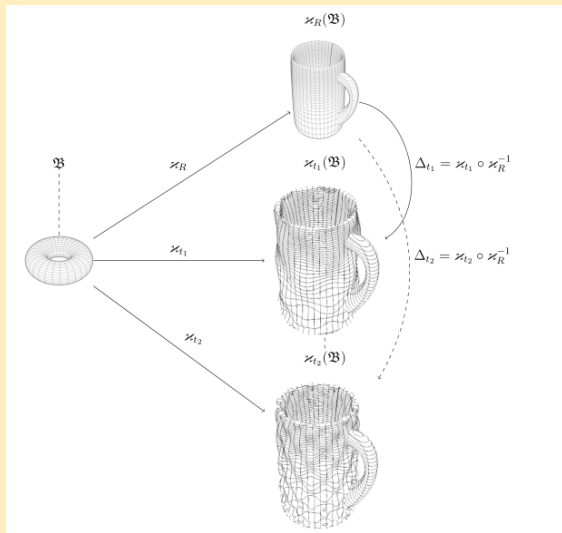


В классической механике деформируемого трехмерного твердого тела, как правило, предполагается **существование глобальной единообразной конфигурации, образ которой (форма) может быть целиком погружен в евклидово физическое пространство**. Такая конфигурация называется **отсчетной** и обозначается символом \mathcal{K}_R (reference). Движение тела рассматривается как преобразование его отсчетной формы $\mathcal{K}_R(\mathfrak{B})$ в актуальную $\mathcal{K}_t(\mathfrak{B})$, представляемое отображением Δ_t :

$$\Delta_t = \widehat{\mathcal{K}}_t \circ \widehat{\mathcal{K}}_R^{-1} : \mathcal{K}_R(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{K}_t(\mathfrak{B}),$$

т.е. **деформацией** тела из $\mathcal{K}_R(\mathfrak{B})$ в $\mathcal{K}_t(\mathfrak{B})$.

Конфигурации и деформации



Замечание

При моделировании тел с несовместными деформациями предположение о существовании **глобальной единообразной формы, которая может быть вложена в аффинно–евклидово физическое пространство**, не может быть принято. В этом случае требуется более детальное описание способа вложения тела в физическое пространство с указанием для каждого элементарного объема его индивидуальной отсчетной формы.

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразия физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
 - Принцип локализации
 - Инфинитезимальная локализация
- 12 Простой материал
- 13 Заключение

Принцип локализации математически выражает физическую идею близкодействия, согласно которой состояние (отклик) достаточно малой окрестности определяется, главным образом, искажениями этой окрестности, а искажения во внешней по отношению к ней части тела вносят пренебрежимо малый вклад.

Пусть $\mathfrak{B} = \mathcal{E}$. Обозначим через $N(\mathfrak{X})$ окрестность точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, а через $\mathcal{N}_{\mathfrak{X}}$ — множество всех таких окрестностей.

Принцип локализации

Введем отношение эквивалентности на множестве функций $\psi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{V}^m$, таких, что $\psi(\mathfrak{X}) = \mathbf{0}$, соотношением:

$$(\psi \sim \tilde{\psi}) \Leftrightarrow (\exists N \in \mathcal{N}_{\mathfrak{X}} \quad \forall \mathfrak{Z} \in N \quad \psi(\mathfrak{Z}) = \tilde{\psi}(\mathfrak{Z})).$$

Пусть теперь $\kappa \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{E})$. Локализация конфигурации κ в точке \mathfrak{X} определяется функцией

$$\psi = \kappa - \kappa(\mathfrak{X}),$$

удовлетворяющей условию $\psi(\mathfrak{X}) = \mathbf{0}$. Этой функции соответствует класс эквивалентности $\Phi(\kappa, \mathfrak{X})$. Полученное отношение разбивает множество конфигураций $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{E})$ на классы эквивалентности. Получающееся при этом фактормножество будем называть множеством локальных конфигураций и обозначать $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}; \mathfrak{X}}$.

Предположим, что физическое пространство \mathfrak{B} имеет аффинно–евклидову структуру, \mathcal{E} . Картирование \mathcal{E} будем осуществлять двумя способами — с помощью декартовых координат и некоторых криволинейных координат. Для этих картирований используются две копии \mathbb{R}^m : пространство \mathbb{R}_d^m , содержащее декартовы координаты, и пространство \mathbb{R}_c^m , содержащее криволинейные координаты.

Для некоторой точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ выберем содержащую ее карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, то есть, $\mathfrak{X} \in U_\alpha \subset \mathfrak{B}$, $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha$. Для конфигурации $\mathfrak{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ определим отображения

$$\bar{\mathfrak{x}}_\alpha = \mathfrak{x} \circ \varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{E};$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{x}}}_\alpha = \mathcal{X} \circ \bar{\mathfrak{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V};$$

$$\mathfrak{x}_{d;\alpha} = \mathcal{D} \circ \bar{\mathfrak{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_d^m,$$

где отображения \mathcal{X} и \mathcal{D} определены ранее.

Замечание

Отображение $\bar{\varkappa}_\alpha$ реализует координатное представление материальных точек: кортежам их координат в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ставятся в соответствие их места в физическом пространстве, то есть элементы точечного множества \mathcal{E} .

Отображение $\overline{\overline{\varkappa}}_\alpha$ осуществляет «векторизацию» конфигурации: каждой материальной точке, представленной координатами карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, ставится в соответствие вектор места, определяющий ее положение относительно фиксированного начала координат в \mathcal{E} .

Отображение $\varkappa_{d;\alpha}$ осуществляет «арифметизацию» конфигурации, представляя векторы места в декартовом базисе кортежами соответствующих декартовых координат.

Инфинитезимальная локализация

Помимо декартовых, в \mathcal{E} могут быть введены криволинейные координаты посредством задания некоторого атласа

$A = \{(\psi_\beta, V_\beta)\}_{\beta \in J}$. Пусть (ψ_β, V_β) — карта на \mathcal{E} , для которой $\varkappa(\mathcal{X}) \in V_\beta$. Определим отображение

$$\varkappa_{c; \alpha, \beta} = \psi_\beta^{-1} \circ \varkappa \circ \varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \supset \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap \varkappa^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(V_\beta \cap \varkappa(U_\alpha)) \subset \mathbb{R}_c^m,$$

которое определяет для точек из U_α криволинейные координаты их мест в \mathcal{E} (в образе конфигурации \varkappa). Отображение

$$f_{c; \beta} = (\mathcal{D} \circ \psi_\beta)^{-1} : \mathbb{R}_d^m \rightarrow \mathbb{R}_c^m$$

является преобразованием декартовых координат в криволинейные. Используя введенное отображение, можно записать:

$$\psi_\beta^{-1} = f_{c; \beta} \circ \mathcal{D}.$$

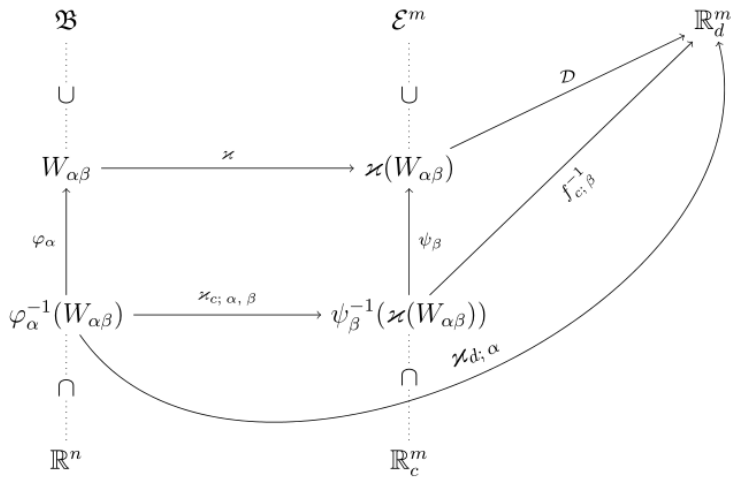
Из последнего соотношения вытекают выражение для $\varkappa_{c; \alpha, \beta}$:

$$\varkappa_{c; \alpha, \beta} = \psi_\beta^{-1} \circ \varkappa \circ \varphi_\alpha = f_{c; \beta} \circ \mathcal{D} \circ \varkappa \circ \varphi_\alpha,$$

и формула, связывающая $\varkappa_{c; \alpha, \beta}$ и $\varkappa_{d; \alpha}$:

$$\varkappa_{d; \alpha} = f_{c; \beta}^{-1} \circ \varkappa_{c; \alpha, \beta}.$$

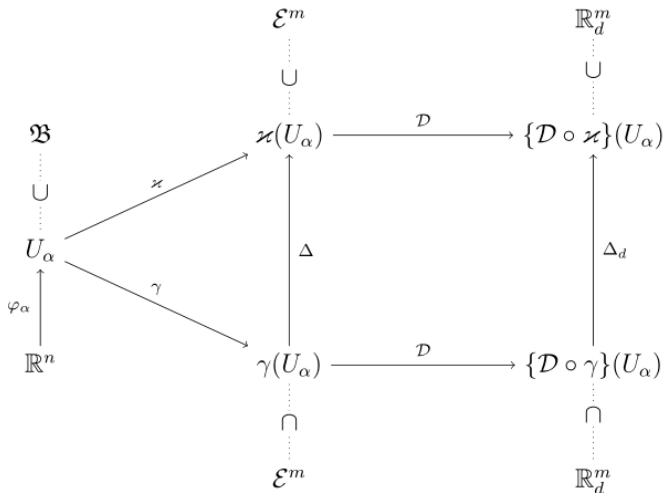
Этому выражению соответствует диаграмма $(W_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap \varkappa^{-1}(V_\beta))$:



Пусть $\kappa, \gamma \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ — две конфигурации, а $\Delta = \kappa \circ \gamma^{-1}$ — определяемая ими деформация. Представление Δ в декартовых координатах имеет вид:

$$\Delta_d = \kappa_d \circ \gamma_d^{-1} = \mathcal{D} \circ \kappa \circ \gamma^{-1} \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathbb{R}_d^m \supset [\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{B}) \rightarrow [\mathcal{D} \circ \kappa](\mathfrak{B}) \subset \mathbb{R}_d^m,$$

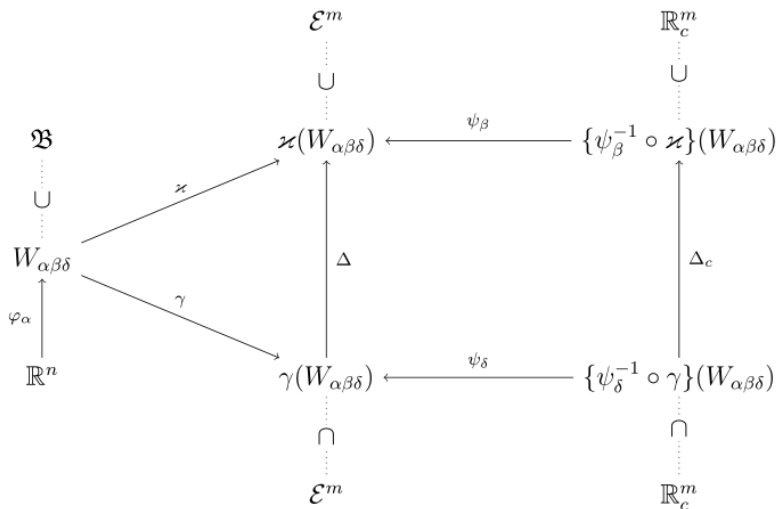
Это отображение между открытыми подмножествами \mathbb{R}^m , имеющее класс C^r . Связь между отображениями Δ и Δ_d иллюстрирует диаграмма:



Если (V_δ, ψ_δ) — карта, содержащая $\gamma(\mathfrak{X})$, то та же самая деформация Δ может быть представлена в криволинейных координатах с помощью отображения

$$\Delta_c = \varkappa_c \circ \gamma_c^{-1} = \psi_\beta^{-1} \circ \varkappa \circ \gamma^{-1} \circ \psi_\delta.$$

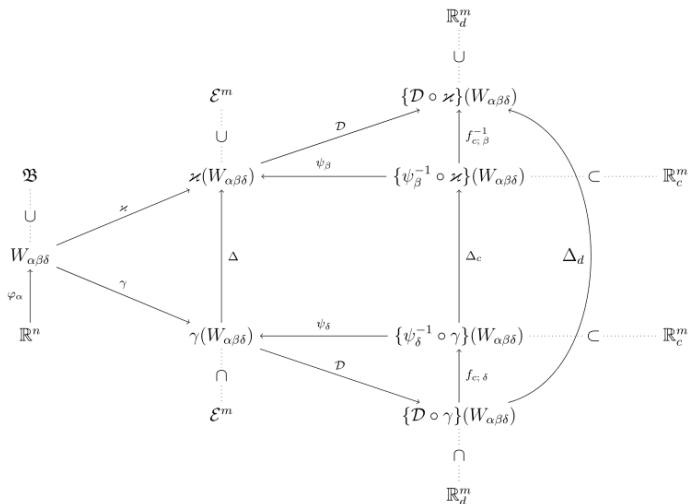
Связь между Δ и Δ_c показана на следующей диаграмме ($W_{\alpha\beta\delta} = U_\alpha \cap \varkappa^{-1}(V_\beta) \cap \gamma^{-1}(V_\delta)$):



Поскольку $\varkappa_{d;\alpha} = f_{c;\beta}^{-1} \circ \varkappa_{c;\alpha,\beta}$, $\gamma_{d;\alpha} = f_{c;\delta}^{-1} \circ \gamma_{c;\alpha,\delta}$, то для Δ_d получаем следующее равенство:

$$\Delta_d = \varkappa_d \circ \gamma_d^{-1} = (f_{c;\beta}^{-1} \circ \varkappa_c) \circ (f_{c;\delta}^{-1} \circ \gamma_c)^{-1} = f_{c;\beta}^{-1} \circ \Delta_c \circ f_{c;\delta}. \quad (3)$$

Связь между отображениями Δ_c и Δ_d иллюстрирует диаграмма ($W_{\alpha\beta\delta} = U_\alpha \cap \varkappa^{-1}(V_\beta) \cap \gamma^{-1}(V_\delta)$):



По предположению, отображение Δ_d между открытыми подмножествами \mathbb{R}_d^m является достаточно гладким, и согласно известным теоремам анализа, оно может быть локально представлено формулой Тейлора:

$$\Delta_d([\mathcal{D}\circ\gamma](\mathfrak{x})+h) = \Delta_d([\mathcal{D}\circ\gamma](\mathfrak{x})) + \underline{\mathbf{J}}_{[\mathcal{D}\circ\gamma](\mathfrak{x}); \Delta_d}[h] + o(\|h\|), \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

где $\underline{\mathbf{J}}_{[\mathcal{D}\circ\gamma](\mathfrak{x}); \Delta_d} \in \text{Lin}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m)$ — производное отображение, которое в естественном базисе \mathbb{R}^m может быть представлено $m \times m$ матрицей частных производных:

$$[\underline{\mathbf{J}}_{[\mathcal{D}\circ\gamma](\mathfrak{x}); \Delta_d}]_{ij} = \left. \frac{\partial[\pi_m^i \circ \Delta_d(z^1, \dots, z^m)]}{\partial z^j} \right|_{[\mathcal{D}\circ\gamma](\mathfrak{x})}.$$

В силу регулярности \mathfrak{x} , для фиксированного \mathfrak{x} и при $n = m$, $\underline{\mathbf{J}}_{[\mathcal{D}\circ\gamma](\mathfrak{x}); \Delta_d} = L\mathfrak{x} \in \text{InvlIn}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m)$. Отметим, что множество $\text{InvlIn}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ есть реализация общей линейной группы (другая изоморфная реализация общей линейной группы есть множество всех невырожденных $m \times m$ матриц $\text{GL}(m, \mathbb{R})$). Теперь все подготовлено для определения эквивалентных конфигураций.

(i) **Декартовы координаты**, $\dim \mathfrak{B} = \dim \mathcal{E}^m = m$. Полагаем, что две конфигурации $\varkappa, \gamma \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ эквивалентны в точке \mathfrak{X} , т.е. $\varkappa \sim_{\mathfrak{X}} \gamma$, если

$$\underline{\mathbf{J}}_{[\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{X}); \Delta_d} = \text{Id}, \quad \Delta_d = \varkappa_d \circ \gamma_d^{-1},$$

где Id — единица группы $\text{InvlIn}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m)$ обратимых линейных отображений. Из правил дифференцирования сложной функции следует, что отношение $\sim_{\mathfrak{X}}$ является отношением эквивалентности на множестве всех конфигураций $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ в строгом смысле. Разбиение $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ на классы эквивалентности обозначим через $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}; \mathfrak{X}}$, а сами классы эквивалентности — через $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$. Геометрический смысл введенного отношения заключается в следующем. Если $\varkappa \sim_{\mathfrak{X}} \gamma$, то деформация $\Delta = \varkappa \circ \gamma^{-1}$ переводит без искажений (с точностью первого порядка) малый объем, окружающий точку $\gamma(\mathfrak{X})$, в малый объем, окружающий точку $\varkappa(\mathfrak{X})$.

Повторяя рассуждения для отображения $\varkappa_{d; \alpha}$, получаем:

$$\underline{J}_{\varphi_{\alpha}^{-1}(\mathfrak{x}); \varkappa_{d; \alpha}} = K_{\mathfrak{x}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m).$$

Из правил цепного дифференцирования и дифференцирования обратной функции следует, что если $\varkappa, \gamma \in \mathcal{K}_{\mathfrak{x}}$, конфигурации \varkappa в точке \mathfrak{x} соответствует $K_{\mathfrak{x}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m)$, а конфигурации γ в той же точке — $G_{\mathfrak{x}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m)$, то $K_{\mathfrak{x}} = G_{\mathfrak{x}}$. Справедливо и обратное утверждение.

Таким образом каждому классу эквивалентности единственным образом может быть поставлен в соответствие элемент $K_{\mathfrak{x}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m)$. Следуя W. Noll, будем называть его *локальной конфигурацией*, а $L_{\mathfrak{x}}$ — *локальной деформацией*.

При этом отметим, что $K_{\mathfrak{x}}$ несет в себе субъективную информацию о картрировании тела, в то время, как в $L_{\mathfrak{x}}$ информация о картрировании исключена. Однако, $L_{\mathfrak{x}}$ несет в себе информацию сразу о двух конфигурациях.

Замечание

При смене карт в пределах одной C^r -структуры, разбиение конфигураций на классы эквивалентности, ассоциированное с фиксированной точкой \mathfrak{X} , не меняется. То есть, $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ не зависит от картирования. Это обосновывается определением Δ_d и возможным сужением карты.

Таким образом, разбиение на классы не зависит от картирования, а «идентификаторы» классов $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}} \in \text{Invlm}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m)$ — зависят.

Из того, что $\text{Invlm}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m)$ — группа, и теоремы Коши–Ковалевской вытекает следующее утверждение. *Если $L \in \text{Invlm}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m)$, $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ — локальная конфигурация, представляющая класс $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$, то существует класс $\mathcal{K}'_{\mathfrak{X}}$, который представляется локальной конфигурацией $L \circ \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$.*

(ii) **Криволинейные координаты**, $\dim \mathfrak{B} = \dim \mathcal{E}^m = m$.
 Пусть $\mathfrak{x}, \gamma \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ — другая конфигурация. В силу регулярности соответствующих конфигураций,

$$\underline{\mathbf{J}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); \Delta_c} = L_{\mathfrak{x}} \in \text{InvlIn}(\mathbb{R}_c^m; \mathbb{R}_c^m).$$

Поле $(\underline{\mathbf{e}}_k)_{k=1}^m$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m) \mapsto (\underline{\mathbf{e}}_i |_\xi)_{i=1}^m$, локальных координатных реперов криволинейной системы координат в карте (V_β, ψ_β) определяется соотношением

$$\underline{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial(\mathcal{X} \circ \psi_\beta)}{\partial \xi^k}, \quad \mathcal{X} \circ \psi_\beta: \mathbb{R}_c^m \rightarrow \mathcal{V}^m, \quad k = 1, \dots, m.$$

Замечание

Отметим, что отображения $\underline{e}_k \circ \psi_\beta^{-1}$ в совокупности образуют поле локальных координатных реперов, определенное в точках $V_\beta \subset \mathcal{E}^m$. Если $\underline{e}_k = u_k^j \underline{i}_j$, то по определению,

$$u_k^j = \frac{\partial[\pi_m^j \circ \mathcal{D} \circ \psi_\beta]}{\partial \xi^k} = \frac{\partial[\pi_m^j \circ f_{c; \beta}^{-1}]}{\partial \xi^k}. \text{ Поэтому, матрица Якоби}$$

отображения $f_{c; \beta}^{-1}$ есть матрица перехода от репера декартовой системы координат к координатному реперу криволинейной.

Из определения эквивалентности конфигураций κ и γ в точке \mathfrak{X} , сформулированного относительно $\Delta_d = \kappa_d \circ \gamma_d^{-1}$, получим его формулировку относительно $\Delta_c = \kappa_c \circ \gamma_c^{-1}$. Пусть $\kappa \sim_{\mathfrak{X}} \gamma$, тогда $\underline{J}_{[D \circ \gamma]}(\mathfrak{X}); \Delta_d = \text{Id}$.

Согласно правилу дифференцирования произведения сложной функции и теоремы о производной обратного отображения, приходим к равенству

$$\underline{\underline{J}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); \Delta_c} = \underline{\underline{J}}_{[\mathcal{D} \circ \varkappa](\mathfrak{x}); f_{c; \beta}} \circ \underline{\underline{J}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); f_{c; \delta}^{-1}}.$$

Пусть $h = h^k \underline{\underline{1}}_k \in \mathbb{R}_c^m$. Тогда

$$\underline{\underline{J}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); f_{c; \delta}^{-1}}[h] = \frac{\partial[\pi_m^j \circ f_{c; \delta}^{-1}]}{\partial \xi^k} \Big|_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x})} h^k \underline{\underline{1}}_j, \text{ откуда}$$

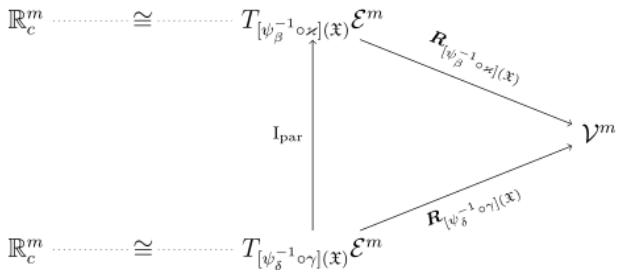
$$\mathcal{A}^{-1} \circ \underline{\underline{J}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); f_{c; \delta}^{-1}}[h] = h^k \underline{\underline{e}}_k \Big|_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x})}.$$

Положим $\underline{\mathbf{R}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})} := \mathcal{A}^{-1} \circ \underline{\mathbf{J}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X}); f_{c; \delta}^{-1}}$. Тогда¹
 $\underline{\mathbf{R}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})}[h] = h^k \underline{\mathbf{e}}_k|_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})}$. Следовательно, соотношение для Δ_c примет вид:

$$\underline{\mathbf{J}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X}); \Delta_c} = \underline{\mathbf{R}}_{[\psi_\beta^{-1} \circ \varkappa](\mathfrak{X})}^{-1} \circ \underline{\mathbf{R}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})}. \quad (4)$$

Последнее соотношение определяет правило параллельного переноса I_{par} . Вектор из \mathbb{R}_c^m , ассоциированный с точкой $[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})$, переводится оператором $\underline{\mathbf{R}}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})}$ в трансляционное пространство. Оттуда, оператором $\underline{\mathbf{R}}_{[\psi_\beta^{-1} \circ \varkappa](\mathfrak{X})}^{-1}$ полученный вектор отображается в пространство \mathbb{R}_c^m и ассоциируется с точкой $[\psi_\beta^{-1} \circ \varkappa](\mathfrak{X})$. Это соображение иллюстрирует диаграмма

¹В диадном разложении, $\underline{\mathbf{R}}_\delta = \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \pi_m^k$.



(iii) $\dim \mathfrak{B} = n < \dim \mathcal{E}^m$. Любая конфигурация \varkappa имеет ранг n , поэтому непосредственно свести этот случай к предыдущему не удастся. Однако $\varkappa(\mathfrak{B})$ можно покрыть картами из максимального атласа \mathcal{E}^m , такими, что в точках $\varkappa(\mathfrak{B})$ отличны от нуля только первые n локальных координат.

Соответствующее отображение \varkappa_c можно рассматривать как отображение между открытыми подмножествами \mathbb{R}^n и к нему применить определения из предыдущей части.

(iv) **Неевклидово физическое пространство \mathfrak{B} .**

Обобщая (4), скажем, что две конфигурации $\varkappa, \gamma \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ эквивалентны в точке \mathfrak{X} , т.е. $\varkappa \sim_{\mathfrak{X}} \gamma$, если

$$\mathbf{J}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X}); \Delta_c} = \widehat{\Gamma}_{\text{par}}^{\gamma(\mathfrak{X}) \rightarrow \varkappa(\mathfrak{X})},$$

где $\widehat{\Gamma}_{\text{par}}^{\gamma(\mathfrak{X}) \rightarrow \varkappa(\mathfrak{X})}$ — заранее заданный оператор параллельного переноса.

Таким образом, при инфинитesimalной локализации конфигураций для простых материалов классы эквивалентности однозначно определяются линейными преобразованиями $\underline{J}_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{X}); \varkappa_d; \alpha}$, которые, следуя W. Noll, будем называть **локальными конфигурациями**. Каждому такому классу принадлежит некоторая однородная конфигурация K_R , которая осуществляет трансформацию всех элементарных объемов одинаково — посредством линейного преобразования $\underline{J}_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{X}); \varkappa_d; \alpha}$.

Среди всех классов $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ (локальных конфигураций), ассоциированных с точкой \mathfrak{X} , особую роль играет класс $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}^R$, которому принадлежит тестовая отсчетная (единообразная) конфигурация, т.е. та, которая воспроизводится в эксперименте при идентификации функционала отклика. Совокупность таких классов образует непрерывное семейство, параметризованное точками тела \mathfrak{B} :

$$\text{Ref}_{\mathfrak{B}} = \{\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}. \quad (5)$$

Выбирая из классов семейства (5) любые конфигурации $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}^R$ (по одной из каждого класса), получим семейство конфигураций, каждая из которых трансформирует элементарный объем с отвечающей ему точкой \mathfrak{X} в единообразную форму:

$$\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}} = \{\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}. \quad (6)$$

Полезным для интерпретации единообразной отсчетной конфигурации является семейство (6), в котором выбираются однородные конфигурации $K_{\mathfrak{x}}^R \in \mathcal{K}_{\mathfrak{x}}^R$, т.е.

$$\overline{\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}}} = \{K_{\mathfrak{x}}^R\}_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}}. \quad (7)$$

Образно говоря, семейству (6) соответствует континуальное множество значений этих конфигураций, вычисленных в инфинитезимальных окрестностях точек — «осколков» тела \mathfrak{B} , геометрически несовместных (мозаика осколков не складывается в связанную форму), но находящихся в физическом состоянии, эквивалентном тестовому образцу.

С другой стороны, каждому «осколку» соответствует некоторая линейная трансформация из стандартного инфинитезимального куба — следствие того, что локализация инфинитезимальна и имеет первый порядок — и множеству $\mathcal{K}_R(\mathfrak{X})$ может быть поставлено в соответствие континуальное семейство линейных трансформаций. Если тело подвергать однородному деформированию, поочередно перебирая элементы семейства (7), то все его элементарные объемы в той же очереди окажутся в единообразном состоянии.

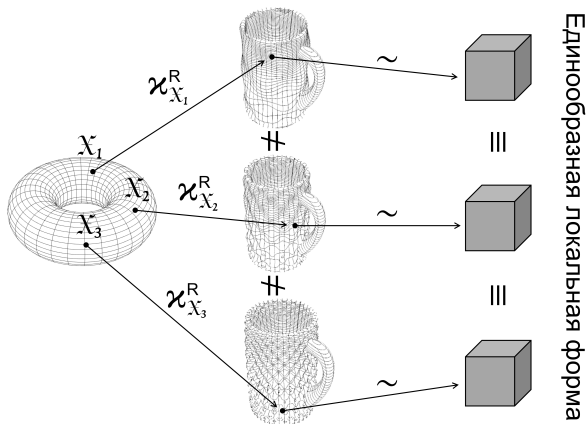


Рис.: Единообразная локальная форма. Случай $\chi_{x_i}^R \neq \chi_{x_j}^R$, $i, j \neq 1, 2, 3$

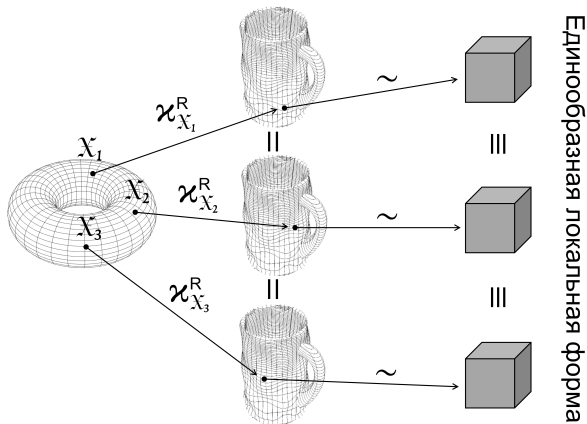


Рис.: Единообразная локальная форма. Случай $\chi_{x_i}^R = \chi_{x_j}^R$, $i, j \neq 1, 2, 3$

Очевидно, что если возможно отыскать семейство (6), в котором все элементы совпадают с некоторой конфигурацией \mathcal{K}_0 , то такое тело обладает натуральными конфигурациями (одной или несколькими), и \mathcal{K}_0 — одна из них.

В качестве гипотезы полагаем, что это семейство линейных трансформаций может быть представлено как сечение касательного расслоения. Эта гипотеза формализует идею о том, что несовместность деформации порождается гладкими физическими полями (дефектов, усадки и т.п.).

Гладкое поле линейных трансформаций, применяемых к координатным реперам, формализует процедуру подвижного репера Дарбу–Картана и «геометризует» многообразие \mathfrak{B} .

Такая «геометризация» позволяет описать физические эффекты, вызванные несовместными деформациями, на языке дифференциальной геометрии.

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразия физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал**
- 13 Заключение

Для количественного описания отклика материала на (локальные) трансформации используется функционал отклика, представленный отображениями типа $\mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^k$. Поясним это подробнее. Нет нужды ограничиваться только механическими свойствами тел, как это принято в классической нелинейной упругости. Функционал отклика может быть определен для тел, состояние которых определяется также температурными, оптическими, электрическими, магнитными и т.д. полями. В этих случаях следует полагать, что отклик тела определяется по упорядоченному набору полей, в котором деформация представлена только полем локальных деформаций.

Для математического описания отклика тела следует оснастить множество \mathfrak{B} дополнительными структурами, представляющими физические свойства и соответствующие им поля. Некоторые из этих свойств, такие, как упругость, вязкость, теплопроводность, электропроводность, магнитная проницаемость, являются локальными, т.е. они ассоциированы с индивидуальной материальной точкой $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, а не со всем телом в целом. Другие свойства, например, гравитационное взаимодействие, определяются по двум и более различным точкам. Такие взаимодействия определяют нелокальные свойства тела. В рамках концепции простого тела рассматриваются только его локальные свойства.

Приведем определение *простого тела* (W. Noll). Пусть R — множество, элементы которого называются дескрипторами отклика (поле напряжений представляет пример такого дескриптора). Непрерывное тело \mathfrak{B} будем называть простым телом по отношению к R , если оно наделено структурой посредством функции \mathcal{R} , которая присваивает каждой точке \mathfrak{X} отображение

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}; \mathfrak{X}} \rightarrow R, \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{X}} : \mathcal{K}_{\mathfrak{X}} \mapsto r \in R,$$

то есть, при всех регулярных конфигурациях $\kappa \in \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ отклик тела в окрестности точки \mathfrak{X} — значение $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ — один и тот же.

До этого момента мы использовали понятия физически эквивалентных состояний, опираясь на интуицию. Теперь, используя определенное выше отображение отклика тела, мы можем дать точное определение этого понятия.

Чтобы придать математический смысл высказыванию о том, что физическое состояние окрестности $V_{\mathfrak{X}} \subset \mathfrak{P}$ образа материальной точки \mathfrak{X} в конфигурации κ неотлично от физического состояния окрестности $V_{\mathfrak{Y}} \subset \mathfrak{P}$ образа другой материальной точки \mathfrak{Y} в конфигурации ω , введем понятие *материального изоморфизма*.

В начале отметим, что эквивалентность физических состояний двух частей образов тела в физическом пространстве определяется относительно принятого для этого тела функционала отклика: если его значения для любых точек из $V_{\mathfrak{X}}$ и $V_{\mathfrak{Y}}$, вычисляемые на любых допустимых деформациях, совпадают, то $V_{\mathfrak{X}}$ и $V_{\mathfrak{Y}}$ считаются материально изоморфными. Образно говоря, показания прибора, датчики которого закреплены в произвольных точках из $V_{\mathfrak{X}}$ и $V_{\mathfrak{Y}}$, совпадают для любых допустимых деформаций, совершаемых над телом. Количественно, это условие выражается следующим равенством:

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathfrak{F}) \quad \forall \mathfrak{X}' \in \kappa_1^{-1}(V_{\mathfrak{X}}) \quad \forall \mathfrak{Y}' \in \omega^{-1}(V_{\mathfrak{Y}}), \quad (8)$$

$$\mathcal{R}(\mathfrak{X}', \gamma \circ \kappa_1) = \mathcal{R}(\mathfrak{Y}', \gamma \circ \omega),$$

где $\gamma = \kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}$.

Если полагать окрестности V_x и V_y инфинитезимальными, то соотношение (8) запишется в виде

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B}; \mathfrak{P}) \quad \mathcal{R}(x, \gamma \circ \kappa) = \mathcal{R}(y, \gamma \circ \omega), \quad \gamma = \kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}. \quad (9)$$

По аналогии с терминологией, принятой в определении локализации, условие (9) будем называть инфинитезимальным материальным изоморфизмом.

Отображение, устанавливающее изоморфизм, определяет деформацию из формы $\kappa(\mathfrak{B})$ в форму $\omega(\mathfrak{B})$, то есть,

$$\Phi_{\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{y}} = \omega \circ \kappa^{-1}.$$

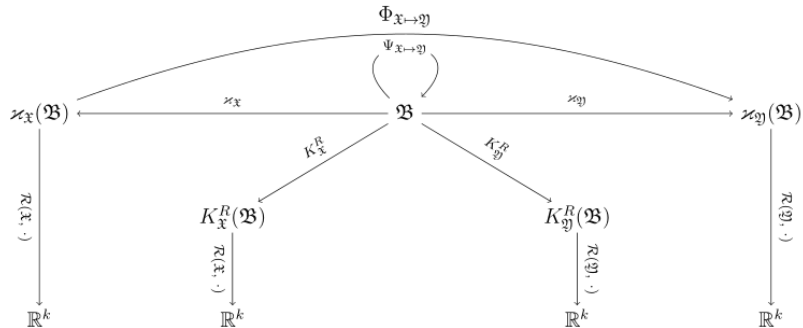
Если ввести обозначение $\kappa_0 = \gamma \circ \kappa$, то соотношение (9) примет вид:

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}) \quad \mathcal{R}(\mathfrak{x}, \kappa_0) = \mathcal{R}(\mathfrak{y}, \kappa_0 \circ \Psi_{\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{y}}), \quad \gamma = \kappa_1 \circ \kappa_2^{-1},$$

где $\Psi_{\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{y}} = \kappa^{-1} \circ \omega : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ — автоморфизм материального многообразия (отображение тела \mathfrak{B} на себя). Это отображение представляет элемент группы автоморфизмов $\text{Aut } \mathfrak{B}$. По терминологии W. Noll, такое отображение — **материальный изоморфизм**.

Следующая диаграмма показывает отношения отображений, используемых при определении $\Psi_{\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{y}}$:

Материальный изоморфизм



Комментарии к диаграмме:

На этой диаграмме используются следующие обозначения: \mathcal{X} , \mathcal{Y} — конфигурации, трансформирующие окрестности точек \mathcal{X} , \mathcal{Y} в единообразное состояние; $K_{\mathcal{X}}^R$, $K_{\mathcal{Y}}^R$ — однородные конфигурации, трансформирующие эти окрестности в то же состояние. Эквивалентность всех этих состояний определяется откликом \mathcal{R} , значения «прибора», символически указанного на диаграмме стрелкой, направленной на его «шкалу» \mathbb{R}^k , одни и те же. Деформация, при которой тело из формы, в которой окрестность точки \mathcal{X} находится в единообразном состоянии, трансформируется в форму, в которой окрестность точки \mathcal{Y} оказывается в единообразном состоянии, обозначена дуговой стрелкой $\Phi_{\mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}}$. Материальные изоморфизмы обозначены циклической стрелкой.

Все функционалы отклика, указанные на диаграмме, принимают одни и те же значения в \mathbb{R}^k ,

$$\mathcal{R}(\mathfrak{X}, \kappa_{\mathfrak{X}}) = \mathcal{R}(\mathfrak{X}, K_{\mathfrak{X}}^R), \quad \mathcal{R}(\mathfrak{Y}, \kappa_{\mathfrak{Y}}) = \mathcal{R}(\mathfrak{Y}, K_{\mathfrak{Y}}^R),$$

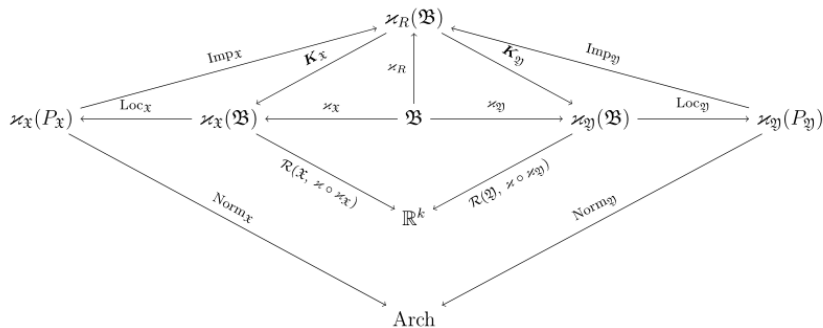
поскольку $\kappa_{\mathfrak{X}}$, $K_{\mathfrak{X}}^R$ и $\kappa_{\mathfrak{Y}}$, $K_{\mathfrak{Y}}^R$ попарно принадлежат одним и тем же классам, и, по условию,

$$\forall \gamma \quad \mathcal{R}(\mathfrak{X}, \gamma \circ \kappa_{\mathfrak{X}}) = \mathcal{R}(\mathfrak{Y}, \gamma \circ \kappa_{\mathfrak{Y}}).$$

Заметим, что группа материальных изоморфизмов $\text{Aut}\mathfrak{B}$ содержит подгруппы трансляций, поворотов и изменения масштаба, которые используются для формулировки вариационных симметрий и законов сохранения.

Локальные единообразные конфигурации $\kappa_{\mathfrak{X}}$ или $K_{\mathfrak{X}}^R$ характеризуют способ трансформации тела, при котором элементарный объем, содержащий точку \mathfrak{X} , перейдет в единообразное физическое состояние. Двойственное к ним преобразование элементарного объема из единообразного отсчетного состояния в напряженное, реализуемое в некоторой конфигурации κ_R , будем, следуя терминологии G. Maugin, называть имплантом $\text{Imp}_{\mathfrak{X}}$. При этом, аргумент импланта — элементарный объем в единообразном состоянии — является «универсальным строительным блоком», из которого может быть построено все тело \mathfrak{B} . Этот «строительный блок» — **архетип** — можно представить как достаточно малую часть тела (настолько малую, что ее целиком можно преобразовать в единообразное состояние), которая была использована для идентификации материала, т.е. построения функционала отклика (см. диаграмму).

Материальный изоморфизм



На диаграмме используются следующие обозначения:

$\underline{K}_x, \underline{K}_y$ — однородные деформации, переводящие точку \mathfrak{X} (соответственно, \mathfrak{Y}) в единообразное состояние; $\text{Imp}_x, \text{Imp}_y$ — соответствующие импланты, Arch — архетип. Отображения κ_x, κ_y — единообразные отсчетные конфигурации, то есть,

$$\forall \kappa \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}; \mathfrak{F}) \quad \mathcal{R}(x, \kappa \circ \kappa_x) = \mathcal{R}(y, \kappa \circ \kappa_y).$$

$\underline{K}_x, \underline{K}_y$ — однородные отсчетные деформации, которые трансформируют малые окрестности точек $\mathcal{K}_R(x)$, указанных в индексах, в единообразное состояние. Если тело испытывает движение, при котором поочередно реализуются все \underline{K}_x , то наблюдатель будет видеть поочередное релаксирование частей тела в единообразное состояние. L_{osx} и L_{osy} — операторы локализации, которые ставят в соответствие образу тела $\mathcal{K}_x(\mathcal{B})$ (или $\mathcal{K}_y(\mathcal{B})$) образ его части, содержащий точку x .

Именно,

$$\text{Loc}_x : \kappa_x(\mathfrak{B}) \mapsto \kappa_x(P_x), \quad \text{Loc}_y : \kappa_y(\mathfrak{B}) \mapsto \kappa_y(P_y),$$

где P_x, P_y — прообразы элементов разбиения множества $\kappa_R(\mathfrak{B})$:

$$P_x = \kappa_R^{-1}(\text{Part}(\kappa_R(\mathfrak{B}), \kappa_R(x))), \quad P_y = \kappa_R^{-1}(\text{Part}(\kappa_R(\mathfrak{B}), \kappa_R(y)));$$

$\text{Part}(A, X)$ — элемент разбиения множества A , содержащего точку X . Обратим внимание на то, что разбиение производится над множеством $\kappa(\mathfrak{B}) \subset P$, то есть формой тела, поскольку форма наблюдаема, а само тело — нет.

$\text{Norm}_{\mathcal{X}}$ и $\text{Norm}_{\mathcal{Y}}$ — операторы нормализации; отображения, сужающие части тела до геометрически эквивалентного точечного множества, общего для всех. Таким точечным множеством может быть, например, шар, т.е.

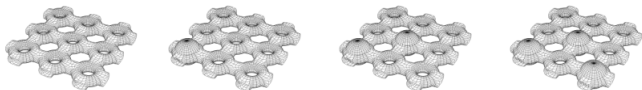
$$\text{Norm}_{\mathcal{X}} : \kappa_{\mathcal{X}}(P_{\mathcal{X}}) \mapsto \kappa_{\mathcal{X}}(\bar{P}_{\mathcal{X}}), \quad \text{Norm}_{\mathcal{Y}} : \kappa_{\mathcal{Y}}(P_{\mathcal{Y}}) \mapsto \kappa_{\mathcal{Y}}(\bar{P}_{\mathcal{Y}}),$$

где $\bar{P}_{\mathcal{X}}$ — шар с центром в центреиде формы $\kappa_{\mathcal{X}}(P_{\mathcal{X}})$, фиксированного для всех \mathcal{X} радиуса. Этот радиус достаточно мал, настолько, что этот шар можно вписать во все формы $\kappa_{\mathcal{X}}(P_{\mathcal{X}})$ и $\kappa_{\mathcal{Y}}(P_{\mathcal{Y}})$.

В общем случае, эволюция тела предполагает изменение во времени многообразия \mathfrak{B} , семейства отсчетных форм $\text{Ref}_{\mathfrak{B}}$ и актуальной конфигурации \mathcal{K}_t , осуществляющей вложение \mathfrak{B} в \mathfrak{R} .

Случай, когда \mathfrak{B} и $\text{Ref}_{\mathfrak{B}}$ не изменяются, а меняется лишь \mathcal{K}_t , соответствует деформированию (движению) тела в классическом смысле. Случай, когда \mathfrak{B} не изменяется, а $\text{Ref}_{\mathfrak{B}}$ и \mathcal{K}_t различны в разные моменты времени, соответствует деформированию и одновременно происходящей перестройке внутренней структуры, например, усадке, пластическим эффектам и т.п. В общем случае многообразие \mathfrak{B} так же меняется во времени, что может быть связано с притоком или оттоком материальных точек. При этом, в общем случае изменяется топология \mathfrak{B} , в частности, изменяются топологические инварианты \mathfrak{B} (например, Эйлера характеристика χ).

Визуализация одного из примеров приведена на следующем рисунке. На нем показана эволюция тела, топологически эквивалентного n -полноторию, в ходе которой, за счет присоединения экстраматериала, последовательно изменяется Эйлерова характеристика χ .



$$k = 1, \chi(\Omega_1) = n \rightarrow k = 2, \chi(\Omega_2) = n + 2 \rightarrow k = 3, \chi(\Omega_3) = n + 4 \rightarrow k = 4, \chi(\Omega_4) = n + 6$$

Рис.: Изменение топологической структуры тела в процессе его эволюции

- 1 Тело как топологическое пространство
- 2 Гладкие многообразия
- 3 Тело как гладкое многообразие
- 4 Физическое пространство
- 5 Погружения и вложения
- 6 Конфигурации
- 7 Подмногообразия
- 8 Образ тела как подмногообразия физического пространства
- 9 Теорема о выпрямлении
- 10 Конфигурации и движения
- 11 Локализация
- 12 Простой материал
- 13 **Заключение**

Заключение

Кратко резюмируем первую часть курса.

Математические модели тел с несовместными деформациями, основаны на следующих гипотезах:

1. Тело может быть представлено гладким многообразием \mathfrak{B} .
2. Физическое пространство может быть представлено гладким многообразием \mathfrak{F} .
3. Физические феномены, ассоциированные с телом, могут быть описаны элементами C^r -структуры, определенной на \mathfrak{B} .
4. Формы тела определяются C^r -отображениями $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{F}$.
- 4а. Эти отображения — погружения (конфигурации).
- 4б. Эти отображения — вложения (регулярные конфигурации).
5. Тело является простым, т.е. его отклик определяется инфинитезимально локальными конфигурациями.

Для описания отклика тела, соответствующего некоторому заданному вложению (погружению) достаточно определить континуальное семейство локальных единообразных форм.

Для описания эволюции отклика необходимо определить:

- A. Эволюцию вложений.
- B. Эволюцию семейства локальных единообразных форм.
- C. Эволюцию топологической структуры тела.