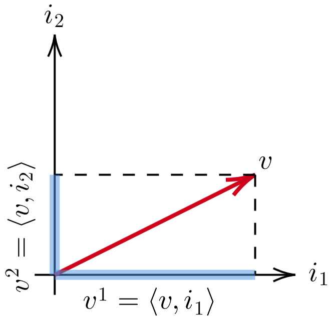
1. Дуальный Базис

Рассмотрим ортонормированный базис $\{i_1,...,i_n\}$, то есть базис, элементы которого попарно ортогональны, а их нормы равны единице:



$$\langle i_p, i_q \rangle = \delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

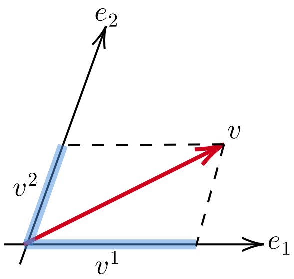
В таком базисе компоненты разложения любого вектора v (проекции на элементы базиса) находятся через скалярное умножение v на элементы базиса

$$v = v^k i_k = \sum_{k=1}^{n} v^k i_k = v^1 i_1 + ... + v^n i_n$$

Теперь рассмотрим произвольный базис $\{e_1,...,e_n\}$. Вектор v в этом базисе будет иметь некоторое разложение

$$v = v^k e_k = v^1 e_1 + ... + v^n e_n. \tag{1}$$

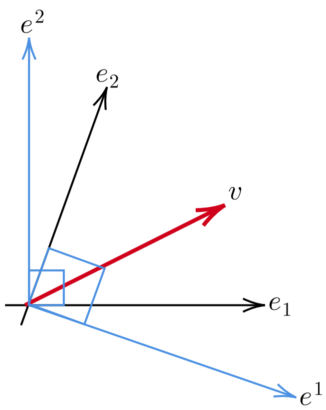
Открытым остается вопрос о нахождении компонент разложения $v^1,...,v^n$.



Решение этого вопроса не такое тривиальное, как в случае с ортонормированным базисом. Ответ может быть дан геометрически, аппелируя к правилу параллелограмма для двумерного случая. Для этого достаточно построить параллелограмм со сторонами лежащими на базисных векторах e_1 и e_2 и диагональю, представляющей вектор v. Но можно ли как-нибудь автоматизировать процесс нахождения компонент разложения вектора v в произвольном базисе и сделать его пригодным для многометрного случая?

Для этого нужно подобрать некоторые векторы, которые будут удовлетворять условиям типа условий ортонормированности. Подберем такие векторы $\left\{e^1,...,e^n\right\}$, для которых

$$\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j. \tag{2}$$



Спроектируем вектор v на один из векторов e^i (домножим скалярно левую и праву части выражения (1) на e^i)

$$\langle e^i, v \rangle = v^1 \langle e^i, e_1 \rangle + ... + v^i \langle e^i, e_i \rangle + ... + v^n \langle e^i, e_n \rangle.$$

Из условия получаем, что для i-й компоненты

$$v^i = \langle e^i, v \rangle$$

Существование векторов e^i обеспечивается условием (2), которое представляет из себя неоднородную систему линейных уравнений, матрица коэффициентов которой невырождена. Более того, можно доказать, что система векторов $\left\{e^1,...,e^n\right\}$ образует базис, который принято называть дуальным к исходному.

Опр. 1 *Базис* $\left\{e^1,...,e^n\right\}$ *называется дуальным к исходному базису* $\{e_1,...,e_n\}$*, если выполняется условие:* $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$.

Так как сконструированный дуальный базис так же является базисом рассматриваемого векторного пространства, то любой вектор v можно представить в виде

$$v = v_k e^k = v_1 e^1 + ... + v_n e^n,$$

где, повторяя аналогичные рассуждения, компоненты разложения могут быть найдены как проекции на исходный косоугольный базис

$$v_i = \langle e_i, v \rangle.$$

2. Тензоры и Дифференцируемые Отображения

Уравнения математической физики, как правило, дифференциальные, а производные функций дают приближение в малой окрестности. Поэтому, записывая уравнения, мы, как будто, переносимся в окрестность некоторой исследуемой точки. Возникает естественное желание ввести новые координаты в окрестности этой точки. Как будет показано в дальнейшем, удобно использовать координаты для векторных величин, ассоциированных с этой точкой, которые являются касательными к координатным линиям.

Опр. 2 *Локальный базис в точке p — базис, образованный векторами, касательными к координатным линиям в точке p.*

Когда мы вводим криволинейные координаты, мы получаем целое семейство базисов, каждый из которых ассоциирован со своей точкой. Это определяет основую техническую сложность работы с криволинейными координатами.

Пусть имеется векторное поле V

$$\begin{aligned} V\colon \mathscr{E}^n &\to \mathscr{V}^n \\ p &\mapsto v. \end{aligned} \tag{3}$$

Точка p может быть предствлена в тех или иных координатах, что позволяет нам ассоциировать ее с упорядоченной n-кой чисел в $\mathbb{R}^n$. Аналогичная ситуация и с вектором v. Тогда отображение (3) принимает вид

$$V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Опр. 3 *Отображение $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется дифференцируемым в точке $p \in \mathbb{R}^n$, если*

$$V(p+h) = V(p) + L_p[h] + o(\|h\|), \tag{4}$$

где $L_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, который в координатах фиксированного базиса может быть представлен матрицей $n \times n$, которая умножается на вектор столбец, представляющий координаты вектора h.

Попробуем получить покомпонентное представление выражения (4). Для этого определим новый алгебраический объект.

Опр. 4 *Диадой $a \otimes b$ называется линейный оператор над векторным пространством $\mathscr{V}$, который конструируется двумя векторами из $\mathscr{V}$: направляющим вектором a и проецирующим вектором b, и который действует на произвольный вектор $v \in \mathscr{V}$ следующим образом:*

$$\begin{aligned} a \otimes b\colon \mathscr{V} &\to \mathscr{V} \\ v &\mapsto (a \otimes b)(v) = a\langle b, v\rangle \end{aligned}$$

Диада представляет частный пример линейного оператора над $\mathscr{V}$. Можно доказать, что любой линейный оператор над векторным пространством $\mathscr{V}$ с выбранным базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$ может быть представлен в виде линейной комбинации диад, построенных над элементами $\{e_1, \dots, e_n\}$. То есть

$$L\colon \mathscr{V} \xrightarrow{\sim} \mathscr{V} \implies L = L^{ij} e_i \otimes e_j. \tag{5}$$

Обобщая эту идею, приходим к идее о представлении любого линейного оператора, отображающего векторное пространство $\mathscr{V}$ с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$ на пространство $\mathscr{W}$ со своим базисом $\{g_1, \dots, g_m\}$:

$$L\colon \mathscr{V} \xrightarrow{\sim} \mathscr{W} \implies L = L^{ij} e_i \otimes g_j,\ i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m$$

Диады $e_i \otimes g_j$ называются элементами базиса тензорного пространства (пространства линейный операторов), а числа L^{ij} называются компонентами этого линейного оператора.

Дальнейшее развитие техники работы с криволинейными координатами основывается на договоренности о наличии евклидова пространства с декартовым базисом. Стоит понимать, что такая договоренность очень ограничительна. Например, уравнения, которые определяют гравитационные взаимодействия в рамках общей теории относительности не могут этого предполагать, потому что пространство-время обладает некоторыми существенно неевклидовыми свойствами. Но без представлений, ассоциированных с декартовым базисом и декартовыми координатами нельзя последовательно построить органичную теорию.

Поэтому мы будет придерживаться индуктивного подхода и будем формировать все определения изначально в фундаментальном для нас декартовом базисе, перенося их в дальнейшем по правилам анализа на представления, связанные с криволинейными координатами.

Начнем с введения оператора Гамильтона. Его первоначальное определение в декартовом базисе $\{i_1,...,i_n\} = \left\{i^1,...,i^n\right\}$ в евклидовом пространстве имеет вид

$$\nabla := i^k \frac{\partial}{\partial x^k} = i_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + ... + i_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

В декартовых координатах векторное поле V может быть представлено как $V = V^p i_p = V^1 i_1 + ... + V^n i_n$, тогда получим следующее представление для тензорного произведения оператора Гамильтона на векторное поле V в виде диадного разложения

$$\begin{gathered} \nabla \otimes V = i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes V^p i_p = \frac{\partial V^p}{\partial x^k} i^k \otimes i_p = \\ = \frac{\partial V^1}{\partial x^1} i^1 \otimes i_1 + ... + \frac{\partial V^n}{\partial x^1} i^1 \otimes i_n + \frac{\partial V^1}{\partial x^n} i^n \otimes i_1 + ... + \frac{\partial V^n}{\partial x^n} i^n \otimes i_n. \end{gathered} \tag{6}$$

Легко заметить, как диадное разложение (6) может быть представлено в виде (5):

$$\nabla \otimes V = L^p_k i^k \otimes i_p, \; L^p_k = \frac{\partial V^p}{\partial x^k}$$

Здесь компоненты L^p_k могут быть представлены матрицей частных производных

$$\nabla \otimes V \cong \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial V^n}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial V^1}{\partial x^n} & \cdots & \dfrac{\partial V^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Определим действие оператора $\nabla \otimes V$ на произвольный вектор $h \in \mathscr{V}$.

$$(\nabla \otimes V)[h] := \langle h, L^p_k i^k \otimes i_p \rangle = L^p_k \langle h, i^k \rangle i_p = \frac{\partial V^p}{\partial x^k} h^k i_p.$$

Здесь $\dfrac{\partial V^p}{\partial x^k}$ частная производная p-й компоненты векторного поля V по k-й координате, h^k — k-е приращение аргумента, i_p — направление, в котором определяется производная V^p.

Вернемся к определению (4). В нем линейный оператор L_p заменим оператором $\nabla \otimes V$. Тогда (4) перепишется в виде:

$$V(p+h) = V(p) + \frac{\partial V^p}{\partial x^k} h^k i_p + o(\|h\|).$$

3. Криволинейные Координаты

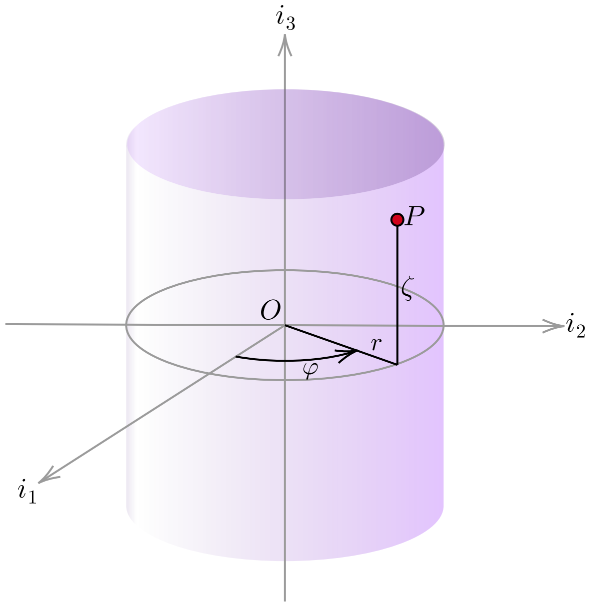
3.1. Общие Соотношения

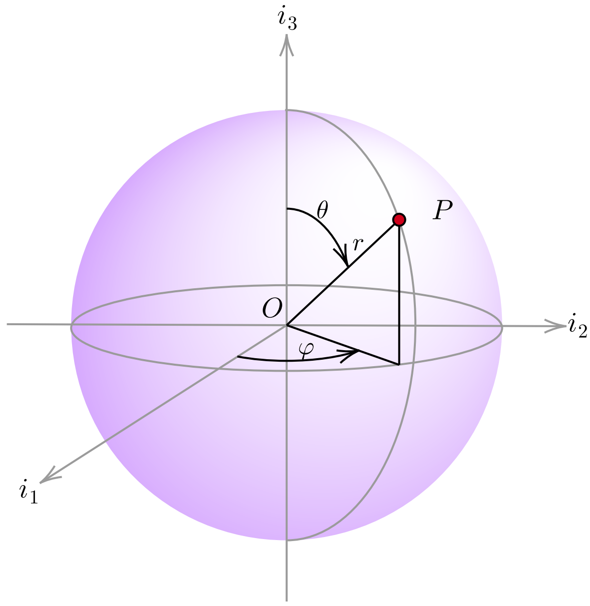
Криволинейные координаты определяют репараметризацию афинно-евклидова пространства.

Декартовы координаты определяются как зависимости от новых криволинейных координат

$$\begin{cases} x^1 = \mathfrak{X}^1\left(q^1,...,q^n\right) \\ .... \\ x^n = \mathfrak{X}^n\left(q^1,...,q^n\right) \end{cases}$$

Цилиндрическая система координат	Сферическая система координат
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = \zeta \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ \zeta = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ \theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}$





3.2. Локальные Базисы

Общее представление для компоненты локального базиса, которая представляет из себя касательный вектор к одной из координатных линий:

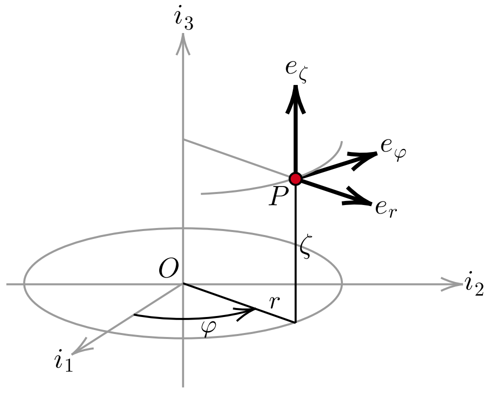
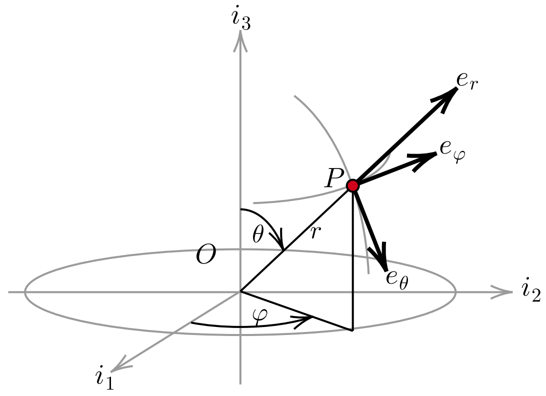
$$e_k = \frac{\partial r}{\partial q^k}, \tag{7}$$

где r — радиус-вектор из начала координат в точку P, в которой определяется локальный базис. Разложим по компонентам

$$r = i_m x^m = i_m \mathfrak{X}^m(q_1, \ldots, q_n).$$

Подставляя в (7) получаем

$$e_k = \frac{\partial}{\partial q^k}\Big(i_m \mathfrak{X}^m(q_1, \ldots, q_n)\Big)$$

Цилиндрическая система координат	Сферическая система координат
	
$r = i_1 r\cos\varphi + i_2 r\sin\varphi + i_3\zeta$ $\begin{cases} e_r = i_1\cos\varphi + i_2\sin\varphi \\ e_\varphi = -i_1 r\sin\varphi + i_2 r\cos\varphi \\ e_\zeta = \zeta \end{cases}$	$r = i_1 r\sin\theta\cos\varphi + i_2 r\sin\theta\sin\varphi + i_3 r\cos\theta$ $\begin{cases} e_r = i_1\sin\theta\cos\varphi + i_2\sin\theta\sin\varphi + i_3\cos\theta \\ e_\theta = i_1 r\cos\theta\cos\varphi + i_2 r\cos\theta\sin\varphi - i_3 r\sin\theta \\ e_\varphi = -i_1 r\sin\theta\sin\varphi + i_2 r\sin\theta\cos\varphi \end{cases}$

3.3. Метрический Тензор

Тензор — это линейный оператор, который может быть представлен через диадное разложение. Например, через разложение по диадам, составленным из базисных векторов

$$T = T^{ij} e_i \otimes e_j.$$

Рассмотрим произвольные векторы u и v, которые могут быть разложены по компонентам фундаментального декартового базиса или по компонентам локального базиса криволинейной системы координат:

$$u = i_k u^k;\; u = e_{q_k} u^{q_k}$$
$$v = i_p v^p;\; v = e_{q_p} v^{q_p}.$$

Их скалярное произведение в декартовом базисе по определению:

$$\langle u, v\rangle = u^k v^p \delta_{kp}.$$

С другой стороны, скалярное произвдение при разложении по локальному базису криволинейной системы координат:

$$\langle u, v\rangle = \langle u^\alpha e_\alpha, v^\beta e_\beta\rangle = u^\alpha v^\beta \langle e_\alpha, e_\beta\rangle, \tag{8}$$

где для простоты обозначений $\alpha = q_k$, $\beta = q_p$, а $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = g_{\alpha\beta}$ представляет из себя некий набор корректирующих величин (плата за использование не декартового базиса), который, как будет показано дальше, составляет компоненты определенного тензора g, называемого метрическим тензором.
Для нахождения компонент $g_{\alpha\beta}$ представим компоненты векторов u и v в локальном базисе через их скалярное произведение на элементы дуального базиса:

$$u = e_\alpha \langle e^\alpha, u\rangle;\; v = e_\beta \langle e^\beta, v\rangle. \tag{9}$$

Заметим, что выражение (9) может быть представлено суммой действия диад на векторы u и v:

$$u = \left(e_\alpha \otimes e^\alpha\right) u;\; v = \left(e_\beta \otimes e^\beta\right) v.$$

Окончательно, очевидным становится представление метрического тензора g

$$g = g_{\alpha\beta} e^\alpha \otimes e^\beta.$$

Проверим его действие на векторы u и v

$$ugv = \left(u^m e_m\right)\left(g_{\alpha\beta} e^\alpha \otimes e^\beta a\right)\left(v^n e_n\right) = u^m v^n g_{\alpha\beta} \langle e_m, e^\alpha\rangle \langle e^\beta, e_n\rangle = u^m v^n g_{\alpha\beta} \delta^\alpha_m \delta^\beta_n = u^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}.$$

Введем так же понятие ассоциированного тензора, который играет роль метрического тензора на дуальном базисе. Ассоциированный тензор определяет скалярное произведение двух векторов, если они представлены в форме разложения по дуальному базису

$$\langle u, v\rangle = u_\alpha v_\beta \langle e^\alpha, e^\beta\rangle = u_\alpha v_\beta g^{\alpha\beta}.$$

Здесь $g^{\alpha\beta} = \langle e^\alpha, e^\beta\rangle$ — компоненты ассоциированного тензора.
Несложно доказать следующее соотношение между компонентами ассоциированного и метрического тензоров:

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\beta,$$

или в матричной форме:

$$\left[g^{\alpha\beta}\right] = [g_{\alpha\beta}]^{-1}.$$

Сам ассоциированный тензор $\widehat{g}$ представляется следующим образом

$$\widehat{g} = g^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta$$

Цилиндрическая система координат	**Сферическая система координат**
$u = e_r u^r + e_\varphi u^\varphi + e_\zeta u^\zeta$ $u = r e^r + \zeta e^\zeta$	$u = e_r u^r + e_\theta u^\theta + e_\varphi u^\varphi$ $u = r e^r$
Матрица компонент метрического тензора	
$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$
Компоненты дуального базиса	
$\begin{cases} e^r = e^r \\ e^\varphi = \dfrac{1}{r^2} e_\varphi = -\dfrac{i_1}{r}\sin\varphi + \dfrac{i_2}{r}\cos\varphi \\ e^\zeta = e_\zeta \end{cases}$	$\begin{cases} e^r = e^r \\ e^\theta = \dfrac{1}{r^2} e_\theta = \dfrac{i_1}{r}\cos\theta\cos\varphi + \dfrac{i_2}{r}\cos\theta\sin\varphi - \dfrac{i_3}{r}\sin\theta \\ e^\varphi = \dfrac{1}{r^2\sin^2\varphi} e_\varphi = -\dfrac{i_1}{r\sin\varphi}\sin\varphi + \dfrac{i_2}{r\sin\theta}\cos\varphi \end{cases}$

3.4. Жонглирование Индексами

Метрический тензор может быть полезен для пересчета компонент векторов и тензоров из исходного базиса в дуальный.
Рассмотрим на примере пересчета компонент проивольного вектора u:

$$u = u^\alpha e_\alpha = u_\beta e^\beta = \langle u, e_\beta\rangle e^\beta = \langle u^\alpha e_\alpha, e_\beta\rangle e^\beta = u^\alpha \langle e_\alpha, e_\beta\rangle e^\beta = u^\alpha g_{\alpha\beta} e^\beta \Longrightarrow u_\beta = u^\alpha g_{\alpha\beta}$$

3.5. Градиент Скалярного Поля

Под скалярным полем будем понимать такое отображение, которое ставит в соответствие точкам из евклидова пространства связываем некоторое число.

$$f : \underset{\underset{\mathscr{E}}{\cap}}{D} \to \mathbb{R}.$$

Градиент такого отображения есть ни что иное как его производная L_a :??

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{L_a[h]}_{\langle h,\, \nabla f|_a\rangle} + o(\|h\|),$$

где $\nabla = i^k \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ — оператор Гамильтона, а сама производная в декартовых координатах определяется как

$$\langle h, \nabla f|_a\rangle = \langle i_p h^p,\, i^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\Big|_a \rangle = \underbrace{\langle i_p, i^k\rangle}_{\delta^k_p} h^p \frac{\partial f}{\partial x^k}\Big|_a = h^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\Big|_a. \tag{10}$$

При переходе к криволинейным координатам функция f репараметризуется

$$f(x^1,\ldots,x^n) \mapsto f\Big(\mathfrak{X}^1(q^1,\ldots,q^n),\ldots,\mathfrak{X}^n(q^1,\ldots,q^n)\Big) = \hat{f}(q^1,\ldots,q^n).$$

Мы не будем в изложении различать символы f и $\hat{f}$. Их значение будет понятно по входящим в них переменным величинам.

Определим частную производную в выражении (10) по цепному правилу дифференцирования:

$$\frac{\partial f}{\partial x^n} = \frac{\partial q^k}{\partial x^n}\frac{\partial f}{\partial q^k} \Longrightarrow \nabla f = i^n \frac{\partial f}{\partial x^n} = \left(i^n \frac{\partial q^k}{\partial x^n}\right)\frac{\partial}{\partial q^k} f.$$

Здесь величины $i^n \dfrac{\partial q^k}{\partial x^n}$ представляют из себя некоторые векторы $\hat{e}^k$. Скалярно домножим их на элементы локального базиса $\{e_1,\ldots,e_n\}$

$$\langle \hat{e}^k, e_p\rangle = \langle i^n \frac{\partial q^k}{\partial x^n}, i_m \frac{\partial x^m}{\partial q^p}\rangle = \underbrace{\langle i^n, i_m\rangle}_{\delta^n_m}\frac{\partial q^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^m}{\partial q^p} = \frac{\partial q^k}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial q^p} = \frac{\partial q^k}{\partial q^p} = \delta^k_p.$$

Отсюда видно, что векторы $\hat{e}^k$ являются элементами дуального базиса ($\hat{e}^k = e^k$). В этом есть глубокий смысл, потому что оказывается, что вычисление градиента функции связно с разложением по дуальному базису, а оператор ∇ может быть представлен, как

$$\nabla = e^p \frac{\partial}{\partial q^p} \tag{11}$$

3.6. Градиент Векторного Поля

Рассмотрим новую функцию V, которая отображает некоторую подобласть евклидова пространства $D \subset \mathscr{E}$ в векторное пространство $\mathscr{V}$

$$V\colon \underset{\underset{\mathscr{E}}{\cap}}{D} \to \mathscr{V}.$$

Аналогично предыдущему пункту запишем определение дифференцируемого отображения V:

$$V(a+h) = V(a) + \underbrace{L_a[h]}_{\langle h,\, \nabla\otimes V|_a\rangle} + o(\|h\|),$$

Заменим привычное декартово представление оператора Гамильтона представлением (11):

$$\nabla\otimes V = e^p \frac{\partial}{\partial q^p}\otimes e_n V^n = e^p\otimes e_n \frac{\partial V^n}{\partial q^p} + V^n e^p \otimes \frac{\partial e_n}{\partial q^p} = e^p\otimes e_n\frac{\partial V^n}{\partial q^p} + V^n e^p\otimes \underbrace{\left(e_k\otimes e^k\right)}_{I}\frac{\partial e_n}{\partial q^p} =$$

$$= e^p\otimes e_n \frac{\partial V^n}{\partial q^p} + V^n e^p\otimes e_k \langle e^k, \frac{\partial e_n}{\partial q^p}\rangle$$

Величина $\langle e^k, \dfrac{\partial e_n}{\partial q^p}\rangle$ имеет ясный геометрический смысл: $\dfrac{\partial e_n}{\partial q^p}$ показывает, как меняется элемент базиса e_n при изменении координаты q^p, а само скалярное произведение дает нам k-ю компоненту этого изменения. Другими словами $\langle e^k, \dfrac{\partial e_n}{\partial q^p}\rangle$ определяет компоненты разложения производных локальных базисных векторов по локальному базису. Эти величины называются символами Кристоффеля и обозначаются

$$\Gamma^k_{np} = \langle e^k, \frac{\partial e_n}{\partial q^p}\rangle.$$

Окончательно

$$\nabla\otimes V = e^p\otimes e_n \frac{\partial V^n}{\partial q^p} + e^p\otimes e_k V^n \Gamma^k_{np}.$$

Заменяя немые индексы можно прийти к еще более изящному выражению

$$\boxed{\nabla\otimes V = e^p\otimes e_n\left(\frac{\partial V^n}{\partial q^p} + V^k\Gamma^n_{kp}\right) = e^p\otimes e_n V^n{}_{;p}}.$$

Здесь $\dfrac{\partial V^n}{\partial q^p} + V^k \Gamma^n_{kp} = V^n{}_{;p}$ — ковариантная производная.

Цилиндрическая система координат	Сферическая система координат
Символы Кристоффеля	
$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r;\ \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \dfrac{1}{r}$ остальные $= 0$	$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r;\ \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta;$ $\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \dfrac{1}{r};$ $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta;\ \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot\theta$ остальные $= 0$

3.7. Физический Базис

Представление векторов в физических компонентах имеет смысл только в ортогональных координатах (с диагональным метрическим тензором). Физический базис представляет систему ортонормированных локальных базисов.

Нормировка локального базиса $\{e_1,\ldots,e_n\}$ дает физический базис $\{e_{\langle q_1\rangle},\ldots,e_{\langle q_n\rangle}\}$

$$e_{\langle q\rangle} := \frac{e_q}{\|e_q\|} = \frac{e^q}{\left\|e^q\right\|}.$$

Здесь $\|e_q\| = \sqrt{g_{qq}} =: h_q\,,\ \left\|e^q\right\| = \sqrt{g^{qq}} =: h^q$ — параметры Ламе.

Имея разложение произвольного вектора u в локальном базисе $u = u^\alpha e_\alpha$, можно перейти к разложению в физическом базисе

$$u = u^\alpha h_\alpha e_{\langle\alpha\rangle}.$$

Тогда комбинация $u^\alpha h_\alpha$ объявляется компонентами в физическом базисе и обозначается $u^\alpha h_\alpha = u^{\langle\alpha\rangle}$.

Аналогичные операции можно провести и с дуальным базисом:

$$u = u_\alpha e^\alpha = u_\alpha h^\alpha e_{\langle\alpha\rangle} = \frac{u_\alpha}{h_\alpha} e_{\langle\alpha\rangle} = u^{\langle\alpha\rangle} e_{\langle\alpha\rangle}.$$

3.8. Связь Между Компонентами Метрического Тензора и Символами Кристоффеля

В евклидовой геометрии в криволинейных координатах и символы Кристоффеля и компоненты метрического тензора порождаются одними и теми же функциями перехода из декартовых координат к криволинейным. Поэтому следует ожидать, что они могут быть как-то связаны.

Компоненты метрического тензора $g_{ps} = \langle e_p, e_s \rangle$ представляются произведением базисных векторов, а базисные векторы — это первые производные от функций, определяющих криволинейные координаты. Символы Кристоффеля — это производные базисных векторов, а, значит, это вторые производные от функций, определяющих криволинейные координаты. Поэтому для понимания связи между этими объектами нужно каким-то образом продифференцировать компоненты метрического тензора:

$$
\begin{array}{rl}
 & \dfrac{\partial g_{ps}}{\partial q_k} = \dfrac{\partial}{\partial q_k}\langle e_p, e_s\rangle = \langle e_s, \dfrac{\partial e_p}{\partial q_k}\rangle + \langle e_p, \dfrac{\partial e_s}{\partial q_k}\rangle = \langle e_s, \dfrac{\partial^2 r}{\partial q_k \partial q_p}\rangle + \langle e_p, \dfrac{\partial^2 r}{\partial q_k \partial q_s}\rangle \\
+ & \dfrac{\partial g_{sk}}{\partial q_p} = \dfrac{\partial}{\partial q_p}\langle e_s, e_k\rangle = \langle e_k, \dfrac{\partial e_s}{\partial q_p}\rangle + \langle e_s, \dfrac{\partial e_k}{\partial q_p}\rangle = \langle e_k, \dfrac{\partial^2 r}{\partial q_p \partial q_s}\rangle + \langle e_s, \dfrac{\partial^2 r}{\partial q_p \partial q_k}\rangle \\
- & \dfrac{\partial g_{kp}}{\partial q_s} = \dfrac{\partial}{\partial q_s}\langle e_k, e_p\rangle = \langle e_p, \dfrac{\partial e_k}{\partial q_s}\rangle + \langle e_k, \dfrac{\partial e_p}{\partial q_s}\rangle = \langle e_p, \dfrac{\partial^2 r}{\partial q_s \partial q_k}\rangle + \langle e_k, \dfrac{\partial^2 r}{\partial q_s \partial q_p}\rangle
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle e_s, \frac{\partial e_p}{\partial q_k}\rangle = \Gamma^s_{pk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ps}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial q_p} - \frac{\partial g_{kp}}{\partial q_s}\right)}$$