

Математические основы квантовой механики

С. А. Лычев

Версия 24.10.2019

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН

lychevsa@mail.ru

<http://ipmnet.ru/~lychev>

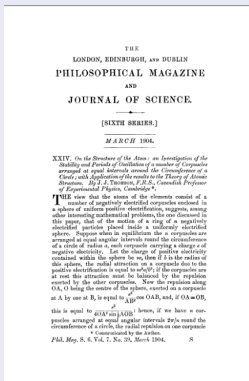
Москва, 2019

Предпосылки

Джозеф Джон Томсон (1856 – 1940)



Неизвестен

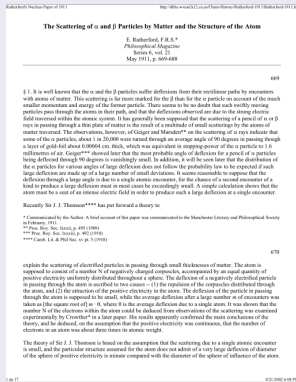
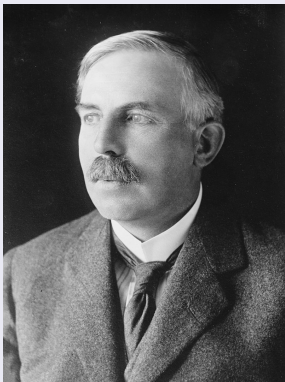


О структуре атома

Открытие электрона, «пудинговая» модель атома.

Предпосылки Модели атома

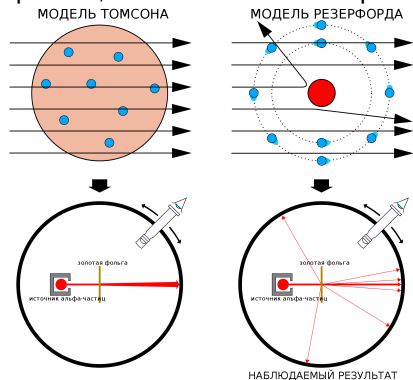
Эрнест Резерфорд (1871 – 1937)



George Grantham Bain Collection Планетарная модель атома

Планетарная модель атома.

Планетарная модель атома – модель строения атома, предложенная Эрнстом Резерфордом в классической статье, опубликованной в 1911 г. на основании анализа и статистической обработки результатов экспериментов по рассеиванию альфа-частиц в тонкой золотой фольге, выполненных Гейгером и Марсденом в 1909 г.



Автор: Kurzon - собственная работа, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=32421701>

Уравнения Ньютона для двух точечных масс

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12}$$

Гравитационный потенциал

$$\mathbf{F}_{12} (|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \mathbf{F}_{21} (|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}$$

Гравитационная постоянная

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{Н м}^2/\text{кг}^2$$

Координаты центра масс

$$R = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2$$

Скорость центра масс

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{M}$$

Уравнение движения для центра масс

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = M \mathbf{a}_{CM}$$

Система изолирована, $F_{ext} = 0$, движение центра масс прямолинейно и равномерно

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{v}_{CM}^0 t, \quad \mathbf{v}_{CM}^0 = \frac{m_1 \mathbf{v}_1^0 + m_2 \mathbf{v}_2^0}{M}$$

Относительное расстояние

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Новые определения для векторов мест масс

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

Некоторая математика...

$$m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1 = m_2 \mathbf{F}_{12}, \quad m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = m_1 \mathbf{F}_{12}$$

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = m_2 \mathbf{F}_{21} - m_1 \mathbf{F}_{12}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}$$

Сила взаимодействия

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} U_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} U_{12}(|\mathbf{r}|)$$

Используем правило дифференцирования сложной функции...

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} U_{12}(|\mathbf{r}|) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U_{12}(|\mathbf{r}|) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} U_{12}(|\mathbf{r}|) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U_{12}(|\mathbf{r}|) + 0$$

И вот Оно! Уравнение движения приведённой массы

$$m_* \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(|\mathbf{r}|) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

Приведённая масса

$$m_* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Теперь задача о двух массах сведена к задаче о движении одной массы при действии на нее «фиктивной» силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

Момент импульса

$$\mathbf{L} = m_* \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

Дифференцирование сложной функции

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(|\mathbf{r}|) = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dU(r)}{dr}, \quad r = |\mathbf{r}|$$

Момент силы \mathbf{F}

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \propto \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Момент импульса — постоянная величина

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = 0$$

Более того, $\mathbf{r} \perp \mathbf{L}$, т.к.

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = m_* \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m_* \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0$$

Здесь использовали тождество $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Таким образом, задача может быть сформулирована на плоскости (xOy) в полярных координатах

$$r_x = r \cos \theta, \quad r_y = r \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{l}{m_* r^2}, \quad l = |\mathbf{L}|$$

Заметим, что в силу этого выражения знак $d\theta/dt$ всегда положительный, и, следовательно, тела вращаются вокруг центра всегда в одном направлении.

Гамильтониан

$$E = \frac{1}{2} m_* v^2 + U(r)$$

В полярных координатах

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m_*\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_*r^2\dot{\theta}^2 + U(r)$$

Используя выражение для $\frac{\partial \theta}{\partial t}$

$$E = \frac{1}{2}m_*\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_*r^2 \left(\frac{1}{m_*r^2} \right)^2 + U(r)$$

Эффективный потенциал

$$E = \frac{1}{2}m_*\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{l^2}{m_*r^2} + U(r)$$

Система двух тел подобна одному телу, которое движется только в одном направлении (функция r) с "кинетической энергией"

$$K = \frac{1}{2} m_* \dot{r}^2$$

Полностью движение системы описывается двумя уравнениями

$$E = \frac{1}{2} m_* \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{l}{m_* r^2}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{m} \int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')}$$

Если $m_2 \gg m_1$

$$m_* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_1, \quad R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \approx r_2, \quad r = r_1 - r_2 \approx r_1 - R$$

Потенциал

$$U(r) = -\frac{1}{r}$$

Центробежная часть

$$U_l(r) = \frac{1}{2} \frac{l^2}{m_* r^2} > 0$$

Время движения от перигелия до апогея

$$T_{p \rightarrow a} = \sqrt{\frac{m_*}{2}} \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr'}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r')}}$$

Круговая орбита

$$U'_{\text{eff}}(r_*) = 0$$

Уравнение орбиты

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{m_* r^2} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{m_*} \int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')}$$

Из закона сохранения энергии

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m_*}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}$$

$$\theta = \theta_0 \pm \frac{l}{2m_*} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r')}}$$

Изменение угла при движении из перигелия в апогей

$$\theta_{p \rightarrow a} = \frac{l}{\sqrt{2m_*}} \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r')}}$$

В обратную сторону то же самое

$$\begin{aligned} \theta_{a \rightarrow p} &= \frac{-l}{\sqrt{2m_*}} \int_{r_a}^{r_p} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r')}} = \\ &= \frac{+l}{\sqrt{2m_*}} \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r')}} = \theta_{p \rightarrow a} \end{aligned}$$

Множители π – прецессия орбиты – пример с потенциалом Юкавы

$$U(r) = -\frac{e^{-r}}{r}$$

Два потенциала, при которых орбита замкнута

$$U(r) = -\frac{\gamma}{r} \Rightarrow \theta_{p \rightarrow a} = \pi, \quad U(r) = \gamma r^2 \Rightarrow \theta_{p \rightarrow a} = \pi/2, \quad \gamma > 0$$

Кеплеровский потенциал

$$U(r) = -\frac{\gamma}{r}$$

Эффективный потенциал достигает минимума при

$$r_* = \frac{l^2}{\gamma m_*}, \quad U_{\text{eff}}(r_*) = -\frac{m_* \gamma^2}{2l^2}$$

Удобно ввести безразмерные переменные

$$\rho = \frac{r}{r_*}, \quad \varepsilon = \frac{E}{|U_{\text{eff}}(r_*)|}$$

В безразмерных переменных

$$\theta(\rho) = \theta_0 \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'/\rho'^2}{\sqrt{\varepsilon - 1/\rho'^2 + 2/\rho'}}$$

$$\theta(\rho) = \arccos \left[\frac{1/\rho - 1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right] - \arccos \left[\frac{1/\rho_0 - 1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right] + \theta_0$$

Принимая «удобные» начальные значения ρ_0, θ_0 , получим

$$\theta(\rho) = \arccos \left[\frac{1/\rho - 1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right] \Rightarrow \rho(\theta) = \frac{1}{1 + e \cos \theta}, \quad e = \sqrt{1 + \varepsilon}$$

При $E < 0$ орбиты - конические сечения!

$$\frac{(x + d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

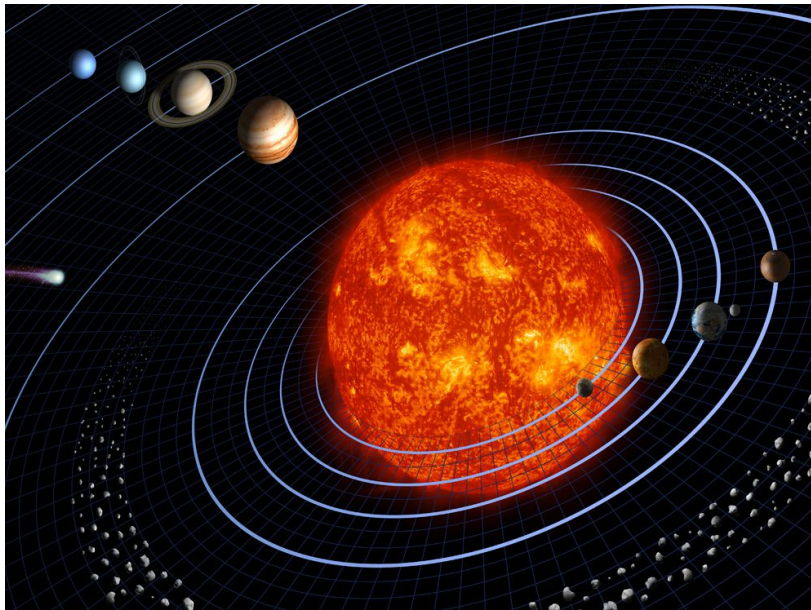
$$a = \frac{l^2}{\gamma m_*} \frac{1}{1 - e^2}, \quad b = \frac{l^2}{\gamma m_*} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad d = ae$$

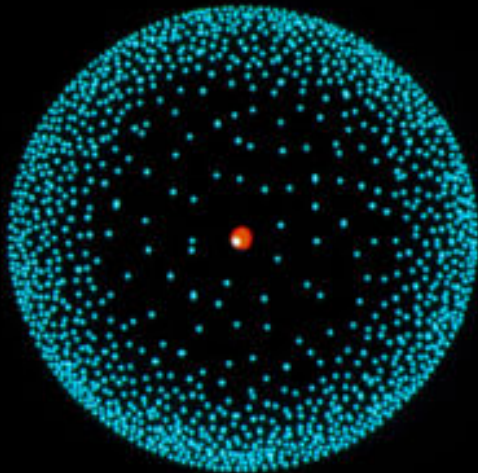
При $E > 0$ орбиты – гиперболы ($\varepsilon > 0 \Rightarrow e = \sqrt{1 + \varepsilon} > 1$)

$$\rho(\theta) = \frac{1}{1 + e \cos \theta} = \infty \Rightarrow \theta_{\max} = \arccos(-1/e)$$

При $E = 0$ орбиты – параболы

$$E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow e = \sqrt{1 + \varepsilon} = 1$$





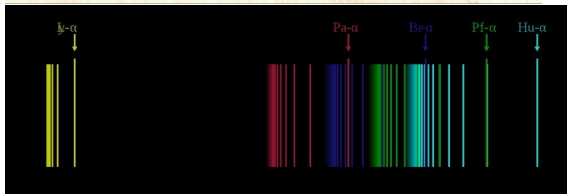
SCIENCEphotoLIBRARY

Спектр атома водорода

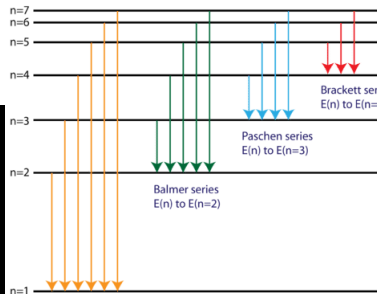
- 1776 г. Генри Кавендиш – идея о существовании атома водорода
- 1855 г. Андерс Ангстрём – три спектральных линии, красная (656), зелено-голубая (486) и фиолетовая (443)
- 1906–1914 гг. Теодор Лайман – UV область
- 1908 г. Фридрих Пашен – IR область...

A. J. ÅNGSTRÖM

Raies	Sixième spectre		Cinquième spectre		Quatrième spectre		Valeur moyenne de Longueur d'onde	Différence
	m_6	λ	m_5	λ	m_4	λ		
	—	—	918,0	4016,53	708,0	4016,94	4016,73	20
	—	—	1047,0	4004,62	810,0	04,80	04,71	9
	—	—	—	—	839,0	4001,36	4001,36	—
	—	—	—	—	869,0	3997,78	3997,78	—
H₁	—	—	1446,0	3967,76	1119,0	3968,00	67,88	12
	—	—	*[1778,0	37,04]	—	—	—	—
H₁₁	—	—	1823,0	3932,82	—	—	3932,82	—



Electron transitions for the Hydrogen atom



Эмпирические формулы

- 1885 г. Иоган Бальмер

$$\lambda = B \frac{m^2}{m^2 - 2^2}, \quad B = 364.56., \quad m = 3, 4, 5, \dots$$

- 1888 г. Йоханнес Ридберг

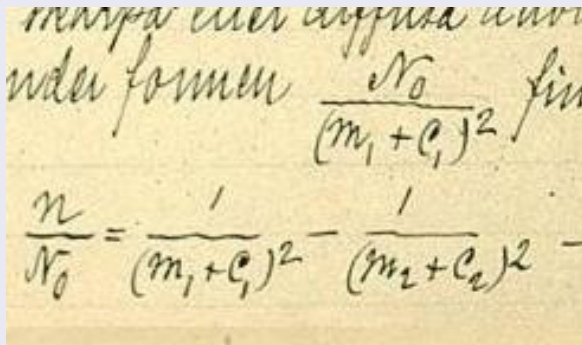
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n' = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$



Йоханнес Роберт Ридберг (1854 – 1919)



Неизвестен

A photograph of a handwritten mathematical formula on aged paper. The formula is written in cursive and includes the Rydberg constant R_0 and terms $(m_1 + c_1)^2$ and $(m_2 + c_2)^2$. The formula is:
$$\frac{n}{R_0} = \frac{1}{(m_1 + c_1)^2} - \frac{1}{(m_2 + c_2)^2}$$

Оригинальная формула Ридберга

Установил формулу, позволяющую определить длины волн в спектрах излучения атомов.

Модель атома как система двух масс и кулоновского взаимодействия

Сила электростатического притяжения (сила Кулона)

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_e q_n \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Центростремительная сила

$$\mathbf{F} = -m_e \omega^2 r \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Баланс импульса

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{r^2} = m_e \omega^2 r$$

Момент импульса сохраняется

$$\mathbf{L} = m_e \omega r^2 \mathbf{n}$$



Катастрофа Гиденбурга

Формула Лармора

$$\dot{U} = -\frac{2e^2 a^2}{3c^3}$$

Время жизни электрона = 1.6×10^{-11} сек.

Принцип квантования (Н. Бор)

$$L = m_e v r = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$E_n = -\frac{1}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e q_e^4}{n^2 \hbar^2}, \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e q_e^2} n^2 \hbar^2$$

Формула Планка

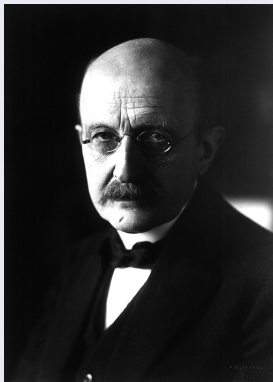
- Формула Релея-Джинса -> ультрафиолетовая катастрофа
- Излучение абсолютно черного тела – электромагнитное излучение испускается порциями (квантами)
- Подтверждение – предельный переход к закону Стефана-Больцмана,
- Подтверждение – фотоэффект (Эйнштейн), существование красной границы.

$$E = h\nu$$

Идентификация!

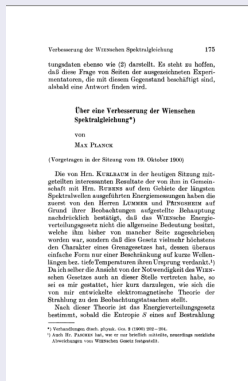
$$\Delta E = E_{n'} - E_n = h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Макс Планк (1858 – 1947)



Неизвестен

«Об одном улучшении закона излучения Вина»



Квант действия, начало квантовой теории.

Нильс Бор (1885 – 1962)



Nobel Prize biography

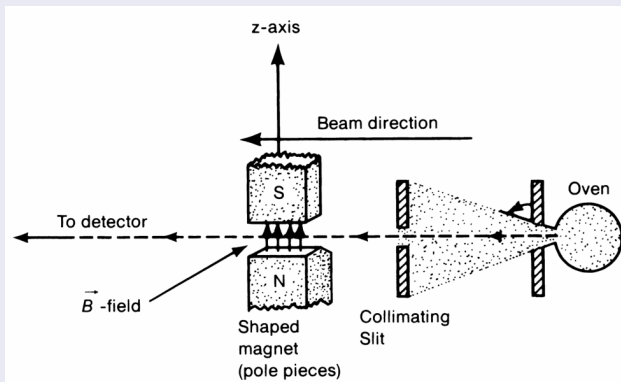


«О строении атомов и молекул»

Принцип квантования.

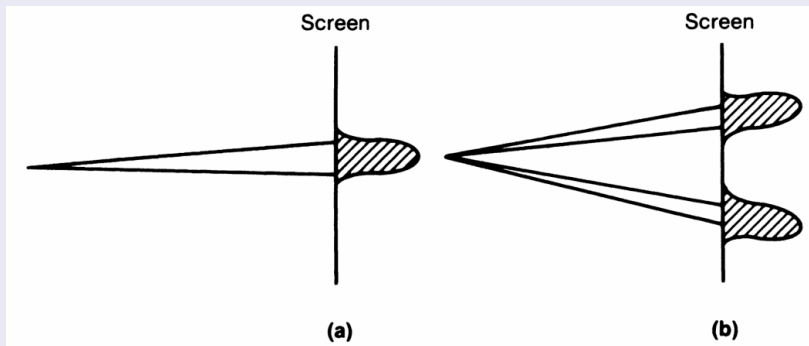
Экспериментальный базис

Схема эксперимента



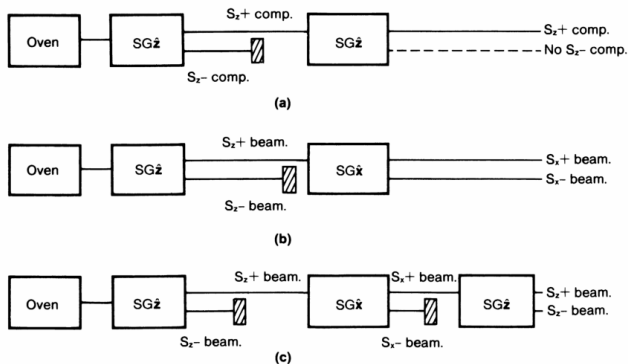
(из Sakurai - Modern Quantum Mechanics)

Лучи из аппарата Штерна – Герлаха



(a) — то, что ожидалось, (b) — то, что наблюдалось
(из Sakurai - Modern Quantum Mechanics)

Последовательность аппаратов Штерна – Герлаха



(из Sakurai - Modern Quantum Mechanics)

Экспериментальный базис

Опыт Штерна – Герлаха – аналогия с поляризацией света



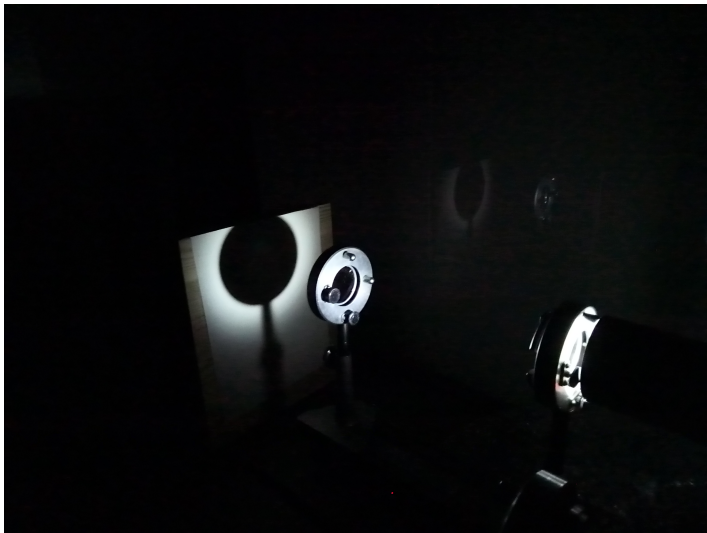
Экспериментальный базис

Опыт Штерна – Герлаха – аналогия с поляризацией света



Экспериментальный базис

Опыт Штерна – Герлаха – аналогия с поляризацией света



Экспериментальный базис

Опыт Штерна – Герлаха – аналогия с поляризацией света



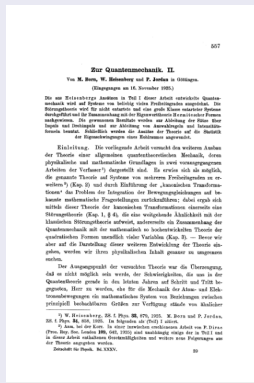
Предпосылки

Начало квантовой механики

Вернер Карл Гейзенберг (1901 – 1976)



Бундесархив



«К квантовой механике»

Принцип неопределенности.

Аксиомы квантовой механики

Аксиома 1. С каждой квантовой системой ассоциировано комплексное гильбертово пространство

$$(H, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Состояние квантовой системы определяется положительным линейным самосопряженным оператором с ограниченным следом:

$$\rho : H \rightarrow H, \quad \text{tr } \rho = 1.$$

Аксиома 2. С каждой наблюдаемой квантовой системы связан самосопряженный линейный оператор $A : D_A \rightarrow H$.

Аксиома 3. Вероятность $\mu_\rho^A(E)$ того, что измерение наблюдаемой A в квантовой системе, которая находится в состоянии ρ , даст результат в измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}$ определяется формулой

$$\mu_\rho^A(E) = \text{tr}(P_A(E) \circ \rho),$$

где P_A — это проектор на спектральные значения оператора A .

Аксиома 4. Если измерения не производились то система непрерывно эволюционирует и ее эволюция определяется как

$$\rho(t_2) = U(t_2 - t_1)\rho(t_1)U^{-1}(t_2 - t_1),$$

где $U(t) = \exp\left(-\frac{Ht}{\hbar}\right)$, в котором H — энергия системы (оператор).

Аксиома 5. Если мы производим измерение, то в системе возникает скачок, качественным образом изменяющий ее состояние:

$$\rho_{\text{after}} = \frac{P_A(E)\rho_{\text{before}}P_A^{-1}(E)}{\text{tr } A},$$

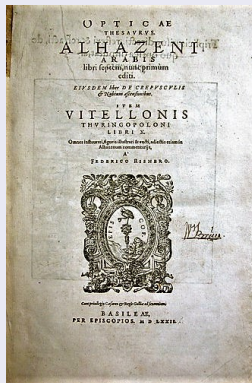
где E — наименьшее борелево множество, содержащее актуальные результаты измерения.

Поляризация света

Ибн аль-Хайсам (965 – 1040)

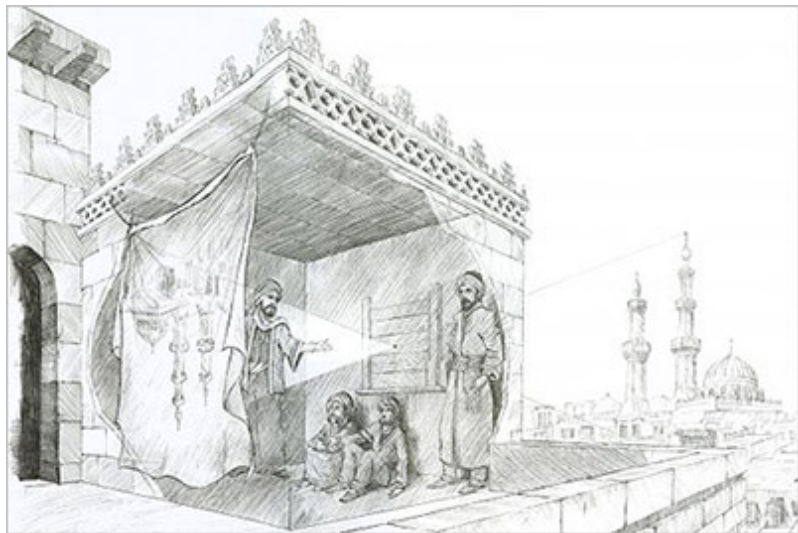


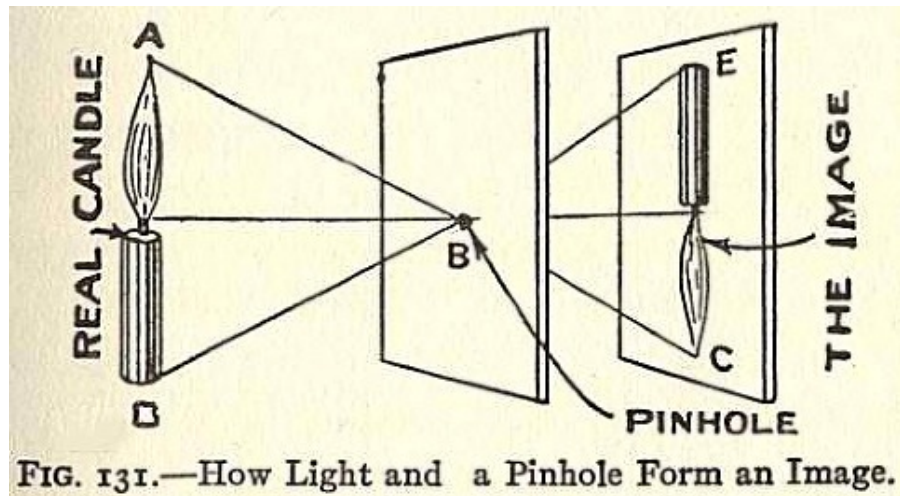
неизвестен



Книга об оптике

Камера-обскура.





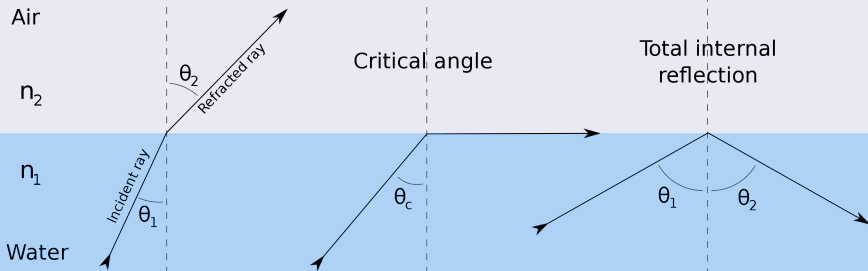
Виллеброрд Снелл (1580 – 1626)



НЕИЗВЕСТЕН

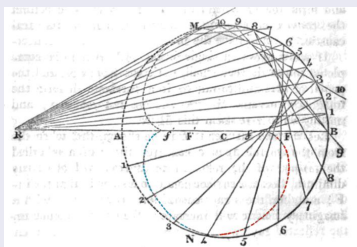
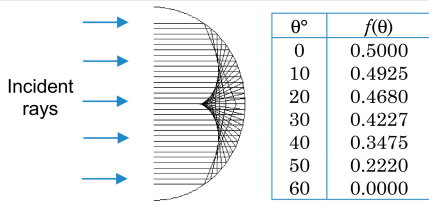
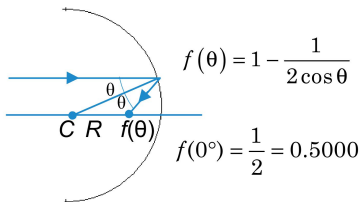
Закон преломления

Закон преломления



$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Каустики

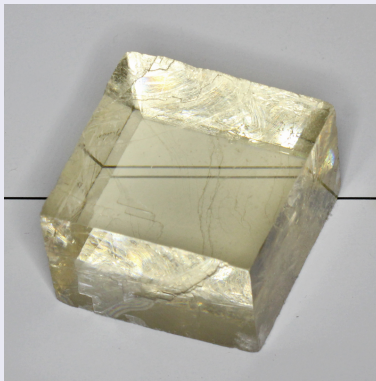




Расмус Бартолин (1625 – 1698)



неизвестен



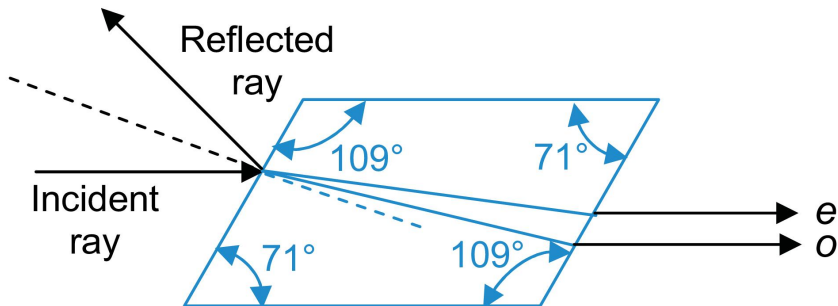
обычный луч и необычный луч

Двойное лучепреломление в кристаллах исландского шпата.

Для исландского шпата при $\lambda = 5893$

$$n_o = 1.6853, \quad n_e = 1.4864$$

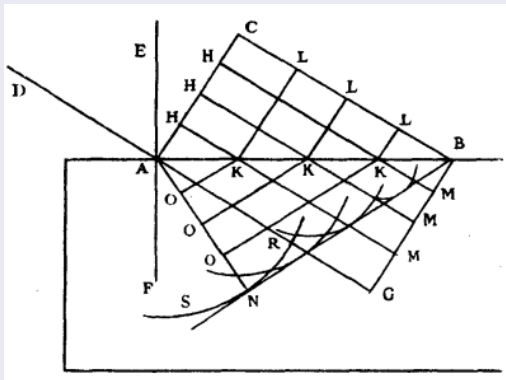
o — обычный луч (ordinary ray), e — необычный луч (extraordinary ray)



Христиан Гюйгенс (1629 – 1695)



Каспар Нечер



Отраженные волны

Использовал два поляризатора: анализатор и поляризатор.



Двойная рефракция возникает у кристалле исландского шпата в силу его анизотропии. Фронт обыкновенного луча - сфера, а необыкновенного - эллипсоид.

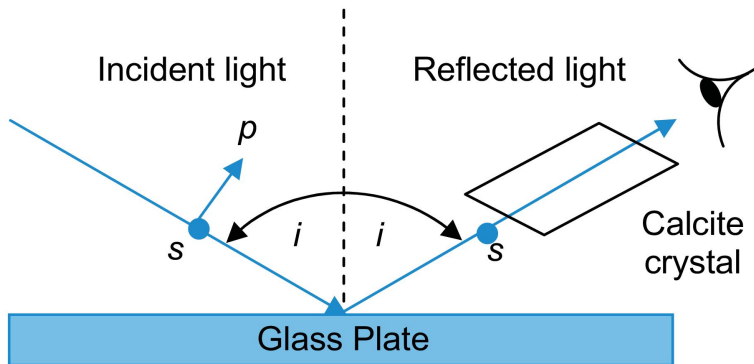
Этьенн Луи Малюс (1775 – 1812)



неизвестен

«поляризация света»

Закон Малюса, термин «поляризация света».



Закон Малюса

$$A = A_0 \cos \theta, \quad I = I_0 \cos^2 \theta$$

A — амплитуда, I — интенсивность

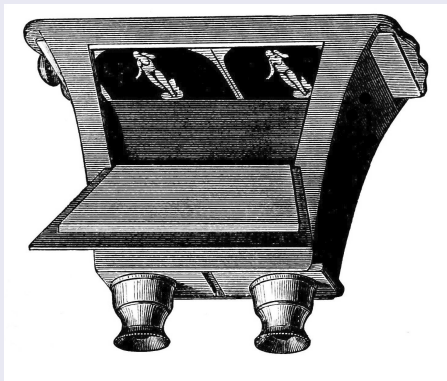
«поляризация света»

Малюс до конца своей жизни был ярким приверженцем теории эмиссии (ньютоновой теории света). Явление поляризации он объяснял тем, что частицы света имеют «полюсы», как магниты. В обычном свете полюсы разных частиц направлены беспорядочно. При поляризации отсортировываются лишь частицы света с определёнными направлениями полюсов. От слова «полюс» Малюс придумал название явления: «Поляризация света».

Дейвид Брюстер (1781 — 1868)

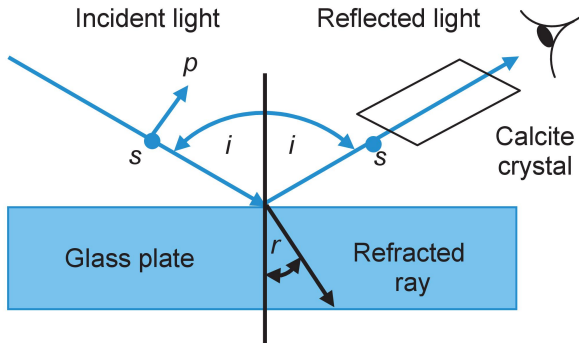


неизвестен



стереоскоп

Закон Брюстера.



Закон Брюстера

Существуют такие углы i , что: р-луч исчезает; s-луч : $i + r = 90^\circ$

Огюстен Жан Френель (1788 – 1827)



неизвестен

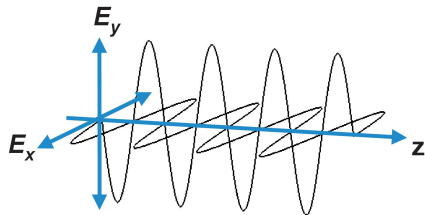
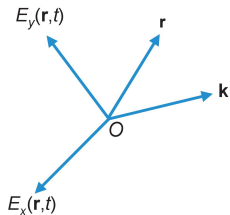
Волновая теория света.

$$\nabla^2 E_x(r, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x(r, t)}{\partial t^2},$$

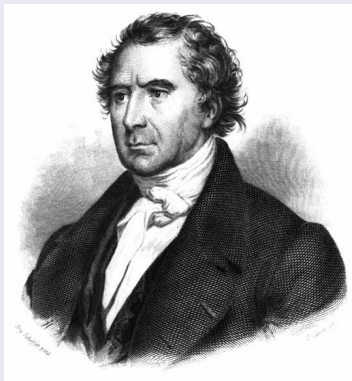
$$\nabla^2 E_y(r, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y(r, t)}{\partial t^2}.$$

$$E_x(r, t) = E_{0x} \cos(\omega t - k \cdot r + \delta_x),$$

$$E_y(r, t) = E_{0y} \cos(\omega t - k \cdot r + \delta_y),$$



Доминик Франсуа Жан Араго (1786 – 1853)

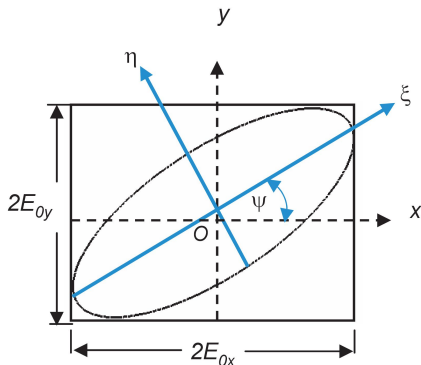


неизвестен

Световая волна — плоская.

Исключение k – уравнение эллипса

$$\frac{E_x(z, t)^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y(z, t)^2}{E_{0y}^2} - \frac{2E_x(z, t)E_y(z, t)}{E_{0x}E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad \delta = \delta_y - \delta_x.$$



Параметры поляризации

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos \delta, \quad 0 \leq \psi \leq \pi,$$

$$\sin 2\xi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \sin \delta, \quad -\pi/4 \leq \psi \leq \pi/4$$

Тригонометрическое представление

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2,$$

$$\tan 2\psi = \tan 2\alpha \cos \delta,$$

$$\sin 2\xi = \sin 2\alpha \sin \delta.$$

Типы поляризации

LHP: $E_{0y} = 0$



LVP: $E_{0x} = 0$



L+45P:

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0, \delta = 0$$



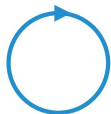
L-45P:

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0, \delta = \pi$$



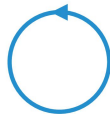
RCP:

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0, \delta = \pi/2$$



LCP:

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0, \delta = -\pi/2$$



Анри Пуанкаре (1854 – 1912)



неизвестен

Сфера Пуанкаре по определению поляризации.

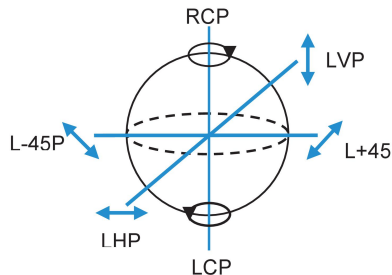
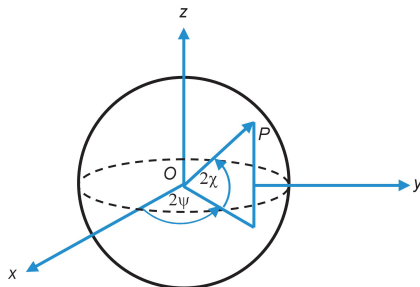
Параметризация Пуанкаре

$$x = \cos 2\xi \cos 2\psi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi,$$

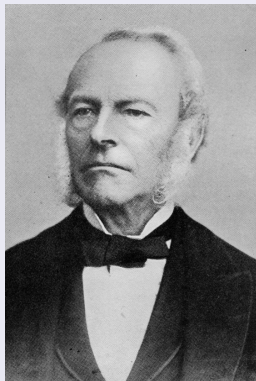
$$y = \cos 2\xi \sin 2\psi, \quad -\pi/4 < \xi \leq \pi/4,$$

$$z = \sin 2\xi, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Сфера Пуанкаре



Джордж Габриель Стокс (1819 – 1903)



НЕИЗВЕСТЕН

Параметры Стокса.

Осреднение

$$\langle E_i(z, t)E_j(z, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_i(z, t)E_j(z, t) dt, \quad i, j \in \{x, y\}.$$

Осреднение уравнения эллипса приводит к равенству

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2,$$

Параметры Стокса

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2,$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2,$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta,$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta.$$

В комплексной форме

$$E_x = E_{0x} \exp i\delta_x, \quad E_y = E_{0y} \exp i\delta_y,$$

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^*,$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^*,$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^*,$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*)$$

вектор Стокса

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ E_x E_y^* + E_y E_x^* \\ i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \end{pmatrix}$$

Типы поляризации

$$\begin{array}{ccc}
 S_{\text{LHP}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & S_{\text{LVP}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & S_{\text{L+45P}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \longleftrightarrow & \updownarrow & \nearrow \\
 S_{\text{L-45P}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & S_{\text{RCP}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & S_{\text{LCP}} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
 \nwarrow & \circlearrowleft & \circlearrowleft
 \end{array}$$

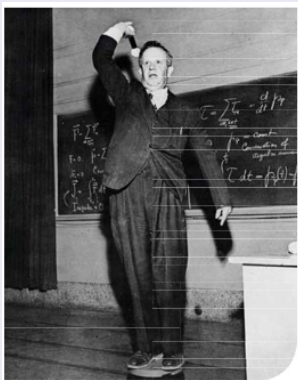
Неполяризованный свет

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Частично поляризованный свет

$$S = (1 - \mathcal{P}) \begin{pmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{P} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \mathcal{P} \leq 1.$$

Ханс Мюллер (1900 – 1965)



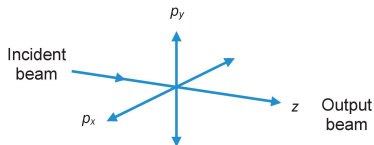
неизвестен

Матричный формализм теории поляризации.



Матричный формализм

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

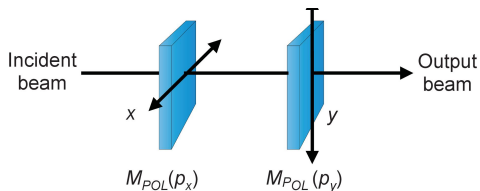


Матричный формализм, неидеальный поляризатор

$$M_{pol}(p_x, p_y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{pmatrix}$$

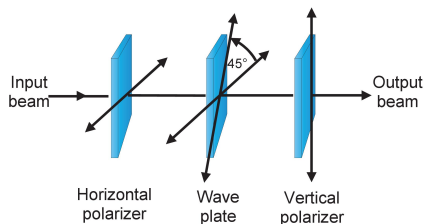
Матричный формализм, идеальный поляризатор

$$M_{pol}(p_x, p_y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Матричный формализм

$$M = M_{pol}(p_x) \cdot M_{pol}(p_y) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Матричный формализм

$$M_{wp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$S' = M_{polv} \cdot M_{wp} \cdot M_{polh} \cdot S,$$

$$S' = \frac{(1 - \cos \phi)(S_0 + S_1)}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I(\phi) = I_0(1 - \cos \phi)$$

Robert Clark Jones (1916 – 2004)



неизвестен

Матричный формализм теории поляризации.

Спин

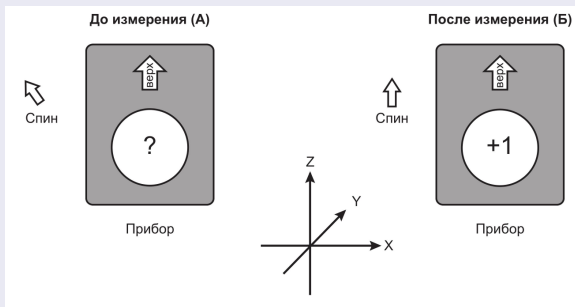
Классический закон эволюции детерминирован. Например, закон «ничего не происходит». При переходе от одного дискретного момента времени (n) к другому ($n + 1$):

$$\sigma(n + 1) = \sigma(n)$$

Измерение в классической механике



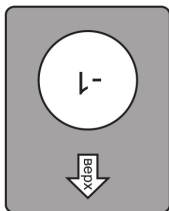
Измерение в квантовой механике



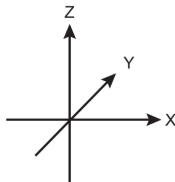
Состояние до измерения мы не знаем. Измерение дает конкретное значение.

$$\sigma = +1 \quad \text{или} \quad \sigma = -1$$

Повторные измерения при той же ориентации прибора повторяют результат, как и в классической механике!

Развернем прибор на π Прибор развернут на 180° 

Прибор



Повторные измерения дают один и тот же результат, противоположный полученному ранее.

$$\sigma = -1 \quad \text{или} \quad \sigma = +1$$

Вывод: σ – степень свободы, связанная с ощущением направления в пространстве.

Вопрос: σ – вектор?

Если это так, то было бы естественным описать его тремя компонентами $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$

Но если σ – вектор, «то это очень странный вектор!» (Леонард Сасскинд ©)

- Произведем измерение, ориентируя прибор вдоль оси z . Получим, например, $\sigma_z = +1$. Как и ожидается, повторные измерения при той же ориентации прибора дают тот же результат: $\sigma = +1$.
- Повернем прибор на $\pi/2$ и повторим измерение. Получим, например, $\sigma_x = +1$. Пока все укладывается в классическую картину.
- Возвратим прибор в исходное положение. Ожидаем $\sigma_z = +1$. Сюрприз! Получаем $\sigma_z = \pm 1$.

Вывод: измерение изменяет состояние.

Говорят: измерение приготавливает состояние.

Серия экспериментов # 1

- Произведем измерение, ориентируя прибор вдоль оси z .
- Если получим $\sigma_z = +1$, то повернем прибор на $\pi/2$ и повторим измерение.

Результат серии # 1

Число событий $\sigma_x = +1$ и $\sigma_x = -1$ статистически одинаково:

$$\langle \sigma_x \rangle = 0.$$

Серия экспериментов # 2

- Еще одна серия экспериментов с двумя произвольными векторами \mathbf{n} , \mathbf{m} :
- Произведем измерение, ориентируя прибор вдоль \mathbf{n} . Если получим $\sigma_z = +1$, то ориентируем прибор вдоль \mathbf{m} .

Результат серии # 2

Число событий $\sigma_x = +1$ и $\sigma_x = -1$ статистически различно:

$$\langle \sigma \rangle = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \cos \theta.$$

Таблица истинности для или

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Новая логика?

$$A \text{ или } B \Leftrightarrow B \text{ или } A$$

Высказывания: $A \Leftrightarrow \sigma_z = +1$, $B \Leftrightarrow \sigma_x = +1$

Представим себе ситуацию, в которой кем-то (или чем-то) неизвестным спин тайно был приготовлен в состоянии $\sigma_z = +1$. Наша задача состоит в том, чтобы определить, истинно суждение (A или B) или ложно.

Как проверить суждение (A или B)? Если бы спины вели себя классически, мы могли бы действовать следующим образом

- Осторожно измерить σ_z и записать значение. Если $\sigma_z = +1$, то работа окончена: суждение (A или B) истинно. Если $\sigma_z = -1$, перейти к следующему шагу.
- Осторожно измерить σ_x . Если $\sigma_x = +1$, то суждение (A или B) истинно. Если нет, значит ни σ_z , ни σ_x не равно $+1$ и (A или B) ложно.

Альтернативная процедура

- Осторожно измерить σ_x и записать значение. Если оно равно $+1$, то работа окончена: суждение (B или A) истинно. Если $\sigma_x = -1$, перейти к следующему шагу.
- Осторожно измерить σ_z . Если оно равно $+1$, то суждение (B или A) истинно. Если нет, значит, ни σ_x , ни σ_z не равно $+1$ и (B или A) ложно.

В классической физике обе эти процедуры дают одинаковый результат

Первая последовательность измерений

- Начнем с измерения σ_z . Поскольку неизвестный агент все подготовил, мы обнаружим, что $\sigma_z = +1$. Продолжать нет надобности: (А или В) истинно.
- Тем не менее мы можем проверить σ_x , просто чтобы посмотреть, что случится. Результат непредсказуем. Мы случайным образом обнаруживаем, что $\sigma_z = +1$ или $\sigma_x = -1$. Но ни один из этих исходов не влияет на истинность суждения (А или В).

Альтернативная последовательность измерений

- Сначала будем измерять σ_x . Поскольку неизвестный агент установил спин в $+1$ вдоль оси z , измерение σ_x дает случайный результат. Если окажется, что $\sigma_x = +1$, то мы закончили: (В или А) истинно. Но предположим, что мы получили противоположный результат: $\sigma_x = -1$. Спин ориентирован в направлении $-x$. В результате нашего первого измерения спин больше не находится в исходном состоянии $\sigma_z = 1$. Он пришел в новое состояние – либо $\sigma_x = +1$, либо $\sigma_x = -1$.
- Теперь мы готовы проверить вторую половину суждения (В или А). Повернем прибор А вдоль оси z и измерим σ_z . Результат случайным образом будет ± 1 . Это значит, что с вероятностью $1/4$ в эксперименте будет получено $\sigma_x = -1$ и $\sigma_z = -1$.

С вероятностью $1/4$ мы обнаружим, что (В или А) ложно; это происходит несмотря на тот факт, что неизвестный агент изначально гарантировал, что $\sigma_z = +1$

Очевидно, в этом примере инклюзивное или несимметрично. Истинность (А или В) может зависеть от порядка, в котором мы проверяем два суждения. Это не только означает, что законы квантовой физики отличаются от своих классических аналогов, но также что сами основания логики в квантовой физике другие.

Векторное пространство

Векторным пространством \mathcal{V} над полем \mathbb{R} называется множество, снабжённое двумя операциями:

$$A : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \text{ (сумма);}$$

$$S : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \text{ (умножение на скаляр),}$$

которые удовлетворяют следующим правилам:

- 1 $A(u, v) = A(v, u) \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$ (коммутативность сложения);
- 2 $A(u, A(v, w)) = A(A(u, v), w) \quad \forall u, v, w \in \mathcal{V}$ (ассоциативность сложения);
- 3 $\exists o \in \mathcal{V} : A(u, o) = u \quad \forall u \in \mathcal{V}$ (существование нейтрального элемента относительно сложения);
- 4 $\forall u \in \mathcal{V} \exists -u \in \mathcal{V} : A(u, -u) = o$ (существование обратного элемента относительно сложения);
- 5 $S(a, S(b, u)) = S(ab, u) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{V}$ (ассоциативность умножения);
- 6 $S(a + b, u) = A(S(a, u), S(b, u)) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{V}$
(дистрибутивность умножения относительно сложения);
- 7 $S(a, A(u, v)) = A(S(a, u), S(a, v)) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}$
(дистрибутивность умножения относительно сложения);
- 8 $S(1, u) = u \quad \forall u \in \mathcal{V}$.

Нотация Дирака

Вектор – кет: $|u\rangle$.

Ковектор – бра: $\langle h|$.

Внутреннее произведение

$$\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$$

Нормированный вектор

$$\langle u|u\rangle = 1$$

Ортогональный вектор

$$\langle u|v\rangle = 0$$

Разложение вектора по ортогональному базису

$$|u\rangle = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i|u\rangle$$

Связана ли непредсказуемость с неполнотой того, что мы называем квантовым состоянием? На этот счет могут быть различные мнения

- Да, привычное понятие квантового состояния неполное. Существует «скрытые переменные», которые, если только вы сможете до них добраться, обеспечат полную предсказуемость. Существуют две версии этой точки зрения.
- Скрытые переменные трудно измерить, но в принципе они доступны для наших экспериментов.
- Поскольку мы состоим из квантовомеханической материи, то подвержены ограничениям квантовой механики, и скрытые переменные для нас принципиально ненаблюдаемы.
- Нет, концепция скрытых переменных не дает нам ничего полезного. Квантовая механика неустранимо непредсказуемая. Это настолько точное исчисление вероятностей, насколько это возможно.

Ориентация вдоль оси z

Если A ориентирован вдоль оси z , то два возможных состояния, которые могут быть приготовлены, соответствуют $\sigma_z = \pm 1$. Назовем их вверх и вниз и будем обозначать кет-векторами $|u\rangle$ и $|d\rangle$. Итак, если прибор ориентирован вдоль оси z и регистрирует $+1$, то приготовлено состояние $|u\rangle$. Если прибор регистрирует -1 , то приготовлено состояние $|d\rangle$.

Ориентация вдоль осей x, y

Если прибор ориентирован вдоль оси x и регистрирует -1 , то приготовлено состояние $|l\rangle$. Будем называть его влево (left). Если A направлен по оси y , он может приготовить состояния $|i\rangle$ и $|o\rangle$ — вперед и назад (in/out).

Пространство состояний для отдельного спина имеет только два измерения

Все возможные спиновые состояния могут быть представлены в двумерном векторном пространстве.

Суперпозиция двух состояний

$$|a\rangle = \alpha_u|u\rangle + \alpha_d|d\rangle$$
$$\alpha_u = \langle u|a\rangle, \quad \alpha_d = \langle d|a\rangle.$$

Компоненты α_u и α_d – это комплексные числа; сами по себе они не имеют экспериментального смысла, но у их абсолютных величин он есть. В частности, выражения $\alpha_u^*\alpha_u$ и $\alpha_d^*\alpha_d$ имеют следующий смысл.

- Пусть спин приготовлен в состоянии $|a\rangle$, а прибор ориентирован вдоль оси z , тогда величина $\alpha_u^*\alpha_u$ – это вероятность того, что результатом измерения спина будет $\sigma_z = +1$. Другими словами, это вероятность того, что спин будет иметь состояние вверх, если измерять его вдоль оси z .
- Точно так же $\alpha_d^*\alpha_d$ – это вероятность того, что при измерении σ_z будет получено значение вниз.

Ортогональность состояний

$$\langle u|d\rangle = 0, \quad \langle d|u\rangle = 0.$$

Физический смысл этого в том, что если спин приготовлен в состоянии вверх, то вероятность обнаружить его в состоянии вниз равна нулю, и наоборот.

Нормировка

$$\alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d^* \alpha_d = 1$$

или

$$\langle a|a\rangle = 1$$

А готовят вдоль x

$$\alpha_u^* \alpha_u = \alpha_d^* \alpha_d = 1/2 \quad \Rightarrow$$

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle, \quad |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

(учитываем, что $\langle r|l\rangle=0$)

Неопределенность фазы

Умножение $|l\rangle$ на комплексное число $z = e^{i\theta}$ (фазовый множитель) не изменяет ортогональность и нормировку

$$\alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d^* \alpha_d = 1$$

А приготавливают вдоль у

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle, \quad |o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle.$$

Необходимость в комплексных числах – это общая особенность квантовой механики

Интересно, что две из компонент в уравнениях являются мнимыми. Конечно, мы все время говорим, что пространство состояний является комплексным векторным пространством, но до сих пор нам не приходилось использовать комплексные числа в вычислениях. Являются ли комплексные числа в уравнениях лишь вопросом удобства или это необходимость? При нашем подходе к спиновым состояниям нет возможности этого избежать.

Наблюдаемые – это то, что можно измерить

- 1 Наблюдаемые связаны с векторным пространством, но они не являются векторами состояния. Они представляются линейными (эрмитовыми) операторами.
- 2 Возможные результаты измерений являются собственными значениями оператора, который представляет наблюдаемую.
- 3 Однозначно различимые состояния представляются ортогональными векторами.
- 4 Если $|a\rangle$ – вектор состояния системы, и измеряется наблюдаемая L , то вероятность пронаблюдать значение λ_i равна

$$P(\lambda_i) = \langle a|e_i\rangle\langle e_i|a\rangle.$$

λ_i – это собственные значения L , а e_i – соответствующие собственные векторы.

Матрицы Паули

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

Операторы в квантовой механике

- 1 Операторы – это сущности, используемые для вычисления собственных значений и собственных векторов.
- 2 Операторы действуют на векторы состояний (которые являются абстрактными математическими объектами), а не на физические системы.
- 3 Когда оператор действует на вектор состояния, он порождает новый вектор состояния.

Оператор, связанный с произвольной ориентацией в пространстве

$$\sigma_n = n_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + n_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + n_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Произвольное направление в пространстве

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} n_z & (n_x - in_y) \\ (n_x + in_y) & -n_x \end{pmatrix}$$

Если

$$n_z = \cos \theta, \quad n_x = \sin \theta, \quad n_y = 0$$

то

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Вероятности

$$P(+1) = |\langle u | \lambda_1 \rangle|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad P(-1) = |\langle u | \lambda_2 \rangle|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\langle \sigma_n \rangle = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta$$

Принцип спиновой поляризации

Любое состояние отдельного спина является собственным вектором некоторой компоненты спина.

$$\forall |a\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

$$\exists \mathbf{n} \quad (|\mathbf{n}| = 1) \quad \sigma \cdot \mathbf{n} |a\rangle = |a\rangle$$