Функциональные пространства

С. А. Лычев

Версия 14.11.2019

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН

lychevsa@mail.ru

http://ipmnet.ru/~lychev

Москва, 2019

Нормированное векторное пространство

Определение

Структура $(V,\ \mathbb{C},\ +,\ \cdot)$, в которой

- V — множество,
- $+ :\ V \times V \to V$ — операция сложения векторов,
- $\cdot :\ \mathbb{C} \times V \to V$ — операция умножения на скаляр,

называется векторным пространством над $\mathbb{C}$, если выполняются следующие аксиомы:

C^+ $\forall v,\ w \in V:\ v+w = w+v,$

A^+ $\forall u,\ v,\ w \in V:\ (u+v)+w = u+(v+w),$

N^+ $\exists 0_V \in V\ \forall v \in V:\ v+0_V = v,$

I^+ $\forall v \in V\ \exists (-v) \in V:\ v+(-v) = 0_V,$

A $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}\ \forall v \in V:\ \lambda\cdot(\mu\cdot v) = (\lambda \odot \mu)\cdot v,$

D $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}\ \forall v \in V:\ (\lambda \oplus \mu)\cdot v = \lambda\cdot v+\mu\cdot v,$

D $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall v,\ w \in V:\ \lambda\cdot v+\lambda\cdot w = \lambda\cdot(v+w),$

U $\forall v \in V:\ 1\cdot v = v.$

Функция расстояния

Пусть X — множество. Отображение

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y),$$

называется функцией расстояния, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

(d_1) симметрия:
$$\forall x, y \in X : \ d(x, y) = d(y, x);$$

(d_2) положительность (дефинитность):
$$d(x, y) > 0, \quad \text{если} \quad x \neq y, \quad \text{и} \quad d(x, x) = 0;$$

(d_3) неравенство треугольника:
$$\forall x, y, z \in X : \ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Метрическое пространство

Пусть X — множество, а d — метрика на нем. Тогда пара (X, d) называется метрическим пространством.

Норма

Пусть $(V,\ \mathbb{C},\ +,\ \cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Функция

$$\|\cdot\|:\ V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|,$$

называется нормой на V, если выполнены условия:

- ($\|\cdot\|_1$) положительность: $\|x\| > 0$ для $x \neq 0$ и $\|0\| = 0$;
- ($\|\cdot\|_2$) преобразование при гомотетии: $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для $x \in V$ и $\lambda \in \mathbb{C}$;
- ($\|\cdot\|_3$) условие выпуклости (треугольника): $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для $x,\ y \in V$.

Нормированное векторное пространство

Если $\|\cdot\|$ — норма на V, то пара $(V,\ \|\cdot\|)$ называется нормированным векторным пространством.

Норма $\|\cdot\|$ индуцирует функцию расстояния на V:

$$d:\ V \times V \to \mathbb{R}, \quad d(x,\ y) := \|x - y\|.$$

Свойства функции расстояния, порожденной нормой

(A) инвариантность относительно сдвига:

$$\forall x,\, y,\, z \in V:\ d(x - z,\, y - z) = d(x,\, y);$$

(B) преобразование при гомотетии:

$$\forall x,\, y \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{C}:\ d(\lambda x,\, \lambda y) = |\lambda| d(x,\, y).$$

Теорема

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$, а d — метрика на V. Если метрика d обладает свойствами (A) и (B), то она определяет норму на V по формуле

$$\|x\| := d(0,\, x).$$

Определение

Пусть $(V, \mathbb{C}, +, \cdot)$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Скалярное произведение на V — это отображение

$$(\cdot|\cdot): \ V \times V \to \mathbb{C},$$

удовлетворяющее условиям

(i) Эрмитовость: $\forall u, \ v \in V: \ (u|v) = \overline{(v|u)}$.

(ii) Линейность по первому аргументу:

$$\forall v_1, \ v_2, \ w \in V \ \forall \lambda_1, \ \lambda_2 \in \mathbb{R}: \ ((\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)|w) = \lambda_1 (v_1|w) + \lambda_2 (v_2|w).$$

(iii) Положительная определенность: $\forall v \in V: \ (v|v) \geqslant 0$. Более того,

$$\forall v \in V: \ ((v|v) = 0 \Leftrightarrow v = 0).$$

Норма определяется формулой

$$\|v\| := \sqrt{(v|v)}.$$

Теорема

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ *— векторное нормированное пространство над* $\mathbb{C}$. *Предположим, что норма* $\|\cdot\|$ *удовлетворяет правилу параллелограмма:*

$$\forall u,\ v \in V:\ 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2.$$

Тогда на V *можно ввести скалярное произведение* $(\cdot|\cdot)$ *так, что* $\|u\|^2 = (u|u)$ *для всех* $u \in V$.

Искомое скалярное произведение определяется согласно поляризационному тождеству:

$$(u|v) := \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u-iv\|^2 - i\|u+iv\|^2).$$

Иерархия классов пространств

$$\mathfrak{K}(V, \mathbb{C}, +, \cdot, d)$$
$$\cup$$
$$\mathfrak{K}(V, \mathbb{C}, +, \cdot, \|\cdot\|)$$
$$\cup$$
$$\mathfrak{K}(V, \mathbb{C}, +, \cdot, (\cdot|\cdot))$$

Пространство многочленов степени n

Пусть $\Pi_n(\mathbb{C}) := \{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ — векторное пространство многочленов степени n. Оно $(n+1)$-мерное. Его базис имеет вид $(z^i)_{i=1}^n$. Норма на $\Pi_n(\mathbb{C})$:

$$\|p\|_{\Pi_n(\mathbb{C})} := \max_{|z|\leqslant 1} |p(z)|.$$

Пространство непрерывных функций

Пусть $C(\overline{\mathbb{D}};\, \mathbb{C})$ — векторное пространство непрерывных функций на единичном замкнутом диске $\overline{\mathbb{D}}$ с центром в нуле. Норма на $C(\overline{\mathbb{D}};\, \mathbb{C})$:

$$\|f\|_{C(\overline{\mathbb{D}};\, \mathbb{C})} := \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z)|.$$

Пространство l_2

Пусть l_2 — множество всевозможных последовательностей $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел, таких, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$$

сходится. На этом множестве вводятся поточечные операции сложения и умножения на скаляр:

$$(z_n)_{n=1}^{\infty} + (w_n)_{n=1}^{\infty} := (z_n + w_n)_{n=1}^{\infty},$$
$$\lambda(z_n)_{n=1}^{\infty} := (\lambda z_n)_{n=1}^{\infty},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, l_2 — векторное пространство. Введем на нем норму:

$$\|z\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2}.$$

Таким образом, $(l_2, \|\cdot\|_2)$ — нормированное векторное пространство.

Пространство l_p (обобщение l_2)

Пусть l_p, $p \geqslant 1$, — множество всевозможных последовательностей $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел, таких, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p$$

сходится. На этом множестве вводятся поточечные операции сложения и умножения на скаляр:

$$(z_n)_{n=1}^{\infty} + (w_n)_{n=1}^{\infty} := (z_n + w_n)_{n=1}^{\infty},$$
$$\lambda (z_n)_{n=1}^{\infty} := (\lambda z_n)_{n=1}^{\infty},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, l_p — векторное пространство. Введем на нем норму:

$$\|z\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p \right)^{1/p}.$$

Таким образом, $(l_p, \|\cdot\|_p)$ — нормированное векторное пространство.

Пространство Банаха

Фундаментальные последовательности (последовательности Коши)

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — нормированное векторное пространство. Говорят, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек V фундаментальна, если

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,\, n \in \mathbb{N}: \quad (m > N) \wedge (n > N) \Rightarrow (\|x_m - x_n\| < \varepsilon).$$

Сходимость последовательности

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — нормированное векторное пространство. Говорят, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек V сходится к точке $x \in V$, и пишут $\lim\limits_{\|\cdot\|} x_n = x$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. То есть,

$$\left(\lim_{\|\cdot\|} x_n = x\right) := \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad (n > N) \Rightarrow (\|x_n - x\| < \varepsilon).$$

Банахово пространство

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — нормированное векторное пространство. Если любая последовательность Коши сходится, то $(V, \|\cdot\|)$ называется полным нормированным пространством (пространством Банаха).

Далее рассматриваем отображения $A: V \to W$, где

- $(V, +, \cdot, \|\cdot\|_V)$ — нормированное векторное пространство;
- $(W, +, \cdot, \|\cdot\|_W)$ — пространство Банаха.

Определение

Отображение A называется ограниченным, если

$$\sup_{f \in V} \frac{\|A(f)\|_W}{\|f\|_V} < \infty.$$

Ограниченный линейный оператор

Будем рассматривать только линейные отображения A. Тогда условие ограниченности эквивалентно можно записать как

$$\sup_{\|f\|_V = 1} \|A(f)\|_W < \infty.$$

Определение

Нормой ограниченного оператора A называется число

$$\|A\| := \sup_{\|f\|_V=1} \|A(f)\|_W.$$

Ограниченный оператор

Пусть $V = W$ и W банахово. Рассмотрим тождественное отображение

$$\mathrm{Id}_W : W \to W, \quad f \mapsto f.$$

Для него

$$\sup_{\|f\|_W=1} \|\mathrm{Id}_W(f)\|_W = \sup_{\|f\|_W=1} \|f\|_W = 1.$$

Таким образом, оператор Id_W ограничен и $\|\mathrm{Id}_W\| = 1$.

Неограниченный оператор

Пусть
$$W = C^0([0,\,1];\,\mathbb{C}) := \{f \in \mathbb{C}^{[0,\,1]} \mid f \text{ — непрерывна}\}.$$
Infinity norm: $\|f\|_\infty := \max_{z\in[0,\,1]} |f(z)|$. С такой нормой W является пространством Банаха. Далее, положим $V = C^1([0,\,1];\,\mathbb{C})$ — множество функций с непрерывной производной. Это подпространство W (сложение и умножение на скаляр не выводят за пределы V) и на нем вводится та же норма $\|\cdot\|_\infty$. Пространство V — всего лишь нормированное.
Рассмотрим отображение
$$P:\ V \to W, \quad f \mapsto f'.$$
P линейно в силу линейности производной. Но! Отображение P не является ограниченным. Действительно, рассмотрим последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f:\mathbb{N}\to V$, такую, что
$$f_n(x) = \sin(2\pi nx).$$
Норма каждого члена последовательности равна $\|f_n\|_\infty = 1$. Далее, $P(f_n)(x) = 2\pi n\cos(2\pi nx)$. Все выглядит невинно. Но:
$$\|P(f_n)\|_\infty = 2\pi n.$$

Неограниченный оператор (продолжение)

Тогда

$$\sup_{f\in C^1}\frac{\|P(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} > \sup_{f\in\{f_n\}_{n=1}^{\infty}}\frac{\|P(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \sup(2\pi n) = \infty.$$

Оператор P не ограниченный.

Оператор импульса

Оператор P, определенный на гильбертовом пространстве равенством $P(\psi) = -i\hbar\psi'$ не ограничен.

Теорема

Множество

$$\mathscr{L}(V;\ W) := \{A \in W^V \mid A \text{ линейный и ограниченный оператор}\}.$$

является банаховым пространством относительно операторной нормы $\|\cdot\|$.

Идея доказательства. 1. Определены поточечные операции $(+_{\mathscr{L}})$ и $(\cdot_{\mathscr{L}})$ сложения и умножения на скаляр. Для них выполняется CANI ADDU. **2.** Операторная норма $\|\cdot\|$ — действительно норма. **3.** Необходимо доказать полноту. Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность Коши в $\mathscr{L}(V;\ W)$. Стратегия доказательства того, что $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к элементу из $\mathscr{L}(V;\ W)$: (i) построение кандидата A на роль предела; (ii) доказательство того, что A линейно; (iii) доказательство того, что A ограничено; (iv) доказательство того, что $A_n \to A$.

BLT -теорема (bounded linear transformation). Рассмотрим линейное ограниченное отображение $A: D_A \to W$, где D_A — подпространство V, такое, что $\overline{D_A} = V$. Можно ли построить линейное отображение $\widehat{A}: V \to W$, такое, что $\widehat{A}|_{D_A} = A$? Да, можно.

Теорема

Существует единственное продолжение A в ограниченное линейное отображение $\widehat{A}$.

Определение

Пусть $(V,\, \|\cdot\|_V)$ нормированное пространство. Дуальным пространством относительно $(V,\, \|\cdot\|_V)$ называется структура

$$(V^*,\, \|\cdot\|_{\mathscr{L}(V;\,\mathbb{C})}) := (\mathscr{L}(V;\,\mathbb{C}),\, \|\cdot\|_{\mathscr{L}(V;\,\mathbb{C})}).$$

Дуальное пространство — пространство Банаха. Норма на нем:

$$\psi \mapsto \|\psi\|_{\mathscr{L}(V;\,\mathbb{C})} := \sup_{f\in V,\, \|f\|_V=1} |\psi(f)|.$$

Ковекторы — ограниченные линейные функционалы.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов из V. Тогда

(i) **Сильная сходимость:**

$$\exists f \in V \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \|f_n - f\|_V < \varepsilon.$$

(ii) **Слабая сходимость:**

$$\exists f \in V \quad \forall l \in V^* \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |l(f_n) - l(f)| < \varepsilon.$$