

На правах рукописи

Палымский Игорь Борисович

Численное моделирование сложных режимов конвекции  
Рэля-Бенара

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Новосибирск - 2011

# Оглавление

<b>Введение</b>	4
<b>Глава 1. Постановка задачи о конвекции Рэля-Бенара и численные алгоритмы</b>	20
1.1. Постановка задачи	20
1.2. Метод численного расчета двумерной конвекции	25
1.2.1. Свободные горизонтальные границы	25
1.2.2. Жесткие горизонтальные границы	32
1.2.2.1. О вычислении завихренности на границе	34
1.3. Метод численного расчета трехмерной конвекции	39
<b>Глава 2. Анализ и тестирование численных алгоритмов</b>	43
2.1. Линейный анализ двумерных алгоритмов	43
2.1.1. Свободные границы	43
2.1.2. Жесткие границы	56
2.2. Нелинейный анализ	59
2.2.1. Численные эксперименты	61
2.2.1.1. Модельная система уравнений	61
2.2.1.2. Исходная система уравнений	63
2.3. Линейный анализ метода расчета трехмерной конвекции	67
2.4. Тестирование и методические расчеты	70
2.4.1. Метод расчета 2d,free конвекции	70
2.4.1.1. Сравнение с результатами других авторов	70
2.4.1.2. О сравнении мгновенных и средних величин	74
2.4.1.3. Проверка сходимости	76
2.4.1.4. Учет большего числа цифр	81
2.4.1.5. Сравнение с результатом расчета псевдоспектральным методом	82

2.4.1.6. Определение необходимой пространственной разрешимости	90
2.4.2. Метод расчета 2d,rigid конвекции	95
2.4.2.1. Сравнение с результатами других авторов	95
2.4.2.2. Проверка сходимости	97
2.4.2.3. Сопоставление с теорией Р. Крайчнана	102
2.4.3. Метод расчета 3d,free конвекции	104
2.4.3.1. Сравнение на двумерном решении	104
2.4.3.2. Проверка сходимости при увеличении пространственной разрешимости	106
<b>Глава 3. Численное моделирование конвекции Рэлея-Бенара</b>	<b>112</b>
3.1. Стационарная валиковая конвекция	112
3.2. Стационарная конвекция в квадратной области	116
3.3. Вихревой масштаб	122
3.4. Спектры скорости и температуры	131
3.4.1. Некоторые качественные соображения о динамике спектров	131
3.4.2. Временной спектр температуры	134
3.4.3. Пространственные спектры при конвекции в области умеренной горизонтальной протяженности	135
3.4.3.1. Спектры скорости	136
3.4.3.2. Спектры температуры	141
3.4.4. Пространственные спектры при конвекции в области большой горизонтальной протяженности и каскадные процессы	146
3.4.4.1. Спектры скорости	146
3.4.4.2. Спектры температуры	149
3.4.4.3. Диаграмма спектров	151
3.5. Формирование крупномасштабной структуры течения	153
3.6. Интегральные характеристики	160

<b>Заключение</b>	176
<b>Литература</b>	191
<b>Приложение 1. Вычисление одномерных энергетических спектров</b>	200
<b>Приложение 2. Определение степенных законов</b>	202

## Введение

Классическая задача о конвекции Рэлея-Бенара в различных постановках исследовалась многими авторами численно [1-38] и экспериментально [39-57]. Из-за очевидной связи с прямым численным моделированием турбулентности большой интерес вызывают исследования при высокой надкритичности  $r = Ra/Ra_{cr}$ , где  $Ra$  и  $Ra_{cr}$  - число Рэлея и его критическое значение, а  $Pr$  - число Прандтля.

При численном моделировании различают две постановки задачи о конвекции в бесконечном горизонтальном слое - со свободными (от касательных напряжений) и жесткими (с условием прилипания) горизонтальными границами, как правило, решение предполагается периодическим в горизонтальных направлениях или удовлетворяющим специальным граничным условиям [58]. Обе постановки задачи часто приводят к решениям, которые различаются лишь количественно, а не качественно [59]. Это и относительная простота решения задачи о конвекции со свободными граничными условиями и обуславливает интерес к этой постановке.

Рассмотрение конвекции со свободными от касательных напряжений горизонтальными границами имеет также и самостоятельный интерес, например, при изучении конвекции в мантии Земли [11,34] или приповерхностном слое океана [60]. В самом деле, в последнем случае формируется своеобразная трехслойная структура – воздух, полностью турбулизированный приповерхностный слой и относительно слабо турбулизированный внутренний слой океана, где изолировано расположенные очаги турбулентности имеют форму горизонтальных блинов [61].

Высокая степень турбулизации приповерхностного слоя обуславливает высокое значение эффективной (турбулентной) вязкости по сравнению с ее значениями в соседних слоях. Рассматривая динамическое соотношение на границах, ограничивающих приповерхностный слой и устремляя отношение

вязкостей к бесконечности, получим асимптотически нулевые значения для касательных напряжений на границах приповерхностного слоя. Подобная трехслойная система (газообразный гелий – силиконовое масло – ртуть) использована в лабораторном эксперименте [39], где относительно высокая вязкость силиконового масла позволила исследовать конвекцию в слое со свободными от касательных напряжений границами.

Однако, такие лабораторные эксперименты технически очень сложны и интерпретация их результатов неоднозначна. Это обусловило практически полное отсутствие экспериментальных данных по конвекции со свободными границами, что заставляет нас обращаться к экспериментальным данным по конвекции с жесткими.

При сопоставлении данных по конвекции со свободными и жесткими граничными условиями следует ожидать хорошего соответствия характеристик, связанных с вертикальной скоростью, так как для нее граничные условия на горизонтальных границах правильные и ее динамика определяется, в основном, подогревом и гравитацией. Хорошее соответствие можно ожидать также и по кинетической энергии, среднеквадратичной скорости и числу Рейнольдса, так как они определяются, в основном, вертикальной скоростью. Сказанное справедливо также и для температуры, так как для нее граничные условия на горизонтальных границах правильные и последствия неправильных граничных условий для горизонтальной скорости проявляются лишь опосредовано, через коэффициенты в членах нелинейного переноса.

Существенное отличие конвекции со свободными границами от конвекции с жесткими - возможное неравенство нулю значений вертикальной компоненты завихренности [59], что проявляется в различном вращении вокруг вертикальной оси, а направленная горизонтально скорость такого вращения, как следствие, обуславливает возможное расхождение в характеристиках, связанных с горизонтальной скоростью. Заметим, что при двумерном моделировании вертикальная компонента завихренности равна нулю тождественно, что делает возможным согласование среднеквадратичных

пульсаций горизонтальной скорости при двумерной конвекции со свободными и жесткими граничными условиями [63]. Интересно, что при этом результаты 2d,free расчетов согласуются с экспериментальными данными по величине среднеквадратичных пульсаций горизонтальной скорости и по числу Нуссельта даже при высокой надкритичности [63].

Ширина области влияния граничных условий пропорциональна характерному размеру вихрей, который в трехмерной конвекции уменьшается с ростом надкритичности как  $r^{-1/12}$  [64] и, следовательно, роль граничных условий уменьшается при увеличении надкритичности и сказанное о правомерности сравнения характеристик, связанных с вертикальной скоростью и температурой, при трехмерной конвекции тем более верно при достаточно высокой надкритичности. Утверждение об уменьшении вихревого масштаба с ростом надкритичности в трехмерной конвекции со свободными границами [64], остается справедливым и для трехмерной конвекции с жесткими [3].

Основные трудности при численном моделировании конвекции при высокой надкритичности связаны с наличием растущих в линейном приближении возмущений с огромными инкрементами, например, при  $r = 3.4 \cdot 10^4$  и  $Pr = 10$  (в двумерных расчетах со свободными границами) существуют возмущения, растущие как  $e^{1367 \cdot t}$ . Последнее обстоятельство накладывает серьезные ограничения на численные методы, затрудняя использование каких-либо итераций, релаксаций, а также последовательное решение уравнений системы.

Между тем, число Рейнольдса (вычисленное по среднеквадратичной скорости и высоте слоя) является относительно медленно растущей функцией надкритичности в конвекции Рэлея-Бенара и  $Re \sim 375$  при  $r = 3.4 \cdot 10^4$  ( $Pr = 10$ ) [65]. В трехмерных расчетах настоящей работы надкритичность меньше, чем в двумерных и, как следствие, при трехмерном моделировании число Рейнольдса не превышает 44 с максимальным ростом линейных возмущений как  $e^{198 \cdot t}$  (при  $r = 950$  и  $Pr = 10$ ).

В задаче о конвекции Рэлея-Бенара со свободными границами собственные функции задачи линейной устойчивости выражаются через синусы и косинусы [66] и это обуславливает высокую эффективность применения спектральных (псевдоспектральных) методов. В трехмерной задаче спектральные методы примерно на два порядка эффективнее конечно-разностных, причем, эта порядковая оценка отношения количества точек дискретизации к числу гармоник относительно слабо зависит от конкретных реализаций (в том числе и от порядка аппроксимации) конечно-разностного и спектрального методов и определяется тем, что для любого конечно-разностного оператора интервал аппроксимации составляет лишь треть всего спектра и, таким образом, длина волны каждой учитываемой гармоники должна быть не менее шести интервалов разностной сетки [67].

При расчете конвекции спектральным методом нужно решить две проблемы: интегрирование по времени жесткой системы уравнений и вычисление нелинейных членов. Во всех известных автору работах, кроме [15], для интегрирования по времени использовались разностные схемы, что ограничивало шаг по времени и число Рэлея [68]. На наш взгляд, для расчета конвекции со свободными границами наиболее оптимально использование аналитических формул [68,69] или матричной экспоненты [15].

Для проведения расчетов турбулентной конвекции широко используется псевдоспектральный метод в различных его модификациях [1,2,9,13,14,17,20-22], недостатками которого являются невыполнение уравнения неразрывности на полном шаге расщепления [17,20] и использование не очень удачной схемы расщепления по физическим процессам, с учетом на одном дробном шаге нелинейных членов и плавучести [1,2,17,20-22], что ограничивает шаг по времени. На наш взгляд, более правильно рассматривать на отдельных дробных шагах линейное и нелинейное развитие возмущений.

Проблема вычисления нелинейных членов рассматривалась в работах [27,62]. В работе [62] рассмотрены три различных способа вычисления нелинейных членов, основанных на применении алгоритма быстрого



преобразования Фурье, а в [27] - нелинейные члены вычисляются в смешанном спектрально-физическом пространстве.

Численные алгоритмы с вычислением нелинейных членов в физическом пространстве на разностной сетке, число узлов которой в каждом направлении в два раза превышает число гармоник в том же направлении, обладают высокой точностью, но при этом возникает проблема их эффективности. На наш взгляд, наиболее оптимальный компромисс между эффективностью численного алгоритма и точностью вычислений дает учет нелинейного переноса в физическом пространстве по разностным схемам на отдельном этапе расщепления [68,69].

Для расчета двумерной конвекции со свободными границами возможно применение варианта псевдоспектрального метода (модифицированного метода Галеркина), основанного на вычислении нелинейных членов по аналитическим формулам в физическом пространстве в точках разностной сетки, число узлов которой в каждом направлении в два раза превышает число гармоник в том же направлении и схеме Рунге-Кутты четвертого порядка точности для интегрировании по времени. Подобный численный метод применялся для расчета стохастической двухдиффузионной конвекции [30,31]. Такой метод обладает высокой точностью и результаты расчета по такой методике хорошо согласуются с результатами расчетов предлагаемым спектрально-разностным методом. Но, к сожалению, уже отмеченная выше низкая эффективность подобного численного метода, обусловленная избыточно точным вычислением нелинейных членов и использованием явной схемы для интегрирования по времени, сделала возможным проведение только нескольких тестовых расчетов.

В работе [23] для расчета течений двумерной конвекции с жесткими горизонтальными границами был предложен конечно-разностный численный метод четвертого порядка аппроксимации по времени и пространству. Несмотря на выигрыш в точности при достаточно малых шагах по

пространству и времени, реализация такого подхода требует преодоления значительных трудностей.

В самом деле, повышение порядка аппроксимации по пространственным переменным до четвертого требует проведения вычислений на увеличенном шаблоне из-за повышения порядка производных в уравнениях и для однородности вычислений при этом необходимо введение фиктивных точек за границей области расчета, значения температуры и функции тока в которых должны вычисляться по специальным экстраполяционным формулам. Использование для вычисления значений завихренности на горизонтальных границах конечно-разностной формулы Брили третьего порядка аппроксимации и явная реализация метода расчета обусловили ограничения на устойчивость вычислений при большой надкритичности, малый шаг по времени и, как следствие, невысокую эффективность метода расчета.

Применение конечно-разностных методов может быть оправдано при проведении расчетов с небольшими надкритичностями [8,10], в областях со сложной геометрией [4,6] или жесткими стенками [26]. Использование конечно-разностных аппроксимаций возможно также по переменным, где применение спектральных разложений затруднительно [70,71].

Для расчета турбулентной конвекции со свободными границами при высокой надкритичности в [12] используется специальный численный метод, основанный на методе характеристик с использованием сплайнов. На наш взгляд, для решения этой задачи более эффективны спектральные методы с разложением по синусам и косинусам, совпадающими с собственными функциями линейной теории устойчивости [66].

Расчеты трехмерной конвекции проводились в [1-9,18] с жесткими и в [10-19] со свободными граничными условиями. Использование суперкомпьютеров сделало реальным прямое численное моделирование турбулентной конвекции [1-7,12-14], но, к сожалению, большая сложность такого моделирования, его огромная ресурсоемкость и, как следствие, значительная стоимость обусловили небольшое число подобных работ и проведение надежных и

достаточно подробных расчетов пока еще в перспективе. Заметим, что в [1,2,13,14,17] использован псевдоспектральный метод, причем в [2] использована программа [1], а в [3-7] - метод конечных разностей, хотя, как уже отмечалось выше, в таких задачах спектральные (псевдоспектральные) методы более эффективны [72]. В работах [13,14] рассчитывалась трехмерная конвекция в воздухе со свободными горизонтальными границами при надкритичности  $g = 9.8 \cdot 10^3$  и  $3.3 \cdot 10^4$ , соответственно, причем учитываемое число гармоник [96x96x97] кажется явно недостаточным для такой высокой надкритичности.

Очень интересен совместный анализ результатов расчетов, выполненных со свободными и жесткими горизонтальными границами при  $Ra = 10^6$  и  $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$  [18] (с использованием данных [19]). Показано, что в обеих случаях качественно похожие зависимости чисел Нуссельта и Рейнольдса от числа Прандтля претерпевают перестройки при  $Pr = 1$ , причем при  $Pr < 1$  различие чисел Нуссельта и Рейнольдса выражено слабее и более того, числа Рейнольдса (и, следовательно, кинетическая энергия и среднеквадратичная скорость) при  $Pr \rightarrow 0$  практически совпадают.

С целью многократно уменьшить используемые вычислительные ресурсы, рассматривают конвекцию жидкости в двумерной постановке. При конвекции в узком канале оси валов параллельны короткой стенке канала и перпендикулярны длинным стенкам. При конвекции в лабораторной модели бесконечно длинного прямого канала - кольцевом канале между коаксиальными цилиндрическими стенками, валы располагаются в радиальном направлении, перпендикулярно стенкам, если канал не слишком широк [59].

Конечно, при надкритичности порядка 10 ( $Pr = 10$ ) стационарные валы становятся неустойчивыми к трехмерным возмущениям, и течение становится трехмерным [47]. Но, логично ожидать, что в начале своего возникновения трехмерность еще не является доминирующим фактором и законы изменения основных интегральных величин еще мало отличаются от двумерных. Грубую оценку величины надкритичности, выше которой трехмерность является

доминирующей можно получить из рассмотрения динамики вихревого масштаба [64].

В самом деле, в работе [64] показано, что кардинальное отличие двумерных течений от трехмерных - различное поведение вихревого масштаба, который в двумерной конвекции растет, а в трехмерной – уменьшается с ростом надкритичности. Указанная тенденция роста вихревого масштаба в двумерной конвекции проявляется при  $r \geq r_m$ ,  $r_m = 36$  (при  $\alpha = 1$  и  $Pr = 10$ ), а именно, при  $r < r_m$  масштаб вихрей в двумерной, также как и в трехмерной конвекции уменьшается, а при  $r \geq r_m$  - увеличивается до величины порядка горизонтального размера области. Естественно ожидать, что и это различие в поведении вихревого масштаба становится доминирующим не сразу после его появления. Таким образом, можно ожидать примерного соответствия степенных законов изменения средних величин при увеличении надкритичности в двумерной и трехмерной конвекции примерно до значений порядка 100. Причем для консервативных величин, например, пространственных и временных спектров, слабо зависящих от надкритичности, пространственного разрешения и размерности [58,60], интервал соответствия может быть много больше.

Сказанное подтверждает то, что в двумерной и трехмерной конвекции со свободными границами в области умеренной горизонтальной протяженности  $\pi$ , пространственные спектры пульсационных полей температуры и скорости совпадают практически полностью.

Отметим также качественное соответствие временных спектров числа Нуссельта при  $r = 950$ , полученных в двумерных и трехмерном расчетах и согласование результатов двумерного расчета с экспериментом по энергетическому спектру среднеквадратичных пульсаций температуры в центре ячейки при надкритичности  $r = 6.4 \cdot 10^3$ .

В работе [73] рассмотрена двумерная конвекция, возникающая при подогреве сбоку, при этом по некоторым характеристикам было получено хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных.

В работах [17,27-38] рассматривалась двумерная конвекция со свободными, а в работах [20-26] - жесткими граничными условиями. В работе [26] исследовался начальный этап развития конвекции при внезапном нагреве нижней границы в области большой горизонтальной протяженности при  $Ra \leq 10^6$  и  $Pr = 0.7$ . Сложные режимы двумерной конвекции при высокой надкритичности исследовались в работах [21-23,35-38]. В [30,31] рассматривались стохастические режимы двухдиффузионной конвекции при сравнительно невысокой надкритичности и исследовалась структура стохастического аттрактора. В работах [34,35,38] конвекция при высокой надкритичности рассматривается в приближении бесконечно большого числа Прандтля. В работе [34] рассматриваются стационарные решения, в [35] на основании расчетов двумерной конвекции со свободными граничными условиями получен закон для числа Нуссельта  $Nu \sim Ra^{0.301}$ , а в [38] показано, что интегральные характеристики течения сильно зависят от аспектного отношения (длина области отнесенная к высоте), например, число Нуссельта изменяется при этом в несколько раз.

В работах [21,22] были рассчитаны конвективные течения в квадратной области при огромной надкритичности (до  $r \sim 9.6 \cdot 10^4$ ), но разрешимость в горизонтальном направлении при такой надкритичности кажется явно недостаточной (129 и 257 гармоник в работах [21] и [22], соответственно).

В работе [37] рассматриваются периодические в горизонтальном направлении двумерные конвективные течения в области горизонтальной протяженности 3 со свободными горизонтальными границами. Расчеты выполнены псевдоспектральным методом с учетом до [1024x3076] гармоник, причем число Рэлея изменяется от  $10^8$  до  $10^{14}$ . Некоторые результаты этой работы требуют уточнения или дополнительных пояснений, а именно, странным кажется постоянное при  $r > 10^{12}$  число Нуссельта и явно заниженный показатель степенного закона для числа Рейнольдса ( $Re \sim r^{0.25}$ ). Возможно, что указанное несоответствие известным экспериментальным данным и здравому смыслу обусловлено плохой сходимостью тригонометрических рядов, часто

наблюдающейся при решении нелинейных задач с учетом чрезмерно большого числа гармоник.

В работе автора [63] описаны результаты численного моделирования двумерной конвекции со свободными и жесткими граничными условиями при высокой надкритичности (до  $r \sim 3.4 \cdot 10^4$  для свободных и  $r \sim 7 \cdot 10^3$  - жестких граничных условий), но результаты расчетов при сравнительно небольшой надкритичности  $r \leq 10^3$ , а также степенные законы зависимостей числа Нуссельта и других интегральных величин от надкритичности потребовали уточнений.

Большое значение имеет исследование динамики пространственных спектров температуры и скорости в двумерных и трехмерных расчетах, так как наличие определенных спектральных законов указывает, во первых, на развитый характер течения и, во вторых, на то, какие конкретные физические механизмы доминируют.

Диссипация и генерация энергии турбулентности растут при увеличении надкритичности примерно как  $r^{1.4}$ . При достаточно большой надкритичности большие потоки переносимой энергии обуславливают формирование инерционных интервалов и спектров.

Известно два основных сценария развития конвективной турбулентности [74].

Сценарий Колмогорова, при котором предполагается, что температура ведет себя как пассивная примесь, предполагает наличие двух инерционных интервалов переноса энергий пульсаций температуры и скорости, с формированием одинаковых спектров  $k^{-5/3}$ , где  $k$  - волновое число в случае зависимости от пространственных переменных либо частота - от времени. Сила плавучести здесь существенной роли не играет.

Напротив, Р. Болджиано и А. Обухов (БО) предположили существование инерционного интервала для переноса энергии пульсаций температуры и в области больших масштабов равенство по порядку величины членов плавучести и нелинейного переноса. Это привело к спектрам  $k^{-7/5}$  и  $k^{-11/5}$  для

температуры и для скорости, соответственно. А при большом числе Прандтля возможен баланс между силой плавучести и силой вязкости, что приводит к спектру  $k^{-5}$  для скорости.

В области малых масштабов в двумерных расчетах возможно появление инерционного интервала переноса энтропии ( $k^{-1}$  для температуры и  $k^{-3}$  для скорости), а в области больших - обратного (красного) каскада переноса энергии пульсаций скорости, направленного от масштаба генерации в область больших масштабов.

В экспериментах по турбулентной конвекции для пульсаций температуры наблюдался спектр пассивной примеси  $k^{-5/3}$ , БО  $k^{-7/5}$  и  $k^{-2.4}$  [42-44,49]. Для пульсаций скорости наблюдались спектр БО  $k^{-11/5}$  и  $k^{-1.35}$ , но спектр Колмогорова  $k^{-5/3}$  не обнаружен [44,46]. Физические механизмы появления спектров  $k^{-2.4}$  и  $k^{-1.35}$  для пульсаций температуры и скорости, отмеченных в экспериментальных работах [42] и [46], соответственно, пока еще не получили достаточного теоретического обоснования.

В немногочисленных численных исследованиях турбулентной трехмерной конвекции при высокой надкритичности для пульсаций температуры были получены спектры БО  $k^{-7/5}$  и  $k^{-1}$  [1,4], но спектр пассивной примеси  $k^{-5/3}$  не обнаружен. А для пульсаций скорости - спектры  $k^{-5/3}$ ,  $k^{-1}$  и  $k^{-3}$  [1,4,12], но спектр БО  $k^{-11/5}$  не наблюдался. Отметим также не очевидную идентификацию спектров  $k^{-1}$  и  $k^{-5/3}$  для температуры и скорости, соответственно, в работе [1].

Участки со степенными законами  $k^{-1}$  для температуры и скорости в работе [4] непосредственно предшествуют диссипативному интервалу и при их формировании могли быть существенны численные эффекты, неизбежно возникающие на краю спектров разностных операторов [67].

В [35] проведено моделирование турбулентной конвекции по двумерной модели бесконечного числа Прандтля, получены спектры  $k^{-1}$ ,  $k^{-2}$  для пульсаций температуры и  $k^{-2}$  - скорости.

В работе [36] проведено моделирование двумерной конвекции со свободными от касательных напряжений горизонтальными границами и

условием периодичности в горизонтальном направлении при  $Ra = 10^8$  и  $Pr = 1$ , для температуры получен спектр пассивной примеси  $k^{-5/3}$ . Однако, сделанный на основании анализа температурного спектра вывод о существовании красного каскада энергии представляется не достаточно обоснованным, так как анализ спектра скорости и потока энергии по спектру в этой работе не проводился.

В трехмерной турбулентности кинетическая энергия переносится из области генерации в мелкие масштабы, где она диссипируется. А в двумерных течениях возможно появление двух инерционных интервалов, по которым реализуются прямой каскад переноса энтропии ( $k^{-3}$  для энергетического спектра скорости), обеспечивающий диссипацию и обратный каскад кинетической энергии со степенным законом  $k^{-5/3}$ , перекачивающий кинетическую энергию из масштаба генерации в область больших масштабов [74].

Обратный каскад энергии каскад можно рассматривать как процесс самоорганизации турбулентности (рождение порядка из хаоса), в результате чего из поля мелкомасштабных пульсаций формируются крупномасштабные когерентные структуры. Такой каскадный процесс наблюдается в двумерных, вращающихся течениях, в плазме и волнах на поверхности жидкости [75]. Очевидна важная роль красного каскада энергии для течений в океане и атмосфере. В самом деле, наряду с вихрями сравнительно небольшого масштаба (порядка 1 км) в океане существуют вихри огромного размера (до  $10^3$  км), движения которых квазидвумерны [61]. Существование таких огромных вихревых образований представляется мало реальным без подпитки их энергией из более мелких масштабов.

Каскадные процессы в несжимаемой вязкой жидкости на основе двумерных уравнений Навье-Стокса исследовались в [76-83]. Во всех известных автору работах рассматривалась стационарная однородная двумерная турбулентность, расчеты проводились в квадратной области с периодическими граничными условиями и, как правило, с введением дополнительных членов, обеспечивающих стоки энергии на малых и больших



масштабах. Чтобы получить стационарный в среднем процесс, в правую часть вводилась внешняя сила, осуществляющая подкачку энергии в виде белого шума.

Красный каскад энергии в электропроводящей жидкости (водный раствор  $NaCl$ ) исследовался экспериментально в [75,82,84-86]. При этом течение создавалось путем пропускания через жидкость электрического тока, а роль внешней силы играли расположенные под слоем жидкости постоянные магниты.

В работах [76-78,81,82] наблюдался в установившемся (в среднем) решении красный каскад энергии со степенным законом  $k^{-5/3}$ . Однако, в [79,80,83] этот степенной закон наблюдался только на начальной стадии расчета, а при выходе на стационарный режим устанавливался спектр  $k^{-3}$ . Подобную перестройку спектра автор [80] объясняет рождением самоподобных когерентных структур, появление которых и обуславливает спектр  $k^{-3}$  на больших масштабах.

Эксперименты [75], проведенные в лотке размером  $0.18\text{м} \cdot 0.18\text{м}$  также показали наличие четко идентифицируемого красного каскада энергии со степенным законом  $k^{-5/3}$ , а на приводимых в работе трасерных фотографиях видно формирование крупномасштабной вихревой структуры.

В экспериментальном исследовании [85] тоже показано формирование спектра скорости с инерционным интервалом, отвечающим обратному каскаду энергии. Отмечено примерно пятикратное увеличение вихревого масштаба с ростом времени, причем временная динамика вихревого масштаба согласуется с законом, полученным теоретически. Вихревой масштаб определен здесь по волновому числу, отвечающему максимуму кинетической энергии.

В работе [82] делается попытка совместного численного и экспериментального исследования двумерной турбулентности, при этом в численном моделировании красный каскад виден более определенно.

В эксперименте [86] подкачка энергии создавалась на крупных масштабах большим числом (около 400) постоянных магнитов, расположенных так, чтобы

течению не навязывалась какая-либо определенная пространственная структура и электрическим током, меняющим сложным образом свое направление во времени. Такая крупномасштабная генерация турбулентности обусловила наличие продолжительного и четко идентифицируемого спектра энстрофийного каскада  $k^{-3}$ .

В численных исследованиях каскад энстрофии наблюдается менее устойчиво, чем красный [79]. Степенной закон энстрофийного каскада был исследован в [77,79], но рассчитанные в этих работах показатели степенного закона сильно отличаются от  $-3$  и показывают более крутой наклон, а именно: от  $-5$  до  $-3.5$  в [77] и круче  $-5$  - в [79]. Отмеченное расхождение объясняется наличием когерентных вихревых структур, очень устойчивых и имеющих примерно одинаковый размер [74].

Интересное численное исследование проведено также в трехмерной вращающейся турбулентности [87]. Установлено, что при достаточно сильном вращении начинается отток подкачиваемой с помощью внешней силы энергии к большим масштабам, и течение становится квазидвумерным. В зависимости от величины аспектного отношения (диаметр области отнесенный к высоте) наблюдался спектр  $k^{-5/3}$  при больших и  $k^{-3}$  - малых ее значениях. Спектр  $k^{-3}$  получен также по размерности из предположения, что скорость вращения является определяющим параметром.

В работе [88] описаны результаты совместного численного и экспериментального исследования турбулентности в вертикально стекающей под действием силы тяжести мыльной пленке, где турбулентность генерируется горизонтально и вертикально расположенными цилиндрами. Несмотря на ощутимый разброс в полученном численном и экспериментальном спектрах, автор выделяет инерционные интервалы, соответствующие прямому и обратному каскадам энстрофии и энергии.

Роль и проявление каскадных процессов в конвективной турбулентности пока не исследованы. А между тем, именно различие в каскадных процессах

обуславливает качественное различие между двумерной и трехмерной конвективной турбулентностью при высокой надкритичности.

В численных и экспериментальных работах большое внимание уделяется исследованию важнейшей характеристики турбулентной конвекции - теплообмену. Но, экспериментальные и расчетные данные по теплообмену противоречивы и зависимость числа Нуссельта от надкритичности требует дальнейшего исследования.

В самом деле, в ряде экспериментов при  $Ra \sim 10^7$  ( $r \sim 7 \cdot 10^3$ ) наблюдалось изменение степенного закона от  $Nu \sim r^{1/3}$  до  $Nu \sim r^{2/7}$ , что трактуется как переход от режима "мягкой" к режиму 'жесткой' турбулентности [89]. Подобная перестройка наблюдалась и в расчете [21].

С другой стороны, в других экспериментальных [40,41] и численном [5] исследованиях при увеличении надкритичности зафиксирован выход на асимптотический степенной закон  $Nu \sim r^{1/3}$ , означающий независимость теплообмена (числа Нуссельта) от толщины слоя [89].

И более того, в трехмерных расчетах при высокой надкритичности [4] отмечена обратная последовательность степенных законов - при  $r \approx 3 \cdot 10^5$  "жесткая" турбулентность сменяется "мягкой". Отметим также, что другие экспериментальные работы, обзор которых можно найти в [41], содержат и другие степенные законы, близкие к  $Nu \sim r^{0.31}$

Интересный и поучительный пример неоднозначности степенных законов конвекции дает совместный анализ трех экспериментальных работ [43,55,57]. Все эти исследования проведены с использованием в качестве рабочей жидкости газообразного гелия при криогенной температуре, в области цилиндрической формы с аспектным отношением 0.5. Однако, полученные в экспериментах [43,55] законы изменения числа Нуссельта как функции надкритичности отличаются качественно от результатов [57].

В самом деле, измеренные в работе [55] числа Нуссельта вплоть до  $Ra = 10^{14}$  следуют закону  $Nu = 0.17 \cdot Ra^{0.29}$ , близкому к закону 'жесткой' турбулентности. В работе [43] при  $10^6 < Ra < 10^{17}$  получен закон

$Nu = 0.124 \cdot Ra^{0.309}$ . А согласно данным [57], степенной закон ‘жесткой’ турбулентности трансформируется в  $Nu = 0.0225 \cdot Ra^{0.375}$  при  $2 \cdot 10^{11} < Ra < 2 \cdot 10^{14}$ , что вступает в противоречие с результатам [43,55]. Указанное несоответствие результатов измерений еще не получило достаточно убедительного объяснения и должно стать объектом дальнейшего исследования.

Итак, целью данной работы является описание предложенного автором специального спектрально-разностного метода, результатов его линейного и нелинейного (на модельной нелинейной системе уравнений) анализа, тестовых расчетов и результатов расчетов различных (в том числе и стохастических) режимов трехмерной и двумерной конвекции со сравнительным анализом законов изменения интегральных величин, а также исследование каскадных процессов, динамики спектров для температуры и скорости.

## Глава 1

## Постановка задачи о конвекции Рэля-Бенара и численные алгоритмы

### 1.1. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая конвективные течения вязкой, несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска имеет вид [66]:

$$\begin{aligned}
 u_x + v_y + w_z &= 0, \\
 \vec{v}_t + (\vec{v}\nabla)\vec{v} &= -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + g\beta_t\Theta\vec{\gamma}, \\
 \Theta_t + (\vec{v}\nabla)\Theta &= \chi\Delta\Theta,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\vec{v} = (u, v, p)$ ,  $p$  - вектор скорости, давление,  $\Theta$  - температура,  $\nu$ ,  $\beta_t$  и  $\chi$  - коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения и температуропроводности,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\vec{\gamma}$  - единичный вектор, направленный по вертикали вверх,  $\rho_0$  - постоянная плотность,  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$  - оператор Лапласа, действующий на функцию  $f$ , а  $x$ ,  $y$  и  $z$  - горизонтальные и вертикальная координаты.

Выбираем характерные масштабы: длины - толщина слоя  $D$ ,  $\chi/D$  - скорости,  $D^2/\nu$  - времени,  $\rho_0\nu\chi/D^2$  - давления,  $\delta\Theta = \Theta_h - \Theta_c$  - температуры. Здесь  $\Theta_h$  и  $\Theta_c$  - температуры нижней и верхней горизонтальных границ, соответственно.

После обезразмеривания система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 u_x + v_y + w_z &= 0, \\
 \vec{v}_t + \frac{1}{Pr}(\vec{v}\nabla)\vec{v} &= -\nabla p + \Delta\vec{v} + Ra\Theta\vec{\gamma}, \\
 \Theta_t + \frac{1}{Pr}(\vec{v}\nabla)\Theta &= \Delta\Theta.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $Ra = \frac{g\beta_t D^3 \delta \Theta}{\chi \nu}$ ,  $Pr = \frac{\nu}{\chi}$  - числа Рэлея и Прандтля.

Система (2) имеет равновесное решение:

$$\vec{v} = 0, p = p_0 = Ra z(1 - z/2), \Theta = \Theta_0 = 1 - z.$$

Записанная в отклонениях от равновесного решения

$$\vec{v} = \vec{v}', p = p_0 + p', \Theta = \Theta_0 + Q,$$

система (2) (ниже штрихи опускаются) принимает окончательный вид:

$$\begin{aligned} u_x + v_y + w_z &= 0, \\ u_t + \frac{1}{Pr}(u u_x + v u_y + w u_z) + p_x &= \Delta u, \\ v_t + \frac{1}{Pr}(u v_x + v v_y + w v_z) + p_y &= \Delta v, \\ w_t + \frac{1}{Pr}(u w_x + v w_y + w w_z) + p_z &= \Delta w + Ra Q, \\ Q_t + \frac{1}{Pr}(u Q_x + v Q_y + w Q_z) &= \frac{1}{Pr} \Delta Q + \frac{w}{Pr}. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) используется для проведения расчетов трехмерной конвекции.

Здесь  $Q$  - отклонение температуры от равновесного профиля  $\Theta_0 = 1 - z$ , в дальнейшем, для краткости  $Q$  и полную температуру  $\Theta = 1 - z + Q$  называем просто температурой.

Трехмерная конвекция рассматривается в прямоугольном параллелепипеде единичной высоты

$$G_3 = \{0 \leq x \leq \pi/\alpha, 0 \leq y \leq \pi/\beta, 0 \leq z \leq 1\},$$

со свободными от касательных напряжений и изотермическими горизонтальными границами  $z = 0, 1$ :  $u_z = v_z = w = Q = 0$  - в дальнейшем (3d,free). Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  - минимальные волновые числа.

Искомые функции представляются в виде разложения по собственным функциям линейной теории устойчивости [66] и величины  $u, v, w, p, Q$  разыскиваются в виде:

$$\begin{aligned}
u(t, x, y, z) &= \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M u_{knm}(t) \rho_k \rho_n \rho_m \cos(\alpha kx) \cos(\beta ny) \cos(\pi mz), \\
v(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^M v_{knm}(t) \rho_m \sin(\alpha kx) \sin(\beta ny) \cos(\pi mz), \\
w(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} w_{knm}(t) \rho_n \sin(\alpha kx) \cos(\beta ny) \sin(\pi mz), \\
p(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M p_{knm}(t) \rho_n \rho_m \sin(\alpha kx) \cos(\beta ny) \cos(\pi mz), \\
Q(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} Q_{knm}(t) \rho_n \sin(\alpha kx) \cos(\beta ny) \sin(\pi mz),
\end{aligned} \tag{4}$$

где  $\rho_k = 0.5$  при  $k = 0, K$  и  $1$  при  $1 \leq k \leq K - 1$ . Отметим, что из системы (3) для решений (4) сразу следует, что  $u_{0,0,0} = 0$ , и, поэтому, можно считать, что всегда  $k + n + m > 0$ .

Граничные условия на боковых границах ставятся исходя из вида решения (4), например, при  $x = 0, \pi/\alpha$  и  $0 \leq y \leq \pi/\beta, 0 \leq z \leq 1$  из (4) получаем:  $u_x = v = w = Q = 0$ , что соответствует проницаемой идеально теплопроводной стенке [66]. А при  $y = 0, \pi/\beta$  и  $0 \leq x \leq \pi/\alpha, 0 \leq z \leq 1$  из (4) находим:  $u_y = v = w_y = Q_y = 0$  - условия на вертикальной границе конвективной ячейки. Некоторая искусственность такой постановки граничных условий обусловлена желанием обеспечить преемственность с описанной ниже двумерной постановкой.

При рассмотрении двумерных течений считается, что искомые функции не зависят от переменной  $y$ , и после введения функции тока  $u = \psi_z, w = -\psi_x$ , вихря  $\omega = w_x - u_z$  система (3) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\omega_t + \frac{1}{Pr} (\psi_z \omega_x - \psi_x \omega_z) &= \Delta \omega + Ra Q_x, \\
\Delta \psi &= -\omega, \\
Q_t + \frac{1}{Pr} (\psi_z Q_x - \psi_x Q_z) &= \frac{1}{Pr} \Delta Q - \frac{1}{Pr} \psi_x.
\end{aligned} \tag{5}$$

Система (5) используется для проведения расчетов двумерной конвекции.

Двумерная конвекция рассматривается в двух постановках, которые различаются по граничным условиям на горизонтальных границах  $z = 0, 1$ :

1. На горизонтальных границах обращаются в нуль вертикальная компонента скорости, касательное напряжение и температура, что равносильно:  $\psi = \omega = Q = 0$ . Такие граничные условия ниже будут называться свободными (2d,free).

2. На горизонтальных границах равны нулю вертикальная и горизонтальная компоненты скорости (условие прилипания) и температура, что равносильно:  $\psi = \psi_z = Q = 0$ . Такие граничные условия ниже называются жесткими (2d,rigid).

Искомые величины  $\omega$ ,  $\psi$  и  $Q$  разыскиваются в виде:

$$\begin{aligned}\omega(t, x, z) &= \sum_{k=0}^K \sum_{m=1}^{M-1} \omega_{km}(t) \rho_k \cos(\alpha kx) \sin(\pi mz), \\ \psi(t, x, z) &= \sum_{k=0}^K \sum_{m=1}^{M-1} \frac{\omega_{km}(t)}{\alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2} \rho_k \cos(\alpha kx) \sin(\pi mz), \\ Q(t, x, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=1}^{M-1} Q_{km}(t) \sin(\alpha kx) \sin(\pi mz)\end{aligned}\quad (6)$$

для задачи со свободными и

$$\begin{aligned}\omega(t, x, z) &= \sum_{k=0}^K \omega_k(t, z) \rho_k \cos(\alpha kx), \\ \psi(t, x, z) &= \sum_{k=0}^K \psi_k(t, z) \rho_k \cos(\alpha kx), \\ Q(t, x, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} Q(t, z) \sin(\alpha kx)\end{aligned}\quad (7)$$

жесткими граничными условиями, здесь  $\rho_k = 0.5$  при  $k = 0, K$  и  $1 - 1 \leq k \leq K - 1$ .

Система (5) решается в области

$$G_2 = \{0 \leq x \leq \pi/\alpha, 0 \leq z \leq 1\},$$

граничные условия на боковых границах первого и второго рода в 2d,free и 2d,rigid расчетах не отличаются и следуют из вида решения:

$$\psi_x = \omega_x = Q = 0 \text{ при } x = 0, \pi/\alpha.$$

При проведении тестовых расчетов, для корректного сравнения с результатами двумерных расчетов других авторов использовалось также



другое, ‘симметричное’ представление 2d,free и 2d,rigid решений, которое получается, если в представлениях (6) и (7) по переменной  $x$  синусы заменить на косинусы и наоборот.

Искомые величины  $\omega$ ,  $\psi$  и  $Q$  при таком представлении решений разыскиваются в виде:

$$\begin{aligned}\omega(t, x, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=1}^{M-1} \omega_{km}(t) \rho_k \sin(\alpha kx) \sin(\pi mz), \\ \psi(t, x, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=1}^{M-1} \frac{\omega_{km}(t)}{\alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2} \rho_k \sin(\alpha kx) \sin(\pi mz), \\ Q(t, x, z) &= \sum_{k=0}^K \sum_{m=1}^{M-1} Q_{km}(t) \cos(\alpha kx) \sin(\pi mz)\end{aligned}\quad (8)$$

для задачи со свободными и

$$\begin{aligned}\omega(t, x, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \omega_k(t, z) \rho_k \sin(\alpha kx), \\ \psi(t, x, z) &= \sum_{k=1}^{K-1} \psi_k(t, z) \rho_k \sin(\alpha kx), \\ Q(t, x, z) &= \sum_{k=0}^K Q(t, z) \cos(\alpha kx)\end{aligned}\quad (9)$$

жесткими граничными условиями.

Решения (8) и (9) также разыскиваются в области  $G_2$ , но с другими граничными условиями на боковых границах:

$$\psi = \omega = Q_x = 0 \text{ при } x = 0, \pi/\alpha.$$

Частные периодические решения вида (8) и (9) рассматриваются в подавляющем большинстве работ, в которых двумерная конвекция рассчитывается псевдоспектральным методом.

Но, постановка задачи о двумерной конвекции со всеми свободными границами, соответствующая представлению (8), безусловно правильная с математической точки зрения, представляется не вполне удачной с физической. В самом деле, представление решения в виде (8) подразумевает равенство нулю завихренности на всех четырех границах, что обуславливает проблему выхода на стохастический (вихревой) режим конвекции. Последнее обстоятельство

привело к многолетней дискуссии о существовании стохастических режимов двумерной конвекции со свободными границами [27,28]. Кроме того, навязанная представлением (8) и (9) периодичность решения в горизонтальном направлении с заданной априори его длиной вступает в противоречие с наблюдаемым в экспериментах ростом предпочтительного волнового числа при росте надкритичности [59].

В то же время, постановка задачи о 2d,free конвекции с представлением решения в виде (6) и (7) свободна от этих недостатков, так как здесь не предполагается равенство нулю завихренности на вертикальных границах и периодичность в горизонтальном направлении.

Пусть  $\gamma = Ra/Ra_{cr}$  - надкритичность, где критическое значение числа Рэлея  $Ra_{cr}$  равно 657.511 для 2d,free (3d,free) и 1707.76 - для 2d,rigid.

## **1.2. Метод численного расчета двумерной конвекции**

### **1.2.1. Свободные горизонтальные границы**

Приведем описание спектрально-разностного численного метода, используемого для расчета двумерной конвекции со свободными граничными условиями [68,69]. Этим методом была рассчитана двумерная конвекция при высокой надкритичности [63,65], конвекция химически равновесного реагирующего газа [90,91], исследованы спектры скорости и температуры [58].

Проводя расщепление на линейные и нелинейные процессы, переход от слоя  $n$  к слою  $n+1$  по времени производится в два этапа. На первом этапе расщепления устанавливается соответствие в линейном приближении спектральных характеристик численного метода и дифференциальной задачи, а на втором учитываются нелинейные процессы.

На первом этапе расщепления учитываем линейное развитие возмущений, без учета взаимодействия гармоник.

Этап 1.

$$\begin{aligned}\omega_t &= \frac{1}{2} \Delta \omega + Ra Q_x, \\ \Delta \psi &= -\omega, \\ Q_t &= \frac{1}{2 Pr} \Delta Q - \frac{1}{Pr} \psi_x.\end{aligned}\tag{10}$$

Для эффективного решения уравнений нелинейного конвективного переноса для завихренности  $\omega$  и температуры  $Q$ , половина вязких членов учтена на втором этапе расчета.

После подстановки решения (6) в систему (10), вместо (10) получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для двух неизвестных амплитуд  $\omega_{km}$  и  $Q_{km}$  при  $k = 0, 1, \dots, K$  и  $m = 1, 2, \dots, M - 1$ :

$$\dot{\omega}_{km} = -\frac{S}{2} \omega_{km} + Ra \alpha k Q_{km}, \quad \dot{Q}_{km} = -\frac{1}{2 Pr} Q_{km} + \frac{\omega_{km} \alpha k}{Pr S}.$$

Здесь  $S = \alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2$ , причем  $S \geq \pi^2$  и приведенная система не вырождается.

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается аналитически, без применения каких-либо аппроксимаций по времени по формулам, выведенным программой аналитических вычислений Maple V Release 4 [68,69]. Используя известные на слое  $n$  по времени значения температуры и завихренности, находим предварительные значения амплитуд завихренности и температуры, рассчитанные без учета взаимодействия гармоник:

$$\omega_{km}^{n+1/2} = \frac{-F_3 Ra Pr S Q_{km} + (F_1 + F_2) \omega_{km}}{2 S_1}, \quad Q_{km}^{n+1/2} = \frac{-F_3 \omega_{km} + (F_1 - F_2) Q_{km}}{2 S_1},$$

$$\text{где } S_1 = \sqrt{S^4 (1 - Pr)^2 + 16 S Pr Ra \alpha^2 k^2},$$

$$S_2 = \exp\left(\frac{-\tau(S^2(1 + Pr) + S_1)}{4 Pr S}\right), \quad S_3 = \exp\left(\frac{-\tau(S^2(1 + Pr) - S_1)}{4 Pr S}\right),$$

$$F_1 = (S_2 + S_3) S_1, \quad F_2 = S^2 (Pr - 1) (S_2 - S_3), \quad F_3 = 4 \alpha k (S_2 - S_3),$$

здесь и далее  $\tau$  - шаг по времени.

На втором этапе учитывается нелинейный конвективный перенос, т.е. учитывается взаимодействие гармоник. Здесь применена конечно-разностная схема переменных направлений (продольно-поперечной прогонки), ранее успешно использованная для расчета турбулентных конвективных течений в прямоугольной области при подогреве сбоку [73].

Этап 2.

$$\omega_t + \frac{1}{\text{Pr}}(\psi_z \omega_x - \psi_x \omega_z) = \frac{1}{2} \Delta \omega,$$

$$Q_t + \frac{1}{\text{Pr}}(\psi_z Q_x - \psi_x Q_z) = \frac{1}{2 \text{Pr}} \Delta Q.$$

Каждое из уравнений выписанной системы для  $\omega$  и  $Q$  решаются в два дробных шага, на каждом дробном шаге применяется схема А.А. Самарского для аппроксимации одномерных операторов на верхнем слое по времени и аппроксимации центральными разностями на нижнем.

Приведем формулы для расчета  $\omega$ .

На первом дробном шаге находим предварительное поле  $\omega_{ij}$ :

$$\frac{\omega_{ij} - \omega_{ij}^{n+1/2}}{\tau/2} + A = \frac{1}{2(1 + \frac{|\psi_z| H_1}{\text{Pr}})} \omega_{ijx\bar{x}} + \frac{1}{2} \omega_{ijz\bar{z}}^{n+1/2},$$

$$A = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\psi_z + |\psi_z|}{2} \omega_{ij\bar{x}} + \frac{\psi_z - |\psi_z|}{2} \omega_{ijx} \right) - \frac{1}{\text{Pr}} \psi_x \omega_{ijz}^{n+1/2},$$

$$f_{ij\bar{x}} = \frac{f_{ij} - f_{i-1,j}}{H_1}, \quad f_{ijx} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{H_1},$$

$$f_{ij\hat{x}} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2H_1}, \quad f_{ijx\bar{x}} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{H_1^2}$$

и на втором:

$$\frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}}{\tau/2} + A = \frac{1}{2} \omega_{ijx\bar{x}} + \frac{1}{2(1 + \frac{|\psi_x| H_2}{\text{Pr}})} \omega_{ijz\bar{z}}^{n+1},$$

$$A = \frac{1}{\text{Pr}} \psi_z \omega_{ij\hat{x}} - \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\psi_x + |\psi_x|}{2} \omega_{ijz}^{n+1} + \frac{\psi_x - |\psi_x|}{2} \omega_{ijz}^{n+1} \right).$$

Коэффициенты  $\psi_x$  и  $\psi_z$  в вышеприведенных выражениях могут определяться разными способами:

- по функции тока, взятой со слоя  $n$  по времени (Схема 1)

$$\psi_x = \psi_x^n, \psi_z = \psi_z^n,$$

- по функции тока, вычисленной на первом этапе расщепления (Схема 2)

$$\psi_x = \psi_x^{n+1/2}, \psi_z = \psi_z^{n+1/2},$$

- как среднее арифметическое значений функции тока на слоях  $n$  и  $n+1$  по времени (Схема 3)

$$\psi_x = \frac{\psi_x^{n+1} + \psi_x^n}{2}, \psi_z = \frac{\psi_z^{n+1} + \psi_z^n}{2}.$$

Реализация последнего способа требует введения итерационного процесса. Если в этом итерационном процессе ограничиться одной итерацией, то получится известная схема предиктор-корректор (Схема 4).

В большинстве расчетов, коэффициенты  $\psi_x$  и  $\psi_z$  в членах нелинейного переноса вычислялись по полю, полученному на первом этапе расщепления (Схема 2).

Сравнительный анализ Схем 1-4 возможен только средствами нелинейной теории, его результаты приведены в разделе 2.2 главы 2.

Пересчет искомых полей из спектрального пространства (Этап 1) в физическое (Этап 2) и обратно производится по стандартным программам быстрого преобразования Фурье по косинусам и синусам.

Итак, предлагаемый спектрально-разностный метод расчета 2d,free конвекции имеет первый порядок по времени и второй - по пространству.

Для расчета двумерной конвекции со свободными границами использовался также вариант псевдоспектрального метода (модифицированный метод Галеркина), основанный на вычислении нелинейных членов в физическом пространстве на разностной сетке, число узлов которой в каждом направлении в два раза превышает число гармоник в том же направлении и схеме Рунге-Кутты четвертого порядка точности для интегрирования по

времени. Подобный численный метод применялся для расчета стохастической двухдиффузионной конвекции [30,31].

При расчете конвективных течений данным методом с  $Pr = 10$  и при высокой надкритичности, диссипативные члены в уравнении для температуры не обеспечивают достаточно быстрого затухания амплитуд гармоник при увеличении волнового числа, что приводит к высокочастотным осцилляциям поля температуры в горизонтальном направлении и может значительно исказить профили среднеквадратичных пульсаций температуры и скорости. Чтобы ослабить эти нежелательные и нефизичные высокочастотные осцилляции, в уравнение для температуры был введен дополнительный член – гипервязкость

$$-\frac{C}{Pr} \frac{\partial^8 Q}{\partial x^8}, \quad C = A / (\alpha K)^6.$$

Приведенное выражение содержит производную восьмого порядка от температуры по горизонтальной координате, а параметр  $A \approx 15$  подбирается эмпирически.

Относительный вклад вязкости и гипервязкости можно оценить, сравнивая между собой две функции волнового числа  $\alpha k$ :

$$Dis = \frac{1}{Pr} (\alpha^2 k^2 + \pi^2) \quad \text{и} \quad Hdis = \frac{A}{(\alpha K)^6 Pr} \alpha^8 k^8.$$

На рис. 1 приведены функции  $Dis$  (кривая 1) и  $Hdis$  при  $A = 15$  (2) и  $A = 30$  (3), все как функции волнового числа  $\alpha k$  при  $\alpha = 1$ ,  $K = 129$  и  $Pr = 10$ . Вертикальной линией (4) показана граница интервала аппроксимации [67].

Из рис. 1 видно, что при  $A = 15$  вклад гипервязкости примерно на 12 порядков меньше вклада физической вязкости в области малых волновых чисел и более чем в 50 раз во всем интервале аппроксимации, примерное равенство наблюдается при значении волнового числа  $\alpha k = 80$ , а при  $\alpha k = 129$  вклад гипервязкости примерно в  $A$  раз больше.

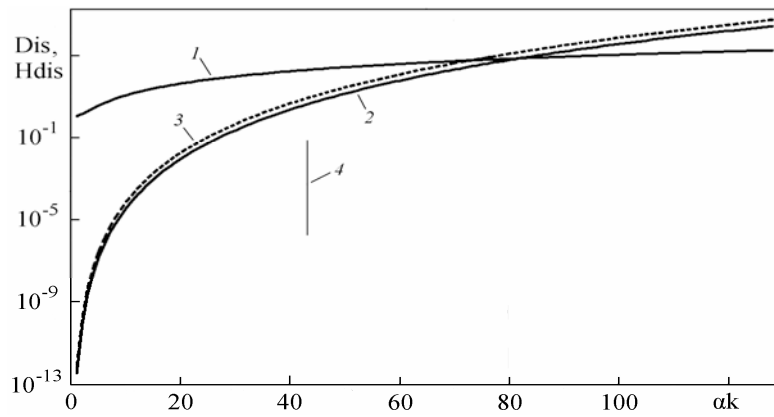


Рис. 1. Вязкость и гипервязкость как функции волнового числа.

На рис. 2 приведен одномерный энергетический спектр среднеквадратичных пульсаций температуры в горизонтальном  $x$ -направлении при надкритичности  $r \approx 2 \cdot 10^3$ , где кривая 1 соответствует  $A = 0$ , 2 -  $A = 15$  и 3 -  $A = 30$ , значения всех параметров как на рис. 1.

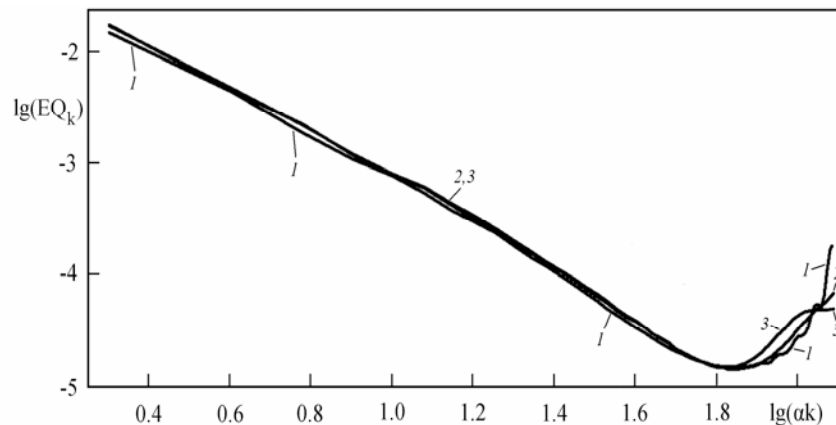


Рис. 2. Спектр пульсаций температуры.

Из рис. 2 видно, что спектры 1-3 практически совпадают при  $\alpha k \leq 70$ , при этом действие гипервязкости локализуется в высокочастотной части спектра, уменьшая нефизичные высокочастотные осцилляции поля температуры.

Зависимость спектра температуры в вертикальном и спектров скорости в горизонтальном и вертикальном направлениях от величины гипервязкости практически отсутствует.

На рис. 3 приведен профиль среднеквадратичных пульсаций температуры, вычисленный псевдоспектральным методом, значения гипервязкости соответствуют  $A = 0$  (кривая 1),  $A = 15$  (2) и  $A = 30$  (3). Видно, что отсутствие гипервязкости приводит к сглаживанию профиля температурных пульсаций вблизи горизонтальных границ и к искажению его в центральной части. А в то же время, данные расчетов при  $A = 15$  (кривая 2) и  $A = 30$  (3), практически совпадают.

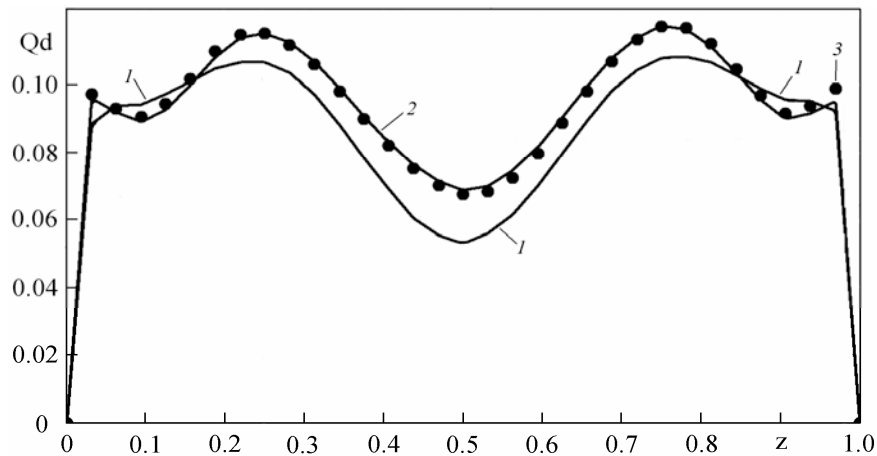


Рис. 3. Профиль среднеквадратичных пульсаций температуры.

Аналогичная ситуация наблюдается и для профилей среднеквадратичных пульсаций вертикальной и горизонтальной скорости, при этом зависимость профиля средней температуры от величины гипервязкости выражена значительно слабее.

Во всех расчетах псевдоспектральным методом полагалось

$$A = 15 \text{ и при } \alpha = 1, K = 129 \text{ и } Pr = 10 \quad \frac{C}{Pr} = \frac{A}{(\alpha^6 K^6) Pr} = 3.26 \cdot 10^{-13}.$$

Такой псевдоспектральный метод обеспечивает высокую точность вычислений, но, к сожалению, его низкая эффективность, обусловленная избыточно точным вычислением нелинейных членов (в данной реализации еще и четырехкратным!) и использованием явной схемы для интегрирования по времени, сделала возможным проведение только нескольких тестовых расчетов стохастических течений двухдиффузионной конвекции и конвекции при



высокой надкритичности (до  $g = 2 \cdot 10^3$ ), где результаты расчетов псевдоспектральным и предлагаемым спектрально-разностным методом хорошо согласуются.

### 1.2.2. Жесткие горизонтальные границы

Метод численного расчета двумерной конвекции с жесткими горизонтальными границами строится, в принципе, аналогично. По этой методике была рассчитана двумерная конвекция при высокой надкритичности [63] и исследованы степенные законы изменения средних величин [92].

На первом этапе расщепления решается система, аналогичная системе (10), но записанная в переменных  $(\psi, Q)$  с граничными условиями  $\psi = \psi_z = Q = 0$  при  $z = 0, 1$ :

Этап 1.

$$\Delta \psi_t = \frac{1}{2} \Delta^2 \psi - Ra Q_x, \quad Q_t = \frac{1}{2 Pr} \Delta Q - \frac{1}{Pr} \psi_x. \quad (11)$$

Подставляя в систему (11) решение в виде (7) и применяя для интегрирования по времени неявную схему Кранка-Николсона, имеем:

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{\psi_k^{n+1/2} - \psi_k^n}{\tau} \right) &= \frac{1}{4} \Delta^2 (\psi_k^{n+1/2} + \psi_k^n) - \frac{Ra \alpha k}{2} (Q_k^{n+1/2} + Q_k^n), \\ \frac{Q_k^{n+1/2} - Q_k^n}{\tau} &= \frac{1}{4 Pr} \Delta (Q_k^{n+1/2} + Q_k^n) + \frac{\alpha k}{2 Pr} (\psi_k^{n+1/2} + \psi_k^n), \\ \text{где } \Delta f &= f_{zz} - \alpha^2 k^2 f, \quad \Delta^2 f = f_{zzzz} - 2\alpha^2 k^2 f_{zz} + \alpha^4 k^4 f \text{ и } 0 \leq k \leq K. \end{aligned}$$

Аппроксимируя в выписанной системе производные второго и четвертого порядка конечно-разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} f_{zz} &\approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{H_2^2} + O(H_2^2) \text{ и} \\ f_{zzzz} &\approx \frac{f_{i,j+2} - 4f_{i,j+1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j-1} + f_{i,j-2}}{H_2^4} + O(H_2^2), \end{aligned}$$

при каждом  $k$ ,  $0 \leq k \leq K$ , получаем линейную систему из  $2 \cdot M + 2$  линейных уравнений относительно  $2 \cdot M + 2$  неизвестных (граничные условия для  $\psi$  и  $Q$

для простоты включены в систему) вида:  $A\vec{x} = \vec{f}$ . Для этой системы при каждом  $k$ ,  $0 \leq k \leq K$  вычисляется обратная матрица  $A^{-1}$ , которая находится только один раз в начале расчета и запоминается. Использование обратной матрицы позволяет проводить расчет по неявной схеме Кранка - Николсона используя явный алгоритм  $\vec{x} = A^{-1}\vec{f}$ .

Обратная матрица вычислялась методом Гаусса без выбора главного элемента, полученное значение затем уточнялось с помощью итерационного процесса:

$$A_m^{-1} = A_{m-1}^{-1} (2E - A A_{m-1}^{-1}), m \geq 1.$$

Здесь  $E$  - единичная матрица. Такой итерационный процесс быстро сходится при достаточно хорошем начальном приближении [93]. В процессе вычислений, как правило, делалось три итерации.

На втором, вспомогательном этапе рассчитываются значения завихренности на горизонтальных границах. Сначала, для учета недостающей половинки вязких членов, пятиточечной прогонкой в вертикальном направлении при каждом  $k$ ,  $0 \leq k \leq K$  определяется вспомогательное поле  $\psi$ :

Этап 2.

$$\Delta \psi_{kt} = \frac{1}{2} \Delta^2 \psi_k, \psi_k = \psi_{kz} = 0 \text{ при } z = 0, 1.$$

Затем находим значения завихренности из соотношения  $\omega = -\psi_{zz}$  ( $\psi = \psi_{xx} = 0$  на жестких горизонтальных границах).

Для численного дифференцирования функции тока  $\psi$ , используя алгоритм быстрого преобразования Фурье в направлении  $z$  по синусам при каждом  $x$  строится аналитическая функция, принимающая в узлах разностной сетки те же значения, что и функция тока, затем построенная функция двукратно дифференцируется по  $z$  и по первым  $N_f$  ( $1 \leq N_f \leq M - 1$ ) гармоникам вычисляются значения вихря при  $z = 0, 1$ :

$$\begin{aligned}\psi(x, z) &= z(1-z) \sum_{m=1}^{M-1} \psi_m(x) \sin(m\pi z), \\ \omega_0(x) &= -2\pi \sum_{m=1}^{Nf} \psi_m(x) m \quad \text{при } z=0 \quad \text{и} \\ \omega_1(x) &= -2\pi \sum_{m=1}^{Nf} \psi_m(x) m (-1)^{m-1} \quad \text{при } z=1.\end{aligned}\tag{12}$$

При выборе представления (12) для функции тока  $\psi$  учтено, что для достаточно гладких решений  $\psi = c_1 z^2$  и  $\psi = c_2(1-z)^2$  вблизи нижней и верхней горизонтальных границ, где  $c_1$  и  $c_2$  - константы.

Вопрос о выборе числа учитываемых гармоник  $Nf$  в (12) обсуждается в следующем разделе.

На третьем этапе расщепления учитываются нелинейные процессы, расчетная схема здесь не отличается от использованной в методе расчета 2d,free конвекции. В остальном, численные методы расчета 2d,free и 2d,rigid конвекции не отличаются.

Итак, как и в случае свободных границ, предлагаемый метод расчета 2d,rigid конвекции имеет первый порядок по времени и второй - по пространству.

### 1.2.2.1. О вычислении завихренности на границе

Отдельно остановимся на применимости формул (12) для вычисления завихренности на горизонтальных границах.

Вычисление завихренности на горизонтальных границах по формулам Тома:

$$\omega_0 = \frac{2\psi_1}{H_2^2} + O(H_2),$$

Пирсона:

$$\omega_0 = \frac{8\psi_1 - \psi_2}{2H_2^2} + O(H_2^2),$$

приводят к значительному понижению устойчивости вычислений, существенно ограничивая шаг по времени [73] и делая практически невозможным проведение вычислений при надкритичности  $r \geq 2 \cdot 10^3$  [65].

В работе [23] использована формула Брили третьего порядка аппроксимации:

$$\omega_0 = \frac{108\psi_1 - 27\psi_2 + 4\psi_3}{18H_2^2} + O(H_2^3).$$

Применимость этих и других конечно-разностных соотношений для вычисления завихренности обсуждается в монографии [94].

При использовании не слишком большого числа гармоник  $Nf$  в формулах (12), ограничения на устойчивость значительно ослабляются и реализуется разумный компромисс между требованиями устойчивости и точности.

На простом тестовом примере покажем работоспособность формул (12), проведя сравнение с результатами, полученными по формулам Тома, Пирсона и Брили.

По формулам Тома, Пирсона, Брили и (12) двукратно численно продифференцируем функцию  $\psi(z)$  в точке  $z = 0$ :

$$\psi(z) = \frac{\sin^2(3\pi z)(1 - 2z)}{18\pi^2}$$

и сравним полученные результаты с точным значением  $\psi_{zz}(0) = 1$ .

Сравнение проводилось:

1. При варьировании  $Nf = M$  (число учитываемых в (12) гармоник совпадает с числом интервалов разностной сетки в вертикальном направлении).
2. При постоянном  $M = 8192$  и различном  $Nf$ .

Вычисленные в процентах относительные отклонения вычисленных значений от точного при  $Nf = M$  представлены в табл. 1 и, дополнительно, в последнем столбце - результаты вычислений по формуле (12) при фиксированном  $M = 8192$  и различном  $Nf$ .

Таблица 1. Численное дифференцирование.

Nf	Том	Пирсон	Брили	(12)	(12), M = 8192
4	$9.55 \cdot 10^1$	$9.10 \cdot 10^1$	$8.70 \cdot 10^1$	$9.06 \cdot 10^1$	$3.97 \cdot 10^1$
8	$5.39 \cdot 10^1$	$1.23 \cdot 10^1$	$2.52 \cdot 10^1$	$9.00 \cdot 10^0$	$5.33 \cdot 10^0$
16	$2.22 \cdot 10^1$	$9.55 \cdot 10^0$	$1.44 \cdot 10^1$	$3.34 \cdot 10^0$	$2.48 \cdot 10^0$
32	$8.93 \cdot 10^0$	$4.30 \cdot 10^0$	$1.89 \cdot 10^0$	$1.59 \cdot 10^0$	$1.24 \cdot 10^0$
64	$3.82 \cdot 10^0$	$1.28 \cdot 10^0$	$1.99 \cdot 10^{-1}$	$7.84 \cdot 10^{-1}$	$6.25 \cdot 10^{-1}$
128	$1.74 \cdot 10^0$	$3.43 \cdot 10^{-1}$	$2.13 \cdot 10^{-2}$	$3.91 \cdot 10^{-1}$	$3.14 \cdot 10^{-1}$
256	$8.26 \cdot 10^{-1}$	$8.81 \cdot 10^{-2}$	$2.40 \cdot 10^{-3}$	$1.95 \cdot 10^{-1}$	$1.58 \cdot 10^{-1}$
512	$4.02 \cdot 10^{-1}$	$2.23 \cdot 10^{-2}$	$2.83 \cdot 10^{-4}$	$9.76 \cdot 10^{-2}$	$7.89 \cdot 10^{-2}$
1024	$1.98 \cdot 10^{-1}$	$5.60 \cdot 10^{-3}$	$3.42 \cdot 10^{-5}$	$4.87 \cdot 10^{-2}$	$3.94 \cdot 10^{-2}$
2048	$9.84 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$	$4.21 \cdot 10^{-6}$	$2.45 \cdot 10^{-2}$	$1.96 \cdot 10^{-2}$
4096	$4.90 \cdot 10^{-2}$	$3.52 \cdot 10^{-4}$	$5.20 \cdot 10^{-7}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$9.90 \cdot 10^{-3}$
8192	$2.44 \cdot 10^{-2}$	$8.82 \cdot 10^{-5}$	$6.00 \cdot 10^{-8}$	$5.80 \cdot 10^{-3}$	$5.80 \cdot 10^{-3}$

Анализ данных таблицы 1 показывает, что полученные отклонения следуют асимптотическим законам:

для формулы Брили -  $36750 \cdot N^3$  при  $M \geq 64$ ,

формулы Пирсона -  $5870 \cdot N^2$  при  $M \geq 64$ ,

Тома -  $203 \cdot N$  ( $M \geq 64$ ) и (12) -  $49.9 \cdot N$  ( $M \geq 16$ ), здесь  $N = M^{-1}$ .

Изучение приведенных формул и данных таблицы 1 приводит к следующим выводам:

1. В тестовом примере формула (12), как и формула Тома дает приближенные значения, сходящиеся к точному как  $O(N)$ , но формула (12) асимптотически имеет четырехкратный выигрыш в точности по сравнению с формулой Тома. И, кроме того, формула (12) заметно превосходит по точности все рассмотренные формулы при небольшом Nf, равном 8 и 16.
2. Формула Пирсона, имеющая второй порядок по N, точнее формулы (12) при  $M \geq 128$ .
3. Формула Брили третьего порядка аппроксимации точнее формулы (12) при  $M \geq 64$ .

Чтобы исследовать вопрос о зависимости средних характеристик конвективного течения от количества учитываемых в (12) гармоник, в качестве

теста при  $r = 10$ ,  $Pr = 10$ ,  $\alpha = 1$  и шаге по времени  $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$  с учетом [33x17] гармоник была рассчитана стационарная 2d,rigid конвекция при  $Nf = 1,2,\dots,13$ .

При различном числе  $Nf$  учитываемых в формуле (12) гармоник вычислялось число Нуссельта:

$$Nu(t) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\pi/\alpha} (Q_z(t, x, 0) + Q_z(t, x, 1)) dx - 1,$$

кинетическая энергия

$$Ek = \frac{1}{2} \int_{G_2} |\nabla \psi|^2 dv$$

и энтрофия

$$Ek = \frac{1}{2} \int_{G_2} |\omega|^2 dv, \quad dv = dx dz.$$

Для вычисления числа Нуссельта, поле температуры  $Q$  представлялось в виде:

$$Q(t, x, z) = \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{m=1}^{M-1} Q_{km}(t) \sin(\alpha kx) \sin(\pi m z)$$

и вычислялось:

$$Nu^n = 2 \sum_k \sum_m Q_{km}^n \frac{m}{k} - 1, \quad k = 1, 3, \dots, K-1, \quad m = 2, 4, \dots, M-2.$$

Кинетическая энергия и энтрофия вычислялись в физическом пространстве по квадратурной формуле прямоугольников.

Результаты вычислений приведены в таблице 2, в столбцах  $Dn$ ,  $Dk$  и  $De$  приведены относительные отклонения в процентах значений  $Nu$ ,  $Ek$  и  $En$  от их предельных при  $Nf = 13$ .

Таблица 2. Варьирование  $N_f$ .

$N_f$	$Nu$	$Dn$	$Ek$	$Dk$	$En$	$De$
1	3.0580	0.01	563.54	0.10	28182	0.04
2	3.0577	0.02	563.81	0.05	28207	0.05
3	3.0560	0.08	563.10	0.17	28236	0.15
4	3.0560	0.08	563.16	0.16	28239	0.16
5	3.0561	0.08	563.21	0.16	28237	0.15
6	3.0561	0.08	563.20	0.16	28236	0.15
7	3.0567	0.06	563.47	0.11	28226	0.12
8	3.0567	0.06	563.42	0.12	28224	0.11
9	3.0574	0.03	563.71	0.07	28213	0.07
10	3.0574	0.03	563.68	0.07	28211	0.06
11	3.0580	0.01	563.93	0.03	28202	0.03
12	3.0580	0.01	563.90	0.03	28200	0.02
13	3.0584	0.00	564.09	0.00	28194	0.00

В расчете с использованием формулы Пирсона для  $Nu$ ,  $Ek$  и  $En$  получены значения: 3.0582, 563.98 и 28197.

Относительное отклонение вычисленных при различном  $N_f$  значений  $Nu$  от предельного при  $N_f = 13$  не превышает 0.08%, а предельное значение отличается от полученного по формулы Пирсона на 0.01%.

Для  $Ek$  и  $En$  эти отклонения составили 0.17, 0.02 и 0.16, 0.01%, соответственно. Отметим также, что практически монотонная сходимость наблюдается при  $N_f \geq 4$ .

Конечно, использование формулы (12) при небольшом  $N_f$  в каком-то смысле аналогично применению конечно-разностных формул Тома, Пирсона и Бриля с более крупным шагом близи границы, но здесь нужно обратить внимание на два обстоятельства:

- Во первых, формула (12) заметно точнее всех рассмотренных конечно-разностных формул при небольшом значении  $N_f$ ,
- и во вторых, анализ результатов тестовых расчетов показывает, что решение задачи о конвекции относительно слабо зависит от точности вычисления вихря на границе.

Учитывая все вышесказанное, большинство 2d,rigid расчетов проведено с  $N_f = 4$ .

### 1.3. Метод численного расчета трехмерной конвекции

Теперь опишем спектрально-разностный метод, используемый для решения системы (3). Предлагаемым методом в [60,95] исследовались спектры трехмерной турбулентной конвекции, степенные законы изменения средних величин [92] и вихревого масштаба [64]. Описание численного метода, результаты линейного анализа на модельной и полной системах уравнений приведены в [96,97].

Следуя общей идеологии метода расщепления на линейные и нелинейные процессы, переход от слоя  $n$  к слою  $n+1$  по времени производится в три этапа. На первом этапе расщепления устанавливается соответствие в линейном приближении спектральных характеристик численного метода и дифференциальной задачи, на втором учитываются нелинейные члены и на третьем - восстанавливается выполнение уравнения неразрывности, нарушенное на втором этапе расщепления.

На первом этапе расщепления учитываем линейное развитие возмущений, без учета взаимодействия гармоник

Этап 1.

$$\begin{aligned} u_x + v_y + w_z &= 0, & u_t + p_x &= \frac{1}{2} \Delta u, \\ v_t + p_y &= \frac{1}{2} \Delta v, & w_t + p_z &= \frac{1}{2} \Delta w + Ra Q, \\ Q_t &= \frac{1}{2Pr} \Delta Q + \frac{w}{Pr}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для эффективного решения уравнений нелинейного конвективного переноса для  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $Q$ , половина вязких членов, как и в двумерных алгоритмах, учтена на втором этапе расчета.



После подстановки решения (4) в систему (13), с помощью уравнения неразрывности получим для давления ( $k + n + m > 0$ ):

$$p_{knm} = -\frac{\pi m}{S} Ra Q_{knm}, \quad S = \alpha^2 k^2 + \beta^2 n^2 + \pi^2 m^2 > 0$$

и вместо (13) получим систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для четырех неизвестных амплитуд  $u_{knm} = U$ ,  $v_{knm} = V$ ,  $w_{knm} = W$  и  $Q_{knm} = Q$ :

$$\begin{aligned} U_t &= -\frac{S}{2}U + \frac{\alpha k \pi m}{S} Ra Q, & V_t &= -\frac{S}{2}V - \frac{\beta n \pi m}{S} Ra Q, \\ W_t &= -\frac{S}{2}W + \frac{\alpha^2 k^2 + \beta^2 n^2}{S} Ra Q, & Q_t &= -\frac{S}{2Pr}Q + \frac{W}{Pr}. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось,  $S > 0$  и неопределенности типа деления на нуль в приведенных соотношениях не возникает.

Как подсказывает структура выписанной системы, сначала отдельно решается система из двух последних уравнений для  $W$  и  $Q$ , а затем используя уже вычисленное поле температуры  $Q$  - первые два.

Аналитические формулы получены с помощью программы Maple V R5 при  $0 \leq k \leq K$ ,  $0 \leq n \leq N$  и  $0 \leq m \leq M$  (исключая  $k = n = m = 0$ ) [96,97].

Выведенные формулы аналогичны использованному в методе расчета 2d,free конвекции и не приводятся здесь ввиду их громоздкости. Амплитуды отсутствующих в представлении (4) гармоник считаются нулевыми.

На втором этапе учитывается нелинейный конвективный перенос, т.е. принимается во внимание взаимодействие гармоник.

Этап 2.

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{Pr}(u u_x + v u_y + w u_z) &= \frac{1}{2} \Delta u, & v_t + \frac{1}{Pr}(u v_x + v v_y + w v_z) &= \frac{1}{2} \Delta v, \\ w_t + \frac{1}{Pr}(u w_x + v w_y + w w_z) &= \frac{1}{2} \Delta w, & Q_t + \frac{1}{Pr}(u Q_x + v Q_y + w Q_z) &= \frac{1}{2Pr} \Delta Q. \end{aligned}$$

Каждое из четырех приведенных уравнений решается в физическом пространстве по явной схеме, с аппроксимацией производных в нелинейных членах направленными разностями первого порядка и поправкой

А. А. Самарского, повышающей порядок аппроксимации по пространству до второго [73].

Для одномерного уравнения

$$u_t + au_x = \nu u_{xx}, \quad a \geq 0$$

применяемая на втором этапе схема имеет вид:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{H_1} = \nu_1 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{H_1^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 + aH_1 / (2\nu)}.$$

Обобщение этой схемы на многомерный случай не вызывает затруднений.

На третьем этапе расщепления восстанавливается выполнение уравнения неразрывности, нарушенное на втором этапе.

Этап 3.

$$\frac{\vec{u}^{\rightarrow n+1} - \vec{u}^{\rightarrow n+2/3}}{\tau} = -\vec{\nabla} p, \quad \frac{\text{div}(\vec{u}^{\rightarrow n+2/3})}{\tau} = \Delta p. \quad (14)$$

Подстановка в (14) решений в форме (4) приводит (14) к легко разрешаемой системе алгебраических соотношений.

Пересчет искомых полей из спектрального пространства в физическое и обратно производится по стандартным программам быстрого преобразования Фурье по косинусам и синусам.

Итак, как и в случае двумерной конвекции, предлагаемый метод расчета трехмерной конвекции имеет первый порядок по времени и второй - по пространству.

В заключение данной главы отметим, что предлагаемые спектрально-разностные методы расчета имеют только первый порядок аппроксимации по времени и, кроме того, для расчета трехмерной конвекции на втором конечно-разностном этапе расчета использована явная схема интегрирования по времени. На первый взгляд, это должно существенно понижать эффективность предложенных численных методов.

Однако, тут нужно отметить два обстоятельства:

- Во первых, рассматриваемые задачи физически (в линейном приближении) неустойчивы и для поддержания должной точности вычислений шаг по времени должен быть достаточно малым. Результаты методических 2d,free и 3d,free расчетов показали, что для обеспечения достаточной точности расчета должно быть выполнено  $\tau \leq 0.02 \cdot |\lambda|^{-1}$ , где  $\lambda$  – инкремент наиболее быстрорастущего возмущения в линейном приближении. При этом, за исключением области малых значений надкритичности  $r \sim 10$ , требование устойчивости явной схемы интегрирования оказывается заведомо выполненным.
- И во вторых, проведенный во второй главе на модельной нелинейной системе уравнений нелинейный анализ численного 2d,free алгоритма показал, что повышение порядка аппроксимации численного метода до второго приводит лишь к незначительному увеличению точности вычислений, а именно, более точно вычисляется фаза гармонических решений, при неизменной точности вычисления его амплитуды.

## Глава 2

### Анализ и тестирование численных алгоритмов

#### 2.1. Линейный анализ двумерных алгоритмов

##### 2.1.1. Свободные границы

Линейный анализ основан на рассмотрении линейных аналогов исходной системы дифференциальных уравнений (1.5) и численного метода. Рассчитываются инкременты нарастания возмущений в дифференциальной задаче и численном методе. По близости спектральных характеристик можно судить о точности численного метода. Подобной методикой тестировались численные методы, использованные для расчета турбулентного течения в плоском канале [72] и трубе кольцевого сечения [71].

Заметим также, что линейный аналог системы (1.5) описывает развитие бесконечно малых двумерных возмущений равновесного решения, поэтому близость спектральных характеристик дифференциальной задачи и численного метода гарантирует правильное развитие возмущений равновесного решения малой амплитуды.

Приведенные рассуждения имеют общий характер, но простые соображения показывают более глубокую роль линейных процессов в конвекции.

Дело в том, что в конвекции за генерацию и диссипацию энергии отвечают линейные члены (другими словами, нарастание и затухание гармоник определяется в линейной теории), а нелинейные члены обуславливают лишь ее перераспределение по волновым числам без изменения общего количества. Таким образом, крайне важно соответствие спектральных характеристик численного метода и дифференциальной задачи в линейном приближении, а именно, нарастающая в дифференциальной задаче гармоника должна иметь адекватный рост и в численном решении, аналогичный вывод справедлив и для затухающих гармоник. Соответствие спектральных характеристик

подразумевает также и соответствие границы области неустойчивости в волновой плоскости, иначе, как уже отмечалось, неустойчивая гармоника в дифференциальной задаче может стать устойчивой в численном методе и наоборот.

Кроме того, естественно требовать, чтобы численный метод правильно отражал динамику относительно простых решений в виде монохроматической волны.

Дело в том, что исходная нелинейная система уравнений двумерной конвекции, записанная в переменных функция тока  $\psi$ , вихрь  $\omega$  и температура  $Q$  допускает решение вида:

$$\psi = \psi(t)e^{i(\alpha x + \beta z)}, \quad \omega = \omega(t)e^{i(\alpha x + \beta z)}, \quad Q = iQ(t)e^{i(\alpha x + \beta z)},$$

с вещественными амплитудами  $\psi(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $Q(t)$  и положительными волновыми числами  $\alpha$  и  $\beta$ . Можно видеть, что при таком представлении решения все нелинейные члены в уравнениях для скорости и температуры обращаются в нуль и амплитуды  $\psi(t)$ ,  $\omega(t)$  и  $Q(t)$  определяются только линейными членами.

Итак, рассматривается линейный аналог системы (1.5), в котором нелинейные члены отбрасываются и решение ищется в виде:

$$\begin{aligned} \omega(t, x, z) &= A e^{-\lambda t + i\alpha k x} \sin(\pi m z), \\ \psi(t, x, z) &= \frac{A}{S} e^{-\lambda t + i\alpha k x} \sin(\pi m z), \\ Q(t, x, z) &= B e^{-\lambda t + i\alpha k x} \sin(\pi m z). \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $S = \alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2$ , инкремент  $\lambda$  находится из задачи на собственные значения, а  $A$  и  $B$  - постоянные амплитуды.

Аналогичные рассуждения проводятся и для численных алгоритмов.

Итак, проведем линейный анализ предлагаемого спектрально-разностного метода расчета 2d,free и 2d,rigid (со свободными граничными условиями, чтобы подчеркнуть использование смешанного спектрально-физического представления искомых функций, называем его здесь гибридным) конвекции и конечно-разностного метода второго порядка аппроксимации [73].

Для простоты анализа ограничимся случаем  $Pr = 1$ .

При рассмотрении спектральных характеристик конечно-разностного численного метода, для простоты анализа произведем дискретизацию только по пространственным переменным, оставляя производные по времени дифференциальными.

Полученная таким образом система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\omega_t = \Delta_h \omega + Ra Q_x, \quad \Delta_h \psi = -\omega, \quad Q_t = \frac{1}{Pr} \Delta_h Q - \frac{1}{Pr} \psi_x.$$

где  $\Delta_h f = f_{xx} + f_{zz}$  - разностный оператор Лапласа, действующий на функцию  $f$ ,

$$f_x = (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) / (2H_1), \quad f_{xx} = (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) / H_1^2.$$

Можно получить аналитические выражения для спектральных характеристик дифференциальной задачи

$$\lambda_d = S - \alpha k \sqrt{Ra / S},$$

спектрально-разностного численного метода

$$\lambda_s = \frac{S}{2} - \alpha k \sqrt{\frac{Ra}{S}} - \frac{1}{\tau} \ln \left( \frac{1 - \tau a / 4 + \tau^2 a_1 a_3 / 16}{1 + \tau a / 4 + \tau^2 a_1 a_3 / 16} \right),$$

гибридного

$$\lambda_h = \frac{S_1}{2} - \alpha k \sqrt{\frac{Ra}{S_1}} - \frac{1}{\tau} \ln \left( \frac{1 - \tau a / 4 + \tau^2 a_1 a_3 / 16}{1 + \tau a / 4 + \tau^2 a_1 a_3 / 16} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{S_1}{2} - \alpha k \sqrt{\frac{Ra}{S_1}} \right)^3 \tau^2, \quad S_1 = \alpha^2 k^2 + a_3^2$$

и конечно-разностного численного метода

$$\lambda_r = a - b \sqrt{Ra / a},$$

$$\text{где } a_1 = \frac{4}{H_1^2} \sin^2 \left( \frac{\alpha k H_1}{2} \right), \quad a_3 = \frac{4}{H_3^2} \sin^2 \left( \frac{\pi m H_3}{2} \right), \quad b = \frac{\sin(\alpha k H_1)}{H_1} \quad \text{и} \quad a = a_1 + a_3.$$

Разложением в степенной ряд по степеням  $\tau$ ,  $H_1$  и  $H_3$  можно получить [68]:

$$\lambda_s = \lambda_d + \frac{\tau^2}{96}(\alpha^6 k^6 + \pi^6 m^6) - \frac{H_1^2}{24}\alpha^4 k^4 - \frac{H_3^2}{24}\pi^4 m^4$$

для спектрально-разностного численного метода,

$$\lambda_h = \lambda_d + \frac{\tau^2}{96}(\alpha^6 k^6 + \pi^6 m^6 + 8(\frac{S}{2} - \alpha k \sqrt{\frac{Ra}{S}})^3) - \frac{H_1^2}{24}\alpha^4 k^4 - \frac{H_3^2}{24}\pi^4 m^4 (2 + \frac{\alpha k}{S} \sqrt{Ra / S})$$

гибридного и

$$\lambda_r = \lambda_d - \frac{H_1^2}{24}\alpha^4 k^4 (2 + \frac{\alpha^2 k^2 - 4S}{\alpha k S} \sqrt{Ra / S}) - \frac{H_3^2}{24}\pi^4 m^4 (2 + \frac{\alpha k}{S} \sqrt{Ra / S})$$

конечно-разностного метода.

Из приведенных формул видно, что все численные методы аппроксимируют спектральные кривые дифференциальной задачи со вторым порядком по пространству и времени и что точность предлагаемого спектрально-разностного метода выше при достаточно большом значении числа Рэлея, так как в члены, описывающие схемный эффект (все члены, кроме первого в выражении для  $\lambda_s$ ) число Рэлея не входит.

На рис. 1 изображены спектральные кривые, соответствующие первым трем модам  $m = 1, 2$  и  $3$  как функции от  $\alpha k$  при  $Ra = 10^3 \cdot Ra_{cr}$ ,  $K = 64$ ,  $M = 16$ ,  $\tau = 4 \cdot 10^{-5}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $H_1 = \pi / (\alpha K)$ ,  $H_3 = 1 / M$ , где кривая 1 - дифференциальная задача, 2 - спектрально-разностный и 3 - конечно-разностный метод.

Спектральные кривые, соответствующие спектрально-разностному и гибриднему численным методам при данных значениях параметров совпадают с графической точностью и поэтому на рис. 1 спектральная кривая, соответствующая гибриднему методу не приведена. Из последнего, с учетом данных рис. 1 следует, что точность спектрально-разностного и гибридного методов близка и выше, чем конечно-разностного.

Величины максимальных инкрементов  $\lambda_m$  и соответствующие им значения  $ka_m$  для первых трех мод  $m = 1, 2$  и  $3$  приведены в таблице 1, значения параметров здесь как на рис. 1. Точные значения  $\lambda_m$  и  $ka_m$  для

первой, второй и третьей мод равны  $(-681.79, 7.4838)$ ,  $(-547.14, 9.9091)$  и  $(-406.19, 11.301)$ , соответственно.

Таблица 1. Максимальное значение инкремента.

Мода $m$	Спектрально-разн.		Гибридный		Конечно-разн.	
	$\lambda_m$	$k\alpha_m$	$\lambda_m$	$k\alpha_m$	$\lambda_m$	$k\alpha_m$
1	- 682.12	7.5077	- 682.36	7.5026	- 670.14	7.0632
2	- 548.36	9.9720	- 549.90	9.9486	- 530.03	9.3045
3	- 409.11	11.408	- 414.06	11.361	- 390.28	10.552

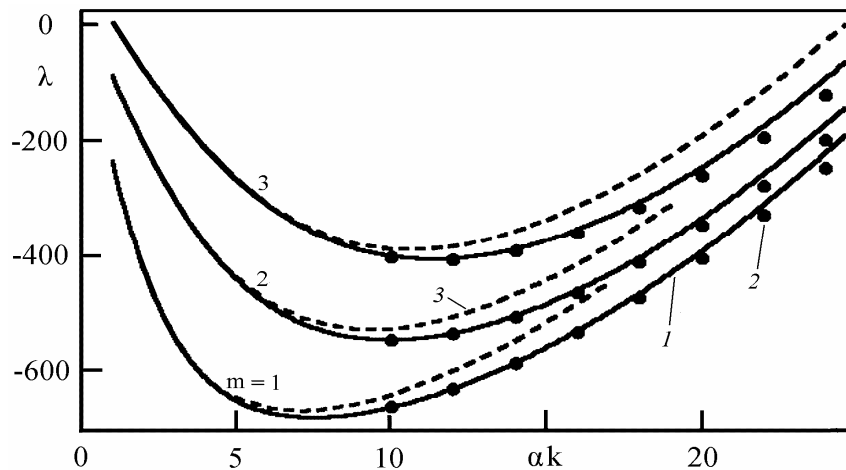


Рис. 1. Спектральные кривые.

Из таблицы 1 видно, что спектрально-разностный и гибридный методы передают значение и положение максимального инкремента нарастания с большей точностью, чем конечно-разностный.

Исследуем вопрос о точности отражения на волновой плоскости границы области неустойчивости. Для дифференциальной задачи ее положение в полярных координатах  $\alpha = \rho \cos(\gamma)$ ,  $\beta = \rho \sin(\gamma)$  задается уравнением:

$$\bar{\rho}_d = \cos^{0.5}(\gamma), \quad \text{где } 0 \leq \gamma \leq \pi/2, \quad \bar{\rho} = \rho / Ra^{0.25}.$$

Можно получить приближенные формулы для расчета границы области неустойчивости на волновой плоскости:



$$\bar{\rho}_s = \bar{\rho}_d - \frac{Ra}{192} \cos^{2.5}(\gamma)(1 - 0.75 \sin^2(2\gamma))\tau^2 + \frac{\sqrt{Ra}}{48} \cos^{5.5}(\gamma)H_1^2 + \frac{\sqrt{Ra}}{48} \cos^{1.5}(\gamma) \sin^4(\gamma)H_3^2$$

- для спектрально-разностного численного метода

$$\bar{\rho}_h = \bar{\rho}_d + \frac{Ra}{256} \cos^{2.5}(\gamma) \sin^2(2\gamma)\tau^2 + \frac{\sqrt{Ra}}{48} \cos^{5.5}(\gamma)H_1^2 + \frac{\sqrt{Ra}}{16} \cos^{1.5}(\gamma) \sin^4(\gamma)H_3^2$$

- гибридного и

$$\bar{\rho}_r = \bar{\rho}_d - \frac{\sqrt{Ra}}{48} \cos^{3.5}(\gamma)(1 + 3 \sin^2(\gamma))H_1^2 + \frac{\sqrt{Ra}}{16} \cos^{1.5}(\gamma) \sin^4(\gamma)H_3^2,$$

- конечно-разностного.

Из приведенных формул видно, что все численные методы воспроизводят границу области неустойчивости со вторым порядком точности по пространству и времени.

Прямая оценка величин членов в приведенных формулах показывает, что члены с  $\tau^2$  на несколько порядков меньше членов с  $H_1^2$  и  $H_3^2$  и поэтому членами с  $\tau^2$  при исследовании границы области неустойчивости пренебрегается.

О степени искажения границы области неустойчивости численным методом можно судить по величине

$$A = \left[ \int_0^{\pi/2} (\rho - \rho_d)^2 d\gamma \right] \frac{M^4}{Ra}, \quad \text{где } \rho = \rho_s, \rho_h, \rho_r,$$

зависящей только от одного параметра, пропорционального отношению шагов по пространству  $\eta = \pi H_3 / H_1$ . Входящие в  $A$  интегралы вычисляются по точным формулам и полагается  $H_1 = \pi / (\eta M)$ ,  $H_3 = 1 / M$ .

На рис. 2 представлена зависимость  $A$  от  $\eta$ , где кривая 1 соответствует спектрально-разностному численному методу, 2 - гибриднему и 3 - конечно-разностному. Там же приведены и асимптотики  $0.01562 \cdot \eta^{-4}$  (кривая 4) - для спектрально-разностного и гибридного методов при малых  $\eta$ ,  $8.77 \cdot 10^{-6}$  (5) - для спектрально-разностного и гибридного методов при больших  $\eta$ .

Из рис. 2 видно, что спектрально-разностный метод отражает границу области неустойчивости с наибольшей точностью, значения  $A$  в 2.4 раза меньше при  $\eta \ll 1$  и в 9 - при  $\eta \gg 1$  соответствующих значений  $A$ , вычисленных для конечно-разностного метода. Заметим, что при  $\eta < \eta^*$ ,  $\eta^* = 3.39$  гибридный метод точнее конечно-разностного, а при  $\eta > \eta^*$  - наоборот. Отметим также, что при малых  $\eta$  гибридный метод имеет общую асимптотику со спектрально-разностным, а при больших - с конечно-разностным методом.

Большинство расчетов данной работы проведено при  $\eta = 4$  и значения  $A$  были равны  $7.72 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.62 \cdot 10^{-4}$  и  $1.29 \cdot 10^{-4}$  - для спектрально-разностного, гибридного и конечно-разностного методов, соответственно.

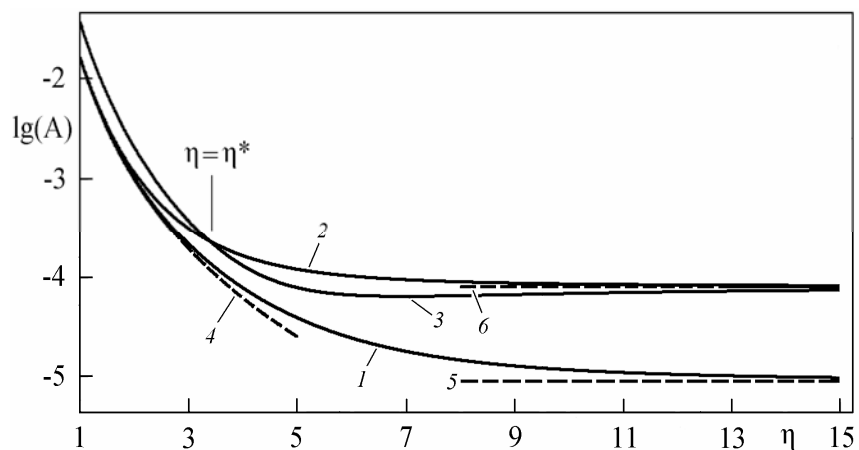


Рис. 2.  $A$  как функция  $\eta$ .

Рассмотрим также асимптотические (при  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ ) выражения для границы области неустойчивости. Можно получить для дифференциальной задачи

$$\rho_d = 1 - \gamma^2 / 4 + O(\gamma^4) \quad \text{при } \gamma \rightarrow 0 \text{ и}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{0.5} + O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{2.5}\right) \quad \text{если } \gamma \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0,$$

спектрально-разностного

$$\rho_s = 1 - \gamma^2 / 4 + \frac{\sqrt{Ra}}{48} H_1^2 (1 - 2.75\gamma^2) + O(\gamma^4) \text{ при } \gamma \rightarrow 0 \text{ и}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{0.5} + \frac{\sqrt{Ra}}{48} H_3^2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{1.5} + O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{2.5}\right) \text{ если } \gamma \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0,$$

гибридного

$$\rho_h = 1 - \gamma^2 / 4 + \frac{\sqrt{Ra}}{48} H_1^2 (1 - 2.75\gamma^2) + O(\gamma^4) \text{ при } \gamma \rightarrow 0 \text{ и}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{0.5} + \frac{\sqrt{Ra}}{16} H_3^2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{1.5} + O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{2.5}\right) \text{ если } \gamma \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$$

и конечно-разностного численного метода

$$\rho_r = 1 - \gamma^2 / 4 - \frac{\sqrt{Ra}}{48} H_1^2 (1 + 1.25\gamma^2) + O(\gamma^4) \text{ при } \gamma \rightarrow 0 \text{ и}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{0.5} + \frac{\sqrt{Ra}}{16} H_3^2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{1.5} + O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)^{2.5}\right) \text{ если } \gamma \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0.$$

При  $\gamma \rightarrow 0$  совпадают выражения для  $\rho$  у спектрально-разностного и гибридного методов, а при  $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$  - у гибридного и конечно-разностного.

Отметим также, что погрешность всех рассмотренных численных методов при  $\gamma = 0$  одинакова.

На рис. 3 приведена зависимость  $dr = \rho - \rho_d$  от  $\gamma$ , где кривая 1 соответствует спектрально-разностному, 2 - гибриднему, 3 - конечно-разностному численным методам и горизонтальная прямая  $dr = 0$  (4), значения параметров здесь как на рис. 1. Видно, что при положительном  $\gamma$ , за исключением некоторой области с  $\gamma \approx 0.8$ , спектрально-разностный метод точнее конечно-разностного.

Теперь рассмотрим вопрос об интегрирования по времени. Эта проблема возникает при применении спектральных (псевдоспектральных) методов, в которых решение представляется в виде обрезанного ряда с вычислением

производных по пространственным переменным по аналитическим формулам и исходная система уравнений с частными производными заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В линейном приближении рассмотрим методы решения этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, ограничиваясь только изучением методов интегрирования по времени и оставляя производные по пространственным переменным дифференциальными.

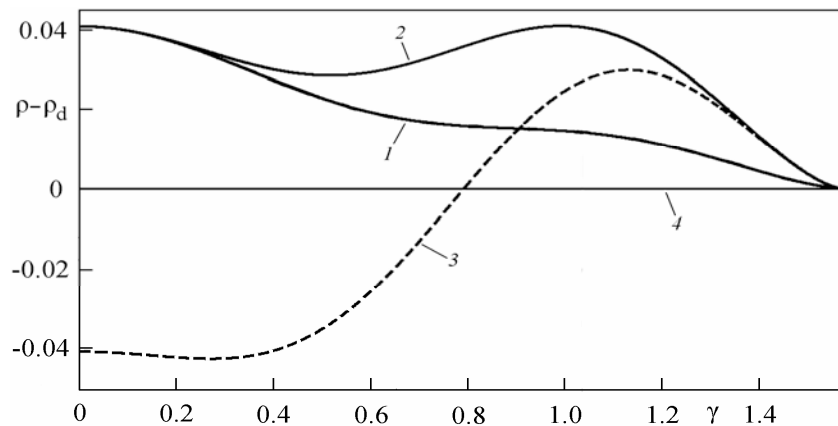


Рис. 3.  $\rho_r$  как функция  $\gamma$ .

Широко используемая при расчетах переходных и турбулентных режимов конвекции схема второго порядка точности Орзага [20], примененная к линейному аналогу системы (1.5) и записанная без расщепления по времени, имеет вид:

Схема Орзага.

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} = \frac{Ra}{2} (3Q^n - Q^{n-1})_x + \frac{1}{2} \Delta(\omega^{n+1} + \omega^n),$$

$$\frac{Q^{n+1} - Q^n}{\tau} = -\frac{1}{2Pr} (3\psi^n - \psi^{n-1})_x + \frac{1}{2Pr} \Delta(Q^{n+1} + Q^n),$$

$$\Delta\psi = -\omega.$$

Авторы работы [72] используют неявную схему Кранка-Николсона второго порядка точности.

Схема Кранка-Николсона.

$$\begin{aligned}\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} &= \frac{Ra}{2}(Q^{n+1} + Q^n)_x + \frac{1}{2}\Delta(\omega^{n+1} + \omega^n), \\ \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\tau} &= -\frac{1}{2Pr}(\psi^{n+1} + \psi^n)_x + \frac{1}{2Pr}\Delta(Q^{n+1} + Q^n), \\ \Delta\psi &= -\omega.\end{aligned}$$

А в работе [27] использована неявная схема Куртиса-Хиршфельдера третьего порядка точности.

Схема Куртиса-Хиршфельдера.

$$\begin{aligned}\frac{11\omega^{n+3} - 18\omega^{n+2} + 9\omega^{n+1} - 2\omega^n}{6\tau} &= Ra Q_x^{n+3} + \Delta\omega^{n+3}, \\ \frac{11Q^{n+3} - 18Q^{n+2} + 9Q^{n+1} - 2Q^n}{6\tau} &= -\frac{1}{Pr}\psi_x^{n+3} + \frac{1}{Pr}\Delta Q^{n+1}, \\ \Delta\psi &= -\omega.\end{aligned}$$

Можно получить, что для схемы Орзага

$$\lambda_{or} = -\frac{1}{\tau}\ln(\rho),$$

где  $\rho$  - наибольший корень квадратного уравнения (корни вещественные при достаточно малом  $\tau$ )

$$\rho^2(1/\tau + S/2) + \rho(-1/\tau + S/2 - \frac{3}{2}\alpha k\sqrt{Ra/S}) + \frac{\alpha k}{2}\sqrt{Ra/S} = 0,$$

схемы Кранка-Николсона

$$\lambda_{cn} = -\frac{1}{\tau}\ln\left(\frac{-\lambda_d\tau + 2}{\lambda_d\tau + 2}\right),$$

а для схемы Куртиса-Хиршфельдера выражение для  $\lambda_{ch}$  не приводится из-за его громоздкости.

Разложением в степенной ряд по степеням  $\tau$  можно получить, что:

$$\lambda_{or} = \lambda_d + \frac{1}{12}(S + 5\alpha k\sqrt{Ra/S})\lambda_d^2\tau^2 - \text{ для схемы Орзага,}$$

$$\lambda_{cn} = \lambda_d + \frac{1}{12} \lambda_d^3 \tau^2 - \text{Кранка-Николсона и}$$

$$\lambda_{ch} = \lambda_d - \frac{1}{4} \lambda_d^4 \tau^3, \quad \lambda_d = S - \alpha k \sqrt{Ra / S} - \text{Куртиса-Хиршфельдера.}$$

Из приведенных формул видно, что при использовании схемы Орзага, Кранка-Николсона и Куртиса-Хиршфельдера спектральные характеристики передаются правильно, если шаг по времени  $\tau$  достаточно мал.

Условие малости  $\tau$  принимает вид:

$$\tau \ll 12^{0.5} / |\lambda_d| \approx 3.5 |\lambda_d|^{-1} - \text{для схемы Кранка-Николсона и}$$

$$\tau \ll 4^{1/3} / |\lambda_d| \approx 1.6 |\lambda_d|^{-1} - \text{Куртиса-Хиршфельдера.}$$

Соответствие спектральных характеристик может нарушаться при увеличении шага по времени  $\tau$  или увеличении числа Рэлея.

На рис. 4 изображена первая (наиболее неустойчивая мода)  $m = 1$  как функция  $\alpha k$ , где кривая 1 - дифференциальная задача, 2 - спектрально-разностный метод, 3 - схема Орзага, 4 - Куртиса-Хиршфельдера и 5 - Кранка-Николсона при увеличенном в 40 раз шаге по времени  $\tau = 1.6 \cdot 10^{-3}$ , значения остальных параметров как на рис. 1.

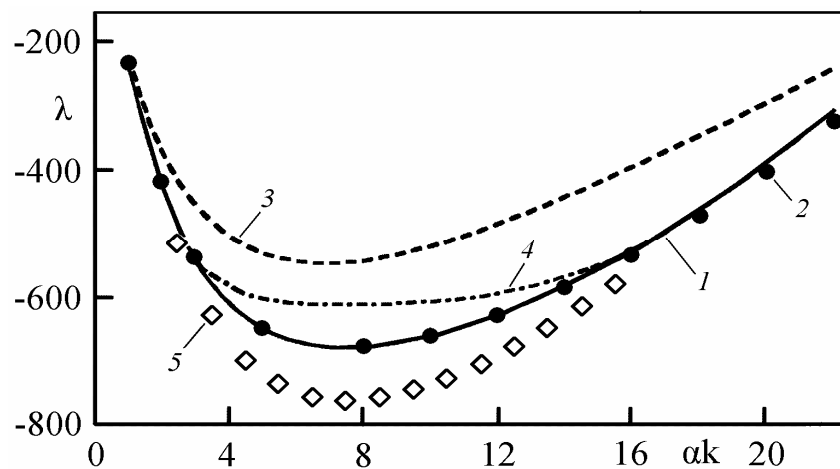


Рис. 4. Спектральные кривые при увеличенном  $\tau$ .

Видно, что спектрально-разностный метод передает спектральные характеристики дифференциальной задачи при увеличенном в 40 раз шаге по времени  $\tau$  без видимых искажений, а схемы Орзага, Кранка-Николсона и Куртиса-Хиршфельдера - со значительными искажениями.

В работе [23] предложен конечно-разностный численный метод четвертого порядка по пространству и времени. Для удобства анализа разностной схемы, используем здесь обозначения [23]. Соответствующая схема расчета, если для простоты анализа провести дискретизацию только по пространственным переменным, оставляя производные по времени дифференциальными, в линейном приближении при  $Pr = 1$  и  $H = H_1 = H_3$  имеет вид:

$$\begin{aligned} (1 + \frac{H^2}{12} \Delta_h) \omega_t &= (\Delta_h + \frac{H^2}{6} D_x^2 D_z^2) \omega + Ra D_x (1 + \frac{H^2}{12} (D_z^2 - D_x^2)) Q, \\ Q_t &= (\Delta_h - \frac{H^2}{12} (D_x^4 + D_z^4)) Q - D_x (1 - \frac{H^2}{6} D_x^2) \psi, \\ (\Delta_h + \frac{H^2}{6} D_x^2 D_z^2) \psi &= -(1 + \frac{H^2}{12} \Delta_h) \omega, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $D_x, D_x^2$  и  $D_x^4$  - стандартные центрально-разностные аппроксимации второго порядка первой, второй и четвертой производной, соответственно, а  $\Delta_h = D_x^2 + D_z^2$ .

Как и выше, разыскивая решение системы (2) в виде (1), получим:

$$\begin{aligned} \lambda_{r4} &= \lambda_d + C(\alpha k, \pi m, Ra) H^4, \quad C = \frac{C_1 + C_2 \alpha k \sqrt{Ra S}}{1440 S}, \\ \text{где } C_1 &= 10\alpha^4 k^4 \pi^4 m^4 - 3\alpha^8 k^8 - 3\pi^8 m^8 + 2\alpha^6 k^6 \pi^2 m^2 + 2\alpha^2 k^2 \pi^6 m^6, \\ C_2 &= 35\alpha^4 k^4 - 2\alpha^2 k^2 \pi^2 m^2 - 3\pi^4 m^4 \quad \text{и} \quad S = \alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2. \end{aligned}$$

Коэффициент  $C$ , как и в случае конечно-разностного и гибридного методов второго порядка аппроксимации растет асимптотически пропорционально  $Ra^{0.5}$ , что обуславливает возможную потерю точности при увеличении числа Рэлея.

На рис. 5 приведены кривые  $\lambda - \lambda_d$ , отвечающие первой моде неустойчивости при  $Ra = 10^3 \cdot Ra_{cr}$ ,  $\tau = 4 \cdot 10^{-5}$  и  $H = 1/16$  (рис. 5а) и  $H = 1/32$  (рис. 5б) для спектрально-разностного численного метода (кривая 1) и конечно-разностного метода четвертого порядка аппроксимации (2). Отклонения  $\lambda_{r4} - \lambda_d$  и  $\lambda_s - \lambda_d$  на рис. 5а имеют разные знаки, поэтому для большей информативности сравнения величина  $\lambda_{r4} - \lambda_d$  умножена на -1. На рис. 5 показаны также вертикальными линиями  $\alpha k_m = 7.484$  и  $\alpha k_0 = 27.97$  - волновые числа, соответствующие максимуму инкремента нарастания первой моды в дифференциальной задаче и  $\lambda_d = 0$ .

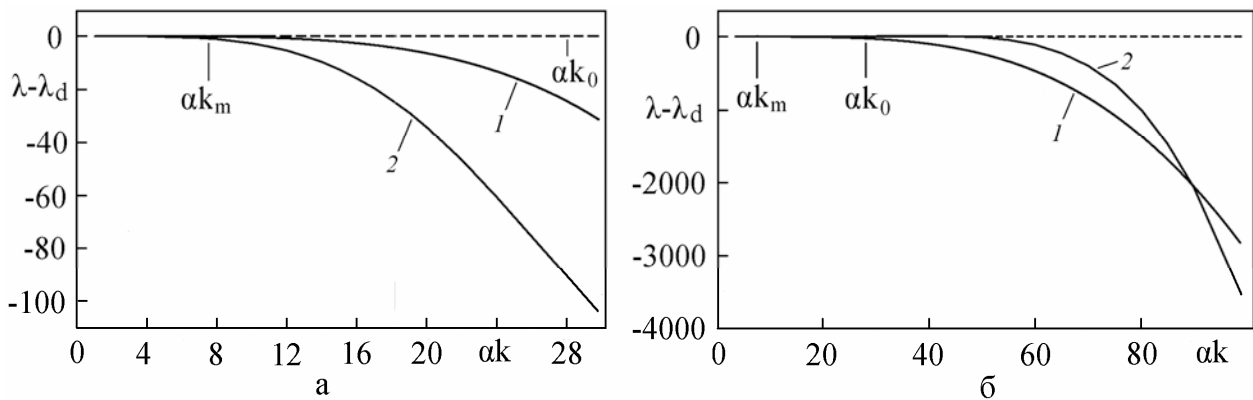


Рис. 5. Спектральные кривые при различной пространственной разрешимости, а)  $H = 1/16$ , б)  $H = 1/32$ .

Из рис. 5 видно, что при  $H = 1/16$  точнее предлагаемый спектрально-разностный численный метод, а при  $H = 1/32$  - конечно-разностный. Таким образом, как и следовало ожидать, конечно-разностный численный метод четвертого порядка аппроксимации при достаточно малых шагах по пространству обеспечивает более высокую точность по сравнению со спектрально-разностным второго порядка.

Однако, для реализации данного преимущества требуется решить ряд серьезных технических проблем. В самом деле, повышение порядка аппроксимации до четвертого обуславливает проведение вычислений на большем шаблоне из-за увеличения порядка производных в уравнениях и для однородности вычислений требует введения фиктивных точек за пределами



области расчета, с определением значений температуры и функции тока по специальным экстраполяционным формулам. Предложенным в работе [23] методом рассчитывались двумерные конвективные течения с условием прилипания на горизонтальных границах, значение завихренности на которых находились по конечно-разностной формуле Брили третьего порядка аппроксимации, последнее обстоятельство и явная реализация метода расчета обуславливают ограничения на устойчивость вычислений при большой надкритичности, малый шаг по времени  $\tau$  и, как следствие, его низкую эффективность. Учитывая вышесказанное, в дальнейшем мы считаем оправданным использование более простого и эффективного спектрально-разностного метода второго порядка аппроксимации.

В заключение данного раздела еще раз отметим, что хотя предлагаемый спектрально-разностный метод строится как метод первого порядка аппроксимации по времени, при его линеаризации порядок аппроксимации повышается до второго. Кроме того, члены, представляющие схемный эффект у спектрально-разностного метода не зависят от числа Рэлея. Последнее представляется важным, так как число Рэлея в проведенных в настоящей работе 2d,free расчетах достигает значений порядка  $2.2 \cdot 10^7$  и наличие зависимости схемного эффекта от числа Рэлея может приводить к существенному искажению решения.

### 2.1.2. Жесткие границы

Рассмотрим теперь спектральные характеристики метода расчета 2d,rigid конвекции с ‘правильными’ (условием прилипания) граничными условиями для скорости на горизонтальных границах.

Численное определение инкремента нарастания возмущений основано на расчете 2d,rigid конвекции в линейной постановке (в нелинейных членах полагается  $\psi_x = \psi_z = 0$ ).

Рассматриваются решения вида:

$$\begin{aligned}\omega(t, x, z) &= \omega_k(z) e^{-\lambda t} \cos(\alpha kx), \\ \psi(t, x, z) &= \psi_k(z) e^{-\lambda t} \cos(\alpha kx), \\ Q(t, x, z) &= Q_k(z) e^{-\lambda t} \sin(\alpha kx).\end{aligned}$$

При выбранном значении волнового числа  $\alpha k$  задаются начальные условия:  $\psi(0, x, z) = 10^{-3} \sin(\pi z) \cos(\alpha kx)$ ,  $Q(0, x, z) = 0$ .

И как функция времени в расчете определяется:

$$\lambda^{n+1} = -\frac{1}{\tau} \ln\left(\frac{V_{rms}^{n+1}}{V_{rms}^n}\right), \quad V = (\psi_x^2 + \psi_z^2)^{0.5},$$

где  $V_{rms}^{n+1}$  и  $V_{rms}^n$  - среднеквадратичные значения скорости  $V$  на двух последовательных слоях по времени. После установления, значение  $\lambda$  равно инкременту первой моды с выбранным  $\alpha k$ .

Такая методика позволяет рассчитывать инкременты нарастающих возмущений, соответствующих первой моде линейной теории устойчивости с падением точности при приближении к значению  $\alpha k$ , при котором  $\lambda = 0$ .

Для вычисления спектральных характеристик были проведены 6 расчетов в различном диапазоне изменения волнового числа  $\alpha k$  при  $Ra = 10^3 \cdot Ra_{cr}$ ,  $Pr = 10$  и  $\alpha = 1$ , а значения  $K = M$  и  $\tau$  варьировались. Параметры расчетов приведены в табл. 3.

Таблица 3. Параметры расчетов.

Расчет	$K = M$	Шаг по времени, $\tau$
1	16	$4.0 \cdot 10^{-5}$
2	32	$2.0 \cdot 10^{-5}$
3	64	$1.0 \cdot 10^{-5}$
4	128	$5.0 \cdot 10^{-6}$
5	256	$2.5 \cdot 10^{-6}$
6	16	$2.0 \cdot 10^{-5}$

Точное решение получено из линейного аналога (1.5) методом ортогонализации [98].

На рис. 6 изображены результаты расчетов 1,2,3,4,5, обозначенные такими же цифрами и точное решение (6). Результаты расчета 6 на рис. 6 не представлены, так данные расчетов 1 и 6 совпадают с графической точностью.

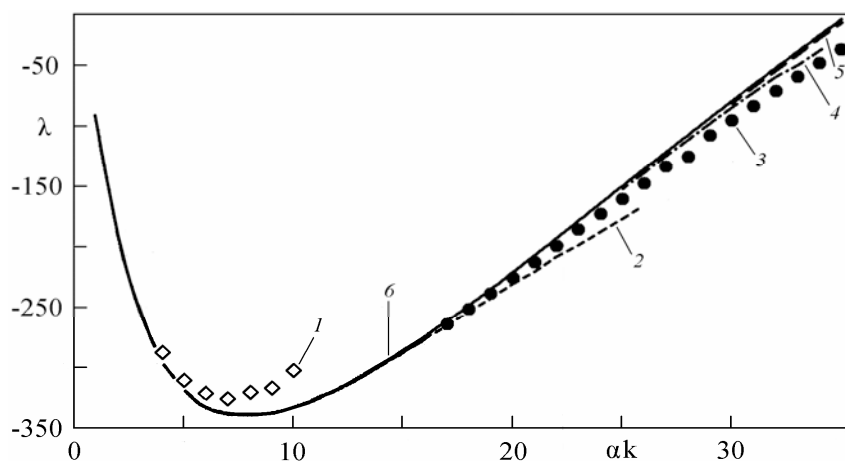


Рис. 6. Спектральная кривая.

Данные на рис. 6 показывают сходимость при увеличении  $K$ ,  $M$  и уменьшении  $\tau$ . При этом близость результатов расчетов 1 и 6 свидетельствует о достаточно малом шаге по времени  $\tau$ .

Проверка порядка аппроксимации при  $K, M \rightarrow \infty$  и  $\tau \rightarrow 0$  проводилась при  $\alpha k = 25$ , при этом  $K = M$  и  $\tau$  варьировались, а значения остальных параметров были те же.

В табл. 4 приведены точное и приближенные значения инкремента, рассчитанные при  $K = 32, 64, 128$  и  $256$  (расчеты 2,3,4 и 5, соответственно), а в скобках - отклонение (в процентах) вычисленного значения от точного. Видно, что при  $N \geq 64$  (расчеты 3, 4 и 5) погрешность уменьшается как  $O(\tau^2 + H_1^2 + H_3^2)$ , где  $H_1 = \pi/(\alpha K)$ , а  $H_3 = 1/M$ .

Таблица 4. Порядок сходимости.

Точное значение	P 2	P 3	P 4	P 5
149.99 (0.0)	176.85 (17.9)	160.35 (6.91)	152.61 (1.74)	150.64 (0.43)

## 2.2. Нелинейный анализ

Средствами линейного анализа невозможно исследовать аппроксимацию по времени нелинейных членов, так как при таком анализе все нелинейные члены отбрасываются. Аппроксимацию по времени нелинейных членов можно исследовать только средствами нелинейного анализа.

Нелинейный анализ спектрально-разностного численного метода проведем на модельной нелинейной системе уравнений с некоторым изменением вида нелинейных членов. При таком изменении нелинейные члены могут отличаться от их ‘прообразов’ в исходных уравнениях (1.5) только знаком:

$$\begin{aligned}\omega_t + |\psi_z| \omega_x + |\psi_x| \omega_z &= \Delta \omega + Ra Q_x, \\ \Delta \psi &= -\omega, \\ Q_t + |\psi_z| Q_x + |\psi_x| Q_z &= \Delta Q - \psi_x.\end{aligned}\tag{3}$$

Нелинейная система уравнений (3) имеет частные решения в виде монохроматической волны:

$$\begin{aligned}\omega(t, x, z) &= \rho(t) e^{i(\varphi(t) + \alpha x + \beta z)}, \\ Q(t, x, z) &= -i\eta(t) e^{i(\varphi(t) + \alpha x + \beta z)}, \\ \psi(t, x, z) &= \frac{\rho(t)}{S} e^{i(\varphi(t) + \alpha x + \beta z)}.\end{aligned}$$

Не обсуждая здесь вопрос о физическом смысле таких частных и комплексных решений, прямой подстановкой в систему (3) получим для функций времени  $\rho$ ,  $\eta$  и  $\varphi$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\rho_t + S\rho - Ra \alpha \eta &= 0, \\ \eta_t + S\eta - \frac{\alpha}{S} \rho &= 0, \\ \varphi_t &= -A\rho, \quad A = 2\alpha\beta / S.\end{aligned}\tag{4}$$

Система (4) имеет аналитическое решение:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{1}{2} \{ (\rho_0 + \bar{\eta}_0) e^{t(-S + \alpha\sqrt{Ra/S})} + (\rho_0 - \bar{\eta}_0) e^{t(-S - \alpha\sqrt{Ra/S})} \}, \\ \bar{\eta}(t) &= \frac{1}{2} \{ (\rho_0 + \bar{\eta}_0) e^{t(-S + \alpha\sqrt{Ra/S})} - (\rho_0 - \bar{\eta}_0) e^{t(-S - \alpha\sqrt{Ra/S})} \}, \\ \varphi(t) &= \varphi_0 - \frac{A}{2} \left\{ \frac{\rho(t) + \bar{\eta}(t)}{-S + \alpha\sqrt{Ra/S}} + \frac{\rho(t) - \bar{\eta}(t)}{-S - \alpha\sqrt{Ra/S}} \right\}, \\ \text{где } \bar{\eta}(t) &= \eta(t)\sqrt{S Ra}.\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения проводятся и для предлагаемого спектрально-разностного метода. Ограничимся предположением длинных волн (малые  $\alpha$  и  $\beta$ ) и проведем дискретизацию только по времени. Подобным образом были проанализированы разностные схемы для нелинейного уравнения со знакопеременной вязкостью [99] и конечно-разностный метод расчета вязкоупругих течений несжимаемой жидкости [100].

Коэффициенты  $\psi_x$  и  $\psi_z$  в членах нелинейного переноса системы (3) могут определяться разными способами:

- по функции тока, взятой со слоя  $n$  по времени (Схема 1)

$$\psi_x = \psi_x^n, \psi_z = \psi_z^n,$$

- по функции тока, вычисленной на первом этапе расщепления (Схема 2)

$$\psi_x = \psi_x^{n+1/2}, \psi_z = \psi_z^{n+1/2},$$

- как среднее арифметическое значений функции тока на слоях  $n$  и  $n+1$  по времени (Схема 3)

$$\psi_x = \frac{\psi_x^{n+1} + \psi_x^n}{2}, \psi_z = \frac{\psi_z^{n+1} + \psi_z^n}{2}.$$

Реализация последнего способа требует введения итерационного процесса. Если в этом итерационном процессе ограничиться одной итерацией, то получится известная схема предиктор-корректор (Схема 4).

Считая величины  $\rho^n$  и  $\eta^n$  на слое  $n$  по времени известными, получим разложения в виде степенных рядов по  $\tau$  для величин  $\rho^{n+1}$ ,  $\eta^{n+1}$  и  $\varphi^{n+1}$  на слое  $n+1$  по времени для дифференциальной задачи и спектрально-разностного

численного метода, затем сравним эти разложения с целью определения порядка аппроксимации по времени.

Считая, что значения величин  $\rho^n$  и  $\eta^n$  в дифференциальной задаче и спектрально-разностном численном методе на слое  $n$  по времени совпадают, получим после очень громоздких вычислений с помощью программы Maple V:

$$\rho_s^{n+1} - \rho_d^{n+1} = O(\tau^3), \quad \eta_s^{n+1} - \eta_d^{n+1} = O(\tau^3), \quad \varphi_s^{n+1} - \varphi_d^{n+1} = \frac{A}{2} \tau^2 (Ra \alpha \eta^n - S \rho^n)$$

- для спектрально-разностного метода с вычислением скоростей по значениям функции тока  $\psi$  на слое  $n$  по времени (Схема 1),

$$\rho_s^{n+1} - \rho_d^{n+1} = O(\tau^3), \quad \eta_s^{n+1} - \eta_d^{n+1} = O(\tau^3), \quad \varphi_s^{n+1} - \varphi_d^{n+1} = -\frac{A}{2} \tau^2 Ra \alpha \eta^n$$

- для спектрально-разностного метода с вычислением скоростей по значениям функции тока после первого этапа расщепления (Схема 2) и

$$\rho_s^{n+1} - \rho_d^{n+1} = O(\tau^3), \quad \eta_s^{n+1} - \eta_d^{n+1} = O(\tau^3), \quad \varphi_s^{n+1} - \varphi_d^{n+1} = O(\tau^3)$$

- для схемы предиктор-корректор (Схема 4). При вычислении разложений здесь в качестве нулевого приближения использовались значения функции тока со слоя  $n$  по времени.

Видно, что вычисление скоростей по значениям функции тока на слое  $n$  по времени и по ее значениям, полученным после первого этапа расщепления, приводит к методам первого порядка аппроксимации по времени, причем амплитуды гармоник  $\rho$  и  $\eta$  вычисляются со вторым порядком, а фаза колебаний  $\varphi$  - с первым. Применение схемы предиктор-корректор дает схему второго порядка точности по времени для всех величин  $\rho$ ,  $\eta$  и  $\varphi$ .

## 2.2.1. Численные эксперименты

### 2.2.1.1. Модельная система уравнений

Опишем численные эксперименты, которые иллюстрируют выводы предыдущего раздела о порядке аппроксимации по времени. Расчеты частных решений системы (3) проводились по схемам 2, 3 и 4 для наиболее

быстрорастущей в линейном приближении гармоники с  $\alpha = 7$ ,  $\beta = \pi$  и  $Ra = 10^3 Ra_{cr}$  и начальными данными  $\rho_0 = \bar{\eta}_0 = 1, \psi_0 = 0$ .

Решение системы (3) имеет вид:

$$\begin{aligned}\omega(t, x, z) &= \rho(t) e^{i(\varphi(t) + \alpha x + \beta z)}, \\ Q(t, x, z) &= -i\eta(t) e^{i(\varphi(t) + \alpha x + \beta z)}, \\ \psi(t, x, z) &= \frac{\rho(t)}{S} e^{t(-S + \alpha\sqrt{Ra/S})}, \\ \rho(t) &= \rho_0 e^{t(-S + \alpha\sqrt{Ra/S})}, \quad \eta(t) = \rho(t) / \sqrt{S Ra}, \\ \varphi(t) &= \varphi_0 - \frac{A}{-S + \alpha\sqrt{Ra/S}} e^{t(-S + \alpha\sqrt{Ra/S})}, \\ A &= 2\alpha\beta / S.\end{aligned}$$

Подобные формулы выписываются и для спектрально – разностного численного метода. Например, для схемы 2 с вычислением скоростей в уравнениях нелинейного переноса по значениям функции тока после первого этапа расщепления, можно получить:

$$\begin{aligned}\rho^{n+1/2} &= \rho^n e^{t(-S/2 + \alpha\sqrt{Ra/S})}, \\ \eta^{n+1/2} &= \rho^{n+1/2} / \sqrt{S Ra}, \quad \varphi^{n+1/2} = \varphi^n\end{aligned}$$

- для первого этапа расщепления и

$$\begin{aligned}\rho^{n+1} &= \rho^{n+1/2} |C|, \quad \eta^{n+1} = \rho^{n+1} / \sqrt{S Ra}, \quad \varphi^{n+1} = \varphi^n - i \ln(C / |C|), \\ C &= \frac{(1 - (iA\rho^{n+1/2} + \alpha^2)\tau / 4)(1 - (iA\rho^{n+1/2} + \beta^2)\tau / 4)}{(1 + (iA\rho^{n+1/2} + \alpha^2)\tau / 4)(1 + (iA\rho^{n+1/2} + \beta^2)\tau / 4)}\end{aligned}$$

- для второго.

На интервале времени  $0.128 \leq t \leq 0.192$ , при различных шагах по времени  $\tau$  вычислялись среднеквадратичные отклонения  $\rho$  и  $\varphi$  от их точных значений по 100 расположенным на равном расстоянии контрольным точкам. Результаты вычислений приведены в таблице 5, в которой для удобства значения  $\tau$  умножены на  $10^5$ , а значения среднеквадратичных отклонений величин  $\rho$  и  $\varphi$  от их точных значений, обозначенные через  $d\rho$  и  $d\varphi$ , соответственно - на  $10^4$ .

Конкретный временной интервал и число контрольных точек на нем были выбраны произвольно, но простые оценки показывают, что в пределах выбранного временного интервала решение является достаточно развитым.

Таблица 5. Проверка порядка сходимости.

$\tau$	Схема 3		Схема 4		Схема 2	
	dρ	dφ	dρ	dφ	dρ	dφ
1	0.2091	0.4477	0.2091	0.4477	0.2091	5.283
2	0.8354	1.789	0.8354	1.789	0.8381	10.56
4	3.329	7.118	3.329	7.146	3.359	21.12
8	13.13	27.92	13.12	28.45	13.49	42.18
16	49.87	104.1	49.53	112.1	54.36	84.08

Результаты расчетов полностью соответствуют выводам предыдущего раздела. Из таблицы 5 видно, что схема 2 имеет первый порядок аппроксимации по времени, схемы 3 и 4 - второй. Результаты расчетов по схемам 3 и 4 второго порядка аппроксимации совпадают с высокой точностью при небольших  $\tau$ .

В согласии с результатами предыдущего раздела схема первого порядка (Схема 2) вычисляет амплитуду гармоник со вторым порядком аппроксимации, а фазу колебаний - с первым.

### 2.2.1.2. Исходная система уравнений

Сравним результаты решения системы (1.5) по Схемам 1 - 4 с целью выяснения влияния порядка аппроксимации по времени на средние характеристики течения.

Расчеты проводились с шагом по времени  $\tau = 5.3 \cdot 10^{-5}$  при  $K = 128$ ,  $M = 32$ ,  $Pr = 10$ ,  $\alpha = 1$  и  $r = 3 \cdot 10^3$ .

Во всех расчетах 2d,free конвекции, на каждом шаге по времени вычислялось число Нуссельта



$$Nu(t_n) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\pi/\alpha} (Q_z(t, x, 0) + Q_z(t, x, 1)) dx - 1,$$

$$Nu^n = 2 \sum_k \sum_m Q_{km}^n \frac{m}{k} - 1, \quad k = 1, 3, 5, \dots, K-1, \quad m = 2, 4, 6, \dots, M-2,$$

кинетическая энергия и энтрофия

$$Ek^n = \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^K \sum_{m=1}^{M-1} \rho_k \varphi_{km} \omega_{km}, \quad Ek^n = \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^K \sum_{m=1}^{M-1} \rho_k \omega_{km}^2,$$

среднее волновое число в горизонтальном направлении

$$K_{me}^n = \alpha \frac{\sum_{k=0}^K \sum_{m=1}^{M-1} k \rho_k \varphi_{km} \omega_{km}}{\sum_{k=0}^K \sum_{m=1}^{M-1} \rho_k \varphi_{km} \omega_{km}},$$

а также среднеквадратичное значение скорости

$$V_{rms}^n = \sqrt{2\alpha Ek^n / \pi}.$$

Среднеквадратичные значения температуры  $Q_{rms}^n$  и функции тока  $\psi_{rms}^n$  вычислялись в физическом пространстве, соответствующая формула, например, для температуры принимает вид:

$$Q_{rms}^n = \sqrt{\langle Q^2 \rangle},$$

где угловые скобки означают осреднение по всем узлам разностной сетки в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Число Рейнольдса  $Re$  вычисляется по значению среднеквадратичной скорости, с которой оно связано соотношением:

$$Re^n = V_{rms}^n / Pr.$$

Все полученные значения средних величин осреднялись по времени, например, для числа Нуссельта вычислялось:

$$Nu = \frac{1}{L+1} \sum_{n=L_0}^{L_0+L} Nu^n.$$

Начало осреднения  $L_0$  выбиралось так, чтобы течение уже было достаточно развитым, а его продолжительность  $L$  - чтобы результат  $Nu$  не зависел от  $L$ , в

расчетах данного раздела  $L \approx 5 \cdot 10^5$ . Выбранная продолжительность расчетов соответствует 4800 оборотам вихря  $t_v$ , где  $t_v = \frac{2(\pi / \alpha + 1)}{V_{ms}}$ .

Чтобы контролировать достаточную длину интервала осреднения по времени, вместе с  $Nu^n$  во всех 2d,free расчетах вычислялись числа Нуссельта на нижней и верхней горизонтальной границе

$$Nu_0(t_n) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/\alpha} Q_z(t, x, 0) dx - 1, \quad Nu^n = 2 \sum_k \sum_m Q_{km}^n \frac{m}{k} - 1,$$

$$Nu_1(t_n) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/\alpha} Q_z(t, x, 1) dx - 1, \quad Nu^n = 2 \sum_k \sum_m Q_{km}^n \frac{m}{k} (-1)^m - 1,$$

где  $k = 1, 3, 5, \dots, K-1$  и  $m = 1, 2, \dots, M$ .

Как правило, расчет заканчивался при выполнении условия

$$\left| \frac{Nu_1 - Nu_0}{Nu} \right| < 0.02,$$

при этом, значение  $Nu = (Nu_0 + Nu_1) / 2$  всегда устанавливалось значительно раньше.

На рис. 7 приведены зависимости  $Nu_0$ ,  $Nu_1$  и  $Nu$  как функции продолжительности осреднения  $L$  (Схема 2). Видно, что при  $L \approx 5 \cdot 10^5$  значения  $Nu_0$  и  $Nu_1$  практически совпадают, а величина  $Nu$  с графической точностью постоянная при  $3.5 \cdot 10^5 \leq L \leq 5 \cdot 10^5$ .

Как правило, в 2d,free расчетах наиболее медленно устанавливалось среднее значение горизонтального волнового числа  $K_{me}$ , что обусловлено большим размахом его колебаний во времени. В данном расчете при  $3.5 \cdot 10^5 \leq L \leq 5 \cdot 10^5$  среднее волновое число совершает колебания, амплитуда которых не превосходит 0.3%.

Относительные отклонения в процентах для вычисленных средних величин (за их точное значение принято среднее арифметическое величин, полученных по Схемам 3 и 4) приведены в таблице 6. В последней строке таблицы приведены также отклонения для Схемы 3, которые в силу их способа вычисления совпадают с отклонениями для Схемы 4.

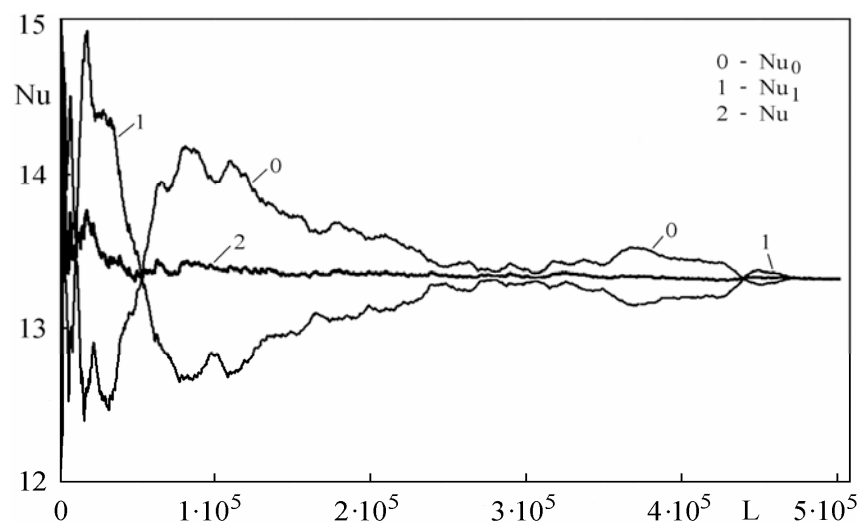


Рис. 7. Число Нуссельта как функция продолжительности осреднения.

Таблица 6. Относительные отклонения интегральных характеристик.

Схема	Nu	$E_k$	$E_p$	$K_{me}$	$V_{rms}$	$\Psi_{rms}$	$Q_{rms}$
1	0.39	1.54	0.25	1.86	0.78	2.09	0.11
2	1.76	1.21	1.36	4.58	0.63	1.51	1.08
3	0.05	0.42	0.14	0.24	0.21	0.45	0.23

Наибольшее отклонение наблюдалось для Схемы 2 при вычислении среднего волнового числа  $K_{me}$ . На рис. 8 приведено волновое число  $K_{me}$  как функция времени. Видно, что волновое число совершает колебания почти с пятикратным размахом, что и обуславливает несколько меньшую точность определения его среднего значения.

Учитывая данные таблицы 6, а также сложный характер течения и большое число шагов по времени, можно заключить, что средние характеристики, вычисленные по схемам первого и второго порядка аппроксимации по времени близки, поэтому для практических расчетов с целью получения средних характеристик можно использовать схемы первого порядка аппроксимации по времени.

Все расчеты, результаты которых приведены ниже, проведены по Схеме 2 первого порядка аппроксимации по времени.

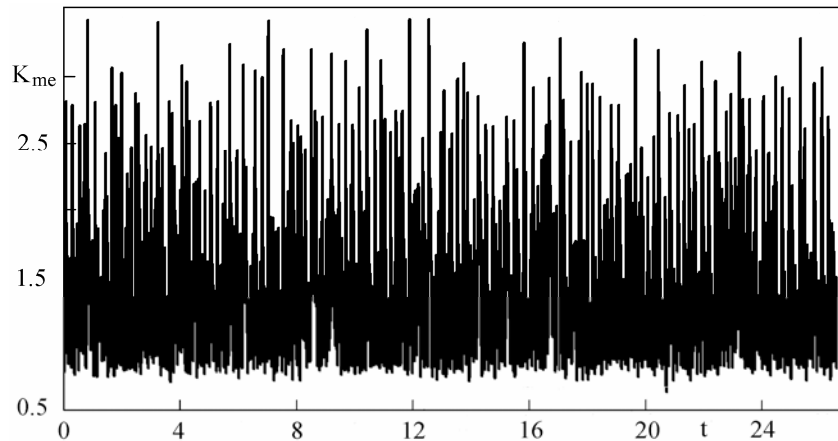


Рис. 8. Волновое число как функция времени.

### 2.3. Линейный анализ метода расчета трехмерной конвекции

Также как и в двумерном случае, линейный анализ основан на рассмотрении линейных аналогов исходной дифференциальной системы уравнений (1.3) и предлагаемого спектрально-разностного численного метода. Рассчитываются и сравниваются инкременты нарастания возмущений в дифференциальной задаче и численном методе. По близости спектральных характеристик можно судить о точности численного метода.

Повторим, что линейный аналог системы (1.3) описывает развитие бесконечно малых трехмерных возмущений равновесного решения, поэтому близость спектральных характеристик дифференциальной задачи и численного метода означает правильную динамику трехмерных возмущений равновесного решения до тех пор, пока их амплитуда остается достаточно малой.

Итак, рассмотрим линейный аналог системы (1.3), где отбрасываются все нелинейные члены и решение ищется в виде, который для  $u$  принимает вид:

$$u(t, x, y, z) = u_0 \exp(-\lambda t) \cos(\alpha kx) \cos(\beta ny) \cos(\pi mz),$$

а представления для  $v$ ,  $w$ ,  $p$  и  $Q$  выписываются по аналогии из (1.4), здесь  $u_0$  - постоянная амплитуда, а инкремент  $\lambda$  находится из задачи на собственные значения, при  $\lambda < 0$  амплитуда гармоник нарастает, а при  $\lambda > 0$  - затухает.

Как и при линейном анализе двумерных алгоритмов, для простоты ограничимся случаем  $Pr = 1$ .

Аналитические выражения для спектральных характеристик имеют вид:

$$\lambda_d = S - \bar{k}\sqrt{Ra/S},$$

для дифференциальной задачи, где

$$S = \alpha^2 k^2 + \beta^2 n^2 + \pi^2 m^2, \quad \bar{k} = (\alpha^2 k^2 + \beta^2 n^2)^{0.5} \quad \text{и}$$

$$\lambda_s = \frac{S}{2} - \bar{k}\sqrt{Ra/S} - \frac{1}{\tau} \ln\left(1 - \frac{\tau a}{2}\right),$$

для предлагаемого спектрально-разностного численного метода, где

$$a = \frac{4}{H_1^2} \sin^2(\alpha k H_1 / 2) + \frac{4}{H_2^2} \sin^2(\beta n H_2 / 2) + \frac{4}{H_3^2} \sin^2(\pi m H_3 / 2).$$

Предполагая, что шаги по времени и пространству достаточно малы, можно получить разложением в степенной ряд:

$$\lambda_s = \lambda_d + \frac{\tau}{8} S^2 - \frac{1}{24} (\alpha^4 k^4 H_1^2 + \beta^4 n^4 H_2^2 + \pi^4 m^4 H_3^2) + O(\tau^2),$$

где  $S$  определено выше.

Из приведенной формулы видно, что как и при двумерной реализации предлагаемого спектрально-разностного метода, схемный эффект (все члены правой части, кроме первого) определяется шагами  $\tau$ ,  $H_1, H_2, H_3$  и волновыми числами  $\alpha k$ ,  $\beta n$  и  $\pi m$  и не зависит от числа  $Ra$ .

На рис. 9 изображены спектральные кривые и граница области неустойчивости на волновой плоскости при  $r = 950$ ,  $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $H_1 = H_2 = \pi/64$ ,  $H_3 = 1/64$ .

На рис. 9а приведены спектральные кривые  $\lambda(\alpha k, \beta n, \pi m)$ , соответствующие трем старшим модам  $m = 1, 2, 3$  линейной теории устойчивости, где кривая 1 соответствует дифференциальной задаче, а 2 - предлагаемому численному методу. Горизонтальная прямая  $\lambda = 0$  (3) на рис. 9а разделяет области нарастания и затухания гармоник.

Спектральные кривые практически совпадают в области малых волновых чисел и в области максимальных значений инкрементов, небольшое количественное отклонение заметно лишь для затухающих гармоник при  $\alpha k \geq 17$ , обусловленное конечно-разностной аппроксимацией половинок вязких членов.

Граница области неустойчивости в пространстве волновых чисел описывается уравнением:

$$\bar{\rho}_d = \cos^{0.5}(\psi), \quad \bar{\rho}_d = \rho_d / Ra^{0.25}, \quad 0 \leq \psi \leq \pi / 2$$

в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \alpha k &= \rho \cos(\varphi) \cos(\psi), & \beta n &= \rho \sin(\varphi) \cos(\psi), \\ \gamma &= \rho \sin(\psi), & 0 &\leq \varphi, \psi \leq \pi / 2, \quad \gamma = \pi m. \end{aligned}$$

Разложением в степенной ряд выражения  $\lambda_s = 0$ , получим для границы области неустойчивости спектрально-разностного численного метода:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_s &= \cos^{0.5}(\psi) - \frac{\sqrt{Ra}}{16} \cos^{1.5}(\psi) A, \\ A &= \tau - \frac{1}{3} (\cos^4(\varphi) \cos^4(\psi) H_1^2 + \sin^4(\varphi) \cos^4(\psi) H_2^2 + \sin^4(\psi) H_3^2), \\ \bar{\rho}_s &= \rho_s / Ra^{0.25}, \quad 0 \leq \varphi, \psi \leq \pi / 2. \end{aligned}$$

На рис. 9б изображена граница области устойчивости для дифференциальной задачи и численного метода при  $\varphi = \pi/4$ ,  $Ra = 950 \cdot 657.5 \approx 6.25 \cdot 10^5$ , где кривая 1 соответствует дифференциальной задаче, а (2) - предлагаемому численному методу. Максимальное отклонение кривых составляет 1.7%. По осям ординат и абсцисс здесь отложены нормированные волновые числа в вертикальном и горизонтальном направлениях  $\gamma = \pi m / Ra^{0.25}$  и  $\bar{k} = (\alpha^2 k^2 + \beta^2 n^2)^{0.5} / Ra^{0.25}$ , соответственно.

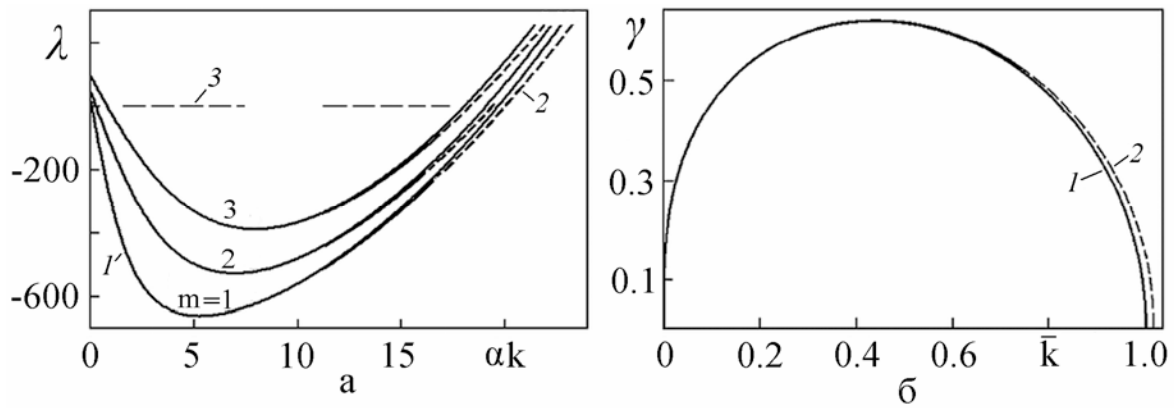


Рис. 9. Спектральные кривые,

а) Первые три моды ( $m = 1, 2, 3$ ) линейной теории устойчивости для дифференциальной задачи и предлагаемого численного метода;

б) граница области неустойчивости.

## 2.4. Тестирование и методические расчеты

### 2.4.1. Метод расчета 2d,free конвекции

#### 2.4.1.1 Сравнение с результатами других авторов

Для корректного сопоставления с результатами других авторов, в этом разделе вместо (1.6) рассматривалось ‘симметричное’ представление решения (1.8), в котором в зависимостях от горизонтальной координаты  $x$  синусы заменены на косинусы и наоборот.

Для проверки правильности работы вычислительного алгоритма в таблице 7 сравниваются рассчитанные предлагаемым методом числа Нуссельта

$$Nu(t) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\pi/\alpha} (Q_z(t, x, 0) + Q_z(t, x, 0)) dx - 1$$

двумерной стационарной валиковой конвекции при  $Pr = 6.8$ ,  $\alpha = 2.221$  с вычисленными в [15,32]. В [32] использовался метод Галеркина с небольшим числом гармоник  $k + m \leq 10$  (маломодовое приближение), а в [15] - спектральный метод с использованием матричной экспоненты для учета линейного оператора. В [15] и при расчете предлагаемым методом учитывалось

[32x32] гармоника. В последнем столбце таблицы 7 приведены отклонения результатов настоящей работы от данных [32] или [15] (со знаком +) в %.

Отметим хорошее соответствие результатов. При  $r < 4$ , когда маломодовое приближение еще имеет хорошую точность, отклонение результатов настоящей работы от данных [32] не превышает 0.4%. А при  $4 \leq r \leq 60$  отклонение результатов настоящей работы от данных [15] не превышает 0.55%.

Таблица 7: Тестовое сравнение чисел Нуссельта.

$r = Ra/Ra_{cr}$	[32]	[15]	Наст. работа	Откл., %
1.1	1.18	---	1.185	0.4
1.2	1.34	---	1.343	0.2
1.4	1.61	---	1.604	0.4
2.0	2.14	---	2.138	0.1
3.0	2.68	---	2.675	0.2
4.0	3.04	3.040	3.039	0.03+
6.0	3.55	3.553	3.559	0.17+
10.0	4.24	4.244	4.258	0.33+
15.0	4.85	4.853	4.876	0.47+
20.0	5.33	5.333	5.362	0.54+
30.0	6.08	6.105	6.139	0.55+
40.0	6.68	6.742	6.777	0.52+
50.0	7.16	7.298	7.333	0.48+
60.0	---	7.796	7.830	0.43+

Используя конечно-разностный метод второго порядка точности по времени и пространству с учетом до [49x101] точек, в работе [33] были вычислены значения числа Нуссельта для стационарной валиковой конвекции



при том же значении числа Прандтля. При  $r \leq 50$  значения надкритичности и  $\alpha$  как в таблице 7.

В диапазоне надкритичности  $5 \leq r \leq 40$  значения числа Нуссельта, полученные в [33] следуют степенному закону:

$$Nu = 1.96 \cdot r^{0.333},$$

близкому к определенному по результатам настоящей работы (четвертый столбец таблицы 7)

$$Nu = 1.953 \cdot r^{0.337} \text{ при } 6 \leq r \leq 40.$$

В работе [33] расчеты проводились до  $r = 10^3$  при  $\alpha = \pi$  и отмечено, что при  $50 \leq r \leq 10^3$  число Нуссельта следует степенному закону с более высоким показателем степени:

$$Nu = 1.8 \cdot r^{0.365}.$$

Результаты расчетов предлагаемым методом приведены в таблице 8, где числа Нуссельта во втором, третьем и четвертом столбцах получены предлагаемым методом с учетом [65x65], [129x129] и [257x257] гармоник, соответственно.

В последнем столбце таблицы 8 приведены относительные отклонения полученных в [33] значений от вычисленных предлагаемым методом с учетом [257x257] гармоник, при этом максимальное относительное отклонение составило 0.53%.

Данные второго, третьего и четвертого столбцов таблицы 8 показывают сходимость результатов при последовательном увеличении числа учитываемых гармоник.

Для проверки точности решения, полученного с учетом [257x257] гармоник, при  $r = 400$  и  $10^3$  были проведены два расчета с учетом [513x513] гармоник, значения числа Нуссельта при этом были равны 15.941 и 22.185, соответственно, с относительным отклонением значений на 0.23 и 0.41%.

Таблица 8: Сравнение с результатом [33].

r	[65x65]	[129x129]	[257x257]	[33]	Откл., %
20	5.379	5.368	5.363	5.35	0.24
50	7.481	7.452	7.440	7.45	0.13
100	9.674	9.618	9.594	9.61	0.17
200	12.55	12.44	12.39	12.40	0.34
400	16.24	16.07	15.98	15.90	0.49
1000	22.83	22.50	22.28	22.16	0.53

Полученное в настоящей работе с учетом [257x257] гармоник решение при  $50 \leq r \leq 10^3$  следует степенному закону:

$$Nu = 1.776 \cdot r^{0.366},$$

близкому к приведенному в [33].

Для проверки возможности проводить расчеты при более высокой надкритичности, сравним вычисленные предлагаемым методом числа Нуссельта  $Nu$  с полученным в [34] при  $r \leq 2 \cdot 10^3$ ,  $\alpha = \pi$  и более простой модели бесконечно большого числа Прандтля.

Результаты расчетов [34] представляются достаточно точными, так как они проведены с учетом до [24x24] конечных элементов со сгущением в пограничных слоях вблизи вертикальных и горизонтальных границ.

Соответствующие упрощения были внесены в предлагаемый вычислительный алгоритм, числа Нуссельта, соответствующие стационарному режиму конвекции приведены в таблице 9.

По предлагаемому алгоритму расчеты проводились с числом гармоник [33x33], [65x65] и [129x129], в последнем столбце таблицы 9 приведены в % отклонения данных расчета с числом гармоник [129x129] от результатов [34], как и в работе [34], полагалось  $Ra_{cr} = 779.273$ .

Из таблицы 9 видно, что данные расчетов с числом гармоник [65x65] и [129x129] близки к результатам [34] и что при учете [33x33] гармоник точность теряется при  $r \sim 10^3$ .

Таблица 9: Сравнение с результатом [34].

$r = Ra/Ra_{cr}$	[33x33]	[65x65]	[129x129]	[34]	Откл., %
50	7.85	7.79	7.76	7.77	0.13
100	9.89	9.81	9.75	9.73	0.21
200	12.39	12.31	12.22	12.16	0.49
300	14.08	14.06	13.94	13.84	0.72
500	16.37	16.59	16.44	16.29	0.92
1000	19.88	20.76	20.55	20.42	0.64
2000	23.40	25.89	25.74	25.31	1.70

В тестовом расчете при  $r = 2000$  с учетом [257x257] гармоник было получено  $Nu = 25.46$ , что на 1.1% меньше значения, вычисленного с учетом [129x129] гармоник и на 0.6% больше - полученного в [34].

#### 2.4.1.2. О сравнении мгновенных и средних величин

Основополагающей чертой хаоса является существенная зависимость решения от начальных данных [68]. В работе [68] показано, что при  $r = 10^3$  и  $Pr = 2$  две первоначально близкие траектории экспоненциально разбегаются с ростом времени.

Аналогичная ситуация наблюдалась также при моделировании турбулентности с использованием подхода LES [101]. Показано, что мгновенные поля получаются различными при использовании в расчете разного числа процессоров (даже в явной схеме по времени), изменении начальных условий (даже в пределах машинной точности), изменении точности вычислений (Real(4),(8) и (16)). При этом, увеличение точности вычислений не приводит к подавлению разбегания траекторий, а только обеспечивает некоторую задержку начальной стадии этого процесса.

В то же время, средние характеристики рассчитанных полей практически совпадали.

В настоящей работе, при  $r = 6 \cdot 10^3$ ,  $Pr = 10$  и  $\alpha = 1$  с учетом [129x33] гармоник и точностью вычислений Real(8) были проведены два расчета на ПК

Intel Pentium 4 2800 мгц (P1) и AMD Athlon XP 2100+ 1654 мгц (P2). Параметры расчетов, программы, трансляторы (Intel Fortran 10.0), начальные и граничные условия полностью совпадали. Другими словами, в этих двух расчетах отличались только процессоры компьютеров, на которых проводились вычисления.

В качестве начальных условий задавалась одна гармоника с отличной от нуля амплитудой:  $\omega_{1,2} = 0.001$ , значения амплитуд всех остальных гармоник для температуры и завихренности были нулевыми.

На рис. 10 как функции времени приведены: число Нуссельта (расчет P1, кривая 1 и P2 - 2) и  $\log(S)$  (3).

Здесь мера отклонения решений  $S(t)$  определяется как

$$S(t) = \left[ \frac{1}{(N+1)(M+1)} \sum_{k,m} (\omega_1(t)_{km} - \omega_2(t)_{km})^2 \right]^{0.5},$$

здесь  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$  - мгновенные поля завихренности, полученные в расчетах P1 и P2.

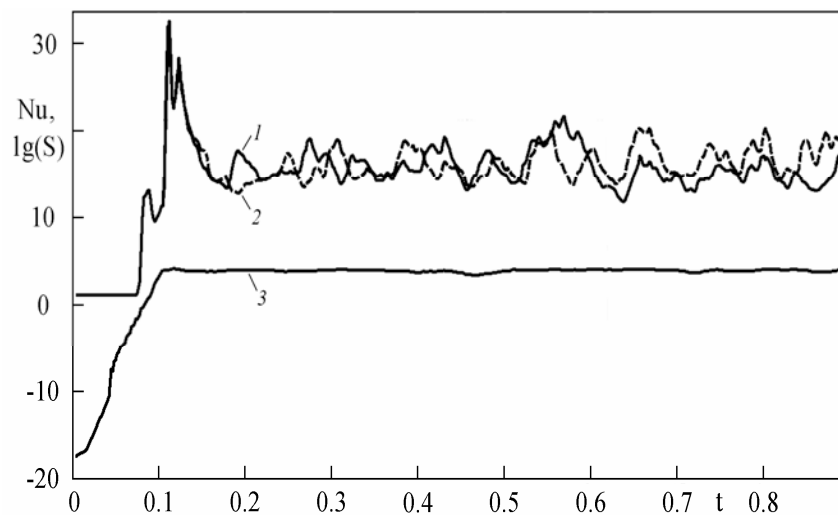


Рис. 10. Число Нуссельта и мера отклонения  $S$ .

Из рис. 10 видно, что существенное отличие значений чисел Нуссельта наблюдается при  $t \geq 0.18$  и что после увеличения своего значения примерно на 20 порядков величина  $S$  стабилизируется при  $t \geq 0.1$  на значении примерно равном 7240.

Для сравнения укажем, что среднеквадратичное значение завихренности, определенное по значению энстрофии как  $\omega_{rms} = \sqrt{2\alpha En / \pi}$ , равнялось при этом 6864 и, таким образом,  $\omega_{rms} \sim S$ .

Значения средних величин, полученных в расчетах P1 и P2 практически совпадали, относительные отклонения составили: 0.32, 0.13, 0.35, 0.61, 0, 0.12, 0.07% - для Nu, Ek, En,  $K_{me}$ ,  $V_{rms}$ ,  $Q_{rms}$  и  $\psi_{rms}$ , соответственно. При этом профили средней температуры, среднеквадратичных пульсаций температуры и вертикальной скорости были близки, а все пространственные спектры температуры и скорости совпадали с графической точностью.

Были проведены также два аналогичных расчета с точностью вычислений Real(16). Качественно наблюдалась аналогичная ситуация с существенным различием мгновенных значений чисел Нуссельта при  $t \geq 1.3$ .

Таким образом, основной вывод текущего раздела вполне созвучен выводу работы [101]. А именно, при анализе результатов расчетов сложных режимов конвекции имеет смысл, в основном, сопоставление относительно устойчивых средних (интегральных) характеристик. А анализ мгновенных величин можно проводить только при достаточно высокой точности вычислений и на достаточно малом интервале времени, например, при вычислении с точностью Real(16) в рассмотренном примере на интервале  $0 \leq t \leq 1$ .

#### 2.4.1.3 Проверка сходимости

В предыдущем разделе было показано, что хотя мгновенные поля можно сравнивать только на достаточно малом интервале времени, интегральные характеристики вычисляются при этом относительно устойчиво. Для проверки сходимости значений полученных интегральных характеристик, при  $r = 6 \cdot 10^3$ ,  $Pr = 10$  и  $\alpha = 1$  были проведены расчеты с учетом [129x33], [257x65], [513x129], [1025x257] и [2049x513] гармоник, в которых вычислялись и сравнивались средние величины: число Нуссельта Nu, кинетическая энергия Ek, энстрофия En, среднее волновое число в горизонтальном направлении  $K_{me}$ ,

среднеквадратичные значения функции тока  $\psi_{\text{rms}}$  и температуры  $Q_{\text{rms}}$ , формулы для вычисления которых были уже приведены выше.

Полученные результаты приведены в таблице 10. Для каждой средней величины видна сходимость, но  $K_{\text{me}}$  сходится немонотонно. В этой серии расчетов число Рейнольдса  $Re \approx 131$ .

Таблица 10: Средние величины при  $r = 6 \cdot 10^3$ .

Число гарм.	$Nu/10$	$Ek/10^6$	$En/10^7$	$K_{\text{me}}$	$\psi_{\text{rms}}/10^2$	$Q_{\text{rms}} \cdot 10$
129x33	1.580	2.271	7.430	1.309	2.790	2.459
257x65	1.654	2.464	8.120	1.247	2.960	2.466
513x129	1.661	2.639	8.746	1.224	3.090	2.490
1025x257	1.687	2.684	9.125	1.252	3.099	2.506
2049x513	1.710	2.717	9.320	1.266	3.127	2.525

На рис. 11 приведен профиль средней температуры, рассчитанный с числом гармоник [513x129] (1), [257x65] (2) и [129x33] (3), откуда видно, что результаты расчетов с разрешимостью [257x65] и [513x129] практически совпадают.

При этом профили пульсаций температуры и вертикальной скорости были близки, а наиболее плохая сходимость наблюдалась для пульсаций горизонтальной скорости.

На рис. 12 приведен профиль пульсаций горизонтальной скорости, обозначения как на рис. 11. Видна сходимость и близость результатов расчетов с разрешимостью [257x65] и [513x129].

В работе большое внимание уделяется исследованию одномерных энергетических спектров пульсаций температуры и скорости. Такие спектры являются очень консервативной величиной, со слабой зависимостью от пространственной разрешимости [58].

Для иллюстрации на рис. 13 приведен одномерный ( $x$  - направление) спектр пульсаций скорости, рассчитанный с числом гармоник [1025x257] (1), [513x129] (2), [257x65] (3) и [129x33] (4). Все кривые практически совпадают вплоть до больших волновых чисел, искажения на краю спектра (при  $\alpha k \approx \pi/H_1$ ) обусловлены численными эффектами [67].

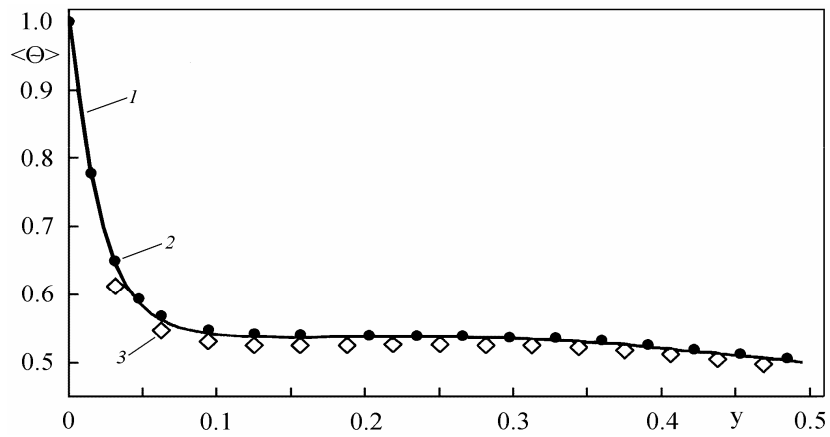


Рис. 11. Профиль средней температуры при различной пространственной разрешимости.

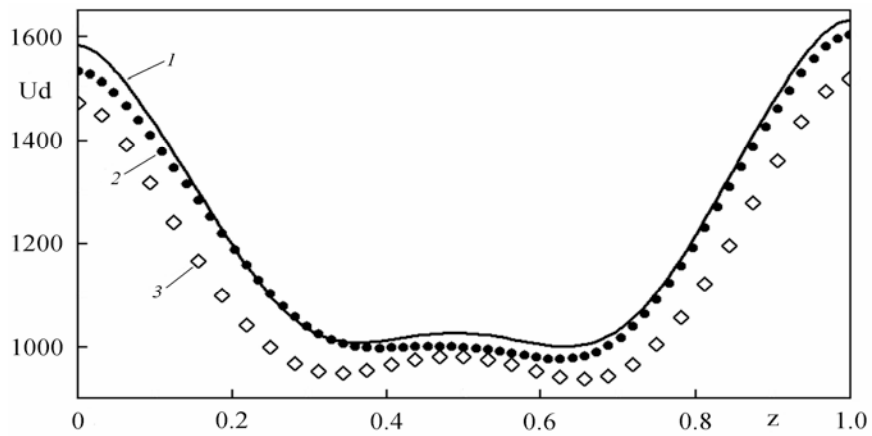


Рис. 12. Профиль пульсаций горизонтальной скорости при различной пространственной разрешимости.

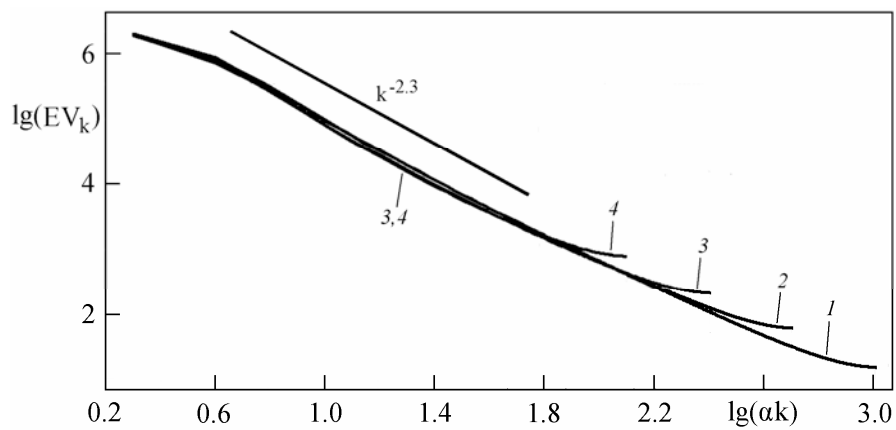


Рис. 13. Спектр пульсаций скорости при различной пространственной разрешимости.

Быстрая сходимость с увеличением числа гармоник наблюдалась также и для одномерных энергетических спектров пульсаций температуры.

Сходимость временных энергетических спектров трудно оценить количественно из-за их сложного осцилляторного поведения, но представленные на рис. 14 временные спектры числа  $Nu$ , вычисленные с числом гармоник [1025x257] (1) и [513x129] (2), представляются качественно подобными, в частности, совпадает положение максимумов  $f = f_m = 43$  и законы затухания на высоких частотах. Сдвиг спектров по вертикали здесь искусственный, частота  $f$  измеряется в единицах  $v/D^2$ , где  $D$  - толщина слоя.

Для контроля достаточной малости шагов по времени и пространству, при проведении вычислений контролировалось выполнение интегральных соотношений, например, полученного умножением третьего уравнения системы (1.5) для температуры на  $Q$  и интегрированием по области

$$G_{2t} = \{0 \leq x \leq \pi / \alpha, 0 \leq z \leq 1, t^n \leq t \leq t^{n+1}\}$$

с учетом граничных условий

$$\frac{\frac{1}{2} \int_{G_2} (Q^n)^2 dv + \frac{1}{Pr} \int_{G_{2t}} Q_x \psi dv dt}{\frac{1}{2} \int_{G_2} (Q^{n+1})^2 dv + \frac{1}{Pr} \int_{G_{2t}} (Q_x^2 + Q_z^2) dv dt} = 1, \quad (5)$$

здесь, как и раньше  $G_2 = \{0 \leq x \leq \pi / \alpha, 0 \leq z \leq 1\}$ , а  $dv = dx dz$ .

Аналогично, умножением первого уравнения системы (1.5) на  $\psi$  и  $\omega$ , получаем интегральные соотношения для энергии и энтропии, соответственно. Такие соотношения для температуры, кинетической энергии и энтропии являются локальными, так как при их выводе интегрирование по времени произведено в пределах одного шага по времени. Для упрощения анализа сходимости локальных интегральных соотношений, левая часть соотношений (5) усредняется по времени во всем промежутке его изменения.



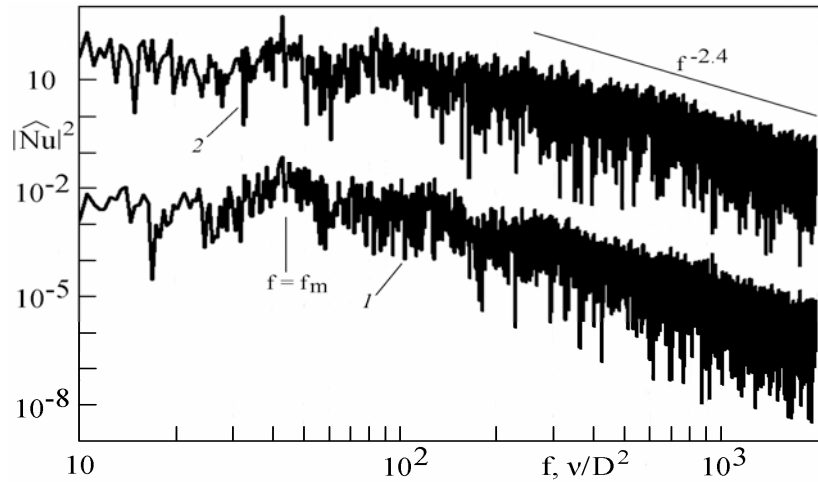


Рис. 14. Временной спектр зависимости числа Nu от времени.

Таблица 11 показывает хорошую точность выполнения локальных интегральных соотношений (ИС), видна сходимость к 1 при увеличении пространственной разрешимости. При этом лучше всех выполняется интегральное соотношение для температуры и хуже всех - для энтрофии.

Таблица 11: Локальные ИС

Разрешимость	Энергия	Энтрофия	Температура
129x33	0.9946	0.9931	0.9971
257x65	0.9976	0.9967	0.9984
513x129	0.9986	0.9977	0.9990
1025x257	0.9989	0.9982	1.0002

Наряду с локальными интегральными соотношениями (5), рассматриваются также глобальные интегральными соотношения, полученные интегрированием по времени во всем интервале его изменения.

С учетом большого количества шагов по времени ( $10^6$  в расчете с учетом [513x129] гармоник) таблица 12 показывает удовлетворительную точность выполнения глобальных интегральных соотношений, видна сходимость к 1 при увеличении разрешимости. При этом лучше всех выполняется интегральное соотношение для температуры и хуже всех - для кинетической энергии.

Таблица 12: Глобальные ИС

Разрешимость	Энергия	Энстрофия	Температура
129x33	0.4660	0.6298	0.4913
257x65	0.5648	0.7246	0.5354
513x129	0.7079	0.8085	0.6760
1025x257	0.7884	0.8623	1.0697

Таким образом, приведенные в данном разделе данные показывают сходимость вычисленных интегральных характеристик при увеличении пространственной разрешимости. Здесь надо иметь в виду (см. раздел 2.4.1.6), что при расчете стохастической конвекции с учетом чрезмерно большого числа гармоник может наблюдаться расходимость, связанная с погрешностью определения поля завихренности. И в первую очередь такая расходимость скажется на энстрофии, а в последнюю – на пространственных и временных спектрах температуры и скорости.

#### 2.4.1.4 Учет большего числа цифр

Чтобы выяснить, насколько сильно значения средних величин зависят от числа учитываемых в расчете цифр, были проведены два тестовых расчета при  $g = 6 \cdot 10^3$ ,  $Pr = 10$  и  $\alpha = 1$  с четырехкратной (Real (16)) и двойной (Real (8)) точностью.

Переход к четырехкратной точности существенно увеличивает время счета (примерно в 30 раз на ПК Pentium 4 2800 мгц), поэтому был проведен только один тестовый расчет с учетом [129x33] гармоник.

Значения полученных средних величин приведены в таблице 13, в последнем столбце показаны относительные отклонения в %.

Из таблицы 13 видно, что наиболее сильно отличается значение  $K_{me}$  - на 2%, отклонения  $E_k$ ,  $E_p$  и  $\psi_{rms}$  не превышают 1%, а  $Nu$ ,  $V_{rms}$  и  $Q_{rms}$  -

практически совпадают. Среднее волновое число  $K_{me}$  во времени совершает колебания почти с семикратным размахом (график качественно подобен изображенному на рис. 8 при  $r = 3 \cdot 10^3$ ) и, поэтому, относительное отклонение полученных значений среднего волнового числа на 2% не может считаться существенным.

Таблица 13: Средние величины при  $r = 6 \cdot 10^3$ .

Средн. величина	Real (8)	Real (16)	Отклонение, %
$Nu/10$	1.580	1.584	0.25
$E_k/10^6$	2.271	2.251	0.88
$E_n/10^7$	7.430	7.471	0.55
$K_{me}$	1.309	1.335	2.01
$V_{rms}/10^3$	1.187	1.186	0.06
$\psi_{rms}/10^2$	2.790	2.761	1.01
$Q_{rms} \cdot 10$	2.459	2.462	0.09

Таким образом, повышение числа учитываемых в расчетах значащих цифр при умеренном числе гармоник не приводит к сколько-нибудь существенному изменению значений средних величин и в дальнейшем все расчеты выполнялись с двойной точностью.

#### 2.4.1.5 Сравнение с результатом расчета псевдоспектральным методом

В данном разделе проведем сравнение результатов расчетов, полученных псевдоспектральным (модифицированным методом Галеркина) и предлагаемым спектрально-разностным методами.

В работах [30,31] проведено моделирование псевдоспектральным методом стохастического режима двумерной двухдиффузионной конвекции при небольшой надкритичности и исследована структура стохастического аттрактора, а в [102] приведено сравнение решения [30] с рассчитанным предлагаемым методом, причем при расчете предлагаемым методом вычислялась относительная невязка выполнения всех уравнений двухдиффузионной конвекции.

На рис. 15 изображены проекции траекторий в фазовом пространстве на плоскость первых гармоник функции тока и температуры при  $Pr = 1$  и  $\alpha = 2.221$ . Здесь  $R_T = R_S = 1.5 \cdot 10^4$  - числа Рейля, вычисленные по температуре и солёности, а  $k_s/k_t = 10^{-0.5}$  - отношение коэффициентов диффузии солёности и тепла.

Изображенные на рис. 15 проекции траекторий представляются совпадающими с графической точностью, меньшая плотность линий на рис. 15б сделана искусственно семикратным уменьшением времени счета для увеличения информативности изображения.

В таблице 14 приведен результат вычисления относительной невязки  $Res$ :

$$S_1 = \|\omega_t + \psi_z \omega_x - \psi_x \omega_z - \Delta \omega - R_T Q_x + R_S S_x\|^2,$$

$$S_2 = \|Q_t + \psi_z Q_x - \psi_x Q_z - \Delta Q + \psi_x\|^2,$$

$$S_3 = \|S_t + \psi_z S_x - \psi_x S_z - \frac{k_s}{k_t} \Delta S + \psi_x\|^2,$$

$$Sn = \|R_T Q_x\|^2, \quad Res = (S_1 + S_2 + S_3) / Sn, \quad \|f\| = \left( \int_{G_2} f^2 dx dz \right)^{0.5}.$$

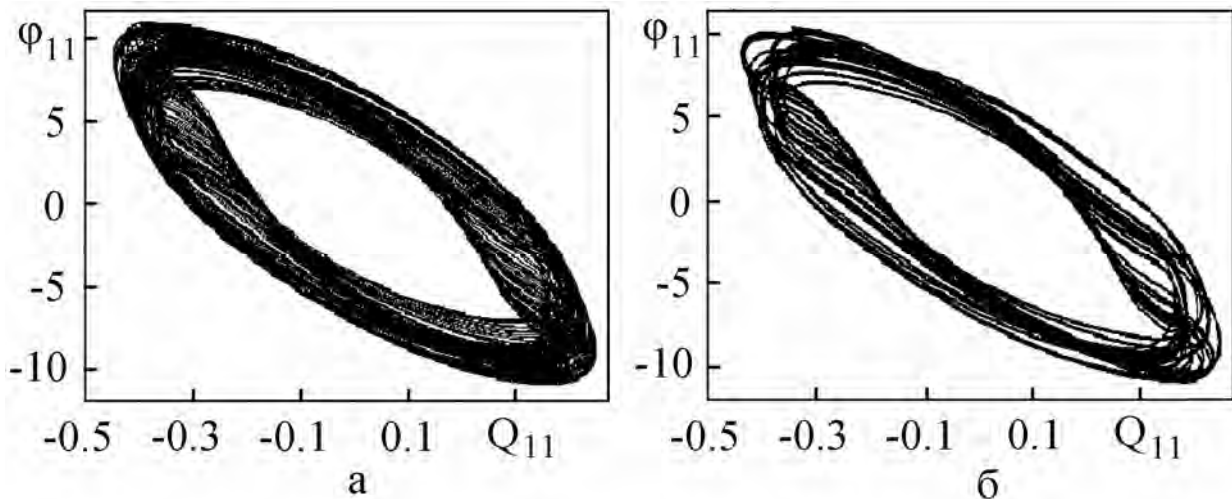


Рис. 15. Проекция траекторий в фазовом пространстве на плоскость амплитуд первых гармоник функции тока и температуры, а) [30], б) расчет предлагаемым методом с учетом [257x129] гармоник.

Таблица 14: Величина невязки.

Число гармоник	Шаг по времени, $\tau$	Res
129x65	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$
257x129	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-3}$

Данные таблицы 14 показывают малость относительной невязки Res выполнения уравнений для вихря, температуры и солености в данных расчетах. Некоторое увеличение значения Res при увеличении числа учитываемых гармоник обусловлено использованием конечно-разностной схемы на втором этапе расщепления.

Для более детального сопоставления результатов, автором были проведены дополнительные расчеты псевдоспектральным (модифицированным методом Галеркина) и спектрально-разностным методами.

При расчете псевдоспектральным методом с учетом [33x33] гармоник рассчитанное течение было периодическим, а при учете [65x65] гармоник - стохастическим (рис. 15 и 16 ниже).

Аналогичная смена режима течения наблюдалась и при расчете предлагаемым спектрально-разностным методом при учете [65x65] и [129x129] гармоник, соответственно.

Сопоставлялись результаты расчета псевдоспектральным методом с учетом [65x65] гармоник и спектрально-разностным - [129x129]. Значения всех параметров как на рис. 15.

В таблице 15 приведены полученные в этих расчетах средние величины, а в последнем столбце – их относительные отклонения в %.

Здесь  $N_t$  и  $N_s$  - числа Нуссельта, вычисленные по температуре и солености, а  $E_k$ ,  $E_n$ ,  $Re$ ,  $K_{me}$ ,  $\psi_{rms}$  и  $Q_{rms}$  - кинетическая энергия, энстрофия, число Рейнольдса, среднее волновое число в горизонтальном направлении, среднеквадратичные значения функции тока и температуры.

Таблица 15: Сравнение средних величин.

Величина	Псевдоспектр.	Спектр.-разн.	Откл., %
Nt	1.909	1.939	1.57
Ns	2.865	2.914	1.70
Ek	126.0	129.2	2.55
En	3388	3512	3.66
Re	12.73	12.93	1.61
$K_{me}$	3.755	3.786	0.82
$\Psi_{rms}$	2.811	2.872	2.18
$Q_{me}$	0.172	0.174	1.12

Таблица 15 показывает хорошее согласование значений средних величин, рассчитанных псевдоспектральным и спектрально-разностным методами, среднее отклонение составляет 1.9%, а максимальное - 3.66% для энстрофии.

Большой интерес представляет сравнение временных спектров, рассчитанных различными методами. На рис. 16 представлен временной спектр числа Нуссельта Nt, рассчитанный псевдоспектральным (кривая 1) и спектрально-разностным (2) методами. Сдвиг спектра (1) по вертикали здесь искусственный, а частота  $f$  измеряется в единицах  $\nu/D^2$ , где  $D$  - толщина слоя.

Оба спектра сложные, с характерным для стохастических процессов заполнением длинноволнового диапазона [103] и они представляются качественно близкими, в частности, примерно совпадают положения максимума  $f = f_m = 46$  (доминирующая частота) и закон затухания на высоких частотах.

Для дальнейшего сравнения двумя разными численными методами были выполнены расчеты конвективных течений при надкритичности  $\tau = 50, 100, 950, 2000$ ,  $\alpha = 1$  и  $Pr = 10$ .

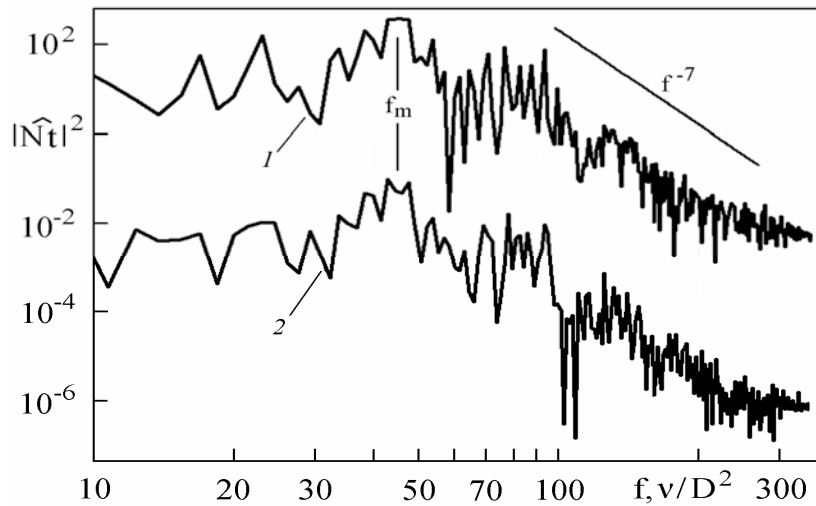


Рис. 16. Временные спектры числа  $Nt$ , рассчитанные псевдоспектральным (кривая 1) и спектрально-разностным (2) методами.

При расчете псевдоспектральным методом учитывалось [129x33] гармоник, а спектрально-разностным - [129x33] при  $r = 50, 100$  и [129x33], [257x65] при  $r = 950$  и  $2000$ .

При надкритичности  $r = 950$  и  $2000$  по результатам расчетов с учетом [129x33] и [257x65] гармоник (спектрально-разностный метод) квадратичной экстраполяцией вычислялись 'точные' значения средних величин.

Формула квадратичной экстраполяции для числа Нуссельта принимает вид:  $Nu_t = 4Nu_2 / 3 - Nu_1 / 3$ , где  $Nu_t$ ,  $Nu_1$  и  $Nu_2$  - 'точное' значение числа Нуссельта и его значения, вычисленные с учетом [129x33] и [257x65] гармоник.

При  $r = 50, 100$  наблюдался периодический режим конвекции, а при  $r = 950, 2000$  - стохастический (рис. 19 ниже).

Псевдоспектральным и спектрально-разностным методами вычислялись и сравнивались средние величины:  $Nu$  - число Нуссельта,  $E_k$  - кинетическая энергия,  $E_p$  - энтрофия,  $K_{me}$  - среднее волновое число в горизонтальном направлении,  $\psi_{rms}$  и  $Q_{rms}$  - среднеквадратичные значения функции тока и температуры.

При  $r = 50$  и  $100$  расчеты псевдоспектральным и спектрально-разностным методами проводились с учетом [129x33] гармоник и сравнивались значения полученных средних величин.

При  $r = 50$  среднее арифметическое относительное отклонение средних величин составило 1.9%, а максимальное - 4.4% для энстрофии. А при  $r = 100$  среднее и максимальное относительные отклонения равнялись 2.2 и 5.6%, соответственно.

Значения вычисленных средних величин при  $r = 2000$  приведены в таблице 16, в последнем столбце в % показаны относительные отклонения 'точных' значений от полученных псевдоспектральным методом.

Из последнего столбца таблицы 16 следует, что при  $r = 2000$  значения средних величин, вычисленные псевдоспектральным и спектрально-разностным методами хорошо согласуются, среднее отклонение равно 2.4, а максимальное - 6.0% для энстрофии. А при  $r = 950$  среднее и максимальное относительные отклонения равнялись 0.9 и 2.2%, соответственно.

Таблица 16: Сравнение средних величин при  $r = 2000$ .

Средняя величина	Псевдосп. метод	Сп.-разн., [129x33]	Сп.-разн., [257x65]	'Точное' значение	Откл., в %
Nu	12.25	12.00	12.17	12.22	0.23
$E_k/10^5$	6.330	5.319	5.828	6.004	5.15
$E_n/10^7$	2.262	1.889	2.065	2.126	6.04
$K_{me}$	1.282	1.355	1.299	1.279	0.21
$V_{rms}$	627.2	575.4	601.8	610.9	2.59
$\psi_{rms}$	134.8	122.5	129.7	132.2	1.89
$Q_{rms} \cdot 10$	2.477	2.394	2.442	2.458	0.74

При  $r = 2000$  профили средней температуры, среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости практически совпадали в расчетах псевдоспектральным и спектрально-разностным методами, а профили среднеквадратичных пульсаций температуры были близки. Наибольшее отклонение наблюдалось для профиля среднеквадратичных пульсаций горизонтальной скорости.



На рис. 17 приведен профиль среднеквадратичных пульсаций горизонтальной скорости при  $r = 2000$ , где кривая 1 - результат расчета псевдоспектральным методом, кривые 2 и 3 - расчет спектрально-разностным методом с учетом [257x65] и [129x33] гармоник, соответственно, а 4 – ‘точное’ решение.

Из рис. 17 видно, что результаты расчетов псевдоспектральным ([129x33] гармоник), спектрально-разностным ([257x65]) методами и ‘точное’ решение близки. Это и данные таблицы 16 позволяют сделать вывод о том, что точность псевдоспектрального метода выше, чем спектрально-разностного, но, к сожалению, невысокая эффективность псевдоспектрального метода (его использование увеличивает время счета примерно в пятьдесят раз по сравнению со спектрально-разностным методом при одинаковом числе гармоник на ПК Pentium 4 2800 мгц) не позволяет использовать его для массовых расчетов.

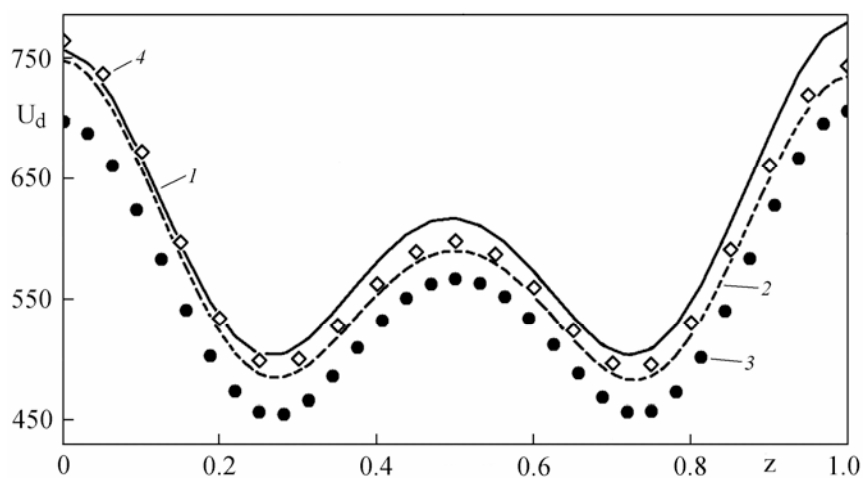


Рис. 17. Профиль среднеквадратичных пульсаций горизонтальной скорости.

В настоящей работе большое внимание уделяется анализу пространственных спектров пульсаций температуры и скорости, что обуславливает интерес к сравнению спектров, полученных расчетами с использованием различных методов.

Одномерные пространственные спектры пульсаций температуры и скорости, соответствующие горизонтальному и вертикальному направлениям практически совпадают в расчетах с использованием [129x33] гармоник. Для примера на рис. 18 приведен энергетический спектр скорости  $x$  - направлении, где кривая 1 соответствует спектральной кривой, полученной псевдоспектральным методом, а 2 - спектрально-разностным. Вертикальной линией показана граница интервала аппроксимации [67].

Из рис. 18 видно, что спектральные кривые, полученные расчетами с использованием различных численных методов практически совпадают и на продолжительном интервале изменения волнового числа (примерно на порядок) следуют одному и тому же степенному закону  $k^{-2.3}$ , близкому к стратификационному закону Болджиано-Обухова  $k^{-11/5}$  для скорости [74].

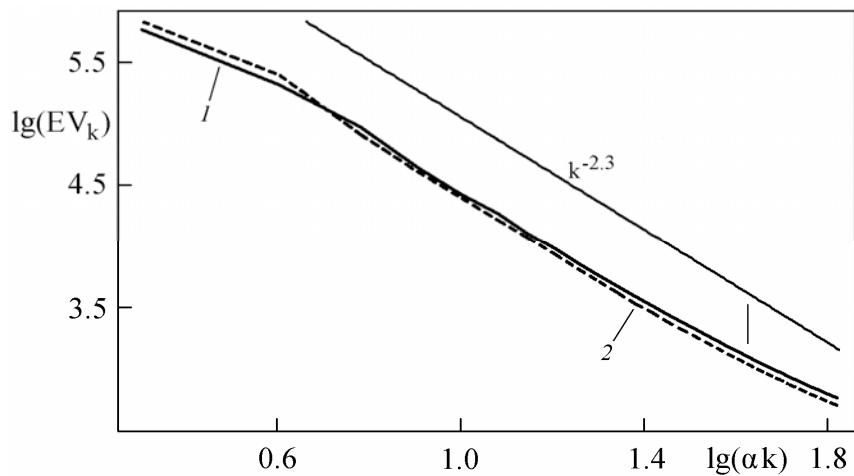


Рис. 18. Спектр скорости в  $x$  - направлении.

На рис. 19 приведен временной спектр числа  $Nu$  при  $r = 2000$ , полученный с учетом [129x33] гармоник. На рис. 19 кривой 1 обозначен результат расчета псевдоспектральным методом, а 2 - спектрально-разностным, сдвиг спектра (1) по вертикали искусственный, а частота  $f$  измеряется в единицах  $\nu/D^2$ , где  $D$  - толщина слоя.

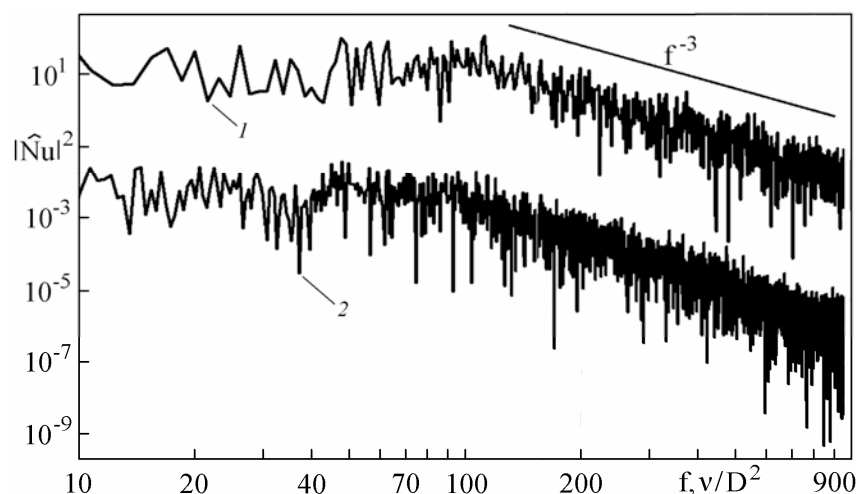


Рис. 19. Временной спектр числа Nu.

Оба спектра, с характерным для стохастических процессов заполнением длинноволнового участка [103], они достаточно сложные и представляются качественно похожими, так как оба спектра приближенно постоянные до  $f \approx 100$  со спаданием по закону  $f^{-3}$  в области высоких частот.

#### 2.4.1.6 Определение необходимой пространственной разрешимости

Для определения необходимой пространственной разрешимости была проведена серия методических расчетов при надкритичности до  $r = 3.4 \cdot 10^4$  с учетом различного числа гармоник при  $Pr = 10$  и  $\alpha = 1$ .

Анализ результатов методических расчетов показал, что при исследовании интегральных характеристик 2d, free конвекции достаточно учитывать [129x33] гармоник при  $r \leq 6 \cdot 10^3$  и [257x65] - при  $6 \cdot 10^3 < r \leq 3.4 \cdot 10^4$ .

В таблице 17 приведены значения средних величин, полученных в двух тестовых расчетах при  $r = 3.4 \cdot 10^4$  с учетом [257x65] и [513x29] гармоник. В последнем столбце таблице представлено относительное отклонение в %.

Из таблицы 17 видно, что наиболее сильно различаются значения кинетической энергии и энтропии (10.6 и 9.7%, соответственно), при этом значения среднего волнового числа оказываются близкими, а значения

среднеквадратичной температуры - практически совпадают. Из табл. 10 следует, что аналогичные отклонения для кинетической энергии и энстрофии при  $r = 6 \cdot 10^3$  составили 7.1 и 7.7%, соответственно.

Таблица 17: Средние величины при  $r = 3.4 \cdot 10^4$ .

Средн. величина	[257x65]	[513x129]	Откл., %
$Nu/10$	2.877	3.054	5.8
$Ek/10^7$	2.237	2.502	10.6
$En/10^8$	7.195	7.966	9.7
$K_{me}$	1.294	1.272	1.7
$V_{rms}/10^3$	3.752	3.963	5.3
$\psi_{rms}/10^2$	9.092	9.645	5.7
$Q_{rms} \cdot 10$	2.559	2.560	0.0

На рис. 20 представлена кинетическая энергия  $E_k$  как функции надкритичности  $r$ , где кривая 1 - расчет спектрально-разностным методом с выбранной пространственной разрешимостью в [129x33] гармоник при  $r \leq 6 \cdot 10^3$  и [257x65] - при  $6 \cdot 10^3 < r \leq 3.4 \cdot 10^4$ , 2 и 3 - контрольные расчеты с учетом [257x65] и [513x129] гармоник, соответственно, а 4 - расчет псевдо-спектральным методом с учетом [129x33] гармоник. Подчеркнем, что при  $r = 6 \cdot 10^3$  на рис. 20 представлены данные двух расчетов с различным числом учитываемых гармоник - [129x33] (кривая 1) и [257x65] (2).

Сравнение данных расчетов с числом гармоник [257x65] (кривая 1) и [513x129] (3) при  $r \approx 3.4 \cdot 10^4$  показывает, что отмеченная погрешность в определении значения кинетической энергии не представляется существенной и выбранной пространственной разрешимости в [257x65] гармоник при  $r \approx 3.4 \cdot 10^4$  достаточно для исследования зависимости кинетической энергии от надкритичности. Качественно аналогичная ситуация наблюдается для

энстрофии, среднеквадратичной скорости, числа Рейнольдса и среднеквадратичного значения функции тока.

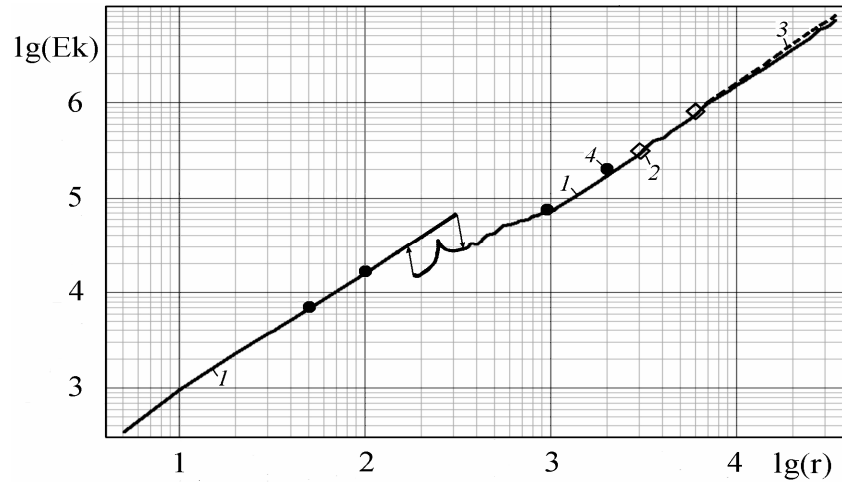


Рис. 20. Кинетическая энергия как функция надкритичности.

Для более точного определения степенных законов зависимости интегральных величин от надкритичности, при  $r \geq 1.4 \cdot 10^4$  использовались значения, полученные в расчетах с учетом [513x129] гармоник.

Чтобы убедиться в достаточной разрешимости пространственных масштабов, сравним масштаб диссипации (внутренний масштаб) с пространственным масштабом, разрешаемым в 2d,free расчетах.

Число Рейнольдса в конвективных течениях относительно невелико, поэтому разрешение диссипативного масштаба здесь вполне реально, хотя и довольно затратно, но, к счастью, в аккуратном разрешении диссипативного масштаба особой необходимости и не возникает.

В самом деле, в работе [1] отмечено и это уже стало стандартом [5], что для получения хорошей статистики интегральных величин диссипативный масштаб может быть разрешен весьма грубо, при этом пространственное разрешение численного метода должно быть примерно равно масштабу диссипации.

Масштаб диссипации кинетической энергии может быть оценен как [1]:

$$\lambda = \frac{\text{Pr}^{1/2}}{(\text{Ra}(\text{Nu} - 1))^{1/4}} \approx 0.531 r^{-0.315},$$

в 2d,free расчетах при  $\alpha = 1$  и  $Pr = 10$ .

Определим разрешаемый в расчетах масштаб как среднее арифметическое шагов по пространству –  $H_{re} = (H_1 + H_2)/2$ .

На рис. 21 изображены как функции надкритичности диссипативный масштаб  $\lambda$  (линия 1), разрешаемый в 2d,free расчетах масштаб  $H_{re}$  (2) и масштаб, разрешаемый в тестовых расчетах с учетом [513x129] гармоник (3). Из рис. 21 видно, что во всем рассматриваемом интервале надкритичности  $H_{re} < \lambda$ .

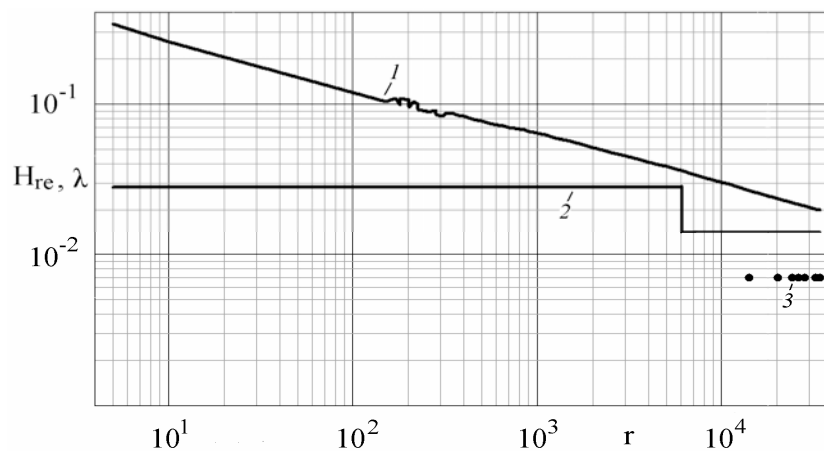


Рис. 21. Диссипативный и разрешаемый масштабы.

И в заключение данного раздела несколько слов о проблеме, часто возникающей при решении нелинейных задач при чрезмерно большом числе учитываемых гармоник.

В самом деле, представление решения задачи о 2d,free конвекции в виде тригонометрического ряда (1.6) позволяет вычислить распределение кинетической энергии  $E_{kin}(\alpha k)$  и скорости диссипации  $Dis(\alpha k)$  (диссипации в единицу времени) по волновому числу в горизонтальном  $x$ -направлении:

$$E_{kin}(\alpha k) = \frac{\pi \rho_k}{8\alpha} \sum_{m=1}^{M-1} (\alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2) \psi_{km}^2 \quad u$$

$$Dis(\alpha k) = \frac{\pi \rho_k}{4\alpha} \sum_{m=1}^{M-1} (\alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2)^2 \psi_{km}^2.$$

Здесь уместно также привести эквивалентное представление скорости диссипации через завихренность:

$$Dis(\alpha k) = \frac{\pi \rho_k}{4\alpha} \sum_{m=1}^{M-1} \omega_{km}^2.$$

На рис. 22 при  $r = 6 \cdot 10^3$  и  $\alpha = 1$  распределения  $E_{kin}$  и  $Dis$  изображены как функции волнового числа  $\alpha k$ , при этом линия 1 – результат расчета с учетом [129x33] гармоник, 2 - [257x65], 3 - [513x129] и 4 - [1025x257]. Линиями 5, 6, 7 и 8 для расчета с учетом [129x33] гармоник на рис. 22 обозначены границы интервалов энергии, диссипации (95% кинетической энергии и диссипации набирается на меньших волновых числах), аппроксимации и волновое число масштаба диссипации  $k_d = \pi/\lambda$ , соответственно.

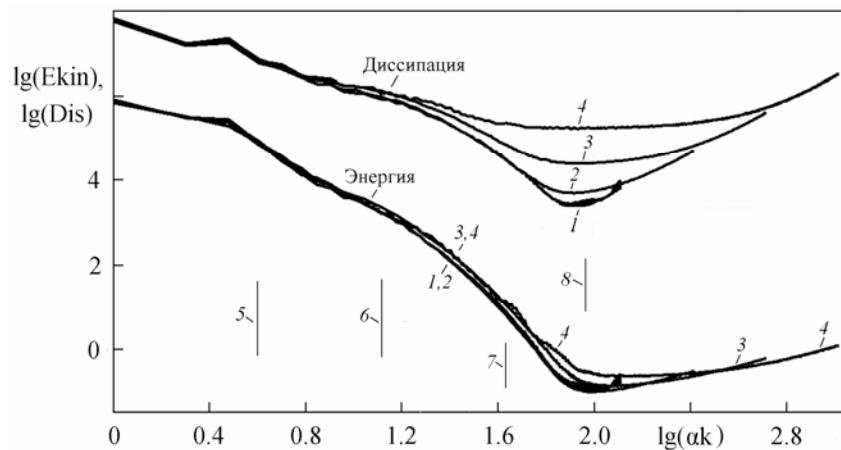


Рис. 22. Распределение кинетической энергии и скорости диссипации по волновым числам.

Анализ рис. 22 приводит к следующим выводам:

1. Распределение кинетической энергии в основной своей части практически не зависит от учитываемого числа гармоник, причем, даже при учете [129x33] гармоник основная часть кинетической энергии набирается на волновых числах, лежащих левее границы интервала аппроксимации.

2. Спадание  $E_{kin}$  и  $Dis$  по экспоненциальному закону в окрестности диссипативного волнового числа  $k_d$  не воспроизводится правильно не при какой разрешимости, но диссипация в расчетах отражается в полной мере, так

как основная ее часть набирается на волновых числах примерно на порядок меньше.

2. Диссипация при учете [513x129] гармоник искажается заметно в области волновых чисел  $k \sim k_d$  и существенно - при большем разрешении.

Таким, образом, представленные на рис. 22 данные показывают, что интерпретировать результаты расчетов с учетом большого числа гармоник (в работе [37] максимальная разрешимость составила [3076x1024]) надо с осторожностью. В самом деле, последовательное увеличение пространственной разрешимости сначала приводит к искажению характеристик, связанных с завихренностью (энстрофией), затем профилей температуры, скорости и их пульсаций и наконец – спектров температуры и скорости.

Искаженное вычисление завихренности в области высоких волновых чисел обусловлено плохой сходимостью тригонометрических рядов и часто наблюдается в нелинейных задачах при чрезмерном увеличении числа учитываемых гармоник. Эта проблема типична для псевдоспектрального метода (см. раздел 1.2.1). Но, подобный эффект наблюдался и в расчетах методом конечных разностей в физически близкой задаче о развитии неустойчивости Рэля-Тейлора, если суммарное число ячеек превосходило  $10^{10}$  [104]. Возможными причинами этого могут быть недостаточная точность вычислений, связанная с учетом недостаточно большого числа значащих цифр или уменьшение гладкости решения при возникновении стохастичности.

Исходя из сказанного, в серийных расчетах использовалось при  $\alpha = 1$  до [513x129] гармоник, при  $\alpha = 0.5$  – до [513x65],  $\alpha = 0.25$  – [1025x65] и при  $\alpha = 0.125$  – [2049x65].

## **2.4.2. Метод расчета 2d,rigid конвекции**

### 2.4.2.1. Сравнение с результатами других авторов

Для корректного сопоставления с результатами других авторов, в этом разделе вместо (1.7) рассматривается ‘симметричное’ представление решения (1.9), в



котором в зависимостях от горизонтальной координаты  $x$  синусы заменены на косинусы и наоборот.

Для проверки правильности работы вычислительного алгоритма в таблице 18 сравним рассчитанные предлагаемым спектрально-разностным методом числа Нуссельта двумерной стационарной валиковой конвекции с вычисленными в [24] методом конечных разностей при  $Pr = 6.8$  и  $\alpha = \pi$ . 'Точные' значения  $Nu$  получены автором настоящей работы при помощи квадратичной экстраполяции по значениям числа Нуссельта, вычисленным на сетках  $[21 \times 21]$  и  $[31 \times 31]$  в работе [24]. При расчете предлагаемым методом учитывалось  $[33 \times 33]$  гармоник-точек с шагом по времени  $5 \cdot 10^{-5} \leq \tau \leq 2 \cdot 10^{-4}$ .

В последнем столбце таблицы 18 приведены относительные отклонения значений числа  $Nu$ , вычисленных предлагаемым методом от их 'точных' в %.

Таблица 18: Сравнение с данными [24].

Ra	[24]	2d,rigid	Откл., %
$4 \cdot 10^3$	1.920	1.903	0.89
$6 \cdot 10^3$	2.237	2.219	0.79
$8 \cdot 10^3$	2.446	2.426	0.82
$1.2 \cdot 10^4$	2.718	2.710	0.29
$2.0 \cdot 10^4$	3.078	3.072	0.18

Таблица 18 показывает хорошее соответствие результатов, среднее отклонение равно 0.6, а максимальное - 0.9%.

Значения кинетической энергии при  $Ra = 3 \cdot 10^3$ ,  $5 \cdot 10^3$  и  $Pr = 7$ ,  $\alpha = 3.117$  с графической точностью совпадали со значениями [25].

Для иллюстрации возможности проводить расчеты при высокой надкритичности, сравним рассчитанные предлагаемым спектрально-разностным методом числа Нуссельта с вычисленными псевдоспектральным методом при  $Pr = 7$ ,  $\alpha = \pi$  [21]. Всего в расчетах при  $r \leq 6 \cdot 10^3$  в [21] использовано  $[97 \times 97]$  степеней свободы, при этом в решении (1.9) зависимость от вертикальной координаты представлена в виде линейной комбинации полиномов Чебышева. При расчете предлагаемым методом учитывалось  $[129 \times 129]$  гармоник-точек с шагом по времени  $10^{-6} \leq \tau \leq 7.5 \cdot 10^{-6}$ .

Таблица 19 показывает хорошее соответствие результатов, среднее отклонение равно 2.8, а максимальное - 3.9%.

На рис. 23 показаны результаты расчета спектрально-разностным методом (кривая 1) и данные [21] - 2. Видно, что расчеты предлагаемым спектрально-разностным методом подтверждают отмеченную в [21] смену степенного закона с  $1/3$  на  $2/7$  при  $r \approx 3 \cdot 10^3$  (в наших расчетах  $r \approx 2.78 \cdot 10^3$ ) в зависимости  $Nu$  от  $r$ .

Отметим также, что среднеквадратичное волновое число (его определение в следующем разделе) для конвекции в постановке [21], изменяется при увеличении надкритичности как  $K_{rms} \approx 3.55 \cdot r^{0.128}$ . Здесь важно, что среднеквадратичное волновое число в этой постановке растет при увеличении надкритичности и течение становится все более мелкомасштабным.

#### 2.4.2.2. Проверка сходимости

Методика вычисления числа  $Nu$ , кинетической энергии  $E_k$  и энтропии  $E_p$  описана выше, а значение среднеквадратичной скорости определялось по кинетической энергии  $V_{rms} = \sqrt{2\alpha E_k / \pi}$ . По формуле  $K_{rms}(t) = \sqrt{En(t) / Ek(t)}$

Таблица 19: Сравнение с данными [21].

$r = Ra/R_{cr}$	[21]	2d,rigid	Откл.,%
750	8.42	8.175	2.9
1125	9.47	9.283	2.0
1500	10.41	10.18	2.2
2250	11.75	11.48	2.3
3000	12.86	12.46	3.1
4500	14.40	13.89	3.6
6000	15.59	14.98	3.9

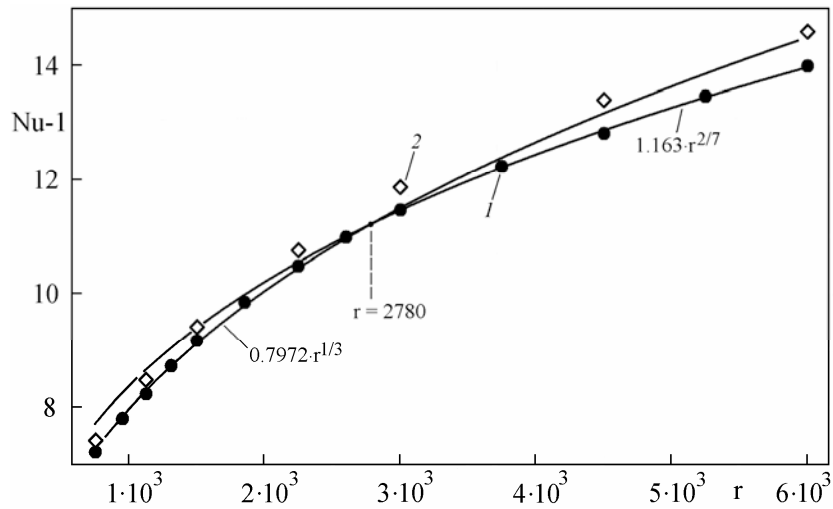


Рис. 23. Число Nu как функция надкритичности  $r$ .

вычислялось мгновенное среднеквадратичное значение волнового числа и, после осреднения по времени, анализировалось.

Были проведены четыре тестовых расчета при  $r = 500$ ,  $Pr = 10$  и  $\alpha = 1$  с пространственной разрешимостью  $[33 \times 17]$ ,  $[65 \times 33]$ ,  $[129 \times 65]$  и  $[257 \times 129]$ . Шаг по времени выбирался в пределах  $1.5 \cdot 10^{-5} \leq \tau \leq 5 \cdot 10^{-5}$ , а достаточная малость шага по времени контролировалась тестовыми расчетами с уменьшенными в два раза шагами по времени.

По данным, полученным с учетом  $[257 \times 129]$  и  $[129 \times 65]$  гармоник-точек квадратичной экстраполяцией вычислялись 'точные' значения средних величин. Значения средних величин приведены в таблице 20, видна сходимость при последовательном увеличении числа учитываемых гармоник-точек.

Из таблицы 20 видно, что точность вычисления  $E_k$ ,  $E_p$  и  $Nu$  с учетом  $[257 \times 129]$  гармоник-точек порядка 1.5%, а  $V_{rms}$  - 1%. Видно также, что значение  $K_{rms}$  в расчетах с учетом  $[129 \times 65]$  и  $[257 \times 129]$  гармоник-точек вычисляется с исчерпывающей точностью.

Анализировалась также сходимость значений среднеквадратичных пульсаций температуры  $Q_d$ , вертикальной  $V_d$  и горизонтальной  $U_d$  скорости при  $z = 0.5$ . Значения этих величин и их 'точные' значения приведены в таблице 21. Видна сходимость при увеличении числа учитываемых гармоник,

наименее выраженная для  $Q_d$ . Из таблицы 21 видно, что  $Q_d$  вычисляется с погрешностью порядка 2.4%, а  $V_d$  и  $U_d$  - порядка 1%.

Таблица 20: Среднеквадратичные величины при  $r = 500$ .

Разрешимость	$Nu$	$E_k/10^5$	$E_p/10^7$	$V_{rms}/10^2$	$K_{rms}$
33x17	8.785	2.438	2.561	3.940	10.20
65x33	8.480	2.097	1.855	3.654	9.411
129x65	8.973	2.227	1.896	3.766	9.231
257x129	9.388	2.348	1.997	3.866	9.228
‘Точное’	9.526	2.388	2.031	3.899	9.227

Профили средней температуры, полученные в расчетах с учетом [65x33], [129x65] и [257x129] гармоник-точек практически совпали, а профили среднеквадратичных пульсаций вертикальной и горизонтальной скорости были близки. Наибольшее отклонение наблюдалось для профиля среднеквадратичных пульсаций температуры.

Таблица 21: Среднеквадратичные пульсации.

Разрешимость	$Q_d \cdot 10^2$	$V_d$	$U_d$
33x17	8.383	407.5	326.5
65x33	6.640	349.9	284.6
129x65	7.432	355.4	292.5
257x129	8.010	364.5	287.1
‘Точное’	8.203	367.6	285.3

На рис. 24 изображен профиль среднеквадратичных пульсаций температуры, при этом кривая 1 соответствует расчету с учетом [33x17] гармоник-точек, а 2 - [65x33], 3 - [129x65], 4 - [257x129]. Видна сходимость при

увеличении пространственной разрешимости и что наиболее медленная сходимость профиля в центральной его части.

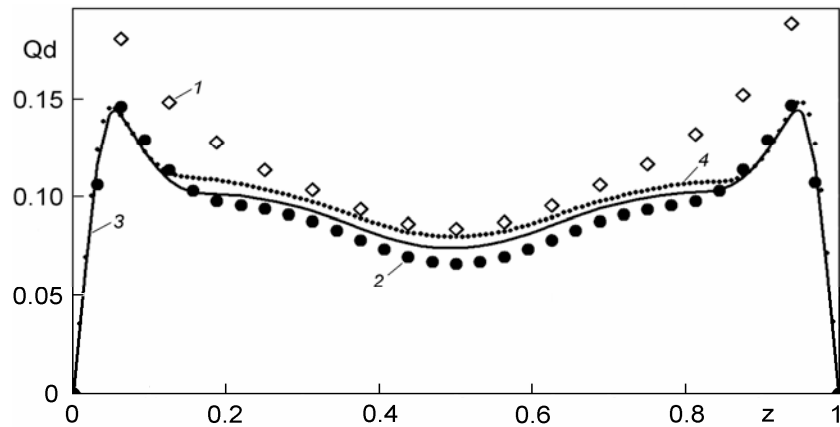


Рис. 24. Профиль среднеквадратичных пульсаций температуры.

На рис. 25 изображен профиль среднеквадратичных пульсаций горизонтальной скорости, результаты расчетов обозначены как на рис. 24. Видна сходимость при увеличении пространственной разрешимости, результаты расчетов с учетом [65x33], [129x65] и [257x129] гармоник-точек близки, но при расчете с пространственной разрешимостью [65x33] рассматриваемый профиль искажается в окрестности локальных максимумов вблизи горизонтальных границ. Сходимость профиля среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости выражена лучше, чем горизонтальной.

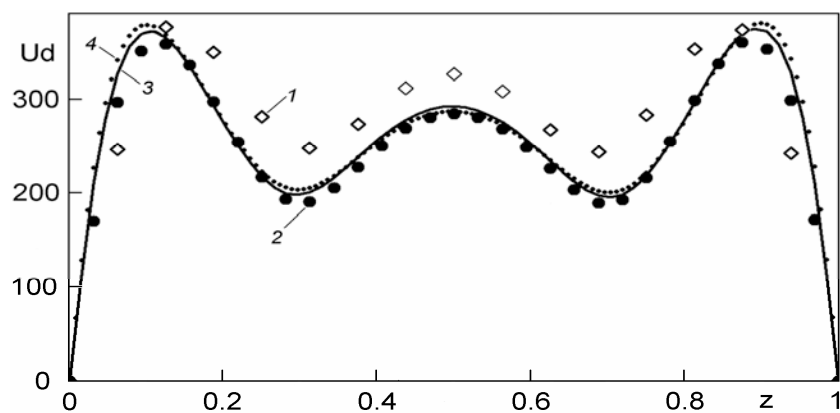


Рис. 25. Профиль среднеквадратичных пульсаций горизонтальной скорости.

При проведении 2d,rigid расчетов контролировалось выполнение соотношения локального интегрального баланса температуры (5), в расчете с учетом [257x129] гармоник-точек соотношение (5) выполнялось с точностью до 0.1%.

Основываясь на результатах методических расчетов, при  $Pr = 10$  2d,rigid расчеты проводились с пространственной разрешимостью: [129x65] при  $10 \leq r < 2 \cdot 10^3$ , [257x65] -  $2 \cdot 10^3 \leq r < 4 \cdot 10^3$  и [513x65] -  $4 \cdot 10^3 \leq r \leq 7 \cdot 10^3$ .

Чтобы убедиться в достаточной разрешимости пространственных масштабов, сравним масштаб диссипации с пространственным масштабом, разрешаемым в 2d,rigid расчетах.

Как и в случае 2d,free расчетов, величина масштаба диссипации в безразмерном виде может быть оценена как:

$$\lambda = \frac{Pr^{1/2}}{(Ra(Nu - 1))^{1/4}} \approx 0.493 r^{-0.335},$$

при  $\alpha = 1$  и  $Pr = 10$ .

Как и в случае 2d,free расчетов, разрешаемый масштаб определим как среднее арифметическое шагов по  $x$  и  $z$ :  $H_{re} = (H_1 + H_2)/2$ .

На рис. 26 изображены как функции надкритичности диссипативный масштаб  $\lambda$  (линия 1) и разрешаемый в 2d,rigid расчетах масштаб  $H_{re}$  (2). Видно, что во всем рассматриваемом интервале надкритичности  $H_{re} < \lambda$ .

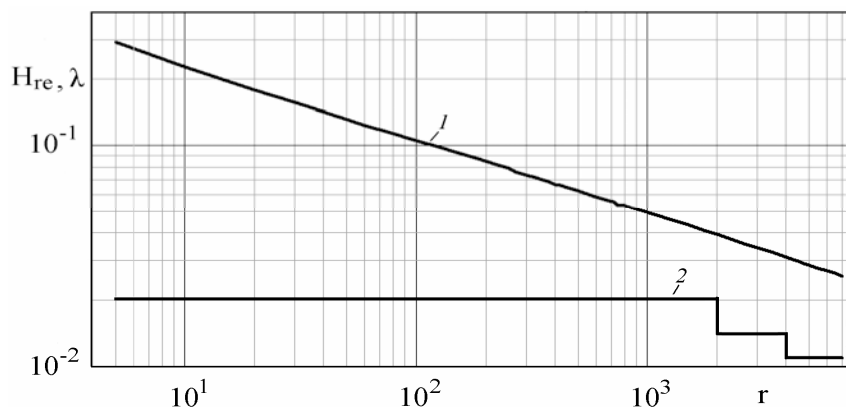


Рис. 26. Диссипативный и разрешаемый масштабы как функции надкритичности.

### 2.4.2.3. Сопоставление с теорией Р. Крайчнана

Согласно теоретическим рассмотрениям [105] при  $Pr = 10$  в вертикальном направлении должны существовать два подинтервала с определенными степенными законами для среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости и температуры, а именно:

$$w' \sim z \quad \text{и} \quad Q' \sim z^{-1} \quad \text{при} \quad z_1 < z < z_2 \quad \text{и}$$

$$w' \sim z^{1/3} \quad \text{и} \quad Q' \sim z^{-1/3} \quad \text{при} \quad z_2 < z < 0.5.$$

При этом зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея приближенно следует степенному закону

$$Nu = 0.089 Ra^{1/3} \quad \text{или} \quad Nu = 1.064 Ra^{1/3}, \quad \text{если} \quad Ra = 1708r.$$

На рис. 27 изображен профиль среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости при  $r = 500$  (линия 1) и кривые  $465 \cdot z^{1/3}$  и  $1125 \cdot z$  - линии 2 и 3, соответственно. Видно, что при  $0.1 < z < 0.27$  среднеквадратичные пульсации вертикальной скорости приближенно растут линейно по  $z$ , а при  $0.27 < z < 0.48$  - примерно как  $\sim z^{1/3}$ .

На рис. 28 приведен профиль среднеквадратичных пульсаций температуры также при  $r = 500$  (линия 1) и кривые  $0.0583 \cdot z^{-1/3}$  и  $0.0089 \cdot z^{-1}$  - линии 2 и 3, соответственно. Видно, что практически во всем интервале изменения  $z$  (при  $0.06 < z < 0.5$ ), исключая его подинтервал с  $z \sim 0$ , профиль температурных пульсаций приближенно следует степенному закону  $\sim z^{-1/3}$ , а участок со степенным законом  $\sim z^{-1}$  отсутствует.

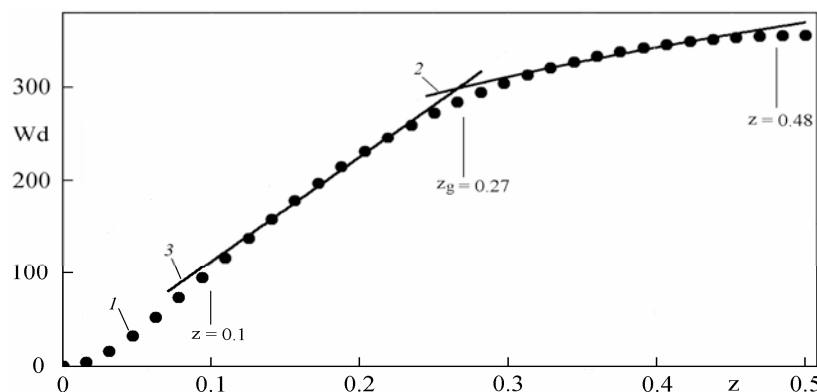


Рис. 27. Профиль среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости.

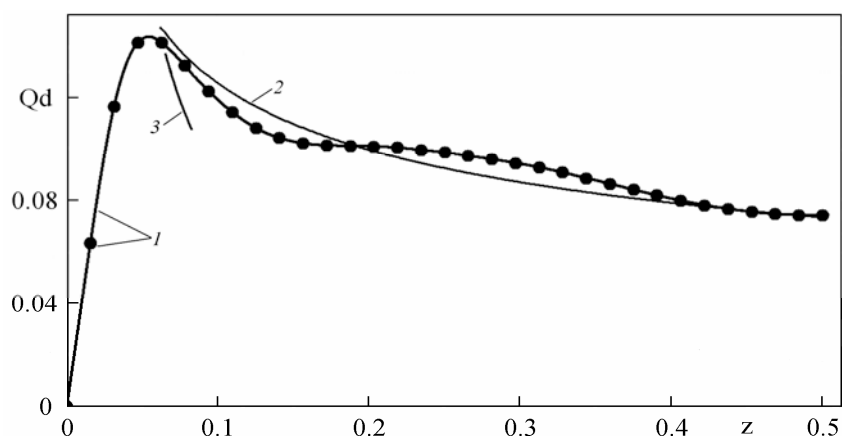


Рис. 28. Профиль среднеквадратичных пульсаций температуры при  $r = 500$ .

Качественно подобная ситуация с наличием двух подинтервалов с различными законами роста пульсаций вертикальной скорости сохраняется и при повышении надкритичности до  $7 \cdot 10^3$ .

На рис. 29 приведен профиль среднеквадратичных пульсаций температуры при  $7 \cdot 10^3$  (линия 1) и кривые  $0.0556 \cdot z^{-1/3}$  и  $0.0048 \cdot z^{-1}$  - линии 2 и 3, соответственно.

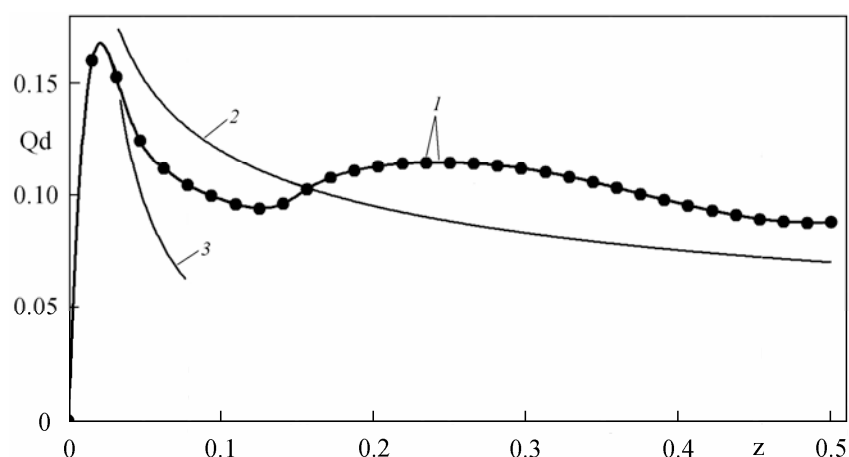


Рис. 29. Профиль среднеквадратичных пульсаций температуры при  $r = 7 \cdot 10^3$ .

Приведенные на рис. 29 данные показывают, что при увеличении надкритичности согласование профиля среднеквадратичных пульсаций температуры со степенным законом  $\sim z^{-1/3}$  ухудшается и намечается тенденция к появлению участка со степенным законом  $\sim z^{-1}$ .



На рис. 30 изображено полученное в 2d,rigid расчетах число Нуссельта как функция надкритичности (линия 1) и кривая  $1.064 \cdot r^{1/3}$  (2). Как видно из рис. 30, вычисленное число Нуссельта близко к предсказанному теоретически [105] при  $250 \leq r \leq 7 \cdot 10^3$ , а при  $10^3 \leq r \leq 4 \cdot 10^3$  - практически с ним совпадает.

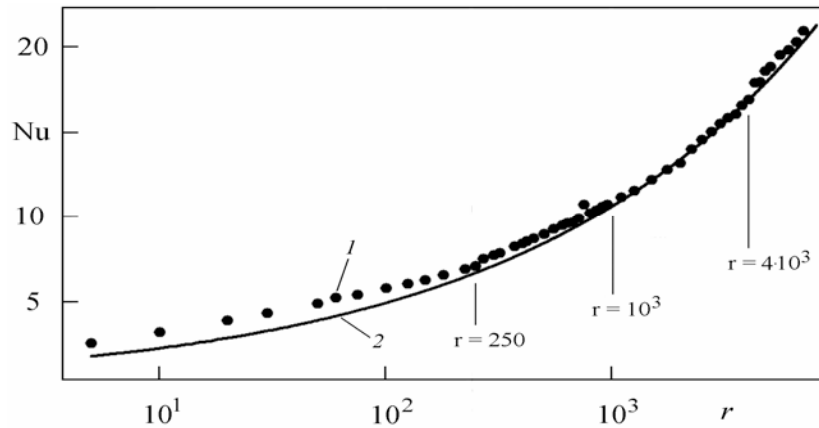


Рис. 30. Число Нуссельта как функция надкритичности.

### 2.4.3. Метод расчета 3d,free конвекции

#### 2.4.3.1. Сравнение на двумерном решении

Для проверки правильности работы 3d,free программы, сравним результаты расчетов двумерной стационарной конвекции по 3d,free и 2d,free программам при  $r = 2.2$ ,  $Pr = 6.8$ ,  $\alpha = 0.09827$  и  $\beta = \pi$ . Трехмерные расчеты проводились с числом гармоник  $[513 \times 5 \times 17]$ , а двумерные -  $[513 \times 17]$ . Так как предполагалось, что оси конвективных валов направлены по горизонтальной оси  $y$  с отсутствием зависимости характеристик течения от  $y$ , то в 3d,free расчетах зависимость от координаты  $y$  не рассматривалась и по ней проводилось осреднение.

В 3d,free расчетах вычислялось число Нуссельта

$$Nu(t) = \frac{\alpha\beta}{2\pi^2} \int_0^{\pi/\alpha} \int_0^{\pi/\beta} (Q_z(t, x, y, 0) + Q_z(t, x, y, 1)) dx dy - 1,$$

$$Nu^n = \sum_k \sum_m Q_{k,0,m}^n \cdot \frac{m}{k} - 1, \quad k = 1, 3, 5, \dots, K-1, \quad m = 2, 4, 6, \dots, M-2,$$

кинетическая энергия

$$Ek^n = \frac{\pi^2}{16\alpha\beta} \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (u_{knm}^2 \rho_k \rho_n \rho_m + v_{knm}^2 \rho_m + w_{knm}^2 \rho_n),$$

где  $\rho_k = 0.5$  если  $k = 0, K$  и  $1$  при  $0 < k < K$ .

Вместе с кинетической энергией в трехмерных расчетах определялось также среднее волновое число в горизонтальном направлении

$$K_{me}^n = \frac{\sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (\alpha^2 k^2 + \beta^2 n^2)^{0.5} (u_{knm}^2 \rho_k \rho_n \rho_m + v_{knm}^2 \rho_m + w_{knm}^2 \rho_n)}{\sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (u_{knm}^2 \rho_k \rho_n \rho_m + v_{knm}^2 \rho_m + w_{knm}^2 \rho_n)}$$

и значение среднеквадратичной скорости

$$V_{rms}^n = \sqrt{2\alpha\beta Ek^n / \pi^2}.$$

Для определения среднеквадратичной температуры в трехмерных расчетах использовалась формула

$$Q_{rms} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M Q_{knm}^2 \rho_n}.$$

Полученные в 3d,free и 2d,free расчетах значения средних величин и их относительное отклонение в % приведены в таблице 22. Наибольшее отклонение наблюдается для числа Nu - 1.45, а отклонения остальных средних величин не превышают 0.65%.

Относительное среднеквадратичное отклонение полей Q, вычисленных в двумерном и трехмерном расчетах составило 1.5%.

Таблица 22: Средние величины.

Средн. величина	2d,free	3d,free	Откл., %
Nu	2.233	2.201	1.45
Ek	1673	1679	0.36
$K_{me}$	2.655	2.655	0.01
$V_{rms}$	10.23	10.25	0.20
$Q_{rms} \cdot 10$	2.168	2.154	0.65

На рис. 31 изображены профиль средней температуры (рис. 31а, где линия 1 - 3d,free расчет, а 2 - 2d,free) и величина  $dQ = Q_3 - Q_2$  (рис. 31б) - разность профилей температуры, полученных в трехмерном и двумерном расчетах, все как функции вертикальной координаты  $z$ .

Из рис. 31а видно, что профили средней температуры в 3d,free и 2d,free расчетах совпадают с графической точностью. А рис. 31б показывает, что 3d,free расчет дает незначительное завышение (до 0.4% от максимального значения) средней температуры.

#### 2.4.3.2. Проверка сходимости при увеличении пространственной разрешимости

Были проведены три тестовых расчета при  $r = 950$ ,  $Pr = 10$ ,  $\alpha = \beta = 1$  с разрешимостью  $[33 \times 33 \times 33]$  ( $\tau = 8.76 \cdot 10^{-5}$ ),  $[65 \times 65 \times 65]$  ( $\tau = 4.88 \cdot 10^{-5}$ ) и  $[129 \times 129 \times 129]$  ( $\tau = 1.22 \cdot 10^{-5}$ ), достаточная малость шага по времени контролировалась проверочными расчетами с уменьшенными в два раза шагами.

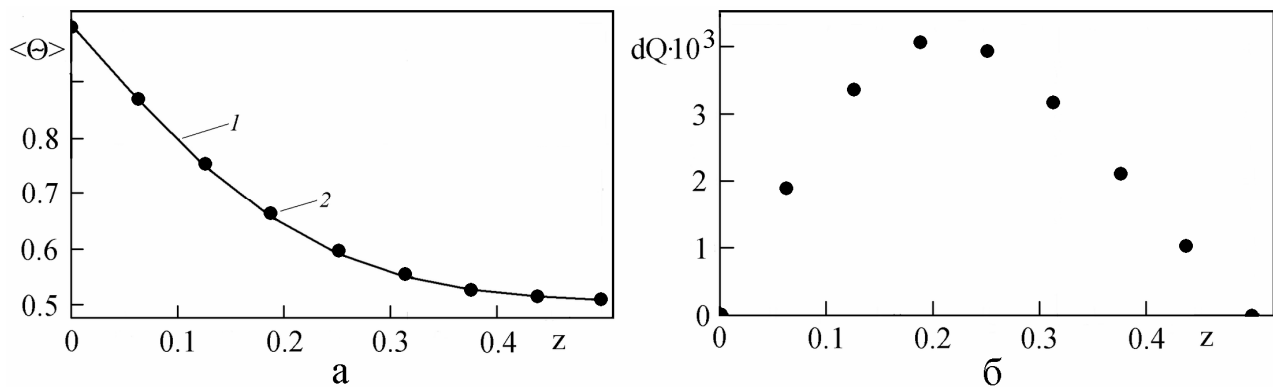


Рис. 31. Профили средней температуры и  $dQ$ , как функции вертикальной координаты  $z$ , а) профиль средней температуры, б)  $dQ$ .

По данным, полученным с учетом  $[65 \times 65 \times 65]$  и  $[129 \times 129 \times 129]$  гармоник квадратичной экстраполяцией вычислялись 'точные' значения средних величин. Значения средних величин приведены в таблице 23, видна сходимость при последовательном увеличении числа учитываемых гармоник.

Таблица 23: Средние величины.

Разрешимость	Nu	$Ek/10^5$	$K_{me}$	$V_{rms}/10^2$	$Q_{rms}$
33x33x33	12.30	11.68	3.157	4.839	0.2503
65x65x65	13.68	9.619	3.309	4.405	0.2481
129x129x129	14.16	8.428	3.544	4.095	0.2441
‘Точное’	14.33	8.031	3.622	3.992	0.2428

Профили средней температуры и среднеквадратичных температурных пульсаций практически совпадали при учете [65x65x65] и [129x129x129] гармоник, а наибольшие отклонения наблюдались для профиля вертикальной и горизонтальной (x - направление) скорости.

На рис. 32 приведен профиль пульсаций вертикальной скорости, а на рис. 33 - горизонтальной (x - направление), где кривая 1 соответствует расчету с учетом [129x129x129] гармоник, а 2 и 3 - [65x65x65] и [33x33x33], соответственно. Видна сходимость для профиля пульсаций горизонтальной скорости и что профили пульсаций вертикальной скорости близки.

Одномерные энергетические спектры пульсаций температуры и скорости являются очень консервативной характеристикой и присущие им степенные законы сравнительно слабо зависят от пространственной разрешимости.

Для иллюстрации, на рис. 34 приведен спектр пульсаций температуры в x - горизонтальном направлении, обозначения как на рис. 32 и 33. Видна сходимость, спектры практически совпадают в интервале аппроксимации  $0 < \alpha k < k_1$ ,  $k_1 \approx \pi/(3N_1)$ , следуя одному и тому же степенному закону, а отклонения на более высоких частотах и на краю спектра  $\alpha k \approx \pi/N_1$  обусловлены численными эффектами [67]. Аналогичная ситуация типична и для одномерного энергетического спектра пульсаций скорости.

При численном моделировании 3d,free конвекции контролировалось выполнение соотношения локального интегрального баланса температуры (5). И, дополнительно, умножением второго, третьего и четвертого уравнений системы (1.3) на u, v и w, соответственно, суммированием полученных соотношений и интегрированием с учетом граничных условий по области

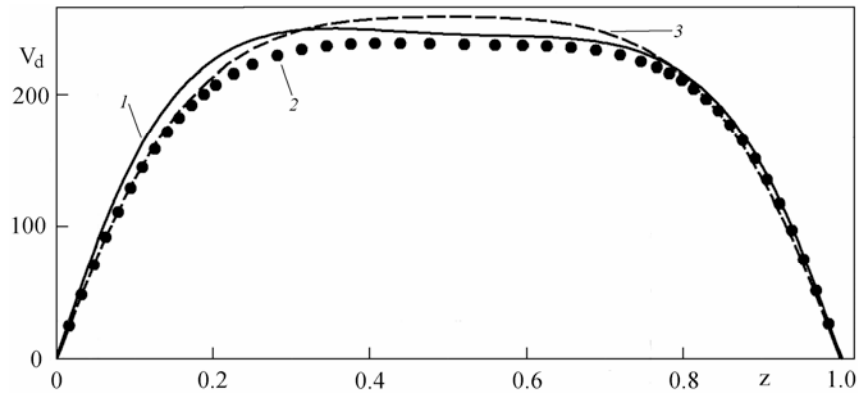


Рис. 32. Профиль пульсаций вертикальной скорости.

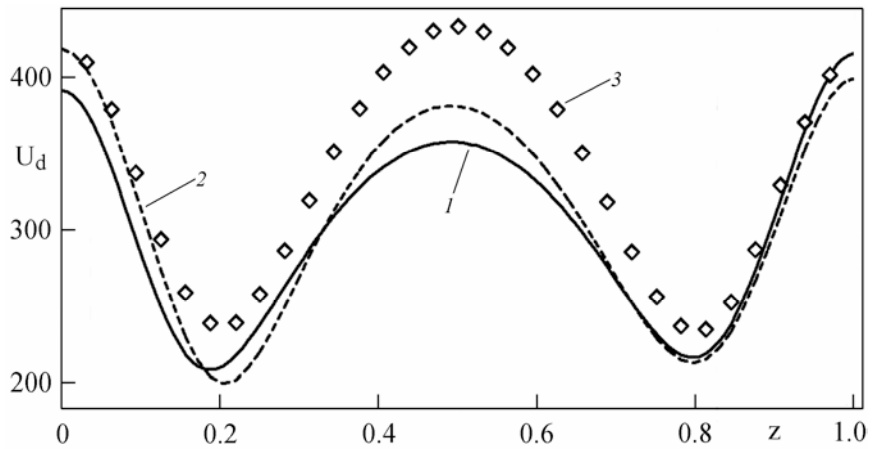


Рис. 33. Профиль пульсаций горизонтальной (x - направление) скорости.

$$G_{3t} = \{0 \leq x \leq \pi / \alpha, 0 \leq y \leq \pi / \beta, 0 \leq z \leq 1, t^n \leq t \leq t^{n+1}\},$$

получаем интегральное соотношение для кинетической энергии. Наряду с локальными соотношениями типа (5), где интегрирование по времени произведено в пределах одного временного шага, контролировались также глобальные соотношения для температуры и энергии, с интегрированием по времени по всему временному промежутку.

Таблица 24 показывает хорошую точность выполнения в среднем по времени локальных интегральных соотношений (ИС) при  $r = 950$ , видна сходимость к 1 при увеличении разрешимости. Для глобальных интегральных

соотношений также наблюдается сходимость, но для температуры она менее выражена.

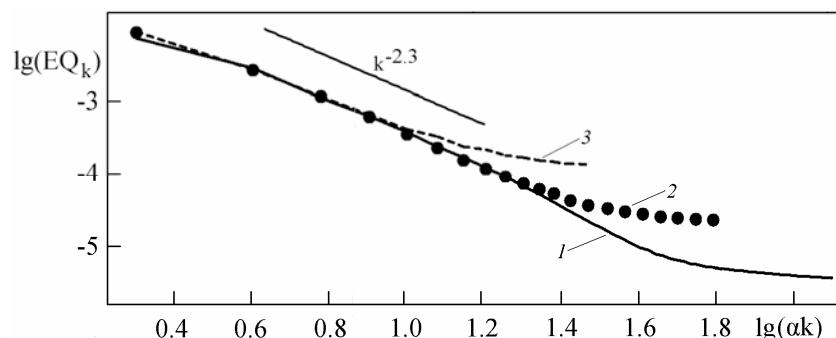


Рис. 34. Спектр температурных пульсаций в  $x$  - направлении.

Значения  $Nu$ , вычисленные при  $r = 152$  и  $7.6$  ( $Pr = 10$ ), согласовались с данными [10, рис. 13б] и [11, расчет 17, таблица 1], соответственно. А также, полученные экстраполяцией на  $r = 1521$  по установленным на основании результатов 3d,free расчетов степенным законам (см. раздел 3.6) значения  $Nu$  и  $V_{rms}$  (и, следовательно, кинетическая энергия и число Рейнольдса) согласовались с полученными в [19] с графической точностью.

Таблица 24: Проверка локальных и глобальных ИС.

Пространственная разрешимость	Локальные ИС		Глобальные ИС	
	Энергия	Температура	Энергия	Температура
33x33x33	0.99625	0.9969	0.630	0.463
65x65x65	0.99889	0.9988	0.826	0.574
129x129x129	0.99986	0.9998	0.907	0.669

Чтобы убедиться в достаточной разрешимости пространственных масштабов, сравним масштаб диссипации с пространственным масштабом, разрешаемым в 3d,free расчетах.

По аналогии с двумерными расчетами, для масштаба диссипации кинетической энергии имеем:

$$\lambda = \frac{Pr^{1/2}}{(Ra(Nu - 1))^{1/4}} \approx 0.655 r^{-0.357},$$

и  $Н_{ге} = (Н_1 + Н_2 + Н_3)/3 \approx 0.038$  в 3d,free расчетах с учетом [65x65x65] гармоник при  $\alpha = \beta = 1$  и  $Pr = 10$ .

На рис. 35 изображены как функции надкритичности диссипативный масштаб  $\lambda$  (линия 1), разрешаемый в 3d,free расчетах масштаб  $Н_{ге}$  с учетом [65x65x65] гармоник (2), а 3 и 4 - масштабы, разрешаемые в тестовых расчетах с учетом [129x129x129] и [33x33x33] гармоник, соответственно. Из рис. 35 видно, что во всем рассматриваемом интервале надкритичности  $Н_{ге} < \lambda$ .

Теперь, по аналогии с двумерной задачей, рассмотрим распределение кинетической энергии  $E_{kin}(\alpha k)$  и скорости диссипации  $Dis(\alpha k)$  по волновому числу в горизонтальном  $x$  - направлении:

$$E_{kin}(\alpha k) = \frac{\pi^2}{16\alpha\beta} \sum_n \sum_m (u_{knm}^2 \rho_k \rho_n \rho_m + v_{knm}^2 \rho_m + w_{knm}^2 \rho_n) \quad u$$

$$Dis(\alpha k) = \frac{\pi^2}{8\alpha\beta} \sum_m \sum_b \{ u_{knm}^2 (\alpha^2 k^2 \rho_n \rho_m + \beta^2 n^2 \rho_k \rho_m + \pi^2 m^2 \rho_k \rho_n) + v_{knm}^2 (\alpha^2 k^2 \rho_k \rho_m + \beta^2 n^2 \rho_n \rho_m + \pi^2 m^2) + w_{knm}^2 (\alpha^2 k^2 \rho_n + \beta^2 n^2 + \pi^2 m^2 \rho_n \rho_m) \}.$$

На рис. 36 при  $r = 950$ ,  $\alpha = \beta = 1$  и  $Pr = 10$  изображены распределения  $E_{kin}$  (линия 1) и  $Dis$  (2) как функции волнового числа  $\alpha k$ , полученные с учетом [65x65x65] гармоник. Линиями 3, 4, 5 и 6 показаны соответствующие границы интервалов энергии, диссипации, аппроксимации и диссипативное волновое число  $k_d = \pi/\lambda$ , соответственно.

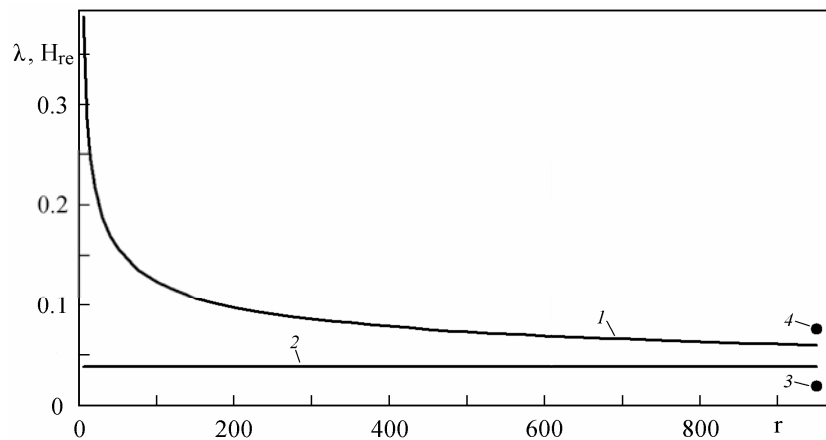


Рис. 35. Диссипативный и разрешаемый масштабы.

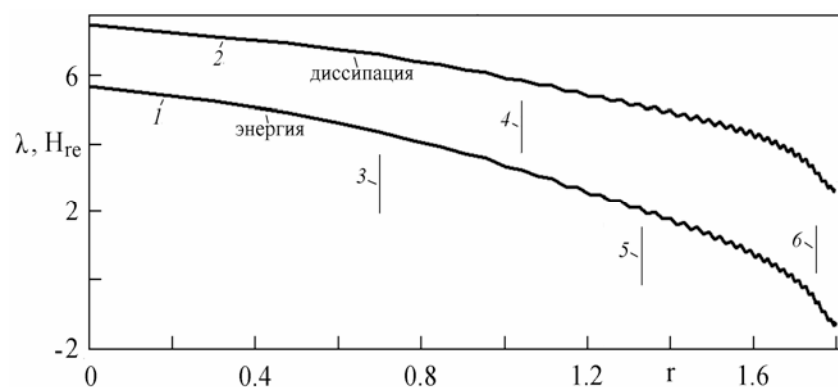


Рис. 36. Распределение кинетической энергии и скорости диссипации по волновым числам.

Из рис. 36 видно, что при учете [65x65x65] гармоник основная часть кинетической энергии и диссипации набирается на волновых числах, лежащих левее границы интервала аппроксимации и диссипативного волнового числа. А также рис. 36 показывает, что распределения по волновому числу кинетической энергии и диссипации в окрестности  $k_d$  имеют спадающий характер.

Исходя из сказанного, все серийные 3d,free расчеты при  $r \leq 950$ ,  $Pr = 10$  и  $\alpha = \beta = 1$  проводились с учетом [65x65x65] гармоник.



## Численное моделирование конвекции Рэлея-Бенара

### 3.1. Стационарная валиковая конвекция

Сначала проведем сравнение результатов расчетов стационарной валиковой двумерной конвекции по трехмерной и двумерным 2d,free и 2d,rigid моделям с экспериментальными данными [45].

В [45] экспериментально исследовалась стационарная двумерная конвекция в дистиллированной и морской воде при небольшой надкритичности (до  $\tau = 13.8$ ). Рабочая область в экспериментах имела размеры (20.3см, 7.6см, 0.635см) (длина, ширина и высота), визуальное наблюдение проводилось через окно размером (1.905см, 0.635см) (длина и высота). На верхней и нижней горизонтальных границах поддерживалась постоянная температура. Оси конвективных валов в эксперименте были ориентированы параллельно короткой боковой стороне рабочей области.

Сначала проведем сравнение расчетных и экспериментальных данных, полученных с использованием дистиллированной воды в качестве рабочей жидкости. Надкритичность  $\tau = 2.2$  и число Прандтля  $Pr = 6.8$  в эксперименте и расчетах совпадали, все трехмерные расчеты данного раздела выполнены с разрешимостью [513x5x17], а двумерные - [513x17].

Относительный размер области в горизонтальном  $x$  - направлении в расчетах был выбран таким же, как и в эксперименте:  $20.3/0.635 = 31.97$  ( $\alpha = \pi/31.97 = 0.09827$ ); относительные размеры окна визуализации в расчетах и эксперименте также совпадали. Поскольку рассматриваемое течение предполагалось в расчетах, как и в эксперименте, двумерным, с ориентированными вдоль горизонтальной оси  $u$  осями валов и, как следствие, отсутствием зависимости характеристик течения от этой координаты, размер области в горизонтальном  $u$  - направлении в трехмерных расчетах для экономии машинного времени и стабилизации двумерной структуры течения

был уменьшен в 11.97 раз ( $\beta = \pi$ ) и по однородной координате  $y$  проводилось осреднение.

На рис. 1 приведены изотермы полной температуры, полученные в эксперименте [45] (рис. 1а), 3d,free (рис. 1б) и 2d,rigid (рис. 1в) расчетах. Видно, что расчетные и экспериментальная изотермы близки, но данные 2d,rigid расчета кажутся более точными по форме изотерм.

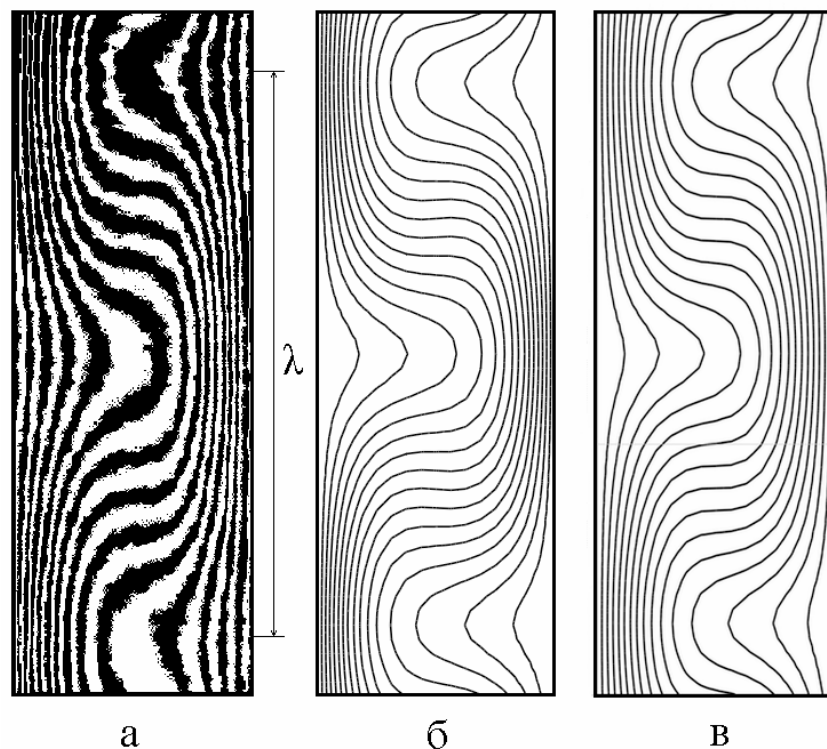


Рис. 1. Экспериментальная и расчетные изотермы полной температуры.

На рис. 2 сравниваются экспериментальный (кривая 1) и полученные в 3d,free (2) и 2d,rigid (3) расчетах профили средней температуры. Результаты расчетов и эксперимента хорошо согласуются, небольшое различие заметно лишь в окрестности  $z = 0.8$ , где данные 2d,rigid расчета кажутся более точными.

Изотермы и профиль средней температуры в 3d,free и 2d,free расчетах совпадают с графической точностью и поэтому результаты 2d,free расчетов на рис. 1 и 2 не приводятся.

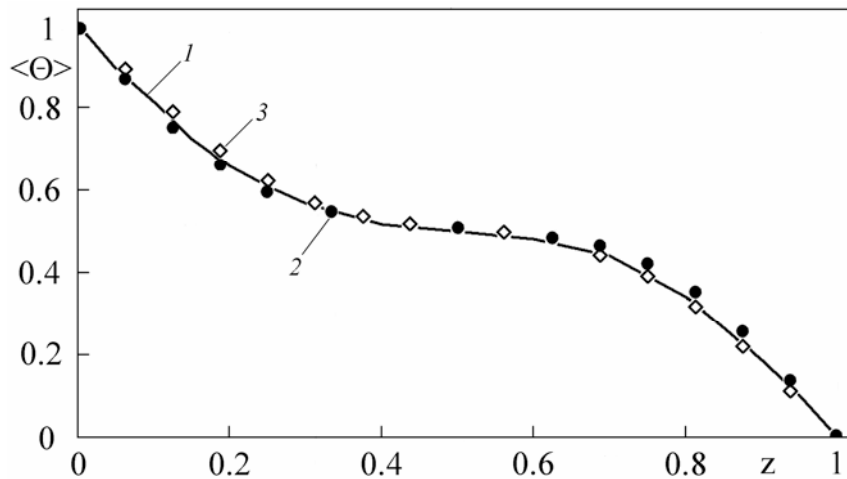


Рис. 2. Экспериментальный и расчетные профили средней температуры.

Сравним расчетные и экспериментальные значения числа Нуссельта:  $Nu = 1.82$  - в эксперименте, 2.20, 2.23 и 1.75 - в 3d,free, 2d,free и 2d,rigid расчетах, соответственно. 3d,free и 2d,free расчеты приводят к значениям числа Нуссельта, отличающимся на 1.5% при отклонении от эксперимента примерно на 21%. А отклонение от эксперимента результата 2d,rigid расчета составило 4%.

А теперь проведем сравнение расчетных и экспериментальных чисел Нуссельта при  $1 \leq r < 4$ .

Простой графический анализ зависимости первой моды линейной теории устойчивости от волнового числа показывает, что при такой большой относительной горизонтальной протяженности области (равной 31.97) и, соответственно, малом минимальном волновом числе  $\alpha = \pi/31.97 = 0.09827$  существует большое количество различных стационарных решений (при  $r = 4$  таких решений 54 в 2d,free расчетах и 71 - в 2d,rigid), каждое из которых отвечает определенному значению доминирующей длины волны  $\lambda = 2\pi/(\alpha k)$  (рис. 1a), где  $\alpha k$  соответствует волновому числу неустойчивого по линейной теории возмущения.

В расчетах [63] доминирующая длина волны  $\lambda$  не изменялась при увеличении надкритичности, а в эксперименте  $\lambda$  увеличивалась примерно по степенному закону  $\lambda = 1.91 \cdot r^{0.28}$  [45]. Рассмотрение экспериментальных

интерферограмм показывает, что увеличение  $\lambda$  в эксперименте обусловлено перескоками между стационарными решениями, причем при  $r > 4$  перескок сопровождается изменением симметрии решения. В настоящей работе при  $1 \leq r < 4$  выбор стационарного решения производился заданием подходящего начального условия с нужной симметрией ( $k$  - нечетное) из требования наилучшего соответствия  $\lambda$  эксперименту.

На рис. 3а приведены расчетные и экспериментальные числа Нуссельта, здесь кривые 1, 2 и 3 - результаты 3d,free, 2d,free и 2d,rigid расчетов, соответственно, а цифрами 4, 5 и 6 обозначены экспериментальные данные [45], полученные в дистиллированной и морской воде с соленостями 35 и 40%, соответственно. А на рис. 3б приведена доминирующая длина волны  $\lambda$  в эксперименте и 2d,rigid расчетах (1) и числами показаны соответствующие значения  $k$ .

Видно, что результаты 3d,free и 2d,free расчетов близки и что 2d,rigid расчет приводит к более правильному результату. Это представляется естественным, так как отсутствие торможения на горизонтальных границах силами вязкости приводит к большей интенсивности конвекции в случае свободных граничных условий и тем самым обуславливает завышение значений числа Нуссельта. Изломы на расчетных кривых обусловлены перескоками между стационарными решениями.

Интересно, что увеличение доминирующей длины волны при двумерной конвекции с жесткими и свободными граничными условиями прямо противоположным образом влияет на теплообмен, а именно, в 2d,free (и в 3d,free) расчетах число Нуссельта растет при увеличении доминирующей длины волны, а в 2d,rigid - уменьшается. Простое физическое объяснение этого также связано с увеличением торможения потока на горизонтальных границах при увеличении доминирующей длины волны при конвекции с условием прилипания на горизонтальных границах.

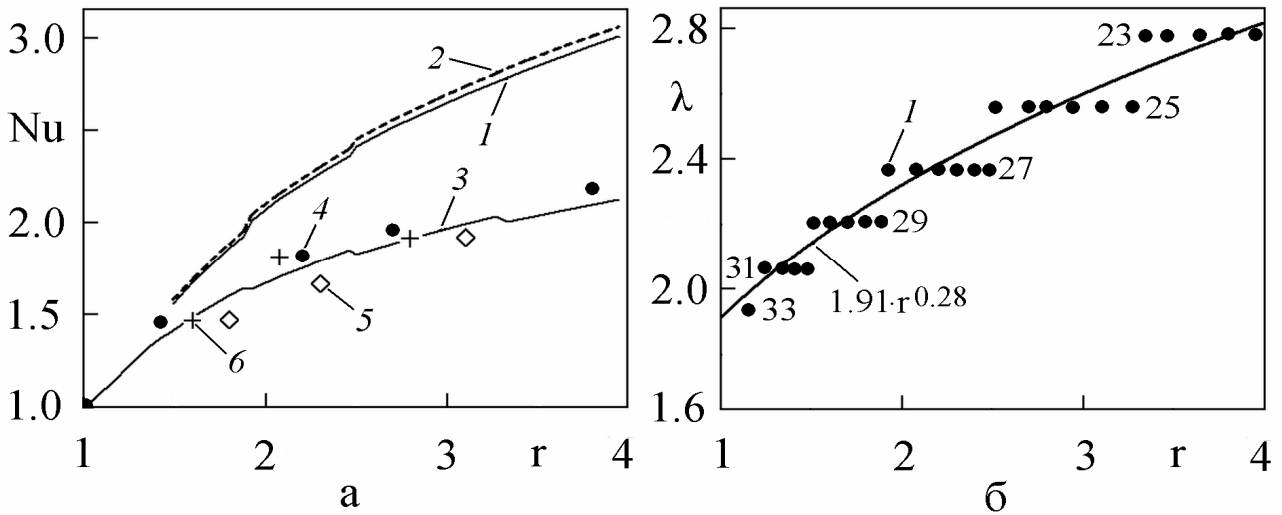


Рис. 3. Число Нуссельта и доминирующая длина волны,  
 а - число Нуссельта, б - доминирующая длина волны  $\lambda$ .

### 3.2. Стационарная конвекция в квадратной области

Рассмотренная в работе [33] задача о конвекции в квадратной области со свободными от касательных напряжений горизонтальными границами представляет собой интересный пример крупномасштабного стационарного конвективного течения.

Данная задача уже рассматривалась в разделе 2.4.1.1 главы 2 как тестовая и было показано, что числа  $Nu$ , рассчитанные предлагаемым спектрально-разностным методом с хорошей точностью согласуются с полученными в работе [33] при  $r \leq 10^3$ .

Итак, рассматривается 'симметричное' представление  $2d, free$  решения (1.8) при  $Pr = 6.8$  и  $\alpha = \pi$ . Расчеты проводились спектрально-разностным методом с учетом  $[257 \times 257]$  гармоник при  $r = 20, 50, 100, 200$  и  $[513 \times 513]$  - при  $r = 400, 600, 800, 10^3, 1.4 \cdot 10^3, 1.8 \cdot 10^3, 2.2 \cdot 10^3, 2.6 \cdot 10^3, 3.2 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^3, 6 \cdot 10^3, 8 \cdot 10^3, 10^4$ . Во всех расчетах было получено стационарное решение.

Для проверки точности полученных данных, был проведен также тестовый расчет с учетом  $[257 \times 257]$  гармоник при  $r = 4 \cdot 10^3$ . При этом наибольшее относительное отклонение от данных расчета с учетом  $[513 \times 513]$  гармоник

наблюдалось для энтропии  $E_n$  и кинетической энергии  $E_k$  - 1.8 и 1.7%, соответственно, значения среднего горизонтального волнового числа  $K_{me}$  практически совпадали - 0.03%, а относительное отклонение числа Нуссельта  $Nu$ , среднеквадратичных значений скорости  $V_{rms}$ , температуры  $Q_{rms}$  и функции тока  $\psi_{rms}$  не превышало одного процента - 0.9, 0.9, 0.2 и 0.6%, соответственно.

Согласно [33], при проведении расчетов должно быть выполнено  $Nu < M/6$  (не менее трех точек разностной сетки в тепловом пограничном слое), что при  $r \geq 400$  приводит к ограничению на число Нуссельта  $Nu < 85.3$ . Последнее соотношение во всех расчетах выполнено, так как  $Nu = 50.1$  при  $r = 10^4$ .

На рис. 4 показаны изолинии функции тока при  $r = 4 \cdot 10^3$ . Видно, что рассматриваемое течение - крупномасштабное, одновихревое и качественно подобное приведенному в [33] при  $r = 10^3$ .

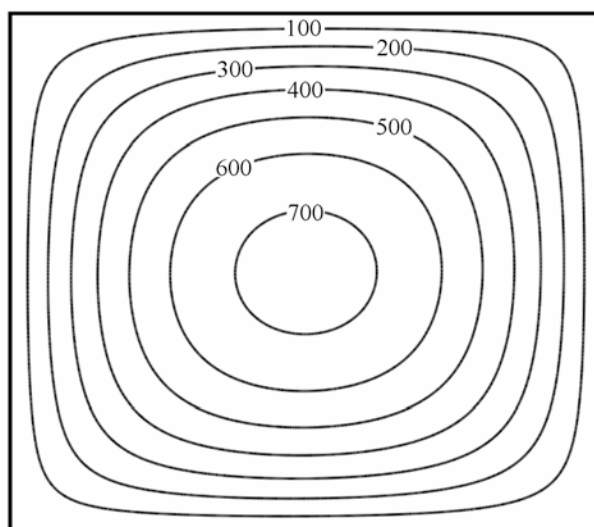


Рис. 4. Изолинии функции тока, одновихревой режим при  $r = 4 \cdot 10^3$ .

Число Нуссельта как функция надкритичности во всем диапазоне ее изменения с высокой точностью (коэффициент корреляции Пирсона зависимости  $\lg(Nu)$  от  $\lg(r)$  равен 0.99997) следует степенному закону:

$$Nu = 1.837 \cdot r^{0.3598} \quad \text{при } 20 \leq r \leq 10^4.$$

С высокой точностью следуют степенным законам также зависимости от надкритичности кинетической энергии  $E_k$ , энтропии  $E_n$ , среднеквадратичных величин - скорости  $V_{rms}$ , функции тока  $\psi_{rms}$  и пульсаций вертикальной скорости  $V_d$  при  $z = 0.5$  (необходимый для их вычисления средний профиль получен осреднением по горизонтальной координате  $x$ ):

$$E_k = 7.447 \cdot r^{1.351}, \quad E_n = 468.8 \cdot r^{1.387},$$

$$V_{rms} = 6.841 \cdot r^{0.6756}, \quad \psi_{rms} = 1.51 \cdot r^{0.675} \quad \text{и}$$

$$V_d = 6.627 \cdot r^{0.6722}, \quad \text{все при } 20 \leq r \leq 10^4.$$

На рис. 5 приведено среднее волновое число в горизонтальном направлении  $K_{me}$  (кривая 1) и среднеквадратичная температура  $Q_{rms}$  (2) при  $20 \leq r \leq 10^4$ . Видно, что  $K_{me}$  при  $r < r_m$ ,  $r_m = 200$  растет, достигая максимального значения 3.378 при  $r = r_m$ , а при дальнейшем увеличении надкритичности незначительно (примерно на 0.4%) и монотонно уменьшается с выходом на асимптотику 3.365. В то же время, значение среднеквадратичной температуры  $Q_{rms}$  монотонно увеличивается с ростом надкритичности до асимптотического значения 0.29.

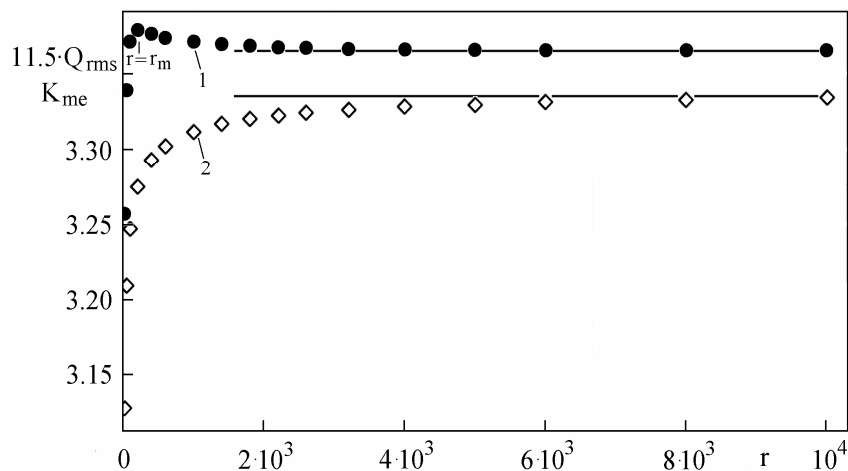


Рис. 5. Волновое число и среднеквадратичная температура как функции надкритичности, одновихревой режим.

Была проведена также серия расчетов при увеличенном до 10 значении числа Прандтля с учетом [513x513] гармоник, при  $1800 \leq r \leq 10^4$  было получено стационарное решение.

Степенные законы для средних величин, при этом, несколько изменились:

$$Nu = 1.878 \cdot r^{0.3557}, \quad Ek = 7.0892 \cdot r^{1.354},$$

$$En = 533.3 \cdot r^{1.369}, \quad V_{rms} = 6.674 \cdot r^{0.6771},$$

$$\psi_{rms} = 1.468 \cdot r^{0.6770} \quad \text{и} \quad Vd = 6.350 \cdot r^{0.6759}, \quad \text{все при } 1800 \leq r \leq 10^4.$$

Другой пример стационарного крупномасштабного движения получается, если рассматривать другое представление  $2d, free$  решения (1.6) при  $Pr = 6.8$  и  $\alpha = \pi$ .

Расчеты этого стационарного решения проводились спектрально-разностным методом с учетом [257x257] гармоник при  $r = 300, 500, 750, 10^3, 1.25 \cdot 10^3, 1.5 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^3, 3 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^3$  и [513x513] - при  $r = 6 \cdot 10^3, 7 \cdot 10^3, 8 \cdot 10^3, 10^4, 1.4 \cdot 10^4, 2 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4$  и  $5 \cdot 10^4$ . Во всех случаях было получено стационарное решение.

Для проверки точности полученных данных, был проведен также тестовый расчет с учетом [257x257] гармоник при  $r = 10^4$ . При этом относительные отклонения от данных расчета с учетом [513x513] гармоник были примерно такими, как и в случае уже рассмотренного крупномасштабного одновихревого решения.

А именно, наибольшее отклонение наблюдалось для  $Ek$  и  $En$  - 1.7 и 1.6%, соответственно, значения  $K_{me}$  и  $Q_{rms}$  практически совпадали, а относительное отклонение  $Nu$ ,  $V_{rms}$  и  $\psi_{rms}$  не превышало одного процента.

Условие  $Nu < M/6$ , при  $r > 5 \cdot 10^3$  трансформирующееся в  $Nu < 85.3$ , выполнено, так как  $Nu = 56.2$  при  $r = 5 \cdot 10^4$ .

На рис. 6 показаны изолинии функции тока при  $r = 10^4$ . Видно, что горизонтальный масштаб решения, как и на рис. 4, примерно равен горизонтальному размеру области, но в вертикальном направлении течение



имеет вдвое меньший масштаб, поэтому в дальнейшем такой режим течения называем двухвихревым.

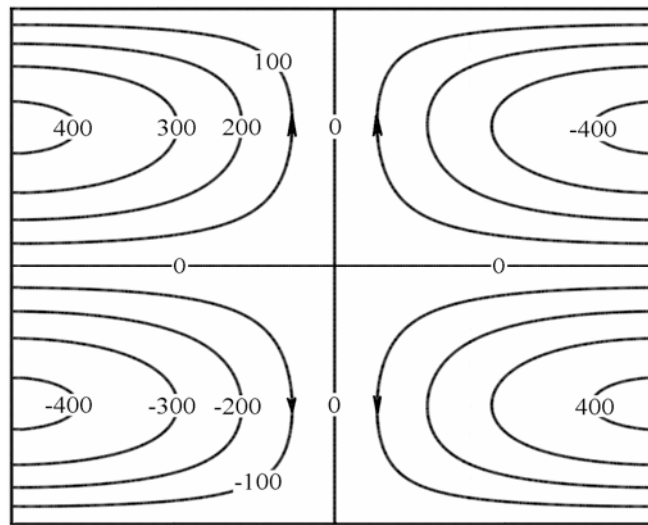


Рис. 6. Изолинии функции тока, двухвихревой режим при  $r = 10^4$ .

Среднее горизонтальное волновое число  $K_{me}$  и  $Q_{rms}$ , в случае двухвихревого движения изменяются с ростом надкритичности качественно так же, как на рис. 5. При  $r < r_m$  (теперь  $r_m \approx 10^3$ )  $K_{me}$  растет, достигая при  $r = r_m$  значения 3.186, а при  $r > r_m$  монотонно уменьшается примерно на 0.9% с выходом на асимптотическое значение 3.157. А среднеквадратичная температура  $Q_{rms}$  при увеличении надкритичности монотонно возрастает от минимального значения 0.1864 с выходом на асимптотику 0.2242.

Однако, рассмотрение степенных законов изменения интегральных величин показывает существенное отличие между одно- и двухвихревым режимами течения.

В самом деле, при одновихревом режиме течения все рассмотренные интегральные величины с высокой точностью следуют единым степенным законам во всем диапазоне изменения надкритичности, а при двухвихревом - при значении надкритичности  $r_1 \approx 1.5 \cdot 10^3$  наблюдается резкое и ясно видимое уменьшение показателя степенного закона зависимости всех интегральных величин от надкритичности.

На рис. 7 изображено число Нуссельта для двухвихревого режима как функция надкритичности (1) и степенные законы  $1.024 \cdot r^{0.4012}$  (линия 2) и  $2.014 \cdot r^{0.3093}$  (3). Вертикальной линией на рис. 7 показано также значение надкритичности  $r_1$ , при котором наблюдается смена степенного закона.

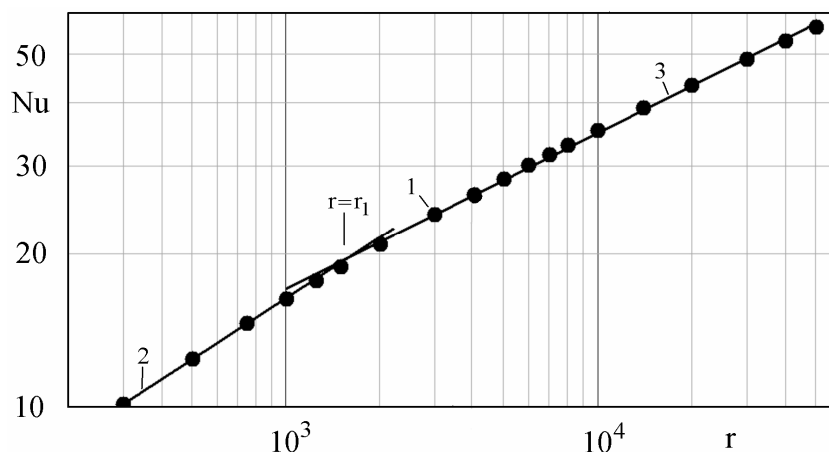


Рис.7. Число  $Nu$  как функция надкритичности, двухвихревой режим течения.

Итак, для числа Нуссельта имеем:

$$Nu = 1.024 \cdot r^{0.4012} \text{ при } r < r_1 \text{ и } Nu = 2.014 \cdot r^{0.3093} \text{ при } r_1 < r < 5 \cdot 10^4.$$

Качественно подобная ситуация наблюдается и для кинетической энергии:

$$Ek = 1.056 \cdot r^{1.437} \text{ при } r < r_1 \text{ и } Ek = 6.969 \cdot r^{1.178} \text{ при } r_1 < r < 5 \cdot 10^4,$$

энтропии:

$$En = 162.2 \cdot r^{1.444} \text{ при } r < r_1 \text{ и } En = 1129.8 \cdot r^{1.179} \text{ при } r_1 < r < 5 \cdot 10^4,$$

среднеквадратичной скорости:

$$V_{rms} = 2.577 \cdot r^{0.7184} \text{ при } r < r_1 \text{ и } V_{rms} = 6.618 \cdot r^{0.5892} \text{ при } r_1 < r < 5 \cdot 10^4$$

и функции тока:

$$\psi_{rms} = 0.3697 \cdot r^{0.7165} \text{ при } r < r_1 \text{ и } \psi_{rms} = 0.9329 \cdot r^{0.5896} \text{ при } r_1 < r < 5 \cdot 10^4.$$

Уменьшение показателей степенных законов при  $r = r_1 \approx 1.5 \cdot 10^3$ , предположительно связано с качественным изменением поведения среднего

горизонтального волнового числа при  $r = r_m \approx 10^3$  - сменой монотонного возрастания на монотонное убывание.

Тщательное исследование компенсационных спектров для рассмотренных интегральных величин в случае одновихревого течения также позволяет заключить, что значение надкритичности  $r_1$ , при котором происходит уменьшение показателей степенных законов существует и для одновихревого стационарного течения. Однако, в этом случае это уменьшение выражено значительно слабее и значение  $r_1$  не удастся оценить количественно.

Подчеркнем, что в рассмотренных примерах крупномасштабного одно- и двухвихревого движения уменьшение  $K_{me}$  (при  $r > r_m$ ) сопровождается увеличением  $Q_{rms}$ .

Ниже везде, если не оговорено обратное, то  $Pr = 10$ .

### 3.3. Вихревой масштаб

В этом разделе рассматривается поведение вихревого масштаба в двумерных и трехмерных расчетах как функции надкритичности.

Как показали описанные в разделе 2.4.1.6 методические расчеты, в 2d,free расчетах при надкритичности  $r \leq 3.4 \cdot 10^4$  (при  $\alpha = 1$  и  $Pr = 10$ ) достаточно учитывать [257x65] гармоник. А при увеличении длины области  $\ell$  (уменьшении  $\alpha$ ), количество гармоник в горизонтальном направлении должно увеличиваться прямо пропорционально  $\ell$  и при  $\alpha = 0.125$  в 2d,free расчетах учитывалось [2049x65] гармоник.

В двумерных и трехмерных расчетах по кинетической энергии вычисляется среднее волновое число  $K_{me}$  в горизонтальном направлении, характеризующее средний горизонтальный масштаб вихрей  $\ell_{me} = \pi/K_{me}$ , на котором сосредоточена основная часть кинетической энергии. Для краткости, в дальнейшем величину  $\ell_{me}$  называем вихревым масштабом.

На рис. 8 показано  $K_{me}$ , вычисленное при  $r \leq 950$ , где показаны результаты 3d,free (кривая 1,  $\alpha = \beta = 1$ ) и 2d,free (2,  $\alpha = 1$ ) расчетов.

Из рис. 8 видно, что в трехмерных расчетах  $K_{me}$  растет с ростом надкритичности. А более детальный анализ показывает, что при  $r \leq 150$  волновое число следует степенному закону  $K_{me} = 1.86 \cdot r^{0.084}$ , или, что эквивалентно  $l_{me} = 1.69 \cdot r^{-0.084}$ ,  $l_{me} \approx 1.7 \cdot r^{-1/12}$ , и, более того, при  $r \leq 500$  с точностью до нескольких процентов  $K_{me}$  равно половине волнового числа, наиболее быстрорастущего по линейной теории.

А в двумерной конвекции, при надкритичности  $r \geq r_m$ ,  $r_m \approx 36$  ясно видна тенденция к уменьшению  $K_{me}$  до величины порядка  $\alpha$  (более точно, до 1.29).

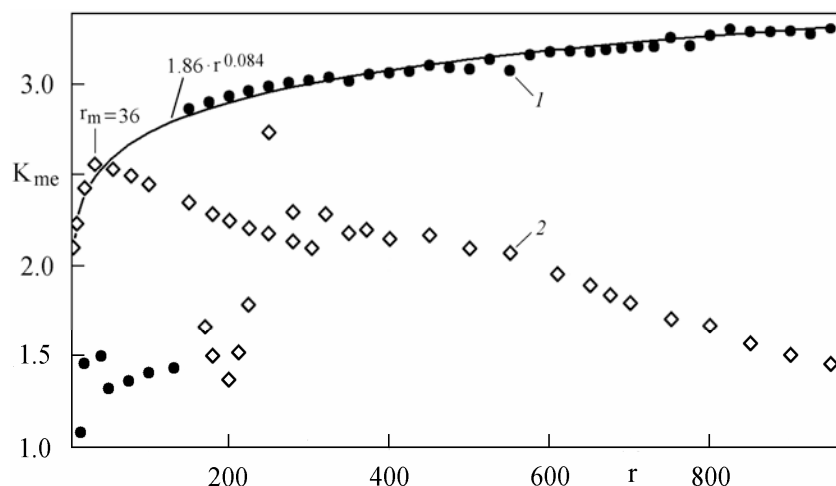


Рис. 8. Среднее волновое число  $K_{me}$  как функция надкритичности.

Из-за больших затрат машинного времени, 2d,rigid расчеты проводились только при  $\alpha = 1$ .

На рис. 9 приведено как функция надкритичности среднее волновое число  $K_{me}$ , полученное в 2d,rigid расчетах (кривая 1),  $3.06 \cdot r^{0.123}$  - на 9% уменьшенное значение волнового числа, соответствующего наиболее быстрорастущей в линейном приближении гармонике (2),  $2.98 \cdot r^{0.084}$  - на 60% увеличенное значение среднего волнового числа, полученного в 3d,free расчетах (3) и асимптотика  $K_{me} = 5$  (4).

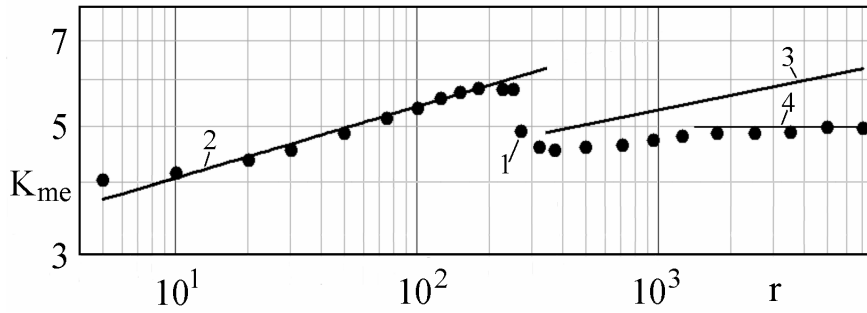


Рис. 9. Среднее волновое число  $K_{me}$  в 2d,rigid расчетах.

Из рис. 9 видно, что среднее волновое число в 2d,rigid расчетах при  $r \leq 250$  принимает значения, примерно на 9% меньше значения волнового числа, соответствующего наиболее быстрорастущей в линейном приближении гармонике, а затем, при  $r \approx 250$  происходит перестройка течения, сопровождающаяся резким, примерно на 27% уменьшением значения  $K_{me}$  и при  $r > 250$  значение волнового числа монотонно увеличивается с выходом на асимптотическое значение, примерно равное 5.

Сравнение наклонов кривых 1 и 3 показывает, что среднее волновое число в 2d,rigid расчетах растет при  $r > 250$  медленнее, чем в 3d,free. Отметим также, что при высокой надкритичности значения  $K_{me}$  в 2d,free и 2d,rigid расчетах отличаются примерно в 4 раза.

Рис. 10 также показывает постепенное включение больших масштабов (перестройки течения) в 2d,free расчетах при увеличении надкритичности, а именно: длины области  $\ell = \pi$  ( $\alpha = 1$ ) недостаточно при  $r \geq 10^3$ ,  $\ell = 2\pi$  ( $\alpha = 0.5$ ) - при  $r \geq 6 \cdot 10^3$  и  $\ell = 4\pi$  ( $\alpha = 0.25$ ) - при  $r \geq 1.7 \cdot 10^4$ .

Отсюда следует, что если исследователь не желает попадать в ситуацию, когда определяющим течение фактором становится горизонтальная протяженность области, то для правильного отражения постепенного включения больших масштабов в 2d,free расчетах при увеличении надкритичности размер области по горизонтали  $\ell$  должен увеличиваться примерно по линейному закону:

$$\ell = 2.7 \cdot (1 + 0.00022 \cdot r), \quad \ell = \pi/\alpha.$$

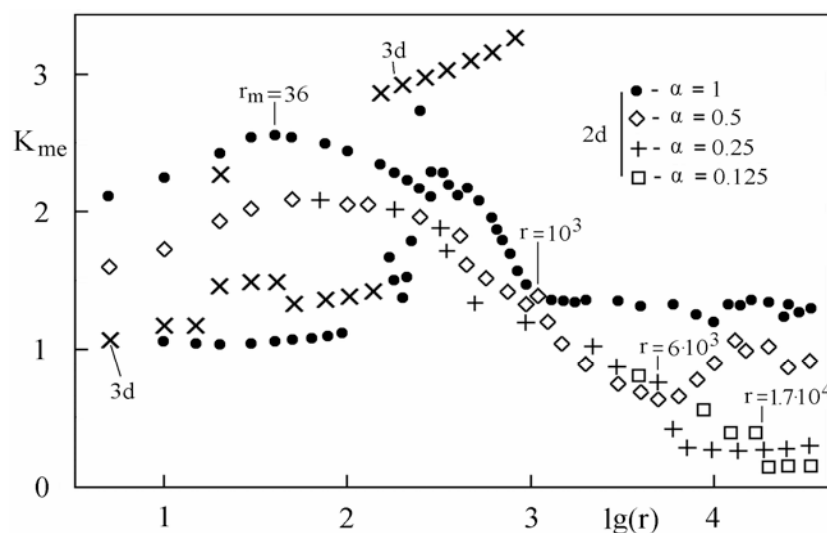


Рис. 10. Среднее волновое число  $K_{me}$  во всем диапазоне изменения надкритичности.

Отметим, что вихревой масштаб в 2d,free расчетах может быть меньше размера области, если надкритичность недостаточно большая. Это связано с тем, что на больших масштабах становится существенной стратификация. Тестовый 2d,free расчет в области с увеличенной до  $\ell = 8\pi$  горизонтальной протяженностью показал наличие стратификационных спектров Болджиано-Обухова (БО) для температуры и скорости при  $r = 6 \cdot 10^3$  (см. также рис. 36 и 40 при  $\ell = 4\pi$  и  $r = 1.25 \cdot 10^3$ ), качественно подобная ситуация наблюдалась также в эксперименте [43] для спектра температуры при высокой надкритичности.

Таким образом, при достаточно большой надкритичности вихревой масштаб в 3d,free расчетах уменьшается с ростом надкритичности, и течение становится все более мелкомасштабным. А в 2d,free расчетах наблюдается обратная тенденция - вихревой масштаб увеличивается до величины порядка размера области  $\ell = \pi/\alpha$  и течение становится крупномасштабным.

На основании данных, представленных на рис. 8-10, можно сделать вывод о том, что тенденция увеличения вихревого масштаба в 2d,rigid расчетах менее выражена и не так однозначна, как в 2d,free, что обусловлено наличием конкурирующего механизма генерации завихренности на горизонтальных границах.

Теперь рассмотрим начальный этап развития 2d,free конвекции при  $r = 3 \cdot 10^4$  и  $\alpha = 0.25$ , в этом расчете учитывалось [1025x65] гармоник. На рис. 11 изображен график  $K_{me}$  как функции времени.

Из начальных данных (см. рис. 12) при  $t_0 = 0.0235$  формируется решение, волновое число которого близко к волновому числу наиболее быстрорастущего по линейной теории возмущения  $K_m = 10.33$ . Затем волновое число уменьшается, причем спадание волнового числа соответствует предсказанному по размерности закону [74] (на рис. 11  $c = 8.6 \cdot 10^{-4}$ ). При  $t \sim 0.1$  волновое число  $K_{me} \approx 0.3$ , что близко к его среднему 0.283 и минимальному 0.25 значениям. Другими словами, вихревой масштаб при  $t \geq 0.1$  принимает значение порядка размера области по горизонтали. Наблюдаемая здесь динамика увеличения вихревого масштаба во времени качественно подобна полученной в эксперименте по изучению двумерной турбулентности [85].

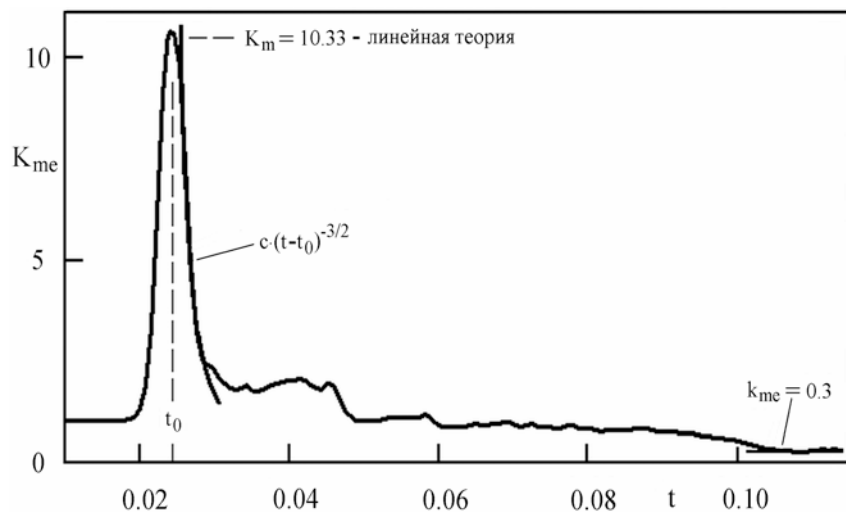


Рис. 11. Волновое число как функция времени.

Для иллюстрации процесса укрупнения вихревых структур, рассмотрим изолинии функции тока в три последовательные моменты времени.

На рис. 12 представлена функция тока на начальном этапе развития течения, здесь  $K_{me} \approx 1$ .

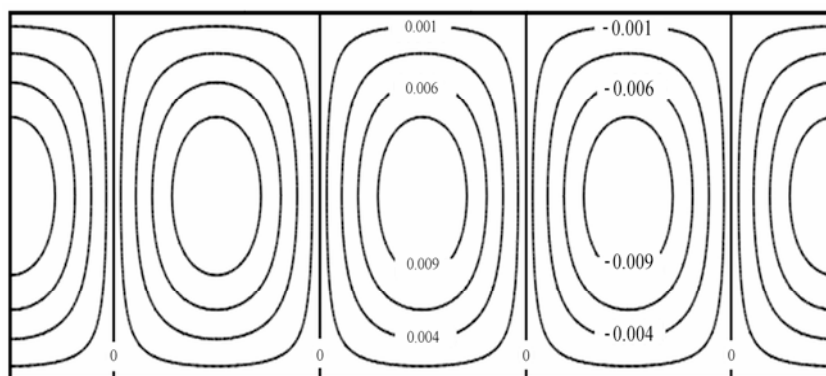


Рис. 12. Изолинии функции тока при  $t = 7.65 \cdot 10^{-4}$ .

Рис. 13 показывает начальный этап объединения вихрей и формирования крупномасштабной структуры, здесь  $K_{me} \approx 2.36$ .

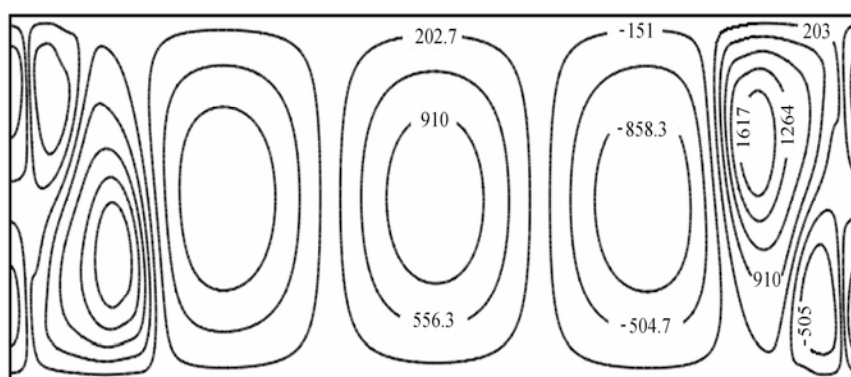


Рис. 13. Изолинии функции тока при  $t = 2.90 \cdot 10^{-2}$ .

А рис. 14 изображает уже сформированную крупномасштабную структуру, состоящую практически из единственного вихря, который имеет горизонтальный размер порядка размера области, так как здесь  $K_{me} \approx 0.235$  и, следовательно,  $l_{me} = \pi/K_{me} = 4.26\pi \sim 4\pi$ .

Линии тока на рис. 14 имеют характерные изломы, обусловленные взаимодействиями крупномасштабного вихря с горячими и холодными плюмами, которые поднимаются и опускаются от нижней и верхней горизонтальных границ, соответственно.



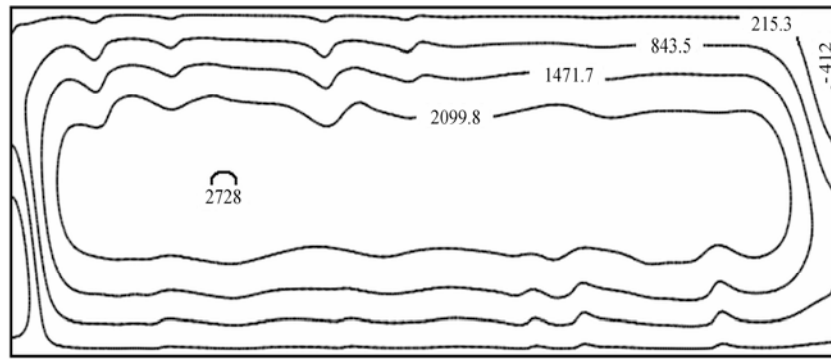


Рис. 14. Изолинии функции тока при  $t = 2.29 \cdot 10^{-1}$ .

Рис. 15, 16 и 17, на которых изображены среднее волновое число, число Нуссельта как функции времени и проекция траектории решения на плоскость  $Nu - K_{me}$  (часть траектории, соответствующая начальному моменту времени не приведена), показывают сложный характер этого крупномасштабного течения. При этом  $K_{me}$  совершает во времени колебания с пятикратным размахом, а  $Nu$  - с двукратным, а на рис. 17, несмотря на ненулевую корреляцию между  $Nu$  и  $K_{me}$  (она равна 0.64), видна характерная для стохастических процессов размытость траекторий.

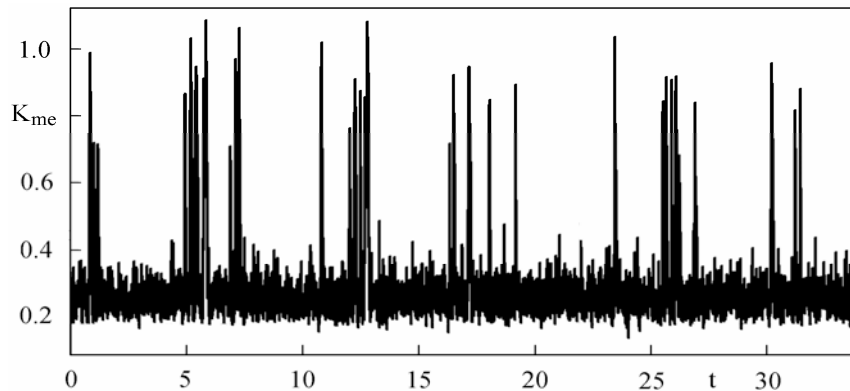


Рис. 15. Волновое число как функция времени.

Рис. 18 показывает, что спектр числа Нуссельта при таком одновихревом движении сложный, похожий на непрерывный, с характерным для стохастических процессов заполнением его длинноволновой части [103] и спаданием в области высоких частот примерно по степенному закону  $k^{-3}$ , здесь  $k$  - номер Фурье гармоники.

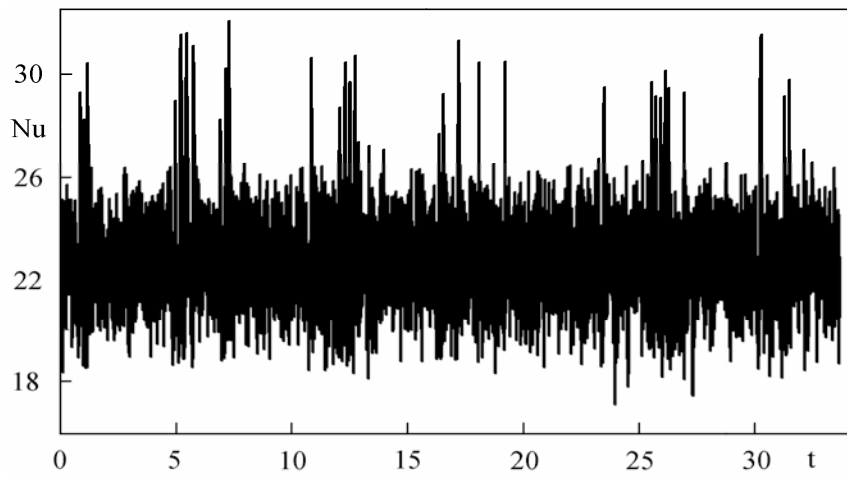


Рис. 16. Число Нуссельта как функция времени.

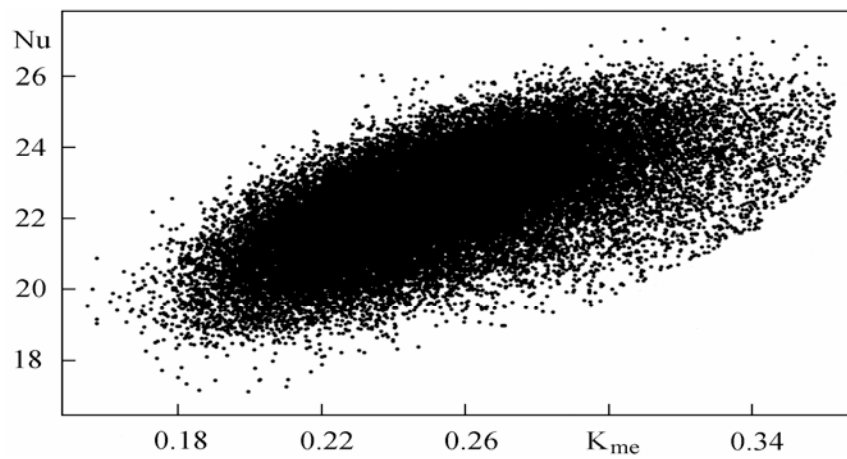


Рис. 17. Проекция решения на плоскость  $Nu - K_{me}$  при  $r = 3 \cdot 10^4$ .

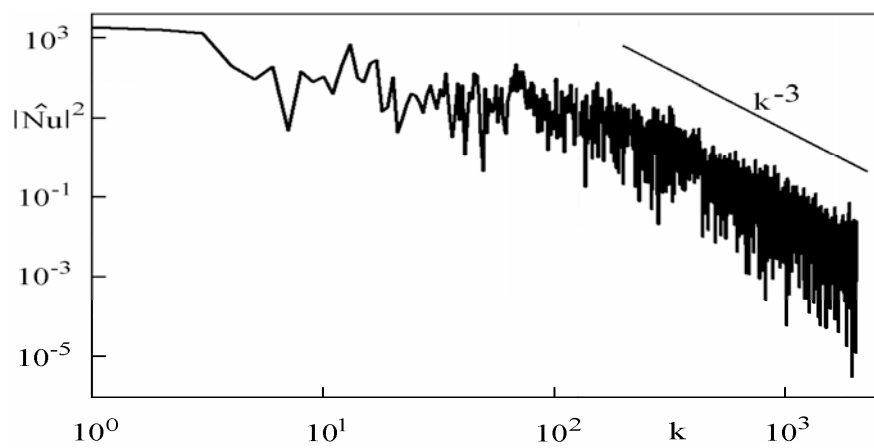


Рис. 18. Спектр числа Нуссельта.

Стационарная 2d,free конвекция становится неустойчивой при  $r \geq r_b$ ,  $r_b = 31.8$ , волновое число принимает максимальное значение 2.56 при  $r = r_m$ ,  $r_m = 36$ , а при  $r > r_m$  наблюдается тенденция к укрупнению вихрей, здесь и до конца данного подраздела  $\alpha = 1$ .

На рис. 19 изображена амплитуда колебаний числа Нуссельта  $Nu$  (точки - результаты расчетов), откуда видно, что амплитуда колебаний ответвившегося от стационарного при  $r \approx r_b$  периодического решения растет при  $r_b \leq r \leq 36$  примерно по корневому закону в соответствии с теоретическим предсказанием [106].

При  $r = 36$  число Нуссельта  $Nu$ , кинетическая энергия  $E_k$  и энтропия  $E_p$  совершают во времени колебания с амплитудами равными 3.7, 7.4 и 8.2% от их средних значений, соответственно. Временной спектр числа Нуссельта имеет вид, типичный для периодического процесса - незаполненные малые частоты и пики на частотах  $f$ ,  $2f$  и  $3f$ , где частота  $f$  соответствует гармонике с номером 82.

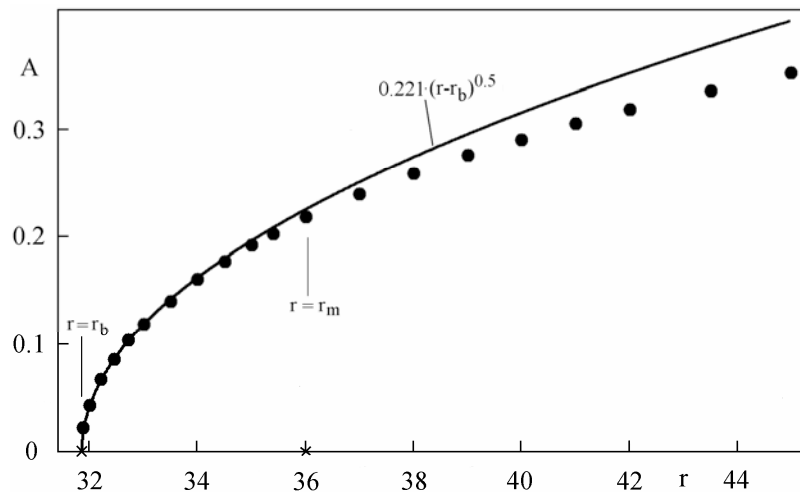


Рис. 19. Амплитуда колебаний числа Нуссельта.

Из сказанного следует, что конвективное течение при  $r = r_m$  представляет собой периодический режим, ответвившийся от стационарного при  $r = r_b$  и имеющий еще сравнительно небольшие амплитуды пульсаций и что

наблюдаемая при  $r > r_m$  тенденция укрупнения вихрей связана с появлением и развитием нестационарности.

Таким образом, в 3d,free и 2d,free расчетах качественно различается поведение вихревого масштаба  $\ell_{me} = \pi/K_{me}$  при достаточно большой надкритичности. В трехмерной конвекции вихревой масштаб уменьшается с ростом надкритичности примерно по закону корня двенадцатой степени и течение становится все более мелкомасштабным. И наоборот, в двумерной конвекции вихревой масштаб имеет тенденцию к росту и при достаточно большой надкритичности принимает значения порядка размера области. Тенденция увеличения вихревого масштаба в 2d,rigid расчетах менее выражена и не так однозначна, как в 2d,free, но при надкритичности  $r > 250$  значение среднего волнового числа в 2d,rigid расчетах растет не так быстро, как в 3d,free и выходит на асимптотику при  $r > 1500$ .

Из сказанного следует, что двумерные течения более крупномасштабные и обладают большей гладкостью, чем трехмерные.

### 3.4. Спектры скорости и температуры

#### 3.4.1. Некоторые качественные соображения о динамике спектров

Согласно [106], среднюю величину диссипации энергии за единицу времени и в единице массы жидкости можно оценить как  $V_{rms}^3/\ell$ , что дает оценку для величины безразмерной диссипации во всей области в 2d,free расчетах как:  $Ds \sim V_{rms}^3$ .

Теперь оценим генерацию энергии силой плавучести. Учитывая, что  $Nu = 1 + \langle \Theta \cdot W \rangle$  [51], где  $\langle f \rangle$  означает осреднение  $f$  по  $x$ ,  $z$  и  $t$  получаем, что  $E_b = Ra \cdot \ell \langle \Theta \cdot W \rangle = Ra \cdot \ell \cdot (Nu - 1)$ .

Теперь рассмотрим зависимости  $V_{rms}$  и  $Nu - 1$  от  $\ell$ , предполагая их степенной характер. Причем, увеличение  $\ell$  приводит к прямо

противоположному изменению  $Nu-1$  и  $V_{rms}$ , а именно,  $Nu-1$  при этом уменьшается, а  $V_{rms} = (2 \cdot Ek / \ell)^{0.5}$  - увеличивается (см. рис. 45 и 46).

Пусть  $V_{rms} \sim \ell^{\gamma_1}$ , а  $N-1 \sim \ell^{\gamma_2}$ . В стационарном в среднем течении должно быть выполнено  $D_s = E_b$ , что с учетом  $D_s \sim \ell^{3\gamma_1}$  и  $E_b \sim \ell^{\gamma_2 + 1}$  приводит к соотношению:  $3\gamma_1 = \gamma_2 + 1$ .

Анализ данных, приведенных на рис. 45 и 46 показывает, что выбор  $\gamma_1 = 0.267$  и  $\gamma_2 = -0.2$  обеспечивает разумное приближение и, таким образом,  $D_s$  и  $E_b$  растут при увеличении  $\ell$  примерно как  $\ell^{0.8}$ .

Представление о зависимости генерации и диссипации от надкритичности можно получить из выражения:  $E_b = Ra \cdot \ell \cdot (Nu-1)$ . В самом деле, по результатам 2d,free расчетов можно получить, что  $Nu-1 = 0.471 \cdot r^{0.398}$  при  $\alpha = 1$  и, следовательно:  $E_b = D_s \approx 310 \cdot \ell^{0.8} \cdot r^{1.4}$ .

Диссипацию температуры в этом приближении можно не принимать во внимание, так как она выражена относительно слабо из-за отсутствия в уравнении для температуры членов, обеспечивающих генерацию энергии.

Поскольку ниже рассматриваются спектры температуры и скорости двумерных 2d,free течений в областях относительно большой ( $\ell = 4\pi$ ,  $\alpha = 0.25$ ) и умеренной горизонтальной протяженности ( $\ell = \pi$ ,  $\alpha = 1$ ), то сделаем несколько замечаний качественного характера.

Отметим, что с ростом горизонтального размера области роль силы плавучести повышается и ее действие наиболее существенно на больших масштабах  $\ell_b$  порядка размера области  $\ell_b = \pi/\alpha$ . В самом деле, выражение для силы плавучести в (1.3), в отличие от остальных членов уравнения для скорости, не содержит каких-либо производных и поэтому ее вклад наиболее существенен на больших масштабах. Сила плавучести входит в уравнение только для скорости и проявляется в поле температуры опосредованно, через коэффициенты в членах нелинейного переноса. Отсюда можно заключить, что при последовательном увеличении горизонтальной протяженности области, первоначально существенная роль силы плавучести проявится в спектрах скорости, а потом и температуры.

В свою очередь, диссипация наиболее существенна на масштабах меньше масштаба генерации  $l_g$ , по порядку величины совпадающего с масштабом наиболее быстрорастущей в линейном приближении гармонике. Используя результаты [66], можно показать, что  $l_g = 0.4\pi \cdot r^{-1/7}$ .

Масштабы  $l_b$  и  $l_g$  разнесены и  $l_b/l_g = 2.5\alpha^{-1} \cdot r^{1/7} \approx 0.8 \cdot l \cdot r^{1/7}$ , что равно 5.9, 6.5 и 10.5 при  $\alpha = 1$  ( $l = \pi$ ) и  $r = 500, 950$  и  $3.4 \cdot 10^4$ , соответственно. Кроме того, отношение  $l_b/l_g$  прямо пропорционально  $l$ .

На основании вышеизложенного, представляется возможным следующий физический сценарий.

При умеренной горизонтальной протяженности области  $l$  диссипация кинетической энергии еще не доминирует и сила плавучести должна обусловить стратификационный спектр для скорости на больших масштабах. В то же время, действие силы плавучести на температуру еще незначительно, что с учетом малой диссипации и доминирования конвективного переноса для температуры должно приводить к спектру пассивной примеси  $k^{-5/3}$ .

С увеличением горизонтальной протяженности области, диссипация кинетической энергии, ее генерация и поток к малым масштабам растут и, как естественно полагать, становится также существенным поток энергии к большим масштабам. Следовательно, в спектре скорости должны появиться степенные законы, соответствующие каскадным процессам переноса кинетической энергии из масштаба генерации в малые масштабы с последующей диссипацией ( $k^{-3}$  - прямой каскад энтропии) и в большие, с формированием крупномасштабной структуры течения ( $k^{-5/3}$  - обратный или красный каскад энергии). А увеличение роли силы плавучести должно приводить к стратификационному спектру для температуры.

С другой стороны, формирование красного каскада энергии приводит к перекачке энергии пульсаций скорости в большие масштабы, поле скорости становится крупномасштабным при относительно низком уровне пульсаций, и возникает своеобразный вязкоконвективный интервал, где пульсации

температуры управляются крупномасштабным полем скорости, в результате чего в спектре температуры может появиться спектр Бэтчелора  $k^{-1}$  [74].

Заметим так же, что после формирования обратного каскада энергии его энергетическая роль неизбежно должна падать, что обусловлено отсутствием диссипации на больших масштабах. В свою очередь, диссипация энергии растет с увеличением надкритичности и горизонтальной протяженности области, обуславливая этим усиление прямого каскада энстрофии и приводя к установлению единого степенного закона в спектре скорости, близкого к закону энстрофийного каскада  $k^{-3}$ .

Ниже также рассматриваются спектры температуры и скорости трехмерных 3d,free течений при умеренной горизонтальной протяженности области  $\ell = \pi$  ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ) и надкритичности  $r \leq 950$ . Следует учесть, что число Рейнольдса здесь невысокое и не превосходит 44.

Рассуждая по аналогии с двумерным случаем, заключаем, что при трехмерной конвекции в рассматриваемой области значений параметров должен реализовываться сценарий, аналогичный описанному выше для двумерных течений при умеренной горизонтальной протяженности области  $\ell$ , при котором для скорости будут типичны стратификационные спектры, а для температуры - спектр пассивной примеси.

### 3.4.2. Временной спектр температуры

Сравним временной энергетический спектр (квадрат модуля Фурье преобразования функции времени) пульсаций температуры в центре конвективной ячейки, полученный в трехмерном 3d,free и двумерном 2d,free расчетах с экспериментальными данными по турбулентной конвекции газообразного гелия при  $5^\circ\text{K}$  [42].

Эксперименты проводились в цилиндрической ячейке из нержавеющей стали с аспектным отношением (диаметр отнесенный к высоте) 0.5 и

критическим числом Рэля  $1.7 \cdot 10^4$  [66]. Расчеты проводились при совпадающей с экспериментом надкритичности и числе Прандтля.

Пространственные и временные спектры являются очень консервативной величиной, слабо зависящей от надкритичности, временного и пространственного разрешения и размерности [58]. Такая консервативность позволяет надеяться на правомерность сравнения спектра температуры, полученного в 2d,free расчете с данными эксперимента.

На рис. 20 и 21, в качестве характерного масштаба частоты было выбрано  $v/D^2$ , расчетные и экспериментальные спектральные кривые нормированы так, чтобы интеграл по всем частотам был равен 1. Число Прандтля в эксперименте и этих расчетах было равно 0.8.

На рис. 20 и 21 показаны результаты расчетов (кривые 1), экспериментальные данные [42] (2) и диссипативная частота  $f_d = V \cdot Re^{3/4} / D$  [106]. Здесь  $V$  и  $Re = V \cdot D / \nu$  - среднеквадратичная скорость и число Рейнольдса.

На рис. 20 приведен полученный в 3d,free расчете при  $r = 410$  временной спектр, а на рис. 21 - результат 2d,free расчета при  $r = 6.4 \cdot 10^3$ . Данные эксперимента и расчетов хорошо согласуются, заметное отклонение наблюдается только на диссипативных частотах  $f \sim f_d$  (более точно, на частотах примерно в три раза меньше  $f_d$ ).

### **3.4.3. Пространственные спектры при конвекции в области умеренной горизонтальной протяженности**

Теперь рассмотрим пространственные спектры температуры и скорости в двумерных 2d,free и трехмерных 3d,free расчетах в области умеренной горизонтальной протяженности  $\pi$  ( $\alpha = 1, \beta = 1$ ).



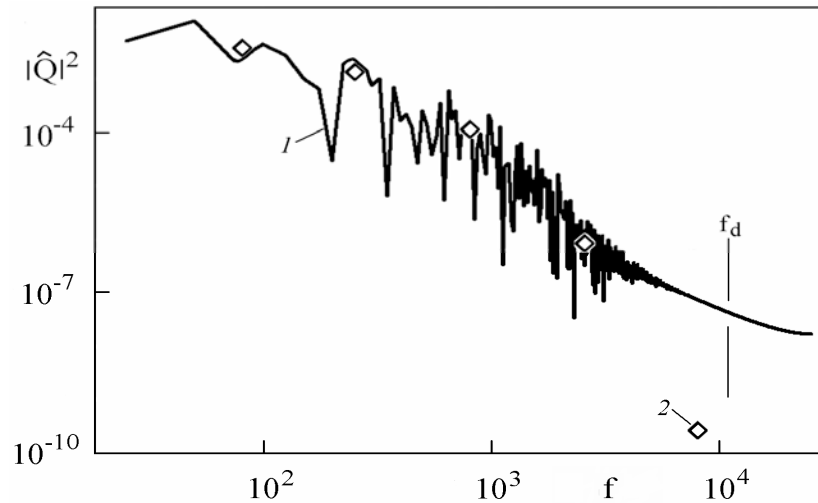


Рис. 20. Временной спектр температурных пульсаций, полученный в 3d,free расчете (кривая 1) и эксперименте (2) при  $r = 410$ .

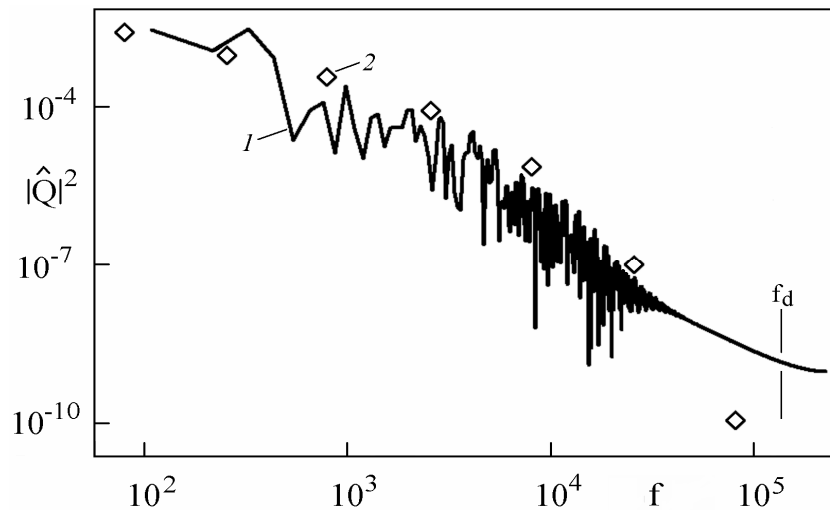


Рис. 21. Временной спектр температурных пульсаций, полученный в 2d,free расчете (кривая 1) и эксперименте (2) при  $r = 6.4 \cdot 10^3$ .

#### 3.4.3.1. Спектры скорости

Теперь рассмотрим полученные в 2d,free расчетах одномерные энергетические спектры пульсаций скорости. На рис. 22 и 23 вертикальной чертой показана граница интервала аппроксимации и черным квадратом на рис. 22 - волновое число наиболее быстрорастущей по линейной теории гармонике.

На рис. 22 представлен спектр пульсаций кинетической энергии  $EV_k$ . При  $r \geq 10^3$  четко идентифицируется (интервал волновых чисел примерно порядок) спектр Болджиано-Обухова (БО)  $k^{-11/5}$  для пульсаций скорости.

На рис. 23 представлен спектр пульсаций кинетической энергии  $EV_m$ . При  $r \geq 4 \cdot 10^3$  четко виден спектр  $m^{-5}$ , предсказанный теоретически для пульсаций скорости в жидкости с высоким числом Прандтля [74].

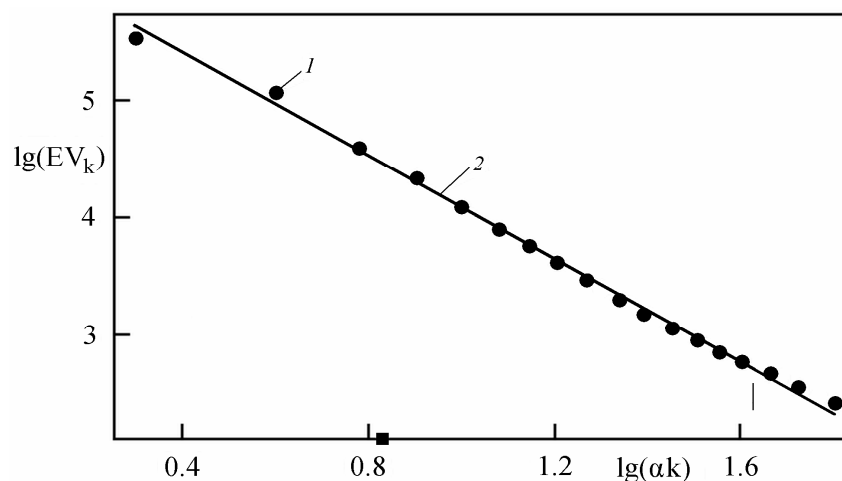


Рис. 22. Спектр пульсаций скорости в горизонтальном направлении, 1 - 2d,free расчет при  $r = 1250$ , 2 -  $k^{-11/5}$ .

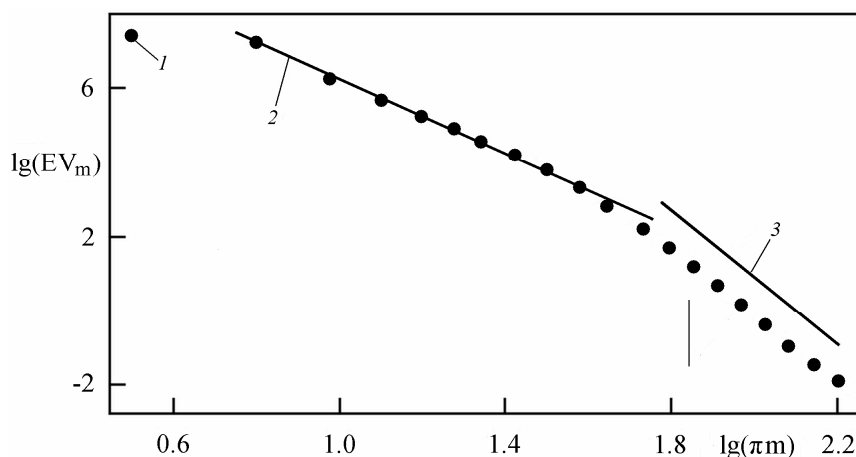


Рис. 23. Спектр пульсаций скорости в вертикальном направлении, 1 - 2d,free расчет при  $r = 3.4 \cdot 10^4$ , 2 -  $m^{-5}$ , 3 -  $m^{-9}$ .

Рассмотрим теперь одномерные энергетические спектры скорости, полученные в 3d,free расчетах при  $r = 950$ . На рис. 24-26 вертикальной чертой показана граница интервала аппроксимации и черным квадратом на рис. 24 и 25 - волновое число наиболее быстрорастущей по линейной теории гармоник.

На рис. 24 приведен спектр, отвечающий горизонтальному направлению  $x$ , виден продолжительный участок со стратификационным спектром БО для скорости  $k^{-11/5}$ .

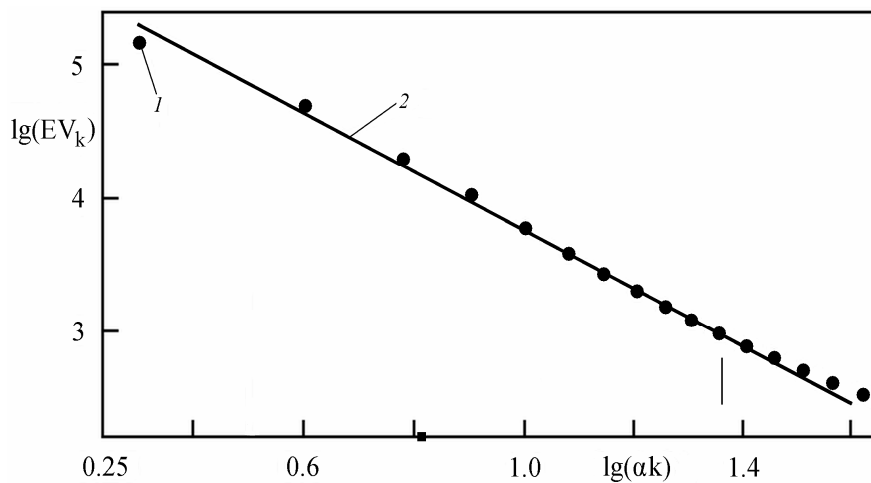


Рис. 24. Спектр пульсаций скорости в горизонтальном направлении  $x$ ,  
1 - 3d,free расчет, 2 -  $k^{-11/5}$ .

На рис. 25 приведен спектр, отвечающий горизонтальному направлению  $y$ , виден продолжительный участок со стратификационным спектром Ламли-Шура  $n^{-3}$ .

На рис. 26 приведен спектр, отвечающий вертикальному направлению  $z$ , виден участок со степенным законом  $m^{-5}$ .

Подчеркнем, что в спектрах среднеквадратичных пульсаций скорости, полученных в двумерных 2d,free и трехмерных 3d,free расчетах, идентифицируются общие степенные законы БО  $k^{-11/5}$  и  $m^{-5}$  в горизонтальном  $x$  и вертикальном направлениях, соответственно. Стратификационный спектр БО  $k^{-11/5}$  для скорости наблюдался в лабораторных экспериментах по исследованию турбулентной конвекции [44,46], а спектр  $m^{-5}$  предсказан

теоретически для жидкости с высоким числом Прандтля [74]. В 3d,free расчетах, в горизонтальном  $u$  направлении наблюдался стратификационный спектр Ламли-Шура  $n^{-3}$ , предсказанный теоретически и обнаруженный в атмосферных экспериментах [107].

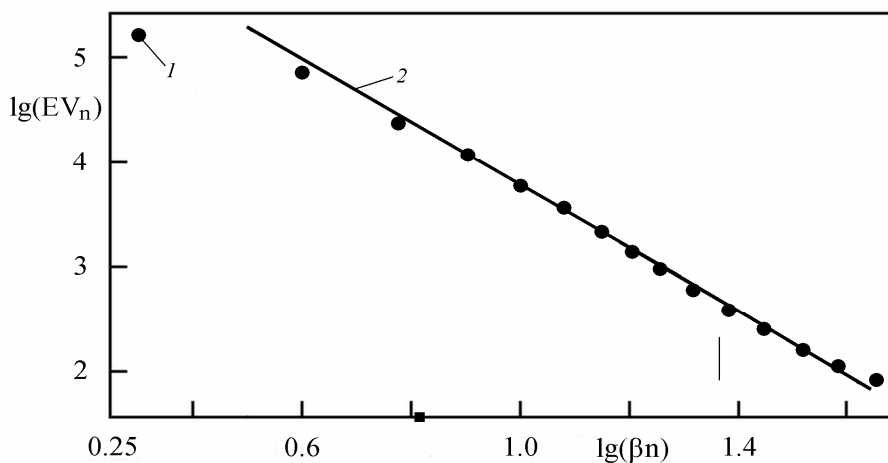


Рис. 25. Спектр пульсаций скорости в горизонтальном направлении  $u$ ,  
1 - 3d,free расчет, 2 -  $n^{-3}$ .

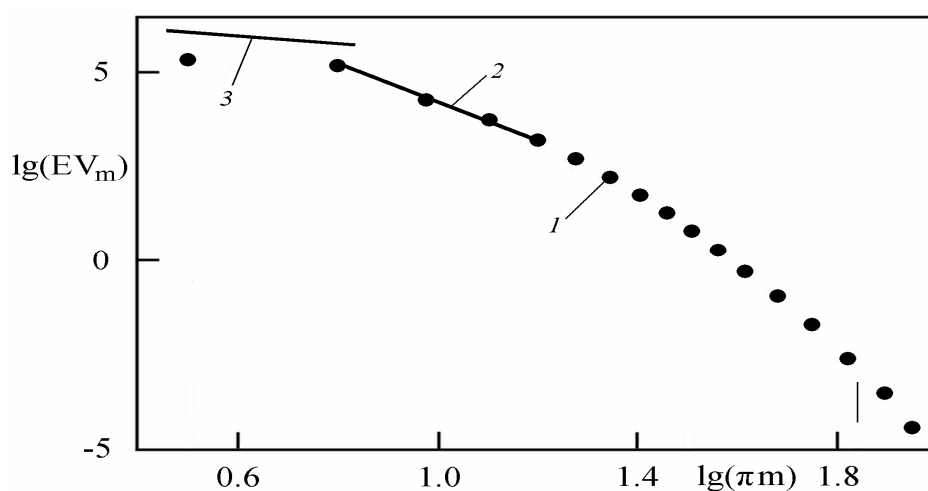


Рис. 26. Спектр пульсаций скорости в вертикальном направлении  $z$ ,  
1 - 3d,free расчет, 2 -  $m^{-5}$ , 3 -  $m^{-1}$ .

Отметим, что в атмосферных экспериментах [107] спектр Ламли-Шура крупномасштабный и при увеличении волнового числа заменяется спектром

Колмогорова. В связи с этим заметим, что спектр  $k^{-3}$ , полученный ранее при численном моделировании турбулентной конвекции Рэлея-Бенара [1,12] имеет, по-видимому, другую физическую природу, так как он коротковолновый и сменяет спектр Колмогорова  $k^{-5/3}$  при увеличении волнового числа.

Анизотропия горизонтальных направлений для спектров пульсаций скорости в 3d,free расчетах обусловлена двумя обстоятельствами: во первых, анизотропной постановкой граничных условий на боковых границах, конкретный вид которой определился стремлением обеспечить преимущество с 2d,free расчетами и во вторых - еще не достаточно развитым перемешиванием вследствие невысоких значений числа Рейнольдса. Последнее, вычисленное по среднеквадратичной скорости и толщине слоя равно 44, а определенное по характерной скорости и масштабу пульсаций - 21.4 (здесь  $r = 950$ ). Отметим, что значение равное 15 для пульсационного (внутреннего) числа Рейнольдса связывается с началом турбулентности [9].

Отметим также, что в 3d,free расчетах данной работы наблюдаются две тенденции: увеличения числа Рейнольдса ( $\sim r^{0.5}$ ) и уменьшения характерного горизонтального вихревого масштаба ( $\sim r^{-1/12}$ ) с ростом надкритичности, что приводит к постепенному ослаблению зависимости решения от конкретного вида граничных условий на боковых границах и от вносимой ими анизотропии.

Отметим, что и в лабораторных экспериментах переход к турбулентности происходит при невысоком значении числа Рейнольдса. В самом деле, переход к турбулентной конвекции в лабораторных экспериментах при  $Pr = 10$  происходит при числе Рэлея около  $3.5 \cdot 10^5$  и надкритичности  $r \approx 200$  [47], что дает оценку для числа Рейнольдса как  $Re \approx 25$  [48].

В заключение этого раздела проанализируем характерные масштабы в 2d,free расчетах. Диссипативное волновое число во всем диапазоне изменения надкритичности в 2d,free расчетах при  $\alpha = 1$  и  $Pr = 10$  может быть оценено как (см. раздел 2.4.1.6):

$$k_d = \pi / \lambda = 5.92 \cdot r^{0.315}.$$

Волновое число Болджиано  $k_b$ , характеризующее точку смены механизма БО Колмогоровским, причем сценарий БО может реализовываться при волновых числах меньших  $k_b$ , можно определить как [49]:

$$k_b = \pi \left( \frac{\text{Pr} Ra}{Nu^2} \right)^{0.25}, \quad k_b = 25.6 r^{0.1} \quad \text{при } 6 \cdot 10^2 \leq r \leq 3.4 \cdot 10^4.$$

В разделе 2.4.1.3 главы 2 описаны результаты тестового расчета с учетом различного числа гармоник при  $r = 6 \cdot 10^3$ . На рис. 27 при этой надкритичности изображен как функция волнового числа спектр среднеквадратичных пульсаций скорости в горизонтальном направлении, где данные расчета с учетом [1025x257] гармоник соответствуют кривой 1, [513x129] - 2, а прямая линия - степенному закону  $k^{-2.3}$ , близкому к спектру БО  $k^{-11/5}$  для скорости. Вертикальными прерывистыми линиями показаны границы интервалов аппроксимации для расчетов, результаты которых показаны кривыми 1 и 2.

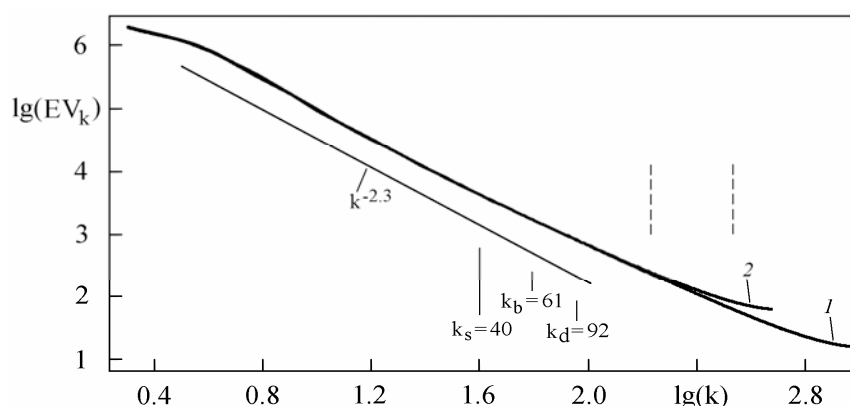


Рис. 27. Спектр пульсаций скорости в горизонтальном направлении.

Видно, что граница спектра  $k^{-2.3}$  приблизительно соответствует  $k_s = 40$ , причем  $k_s < k_b = 61$ , а  $k_b$  не выходит за границы интервала аппроксимации.

### 3.4.3.2. Спектры температуры

Сначала рассмотрим полученные в 2d,free расчетах одномерные пространственные энергетические спектры пульсаций температуры,

соответствующие горизонтальному (рис. 28-30) и вертикальному (рис. 31,32) направлениям. На рис. 28-30 приведена только треть спектра, соответствующая интервалу аппроксимации, а остальная часть спектра не приведена ввиду ее не информативности из-за искажения численными эффектами [67], а положение черного квадрата соответствует волновому числу наиболее быстрорастущей по линейной теории гармонике. На рис. 31,32 приведен весь спектр и вертикальной чертой показана граница интервала аппроксимации.

На рис. 28-30 представлены спектры пульсаций температуры  $EQ_k$  как функции  $\alpha k$ . При умеренно высокой надкритичности  $500 \leq r \leq 10^3$  виден только спектр пассивной примеси  $k^{-5/3}$  (рис. 28), затем при  $r \approx 10^3$  происходит перестройка спектра с формированием двух интервалов со степенными законами  $k^{-5/3}$  и  $k^{-2.4}$  (рис. 29), а при  $r \geq 2 \cdot 10^4$  в спектре пульсаций температуры четко идентифицируется только один интервал со степенным законом  $k^{-2.4}$  (рис. 30).

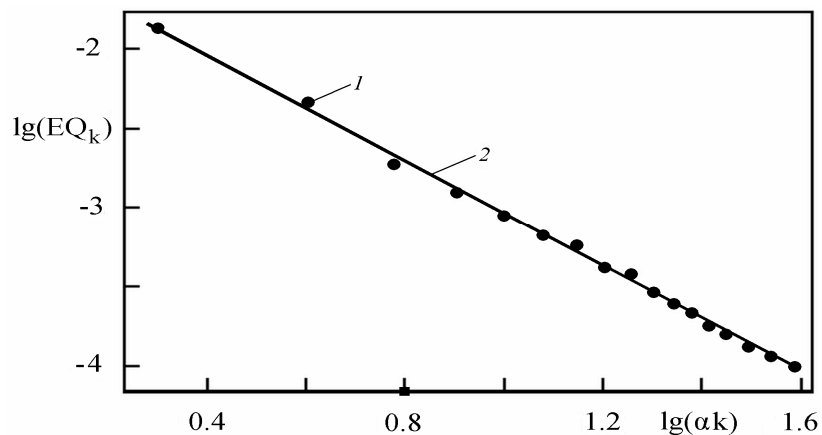


Рис. 28. Пространственный спектр пульсаций температуры в горизонтальном направлении, 1 - результат 2d,free расчета при  $r = 750$ , 2 -  $k^{-5/3}$ .

На рис. 31 и 32 представлены спектры пульсаций температуры  $EQ_m$  как функции  $\lambda m$ . Участки многозначности с двумя ветвями спектральных кривых на рис. 31 отражают разделение гармоник по виду их симметрии при еще недостаточно развитом перемешивании. При надкритичности в интервале  $10^3 \leq r \leq 1.5 \cdot 10^4$  на ветвях спектральной кривой видны спектры пассивной

примеси  $m^{-5/3}$  и  $m^{-2.4}$  (рис. 31), но при  $r \geq 1.5 \cdot 10^4$  обе ветви следуют степенному закону  $m^{-5/3}$  (рис. 32).

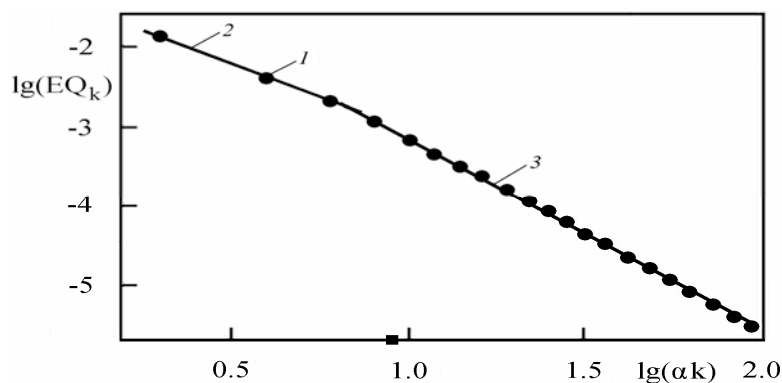


Рис. 29. Спектр пульсаций температуры в горизонтальном направлении, 1 - результат 2d,free расчета при  $r = 10^4$ , 2 -  $k^{-5/3}$ , 3 -  $k^{-2.4}$ .

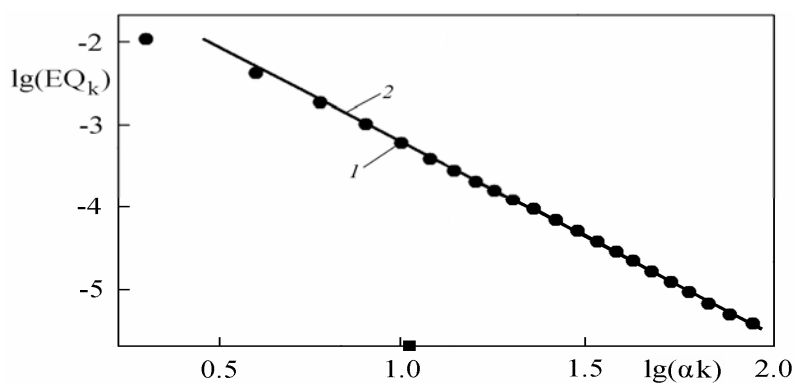


Рис. 30. Спектр пульсаций температуры в горизонтальном направлении, 1 - результат 2d,free расчета при  $r = 3.4 \cdot 10^4$ , 2 -  $k^{-2.4}$ .

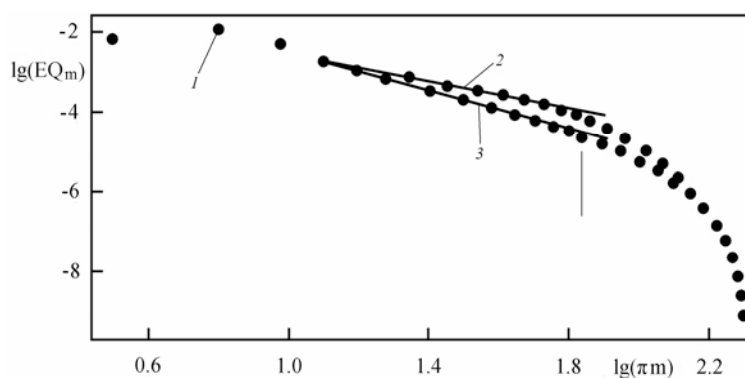


Рис. 31. Спектр температурных пульсаций в вертикальном направлении, 1 - 2d,free расчет при  $r = 6 \cdot 10^3$ , 2 -  $m^{-5/3}$ , 3 -  $m^{-2.4}$ .



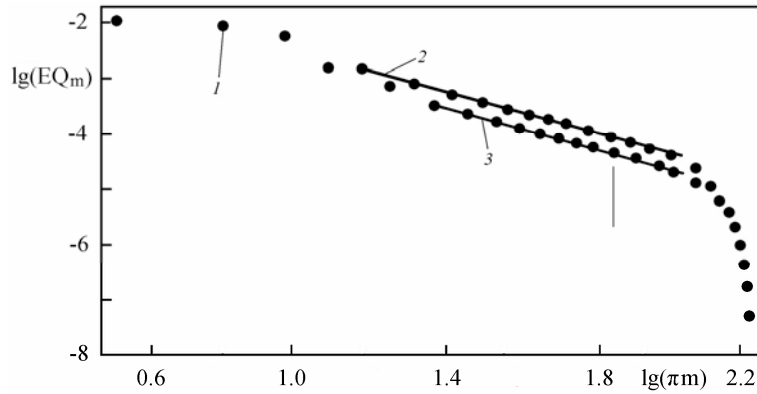


Рис. 32. Спектр температурных пульсаций в вертикальном направлении,  
1 - 2d,free расчет при  $r = 3.4 \cdot 10^4$ , 2 -  $m^{-5/3}$ , 3 -  $m^{-5/3}$ .

Теперь рассмотрим одномерные пространственные энергетические спектры температурных пульсаций, полученные в 3d,free расчетах при  $r = 950$ . Для пульсаций температуры и скорости при  $Pr = 10$  характерные спектры формируются в 3d,free расчетах при  $r \geq 500$  и имеют устойчивый характер до  $r = 950$ .

Участки спектров, отвечающие высоким частотам, на рис. 33 и 34 не приведены из-за их нефизичности ввиду искажения численными эффектами, а вертикальной линией на рис. 33-35 показана граница интервала аппроксимации [67]. Положение черного квадрата на рис. 33 и 34 соответствует волновому числу наиболее быстрорастущей в линейном приближении гармоники.

На рис. 33 и 34 приведены спектры температурных пульсаций, отвечающие горизонтальным  $x$  (рис. 33) и  $y$  (рис. 34) направлениям при  $r = 950$ . Четко идентифицируются спектры  $k^{-2.4}$  (рис. 33) и  $n^{-5/3}$  (рис. 34).

На рис. 35 приведен спектр температурных пульсаций, отвечающий вертикальному направлению  $z$ . Виден участок со степенным законом  $m^{-5/3}$ , но идентификация его менее четкая, чем на рис. 34.

Отметим, что во всем рассматриваемом диапазоне надкритичности в двумерных 2d,free и трехмерных 3d,free расчетах в температурных спектрах идентифицируются общие степенные законы  $k^{-5/3}$  и  $k^{-2.4}$ . Последний из перечисленных спектров еще не получил ясного физического и теоретического

обоснования, а первый указывает на поведение температуры как пассивной примеси без доминирующей роли плавучести [74].

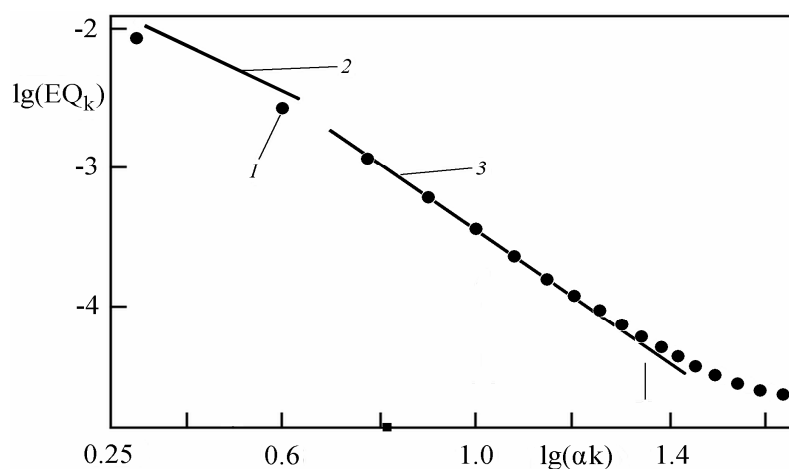


Рис. 33. Спектр пульсаций температуры в горизонтальном  $x$  - направлении, 1 - 3d,free расчет при  $r = 950$ , 2 -  $k^{-5/3}$ , 3 -  $k^{-2.4}$ .

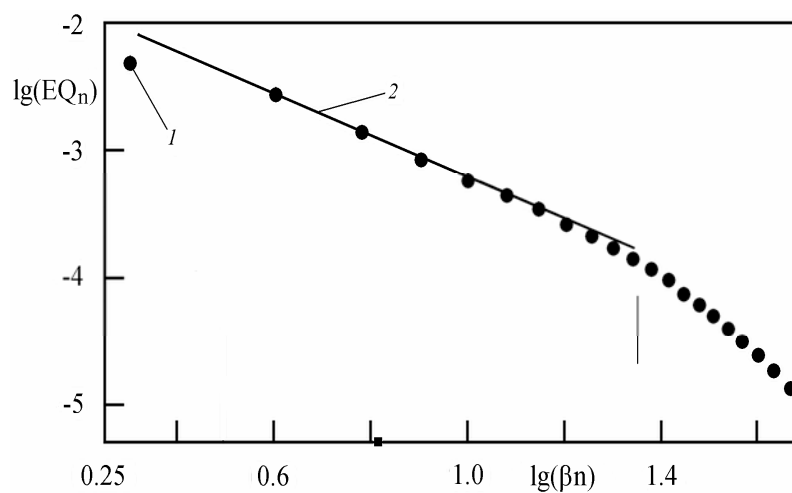


Рис. 34. Спектр температурных пульсаций в горизонтальном  $y$  - направлении, 1 - 3d,free расчет при  $r = 950$ , 2 -  $n^{-5/3}$ , 3 -  $n^{-2.4}$ .

Спектры  $k^{-5/3}$  и  $k^{-2.4}$  наблюдались в экспериментах по турбулентной конвекции в газообразном  $He$  при криогенной температуре [42,43].

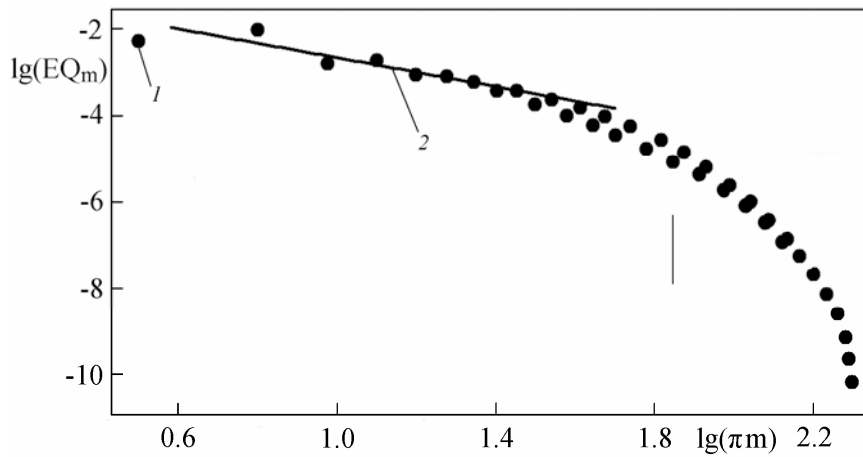


Рис. 35. Спектр температурных пульсаций в вертикальном  $z$  - направлении, 1 - 3d,free расчет при  $r = 950$ , 2 -  $m^{-5/3}$ .

### 3.4.4. Пространственные спектры при конвекции в области большой горизонтальной протяженности и каскадные процессы

В этом разделе рассматриваются результаты 2d,free расчетов в области большой горизонтальной протяженности  $\ell = 4\pi$  ( $\alpha = 0.25$ ).

#### 3.4.4.1. Спектры скорости

Отмеченное выше укрупнение вихревого масштаба связано, очевидно, с потоком кинетической энергии из масштаба генерации к большим масштабам.

Теоретические рассуждения показывают, что в двумерной турбулентности должны существовать два инерционных интервала со степенными законами  $k^{-5/3}$  и  $k^{-3}$ , по которым реализуются каскадные процессы переноса кинетической энергии и энтропии. Причем, направления потоков, переносящих соответствующие квадратичные величины из масштаба генерации различные - обратный (красный) каскад перекачивает кинетическую энергию к большим масштабам, а прямой каскад энтропии - к малым, обеспечивая диссипацию [74].

На рис. 36-41 высокочастотные участки спектра не показаны из-за их не информативности ввиду искажения численными эффектами [67]. На рис. 36-38  $k_g$  соответствует волновому числу наиболее быстрорастущего по линейной теории возмущения.

При  $500 \leq r \leq 4 \cdot 10^3$  на длинноволновом участке спектра скорости наблюдаются одновременно два различных спектра, соответствующие двум конкурирующим механизмам – плавучести и обратному каскаду энергии (рис. 36). Это сосуществование при  $0 \leq \alpha k \leq k_1$ ,  $k_1 \approx 7.5$  двух различных спектров ( $k^{-5/3}$  и искаженного  $k^{-11/5}$ ) обуславливает их нечеткую идентификацию и в некотором смысле условное проведение верхней границы  $r = 4 \cdot 10^3$  этого сосуществования по надкритичности.

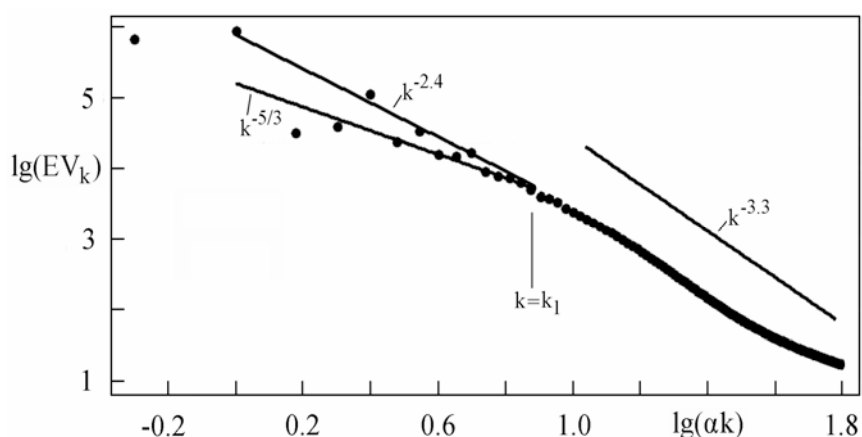


Рис. 36. Спектр скорости при  $r = 1.25 \cdot 10^3$ .

На рис. 37 изображен одномерный ( $x$  - направление) пространственный спектр скорости при  $r = 6 \cdot 10^3$ . Ясно видны инерционные интервалы со степенными законами  $k^{-5/3}$  и  $k^{-3}$ , соответствующие обратному каскаду энергии и прямому каскаду энтропии. На вставках приведены соответствующие потоки энергии (внизу) и энтропии (вверху) по спектру [108]. В области малых волновых чисел виден участок, где поток энергии отрицательный и примерно постоянный и небольшой интервал в области больших волновых чисел – где поток энтропии положительный и в среднем постоянный.

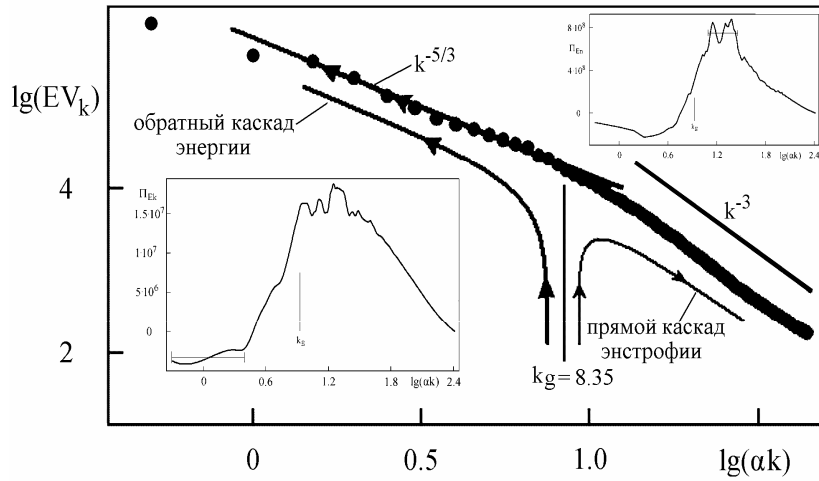


Рис. 37. Спектр скорости при  $r = 6 \cdot 10^3$ .

На рис. 38 одномерный спектр скорости изображен при  $r = 3 \cdot 10^4$ . Ясно виден обратный каскад энергии со степенным законом  $k^{-5/3}$ . Но в области более высоких волновых чисел степенной закон энтропийного каскада  $k^{-3}$  трансформировался в более пологий  $k^{-2.6}$ .

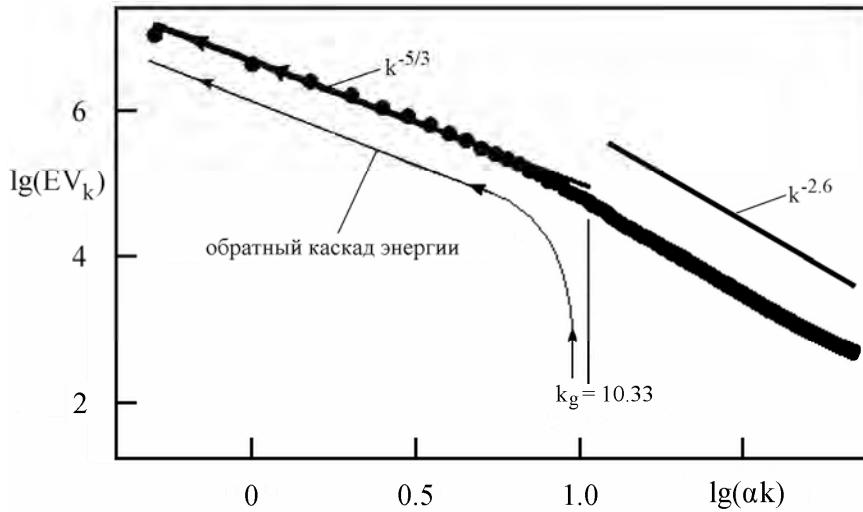


Рис. 38. Спектр скорости при  $r = 3 \cdot 10^4$ .

На рис. 39 приведен характерный вид спектра скорости при высокой надкритичности с типичным наполнением его длинноволновой части и со спаданием по закону  $k^{-2.6}$ .

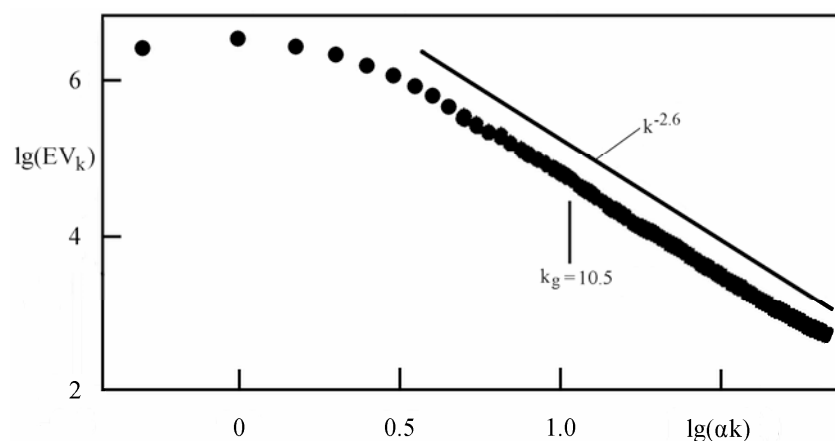


Рис. 39. Спектр скорости при  $r = 3.4 \cdot 10^4$ .

### 3.4.4.2. Спектры температуры

При  $750 \leq r \leq 2 \cdot 10^3$  в длинноволновой части температурного спектра виден участок со степенным законом Болджиано-Обухова (БО)  $k^{-7/5}$ , что иллюстрирует спектр температуры на рис. 40.

Но при  $r = 2 \cdot 10^3$  происходит перестройка длинноволновой части температурного спектра и при  $2 \cdot 10^3 < r \leq 6 \cdot 10^3$  спектр БО заменяется на спектр Бэтчелора  $k^{-1}$  (рис. 41).

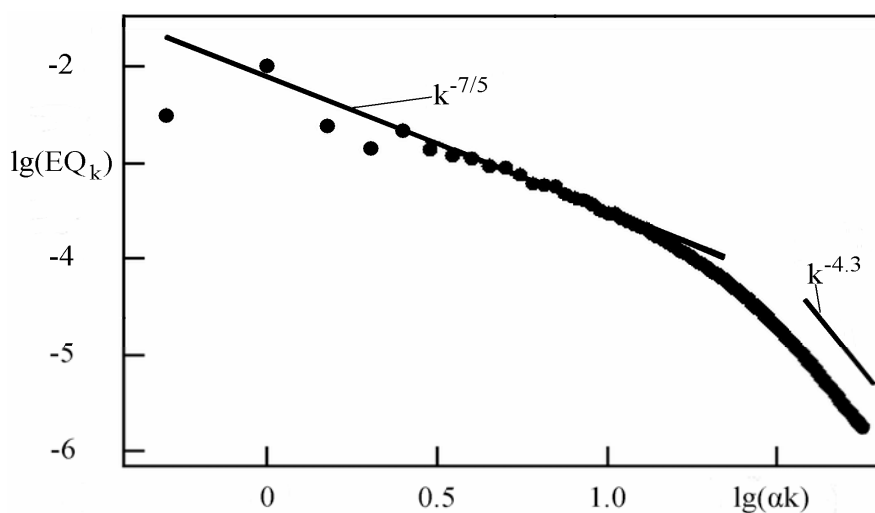


Рис. 40. Спектр температуры при  $r = 1.25 \cdot 10^3$ .

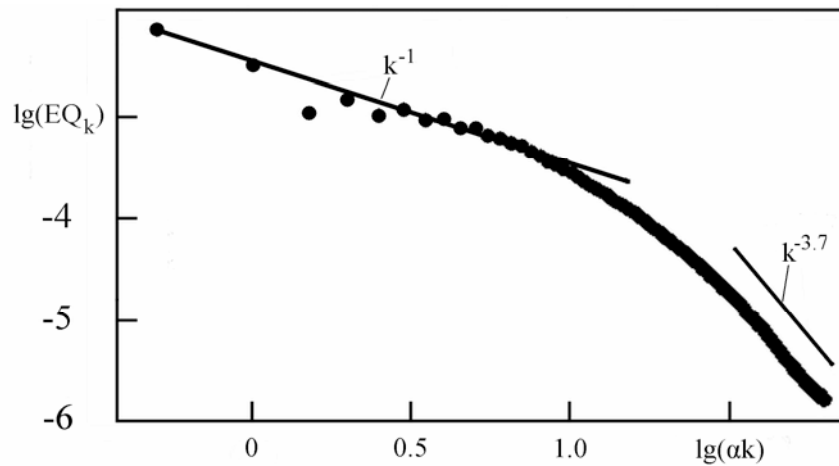


Рис. 41. Спектр температуры при  $r = 3 \cdot 10^3$ .

При дальнейшем увеличении надкритичности показатель степенного закона длинноволнового участка температурного спектра совершает колебания в интервале  $[0.7, 1]$ , с наибольшей вероятностью принимая значение 0.8, а показатель степенного закона коротковолнового спектра температуры совершает колебания в интервале  $[-5.2, -3]$ .

Рис. 42 показывает, что при увеличении надкритичности показатель степенного закона длинноволнового спектра температуры определяется с большей точностью.

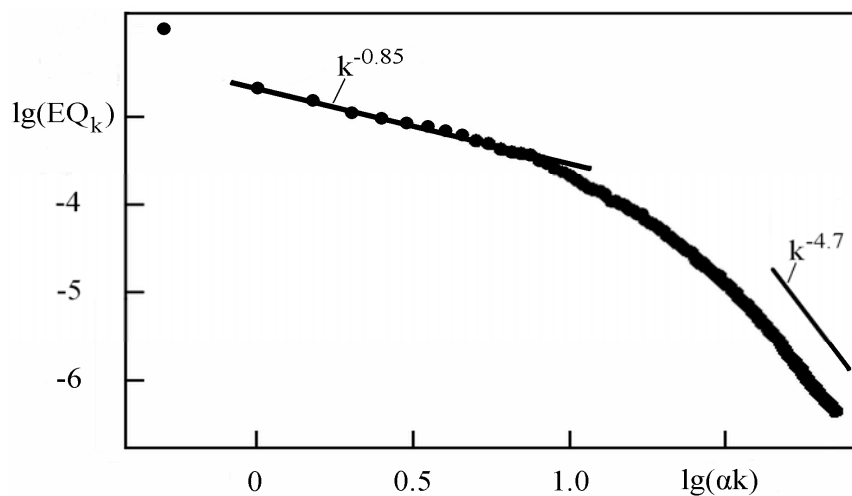


Рис. 42. Спектр температуры при  $r = 1.3 \cdot 10^4$ .

### 3.4.4.3 Диаграмма спектров

На рис. 43 как функции надкритичности приведены полученные в расчетах показатели степенных законов (умноженные на -1), соответствующие длинноволновым спектрам скорости (1), температуры (2) и коротковолновому - скорости (3).

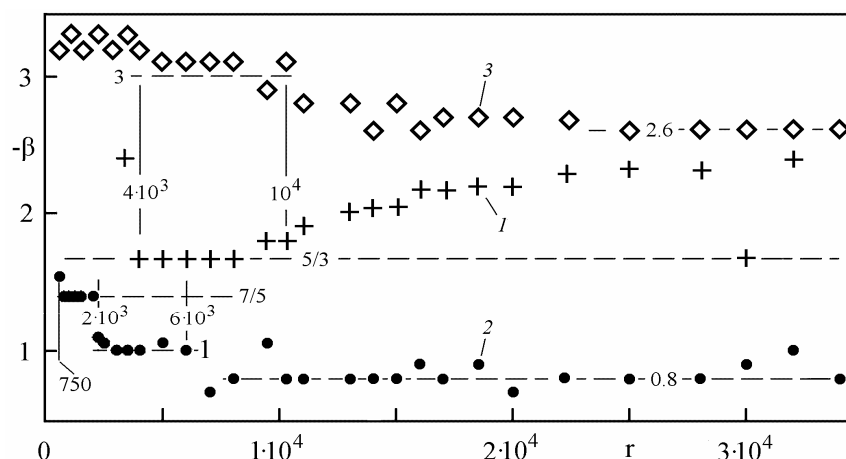


Рис. 43. Показатели степенных законов для скорости и температуры как функции надкритичности.

При  $500 \leq r < 4 \cdot 10^3$  в длинноволновом спектре скорости видны два степенные закона, отражающие конкурирующие механизмы – силу плавучести и обратный каскад энергии (рис. 36), соответствующий этому интервалу надкритичности участок на рис. 43 не приведен из-за большой неточности определения показателей степенных законов.

Из рис. 43 видно, что в диапазоне значений надкритичности  $4 \cdot 10^3 \leq r \leq 10^4$  реализуются одновременно обратный каскад энергии и прямой каскад энтропии. В инерционном интервале прямого каскада энтропии спектр скорости следует степенному закону  $k^{-\beta}$ ,  $2.9 \leq \beta \leq 3.1$ , близкому к  $k^{-3}$ . А при  $r \geq 10^4$  видна тенденция к установлению единого во всем спектре степенного закона, близкого к  $k^{-2.6}$ ; характерный вид спектра скорости при большой



надкритичности показан на рис. 39, обратный каскад энергии при этом четко идентифицируется лишь эпизодически (например, при  $r = 3 \cdot 10^4$  на рис. 38).

Отмеченная перестройка спектра скорости при  $r \approx 10^4$  аналогична полученной в численных исследованиях [79,80,83] и эксперименте [84] и обусловлена завершением формирования крупномасштабной вихревой структуры течения. И, так как при  $r > 10^4$  крупномасштабная структура поля скорости уже сформирована, то ввиду пренебрежимо малой диссипации на больших масштабах энергетическая роль обратного каскада, сведясь лишь к поддержанию крупномасштабного поля скорости, падает. С другой стороны, с ростом надкритичности диссипация растет примерно как  $r^{1.4}$  и это приводит к усилению энстрофийного каскада, через который она реализуется.

Таким образом, ослабление обратного каскада энергии и усиление прямого каскада энстрофии приводят к расширению области действия последнего и обуславливают тенденцию установления единого степенного закона  $k^{-2.6}$ , близкого к закону энстрофийного каскада. Но, согласно результатам численного [77] и экспериментального [84] исследований, спектр переноса энстрофии должен быть заметно круче. Это различие, предположительно, связано с действием присутствующей здесь силы плавучести, в результате чего степенной закон энстрофийного каскада заменяется более пологим, но простирающимся в область волновых чисел, меньших частоты генерации.

В свою очередь, перестройка температурного спектра при  $r \approx 2 \cdot 10^3$  аналогична наблюдавшейся в физически близкой задаче о конвекции в вертикальной мыльной пленке при подогреве снизу [109]. А именно: при разности температур  $dQ < 48^\circ \text{K}$  длинноволновый участок спектра температуры соответствовал закону БО  $k^{-7/5}$ , а при  $dQ > 48^\circ \text{K}$  - Бэтчелора  $k^{-1}$ . Авторы [109] связывают перестройку температурного спектра с формированием крупномасштабной структуры течения.

Конечно, перестройка температурного спектра при  $r \approx 2 \cdot 10^3$  (как и перестройка спектра скорости при  $r \approx 4 \cdot 10^3$ ) физически обусловлена формированием красного каскада энергии. При недостаточно большой

надкритичности красный каскад еще не сформирован, и существенная на больших масштабах сила плавучести обуславливает спектр БО  $k^{-1.4}$  ( $k^{-11/5}$  для скорости). Но, с повышением надкритичности, энергетическое значение красного каскада усиливается. Благодаря его действию происходит перекачка энергии пульсаций скорости в большие масштабы, поле скорости становится крупномасштабным при относительно низком уровне пульсаций, и возникает так называемый вязкоконвективный интервал, где пульсации температуры управляются крупномасштабным полем скорости, что и обуславливает появление спектра Бэтчелора  $k^{-1}$  [74]. Разрушение спектра Бэтчелора при  $r \approx 6 \cdot 10^3$  связано с завершением формирования крупномасштабной вихревой структуры и уменьшением энергетической роли обратного каскада энергии.

### 3.5. Формирование крупномасштабной структуры течения

Очевидно, что формирование крупномасштабной структуры поля скорости и связанное с ним постепенное включение больших масштабов должно отражаться в зависимостях средних величин от надкритичности при различных  $\alpha$ .

На рис. 44 приведены в двойных логарифмических координатах пульсации вертикальной скорости (при  $z = 0$ ) как функции надкритичности при различной длине области по горизонтали  $\ell = \pi/\alpha$ . Как и на рис. 10 видно постепенное включение больших масштабов при  $r = 10^3$  (длины области  $\ell = \pi$  недостаточно) и  $r = 6 \cdot 10^3$  (длины области  $\ell = 2\pi$  - недостаточно). Относительно более слабая перестройка при  $r = 1.7 \cdot 10^4$  ( $\ell = 4\pi$  - недостаточно) на рис. 44 не видна.

На рис. 45 представлена кинетическая энергия на единицу длины области  $E_k/\ell$ ,  $\ell = \pi/\alpha$  как функция надкритичности при различном  $\alpha$ . Четко видны перестройки течения при  $r = 6 \cdot 10^3$  и  $r = 1.7 \cdot 10^4$ .

В то же время, рис. 46 показывает, что на интегральной характеристике теплообмена - числе Нуссельта отмеченные перестройки отражаются более мягко, опосредованно. Отмеченные выше перестройки течения наблюдаются здесь при более высоких значениях надкритичности, а именно: длины области  $\ell = \pi$  недостаточно при  $r \geq 10^4$  и  $\ell = 2\pi$  - при  $r \geq 2 \cdot 10^4$ .

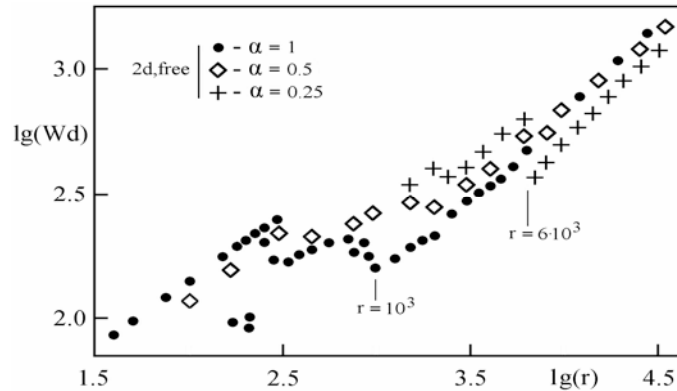


Рис. 44. Пульсации вертикальной скорости как функция надкритичности.

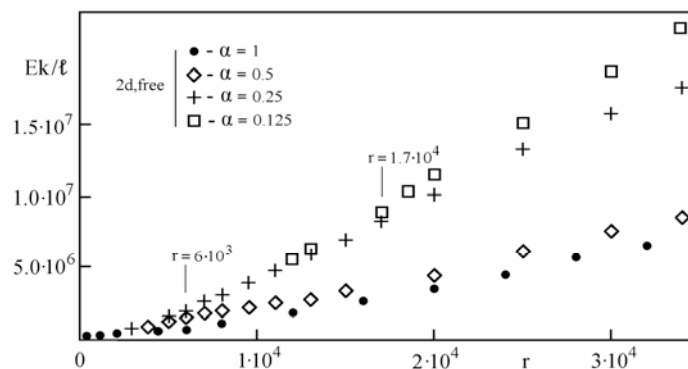


Рис. 45. Кинетическая энергия на единицу длины области.

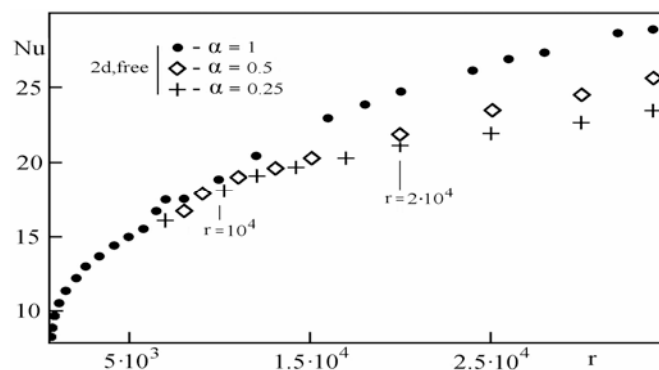


Рис. 46. Число Нуссельта в зависимости от надкритичности при различных  $\alpha$ .

Как это следует из рис. 8,10,11 и 14, 2d,free конвективное течение при большой надкритичности крупномасштабное и практически одновихревое. Поэтому представляет интерес сравнение степенных законов зависимости его средних величин от надкритичности и степенных законов, присущих изученному в разделе 3.2 стационарному одновихревому течению.

Ниже в данном разделе везде  $\alpha = 1$ , а на рис. 47-51 представлены результаты 2d,free расчетов.

Как это видно из рис. 66, при  $r \geq 6 \cdot 10^3$  число Нуссельта в 2d,free конвекции нарастает как:  $Nu = 0.639 \cdot r^{0.371}$ , с показателем степенного закона заметно большим, чем  $1/3$ ,  $0.31$  и  $2/7$  [41].

На рис. 47 как функция надкритичности изображена кинетическая энергия  $E_k$  (кривая 1) и степенные законы  $18.22 \cdot r^{1.36}$  (2) и  $167.8 \cdot r^{1.24}$  (3).

Из рис. 47 видно, что с разумной точностью

$E_k = 167.8 \cdot r^{1.24}$  при  $10 \leq r \leq 305$  и  $E_k = 18.22 \cdot r^{1.36}$ , если  $r \geq 10^3$ .

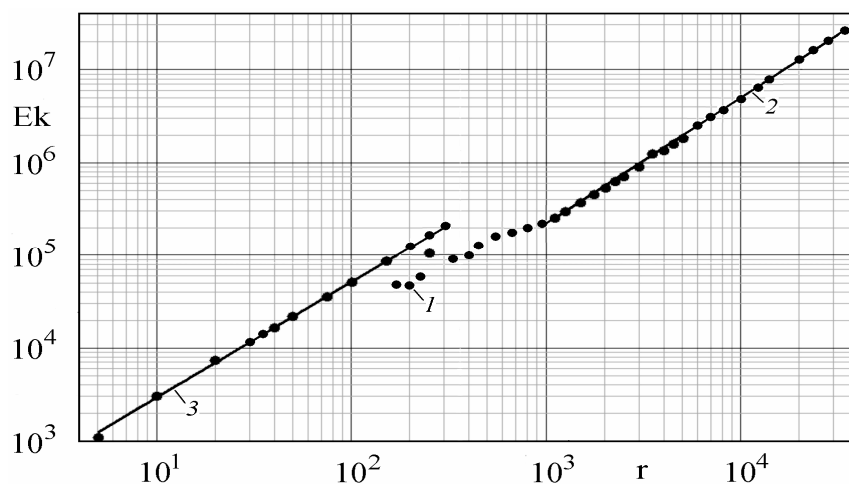


Рис. 47. Кинетическая энергия как функция надкритичности и степенные законы.

На рис. 48 как функция надкритичности изображена энтрофия  $E_p$  (кривая 1) и степенные законы  $770.0 \cdot r^{1.33}$  (2) и  $2450 \cdot r^{1.33}$  (3).

Из рис. 48 видно, что с хорошей точностью

$$En = 2450 \cdot r^{1.33} \text{ при } 20 \leq r \leq 305 \text{ и } En = 770.0 \cdot r^{1.33}, \text{ если } r \geq 10^3.$$

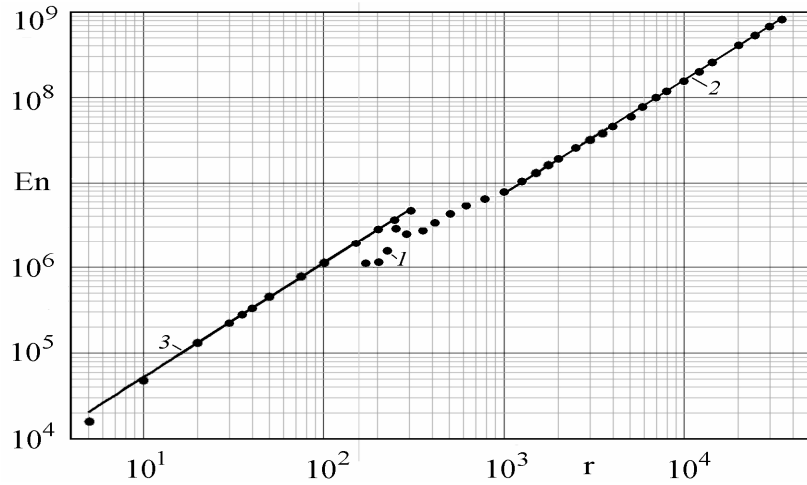


Рис. 48. Энтрофия как функция надкритичности.

На рис. 49 как функция надкритичности представлена среднеквадратичная скорость  $V_{rms}$  (кривая 1) и степенные законы  $3.35 \cdot r^{0.680}$  (2) и  $10.3 \cdot r^{0.620}$  (3).

Из рис. 49 видно, что с разумной точностью

$$V_{rms} = 10.3 \cdot r^{0.620} \text{ при } 10 \leq r \leq 305 \text{ и } V_{rms} = 3.35 \cdot r^{0.680}, \text{ если } r \geq 10^3.$$

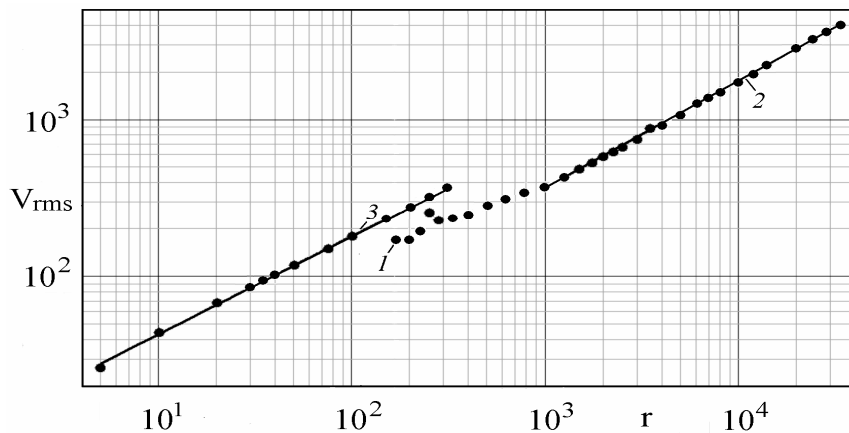


Рис. 49.  $V_{rms}$  как функция  $r$  и степенные законы.

На рис. 50 как функция надкритичности представлена среднеквадратичное значение функции тока  $\psi_{rms}$  (кривая 1) и степенные законы  $0.540 \cdot r^{0.720}$  (2) и  $2.43 \cdot r^{0.640}$  (3).

Из рис. 50 видно, что с хорошей точностью

$$\psi_{\text{rms}} = 2.43 \cdot r^{0.640} \text{ при } 5 \leq r \leq 305 \text{ и } \psi_{\text{rms}} = 0.540 \cdot r^{0.720}, \text{ если } r \geq 10^3.$$

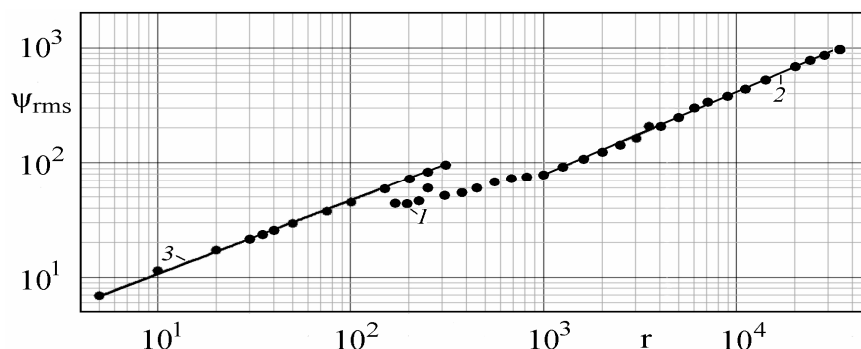


Рис. 50.  $\psi_{\text{rms}}$  как функция  $r$  и степенные законы.

На рис. 51 как функция надкритичности (при  $z = 0.5$ ) приведено значение среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости  $V_d$  (кривая 1) и степенные законы  $0.916 \cdot r^{0.715}$  (2) и  $11.5 \cdot r^{0.540}$  (3).

Из рис. 51 видно, что с разумной точностью

$$V_d = 11.5 \cdot r^{0.540} \text{ при } 40 \leq r \leq 305 \text{ и } V_d = 0.916 \cdot r^{0.715}, \text{ если } r \geq 1.75 \cdot 10^3.$$

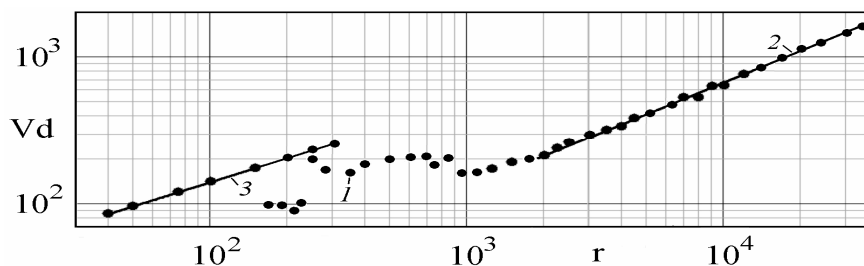


Рис. 51.  $V_d$  как функция  $r$  и степенные законы.

Для удобства сравнения, в табл. 1 приведены показатели степенных законов для стационарного одновихревого течения (раздел 3.2) и полученные в 2d,free расчетах. В крайнем правом столбце приведены относительные отклонения в процентах.

Таблица 1: Показатели степенных законов.

Величина	Одновихревое	2d,free расчеты	Откл., %
Nu	0.356	0.371	4.10
Ek	1.350	1.360	0.44
En	1.370	1.330	2.90
$V_{rms}$	0.677	0.680	0.43
$\Psi_{rms}$	0.677	0.720	6.00
Vd	0.676	0.715	5.50

В целом, с учетом качественного различия режимов течения и в  $\pi$  раз большей горизонтальной протяженности области, согласование показателей степенных законов можно считать удовлетворительным. При этом, наиболее хорошее согласование наблюдается для кинетической энергии и среднеквадратичной скорости и наиболее плохое - для среднеквадратичных значений функции тока и пульсаций вертикальной скорости.

Процесс формирования крупномасштабной структуры течения при увеличении надкритичности в 2d,rigid конвекции выражен слабее (см. рис. 8-10), что обусловлено наличием конкурирующего механизма генерации завихренности на горизонтальных границах.

Тем не менее, закон нарастания числа Нуссельта в 2d,rigid конвекции (см. рис. 67 при  $\ell = \pi$ ) близок к наблюдаемому в 2d,free расчетах:

$$Nu = 0.817 \cdot r^{0.367}, \text{ при } r \geq 2 \cdot 10^3.$$

Заметим здесь, что при 2d,rigid конвекции в области малой горизонтальной протяженности [21] (квадратная область с  $\ell = 1$ ) формирование крупномасштабной структуры может быть в значительной степени подавлено малым горизонтальным размером области, что делает возможным рост среднеквадратичного волнового числа при увеличении надкритичности (см. раздел 2.4.2.1).

На рис. 52 приведено значение среднеквадратичной температуры, полученное в 2d,free (кривая 1), 2d,rigid (2) и 3d,free (3) расчетах, как функции надкритичности.

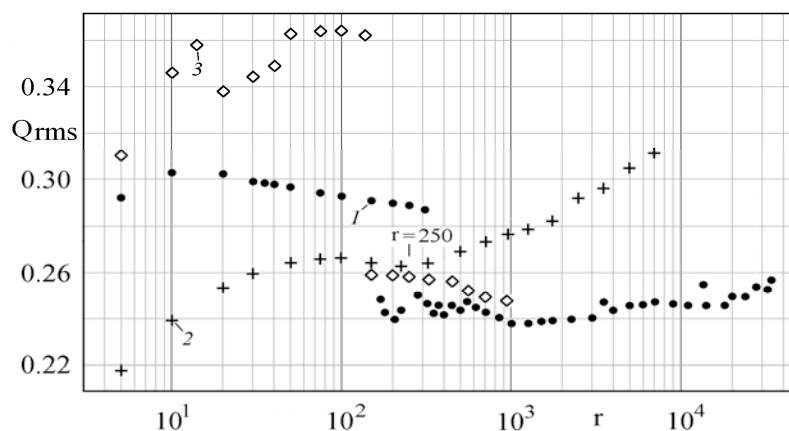


Рис. 52.  $Q_{rms}$  как функция надкритичности и степенные законы.

Видно, что в двумерных расчетах (при  $r > 10^3$  в 2d,free и  $r > 250$  - 2d,rigid), аналогично одновихревому и двухвихревому стационарным решениям (см. раздел 3.2), наблюдается нефизичная тенденция повышения среднеквадратичной температуры и ее пульсаций (см. рис. 59). Повышение уровня среднеквадратичных пульсаций температуры авторы работы [55] связывают с формированием крупномасштабной структуры течения.

А в 3d,free расчетах среднеквадратичная температура сохраняет свое практически постоянное значение 0.26 при  $150 \leq r \leq 300$  с тенденцией уменьшения при  $300 < r \leq 950$ .

Подводя итог, можно заключить, что в 2d,free конвекции при достаточно большой надкритичности, тенденция формирования крупномасштабной структуры течения становится доминирующей. В частности, это проявляется в повышении показателя степенного закона зависимости числа Нуссельта от надкритичности до 0.371, что заметно выше  $1/3$ , 0.31 и  $2/7$  [41] и нефизичном росте среднеквадратичной температуры и ее пульсаций. Сказанное справедливо и для 2d,rigid конвекции при достаточно большой горизонтальной протяженности области.



### 3.6. Интегральные характеристики

Во введении отмечено, что при сопоставлении данных по трехмерной конвекции со свободными и жесткими граничными условиями следует ожидать хорошего соответствия по пульсационным характеристикам температуры и вертикальной скорости, так как для них граничные условия на горизонтальных границах правильные и их динамика определяется, в основном, подогревом и гравитацией. Соответствие должно наблюдаться и для числа Рейнольдса (среднеквадратичной скорости и кинетической энергии), так его динамика определяется, главным образом, вертикальной скоростью.

При сравнительно невысокой надкритичности (до  $g \sim 100$ ) должно наблюдаться аналогичное соответствие степенных законов и в двумерной конвекции. Причем, практически полное совпадение пространственных спектров пульсаций температуры и скорости в 2d,free и 3d,free расчетах при конвекции в области относительной горизонтальной протяженности  $\pi$  во всем рассматриваемом диапазоне надкритичности (раздел 3.4.3) показывает, что для консервативных величин, мало изменяющихся при увеличении надкритичности и пространственного разрешения, интервал соответствия может быть много больше.

Теперь проанализируем зависимость средних величин от надкритичности, обращая основное внимание на общность степенных законов в двумерной и трехмерной конвекции и на сопоставление данных расчета и эксперимента.

Трехмерная конвекция становилась периодической при  $g = 13.7$  ( $Ra = 9 \cdot 10^3$ ), причем нестационарность проявлялась во вращательных колебаниях вокруг вертикальной оси  $z$ . Возможное неравенство нулю вертикальной компоненты завихренности  $\Omega_z = v_x - u_y$  принципиально отличает трехмерную конвекцию со свободными границами от конвекции с жесткими, так как при конвекции с условием прилипания на горизонтальных границах  $\Omega_z = 0$  при достаточно большом числе Прандтля [59].

В двумерной конвекции колебания появлялись при  $g = 31.8$  ( $Ra = 2.1 \cdot 10^4$ ) в 2d,free расчетах и  $g = 70.5$  ( $Ra = 1.2 \cdot 10^5$ ) - 2d,rigid.

Ниже, на рис. 53-58 данные приведены при  $r = 950$ .

На рис. 53 приведено полученное в 3d,free расчете мгновенное число Нуссельта при  $r = 950$ , видна сложная зависимость его от времени. Качественно похожие зависимости числа Нуссельта от времени наблюдались также в 2d,free и 2d,rigid расчетах при том же значении надкритичности.

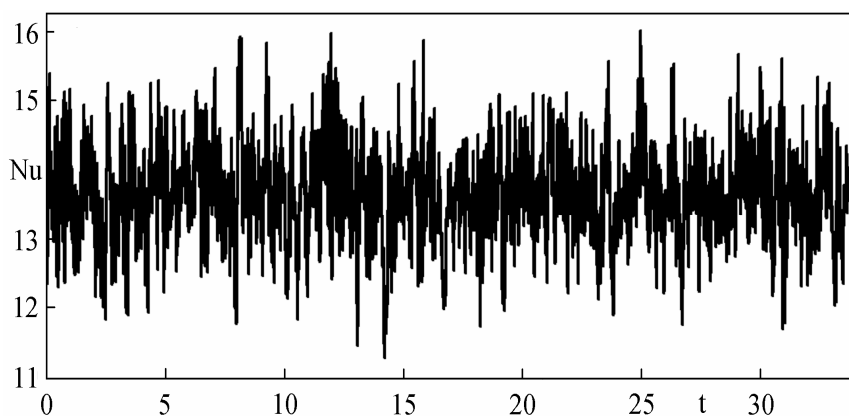


Рис. 53. Число Нуссельта как функция времени.

На рис. 54 приведен временной энергетический спектр числа Нуссельта, полученный в 2d,free (кривая 1) и 3d,free (2) расчетах.

Характерный масштаб частоты на рис. 54 был выбран как  $\nu/D^2$ , где  $D$  есть толщина слоя, а вертикальный сдвиг спектра (2) - искусственный. Оба спектра сложные, с характерным для стохастических процессов заполнением его длинноволновой части [103] и несмотря на некоторые отличия в его длинноволновой области и более плоский спектр двумерного решения при  $f > 10^2$  представляются качественно близкими. В 2d,rigid расчете при том же значении надкритичности был получен спектр, качественно похожий на результат 3d,free расчета и с тем же законом убывания на высоких частотах.

На рис. 55 приведена полученная в 3d,free расчете автокорреляционная функция зависимости  $Nu(t)$ , такая быстроспадающая кривая типична для стохастического процесса [103], в то время как при  $r = 400$  в 3d,free расчете автокорреляционная функция периодическая, что указывает на ее периодичность [60].

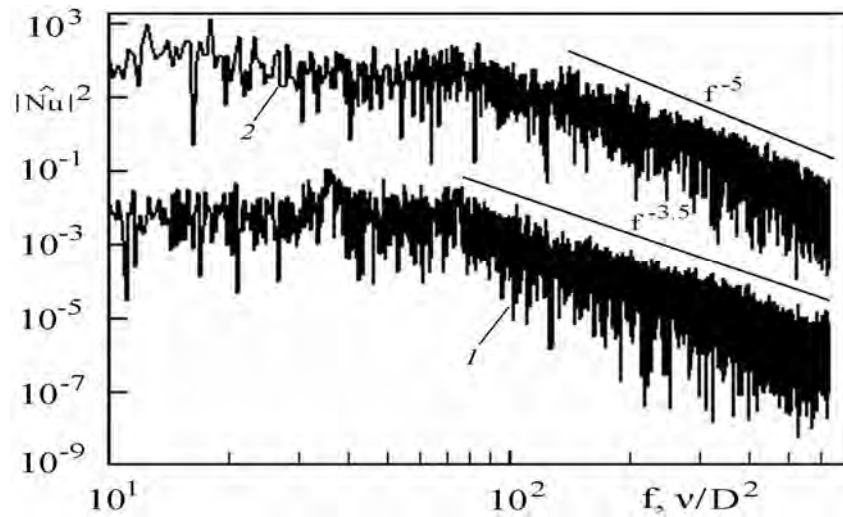


Рис. 54. Временной спектр зависимости числа Нуссельта от времени.

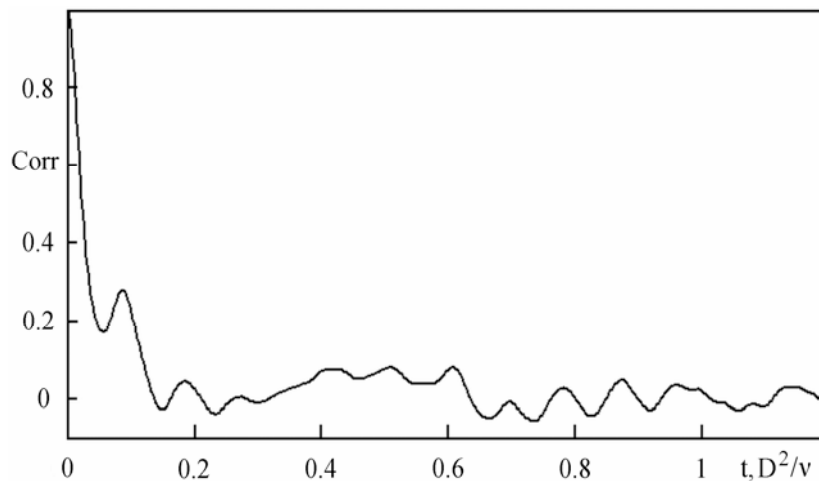


Рис. 55. Автокорреляционная функция зависимости  $Nu(t)$  в  $3d, free$  расчете.

Автокорреляционные функции, полученные в  $2d, free$  и  $2d, rigid$  расчетах при том же значении надкритичности также быстроспадающие и качественно похожие на приведенную на рис. 55.

На рис. 56 приведен профиль средней температуры, полученный в  $3d, free$  (кривая 1),  $2d, free$  (2) и  $2d, rigid$  (3) расчетах и асимптотический экспериментальный профиль средней температуры [50] (4).

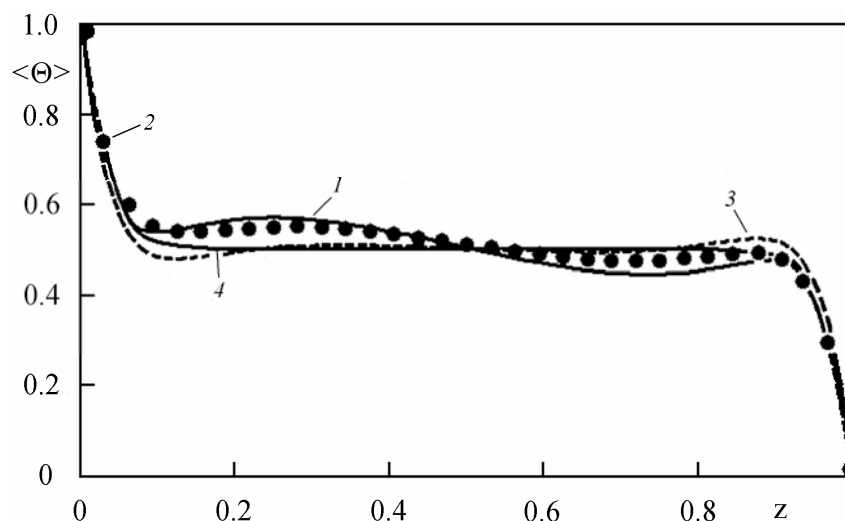


Рис. 56. Профиль средней температуры.

Профили средней температуры в 3d,free и 2d,free расчетах близки, но результат 2d,free расчета кажется более близким к экспериментальному, так как соответствующий профиль более сглаженный и участки обратного градиента менее выражены. Участки обратного градиента в профиле средней температуры в 2d,rigid расчетах сильнее выражены, чем в 2d,free [63,65].

На рис. 57 приведен профиль температурных пульсаций, полученный в 3d,free (кривая 1), 2d,free (2) и 2d,rigid (3) расчетах.

Профили, соответствующие 3d,free и 2d,free расчетам, практически совпадают в центральной части, но отличаются величинами локальных максимумов вблизи горизонтальных границ. А 3d,free и 2d,rigid расчеты показывают ясно выраженные локальные максимумы вблизи горизонтальных границ. Локальные максимумы вблизи горизонтальных границ в 2d,free расчетах менее выражены и величина их примерно на 50% меньше.

Это различие обусловлено формированием в 2d,free расчетах крупномасштабного течения. Тенденция формирования крупномасштабного течения в 2d,free конвекции более сильно выражена, чем в 2d,rigid, что обусловлено наличием конкурирующего механизма генерации завихренности на горизонтальных границах, а в 3d,free конвекции вихревой масштаб уменьшается (см. рис. 8 и 10).

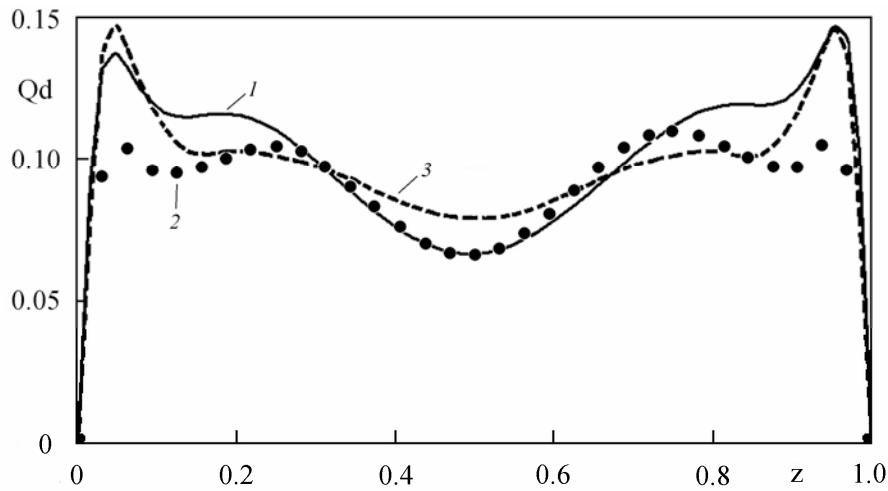


Рис. 57. Профиль среднеквадратичных пульсаций температуры.

Наличие крупномасштабного течения в 2d,free конвекции и обусловленного им вовлечения в крупномасштабное течение объясняет также и существенно менее выраженные участки обратного градиента в профиле средней температуры, которые связаны со скоплением холодной жидкости вблизи нижней и горячей - верхней горизонтальных границ [63].

Более высокий уровень среднеквадратичных пульсаций температуры около горизонтальных границ в 3d,free и 2d,rigid конвекции обусловлен прохождением поднимающихся (горячих) и опускающихся (холодных) плюмов через скопления холодной и горячей жидкости в окрестностях нижней и верхней горизонтальных границ, соответственно.

На рис. 58 представлена величина среднеквадратичных пульсаций температуры при  $z = 0.5$  как функция надкритичности, где результаты 3d,free, 2d,free и 2d,rigid расчетов соответствуют цифрам 1,2 и 3, соответственно, цифрами 5,6 обозначены результаты экспериментов [51,52], соответственно, 7 -  $q' = 0.104 \cdot r^{-2/15}$  - экспериментальные данные [53] и 8 -  $q' = 0.214 \cdot r^{-1/7}$  - данные трехмерного моделирования с условием прилипания на горизонтальных границах [1].

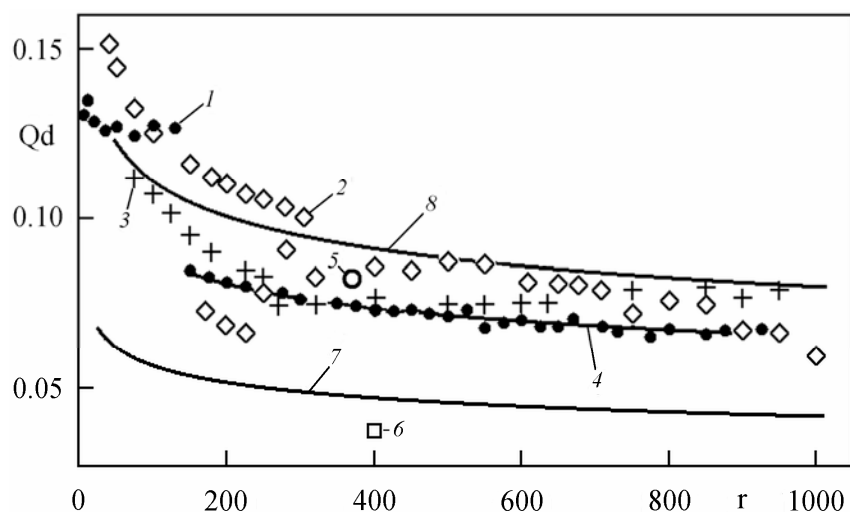


Рис. 58. Пульсации температуры как функция надкритичности.

Турбулентная конвекция в экспериментальных [51-53] и численном [1] исследованиях рассматривалась при меньшем числе Прандтля  $Pr = 0.71$ , но крайне незначительное влияние числа  $Pr$  на профиль средней температуры [50] и число Нуссельта [54] позволяют надеяться на правомерность такого сравнения. Отметим также большой разброс экспериментальных результатов.

Результаты трехмерных расчетов настоящей работы (кривая 4 на рис. 58) с хорошей точностью соответствуют степенному закону

$$q' = 0.163 \cdot r^{-2/15} \text{ при } r \geq 150.$$

Степенной закон (его показатель) в 3d,free расчетах зависимости среднеквадратичных температурных пульсаций от надкритичности совпадает с полученным в эксперименте [53] и близок к расчетному [1].

Результаты 2d,free расчетов (кривая 1 на рис. 59 ниже), где при  $170 \leq r \leq 305$  рассматривается верхняя ветвь решения, с хорошей точностью соответствуют степенному закону

$$q' = 0.316 \cdot r^{-0.2} \text{ при } 40 \leq r \leq 305.$$

Показатель этого степенного закона совпадает с полученным при большей надкритичности в экспериментах по конвекции газообразного  $He$  при криогенной температуре [55].

На рис. 59 среднеквадратичные пульсации температуры представлены во всем диапазоне изменения надкритичности. Зависимости  $q'$  от  $r$  в 2d,free (кривая 1) при  $r > 305$  и во всем рассматриваемом диапазоне изменения надкритичности в 2d,rigid расчетах (2), не имеют выраженного степенного закона.

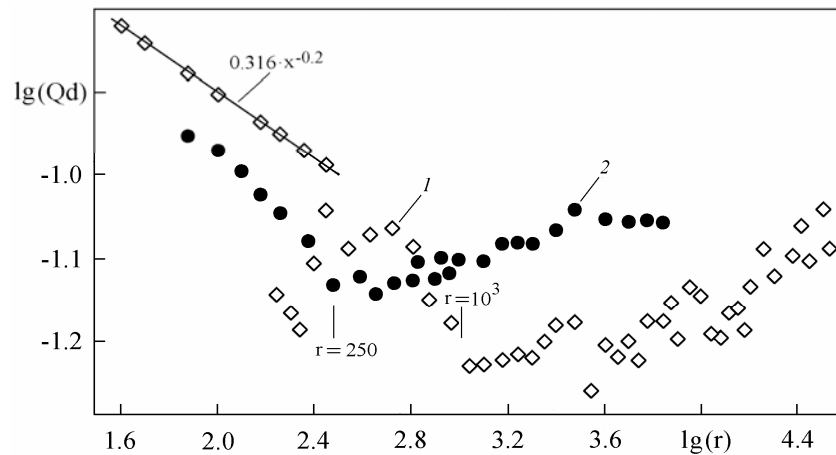


Рис. 59. Пульсации температуры в двумерных расчетах во всем диапазоне изменения надкритичности.

Видно, что в двумерных расчетах (при  $r \approx 10^3$  в 2d,free и  $r \approx 250$  - 2d,rigid) прослеживается качественное изменение характера зависимости величины температурных пульсаций от надкритичности - тенденция убывания сменяется возрастанием. Появление нефизичной тенденции возрастания температурных пульсаций связано с формированием крупномасштабной структуры течения [64], что обуславливает повышение уровня среднеквадратичных пульсаций [55].

Деление среднеквадратичных пульсаций скорости на  $Pr^{1/3}$  позволяет сравнивать результаты, полученные с разным числом  $Pr$  [48].

На рис. 60 представлена величина среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости при  $z = 0.5$  как функция надкритичности, где цифры 1,2,3,5 и 8 ( $8.6 \cdot r^{0.46}$ ) обозначают то же, что и на рис. 58, а цифры 6 и 7 - результаты экспериментов [56] и [48] ( $11.2 \cdot r^{0.44}$ , здесь числовой множитель определен по графику), соответственно. Экспериментальные данные [53]

( $13.6 \cdot r^{0.42}$ ) с графической точностью близки к результатам [48] и поэтому на рис. 60 не приводятся.

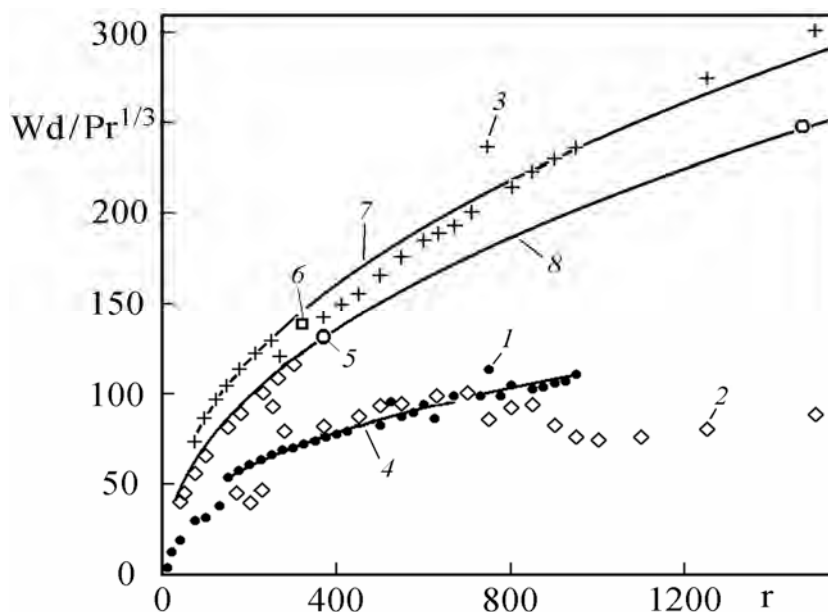


Рис. 60. Пульсации вертикальной скорости как функция надкритичности.

Результаты 2d,rigid моделирования практически совпадают с экспериментом [48] при  $r \leq 250$ , а при  $r \geq 270$  формируется новый степенной закон  $W' = 10.4 \cdot r^{0.57}$ . А результаты 2d,free расчетов при  $r \leq 305$  близки к данным трехмерного расчета с условием прилипания на горизонтальных границах [1] с формированием при  $r \geq 1750$  нового степенного закона  $W' = 0.916 \cdot r^{0.715}$  [92].

Результаты 3d,free расчетов (кривая 4 на рис. 60) при  $r \geq 150$  с хорошей точностью соответствуют степенному закону  $W' = 15.8 \cdot r^{0.395}$  при  $r \leq 150$ .

Отметим, что результаты 3d,free и 2d,free расчетов практически совпадают в диапазоне надкритичности  $280 \leq r \leq 850$ , где при  $280 \leq r \leq 305$  рассматривается нижняя ветвь 2d,free решения.

Если изобразить степенные законы  $r^{0.395}$ ,  $r^{0.42}$  и  $r^{0.44}$ , совместив их в точке  $r = 550$ , то различие соответствующих значений на интервале [150, 950] не превысит 2.4%. И, следовательно, несмотря на количественные различия значений среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости в



экспериментах и 3d,free расчетах, полученный в 3d,free расчетах при  $r \geq 150$  показатель степенного закона нарастания пульсаций вертикальной скорости близок к наблюдаемым в экспериментах. В двумерных расчетах при сравнительно невысокой надкритичности (при  $r \leq 250$  в 2d,rigid и  $r \leq 305$  - в 2d,free) величины среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости близки к наблюдаемым в эксперименте и трехмерном расчете с условием прилипания на горизонтальных границах.

Теперь рассмотрим более детально зависимость среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости при надкритичности до  $r = 300$  с целью определения степенных законов при небольшой надкритичности.

На рис. 61 приведена зависимость среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости при  $z = 0.5$  и надкритичности до  $r = 300$ , где цифрами 1,2 и 3 обозначены результаты 3d,free, 2d,free и 2d,rigid расчетов, соответственно и степенные законы  $15.8 \cdot r^{0.395}$  (4),  $11.5 \cdot r^{0.540}$  (5),  $21.4 \cdot r^{0.470}$  (6) и  $5.43 \cdot r^{0.555}$  (7).

Совместное рассмотрение рис. 60 и 61 показывает, что результаты 2d,rigid расчетов и данные эксперимента [48] приводят при надкритичности  $r < 250$  к практически совпадающим значениям и показателям степенных законов. А степенные законы, аппроксимирующие результаты 3d,free и 2d,free расчетов имеют при надкритичности  $r < 137$  близкие показатели, несколько завышенные по сравнению с полученными в эксперименте [48] (0.44) и расчете [1] (0.46), но значения числа Нуссельта, полученные в 2d,free расчете при  $r \leq 305$  согласуются с данными [1].

Изменение степенных законов для пульсаций температуры и вертикальной скорости в двумерных расчетах при надкритичности  $r \sim 250$ , связано с формированием крупномасштабной структуры течения [64], что обуславливает повышение уровня среднеквадратичных пульсаций температуры [55] и более быстрый рост среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости.

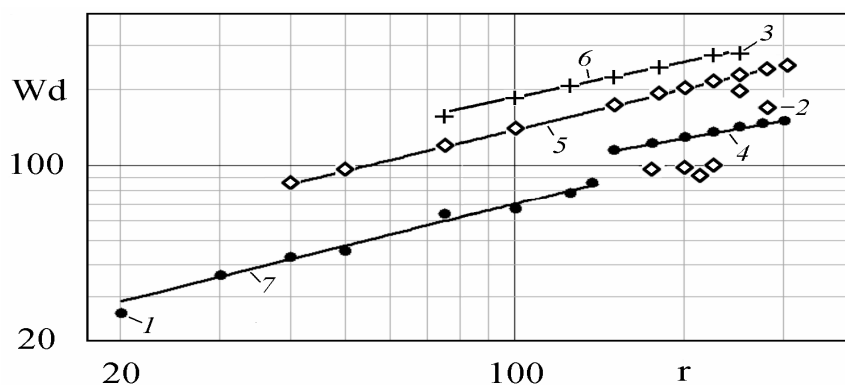


Рис. 61. Среднеквадратичные пульсации вертикальной скорости при надкритичности до  $r = 300$ .

На рис. 62 представлены пульсации горизонтальной скорости при  $z = 0.5$  как функции надкритичности, где цифры 1,2 и 3 обозначают то же, что и на рис. 58. Различие в среднеквадратичных пульсациях горизонтальной скорости в 2d,free и 2d,rigid расчетах выражено слабее, чем в пульсациях вертикальной и результаты 2d,free расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными при высокой надкритичности [63].

Результаты трехмерного и двумерных расчетов близки при  $r \leq 250$ , если при  $170 \leq r \leq 305$  рассматривать нижнюю ветвь 2d,free решения. При  $r \geq 270$  данные 2d,rigid расчетов выходят на степенной закон  $U' = 5.4 \cdot r^{0.64}$ . А верхняя ветвь 2d,free решения соответствует

$$U' = 2.56 \cdot r^{0.72} \text{ при } 170 \leq r \leq 10^3 \text{ и } U' = 6.94 \cdot r^{0.57} - r > 10^3.$$

При  $r \geq 20$  результаты 3d,free моделирования (кривая 4 на рис. 62) с хорошей точностью соответствуют степенному закону

$$U'_3 = 2.14 \cdot r^{0.693}, U'_3 = 0.5 \cdot (U' + V').$$

Подчеркнем еще раз, что результаты трехмерного и двумерных расчетов близки при  $r \leq 250$ , если при  $170 \leq r \leq 305$  рассматривать нижнюю ветвь 2d,free решения.

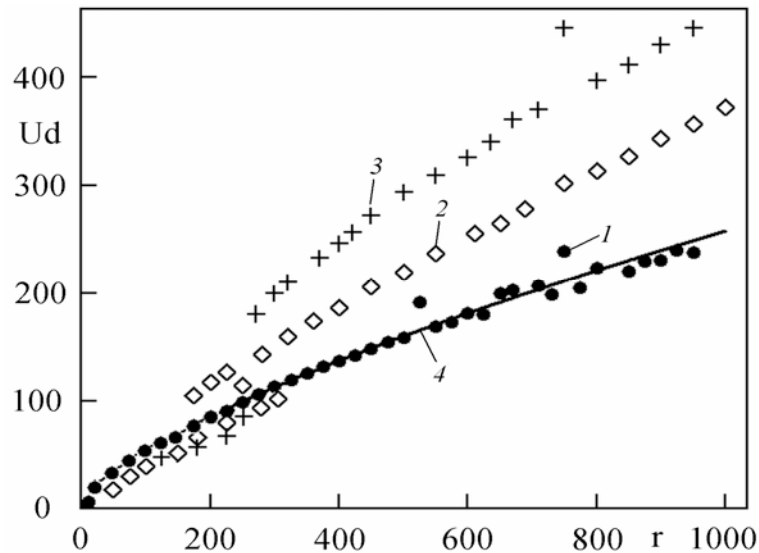


Рис. 62. Пульсации горизонтальной скорости как функция надкритичности.

В работе [63] проведено сравнение чисел Нуссельта, полученных в 2d,free и 2d,rigid расчетах с экспериментальными данными по турбулентной конвекции [54]. Показано, что при достаточно большой надкритичности данные 2d,free расчетов хорошо соответствуют экспериментальным данным, а также, что при  $r < 800$  значения числа Нуссельта в 2d,rigid расчетах меньше и ближе к экспериментальной кривой, чем в 2d,free, а при  $r > 800$  - наоборот.

На рис. 63 представлено полученное в 3d,free расчетах число Рейнольдса как функция надкритичности (линия 1) и степенные законы  $1.481 \cdot r^{0.573} - 2$  и  $1.458 \cdot r^{0.497} - 3$ .

Можно видеть, что число Рейнольдса в 3d,free расчетах следует степенным законам:  $1.481 \cdot r^{0.573}$  при  $30 \leq r \leq 137$  и  $1.458 \cdot r^{0.497}$ , если  $150 \leq r \leq 950$ . Полученный при  $150 \leq r \leq 950$  показатель степенного закона хорошо согласуется с полученным в экспериментах [55,57] – 0.49. Учитывая соотношения  $V_{rms} = Re \cdot Pr$  и  $Ek = \frac{l}{2} V_{rms}^2$ , заключаем, что аналогичное соответствие показателей степенных законов наблюдается также для средне-квадратичной скорости и кинетической энергии.

На рис. 64 представлено число Нуссельта как функция надкритичности при  $r < 10^3$ , где цифры 1,2 и 3 обозначают то же, что и на рис. 58. Цифрами 6 и 7 обозначены результаты численных исследований трехмерной конвекции

[11,10], соответственно, а 8 - эмпирический закон O'Toole и Silveston, 1961, который при  $Pr = 10$  имеет вид [54]:

$$Nu = 1.22 r^{0.305} \text{ при } 6 \cdot 10^1 \leq r \leq 6 \cdot 10^4 \quad (1)$$

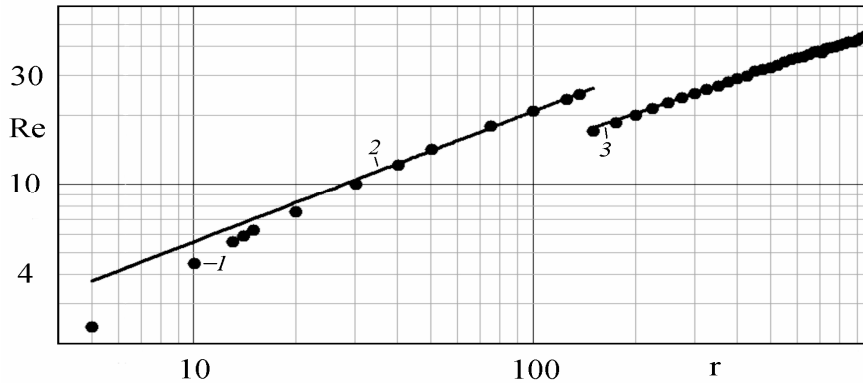


Рис. 63. Число Рейнольдса в 3d,free расчетах.

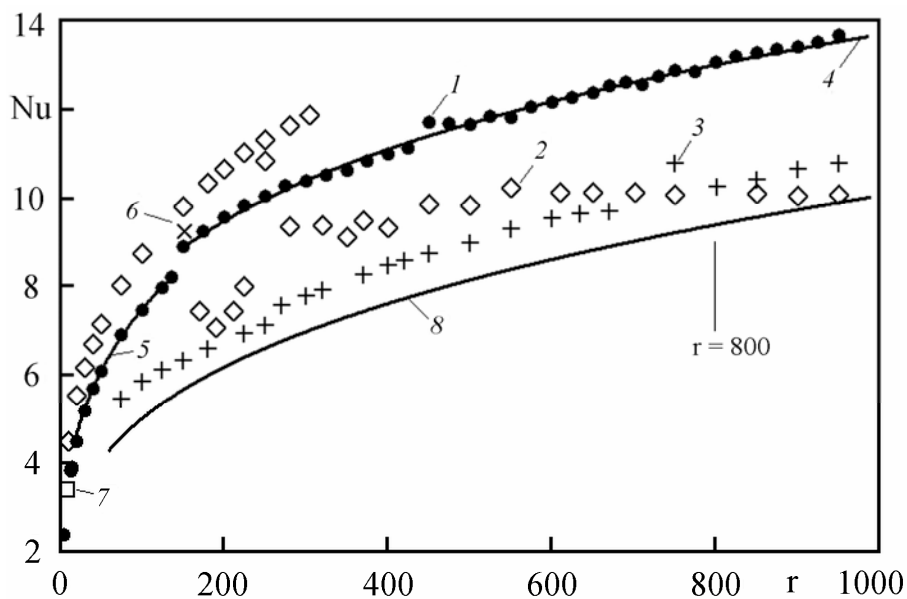


Рис. 64. Число Нуссельта как функция надкритичности.

В зависимости числа Нуссельта от надкритичности при трехмерном моделировании можно выделить два участка со степенными зависимостями (кривые 4 и 5 на рис. 64):

$$Nu = 1.85 \cdot r^{0.302} \text{ при } 20 \leq r \leq 137 \text{ и } Nu = 2.79 \cdot r^{0.230} \text{ при } 150 \leq r \leq 950.$$

Рис. 64 показывает неплохое согласование результатов трехмерных расчетов настоящей работы с результатами численных исследований трехмерной конвекции [10,11].

На рис. 65 при  $r \geq 10^3$  приведены числа Нуссельта, полученные в 2d,free и 2d,rigid расчетах и эмпирический закон (1), обозначенные цифрами 1, 2 и 3, соответственно. Видно, что результаты 2d,free расчетов ближе к результатам эксперимента, чем данные 2d,rigid расчетов, хотя соответствие степенных законов 2d,free расчета и эксперимента нельзя считать удовлетворительным.

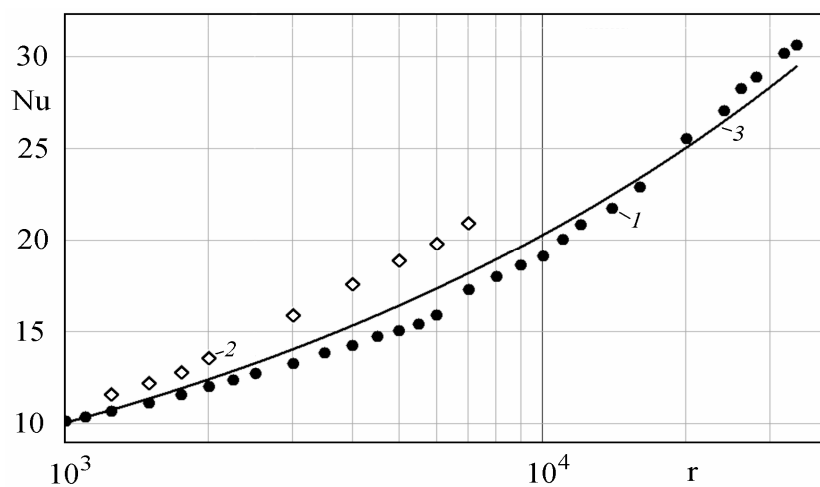


Рис. 65. Число Нуссельта в двумерных расчетах и данные эксперимента.

На рис. 66 и 67 представлено число Нуссельта как функция надкритичности для 2d,free и 2d,rigid расчетов по всем исследованном диапазоне надкритичности, вертикальными линиями показаны границы интервалов надкритичности, где указанные степенные законы выполняются.

Как видно из рис. 66, зависимость числа Нуссельта от надкритичности в 2d,free расчетах принципиально невозможно описать единым степенным законом, что приводит к выделению четырех участков:

$$Nu = 2.28 \cdot r^{0.290} \text{ при } 10 \leq r \leq 305,$$

$305 < r < 900$  - без выраженного степенного закона,

$$Nu = 1.80 \cdot r^{0.250} \text{ при } 9 \cdot 10^2 \leq r \leq 6 \cdot 10^3 \text{ и}$$

$$\text{Nu} = 0.639 \cdot r^{0.371} \text{ при } 6 \cdot 10^3 < r \leq 3.4 \cdot 10^4.$$

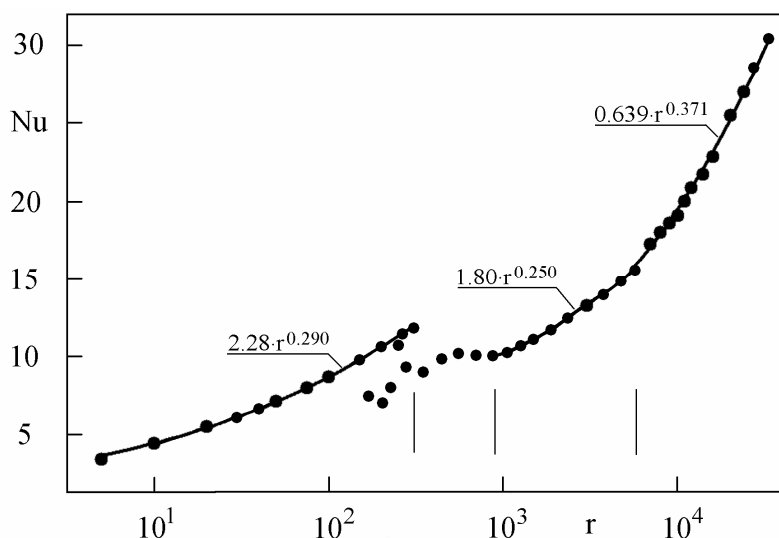


Рис. 66. Число Нуссельта как функция надкритичности в 2d,free расчетах.

Отметим, что в работе [63] два последних участка объединялись и, таким образом, весь диапазон изменения надкритичности разбивался на три участка. Приводимые здесь результаты более точные, так как при  $r \leq 1.4 \cdot 10^4$  для определения степенных законов здесь использовались результаты расчетов с учетом [513x129] гармоник, а в [63] - [257x65].

Число Нуссельта как функция надкритичности в 2d,rigid расчетах приближенно следует степенному закону [63]:

$$\text{Nu} = 1.25 \cdot r^{0.317} \text{ при } 1.5 \cdot 10^2 \leq r \leq 7 \cdot 10^3.$$

Но более детальный анализ зависимости числа Нуссельта как функции надкритичности приводит к выделению трех участков (рис. 67):

$$\text{Nu} = 1.97 \cdot r^{0.235} \text{ при } 10 \leq r \leq 250,$$

$$\text{Nu} = 1.56 \cdot r^{0.282} \text{ при } 270 \leq r \leq 2 \cdot 10^3 \text{ и}$$

$$\text{Nu} = 0.817 \cdot r^{0.367} \text{ при } 2 \cdot 10^3 < r \leq 7 \cdot 10^3.$$

В 2d,free и 2d,rigid расчетах настоящей работы при достаточно большой надкритичности наблюдается выход на степенной закон, с показателем степени

$\sim 0.37$  заметно большим, чем  $1/3$ ,  $0.301$  и  $2/7$ , что обусловлено формированием крупномасштабной структуры течения.

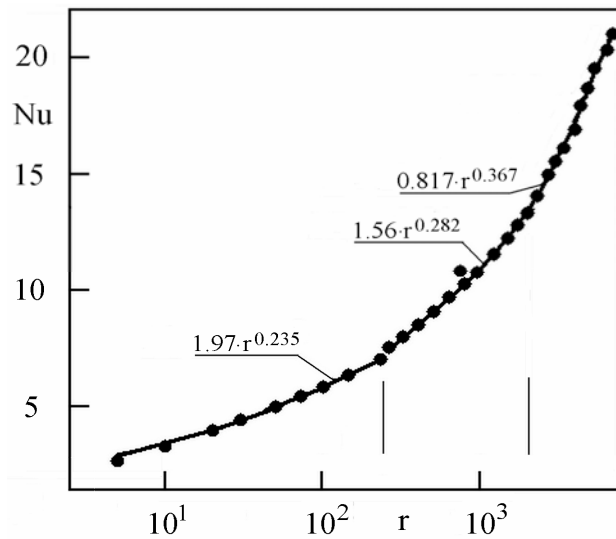


Рис. 67. Число Нуссельта как функция надкритичности в 2d,rigid расчетах.

Качественно похожая картина зависимости эффективного показателя степенного закона от надкритичности получена в эксперименте по турбулентной конвекции в ацетоне [110] с  $Pr = 4$ . Вычисленная в [110] зависимость эффективного показателя степенного закона от надкритичности напоминает параболу, причем минимальное значение  $0.275$  эффективного показателя достигается при надкритичности  $6 \cdot 10^3$ , принимая значение  $0.293$  при  $r \approx 600$  и  $\sim 0.3$  при более высоких значениях  $r$ .

Переход к степенному закону  $Nu \sim r^{1/3}$  наблюдался в численном исследовании [4], а в ряде экспериментов наблюдалась обратная последовательность степенных законов, которая трактуется как переход к режиму "жесткой" турбулентности [89].

Зависимость числа Нуссельта от надкритичности в виде степенного закона  $Nu \sim r^{1/3}$  наблюдалась в экспериментальных [40,41] и численном [5] исследованиях и означает независимость теплообмена от толщины слоя, что обусловлено относительной малостью толщин температурных пограничных слоев по сравнению с вертикальным размером области [89]. Отметим, однако,

что другие экспериментальные работы, обзор которых приведен в [41], содержат и другие степенные законы, близкие к  $Nu \sim r^{0.31}$ .

Отметим также, что показатель степенного закона нарастания числа Нуссельта в 3d,free расчетах при надкритичности  $r \leq 137$  согласуется с показателем эмпирического закона (1) и с полученным в 2d,free расчетах при  $10 \leq r \leq 305$ . И более того, степенной закон  $Nu \sim r^{0.230}$  при  $150 \leq r \leq 950$  также близок к закону  $Nu \sim r^{0.249}$ , наблюдавшемуся в 2d,free расчетах при более высокой надкритичности. Таким образом, последовательность степенных законов для числа Нуссельта в 3d,free и 2d,free конвекции качественно согласуется. Это и хорошее количественное соответствие по числу Нуссельта данных 2d,free расчета и эксперимента (см. рис. 65) указывает на необходимость проведения расчетов трехмерной конвекции при более высокой надкритичности.



## Заключение

В двумерной и трехмерной постановках рассмотрена задача о конвекции несжимаемой жидкости между двумя горизонтальными изотермическими плоскостями при подогреве снизу. При трехмерном моделировании горизонтальные границы предполагаются свободными от касательных напряжений, а в двумерном - свободными либо жесткими. За исключением нескольких тестовых расчетов, в которых проводятся сравнения с данными других авторов или экспериментом, число Прандтля равно 10.

В случае свободных от касательных напряжений горизонтальных границ, решения двумерной и трехмерной задач разыскиваются в виде суперпозиции собственных функций линейной теории устойчивости, которые выражаются через косинусы и синусы по всем направлениям.

При решении двумерной задачи с условием прилипания на горизонтальных границах, в горизонтальном направлении производится Фурье декомпозиция по косинусам и синусам, а в вертикальном - конечно-разностное представление. При решении всех задач постановка граничных условий на боковых границах следует из представления решения.

Предложен специальный спектрально-разностный (псевдоспектральный) численный метод для моделирования сложных течений трехмерной и двумерной конвекции, первого порядка по времени и второго по пространству.

Для конвекции со свободными горизонтальными границами и  $Pr = 1$  выписаны явные выражения для инкрементов нарастания гармоник в линейных аналогах дифференциальной задачи и предлагаемого численного метода. Показано, что коэффициенты при  $\tau$  и  $N^2$ , в членах, описывающих схемный эффект, не зависят от числа Рэлея, а определяются волновыми числами.

А в случае двумерной конвекции с жесткими горизонтальными границами сравнивается спектральная кривая, рассчитанная методом ортогонализации из системы линеаризованных исходных уравнений и приближенная, полученная численно из линейного аналога предлагаемого численного метода.

Показано, что несмотря на то, что численный метод строится как метод первого порядка по времени и второго по пространству, схемный эффект при линейаризации исходной системы уравнений есть величина порядка  $O(\tau^2 + H^2)$  и, следовательно, спектральные характеристики численного метода и исходной дифференциальной системы уравнений близки, что гарантирует правильную динамику бесконечно малых возмущений.

Нелинейный анализ, проведенный на модельной нелинейной задаче в 2d,free постановке показал, что понижение порядка аппроксимации численного метода по времени до первого приводит лишь к незначительному понижению точности вычислений, при этом с первым порядком вычисляется фаза гармонического решения, в то время как его амплитуда - со вторым. Показано, что для практических вычислений можно использовать схему первого порядка аппроксимации по времени с вычислением скоростей по функции тока, полученной на первом этапе расщепления.

В качестве теста, результаты расчета предлагаемым спектрально-разностным методом стационарной 2d,free конвекции сравниваются с результатами других авторов [15,32,33] при надкритичности  $r \leq 10^3$  и по более простой модели бесконечного числа Прандтля [34] - при  $r \leq 2 \cdot 10^3$ . Отмечено хорошее совпадение по числу Нуссельта.

Результаты тестового расчета стохастической двухдиффузионной конвекции при  $R_T = R_S = 1.5 \cdot 10^4$  хорошо согласуются с данными расчетов [30,31], в частности, соответствующие проекции решений на плоскость амплитуд первых гармоник функции тока и температуры представляются совпадающими с графической точностью. По методике, близкой к предложенной в [30,31], в этой серии тестовых расчетов контролировалась невязка, ее относительное значение не превосходило 1%.

Результаты экспериментов по стационарной, валиковой конвекции [45] при надкритичности ( $1 \leq r < 4$ ) сопоставляются с данными 3d,free, 2d,free и 2d,rigid расчетов. Во всех расчетах отмечено хорошее количественное согласование профиля средней температуры и визуальное - изотерм полной

температуры; результаты 2d,rigid расчета хорошо согласуются с данными эксперимента по числу Нуссельта и удовлетворительно - по зависимости доминирующей длины волны от надкритичности.

Проведением при  $g = 6 \cdot 10^3$  на разных ПК двух 2d,free расчетов, с полностью совпадающими компьютерными кодами, трансляторами, числом учитываемых гармоник, начальными и граничными условиями, показано, что при сопоставлении параметров сложных конвективных течений имеет смысл, в основном, сопоставление средних (интегральных) характеристик, которые вычисляются достаточно устойчиво. А анализ мгновенных величин можно проводить только при достаточно высокой точности вычислений и на малом отрезке времени. В рассмотренном примере, при проведении вычислений на разных ПК с двойной (Real\*8) точностью все анализируемые интегральные величины и профили практически совпадали между собой, а вычисленные мгновенные значения числа Нуссельта существенно отличались при  $t \geq 0.18$ . Качественно аналогичная ситуация наблюдалась и при проведении вычислений с точностью Real\*16.

Два тестовых расчета, проведенные при  $g = 6 \cdot 10^3$  с учетом [129x33] гармоник и точностью вычислений Real\*8 и Real\*16, также показали практическое совпадение интегральных характеристик.

Была проведена серия методических расчетов при  $g = 6 \cdot 10^3$  с учетом [129x33], [257x65], [513x129], [1025x257] и [2049x513] гармоник, анализ результатов которой показал, что наблюдается сходимость:

- всех анализируемых интегральных величин,
- профилей средней температуры, среднеквадратичных пульсаций температуры, вертикальной и горизонтальной скорости,
- одномерных пространственных спектров температуры и скорости.

И дополнительно, сравнение временных спектров числа Нуссельта, полученных с учетом [513x129] и [1025x257] гармоник, показало их качественное подобие с совпадением положений максимумов и законов затухания на высоких частотах.

Интегральные характеристики, полученные другим методом - модифицированным методом Галеркина (псевдоспектральным), основанным на вычислении нелинейных членов в физическом пространстве на разностной сетке, имеющей в каждом направлении в два раза больше точек, чем гармоник в том же направлении и схеме Рунге-Кутты четвертого порядка для интегрирования по времени, хорошо согласуются с результатами расчетов предлагаемым спектрально-разностным методом стохастических течений двухдиффузионной конвекции и конвекции при надкритичности до  $r = 2 \cdot 10^3$ .

Для иллюстрации возможности проводить 2d,rigid расчеты стохастических течений предлагаемым методом при высокой надкритичности, сравнивались числа Нуссельта, полученные в настоящей работе и [21] при  $r \leq 6 \cdot 10^3$ . Среднее отклонение значений было равно 2.8, а максимальное - 3.9% при  $r = 6 \cdot 10^3$ . И более того, наши расчеты подтвердили отмеченную в [21] смену степенного закона с  $1/3$  на  $2/7$  при  $r \approx 3 \cdot 10^3$  в зависимости  $Nu$  от  $r$ .

Проведено также сравнение временного энергетического спектра (квадрата модуля Фурье преобразования функции времени) пульсаций температуры в центре конвективной ячейки, полученного в 3d,free (при  $r = 410$ ) и 2d,free ( $r = 6.4 \cdot 10^3$ ) расчетах с данными эксперимента по турбулентной конвекции газообразного гелия при криогенной температуре [42]. Надкритичность и число Прандтля в расчетах и эксперименте совпадали. Спектры характеризуются большой консервативностью со слабой зависимостью от надкритичности, временного и пространственного разрешения, а также и от размерности. Размещение датчика температуры в центре конвективной ячейки в эксперименте обуславливает сравнительно слабую зависимость результатов измерений от геометрии области и граничных условий.

Все вышесказанное показывает правомерность сопоставления данных эксперимента с результатами двумерного и трехмерного расчетов. Данные эксперимента хорошо согласуются с результатами трехмерного и двумерного расчетов, заметное отклонение наблюдается только на диссипативных частотах.

Показано, что кардинальное различие 2d,free и 3d,free решений - принципиально разное поведение вихревого масштаба при увеличении надкритичности, который в двумерной конвекции растет до значения порядка размера области, а в трехмерной - уменьшается примерно обратно пропорционально корню двенадцатой степени. Указанная тенденция роста вихревого масштаба в двумерной конвекции проявляется с появлением нестационарности, вихревой масштаб достигает своего минимального значения при  $r = r_m$ ,  $r_m \approx 36$  (при  $\alpha = 1$ ), а затем увеличивается с ростом надкритичности до значения порядка размера области. Незначительное увеличение вихревого масштаба (до  $\sim 0.9\%$ ) наблюдалось и в расчетах стационарных одно- и двухвихревых течений.

В работе исследовались характеристики двумерных 2d,free конвективных течений в областях относительно большой  $\ell = 4\pi$  и умеренной  $\ell = \pi$  горизонтальной протяженности и трехмерной 3d,free конвекции при горизонтальной протяженности области равной  $\pi$  в обоих горизонтальных направлениях.

Различие в характеристиках двумерных 2d,free течений при конвекции в областях умеренной и большой горизонтальной протяженности обусловлено:

- различным вихревым масштабом, по порядку величины равным размеру области,
- увеличением роли силы плавучести, что наиболее существенно на больших масштабах,
- ростом отношения масштабов плавучести и генерации и
- увеличением генерации, переноса и диссипации кинетической энергии.

В самом деле, выражение для силы плавучести, в отличие от остальных членов уравнения для скорости, не содержит каких-либо производных и поэтому ее вклад наиболее существенен на больших масштабах. Сила плавучести входит в уравнение только для скорости. Отсюда следует, что при последовательном увеличении горизонтальной протяженности области,

первоначально существенная роль силы плавучести отразится в спектрах скорости, а затем и температуры. А генерация и диссипация кинетической энергии примерно пропорциональны  $\ell^{0.8} r^{1.4}$ .

В двумерных 2d,free и трехмерных 3d,free расчетах вычислялись и анализировались временные и пространственные спектры температуры и скорости. Наблюдаемая в расчетах динамика пространственных спектров укладывается в рамки предложенного в работе качественного физического сценария.

Согласно этому сценарию, при умеренной горизонтальной протяженности области в двумерных и трехмерных расчетах, действие силы плавучести, наиболее существенное на больших масштабах, должно обусловить стратификационный спектр для скорости. В то же время, действие силы плавучести на температуру еще незначительно, что с учетом доминирования конвективного переноса для температуры должно приводить к спектру пассивной примеси  $k^{-5/3}$ .

С увеличением горизонтальной протяженности области в 2d,free расчетах диссипация кинетической энергии, ее генерация и поток к малым масштабам растут и, как естественно полагать, становится также существенным поток энергии к большим масштабам. Следовательно, в спектре скорости должны появиться степенные законы, соответствующие каскадным процессам переноса кинетической энергии из масштаба генерации в малые масштабы с последующей диссипацией ( $k^{-3}$  - прямой каскад энстрофии) и в большие, с формированием крупномасштабной структуры течения ( $k^{-5/3}$  - обратный или красный каскад энергии). А увеличение роли силы плавучести должно приводить к стратификационному спектру для температуры.

С другой стороны, формирование красного каскада энергии при дальнейшем увеличении надкритичности приводит к перекачке энергии пульсаций скорости в большие масштабы, поле скорости становится крупномасштабным при относительно низком уровне пульсаций, и возникает своеобразный вязкоконвективный интервал, где пульсации температуры

управляются крупномасштабным полем скорости, в результате чего в спектре температуры вместо стратификационного спектра может появиться спектр Бэтчелора  $k^{-1}$  [74].

Заметим так же, что после формирования обратного каскада энергии его энергетическая роль неизбежно должна падать, что обусловлено отсутствием диссипации на больших масштабах. В свою очередь, диссипация энергии растет с увеличением надкритичности и горизонтальной протяженности области, обуславливая этим усиление прямого каскада энстрофии и приводя к установлению единого степенного закона в спектре скорости, близкого к закону энстрофийного каскада  $k^{-3}$ .

Описанный физический сценарий подтверждается тем, что при двумерной 2d,free и трехмерной 3d,free конвекции в области умеренной горизонтальной протяженности для спектров температуры и скорости получены законы  $k^{-5/3}$  и  $k^{-2.4}$ . Эти спектры наблюдались в экспериментах по турбулентной конвекции [42-44,49]. Ясного физического и теоретического обоснования для второго из перечисленных спектров до сих пор не получено, а первый спектр указывает на поведение температуры как пассивной примеси, без доминирующей роли плавучести.

А для пульсаций скорости в расчетах получены стратификационный спектр Болджиано-Обухова (БО)  $k^{-11/5}$  и  $k^{-5}$  и, дополнительно, в трехмерной постановке стратификационный спектр Ламли-Шура (ЛШ)  $k^{-3}$ . Спектр БО наблюдался в экспериментах по турбулентной конвекции [44,46], степенной закон  $k^{-5}$  имеет также стратификационную природу и предсказан теоретически для конвекции в жидкости с высоким числом Прандтля [74], а спектр ЛШ предсказан теоретически и отмечен в атмосферных экспериментах на высоте около 8000 м [107].

Однако, спектр Колмогорова  $k^{-5/3}$ , наблюдавшийся в расчетах [1,3,4,12] с различной степенью убедительности, в трехмерных расчетах настоящей работе получен не был, также как и в немногих известных экспериментальных исследованиях турбулентной конвекции, в которых исследовались спектры

пульсаций скорости [44,46]. Отсутствие спектра Колмогорова для скорости в наших расчетах объясняется недостаточно высоким числом Рейнольдса ( $Re \leq 44$ ). Более того, внутреннее число Рейнольдса, вычисленное по характерной скорости и масштабу пульсаций не превосходит 21.4, в то время как начало турбулентности связывается с его значением равным 15 [9].

Подчеркнем, что практически полное совпадение спектров температуры и скорости в 2d,free и 3d,free конвекции в области умеренной горизонтальной протяженности  $\ell = \pi$  наблюдается во всем рассмотренном диапазоне изменения надкритичности, при  $r \leq 3.4 \cdot 10^4$  в двумерных и  $r \leq 950$  - трехмерных расчетах.

С описанным выше физическим сценарием согласуется и перестройка спектров температуры и скорости при 2d,free конвекции в области относительно большой горизонтальной протяженности  $\ell = 4\pi$ .

При  $500 \leq r \leq 4 \cdot 10^3$  на длинноволновом участке спектра скорости наблюдаются одновременно два разных спектра, соответствующие двум конкурирующим механизмам – плавучести и обратному каскаду энергии. Это сосуществование двух различных спектров ( $k^{-5/3}$  и  $k^{-11/5}$ ) обуславливает их нечеткую идентификацию и в некотором смысле условное проведение верхней границы  $r = 4 \cdot 10^3$  этого сосуществования по надкритичности.

При значении надкритичности  $4 \cdot 10^3 \leq r \leq 10^4$  в спектре скорости одновременно наблюдаются два инерционных интервала, соответствующие обратному (красному) каскаду энергии со степенным законом  $k^{-5/3}$ , перекачивающему кинетическую энергию из масштаба генерации в крупные масштабы и прямому каскаду энстрофии со степенным законом  $k^{-3}$ , который обеспечивает диссипацию. А при  $r > 10^4$  видна тенденция к установлению единого степенного закона  $k^{-2.6}$ , близкого к закону энстрофийного каскада.

Перестройка спектра скорости при  $r \approx 10^4$  подобна отмеченной в численных [79,80,83] и экспериментальном [84] исследованиях двумерной турбулентности и обусловлена формированием крупномасштабной структуры течения. В самом деле, относительное ослабление энергетической роли обратного каскада переноса энергии к большим масштабам (крупномасштабная



структура поля скорости уже сформирована, а диссипация энергии пренебрежимо мала на больших масштабах) и усиление прямого каскада энтрофии из-за роста диссипации обуславливает тенденцию установления единого степенного закона  $k^{-2.6}$ , близкого к закону энтрофийного каскада. Последнее находится в некотором противоречии с результатами численного [77] и экспериментального [84] исследований двумерной турбулентности, где спектр в интервале переноса энтрофии заметно круче. Это различие, предположительно, связано с действием присутствующей в конвекции силы плавучести, в результате чего степенной закон энтрофийного каскада заменяется более пологим, но простирающимся в область волновых чисел, меньших частоты генерации.

В длинноволновом спектре температуры при умеренной надкритичности  $750 \leq r \leq 2 \cdot 10^3$  наблюдается стратификационный спектр БО  $k^{-7/5}$ , который при  $2 \cdot 10^3 < r \leq 6 \cdot 10^3$  заменяется спектром Бэтчелора  $k^{-1}$ . А при  $r > 6 \cdot 10^3$  показатель степени  $\beta$  степенного закона  $k^{-\beta}$  принимает значения из интервала  $[0.7, 1]$ , с наиболее вероятным значением 0.8.

Подобная перестройка наблюдалась экспериментально в физически близкой задаче о конвекции в вертикальной мыльной пленке при подогреве снизу [109]. В спектре температуры при  $dQ < 48^\circ \text{K}$  наблюдался стратификационный спектр БО  $k^{-7/5}$ , а при  $dQ > 48^\circ \text{K}$  - Бэтчелора  $k^{-1}$ . Авторы [109] связывают перестройку температурного спектра с формированием крупномасштабной структуры течения.

Конечно, перестройка температурного спектра при  $r \approx 2 \cdot 10^3$  (как и перестройка спектра скорости при  $r \approx 4 \cdot 10^3$ ) связана с формированием крупномасштабной структуры течения (конденсацией), обусловленной действием обратного каскада энергии. При недостаточно большой надкритичности красный каскад еще не сформирован и силы плавучести, существенные на больших масштабах, обуславливают стратификационный спектр БО  $k^{-7/5}$  ( $k^{-11/5}$  для скорости). Но, с повышением надкритичности энергетическая роль красного каскада усиливается и благодаря его действию

происходит перекачка энергии пульсаций скорости в большие масштабы, поле скорости становится крупномасштабным при относительно низком уровне пульсаций и возникает своеобразный вязкоконвективный интервал, где пульсации температуры управляются крупномасштабным полем скорости, что и обуславливает появление спектра Бэтчелора  $k^{-1}$  [74].

Во введении отмечено, что при сопоставлении данных по трехмерной конвекции со свободными и жесткими граничными условиями следует ожидать хорошего соответствия пульсационных характеристик температуры и вертикальной скорости, так как для них граничные условия на горизонтальных границах правильные и их динамика определяется, в основном, подогревом и гравитацией. Хорошее соответствие можно ожидать также для числа Рейнольдса, среднеквадратичной скорости и кинетической энергии, так как они определяются, главным образом, вертикальной скоростью.

Существенное отличие конвекции со свободными границами от конвекции с жесткими - возможность неравенства нулю значений вертикальной компоненты завихренности [59], что обуславливает возможное вращение вокруг вертикальной оси, а направленная горизонтально скорость такого вращения и отличие в граничных условиях для нее, обуславливает возможное расхождение в характеристиках, связанных с горизонтальной скоростью. Заметим, что при двумерном моделировании вертикальная компонента завихренности равна нулю тождественно и согласование среднеквадратичных пульсаций горизонтальной скорости при двумерной конвекции со свободными и жесткими граничными условиями лучше, чем вертикальной [63]. Интересно, что при этом результаты 2d,free расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными по числу Нуссельта даже при высокой надкритичности и удовлетворительно - по величине среднеквадратичных пульсаций горизонтальной скорости [63].

При рассмотрении результатов двумерных расчетов необходимо учитывать, что при надкритичности порядка 10 стационарные валы становятся неустойчивыми к трехмерным возмущениям, и течение становится трехмерным

[47]. Но логично ожидать, что в начале своего возникновения трехмерность еще не является доминирующим фактором и законы изменения основных интегральных величин еще мало отличаются от двумерных. Грубую оценку величины надкритичности, выше которой трехмерность является доминирующей, можно получить из рассмотрения динамики вихревого масштаба.

Уже отмечалось выше, что кардинальное отличие двумерных течений от трехмерных заключается в различном поведении вихревого масштаба при увеличении надкритичности, который в двумерной конвекции растет, а в трехмерной - уменьшается. Указанная тенденция роста вихревого масштаба в двумерной конвекции проявляется при  $r \geq r_m$ , где  $r_m \approx 36$  (при  $\alpha = 1$ ). Естественно ожидать, что и это различие в поведении вихревого масштаба становится доминирующим не сразу после его появления. Таким образом, можно ожидать примерного соответствия степенных законов изменения средних величин при увеличении надкритичности в двумерной и трехмерной конвекции примерно до значений порядка 100. Причем результаты вычисления и сравнительного анализа пространственных и временных спектров в двумерных и трехмерных расчетах при  $\alpha = 1$  показывают, что для консервативных величин, слабо зависящих от надкритичности и пространственного разрешения, интервал соответствия может быть много больше.

Сказанное подтверждается тем, что величина среднеквадратичных пульсаций температуры как функция надкритичности в 3d,free расчетах с хорошей точностью соответствует степенному закону

$$q' = 0.163 \cdot r^{-2/15} \text{ при } r \geq 150,$$

показатель которого совпадает с полученным в эксперименте [53] и близок к расчетному [1].

А результаты 2d,free расчетов с хорошей точностью соответствуют степенному закону (при  $170 \leq r \leq 305$  рассматривается верхняя ветвь решения)

$$q' = 0.316 \cdot r^{-0.2} \text{ при } 40 \leq r \leq 305,$$

показатель которого совпадает с полученным в экспериментах по конвекции газообразного *He* при криогенной температуре при более высокой надкритичности [55].

Отметим, что в двумерных расчетах (при  $r \approx 10^3$  в 2d,free и  $r \approx 250$  - 2d,rigid) прослеживается качественное изменение зависимости величины среднеквадратичных температурных пульсаций от надкритичности - тенденция убывания сменяется возрастанием. Появление нефизичной тенденции возрастания температурных пульсаций связано с формированием крупномасштабной структуры течения, повышающей уровень среднеквадратичных пульсаций [55].

А величина среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости в 3d,free расчетах с хорошей точностью соответствуют степенному закону

$$W' = 15.8 \cdot r^{0.395} \text{ при } r \geq 150,$$

причем его показатель близкий к полученному в экспериментах [48,53] и расчете [1].

В двумерных расчетах соответствие наблюдается при сравнительно невысокой надкритичности ( $r \leq 250$  в 2d,rigid и  $r \leq 305$  - в 2d,free расчетах).

А именно, результаты 2d,rigid расчетов и данные эксперимента [48] показывают при надкритичности  $r < 250$  практически совпадающие значения и показатели степенных законов. А степенные законы, аппроксимирующие результаты 3d,free и 2d,free расчетов имеют практически совпадающие при надкритичности  $r < 137$  показатели, несколько завышенные по сравнению с полученными в эксперименте [48] (0.44) и расчете [1] (0.46), но значения среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости, полученные в (2d,free) расчете при  $r \leq 305$  согласуются с данными [1].

Отметим так же, что результаты 3d,free и 2d,free расчетов практически совпадают в диапазоне надкритичности  $280 \leq r \leq 850$  (при  $170 \leq r \leq 305$  рассматривается нижняя ветвь решения).

При достаточно большой надкритичности, двумерные расчеты показывают нефизично высокий рост среднеквадратичных пульсаций вертикальной скорости:  $W' \sim r^{0.57}$  и  $W' \sim r^{0.715}$  - в 2d,rigid и 2d,free расчетах, соответственно. Это, как и в случае пульсаций температуры, также обусловлено формированием крупномасштабной структуры течения.

Различие в пульсациях горизонтальной скорости выражено слабее при двумерном моделировании, чем для пульсаций вертикальной и данные 2d,free расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментом [63].

При  $r \geq 20$  результаты 3d,free моделирования с хорошей точностью соответствуют степенному закону

$$U'_3 = 2.14 \cdot r^{0.693}, U'_3 = 0.5 \cdot (U' + V').$$

Результаты трехмерных и двумерных (2d,free и 2d,rigid) расчетов близки при  $r \leq 250$ .

Число Nu как функция надкритичности в 2d,free расчетах хорошо согласуется с экспериментом при большой надкритичности. Причем, при  $r < 800$  значения числа Нуссельта в 2d,rigid расчетах меньше и ближе к экспериментальной кривой, чем в 2d,free, а при  $r > 800$  - наоборот.

В 2d,free и 2d,rigid расчетах настоящей работы при достаточно большой надкритичности наблюдается выход на асимптотический степенной закон, близкий к  $Nu \sim r^{0.37}$ . Показатель этого степенного закона близок к показателю степенного закона  $Nu \sim r^{0.365}$ , полученного в [33] для стационарной, одновихревой конвекции.

Расчет интегральных характеристик стационарного, одновихревого течения в постановке [33], но в более широком диапазоне надкритичности  $r \leq 10^4$ , показал близость показателей степенных законов для основных интегральных величин в 2d,free расчетах и стационарном, крупномасштабном

одновихревом течении, при практически полном их совпадении для кинетической энергии и среднеквадратичной скорости.

А в зависимости числа Нуссельта от надкритичности в 3d,free расчетах можно выделить два участка со степенными зависимостями:

$$\text{Nu} = 1.85 \cdot r^{0.302} \text{ при } 20 \leq r \leq 137 \text{ и } \text{Nu} = 2.79 \cdot r^{0.230} \text{ при } 150 \leq r \leq 950.$$

Отметим, что показатель закона нарастания числа Нуссельта при  $r \leq 137$  хорошо согласуется со значением 0.305 показателя эмпирического закона O'Toole и Silveston, 1961 и с полученным в 2d,free расчетах при  $r \leq 305$ .

В общем, последовательность степенных законов для числа Нуссельта в 3d,free расчетах соответствует полученной в 2d,free, но смена степенных законов в трехмерной конвекции происходит при меньшей надкритичности, чем в двумерной. Но числа Нуссельта, полученные в 2d,free расчетах, хорошо согласуются с экспериментом даже при высокой надкритичности [63]. Это и логика сопоставления степенных законов для числа Нуссельта в 2d,free и 3d,free расчетах указывает на необходимость проведения дальнейших расчетов трехмерной конвекции при более высокой надкритичности.

Суммируя все вышесказанное, сформулируем основные выводы работы:

1. Несмотря на наблюдаемые количественные расхождения между результатами 3d,free расчетов и экспериментом, трехмерные расчеты дают правильные показатели степенных законов изменения среднеквадратичных пульсаций температуры, вертикальной скорости, числа Рейнольдса, среднеквадратичной скорости и кинетической энергии от надкритичности при  $r \geq 150$ . В двумерных расчетах аналогичное соответствие наблюдается при сравнительно невысокой надкритичности (до  $r \sim 250$ ) по среднеквадратичным пульсациям температуры (в 2d,free) и вертикальной скорости (в 2d,free и 2d,rigid расчетах).

2. Поведение при высокой надкритичности числа Нуссельта, пульсаций вертикальной скорости и температуры, а также близость показателей степенных законов для основных интегральных величин в 2d,free расчетах и стационарном, одновихревом течении показывает, что в 2d,free расчетах при

высокой надкритичности формирование крупномасштабной структуры является доминирующим фактором, определяющим характеристики течения. Сказанное справедливо и для 2d,rigid конвекции при достаточно большой горизонтальной протяженности области.

3. Динамика пространственных спектров температуры и скорости в 2d,free и 3d,free расчетах определяется вкладами силы плавучести и диссипации кинетической энергии, которые растут при увеличении горизонтальной протяженности области и надкритичности.

При умеренной горизонтальной протяженности области  $\ell = \pi$  в двумерных и трехмерных расчетах действие силы плавучести обуславливает стратификационный спектр для скорости, а доминирование конвективного переноса для температуры - спектр пассивной примеси  $k^{-5/3}$ . Эти спектры наблюдались в двумерных и трехмерных расчетах во всем исследованном диапазоне надкритичности.

С увеличением горизонтальной протяженности области до  $\ell = 4\pi$  диссипация кинетической энергии, ее генерация и потоки растут и, при  $500 \leq r < 4 \cdot 10^3$  на длинноволновом участке спектра скорости одновременно видны два степенных закона, отражающие два конкурирующие механизма – силу плавучести и каскадный процесс переноса энергии, а при  $4 \cdot 10^3 \leq r \leq 10^4$  в двумерных расчетах в спектре скорости видны степенные законы  $k^{-3}$  и  $k^{-5/3}$ , соответствующие прямому и обратному каскадным процессам. При дальнейшем увеличении надкритичности ( $r > 10^4$ ) в спектре скорости видна тенденция к установлению единого степенного закона  $k^{-2.6}$  - искаженного закона каскада энстрофии.

При умеренной надкритичности  $500 \leq r \leq 2 \cdot 10^3$  в спектре температуры виден стратификационный спектр БО  $k^{-7/5}$ , который при  $2 \cdot 10^3 < r \leq 6 \cdot 10^3$  сменяется спектром Бэтчелора  $k^{-1}$ .

Перестройки спектров температуры (скорости) в двумерных расчетах связаны с формированием обратного каскада энергии при  $r \approx 2 \cdot 10^3$  ( $r \approx 4 \cdot 10^3$ ) и уменьшением его энергетической роли при  $r \approx 6 \cdot 10^3$  ( $r \approx 10^4$ ).

## Литература

1. Kerr R.M. Rayleigh number scaling in numerical convection // J. Fluid Mech. 1996. V.310. P.139-179.
2. Hartlep T., Tilgner A., Busse F.H. Large scale structures in Rayleigh-Benard convection at high Rayleigh numbers // Phys. Rev. Lett. 2003. V.91. N.6. P.064501-1 - 4.
3. Yang H., Zhu Z. Numerical simulation of turbulent Rayleigh-Benard convection // Int. Com. Heat Mass Transfer. 2006. V.33. P.184-190.
4. Verzicco R., Camussi R. Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell // J. Fluid Mech. 2003. V.477. P.19-49.
5. Amati G., Koal K., Massaioli F., Sreenivasan K.R., Verzicco R. Turbulent thermal convection at Rayleigh numbers for a Boussinesq fluid of constant Prandtl number // Phys. Fluids. 2005. V.17. P.121701-1 - 4.
6. Shishkina O., Wagner C. Analysis of thermal dissipation rates in turbulent Rayleigh-Benard convection // J. Fluid Mech. 2006. V.546. P.51-60.
7. Van Reeuwijk M., Jonker H.J.J., Hanjalic K. Identification of the wind in Rayleigh-Benard convection // Phys. Fluids. 2005. V.17. N.4. P.051704-1 - 4.
8. Grotzbach G. Direct numerical simulation of laminar and turbulent Benard convection // J. Fluid Mech. 1982. V.119. P.27-53.
9. Kerr R.M., Herring J.R., Brandenburg A. Large-scale structure in Rayleigh-Benard convection with impenetrable sidewalls // Chaos, Solitons & Fractals. 1995. V.5. N.10. P.2047-2053.
10. Arter W. Nonlinear Rayleigh-Benard convection with square planform // J. Fluid Mech. 1985. V.152. P.391-418.
11. Travis B., Olson P., Schubert G. The transition from two-dimensional to three-dimensional planforms in infinite-Prandtl-number thermal convection // J. Fluid Mech. 1990. V.216. P.71-91.



12. Malevsky A.V. Spline-characteristic method for simulation of convective turbulence // *J. Comput. Phys.* 1996. V.123. N.2. P.466-475.
13. Balachandar S., Maxey M.R., Sirovich L. Numerical simulation of high Rayleigh number convection // *J. Sci. Comp.* 1989. V.4. N.2. P.219-236.
14. Cortese T., Balachandar S. Vortical nature of thermal plumes in turbulent convection // *Phys. Fluids. A.* 1993. V.5. N.12. P.3226-3232.
15. Thual O. Zero-Prandtl-number convection // *J. Fluid Mech.* 1992. V.240. P.229-258.
16. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Шмидт В.М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу // *Докл. АН СССР.* 1978. Т.238. N.3. С.545-548.
17. Curry J.H., Herring J.R., Loncaric J., Orszag S.A. Order and disorder in two-and three-dimensional Benard convection // *J. Fluid Mech.* 1984. V.147. P.1-38.
18. Wessling S., Schmalzl J., Hansen U. Effect of inertia in Rayleigh-Benard convection // *Phys. Rev. E* 69. 2004. P.026302-1 - 10.
19. Schmalzl J., Breuer M., Hansen U. The influence of the Prandtl number on the style of vigorous thermal convection // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 2002. V.96. N.5. P.381-403.
20. Goldhirsch I., Pelz R.B., Orszag S.A. Numerical simulation of thermal convection in a two-dimensional finite box // *J. Fluid Mech.* 1989. V.199. P.1-28.
21. DeLuca E.E., Werne J., Rosner R., Cattaneo F. Numerical simulation of soft and hard turbulence: preliminary results for two-dimensional convection // *Phys. Rev. Letters.* 1990. V.64. N.20. P.2370-2373.
22. Werne J. Structure of hard-turbulent convection in two dimensions: Numerical evidence // *Phys. Rev. E.* 1993. V.48. N.2. P.1020-1035.
23. Liu J.-G., Wang C., Johnston H. A fourth order scheme for incompressible Boussinesq equations // *J. of Sci. Comp.* 2003. V.18. N.2. P.253-285.
24. Schneck P., Veronis G. Comparison of some recent experimental and numerical results in Benard convection // *Phys. Fluids.* 1967. V.10. N.5. P.927-930.

25. Clever R.M., Busse F.H. Transition to time-dependent convection // *J. Fluid Mech.* 1974. V.65. Pt.4. P.625-645.
26. Полежаев В.И., Яремчук В.П. Численное моделирование двумерной нестационарной конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом снизу // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 2001. N.4. С.34-45.
27. Бабенко К.И., Рахманов А.И. Численное исследование двумерной конвекции. Препринт / ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, N.118. 1988. 26 с.
28. Родичева О.В., Родичев Е.Б. О двумерной турбулентности в задаче Рэлея-Бенара // *Докл. АН СССР.* 1998. Т.359. N.4. С.486-489.
29. Герценштейн С.Я., Шмидт В.М. Нелинейное взаимодействие конвективных волновых движений и возникновение турбулентности во вращающемся горизонтальном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1977. N.2. С.9-15.
30. Gertsenstein S., Sibgatullin I. Bifurcations, Transition to turbulence and development of chaotic regimes for double-diffusive convection // *Wseas Transactions on Applied and Theoretical Mechanics.* 2006. V.1. Is.1. P.110-114.
31. Gertsenstein S., Sibgatullin I., Sibgatullin N. Some properties of two-dimensional stochastic regimes of double-diffusive convection in plane layer // *Chaos.* 2003. V.13. N.4. P.1231-1241.
32. Veronis G. Large-amplitude Benard convection // *J. Fluid Mechanics.* 1966. V.26. Pt.1. P.49-68.
33. Moore D.R., Weiss N.O. Two-dimensional Rayleigh-Benard convection // *J. Fluid Mech.* 1973. V.58. Part 2. P.289-312.
34. Schubert G., Anderson C.A. Finite element calculations of very high Rayleigh number thermal convection // *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 1985. V.80. P.576-601.
35. Malevsky A.V., Yuen D.A. Characteristics-based methods applied to infinite Prandtl number thermal convection in the hard turbulent regime // *Phys. Fluids. A.* 1991. V.3. N.9. P.2105-2115.
36. Vincent A.P., Yuen D.A. Plumes and waves in two-dimensional turbulent convection // *Phys. Rev. E.* 1999. V.60. N.3. P.2957-2963.

37. Vincent A.P., Yuen D.A. Transition to turbulent thermal convection beyond  $Ra = 10^{10}$  detected in numerical simulations // *Phys. Rev. E*. 2000. V.61. N.5. P.5241-5246.
38. Hansen U., Yuen D.A., Malevsky A.V. Comparison of steady-state and strongly chaotic thermal convection at high Rayleigh number // *Phys. Rev. A*. 1992. V.46. N.8. P.4742-4754.
39. Goldstein R.J., Graham D.J. Stability of a horizontal fluid with zero shear boundaries // *Phys. Fluids*. 1969. V.12. N.6. P.1133-1137.
40. Niemela J.J., Sreenivasan K.R. Turbulent convection at high Rayleigh numbers and aspect ratio 4 // *J. Fluid Mech*. 2006. V.557. P.411-422.
41. Fleischer A.S., Goldstein R.J. High-Rayleigh-number convection of pressurized gases in a horizontal enclosure // *J. Fluid Mech*. 2002. V.469. P.1-12.
42. Wu X.-Z., Kadanoff L., Libchaber A., Sano M. Frequency power spectrum of temperature fluctuations in free convection // *Phys. Rev. Lett*. 1990. V.64. N.18. P.2140-2143.
43. Niemela J.J., Skrbek L., Sreenivasan K.R., Donnelly R.J. Turbulent convection at very high Rayleigh numbers // *Nature*. 2000. V.404. N.20. P.837-840.
44. Ashkenazi S., Steinberg V. Spectra and statistics of velocity and temperature fluctuations in turbulent convection // *Phys. Rev. Lett*. 1999. V.83. N.23. P.4760-4763.
45. Farhadieh R., Tankin R.S. Interferometric study of two-dimensional Benard convection cells // *J. Fluid Mech*. 1974. V.66. Pt.4. P.739-752.
46. Shang X.-D., Xia K.-Q. Scaling of the velocity power spectra in turbulent thermal convection // *Phys. Rev. E*. 2001. V.64. P.065301-1 - 4.
47. Krishnamurti R., Howard L.N. Large-scale flow generation in turbulent convection // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. (Applied physical and mathematical sciences). 1981. V.78. N.4. P.1981-1985.
48. Garon A.M., Goldstein R.J. Velocity and heat transfer measurements in thermal convection // *Phys. Fluids*. 1973. V.16. N.11. P.1818-1825.

49. Cioni S., Ciliberto S., Sommeria J. Temperature structure functions in turbulent convection at low Prandtl number // *Europhys. Lett.* 1995. V.32. N.5. P.413-418.
50. Chu T.Y., Goldstein R.J. Turbulent convection in a horizontal layer of water // *J. Fluid Mech.* 1973. V.60. Pt.1. P.141-159.
51. Deardorff J.W., Willis G.E. Investigation of turbulent thermal convection between horizontal plates // *J. Fluid Mech.* 1967. V.28. Pt.4. P.675-704.
52. Thomas D.B., Townsend A.A. Turbulent convection over a heated horizontal surface // *J. Fluid Mech.* 1957. V.2. P.473-492.
53. Fitzjarrald D.E. An experimental study of turbulent convection in air // *J. Fluid Mech.* 1976. V.73. Pt.4. P.693-719.
54. Denton R.A., Wood I.R. Turbulent convection between two horizontal plates // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1979. V.22. N.10. P.1339-1346.
55. Wu X.-Z., Libchaber A. Scaling relations in thermal turbulence: the aspect-ratio dependence // *Phys. Rev. A.* 1992. V.45. N.2. P.842-845.
56. Malkus W.V.R. Discrete transitions in turbulent convection // *Proc. Roy. Soc. London. A.* 1954. V.225. N.1161. P.185-195.
57. Chavanne X., Chilla F., Chabaud B., Castaing B., Hebral B. Turbulent Rayleigh-Benard convection in gaseous and liquid *He* // *Phys. Fluids.* 2001. V.13. N.5. P.1300-1320.
58. Палымский И.Б. Численное исследование спектров турбулентной конвекции Рэлея-Бенара // *Нелинейная динамика.* 2008. Т.4. N.2. С.145-156.
59. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея-Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 247 с.
60. Палымский И.Б. Численное исследование спектров трехмерной конвекции Рэлея-Бенара // *Известия РАН. ФАО.* 2009. Т.45. N.5. С.691-699.
61. Физика океана (ред. Доронина Ю. П.). Л.: Гидрометеиздат, 1978. 294 с.
62. Пономарев С. Г., Стойнов М.И. Решение уравнений Навье-Стокса проекционными методами; вычисление нелинейных членов. Препринт / ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, N.58. 1987. 18 с.

63. Палымский И.Б. Численное моделирование двумерной конвекции, роль граничных условий // Известия РАН. МЖГ. 2007. N.4. С.61-71.
64. Палымский И.Б. О качественном различии решений двумерной и трехмерной конвекции // Нелинейная динамика. 2009. Т.5. N.2. С.183-203.
65. Палымский И.Б. Численное моделирование двумерной конвекции при высокой надкритичности // Успехи механики. 2006. N.4. С.3-28.
66. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
67. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
68. Палымский И.Б. Линейный и нелинейный анализ численного метода расчета конвективных течений // Сиб. ж. вычисл. матем. 2004. Т.7. N.2. С.143-163.
69. Палымский И.Б. Метод численного моделирования конвективных течений // Вычисл. технологии. 2000. Т.5. N.6. С.53-61.
70. Никитин Н.В., Полежаев В.И. Трехмерные эффекты переходных и турбулентных режимов тепловой гравитационной конвекции в методе Чохральского // Известия РАН. МЖГ. 1999. N.6. С.81-90.
71. Никитин Н.В. Спектрально-конечноразностный метод расчета турбулентных течений несжимаемых жидкостей в трубах и каналах // ЖВМ и МФ. 1994. Т.34. N.6. С.909-925.
72. Рождественский Б.Л., Стойнов М.И. Алгоритмы интегрирования уравнений Навье-Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии. Препринт / ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, N.119. 1987. 28 с.
73. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 285 с.
74. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 292 с.

75. Shats M.G., Xia H., Punzmann H. and Falkovich G. Suppression of turbulence by self-generated and imposed flows // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V.99. N.16. P.164502-1 - 4.
76. Frish U., Sulem P.L. Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence // *Phys. Fluids.* 1984. V.27. N.8. P.1921-1923.
77. Babiano A., Dubrulle B. Frick P. Scaling properties of numerical two-dimensional turbulence // *Phys. Rev. E.* 1995. V.52. N.4. P.3719-3729.
78. Boffetta G., Celani A. Vergassola M. Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: deviations from Gaussian behavior // *Phys. Rev. E.* 2000. V.61. N.1. P.R29-R32.
79. Tran C.V., Bowman J.C. Robustness of the inverse cascade in two-dimensional turbulence // *Phys. Rev. E.* 2004. V.69. P.036303-1 - 7.
80. Borue V. Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V.72. N.10. P.1475-1478.
81. Smith L.M., Yakhot V. Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V.71. N.3. P.352-355.
82. Chen S., Ecke R.E., Eyink G.L., Rivera M., Wan M., Xiao Z. Physical mechanism of the two-dimensional inverse energy cascade // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V.96. N.8. P.084502-1 - 4.
83. Chertkov M., Connaughton C., Kolokolov I., Lebedev V. Dynamics of energy condensation in two-dimensional turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V.99. N.8. P.084501-1 - 4.
84. Shats M.G., Xia H., Punzmann H. Spectral condensation of turbulence in plasmas and fluids and its role in low-to-high phase transitions in toroidal plasma // *Phys. Rev. E.* 2005. V.71. P.046409-1 - 9.
85. Paret J., Tabeling P. Experimental observation of the two-dimensional inverse cascade // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V.79. N.21. P.4162-4165.
86. Paret J., Jullien M.-C., Tabeling P. Vorticity statistics in the two-dimensional enstrophy cascade // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V.83. N.17. P.3418-3421.

87. Smith L.M., Waleffe F. Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence // *Phys. Fluids*. 1999. V.11. N.6. P.1608-1622.
88. Bruneau C. H., Kellay H. Experiments and direct numerical simulations of two-dimensional turbulence // *Phys. Rev. E*. 2005. V.71. P.046305-1 - 5.
89. Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. М.: Постмаркет, 2001. 560 с.
90. Palymskiy I.B., Fomin P.A. Hieronymus H. Rayleigh-Benard convection in chemical equilibrium gas (simulation of surface detonation wave initiation) // *App. Math. Model*. 2008. V.32. N.5. P.660-676.
91. Palymskiy I.B., Fomin P.A. Hieronymus H. The Rayleigh-Benard convection in gas with chemical reactions // *Сиб. ж. вычисл. матем.* 2007. Т.10. N.4. С.371-383.
92. Палымский И.Б. О моделировании сложных режимов конвекции Рэлея-Бенара // *Сиб. ж. вычисл. матем.* 2011. Т.14. N.2. С.179-204.
93. Бахвалов Н. С. Численные методы, Т.1. М.: Наука, 1975. 632 с.
94. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Наука, 1980. 618 с.
95. Палымский И.Б. Численное исследование спектров трехмерной турбулентной конвекции // *Известия Сарат. универ. Новая серия: матем., мех., информ.* 2010. Т.10. В.1. С.62-71.
96. Палымский И.Б. Численный метод расчета трехмерной конвекции // *Сиб. ж. индустр. матем.* 2010. Т.13. N.1. С.95-108.
97. Палымский И.Б. О численном моделировании трехмерной конвекции // *Вест. Удмурт. универ. серия 1: матем., мех., компьют. науки.* 2009. В.4. С.118-132.
98. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука СО, 1977. 366 с.
99. Палымский И.Б. Качественный анализ разностных схем для модельного нелинейного уравнения со знакопеременной вязкостью // *Дифф. уравн.* 1992. Т.28. N.12. С.2148-2158.

100. Палымский И.Б. Численное моделирование конвективных течений при высоких числах Вейссенберга. Препринт / ИТПМ СО АН СССР им. С.А. Христиановича, N.15. 1988. 48 с.
101. Senoner J.-M., Garcia M., Mendez S., Staffelbach G., Vermorel O. Growth of rounding errors and repetitively of large-eddy simulations // AIAA J. 2008. V.46. N.7. P.1773-1781.
102. Палымский И.Б., Герценштейн С.Я., Сибгатуллин И.Н. Об интенсивной турбулентной конвекции в горизонтальном плоском слое жидкости // Известия РАН. ФАО. 2008. Т.44. N.1. С.75-85.
103. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 378 с.
104. Белоцерковский О.М., Опарин А.М. Численный эксперимент в турбулентности. От порядка к хаосу. М.: Наука, 2000, 224 с.
105. Kraichnan R.H. Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number // Phys. Fluids. 1962. V.5. N.11. P.1374-1389.
106. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 730 с.
107. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 319 с.
108. Kraichnan R.H. Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence // J. Fluid Mech. 1971. V.47. Pt.3. P.525-535.
109. Zhang J., Wu X.L. Density fluctuations in strongly stratified two-dimensional turbulence // Phys. Rev. Lett. 2005. V.94. N.17. P.174503-1 - 4.
110. Xu X., Bajaj K.M.S., Ahlers G. Heat transport in turbulent Rayleigh-Benard convection // Phys. Rev. Lett. 2000. V.84. N.19. P.4357-4360.



## Приложение 1

### Вычисление одномерных энергетических спектров

Одномерные пространственные энергетические спектры температуры и скорости вычислялись и анализировались в 2d,free и 3d,free расчетах в работах [58,60,95] с использованием формул [74].

Опишем методику вычисления только спектров температуры, так как способ вычисления спектров скорости отличается лишь несущественными деталями.

Рассмотрим сначала вычисление температурных спектров в двумерном случае:

1. По известному полю температуры, осреднением по времени и горизонтальной координате вычисляется профиль средней температуры:

$$\bar{Q}(z) = \langle Q \rangle,$$

здесь угловые скобки означают осреднение по времени и горизонтальной координате  $x$ .

2. Вычисляется поле пульсаций температуры в каждый момент времени:

$$Q'(t, x, z) = Q(t, x, z) - \bar{Q}(z).$$

3. Двумерным преобразованием Фурье поля пульсаций (по косинусам и синусам в горизонтальном направлении и по синусам в вертикальном) и осреднением по времени квадратов модулей амплитуд Фурье-гармоник вычисляем двумерный энергетический спектр температурных пульсаций:

$$EQ_{km}, \quad k = 0, 1, \dots, K/2 \quad \text{и} \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

4. Проведя суммирование по одному из индексов полученного двумерного энергетического спектра, находим одномерный энергетический спектр:

$$EQ_k = \sum_{m=0}^M EQ_{km}, \quad EQ_m = \sum_{k=0}^{K/2} EQ_{km}.$$

5. Вычисленные одномерные спектры записываются в виде:

$$(2\alpha k, EQ_k) \text{ при } k = 0, 1, \dots, K/2 \text{ и } (\pi m, EQ_m) \text{ при } m = 0, 1, \dots, M,$$

где в круглых скобках первым записано волновое число, а вторым - соответствующее значение одномерного энергетического спектра при этом значении волнового числа.

А в трехмерных расчетах, одномерным преобразованием Фурье поля пульсаций температуры (по косинусам и синусам в горизонтальном направлении и по синусам в вертикальном) и осреднением квадратов модулей амплитуд Фурье-гармоник по времени и пространственным переменным, по которым не выполняется преобразование Фурье, вычисляются одномерные энергетические спектры.

Так, например, для вычисления одномерного энергетического спектра температуры  $EQ_k$ , соответствующего  $x$ -направлению, сначала выполняется преобразование Фурье в  $x$ -направлении по косинусам и синусам, затем квадраты модулей Фурье-гармоник осредняются по времени, горизонтальному  $y$  и вертикальному направлениям.

Как и в двумерном случае, полученный одномерный спектр записывается в виде:

$$(2\alpha k, EQ_k) \text{ при } k = 0, 1, \dots, K/2.$$

Аналогичным образом вычисляются одномерные спектры  $EQ_n$  и  $EQ_m$  в  $y$  и  $z$  направлениях, соответственно.

Для выполнения преобразования Фурье использовались стандартные программы быстрого преобразования Фурье.

## Приложение 2

### Определение степенных законов

Для определения степенного закона, исследуемая функциональная зависимость представляется в двойных логарифмических координатах где степенные законы соответствуют прямым линиям.

Временные спектры при сложных режимах конвекции осцилляторные и это обстоятельство существенно осложняет использование точных методов определения присущих им степенных законов.

Поэтому, при исследовании временных спектров степенные законы определяются на глаз с "глазомерной" точностью.

Для определения степенных законов, присущих пространственным спектрам и зависимостям интегральных характеристик от надкритичности, используются две методики.

Первая состоит в нахождении параметров степенного закона методом наименьших квадратов с помощью стандартной программы CurveExpert 1.3 или любой другой аналогичной.

Второй метод требует построения компенсационного спектра [43].

Согласно второй методике, вместо спектра  $E(x)$  рассматривается компенсационный спектр  $E(x) \cdot x^\beta$  и показатель подбирается таким, чтобы зависимость  $E(x) \cdot x^\beta$  от  $x$  была наиболее близка к горизонтальной прямой. Если этого удастся добиться выбором подходящего значения  $\beta$ , то это означает, что исходная зависимость  $E(x)$  от  $x$  следует степенному закону  $x^{-\beta}$ .

В качестве примера определения степенного закона рассмотрим спектр:

$$E(x) = x^{-2}(1 + 0.2 \sin(2x)), \text{ при } 0 < x < 70.$$

На рис. 1,2 и 3 приведены компенсационные спектры  $E(x) \cdot x^{2.02}$ ,  $E(x) \cdot x^{1.98}$  и  $E(x) \cdot x^2$ , соответственно. Кривой 1 показаны компенсационные спектры, а 2 - горизонтальные линии.

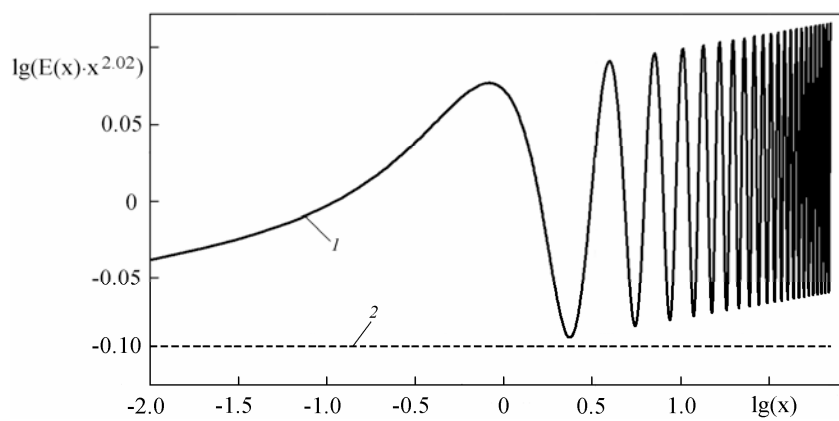


Рис.1. Компенсационный спектр  $E(x) \cdot x^{2.02}$ .

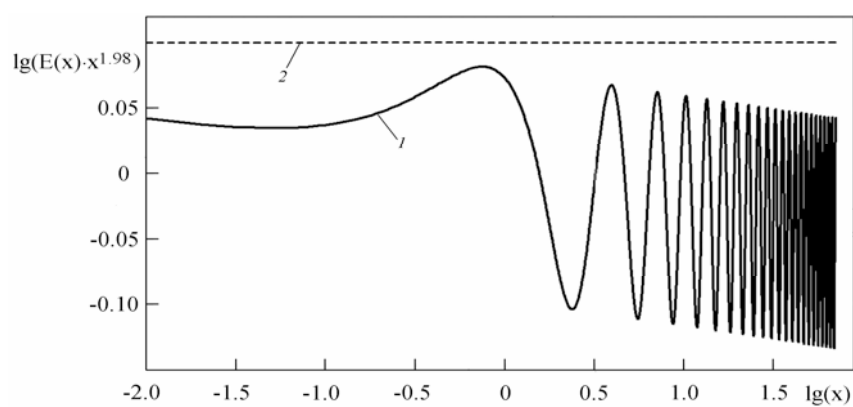


Рис.2. Компенсационный спектр  $E(x) \cdot x^{1.98}$ .

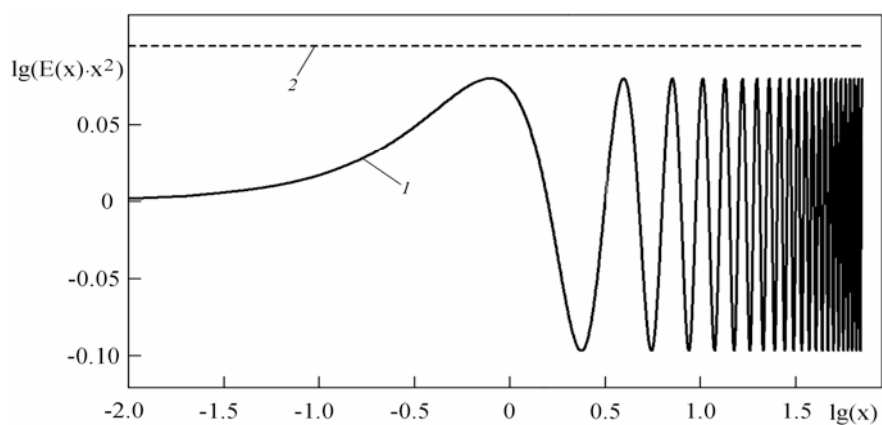


Рис.3. Компенсационный спектр  $E(x) \cdot x^2$ .

По отклонению компенсационных спектров от горизонтали на рис. 1 и 2 видно, что погрешность при определении показателя степенного закона в 1%

заметна. А рис. 2 показывает, что компенсационный спектр  $E(x) \cdot x^2$  наиболее близок к горизонтальной прямой (его огибающая при  $x > 0$  горизонтальна), и, следовательно, исследуемая функциональная зависимость следует степенному закону  $E(x) \cdot x^{-2}$ .

Определяя теперь недостающий множитель в степенном законе  $c \cdot x^{-2}$  методом наименьших квадратов, находим:

$$0.99161x^{-2}. \quad (1)$$

Использование же метода наименьших квадратов, следуя первой методике, приводит к степенному закону

$$1.0122x^{-2.0063}. \quad (2)$$

На рис. 4 приведен компенсационный спектр  $E(x) \cdot x^{2.0063}$  (кривая 1), по его отклонению от горизонтальной прямой видно, что метод наименьших квадратов показывает в этом тестовом примере меньшую точность.

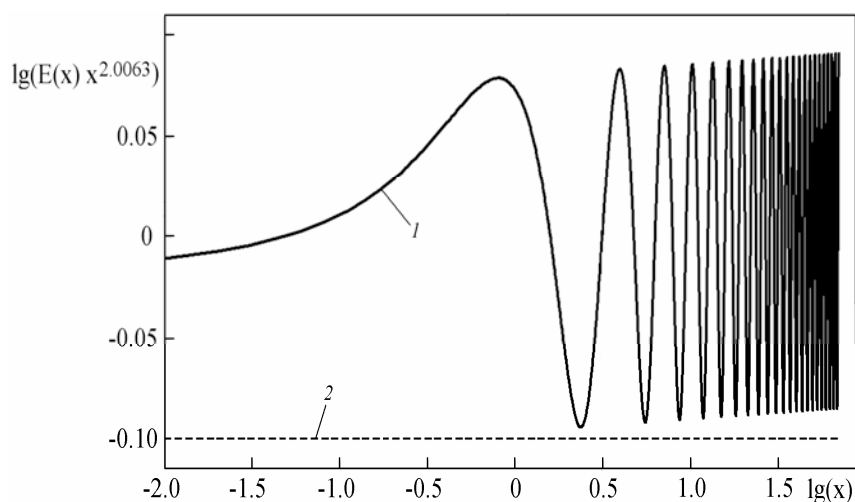


Рис.4. Компенсационный спектр  $E(x) \cdot x^{2.0063}$ .

В то же время, рис. 5, на котором приведен исходный спектр  $E(x)$  (кривая 1) и степенные законы  $10 \cdot x^{-2}$  (2) и  $50 \cdot x^{-2.0063}$  (3) показывает, что наклон прямых 2 и 3 с графической точностью совпадает. С графической точностью совпадают также и степенные законы (1) и (2), если их изобразить на рис. 5.

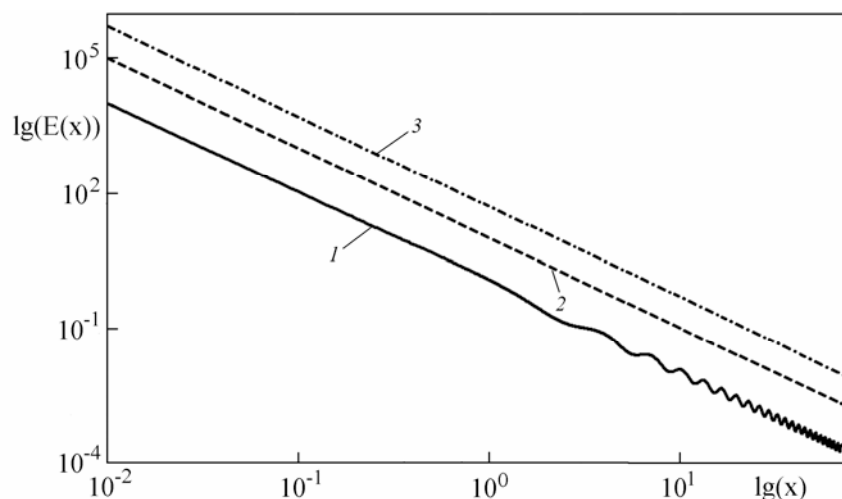


Рис.5. Исследуемый спектр  $E(x)$  и степенные законы.

Учитывая, что основной вклад в погрешность определения степенного закона обеспечивает неточность полученных расчетным путем данных, заключаем, что для определения степенного закона можно использовать обе методики, вычисляя параметры степенного закона методом наименьших квадратов или посредством построения компенсационного спектра с последующим применением метода наименьших квадратов для определения недостающего множителя.

В настоящей работе использовались обе описанные методики определения степенных законов.