

Численное моделирование сложных режимов конвекции Рэлея-Бенара

И. Б. Палымский

В двумерной и трехмерной постановках рассмотрена задача о турбулентной конвекции несжимаемой жидкости в прямоугольном параллелепипеде при подогреве снизу. При трехмерном моделировании горизонтальные границы предполагаются свободными от касательных напряжений (3d,free), а в двумерном - свободными (2d,free) либо жесткими (2d,rigid).

Предложен специальный спектрально-разностный (псевдо-спектральный) численный метод для моделирования сложных течений трехмерной и двумерной конвекции, первого порядка по времени и второго по пространству.

Решения двумерной и трехмерной задач о конвекции со свободными горизонтальными границами разыскиваются в виде суперпозиции собственных функций линейной теории устойчивости, которые выражаются через \cos и \sin по всем направлениям. При решении двумерной задачи с условием прилипания на горизонтальных границах, в горизонтальном направлении используется Фурье декомпозиция по \cos и \sin , а в вертикальном - конечно-разностное представление. Постановка граничных условий на боковых границах следует из представления решения.

В случае 3d,free и 2d,free конвекции при $Pr = 1$ выписаны явные выражения для инкрементов нарастания гармоник для линейных аналогов дифференциальной задачи и предлагаемого численного метода. Показано, что коэффициенты при τ и H^2 в членах, описывающих схемный эффект, не зависят от числа Рэлея, а определяются волновыми числами. При реальных значениях надкритичности r , шагов по времени τ и пространству H спектральные характеристики дифференциальной задачи и численного метода близки, что гарантирует правильную динамику бесконечно малых возмущений.

Нелинейный анализ, проведенный на модельной нелинейной задаче в 2d,free постановке показал, что понижение порядка аппроксимации численного метода по времени до первого приводит лишь к незначительному понижению точности вычислений, при этом с первым порядком вычисляется фаза гармонического решения, в то время как его амплитуда - со вторым. Показано, что для практических вычислений можно использовать схему первого порядка аппроксимации по времени с вычислением скоростей по функции тока, полученной на первом этапе расщепления.

Детальные тесты - проведение расчетов с увеличенной (до $Real\ 16$) точностью, учет различного числа гармоник, сравнение с результатом расчета другим (псевдо-спектральным) методом показали, что все инте-

гральные характеристики - профили средней температуры, среднеквадратичных пульсаций температуры и скорости, пространственные спектры температуры и скорости вычисляются устойчиво и при увеличении числа учитываемых гармоник наблюдается их сходимость.

Сформулируем основные выводы работы:

1. Несмотря на наблюдаемые количественные расхождения между результатами 3d,free расчетов и экспериментом, трехмерные расчеты дают правильные законы изменения величин среднеквадратичных пульсаций температуры и вертикальной скорости при $r \leq 150$. При двумерном моделировании аналогичное соответствие наблюдается при сравнительно невысокой надкритичности (до $r \sim 250$) по среднеквадратичным пульсациям температуры (в 2d,free расчетах) и вертикальной скорости (в 2d,free и 2d,rigid расчетах).
2. В двумерных расчетах при высокой надкритичности формирование крупномасштабной структуры является доминирующим фактором, определяющим характеристики течения.
3. Динамика пространственных спектров температуры и скорости в 2d,free и 3d,free расчетах определяется вкладом силы плавучести и диссипацией кинетической энергии, растущими при увеличении горизонтальной протяженности области и надкритичности.

При умеренной горизонтальной протяженности области $l = \pi$ в двумерных и трехмерных расчетах действие силы плавучести обуславливает стратификационные спектры Болджиано-Обухова $k^{-11/5}$ и Ламли-Шура k^{-3} для скорости, а доминирование конвективного переноса для температуры - спектр пассивной примеси $k^{-5/3}$. Эти спектры наблюдались в двумерных и трехмерных расчетах во всем исследованном диапазоне надкритичности.

С увеличением горизонтальной протяженности области до $l = 4\pi$ диссипация кинетической энергии, ее потоки и генерация растут и при $4 \cdot 10^3 \leq r \leq 10^4$ в спектре скорости в двумерных расчетах видны степенные законы, соответствующие прямому k^{-3} и обратному $k^{-5/3}$ каскадным процессам переноса энтропии и энергии, соответственно. А при $r > 10^4$ в спектре скорости видна тенденция к установлению единого степенного закона $k^{-2.6}$ - искаженного закона каскада энтропии. При умеренной надкритичности $750 \leq r \leq 2 \cdot 10^3$ в спектре температуры виден стратификационный спектр Болджиано-Обухова $k^{-7/5}$, который при $2 \cdot 10^3 < r \leq 6 \cdot 10^3$ сменяется спектром Бэтчелора k^{-1} .

Наблюдавшиеся в двумерных расчетах перестройки спектров температуры и скорости обусловлены формированием обратного каскада энергии при $r \approx 2 \cdot 10^3$ и уменьшением его энергетической роли при $r > 10^4$.

1. Палымский И.Б. Метод численного моделирования конвективных течений // Выч. техн. 2000. Т.5. N.6. С.53-61.
2. Палымский И.Б. Линейный и нелинейный анализ численного метода расчета конвективных течений // Сиб. ж. вычисл. матем. 2004. Т.7. N.2. С.143-163.
3. Палымский И.Б. Численное моделирование двумерной конвекции при высокой надкритичности // Успехи механики. 2006. N.4. С.3-28.
4. Палымский И.Б. Численное моделирование двумерной конвекции, роль граничных условий // Изв. РАН. МЖГ. 2007. N.4. С.61-71.
5. Palymskiy I.B., Fomin P.A. Hieronymus H. The Rayleigh-Benard convection in gas with chemical reactions // Сиб. ж. вычисл. матем. 2007. Т.10. N.4. С.371-383.
6. Палымский И.Б. Численное исследование спектров турбулентной конвекции Рэлея-Бенара // Нелинейная динамика. 2008. Т.4. N.2. С.145-156.
7. Palymskiy I.B., Fomin P.A. Hieronymus H. Rayleigh-Benard convection in chemical equilibrium gas (simulation of surface detonation wave initiation) // App. Math. Model. 2008. V.32. N.5. P.660-676.
8. Палымский И.Б., Герценштейн С.Я., Сибгатуллин И.Н. Об интенсивной турбулентной конвекции в горизонтальном плоском слое жидкости // Известия РАН. ФАО. 2008. Т.44. N.1. С.75-85.
9. Палымский И.Б. Численное исследование спектров трехмерной конвекции Рэлея-Бенара // Изв. РАН. ФАО. 2009. Т.45. N.5. С.691-699.
10. Палымский И.Б. О численном моделировании трехмерной конвекции // Вест. Удмурт. универ. серия 1: матем., мех., компьют. науки. 2009. В.4. С.118-132.
11. Палымский И.Б. О качественном различии решений двумерной и трехмерной конвекции // Нелинейная динамика. 2009. Т.5. N.2. С.183-203.
12. Палымский И.Б. Численное исследование спектров трехмерной турбулентной конвекции // Изв. Саратов. универ. Новая серия: матем., мех., информ. 2010. Т.10. В.1. С.62-71.

13. Палымский И.Б. Численный метод расчета трехмерной конвекции // Сиб. ж. индустр. матем. 2010. Т.13. N.1. С.95-108.

14. Палымский И.Б. О моделировании сложных режимов конвекции Рэлея-Бенара // Сиб. ж. вычисл. матем. 2011. Т.14. N.2. С.179-204.