Кризис в развитии геометрии и его социальные проявления

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, 119526, Москва, пр. Вернадского, 101-1
e-mail: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/˜rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site:
http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/˜rylov/yrylov.htm

Аннотация

Обсуждаются причины кризиса в современной (римановой) геометрии. Традиционный способ построения обобщенных геометрий, основанный на использовании топологии, приводит к переопределенности римановой геометрии. Иначе говоря, при построении римановой геометрии используется излишняя информация (топология), которая не согласуется с другими исходными аксиомами. Кризис состоит в том, что математическое сообщество не может и не хочет видеть переопределенность римановой геометрии. Большинство геометров-топологов отвергает альтернативный способ построения обобщенной геометрии, не использующий топологии, на том основании, что в нем отсутствуют теоремы. Большинство геометров представляют изложение геометрии в виде последовательности определений и теорем. Они не могут представить себе изложение геометрии без привычных им теорем. В результате наиболее способные топологи, осознавшие ничтожную роль топологии в построении геометрии и противоречивость традиционного метода построения обобщенных геометрий, оказываются в драматическом положении (в конфликте с математическим сообществом).

Богаты мы, едва из колыбели,
Ошибками отцов и поздним их умом,
И жизнь уж нас томит, как ровный путь без цели,
Как пир на празднике чужом.
М.Ю.Лермонтов.

1 Введение

Я уже писал о кризисе в геометрии [1]. Дело в том, что современная (риманова) геометрия переопределена и, следовательно, внутренне противоречива. Хотя противоречия известны давно, однако, математическое сообщество в целом не желает их признавать за внутренние противоречия теории и обходит их. Суть кризиса не в том, что в геометрии (точнее, в построении обобщенных геометрий) есть ошибки, а в том, что их не желают признавать за ошибки и исправлять. В результате развитие геометрии идет в направлении, ведущем в тупик. Почему это происходит и каковы социальные последствия кризиса? Этому вопросу посвящена эта заметка.

Заметим, что это уже второй кризис в геометрии. Первый кризис был во второй половине XIX века, когда математическое сообщество не хотело признавать реальность неевклидовых геометрий. Этот кризис как-то исчерпал сам себя, после того как неевклидова (риманова) геометрия стала применяться в общей теории относительности. Однако, анализа причин кризиса, произведено не было (во всяком случае, мне ничего не известно о таком анализе).

Вначале я связывал возникновение кризиса с глубоко укоренившимся предрассудком, что прямая является одномерной линией в любой обобщенной геометрией. Из этого представления следовало, что одномерная прямая является важнейшим объектом любой обобщенной геометрии. В свою очередь это влекло за собой вывод, что топология, основанная на понятии одномерной кривой, должна лежать в основании геометрии и использоваться при построении обобщенной геометрии. Все традиционные способы построения геометрии основаны на существенном использовании топологии: т.е. вначале вводилось топологическое пространство, на котором затем строилась геометрия. Преодоление предрассудка об одномерности прямой позволило построить более общий и простой метод построения обобщенных геометрий. Этот альтернативный метод был основан на принципе деформации [2], он допускал, что прямая может быть поверхностью (трубкой) и не нуждался в топологии [3] для построения обобщенной геометрии. Суть альтернативного метода выражается словами: любая обобщенная геометрия может быть получена как деформация собственно евклидовой геометрии. Альтернативный метод, использованный для построения римановой геометрии, был свободен от недостатков традиционного, т.е. там не было хорошо известных недостатков римановой геометрии (отсутствие абсолютного параллелизма и проблема выпуклости, состоящая во том, что вырезанная из евклидова пространства невыпуклая область не вкладывается изометрически в евклидово пространство, из которого она вырезана). Все понимали, что указанные свойства римановой геометрии являются ее недостатками, но избавиться от них было нельзя, пока не существовало альтернативного метода.

То обстоятельство, что альтернативный метод приводил к другим результатам, чем традиционный, свидетельствовало о том, что один из методов является ошибочным. Для применения традиционного метода требовалось много различных условий, ограничивающих возможность его применения. Нужна была размерность пространства, его непрерывность и непрерывная система координат в нем. Для применения альтернативного метода не нужна была размерность и непрерывность пространства. Система координат тоже была не нужна. Нужна была только функция расстояния $\rho\left(P,Q\right)$, или мировая функция $\sigma\left(P,Q\right)=\frac{1}{2}\rho^{2}\left(P,Q\right)$, которая удовлетворяет только условию

$$\sigma\left(P,P\right)=0 \tag{1.1}$$

Даже условие симметрии

$$\sigma\left(P,Q\right)=\sigma\left(Q,P\right) \tag{1.2}$$

не является обязательным [4]. Альтернативный метод не содержит никаких логических рассуждений, тогда как при использовании традиционного метода построения обобщенных геометрий необходимо обеспечить совместность всех используемых предположений. Это требует значительных усилий. Совместность всех ограничений удается обеспечить не всегда. Для римановой геометрии совместность нарушается из-за предположения, что прямая является одномерной кривой (или из-за применения топологии при построении геометрии, что по существу одно и то же). Дело в том, что при построении правильным (альтернативным) методом геодезическая, проведенная через точку P, параллельно вектору в точке P, является одномерной. Однако, в случае, когда прямая (геодезическая) проводится через точку P, параллельно вектору в другой точке P_1, она, вообще говоря, не будет одномерной [5]. Для того, чтобы избежать неодномерности прямой, в римановой геометрии запрещен абсолютный параллелизм. Таким образом, очевидно, что альтернативный метод является правильным, а традиционный сомнительным, и в случае, когда они приводят к разным результатам, следует предпочесть альтернативный метод.

Я полагал, что создание обобщенных геометрий с помощью альтернативного метода, основанного на принципе деформации, позволит осознать недопустимость применения топологии при построении обобщенной геометрии. Однако, я оказался не прав в том отношении, что считал одномерность прямой единственным предрассудком, препятствующим, правильному построению обобщенной геометрии. Оказалось, что имеется еще один предрассудок, о котором я не догадывался, потому что не столкнулся с ним при построении трубчатой геометрии (Т-геометрии), т.е. геометрии построенной на основе принципа деформации. С предрассудком одномерности прямой я столкнулся при построении Т-геометрии и потратил тридцать лет на его преодоление [1]. Представление об этих предрассудках можно получить из рассмотрения следующих двух силлогизмов:

1. Согласно Евклиду прямая одномерна в евклидовой геометрии, следовательно, прямая одномерна в любой обобщенной геометрии.

2. Евклид строил геометрию, формулируя и доказывая теоремы, следовательно, любую обобщенную геометрию нужно строить, формулируя и доказывая теоремы.

Приведенные силлогизмы несостоятельны с точки зрения логики, особенно если принять во внимание мнение древних египтян, полагавших, что все реки текут на север, которое можно рассматривать как следствие третьего силлогизма:

3. Великая река Нил течет на север, следовательно, все реки текут на север.

Структура всех трех силлогизмов одна и та же. Они превращают частный случай в общий без достаточных к тому оснований. Такое обобщение связано с ограниченностью нашего опыта. Существует только одна (евклидова) геометрия, и в ней прямая одномерна. Существует только одна геометрия, и она строится с помощью формулировки и доказательства теорем. Наконец, древние египтяне знали только одну реку – Нил.

Логическая несостоятельность силлогизмов не помешала математикам использовать их при построении любой обобщенной геометрии, потому что, используя их в своей практической деятельности, математики ориентировались не на логику, а на ассоциации. Во всех рассмотренных случаях мы имеем дело с единственным объектом. При этом очень трудно различить какие свойства принадлежат самому объекту, а какие – способу его описания. Когда способ описания рассматривается как свойство самого объекта описания, мы получаем предрассудок. Первый силлогизм стал причиной предрассудка об одномерности прямой (использованный Евклидом способ описания прямой был признан свойством самой прямой), и я знал о нем, потому что мне пришлось его преодолевать. Второй силлогизм стал основой предрассудка о том, что вся деятельность геометра состоит в формулировании и доказательстве теорем (Евклид описывал геометрию с помощью теорем – следовательно, описание в терминах теорем есть свойство геометрии. Если нет теорем, то нет и геометрии.) Со вторым предрассудком я столкнулся при следующих обстоятельствах.

Я заявил доклад [3] на семинар одной из геометро-топологических кафедр Московского университета. Это было в 2001 году и работа [3] была еще неопубликованной. Я подошел к секретарю семинара, сказал ему о своем желании сделать доклад на семинаре и передал текст статьи. Перелистывая мою работу, секретарь семинара задумчиво произнес примерно следующее: "Какая странная геометрия! Ни одной теоремы! Одни определения! Я думаю, что это нам не будет интересно."Один из ведущих геометров, вынужденный по долгу службы знакомиться с моей работой, представленной на международную конференцию по геометрии, состоявшуюся летом 2002 года в Санкт-Петербурге, сказал мне в частной беседе, что он ничего не понял из моей работы, поскольку в ней нет исходных аксиом и нет теорем. Тогда я не понял, что означали эти возражения. Для меня было совершенно непонятно, как можно не понять такую простую концепцию как Т-геометрия, где нет никаких логических рассуждений. Только значительно позже я понял, что здесь мы имеем дело с предрассудком. В отличие от других людей для математиков исключительно важен формализм, и геометрию они воспринимают исключительно через ее формализм. Далее я попробую показать чисто формально, как теоремы превращаются в определения и что обязательность представления геометрии в виде последовательности теорем, не более, чем предрассудок.

Говоря о социальных последствиях кризиса, я имею в виду следующее. В настоящее время топология считается наиболее перспективным направлением развития геометрии. Все лучшие силы геометров сосредоточены на развитии этого направления. В результате преодоления предрассудка об одномерности прямой в любой геометрии и открытия альтернативного метода построения геометрии оказывается, что топология является тупиковым направлением, и многие работы по обоснованию геометрии на основе топологии оказываются обесцененными. Однако, эти работы считаются важными и перспективными, пока математики не желают принимать во внимание альтернативный метод и не признают противоречий в римановой геометрии.

Представим себе следующую ситуацию. Молодой талантливый тополог N решает трудную топологическую задачу, за решение которой объявлена престижная международная премия. Решив задачу первым и опубликовав результаты, он вдруг обнаруживает, что задача поставлена неправильно, потому что топология основана на понятиях римановой геометрии, а риманова геометрия переопределена (т.е. внутренне противоречива). Этому математику присуждается престижная премия и присуждается вполне заслужено, поскольку в его решении не нашли ошибок. Но если задача поставлена неправильно, то у нее, вообще, может не быть правильного решения, поскольку разные способы решения могут привести к различным результатам. Математическое сообщество считает, что премия присуждена правильно, но тополог N не согласен с мнением математического сообщества, поскольку понимает, что его работа считается выдающимся достижением только до тех пор, пока математическое сообщество не обнаружит шаткость оснований решенной задачи. Однако, математическое сообщество пока не понимает этого. Что делать топологу N? Если он конформист, то проще всего сделать вид, что никакой неправильности в постановке задачи он не обнаружил и спокойно получить заслуженную им премию (Когда-то еще обнаружат противоречивость в римановой геометрии!) Доказать, что он знал о противоречивости римановой геометрии невозможно. При этом, однако, перед топологом N остается следующая проблема. В дальнейшем некоторые его предыдущие работы окажутся обесцененными. Как и зачем теперь работать в области топологического обоснования геометрии, если движение в этом направлении ведет в тупик?

Однако, если тополог N является добросовестным исследователем, а не конформистом, то у него только один вариант: дистанцироваться от мнения математического сообщества и отказаться от получения премии. Объявлять ли при этом о причинах отказа? Это непростой вопрос. Объявив об причине отказа, тополог N вступает в открытый конфликт с математическим сообществом, которое в настоящий момент не признает противоречивости римановой геометрии. В свое время великий Гаусс не рискнул вступить в конфликт с математическим сообществом по вопросу о возможности существования неевклидовой геометрии. (По свидетельству Феликса Клейна [6] после смерти Гаусса среди его работ нашли неопубликованные рукописи по неевклидовой геометрии.) Однако, Гаусс занимался многими математическими проблемами и вполне мог позволить себе пренебречь своими занятиями по неевклидовой геометрии, не публикуя свои работы в этой области. Современные топологи, как правило, не занимаются ничем, кроме топологии. Признание существования противоречий в римановой геометрии – это драма для тополога и в то же время это очень мужественный акт.

Впрочем, я подозреваю, что если бы даже тополог N обсуждал с коллегами вопрос о противоречивости римановой геометрии ее последствиях, он мог столкнуться с непониманием. Для подобных подозрений у меня следующие основания. Летом 2002 года в Санкт-Петербурге состоялась международная конференция по геометрии, посвященная юбилею известного российского геометра А.Д.Александрова. Заявив соответствующий доклад [4], я приехал на конференцию. Однако, основной целью моей поездки было не прочтение доклада, который к тому же никого не заинтересовал. Я хотел обсудить с ведущими геометрами России возможность альтернативного метода построения римановой геометрии, который порождал некоторое потрясение оснований геометрии. Мне удалось обсудить этот вопрос с некоторыми ведущими геометрами. Однако, меня никто не понял. (Точнее, меня понял только один человек, но он не был геометром. Это был просто сотрудник Санкт-Петербургского отделения математического института, в помещении которого проходила конференция.) Ведущие геометры очень вежливо объяснили мне, что вопрос обоснования геометрии давно решен Гильбертом и другими великими геометрами, и в настоящее время он никому не интересен. При этом обсуждении я не поднимал вопрос о противоречивости римановой геометрии, и речь шла только об альтернативном методе построения геометрии.

В другой раз я хотел обсудить работу [3] на семинаре одного очень известного математика, который обычно предварительно беседовал с потенциальным докладчиком. Во время такой беседы я упомянул, что результат применения альтернативного метода построения римановой геометрии не во всем согласуется с результатами применения традиционного метода. По моим представлениям это должно было заинтересовать руководителя семинара в постановке и обсуждении доклада. Однако, мне было немедленно заявлено, что риманова геометрия не может быть противоречивой. На этом наша беседа была завершена.

Подводя итог, я замечу, что чем талантливее и способнее тополог, тем скорее он столкнется с противоречиями римановой геометрии, лежащей в основе топологии, и сделает из этого надлежащие выводы. Результатом этого может быть драма в его научной карьере. Замечу, что противоречия римановой геометрии могут сказаться только на более высоком уровне развития геометрии (топологии), когда возникают новые противоречия, отличные от проблемы выпуклости и фернпараллелизма. При этом стандартный формальный аппарат римановой геометрии (метрический тензор, ковариантные производные кривизна и т.п.) не затрагивается.

На первый взгляд, описанная выше драма в научной карьере тополога N, представляется нереальной. Однако, она уже осуществилась на практике, оставив в недоумении все научное сообщество, поскольку никому не приходило в голову, что дело здесь не в особенностях характера тополога N, а в кризисе, который тополог N осознал раньше других. Его поведение в создавшейся ситуации было исключительно достойным, хотя и непонятным для окружающих. По соображениям политкорректности я не буду называть его имя, хотя люди близкие к математике и топологии вычислят его без труда, а для досужих журналистов это может не быть простой задачей.

Далее я рассмотрю чисто математические вопросы, обосновывающие мое утверждение о переопределенности геометрии: Второй раздел посвящен сравнению традиционного и альтернативного методов построения геометрии. В третьем разделе рассматривается вопрос о противоречивости римановой геометрии. В четвертом разделе рассматривается вопрос о причинах отторжения математиками Т-геометрии, построенной на основе принципа деформации.

2 Сравнение традиционного и альтернативного методов построения геометрии

Традиционный способ построения римановой геометрии состоит в следующем. Рассматриваются m-мерные поверхности в n-мерном евклидовом пространстве ($m < n$). Те свойства m-мерных поверхностей, которые не зависят от размерности n вмещающего евклидова пространства, объявляются внутренней геометрией m-мерной поверхности. Это и есть риманова геометрия m-мерного пространства. Римановы геометрии ограничены требованием, чтобы риманово пространство было изометрически вложимо в евклидово пространство достаточно высокой размерности. Геометрия, не обладающая свойством изометрической вложимости в евклидово пространство, не может быть построена таким способом. Кроме того, римановы геометрии непрерывны, что связано с применением системы координат при построении римановой геометрии. Использование традиционного способа при построении обобщенной геометрии, т.е. геометрии более общей, чем риманова, содержит ряд ограничений на обобщенную геометрию. В частности, таким ограничением является вложимость пространства с обобщенной геометрией в евклидово пространство достаточно большой размерности. Кроме того такая обобщенная геометрия содержит такую характеристику геометрии как размерность, представляющую собой некоторое натуральное число n. Необходимость некоторой размерности n у обобщенной геометрии представляется чем-то само собой разумеющимся, хотя, на самом деле, размерность является следствием используемого способа построения обобщенной геометрии, когда при построении геометрии с необходимостью используется понятие многообразия, представляющее собой систему координат, содержащую n независимых координат. То, что размерность не является необходимым свойством обобщенной геометрии (это скорее средство описания) следует из того, что существует альтернативный способ построения обобщенной геометрии, где понятие размерности просто не вводится, хотя для некоторых обобщенных геометрий понятие размерности может быть введено.

Альтернативный способ построения обобщенной геометрии основан на принципе деформации, утверждающем, что всякая обобщенная геометрия получается в результате деформации собственно евклидовой геометрии. Всякая деформация означает изменение расстояния между точками пространства. Любая деформация собственно евклидова пространства порождает некоторую обобщенную геометрию. Это делается следующим образом. Доказывается теорема, что собственно евклидова геометрия может быть сформулирована в терминах и только в терминах мировой функции [3]. (Мировая функция представляет собой половину квадрата расстояния между двумя точками пространства). Из теоремы следует, что любой геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и любое утверждение $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть выражено в терминах мировой функции σ_{E} евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в виде $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ соответственно. *Множество всех геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и соотношений $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ между ними образует евклидову геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.* Для получения соответствующих соотношений обобщенной геометрии $\mathcal{G}$ достаточно заменить мировую функцию σ_{E} собственно евклидовой геометрии на мировую функцию σ обобщенной геометрии $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma), \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma)$$

Тогда множество всех геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma)$ и соотношений $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma)$ между ними образует обобщенную геометрию $\mathcal{G}$.

Альтернативный способ построения предполагает, что обобщенная геометрия $\mathcal{G}$ полностью определяется ее мировой функцией и любое утверждение обобщенной геометрии $\mathcal{G}$ может быть получено из соответствующего утверждения собственно евклидовой геометрии. При этом для построения обобщенной геометрии $\mathcal{G}$ не нужно знать ни системы координат, ни ее размерности, ни какой-либо информации о топологии обобщенной геометрии $\mathcal{G}$. Размерность и топология, (если они существуют) могут быть извлечены из мировой функции σ обобщенной геометрии $\mathcal{G}$. Способ извлечения размерности таков, что размерность может быть различной в разных точках пространства, или размерности может не существовать, вообще. Это означает, что задание топологии и размерности независимо от мировой функции, вообще говоря, противоречиво. Такое задание может быть совместным только для некоторых обобщенных геометрий. Таким образом, традиционный способ построения геометрии является переопределенным. Он содержит слишком много аксиом, которые не являются независимыми. Предлагаемый альтернативный способ нечувствителен к непрерывности или дискретности геометрии, поскольку он нигде не использует предельный переход или непрерывную систему координат. Использование традиционного способа построения геометрии, когда постулируется некоторая система аксиом, которым должна удовлетворять обобщенная геометрия оказывается неэффективным, поскольку трудно обеспечить совместность исходных аксиом, а требование их совместности накладывает излишние ограничения на получаемые обобщенные геометрии.

Например, построение римановой геометрии можно осуществить двумя способами. При использовании традиционного способа на основе метрического тензора, задаваемого на n-мерном многообразии, получается риманова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$. При использовании альтернативного способа, основанного на принципе деформации, получается σ-риманова геометрия $\mathcal{G}_{\sigma\mathrm{R}}$. Префикс σ означает, что обобщенная геометрия $\mathcal{G}_{\sigma\mathrm{R}}$ обладает свойством σ-имманентности (под σ-имманентностью понимается свойство геометрии полностью описываться мировой функцией σ). Если мировая функция σ одна и та же в геометриях $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ и $\mathcal{G}_{\sigma\mathrm{R}}$, то получаемые обобщенные геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ и $\mathcal{G}_{\sigma\mathrm{R}}$ очень близки, но отличаются в некоторых деталях. Например, в σ-римановой геометрии $\mathcal{G}_{\sigma\mathrm{R}}$ существует абсолютный параллелизм, тогда как в римановой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ ввести абсолютный параллелизм не удается. Дело в том, что понятие параллельности двух векторов в римановой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ транзитивно по построению геометрии [7, 2]. В σ-римановой геометрии $\mathcal{G}_{\sigma\mathrm{R}}$ имеется абсолютный параллелизм, который, вообще говоря, интранзитивен, однако параллельность векторов, находящихся в одной и той же точке, транзитивна. Таким образом, если в римановой геометрии ввести абсолютный параллелизм, он будет, вообще говоря, интранзитивен и несовместим с исходным утверждением о транзитивности свойства параллельности в римановой геометрии. Чтобы избежать противоречия, провозглашается, что в римановой геометрии нельзя говорить об абсолютной параллельности векторов, расположенных в разных точках риманова пространства.

Приведенный пример подтверждает, что традиционный способ построения обобщенной геометрии является переопределенным. Более того, если собственно евклидову геометрию рассматривать как частный случай римановой геометрии и строить ее так, как обычно строят риманову геометрию, то собственно евклидова геометрия приобретает абсурдное свойство. Если область пространства не является выпуклой, то построенная в ней риманова геометрия с евклидовым метрическим тензором не будет, вообще говоря, евклидовой геометрией, потому что некоторые расстояния в такой геометрии определяются не вдоль прямых линий, а вдоль линий, частично лежащих на границе области. Полученное таким образом риманово пространство нельзя, вообще говоря, вложить изометрически в евклидово пространство, частью которого была невыпуклая область. Этот абсурдный результат свидетельствует о том, что система аксиом, на которой основан традиционный способ построения обобщенной геометрии, является переопределенной. Использование переопределенного способа построения обобщенной геометрии приводит, вообще говоря, к противоречиям. Вид этих противоречий существенно зависит от того, каким образом используются эти аксиомы.

3 О противоречивости римановой геометрии

Некоторые дефекты, свидетельствующие о противоречивости (точнее о переопределенности) системы аксиом, на которой основывается традиционное построение римановой геометрии, известны очень давно, но они почему-то не воспринимаются, как дефекты римановой геометрии. (По-видимому, это обусловлено отсутствием альтернативного способа построения геометрии). Например, если строить собственно евклидову геометрию как частный случай римановой, используя традиционный способ построения римановой геометрии, то возникает проблема выпуклости, состоящая в том, что невыпуклая область евклидовой плоскости, вообще говоря, не может быть вложена изометрически в евклидову плоскость, из которой она вырезана. Результат явно абсурдный. Для выпуклой области изометрическое вложение возможно, и математики обходят проблему выпуклости, рассматривая геометрии только на выпуклых многообразиях. (Например, книга А.Д. Александрова "Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей"). Другой дефект – это проблема фернпараллелизма, т.е. отсутствие в римановой геометрии определения параллельности удаленных векторов. Этот факт, так же не рассматривается как дефект геометрии. На самом деле, эти дефекты являются следствием переопределенности римановой геометрии, т.е. при построении римановой геометрии используется больше аксиом, чем это необходимо для построения геометрии, причем некоторые из аксиом несовместимы друг с другом, или совместимы только при некоторых ограничениях на геометрию. В принципе, переопределенность римановой геометрии может приводить к другим противоречиям, пока неизвестным. Переопределенность традиционного способа построения римановой геометрии была обнаружена после того, как был создан альтернативный способ построения геометрии, использующий существенно меньшее количество информации, необходимой для построения геометрии. При альтернативном способе построения геометрии отсутствует переопределенность, отсутствуют проблема выпуклости, проблема фернпараллелизма и все другие дефекты, являющиеся следствием этой переопределенности.

Если говорить, о современной геометрии, то основным предрассудком, препятствующим ее развитию, является утверждение, что прямая является одномерной линией в любой обобщенной геометрии. Утверждение об одномерности прямой (прямая не имеет толщины) восходит к Евклиду. Оно верно в евклидовой геометрии. Оно верно и в римановой геометрии для прямой (геодезической), проведенной через точку P, параллельно вектору в точке P. Однако, в случае, когда прямая (геодезическая) проводится через точку P, параллельно вектору в другой точке P_1, она, вообще говоря, не будет одномерной [5]. Для того, чтобы избежать неодномерности прямой, в римановой геометрии запрещен фернпараллелизм, т.е. понятие параллельности двух векторов, расположенных в разных точках пространства. Одномерность прямой нельзя закладывать в аксиоматику обобщенной геометрии, ее нельзя использовать при построении обобщенной геометрии, так как это может придти в противоречие с другими аксиомами. (Запрещая фернпараллелизм, не думали о возможной неодномерности прямой. Просто неоднозначность в определении параллельности векторов в удаленных точках противоречила аксиоматике и представлялась неприемлемой.) Запрещая фернпараллелизм и геометрию на невыпуклых многообразиях, можно избежать проявления противоречивости римановой геометрии, но это не приводит к устранению самой противоречивости, поскольку она может проявиться и в другой форме. В случае произвольной обобщенной геометрии характер прямой (одномерная линия, или многомерная поверхность) определяется видом мировой функции, и не нужно делать никаких предположений об одномерности или неодномерности прямой. Более того, нельзя требовать одномерности прямой (или заменяющей ее кривой), так как это ведет к переопределенности условий построения обобщенной геометрии и, как следствие, к их противоречивости или ограничению класса возможных обобщенных геометрий. Использование топологии при построении обобщенной геометрии предполагает, что кривая (и ее разновидность – прямая) одномерны. По этой причине нельзя использовать топологию при построении обобщенной геометрии. Преодоление указанного предрассудка было очень трудным. Лично мне понадобилось почти тридцать лет для преодоления этого предрассудка (описание пути к преодолению этого предрассудка можно найти в [1]), хотя у меня уже был опыт успешного преодоления аналогичных предрассудков в других областях физики.

Хотя преодоление предрассудка об одномерности прямой было трудным, я надеялся, что будучи разъясненным, он все же будет воспринят и преодолен математическим сообществом. Оказалось, что в этом отношении я заблуждался. Преодоление предрассудка было очень трудным (впрочем, оно было трудным и в случае предрассудка о статистическом описании). По-видимому, преодоление предрассудков трудно всегда. Кроме того оказалось, что кроме основного предрассудка об одномерности прямой, имеются другие предрассудки. Например, считается, что всякое изложение геометрии обязательно представляет собой некоторое множество аксиом и теорем и что деятельность геометра состоит в формулировании и доказательстве теорем.

4 О причинах отторжения математиками Т-геометрии, построенной на основе принципа деформации

Отношение большинства математиков к альтернативному способу построения геометрии, основанному на принципе деформации как правило отрицательное, хотя никаких возражений они привести не могут. Действительно, из-за простоты альтернативного метода, который не содержит никаких предположений кроме достаточно очевидного принципа деформации, трудно что-либо возразить против него. Тем не менее, реферируемые математические журналы отклоняют работы по построению обобщенной геометрии на основе принципа деформации. Как это делается, подробно описано в заметке [1]. Мои попытки доложить мои работы на семинарах геометро-топологов также отклоняются. Однако, они охотно заслушивались на семинаре по геометрии в целом, который проходит в Московском университете им. М.В.Ломоносова. Этот семинар был основан Н.В.Ефимовым. Состав слушателей несколько отличается от других семинаров по геометрии, слушателями которых являются специалисты по топологии и топологической геометрии.

В настоящее время в проблеме построения обобщенных геометрий доминирует топологический подход, т.е. предполагается, что необходимо сначала построить надлежащее топологическое пространство, в котором можно вводить метрику и строить обобщенную геометрию. Построение обобщенных геометрий на основе принципа деформации существенно обесценивает работы по топологии и топологической геометрии, что не может вызвать восторга у исследователей, строящих обобщенные геометрии традиционным методом. Поскольку возразить что-либо против принципа деформации не представляется возможным из-за его исключительной простоты и эффективности, то используются методы противодействия, порождающие сомнения в научной добросовестности сторонников традиционного метода. Один из них подробно описан в [1].

Разумеется, мне было известно, насколько сильно в нас представление о прямой как об одномерном геометрическом объекте. Более того это представление почти на тридцать лет задержало открытие трубчатой геометрии (Т-геометрии), т.е. обобщенной геометрии, построенной на основе принципа деформации. Однако, открытие неодномерности прямой и непонимание возможности неодномерности прямой, когда она уже открыта, представлялись мне совершенно разными вещами. Оказалось, что при всей очевидности принципа деформации, его восприятие оказывается тем труднее, чем лучше знает человек геометрию в ее современном формальном изложении. Дело в том, что математики воспринимают все через формализм. Ассоциативное восприятие, вроде ссылки на принцип деформации, мало что говорит им.

Посторонние наблюдатели и сами геометры воспринимают изложение геометрии как формулировку и доказательство различных геометрических теорем. Замена теорем определениями представляется им чем-то совершенно непонятным. Однако, на самом деле, формулировка и доказательство теорем представляют собой только один из способов работы с различными геометрическими утверждениями (аксиомами и теоремами). Доказательство теорем представляет собой наиболее трудоемкую часть работы. В результате создается впечатление, что изложение геометрии заключается в формулировке и доказательстве теорем. Однако, возможны другие способы работы с утверждениями геометрии, где нет различий между теоремами и аксиомами. (Вместо того, чтобы повторять тяжелую работу Евклида, можно воспользоваться результатами его работы). При таком способе работы теоремы заменяются определениями, а необходимость в теоремах и их доказательстве просто отпадает.

Поясню это на примере теоремы косинусов, утверждающей, что

$$|\mathbf{BC}|^2 \;=\; |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AC}|^2 - 2\,(\mathbf{AB}.\mathbf{AC})$$

$$= \quad |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AC}|^2 - 2\,|\mathbf{AB}|\,|\mathbf{AC}|\cos\alpha \tag{4.1}$$

где точки A, B, C являются вершинами треугольника, $|\mathbf{BC}|$, $|\mathbf{AB}|$, $|\mathbf{AC}|$ представляют собой длины сторон треугольника, угол α представляет собой $\measuredangle BAC$ в треугольнике. Соотношение (4.1) представляет собой теорему косинусов, которая доказывается на основе аксиом собственно евклидовой геометрии (линейного пространства с заданным на нем скалярным произведением).

Используя для длины стороны $\mathbf{AB}$ треугольника его выражение через мировую функцию σ

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{2\sigma\left(A, B\right)} \tag{4.2}$$

можно переписать соотношение (4.1) в виде

$$(\mathbf{AB}.\mathbf{AC}) = \sigma\left(A, B\right) + \sigma\left(A, C\right) - \sigma\left(B, C\right) \tag{4.3}$$

Соотношение (4.3) представляет собой определение скалярного произведения $(\mathbf{AB}.\mathbf{AC})$ двух векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$ в Т-геометрии, т.е. в терминах мировой функции. Таким образом, теорема заменяется определением нового понятия (скалярного произведения), которое теперь не связано прямо с понятием линейного пространства.

Другой пример – теорема Пифагора для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом $\measuredangle BAC$, которая записывается в виде

$$|\mathbf{BC}|^2 = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{AC}|^2 \tag{4.4}$$

В Т-геометрии вместо теоремы Пифагора (4.4) получаем определение прямого угла $\measuredangle BAC$. В терминах мировой функции это определение имеет вид. Угол $\measuredangle BAC$ является прямым, если выполнено соотношение

$$\sigma\left(A, B\right) + \sigma\left(A, C\right) - \sigma\left(B, C\right) = 0 \tag{4.5}$$

Таким образом, мы видим, что теоремы собственно евклидовой геометрии заменяются определениями Т-геометрии.

С формальной точки зрения различие между традиционным методом описания и альтернативным методом может быть представлено следующим образом. Традиционное описание собственно евклидовой геометрии может быть представлено как множество $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}\left(\mathcal{A}\left[\mathcal{R}_{\mathrm{E}}\right]\right)$ алгоритмов $\mathcal{A}\left[\mathcal{R}_{\mathrm{E}}\right]$, действующих на операнды $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$, где операндами $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ являются геометрические объекты или соотношения евклидовой геометрии. Операнды $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ зависят от параметров $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_0, .., P_n\}$, где $P_0, P_0, .., P_n$ суть точки пространства.

$$\mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}\left(\mathcal{P}^n\right) \tag{4.6}$$

Поскольку все геометрические объекты и соотношения $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ могут быть выражены через мировую функцию σ_{E} евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, то можно переписать соотношение (4.6) в виде

$$\mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}\left(\mathcal{P}^n\right) = \tilde{\mathcal{R}}_{\mathrm{E}}\left[\sigma_{\mathrm{E}}\left(\mathcal{P}^n\right)\right] \tag{4.7}$$

где $\sigma_{\mathrm{E}}(\mathcal{P}^n)$ есть множество мировых функций $\sigma_{\mathrm{E}}(P_i, P_k)$, $P_i, P_k \in \mathcal{P}^n$, $i, k = 0, 1...n$.

Принимая во внимание соотношение (4.7), можно представить множество $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}(\mathcal{A}[\mathcal{R}_{\mathrm{E}}])$ всех алгоритмов $\mathcal{A}[\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\mathcal{P}^n)]$ в виде множества $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}(\mathcal{A}[\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\mathcal{P}^n)]) = \mathcal{S}_{\mathrm{E}}\left(\mathcal{A}\left[\tilde{\mathcal{R}}_{\mathrm{E}}[\sigma_{\mathrm{E}}(\mathcal{P}^n)]\right]\right) = \mathcal{S}_{\mathrm{E}}\left(\mathcal{A}\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{\mathrm{E},\mathcal{P}^n}[\sigma_{\mathrm{E}}]\right]\right)$ всех алгоритмов $\widetilde{\mathcal{A}}[\sigma_{\mathrm{E}}] = \mathcal{A}\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{\mathrm{E},\mathcal{P}^n}[\sigma_{\mathrm{E}}]\right]$. В евклидовой геометрии множество всех алгоритмов $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}(\mathcal{A}[\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\mathcal{P}^n)])$ принимает вид $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}\left(\widetilde{\mathcal{A}}\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{\mathrm{E},\mathcal{P}^n}[\sigma_{\mathrm{E}}]\right]\right)$. Это означает, что все алгоритмы, составляющие евклидову геометрию преобразуются таким образом, что операндами их становятся мировые функции и только мировые функции разных точек. Это достаточно сложное преобразование, но оно всегда возможно. Более того оно достаточно просто для евклидовой геометрии, для которой алгоритмы построения всех геометрических объектов известны. Поскольку мировая функция является универсальной величиной, через которую выражается любой геометрический объект и любое соотношение геометрии, то связи (и теоремы, описывающие эти связи) между геометрическими объектами $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ устанавливаются автоматически в неявной форме, как только получены выражения для геометрических объектов $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ через мировую функцию. При этом каждое из этих выражений представляет собой определение геометрических объектов $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$.

В обобщенной геометрии $\mathcal{G}$, описываемой мировой функцией σ, множество всех алгоритмов принимает вид $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}\left(\widetilde{\mathcal{A}}\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{\mathrm{E},\mathcal{P}^n}[\sigma]\right]\right)$. Это означает, что множество всех алгоритмов $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}\left(\widetilde{\mathcal{A}}\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{\mathrm{E},\mathcal{P}^n}[\sigma]\right]\right)$ для любой обобщенной геометрии получается из множества $\mathcal{S}_{\mathrm{E}}\left(\widetilde{\mathcal{A}}\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{\mathrm{E},\mathcal{P}^n}[\sigma_{\mathrm{E}}]\right]\right)$ всех алгоритмов для евклидовой геометрии с помощью замены операнда алгоритмов $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$. Вид алгоритмов не меняется. Это представляет собой формальное описание действия принципа деформации. Для построения обобщенной геометрии не нужно никаких теорем и логических рассуждений. Основная часть работы построения обобщенной геометрии состоит в преобразовании известных евклидовых алгоритмов $\mathcal{A}[\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\mathcal{P}^n)]$ к виду $\widetilde{\mathcal{A}}\left[\tilde{\mathcal{R}}'_{\mathrm{E},\mathcal{P}^n}[\sigma_{\mathrm{E}}]\right]$, где все алгоритмы представлены в терминах евклидовой мировой функции.

В Т-геометрии построение новой обобщенной геометрии производится при помощи тех же самых алгоритмов, что и в собственно евклидовой геометрии. Заменяется только мировая функция, т.е. операнд алгоритмов $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$. Теоремы, связывающие различные объекты и понятия, оказываются ненужными. Используются определения геометрических объектов и понятий, выраженные прямо через мировую функцию. Например, скалярное произведение двух векторов определяется соотношением (4.3) во всех Т-геометриях. Прямой угол $\measuredangle BAC$ определяется соотношением (4.5) во всех Т-геометриях. Нет необходимости вводить связи (теоремы) между различными геометрическими понятиями, коль скоро они выражены через мировую функцию.

Главной проблемой Т-геометрии является получение выражений для различных геометрических понятий и объектов через мировую функцию. Поскольку эти выражения одни и те же для всех T-геометрий, то достаточно получить эти выражения в рамках собственно евклидовой геометрии. Таким образом, вместо формулировки различных теорем для разных обобщенных геометрий, геометр должен выразить все понятия и объекты собственно евклидовой геометрии через мировую функцию. Сделать это достаточно просто, поскольку собственно евклидова геометрия давно построена и ее непротиворечивость доказана.

Формализм T-геометрии существенно отличается от традиционного формализма построения обобщенной геометрии прежде всего объектом рассмотрения. В традиционном формализме объектом рассмотрения являются геометрические объекты и прежде всего прямая. Традиционное построение обобщенной геометрии представляет собой повторение построения Евклида, которое производится на основе несколько иных исходных аксиом. Правильный выбор исходных аксиом представляет собой главную проблему традиционного метода построения геометрии. В альтернативном методе, основанном на принципе деформации, объектом рассмотрения является мировая функция (а не геометрические объекты), т.е. функция двух точек пространства. Это существенно более простой объект для изучения. Однако, правила работы (логика исследования [8]) с мировой функцией очень сложны. Угадать их чрезвычайно сложно, поскольку они определяются евклидовой геометрией. Первоначально были угаданы правила работы с наиболее простым объектом: прямой линией. Собственно говоря, они не были угаданы, они были просто взяты из евклидовой геометрии. Однако, чтобы заимствовать их нужно было представить евклидову геометрию в терминах мировой функции, т.е. построить формализм на основе мировой функции. Создание формализма, основанного на мировой функции было трудным и потребовало около сорока лет, из которых тридцать лет были потеряны на преодоление предрассудка об одномерности прямой. Этапы построения этого формализма описаны в [1].

По-видимому, самым трудным и непривычным для геометров-профессионалов является то, что появляется новый объект исследования (мировая функция), а то, что было традиционным объектом исследования (геометрические объекты) превращается в логику (алгоритм) исследования. Этот переход от одного способа исследования к другому труден для восприятия геометров-профессионалов, однако, он существенно легче для не-профессионалов, которые не знакомы, или поверхностно знакомы с традиционным методом построения геометрии, и им нет нужды сопоставлять оба метода, преодолевая при этом комплекс понятий традиционного метода и связанный с ним формализм.

При построении геометрии на основе принципа деформации кажется, что формализма нет совсем, поскольку нет теорем, а геометры привыкли, что геометрический формализм проявляется только в виде теорем. На самом деле, формализм проявляется в неявном виде, как ссылка на евклидову геометрию с ее формализмом. При этом формализм евклидовой геометрии модифицируется при замене мировой функции евклидова пространства (алгоритмы остаются прежними, а изменяется только операнд алгоритмов). Кроме того, для осуществления подобной модификации евклидова геометрия должна быть представлена в терминах мировой функции, а такое представление основано на формализме мировой функции, мало знакомом математикам. Несмотря на очевидность принципа деформации, я пришел к нему, когда обобщенная геометрия (T-геометрия), основанная на его применении, уже была построена. Более того, построению T-геометрии предшествовало появление формализма мировой функции, т.е. появления описания римановой геометрии в терминах мировой функции.

5 Приложение T-геометрии к физическим проблемам

Помимо переопределенности геометрии, возникающей при использовании традиционного (топологического) метода построения геометрии, этот метод имеет еще тот недостаток, что он не является достаточно общим. Метод построения геометрии, основанный на принципе деформации, позволяет строить обобщенную геометрию, используя деформации, превращающие одномерную прямую в поверхность. Хотя повседневный опыт не доставляет нам примера таких деформаций, такие деформации все же существуют. Наглядно такую деформацию можно представить себе следующим образом. Представим себе пучок очень тонких прямых упругих проволок одинаковой длины. Собранные в пучок они представляют собой отрезок прямой. Зажмем концы проволок и сблизим их. При такой деформации проволоки, сохраняя свою длину, разойдутся и образуют сигарообразную поверхность. Иными словами, хотя деформации, превращающие прямую в поверхность возможны, риманова и метрическая геометрии их игнорируют, предпочитая оставаться в рамках деформаций, сохраняющих одномерность прямой. Использование евклидова понятия прямой, как второго базового понятия геометрии и учет одномерности кривой не позволяли в полной мере использовать принцип деформации. Путь к принципу деформации лежал через создание математического аппарата, основанного на использовании мировой функции.

Применяя описанную выше деформацию при построении геометрии пространства-времени [5], удалось построить такую геометрию пространства-времени, где движение свободных частиц является изначально стохастическим, и интенсивность стохастичности зависит от массы частицы. После надлежащего выбора параметров деформации (она зависит от квантовой постоянной), статистическое описание свободных частиц оказывается эквивалентным квантовому описанию. При этом важно, что принципы квантовой механики не используются. Иначе говоря, квантовые свойства описываются с помощью правильно выбранной геометрии пространства-времени. В рамках римановой геометрии и любой обобщенной геометрии, построенной традиционным методом это невозможно.

Список литературы

[1] Yu.A. Rylov, New crisis in geometry? math.GM/0503261.

[2] Yu.A. Rylov, Coordinateless description and deformation principle as a foundation of physical geometry. math.GM/0312160.

[3] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry, *Int. J. Math. and Math Sci.* **30**, iss.12, 733-760, (2002).

[4] Yu.A. Rylov, Asymmetric nondegenerate geometry. math.MG/0205061

[5] Yu.A. Rylov, Tubular geometry construction as a reason for new revision of the space-time conception. in *What is Geometry?*, Polimetrica Publisher, Italy, pp.201-235 , 2006.

[6] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung die Mathematik im 19 Jahrhundert* teil 1, Berlin, Springer 1926. (русс. пер. Ф. Клейн *Лекции о развитии математики в XIX столетии.* М; Л. Гостехиздат. 1937).

[7] Yu.A. Rylov, Problem of parallelism in geometry and physics. math.GM/0210413.

[8] Yu.A. Rylov, Euclidean geometry as algorithm for construction of generalized geometries. math.GM/0511575.

[9] Yu.A. Rylov, Quantum mechanics as a dynamic system. *Found. Phys.* **28**, No.2, 245-271, (1998).