Классическое описание рождения пар

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Пр. Вернадского 101-1, 119526, Москва, Россия
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Показывается, что возможно классическое описание рождения пар, т.е. можно описывать рождение пар, не ссылаясь на принципы квантовой механики. Рождение пар появляется при статистическом описании стохастических релятивистских частиц. Появляется особое силовое поле, ответственное за рождение пар. Это поле является естественным следствием квантовой стохастичности. Рассмотрение квантовых систем как стохастических систем порождает гидродинамическую интерпретацию квантовых явлений. При рассмотрении проблемы столкновений гидродинамическая интерпретация оказывается альтернативной к традиционной интерпретации, основанной на принципах квантовой механики и на рассмотрении волновой функции как главного объекта динамики. Гидродинамическая интерпретация приводит к такой постановке проблемы столкновений, которая альтернативна традиционной теории S-матрицы.

1 Введение

Рождение пар есть специфический квантовый эффект. Традиционно он описывается в терминах квантовой теории. Мы не знаем как описывать рождение пар в классических терминах. Но если бы классическое описание рождения пар было возможно, оно было бы очень полезно. В самом деле, при высоких энергиях частиц длина волны де Бройля $\lambda_{\text{B}} = \hbar/p$ становится очень малой и описание частиц больших энергий становится квазиклассическим или даже классическим. Классическое описание проще, чем квантовое, потому что оно использует меньше информации и допускает более простую интерпретацию. К сожалению, мы не можем реализовать преимущества классического описания, потому что при высоких энергиях эффект рождения пар становится доминирующим, а мы не знаем как его описывать в классических терминах. Вообще, мы знаем о рождении пар только то, что оно появляется при столкновениях частиц большой энергии, и что оно описывается только в терминах квантовой теории. Однако, какие агенты ответственны за рождение пар, остается неизвестным до сих пор.

В настоящей работе мы собираемся исследовать, какие агенты ответственны за рождение пар, и показать что возможно классическое описание эффекта рождения пар. Говоря о классическом описании, мы имеем в виду только то, что при таком описании *не используются принципы квантовой механики.* Классическое описание не означает классического приближения к квантовому описанию. Наше классическое описание является точным описанием. В частности, оно описывает квантовые эффекты, используя квантовую постоянную $\hbar$, которая появляется как постоянная, описывающая свойства пространства-времени [1](а не как атрибут принципов квантовой механики).

При нашем рассмотрении мы используем модельную концепцию квантовых явдений (МККЯ), которая представляет собой новую стадию в исследовании микромира. МККЯ относится к традиционной квантовой механике (аксиоматической концепции квантовых явлений (АККЯ)) точно так же, как статистическая физика относится к термодинамике. Главное различие между МККЯ и АККЯ в используемых методах исследования. Методы МККЯ более тонки и эффективны, чем методы АККЯ. Это можно увидеть из нижеследующей таблицы.

АККЯ	МККЯ
Объединение нерелятивистского квантового формализма с принципами СТО	Последовательное релятивистское описание на всех стадиях
1. Квантование: процедура на концептуальном уровне: $\mathbf{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ и т.д.	1. Динамическая квантизация: релятив. процедура на динамическом уровне $m^2 \to m_{\text{eff}}^2 = m^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right)$
2. Переход к классическому описанию: процедура на концептуальном уровне $\hbar \to 0 \qquad \psi \to (x,p)$	2. Динамическая расквантизация: релятивистская процедура на динамическом уровне $\partial^k \to \frac{j^k j^l}{j_s j^s}\partial_l$
3. Интерпретация в терминах волновой функции ψ	3. Интерпретация в терминах среднестатистических мировых линий $\frac{dx^i}{d\tau} = j^i(x)$, $j^k = -\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial^k\psi - \partial^k\psi^*\cdot\psi\right)$
4. Один вид измерений, поскольку рассматривается только среднестатистический объект $\langle\mathcal{S}\rangle$, называемый квантовой системой	4. Два вида измерений, поскольку рассматриваются два вида объектов (индивидуальный) $\mathcal{S}_{\text{st}}$ и среднестатистический $\langle\mathcal{S}\rangle$
5. Используются дополнительные гипотезы (принципы квантовой механики)	5. *Дополнительные гипотезы не используются*

В этой работе мы разрабатываем формализм МККЯ и применяем методы

МККЯ для исследования процесса рождения пар. Этот формализм основан на рассмотрении квантовой механики как частного случая динамики стохастических систем [2]. Динамика стохастических систем пригодна для описания любых стохастических систем (а не только квантовых), и поэтому она не может использовать принципы квантовой механики и не использует их. Все описание производится в классических (не-квантовых) терминах, хотя описание в терминах волновой функции также возможно как частный случай описания. Такой подход очень удобен, так как он дает очень простую интерпретацию квантовых эффектов в терминах классической динамики частиц и флюидов.

Главное различие между квантовой механикой и динамикой стохастических систем заключается в их отношении к волновой функции. В квантовой механике волновая функция ψ есть фундаментальный объект, чьи свойства определяются принципами квантовой механики. В результате интерпретация всех объектов, построенная на основе волновой функции, довольно не ясна, поскольку смысл самой волновой функции остается неясным. В динамике стохастических систем волновая функция есть просто метод описания любого недиссипативного флюида [3]. В этом случае смысл всех объектов, построенных на основе волновой функции и смысл самой волновой функции получаются довольно просто в терминах классического описания флюида (сплошной среды).

Связь между флюидом и уравнением Шредингера известна со времени появления квантовой механики [4, 5]. В последующие годы многие авторы исследовали эту связь, известную как гидродинамическая интерпретация квантовой механики [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Однако, в конечном счете эта интерпретация была основана на волновой функции как основном объекте динамики. Нельзя было выйти за рамки принципов квантовой механики, потому что связь между гидродинамической интерпретацией и квантовой механикой была односторонняя. Можно было получить потенциальное течение флюида из динамического уравнения для волновой функции (уравнения Шредингера), но как получить обратный переход от динамического уравнения для флюида к динамическому уравнению для волновой функции было не известно. Другими словами, мы не знали как описать завихренное течение флюида в терминах волновой функции. В терминах волновой функции мы умели описывать только потенциальное течение флюида.

Чтобы описать произвольное течение флюида в терминах волновой функции, нужно было проинтегрировать традиционные динамические уравнения для флюида (уравнения Эйлера). В самом деле, уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi=0 \tag{1.1}$$

может быть приведено к гидродинамическим уравнениям для переменных $\rho, \mathbf{v}$, описывающим состояние флюида. Подставляя $\psi=\sqrt{\rho}\exp(i\hbar\varphi)$ в (1.1) и разделяя вещественную и мнимую части, мы получаем выражения для временны́х производных $\partial_0\rho$ и $\partial_0\varphi$. Чтобы получить выражение для временно́й производной $\partial_0\mathbf{v}$ скорости $\mathbf{v}=\frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\varphi$, нужно дифференцировать динамическое уравнение для $\partial_0\varphi$, образуя комбинацию $\partial_0\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\hbar}{m}\partial_0\varphi\right)$. Обратный переход от гидродинамических уравнений к динамическому уравнению для волновой функции требует общего интегрирования гидродинамических уравнений. Это интегрирование достаточно просто в случае потенциального течения, но это довольно сложная математическая проблема в общем случае, когда результат интегрирования должен содержать три произвольные функции трех аргументов. Без этого интегрирования нельзя получить описания флюида в терминах волновой функции, и нельзя манипулировать динамическими уравнениями, преобразуя их от представления в терминах ρ, $\mathbf{v}$ к представлению в терминах волновой функции и обратно. Это проблема оставалась нерешенной многие годы. Она была решена в конце восьмидесятых годов XX века, и первое применение этого интегрирования можно найти в [15]. Систематическое применение этого интегрирования к описанию квантовых явлений началось в 1995 году [16, 17].

Проблема общего интегрирования четырех гидродинамических уравнений Эйлера

$$\partial_0\rho + \boldsymbol{\nabla}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1.2}$$

$$\partial_0\mathbf{v} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p, \qquad p = p(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho) \tag{1.3}$$

кажется безнадежной. Это действительно так, если система уравнений Эйлера (1.2), (1.3) рассматривается как полная система динамических уравнений. На самом деле, уравнения Эйлера (1.2), (1.3) не образуют полной системы динамических уравнений, потому что они не описывают движение частиц флюида вдоль их траекторий. Чтобы получить полную систему динамических уравнений, нужно добавить к системе уравнений Эйлера так называемые условия Лина [18]

$$\partial_0\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть три независимых интеграла динамических уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}),$$

описывающих движение частиц флюида вдоль их траекторий.

Семь уравнений (1.2) – (1.4) образуют полную систему динамических уравнений, тогда как четыре уравнения Эйлера (1.2), (1.3) образуют только замкнутую подсистему полной системы динамических уравнений. Волновая функция выражается через гидродинамические потенциалы $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, известные также как потенциалы Клебша [19, 20]. В общем случае произвольного течения флюида в трехмерном пространстве комплексная волновая функция ψ имеет два комплексных компонента ψ_1, ψ_2 (или четыре независимых вещественных составляющих)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_2(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}, \qquad |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1 \tag{1.5}$$

Невозможно получить общее решение системы Эйлера (1.2), (1.3), но можно частично проинтегрировать полную систему (1.2) – (1.4), уменьшив ее порядок до четырех динамических уравнений для волновой функции (1.5). Практически это означает, что интегрируются динамические уравнения (1.4), где переменная $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ неявно определяется уравнениями (1.2), (1.3). Такое интегрирование и уменьшение порядка полной системы динамических уравнений оказывается возможным, потому что система (1.2) – (1.4) имеет группу симметрии, связанную с преобразованиями потенциалов Клебша

$$\xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\alpha = \tilde{\xi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \qquad \frac{\partial\left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3\right)}{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)} \neq 0 \tag{1.6}$$

Будучи конечной функцией потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$, волновая функция содержит информацию о движении частиц флюида вдоль их траекторий. Эта информация не может быть получена из уравнений Эйлера (1.2), (1.3) без использования условий Лина (1.4).

Зависимость от $\boldsymbol{\xi}$ появляется только в случае, когда волновая функция имеет более одного компонента. В случае уравнения Шредингера для бесспиновой частицы волновая функция имеет только один компонент $\psi = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_1(\boldsymbol{\xi})$, где в силу второго уравнения (1.5) $u_1(\boldsymbol{\xi}) = 1$, и волновая функция не зависит от $\boldsymbol{\xi}$. См. детали в [21, 3].

После интегрирования становится ясно, что волновая функция есть только метод описания флюида. Применение волновой функции как фундаментального объекта квантовой механики слишком ограничительно и значение ее неясно, если она аксиоматически определяется принципами квантовой механики. Смысл волновой функции становится яснее, когда она рассматривается как метод описания флюида. Две возможные концепции описания квантовых явлений описываются следующими схемами

аксиомат. концепция	:	квантовые принципы	$\Rightarrow$	волновая функция	$\Rightarrow$	гидродинамич. интерпретация
модельная концепция	:	статистическое описание	$\Rightarrow$	динамика флюида	$\Rightarrow$	волновая функция

Принципы квантовой механики являются основанием традиционной квантовой теории, и аксиоматические свойства волновой функции образуют фундамент гидродинамической интерпретации, т.е. волновая функция первична, а гидродинамическая интерпретация вторична. При модельном описании квантовых явлений квантовые принципы заменяются статистическим описанием, которое тесно связано с динамикой флюида, и динамика флюида является основой для введения волновой функции, т.е. динамика флюида первична, а волновая функция вторична.

Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть стохастическая частица, чье состояние X описывается переменными $\left\{\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\}$, где $\mathbf{x}$ описывает положение частицы. Эволюция состояния частицы случайна, и не существует динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Эволюция состояния $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ содержит как регулярную, так и стохастическую составляющие. Чтобы выделить регулярную эволюционную составляющую, мы рассмотрим множество (статистический ансамбль) $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ многих независимых тождественных стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Все стохастические частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ начинают свою эволюцию с одного и того же начального состояния. Это означает, что все $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ приготовлены одним и тем же способом. Если число N частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ очень велико, стохастические элементы эволюции компенсируют друг друга, но регулярные элементы накапливаются. В пределе $N \to \infty$ статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ превращается в динамическую систему, чье состояние эволюционирует в соответствии с некоторыми динамическими уравнениями.

Стохастическая частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ имеет шесть степеней свободы, тогда как статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ имеет бесконечное число степеней свободы. $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ есть непрерывная динамическая система типа флюида (сплошной среды). Если статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ нормирован на одну частицу, он превращается статистически усредненную частицу $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ (См. детали в [22]), которая представляет собой разновидность флюида. Действие для $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$, или для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ может быть приведено к виду непрерывной системы $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$, которая состоит из многих детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, взаимодействующих между собой. Вид этого взаимодействия зависит от характера стохастичности частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$.

Пусть статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ детерминированных классических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ описывается действием $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)]}$, где P суть параметры, описывающие частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ (например, масса, заряд). Пусть под влиянием некоторого случайного агента детерминированная частица $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ превращается в стохастическую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}$ для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ приводится к действию $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}$ для некоторого множества $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ тождественных взаимодействующих детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]}$ как функционал от $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ имеет вид $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P_{\mathrm{eff}})]}$, где параметры P_{eff} суть параметры P детерминированной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, усредненные по статистическому ансамблю, и это усреднение описывает взаимодействие частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в множестве $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$. Это означает, что

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]} = \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)]} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P_{\mathrm{eff}})]} \tag{1.7}$$

Другими словами, стохастичность частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ в ансамбле $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ заменяется взаимодействием частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$, и это взаимодействие описывается заменой

$$P \to P_{\mathrm{eff}} \tag{1.8}$$

в действии $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)]}$.

Как определить замену (1.8)? На данной стадии исследования замена (1.8) является феноменологической. Вообще говоря, вид замены (1.8) определяется свойствами (характером) стохастичности. Но мы не знаем, как описывать характер стохастичности и ее свойства. Тогда вид замены (1.8) маркирует характер стохастичности, и замена (1.8) может рассматриваться как способ описания стохастичности. Прежде чем продолжать обсуждение рассмотрим пример квантовой стохастичности.

Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть свободная детерминированная нерелятивистская частица массы m. Действие для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ имеет вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{d}}: \qquad \mathcal{A}[\mathbf{x}] = \int L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) dt, \tag{1.9}$$

$$L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = -mc^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 \tag{1.10}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ и c есть скорость света.

Действие для ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ свободных детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(m)]}[\mathbf{x}] = \int L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) dt d\boldsymbol{\xi}, \tag{1.11}$$

где функция Лагранжа имеет тот же вид (1.10), но $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Здесь переменные $\boldsymbol{\xi}$ маркируют частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$. Действие (1.11) описывает некоторый флюид без давления.

В случае свободной незаряженной частицы масса m является единственным параметром частицы. При квантовой стохастичности замена (1.8) имеет вид

$$m \rightarrow m_{\mathrm{eff}} = m\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2c^2} + \frac{\hbar}{2mc^2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right) \tag{1.12}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ есть среднее значение стохастической составляющей скорости. Квантовая постоянная $\hbar$ появляется здесь как постоянная связи, описывающая взаимодействие между регулярной и стохастической составляющими движения частицы. Скорость $\mathbf{u}$ предполагается малой по сравнению со скоростью света c. Тогда мы должны сделать замену (1.12) только в первом члене соотношения (1.10), потому что эта замена во втором члене дает величину порядка $O(c^{-2})$. После замены (1.12) действие (1.11) превращается в действие

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(m_{\mathrm{eff}})]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) + L_{\mathrm{st}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})\, dt d\boldsymbol{\xi}, \tag{1.13}$$

$$L_{\mathrm{st}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}) = \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} \tag{1.14}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, но $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ есть функция от $t, \mathbf{x}$. Действие (1.13) также описывает флюид, но теперь это флюид с давлением и его потенциальное течение описывается уравнением Шредингера [22, 23].

Действие (1.13) допускает простую интерпретацию. Производная $d\mathbf{x}/dt$ описывает среднюю скорость частицы жидкости, которая не совпадает со скоростью стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, так же как скорость частицы газа не совпадает со скоростью молекулы газа. Газовая молекула имеет стохастическую составляющую скорости. Аналогично стохастическая частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ имеет стохастическую составляющую скорости. Средняя величина стохастической составляющей скорости описывается величиной $\mathbf{u}$. Для стохастической броуновской частицы среднее значение стохастической составляющей описывается соотношением

$$\mathbf{u}_{\mathrm{Br}} = -D\boldsymbol{\nabla} \ln \rho_{\mathrm{Br}} \tag{1.15}$$

где D есть коэффициент диффузии и ρ_{Br} есть плотность случайно блуждающих броуновских частиц. Вариация действия (1.13) по $\mathbf{u}$ дает тот же результат

$$\mathbf{u} = -\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla} \ln \rho, \qquad \rho = \frac{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)} \tag{1.16}$$

где $\hbar/2m$ может толковаться как коэффициент диффузии.

Чтобы получить соотношение (1.16), нужно переписать (1.13) в виде интеграла по переменным $\mathbf{x}$, потому что $\mathbf{u}$ есть функция переменных $\mathbf{x}$ (а не $\boldsymbol{\xi}$).

$$\int L_{\mathrm{st}}\left(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right) dt d\boldsymbol{\xi} = \int \left(\frac{m\mathbf{u}^2}{2} - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right) \rho dt d\mathbf{x}, \qquad \rho = \frac{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)} \tag{1.17}$$

Тогда вариация действия (1.17) по $\mathbf{u}$ дает соотношение (1.16). Природа стохастических скоростей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_{\mathrm{Br}}$ одна и та же. Обе скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_{\mathrm{Br}}$ являются результатом случайного блуждания. Однако динамические уравнения различны, потому что диссипативная броуновская частица подчиняется динамике Аристотеля, тогда как консервативная квантовая частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ подчиняется динамике Ньютона. Состояние среднестатистической броуновской частицы $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{Br}}\rangle$ описывается переменной ρ_{Br}. В соответствии с (1.15) скорость $\mathbf{u}_{\mathrm{Br}}$ есть функция состояния ρ_{Br}, и динамическое уравнение для состояния ρ_{Br} имеет вид уравнения непрерывности

$$\frac{d\rho_{\mathrm{Br}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho_{\mathrm{Br}}\mathbf{u}_{\mathrm{Br}}\right) = 0$$

Состояние среднестатистической частицы $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ описывается переменными $\rho, \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \mathbf{u}$, и энергия $m\mathbf{u}^2/2$ стохастической составляющей должна быть учтена в функции Лагранжа.

Первый член $\frac{m}{2}\mathbf{u}^2$ выражения (1.14) есть кинетическая энергия стохастической составляющей. Однако этот член не содержит временно́й производной. Он зависит только от $\mathbf{x}$. Это означает, что он действует на частицу как потенциальная энергия. В самом деле, вариация действия (1.13) по $\mathbf{x}$ дает динамическое уравнение

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}U\left(\mathbf{x}\right), \qquad U\left(\mathbf{x}\right) = \left(\frac{m\mathbf{u}^2}{2} - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right)$$

Второй член в (1.17) обеспечивает связь между $\mathbf{u}$ и коллективной переменной ρ.

Для применения к релятивистской частице соотношение (1.12) следует записать в виде

$$m^2 \to m_{\text{eff}}^2 = m^2 \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} + \frac{\hbar}{mc^2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right) \tag{1.18}$$

Кроме того следует дополнительно заменить нерелятивистские выражения $\mathbf{u}^2$ и $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}$ релятивистскими выражениями $-g_{ik}u^i u^k$ и $\partial_i u^i$ соответственно, где u^i есть 4-вектор, описывающий среднюю величину стохастической составляющей скорости. Тогда действие (1.10), (1.13), (1.14) преобразуется к релятивистскому виду

$$\mathcal{A}[x,\kappa] = -\int mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}d\xi_0 d\boldsymbol{\xi}, \qquad K = \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\left(\kappa^l\kappa_l + \partial_l\kappa^l\right)} \tag{1.19}$$

где $x = \{x^i\}$, $i = 0,1,2,3$ есть функция переменных $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\} = \{\xi_i\}$, $i = 0,1,2,3$. Переменные $\kappa = \{\kappa^i\}$, $i = 0,1,2,3$ суть функции от x. Переменные κ^l связаны с переменными u^l с помощью соотношения

$$u^l = -\frac{\hbar}{m}\kappa^l, \qquad l = 0,1,2,3 \tag{1.20}$$

Так же как нерелятивистская скорость $\mathbf{u}$, векторное поле $\kappa_l = g_{lk}\kappa^k$ имеет потенциал κ и может быть представлено в виде

$$\kappa_l = \partial_l\kappa = \frac{1}{2}\partial_l \ln\rho, \tag{1.21}$$

где

$$\rho = \frac{J\sqrt{\dot{x}_s\dot{x}^s}}{\rho_0 mcK} = \frac{\sqrt{j_s j^s}}{\rho_0 mcK}, \qquad j^k = J\dot{x}^k \equiv \frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}} \equiv \frac{\partial\left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)}, \tag{1.22}$$

$$J = \frac{\partial\left(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} = \det\left\|\xi_{i,k}\right\|, \qquad \xi_{i,k} = \partial_k\xi_i, \qquad i,k = 0,1,2,3 \tag{1.23}$$

$\rho_0 =$const.

Результат (1.21) получается вариацией действия (1.19) по κ^l тем же способом, каким уравнение (1.16) было получено из (1.13).

Действие (1.19) описывает некоторый релятивистский флюид, чьи частицы взаимодействуют через самосогласованное векторное поле κ^l. Свойства этого флюида были исследованы в [24]. Было показано, что потенциальное течение этого флюида описывается уравнением Клейна-Гордона. Детерминированные релятивистские частицы $\mathcal{S}_{\text{d}}$ множества (флюида) $\mathcal{S}_{\text{red}}\left[\mathcal{S}_{\text{d}}\right]$ взаимодействуют между собой через самосогласованное векторное поле κ^l, $i = 0,1,2,3$.

Мы будем ссылаться на поле κ^l и его потенциал κ, определенный соотношением (1.20) как на κ-поле. Мы покажем, что κ-поле имеет некоторые необычные свойства. В частности, κ-поле может рождать пары.

2 Поле порождающее пары

Чтобы показать способность κ-поля рождать пары, мы рассмотрим выражение $\frac{\hbar^2}{m^2c^2}\left(\kappa^l\kappa_l+\partial_l\kappa^l\right)$ построенное из κ-поля как некоторое заданное внешнее поле f. Мы рассмотрим движение заряженной детерминированной частицы в заданном электромагнитном поле A_i и некотором заданном скалярном поле f, изменяющим массу частицы. Действие для частицы имеет вид типа (1.19)

$$\mathcal{A}[q]=\int L(q,\dot{q})\,d\tau,\qquad L=-\sqrt{m^2c^2\left(1+f(q)\right)g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k}-\frac{e}{c}A_k\dot{q}^k \tag{2.1}$$

где соотношения $x^i=q^i(\tau)\,,\ i=0,1,2,3$ описывают мировую линию частицы, и $\dot{q}^k\equiv dq^i/d\tau$. Величины $A_k=A_k(q)$, $k=0,1,2,3$ суть заданные электромагнитные потенциалы, и $f=f(q)$ есть некоторое заданное поле, изменяющее эффективную массу частицы $m_{\text{eff}}=m\sqrt{(1+f(q))}$. Канонический импульс p_k определяется соотношением

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^k}=-\frac{mcKg_{ki}\dot{q}^i}{\sqrt{g_{ls}\dot{q}^l\dot{q}^s}}-\frac{e}{c}A_k,\qquad K=\sqrt{(1+f(q))} \tag{2.2}$$

Динамические уравнения имеют вид

$$\frac{dp_k}{d\tau}=-mc\sqrt{g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k}\frac{\partial K}{\partial q^k}-\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial q^k}\dot{q}^i \tag{2.3}$$

Действие (2.1), так же как и динамические уравнения (2.3), (2.2) инвариантны относительно преобразования параметризации мировой линии

$$\tau\rightarrow\tilde{\tau}=\tilde{\tau}(\tau) \tag{2.4}$$

при условии, что $\partial\tilde{\tau}/\partial\tau>0$. Если $\partial\tilde{\tau}/\partial\tau<0$, то динамические уравнения (2.3), (2.2) перестают быть инвариантными относительно преобразования (2.4) мировой линии. Параметризация мировой линии есть метод описания мировой линии, и правильно записанные динамические уравнения не должны зависеть от метода описания.

Модифицируем действие (2.1), введя ориентацию $\boldsymbol{\varepsilon}$ мировой линии. Ориентация мировой линии есть единичный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, касательный к мировой линии. Компонент ε ориентации $\boldsymbol{\varepsilon}$ есть проекция вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ на вектор $dq^i/d\tau$

$$\varepsilon=\frac{g_{ik}\varepsilon^i\dot{q}^k}{\sqrt{g_{ls}\dot{q}^l\dot{q}^s}}=\pm1 \tag{2.5}$$

При преобразовании параметризации (2.4) компонент ε ориентации $\boldsymbol{\varepsilon}$ преобразуется следующим образом

$$\varepsilon\rightarrow\tilde{\varepsilon}=\varepsilon\,\text{sgn}\left(\partial\tilde{\tau}/\partial\tau\right),\qquad\text{sgn}(x)=\frac{x}{|x|} \tag{2.6}$$

Компонент ε ориентации $\boldsymbol{\varepsilon}$ инвариантен относительно преобразования координат, как это следует из (2.5). Перепишем соотношения (2.1) – (2.3) в виде, инвариантном относительно произвольных преобразований (2.4)

$$\mathcal{A}[q] = \int\limits_{\min(\tau',\tau'')}^{\max(\tau',\tau'')} L(q,\dot{q})\,d\tau, \qquad L = -\sqrt{m^2c^2(1+f(q))\,g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k} - \frac{\varepsilon e}{c}A_k\dot{q}^k \tag{2.7}$$

где τ' и τ'' суть значения параметра τ на границах интервала интегрирования. Импульс частицы тогда определяется соотношением

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = -\frac{mcKg_{ki}\dot{q}^i}{\sqrt{g_{ls}\dot{q}^l\dot{q}^s}} - \frac{\varepsilon e}{c}A_k, \qquad K = \sqrt{(1+f(q))} \tag{2.8}$$

$$\frac{dp_k}{d\tau} = -mc\sqrt{g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k}\frac{\partial K}{\partial q^k} - \frac{\varepsilon e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial q^k}\dot{q}^i \tag{2.9}$$

Заметим, что теперь импульс (2.8) и динамические уравнения (2.9) инвариантны относительно произвольного преобразования (2.4). Можно усмотреть из (2.8), что вектор

$$\dot{q}_k = \sqrt{\frac{g_{ls}\dot{q}^l\dot{q}^s}{1+f(q)}}\frac{\left(p_k + \frac{\varepsilon e}{c}A_k\right)}{mc} \tag{2.10}$$

становится пространственноподобным $\left(g_{ls}\dot{q}^l\dot{q}^s < 0\right)$, если $f(q) < -1$, потому что только в этом случае выражение под знаком радикала в (2.10) будет положительным.

Уравнение Гамильтона-Якоби для действия (2.7) имеет вид

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial q^i} + \frac{\varepsilon e}{c}A_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial q^k} + \frac{\varepsilon e}{c}A_k\right) = m^2c^2(1+f(q)) \tag{2.11}$$

Рассмотрим решение уравнения Гамильтона-Якоби для двумерного пространства-времени (t,x), когда $A_i = 0$, и $f = f(t)$ есть функция только времени t. В этом случае решение уравнения (2.11) имеет вид

$$S(t,x,p_0) = p_0x + \int\limits_0^t c\sqrt{m^2c^2(1+f(t)) + p_0^2}dt + C, \qquad p_0, C = \mathrm{const} \tag{2.12}$$

и решение динамических уравнений принимает вид

$$\frac{\partial S(t,x,p_0)}{\partial p_0} - x_0 = x - x_0 + \int\limits_0^t \frac{p_0c\,dt}{\sqrt{m^2c^2(1+f(t)) + p_0^2}} = 0, \qquad x_0 = \mathrm{const} \tag{2.13}$$

Пусть, например,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad t < 0 \\ -\frac{V^2}{m^2c^4t_0^2}t(t-t_0) & \text{если} \quad 0 < t < t_0 \\ 0 & \text{если} \quad t_0 < t \end{cases}, \qquad t_0, V = \mathrm{const} \tag{2.14}$$

Решение (2.13) принимает вид

$$x = \begin{cases} x_0 - \frac{p_0 c^2}{E} t & \text{если} \quad t < 0 \\ x_0 - \int\limits_0^t \frac{p_0 c dt}{\sqrt{E^2 - V^2 t(t-t_0)/t_0^2}} & \text{если} \quad 0 < t < t_0 \\ x_1 + \alpha \frac{p_0 c^2}{E}(t - t_0) & \text{если} \quad t_0 < t \end{cases}, \qquad E = c\sqrt{m^2c^2 + p_0^2} \tag{2.15}$$

где $\alpha = \pm 1$. Знак величины α и постоянная x_1 определяются из условия непрерывности мировой линии при $t = t_0$. Решение (2.15) имеет различный вид в зависимости от знака постоянной $4E^2 - V^2$.

Если $4E^2 > V^2$, то решение (2.15) принимает вид

$$x = \begin{cases} x_0 - \frac{p_0 c^2}{E} t & \text{if } t < 0 \\ x_0 - \frac{p_0 c^2 t_0}{V} \arcsin \frac{2V\left(\sqrt{E^2 t_0^2 - V^2 t(t-t_0)} - E(t_0 - 2t)\right)}{t_0(4E^2 + V^2)} & \text{if } 0 < t < t_0 \\ x_0 - p_0 c^2 \frac{t_0}{V} \arcsin \frac{4EV}{4E^2 + V^2} - \frac{p_0 c^2}{E}(t - t_0) & \text{if } t_0 < t \end{cases}, \qquad E^2 > V^2/4 \tag{2.16}$$

В случае , когда $4E^2 < V^2$, мировая линия отражается от области Ω_{fb} пространства-времени, определяемой условием $0 < t < t_0$, координата x не будет однозначной функцией времени t. В этом случае мы используем параметрическое представление для решения (2.15). Получаем

$$x = \begin{cases} x_0 - \frac{p_0 c^2 t_0}{2E}(1 - A\cosh\tau) & \text{если} \quad \tau < -\tau_0 \\ x_0 - \frac{p_0 c^2 t_0}{V}(\tau + \tau_0) & \text{если} \quad -\tau_0 < \tau < \tau_0 \\ x_0 - \frac{2p_0 t_0}{V}\tau_0 + \frac{p_0 c^2 t_0}{2E}(1 - A\cosh\tau) & \text{если} \quad \tau_0 < \tau \end{cases} \tag{2.17}$$

$$t = \frac{t_0}{2}(1 - A\cosh\tau) \tag{2.18}$$

где

$$A = \sqrt{1 - \frac{4E^2}{V^2}}, \qquad \tau_0 = \operatorname{arccosh}\frac{1}{A} = \operatorname{arccosh}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4E^2}{V^2}}} \tag{2.19}$$

Решение (2.17), (2.18) описывает аннигиляцию частицы и античастицы с энергией $E < V/2$ в области $0 < t < t_0$. Решение, описывающее рождение пары частица-античастица, имеет вид

$$x = \begin{cases} x_0 - \frac{p_0 c^2 t_0}{2E}(A\cosh\tau - 1) & \text{если} \quad \tau < -\tau_0 \\ x_0 + \frac{p_0 c^2 t_0}{V}(\tau + \tau_0) & \text{если} \quad -\tau_0 < \tau < \tau_0 \\ x_0 + \frac{2p_0 t_0}{V}\tau_0 + \frac{p_0 c^2 t_0}{2E}(A\cosh\tau - 1) & \text{если} \quad \tau_0 < \tau \end{cases} \tag{2.20}$$

$$t = \frac{t_0}{2}(A\cosh\tau - 1) \tag{2.21}$$

где параметры A, τ_0 определяются соотношением (2.19), и выполнено условие $2E < V$.

В обоих случаях (2.17) и (2.20) при $|t| \to \infty$ мировая линия имеет две ветви, которые могут быть приближенно описаны соотношениями

$$x = x_0 + vt_1 \pm v\left(t - t_1\right), \qquad t_1 = t_0 \frac{E}{V} \tag{2.22}$$

где $v = -\frac{p_0 c^2}{E}$ есть скорость частицы, и $v = \frac{p_0 c^2}{E}$ есть скорость античастицы.

Итак, область Ω_{fb} с κ-полем отражает мировые линии частиц с энергией $E < V/2$. Если энергия частицы $E > V/2$, частица проходит область Ω_{fb} насквозь. Мировая линия проникает в запрещенную область Ω_{fb} тем глубже, чем больше ее энергия.

3 Связь между энергией-импульсом частицы и ее каноническим импульсом

Принято думать, что в отсутствии электромагнитного поля канонический импульс (2.8) совпадает с энергией-импульсом частицы P_i. Тогда энергия частицы может быть отрицательной, поскольку временна́я составляющая p_0 канонического импульса может быть как положительной, так и отрицательной. Существование отрицательной энергии частицы крайне нежелательно, потому что это может приводить ко многим очень странным следствиям.

На самом деле, энергия-импульс P_i, $i = 0, 1, 2, 3$ и канонический импульс p_i, $i = 0, 1, 2, 3$ суть различные величины, которые могут совпадать только в случае, когда имеются только частицы или только античастицы. Они определяются по-разному. Канонический импульс p_i определяется как величина, канонически сопряженная к координате x^i положения частицы с помощью соотношения (2.8). Энергия-импульс P_i определяются соотношением

$$P_i = \int\limits_V T_i^0 d\mathbf{x}, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

где $T_i^0 = g_{ik} T^{k0}$ суть компоненты тензора энергии-импульса, и V есть 3-объем вокруг частицы, чьи энергия-импульс определяются. Тензор энергии-импульса T^{ik} определяется как источник гравитационного поля, т.е. с помощью соотношения

$$T^{ik}\left(x\right) = \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta g_{ik(x)}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial g_{ik}\left(x\right)} \left(\sqrt{-g}\mathcal{L}\right) \tag{3.2}$$

где $\mathcal{A}$ есть действие (2.7), записанное в произвольной криволинейной системе координат в виде

$$\mathcal{A}\left[q^i, g_{ik}, A_i\right] = \int \mathcal{L}\left(q^i, g_{ik}, A_i\right) \sqrt{-g} d^4 x \tag{3.3}$$

и $g = \det ||g_{ik}||$.

Точно так же электрический заряд частицы определяется соотношением

$$Q = \int\limits_V j_{\text{c}}^0 d\mathbf{x}, \tag{3.4}$$

где j_{c}^i, $i = 0, 1, 2, 3$ есть плотность электрического 4-тока, определенного как источник электромагнитного поля, т.е. соотношением

$$j_{\text{c}}^i (x) = c \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta A_i (x)} = \frac{c}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial A_i (x)} \left(\sqrt{-g} \mathcal{L} \right) \tag{3.5}$$

Чтобы получить выражения для величин j_{c}^l, T^{ik}, запишем действие (2.7) в произвольной криволинейной системе координат и представим его в виде (3.3). Получаем

$$\mathcal{A} = \int d^4 x \int\limits_{\min(\tau', \tau'')}^{\max(\tau', \tau'')} L (q, \dot{q}) \, \delta^{(4)} (x - q (\tau)) \, d\tau, \tag{3.6}$$

где

$$\delta^{(4)} (x - q (\tau)) = \delta \left(x^0 - q^0 (\tau) \right) \delta (\mathbf{x} - \mathbf{q} (\tau)) = \prod_{i=0}^{i=3} \delta \left(x^i - q^i (\tau) \right) \tag{3.7}$$

Интегрируя (3.6) по τ и используя δ-функцию $\delta (x^0 - q^0 (\tau))$, получаем

$$\mathcal{A} = \int d^4 x \sum_j \frac{L (q (\tau_j), \dot{q} (\tau_j))}{|\dot{q}^0 (\tau_j)|} \delta (\mathbf{x} - \mathbf{q} (\tau_j)), \tag{3.8}$$

где $\tau_j = \tau_j (x^0)$ суть корни уравнения

$$x^0 - q^0 (\tau_j) = 0 \tag{3.9}$$

Сравнивая соотношения (3.8) и (3.3), мы приходим к заключению, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \sqrt{-g} &= \sum_j \frac{L (q (\tau_j), \dot{q} (\tau_j))}{|\dot{q}^0 (\tau_j)|} \delta (\mathbf{x} - \mathbf{q} (\tau_j)) \\ &= \sum_j \left(-\sqrt{m^2 c^2 (1 + f (q (\tau_j))) \, g_{ik} \dot{q}^i (\tau_j) \, \dot{q}^k (\tau_j)} - \frac{\varepsilon e}{c} A_k \dot{q}^k (\tau_j) \right) \\ &\quad \times \frac{\delta (\mathbf{x} - \mathbf{q} (\tau_j))}{|\dot{q}^0 (\tau_j)|} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Теперь подставим соотношение (3.10) в соотношения (3.2), (3.5) и положим $A_i = 0$, $g_{ik} = \text{diag}\{c^2, -1, -1, -1\}$. После вычислений мы получаем соотношения для тензора энергии-импульса и плотности 4-тока

$$T^{ik} \left(x^0, \mathbf{x} \right) = \sum_j \frac{mc \sqrt{1 + f (q (\tau_j))} \dot{q}^i (\tau_j) \, \dot{q}^k (\tau_j)}{c \sqrt{g_{ls} \dot{q}^l (\tau_j) \, \dot{q}^s (\tau_j)}} \frac{\delta (\mathbf{x} - \mathbf{q} (\tau_j))}{|\dot{q}^0 (\tau_j)|} \tag{3.11}$$

$$j_{\mathrm{c}}^{k}=-\sum_{j}\varepsilon e\dot{q}^{k}\left(\tau_{j}\right)\frac{\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\left(\tau_{j}\right)\right)}{\left|\dot{q}^{0}\left(\tau_{j}\right)\right|} \tag{3.12}$$

где $\tau_j = \tau_j\left(x^0\right)$. Подставляя соотношения (3.11), (3.12) в соотношения (3.1), (3.4), получаем

$$\begin{aligned}
P_i &= \sum_j \frac{mc\sqrt{1+f\left(q\left(\tau_j\right)\right)}\dot{q}_i\left(\tau_j\right)\dot{q}^0\left(\tau_j\right)}{\left|\dot{q}^0\left(\tau_j\right)\right|\sqrt{g_{ls}\dot{q}^l\left(\tau_j\right)\dot{q}^s\left(\tau_j\right)}} \\
&= -\sum_j \frac{p_i\left(\tau_j\right)\dot{q}^0\left(\tau_j\right)}{\left|\dot{q}^0\left(\tau_j\right)\right|} = -\sum_j p_i\left(\tau_j\right)\operatorname{sgn}\left(\dot{q}^0\left(\tau_j\right)\right) \\
&= \sum_j p_i\left(\tau_j\right)\operatorname{sgn}\left(p_0\left(\tau_j\right)\right), \qquad i=0,1,2,3
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$Q=-\sum_j \varepsilon e\cdot\operatorname{sgn}\left(\dot{q}^0\left(\tau_j\right)\right)=\sum_j \varepsilon e\cdot\operatorname{sgn}\left(p_0\left(\tau_j\right)\right) \tag{3.14}$$

В частности, мы получаем для энергии $E = P_0$

$$P_0=E=\sum_j p_0\left(\tau_j\right)\operatorname{sgn}\left(p_0\left(\tau_j\right)\right)=\sum_j\left|p_0\left(\tau_j\right)\right| \tag{3.15}$$

В случае, когда $f\left(q\right)+1<0$ в некоторых областях пространства-времени, уравнение (3.9) может иметь несколько корней. Каждый из корней соответствует пересечению мировой линии с плоскостью t =const. Каждое такое пересечение соответствует или частице, когда $\operatorname{sgn}(\dot{q}^0)=-\operatorname{sgn}(p_0)>0$, или античастице, когда $\operatorname{sgn}(\dot{q}^0)=-\operatorname{sgn}\ (p_0)<0$. В соответствии с (3.14) электрический заряд Q_{p} частицы равен $-\varepsilon e$, тогда как электрический заряд Q_{a} античастицы равен εe. Итак, частица и античастица имеют заряды противоположных знаков, потому что знак p_0 различен для частицы и античастицы. В соответствии с (3.15) энергия положительна как для частицы, так и для античастицы, хотя знак временно́го компонента p_0 различен для частицы и античастицы.

Такая ситуация представляется естественной. Это может быть интерпретировано следующим образом. Пусть термин "СМЛ" (сечение мировой линии) означает коллективное понятие по отношению к понятиям "частица" и "античастица". Частица и античастица различаются знаком временно́го компонента p_0 канонического импульса и знаком временно́й составляющей $-K\dot{q}^0\left(g_{ls}\dot{q}^l\dot{q}^s\right)^{-1/2}$ 4-вектора скорости. Поток мировых линий частиц через некоторую пространственноподобную площадку dS_i и поток мировых линий античастиц через ту же самую площадку dS_i имеют разные знаки. Этот факт можно интерпретировать в том смысле, что частица – это один сэмлон (так мы прочитываем аббревиатуру СМЛ), а античастица – это минус один сэмлон. Если сэмлон имеет канонический импульс p_i, то число n сэмлонов есть $n=-\operatorname{sgn}(p_0)$. Соотношения (3.13) – (3.15) могут быть записаны в виде

$$Q = -\sum_j \varepsilon e n\left(\tau_j\right), \qquad E=-\sum_j p_0\left(\tau_j\right)n\left(\tau_j\right) \tag{3.16}$$

$$P_i \;=\; -\sum_j p_i(\tau_j)\, n(\tau_j)\,, \qquad i=0,1,2,3, \qquad n=-\mathrm{sgn}(p_0) \qquad (3.17)$$

Это естественные формулы для аддитивных величин, когда величина a нескольких объектов (сэмлонов) есть сумма аддитивных величин a для каждого из объектов, умноженная на число n объектов (сэмлонов). Здесь необычным является только то, что число n объектов (сэмлонов) может быть отрицательным.

4 Особенности описания в терминах мировых линий

С точки зрения последовательной теории относительности мировая линия есть реальный физический объект, тогда как частица и античастица (сэмлоны) суть атрибуты мировой линии, которые появляются как результат пересечения мировой линии с плоскостью t =const. Мы будем использовать специальный термин "МЛ" (эмлон) для мировой линии, рассматриваемой как физический объект. В нерелятивистской теории реальным физическим объектом является частица (или античастица), тогда как мировая линия есть только атрибут частицы (ее история).

Частица и античастица в нерелятивистской теории (или в непоследовательной релятивистской теории) суть два различных объекта, имеющие различные параметры. Частица описывается следующими параметрами $\{m, e\}$, где m есть масса, а e есть зарядовая постоянная. Античастица описывается параметрами $\{m, -e\}$. Частица и античастица описываются как различные динамические системы, потому что эти системы имеют различные параметры. Заметим, что при таком описании компонент ε ориентации $\boldsymbol{\varepsilon}$ не является параметром динамической системы. Это только метод описания сэмлонов, потому что ε меняет знак при замене $\tau \to -\tau$ параметризации мировой линии. При нерелятивистском подходе нельзя описывать рождение пар классически, потому что нельзя соединить фрагменты мировых линий двух различных объектов (частицы и античастицы). Рассмотрение частицы и античастицы как двух различных объектов в классической теории несовместимо с рождением пар. Однако, в квантовой теории такое совмещение возможно, поскольку существование мировой линии там необязательно, и можно ввести специальные операторы, описывающие рождение и аннигиляцию частицы (античастицы). В квантовой теории рождение частиц парами есть следствие динамических уравнений, и можно представить себе ситуацию (при соответствующем выборе динамических уравнений), когда частицы рождаются отдельно, а античастицы отдельно. В классической теории парное рождение частиц и античастиц заложено на более глубоком (описательном) уровне. Выбор динамических уравнений ничего изменить не может.

Тем не менее мы начнем с последовательной релятивистской теории, где сэмлоны суть атрибуты эмлонов. Представим себе, что описывая движение сэмлонов классически мы разделяем мировую линию $\mathcal{L}$ на фрагменты $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2...$ таким образом, чтобы каждый фрагмент $\mathcal{L}_i$ описывал или частицу, или античастицу. Чтобы сделать это, достаточно сделать соответствующее преобразование для фрагментов $\mathcal{L}_i$, описывающих античастицу.

$$e \to -e, \qquad \tau \to -\tau, \qquad \varepsilon \to \varepsilon \tag{4.1}$$

В соответствии с (3.13), (3.14) это преобразование не изменяет ни вектор энергии-импульса P_i, ни заряд Q сэмлона. Преобразование (4.1) изменяет знак канонического импульса для античастиц и не меняет его для частиц. В результате временна́я составляющая p_0 частиц и античастиц становится отрицательной и можно отождествить энергию E частиц и античастиц с временно́й составляющей $-p_0$ канонического импульса, т.е. $E = -p_0$. Традиционно такое отождествление всегда производится, чтобы удовлетворить так называемому принципу причинности. При этом временна́я составляющая $-p_0$ канонического импульса рассматривается одновременно как энергия частицы и античастицы. При использовании такого отождествления всегда предполагается, что $dt/d\tau > 0$, и можно игнорировать понятие ориентации.

Действие (2.7) и динамические уравнения (2.9) инвариантны относительно преобразования (4.1), тогда как канонический импульс (2.8) изменяет свой знак. В результате все фрагменты $\mathcal{L}_i$ линии $\mathcal{L}$ имеют один и тот же $\mathrm{sgn}(p_0)$, и $E = -p_0$ вдоль всей $\mathcal{L}$. В то же время различные фрагменты $\mathcal{L}_i$ мировой линии $\mathcal{L}$ (частицы и античастицы) описываются как разные динамические системы с параметрами $\{m, e\}$ и $\{m, -e\}$ соответственно.

Тогда интервал между двумя точками P и P', принадлежащими к одному и тому же фрагменту $\mathcal{L}_i$, будет времениподобным (мы пренебрегаем короткими пространственноподобными сегментами фрагмента $\mathcal{L}_i$ вблизи его концов). Если интервал между двумя точками P_1 и P_2 пространственноподобен, то $P_1 \in \mathcal{L}_i$ и $P_2 \in \mathcal{L}_k$, $i \neq k$. Точки принадлежат к различным динамическим системам и скобки Пуассона между динамическими переменными в точках P_1 и P_2 обращаются в нуль

$$\{u(P_1), v(P_2)\} = 0, \qquad \left(x_{(1)}^i - x_{(2)}^i\right)\left(x_{(1)i} - x_{(2)i}\right) < 0 \tag{4.2}$$

где $u(P_1)$ и $v(P_2)$ суть динамические переменные соответственно в точке P_1 и в точке P_2 соответственно. Величины $x_{(1)}^i$ и $x_{(2)}^i$ суть координаты в точках P_1 и P_2 соответственно.

В квантовой теории поля, где используется фрагментация всей мировой линии $\mathcal{L}$ соотношение (4.2) принимает вид

$$[u(x_1), v(x_2)]_- = 0, \qquad (x_1 - x_2)^2 < 0 \tag{4.3}$$

где $[...]_-$ означает коммутатор двух операторов, описывающих динамические переменные u и v в точках x_1 и x_2 соответственно.

Соотношение (4.3) известно как принцип причинности. Интерпретация этого принципа такова. События в точках P_1 и P_2 независимы, потому что взаимодействие не может распространяться быстрее скорости света.

Если мировая линия $\mathcal{L}$ рассматривается как единый объект (МЛ), описываемый динамическими уравнениями (2.8), (2.9) и параметр τ, изменяется монотонно вдоль $\mathcal{L}$, то имеются точки P_1 и P_2, разделенные пространственноподобным интервалом и принадлежащие к $\mathcal{L}$. Разумеется, это возможно лишь в том случае, когда имеется рождение и аннигиляция пар. Например, в примере второго раздела (см. (2.22)) точки с координатами $P_1 = (t, x)$ и $P_2 = (t, 2(x_0 + vt_1) - x)$ разделены интервалом $2i|x - x_0 - vt_1|$, который пространственноподобен. В соответствии с (2.22) они принадлежат к одной и той же мировой линии. Так как состояние (x_2, p_2) динамической системы в точке P_2 есть функция ее состояния (x_1, p_1) в точке P_1, то соотношение (4.2) не может быть выполнено для всех функций u и v динамических переменных. Это означает, что принцип причинности в виде (4.2) нарушается. События в точках P_1 и P_2 оказываются зависимыми, если частица и античастица рассматриваются как различные состояния единого эмлона (а не как отдельные динамические системы).

Означает ли это, что описание в терминах эмлонов несовместимо с принципом причинности? Нет, потому что описание в терминах одного эмлона есть только часть полного описания столкновения частица-античастица. В самом деле, представим себе, что мы приготовили частицу и античастицу высокой энергии в точках P_1 и P_2, разделенных пространственноподобным интервалом. Пусть эти сэмлоны движутся навстречу друг другу. Тогда имеются следующие возможности: (1) частица и античастица аннигилируют (описание в терминах одного эмлона), (2) частица и античастица не столкнутся (описание в терминах двух эмлонов), (3) Частица и античастица столкнутся и породят дополнительно n пар (описание в терминах $n+1$ эмлонов). Таким образом, полное описание столкновения частица-античастица описывается статистически при помощи суммы из k-эмлонных описаний, $k = 1, 2, ...$ Принцип причинности приложим только к полному описанию.

Описание в терминах одного эмлона есть специальная часть полного описания, и это частное описание может содержать корреляцию между точками, разделенными пространственноподобным интервалом, потому что факт аннигиляции частицы и античастицы предполагает некоторую корреляцию между их состояниями в точках P_1 и P_2, разделенных пространственноподобным интервалом. Эта корреляция для одноэмлонного описания означает, что не все скобки Пуассона (4.2) обращаются в нуль. Эта корреляция не означает нарушения принципа причинности, потому что одноэмлонное описание не претендует на полное описание столкновения частица-античастица. а выполнение принципа причинности существенно только для полного описания.

Понимая, что осуществление полного описание есть очень сложная проблема, мы разделили эту проблему на части (один эмлон, два эмлона,...) и пытаемся решить каждую часть общей проблемы отдельно. Наша стратегия исследования напоминает исследование взаимодействия нерелятивистских частиц, где число частиц сохраняется. Тогда полное исследование разделяется на одночастичную проблему, двухчастичную проблему, трехчастичную проблему,... Эти проблемы решаются последовательно. В релятивистском случае число эмлонов сохраняется, и полная проблема может быть разделена на части, соответствующие фиксированному числу эмлонов. Некоторые идеи этого подхода можно найти в [25], однако, детали требуют дальнейшей разработки. В любом случае описание рождения пар в терминах одного эмлона не противоречит принципу причинности, потому что это описание не претендует на полное описание процесса столкновения.

В современной релятивистской квантовой теории поля описание производится в терминах частиц и античастиц (но не в терминах эмлонов). Это утверждение следует из отождествления оператора энергии E с оператором Гамильтона $H = p_0$, который определяется как эволюционный оператор. Формально это отождествление следует из соотношений

$$i\hbar\partial_k u = [u, P_k]_- , \qquad P_k = \int T_k^0 d\mathbf{x}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{4.4}$$

где u есть оператор произвольной динамической переменной, $[...]_-$ означает коммутатор, и P_k есть оператор энергии-импульса динамической системы. При таком описании принцип причинности верен, потому что описание производится в терминах частиц и античастиц (а не в терминах эмлонов).

Трудность такого подхода в рассмотрении неопределенного числа несохраняющихся объектов (частиц и античастиц). Это приводит к пертурбативному описанию процессов рождения пар.

Концептуальный дефект традиционного описания с использованием отождествления (4.4) состоит в несовместности соотношений (4.4) с динамическими уравнениями. Ограничения (4.4) совместимы с динамическими уравнениями, полученными при каноническом вторичном квантовании линейного уравнения

$$\hbar^2\partial_i\partial^i\psi + m^2c^2\psi = 0 \tag{4.5}$$

Но они перестают быть совместными с динамическими уравнениями, полученными при каноническом вторичном квантовании нелинейного уравнения

$$\hbar^2\partial_i\partial^i\psi + m^2c^2\psi = g\psi^*\psi\psi, \qquad g = \text{const} \tag{4.6}$$

Дело в том, что вторичное квантование уравнения (4.6) можно провести без наложения ограничений(4.4). Такое квантование было произведено в терминах эмлонов [26]. Оно не использует теории возмущений и позволяет получить решение проблемы рассеяния без обрезания взаимодействия на бесконечности при $t \to \pm\infty$. Если вторичное квантование можно провести без наложения ограничений (4.4), то следует проверить, совместны ли соотношения (4.4) с динамическими уравнениями. Проверка показывает, что ограничения (4.4) совместны с динамическими уравнениями только для линейного уравнения (4.5), но они несовместны с (4.6) [26]. После наложения ограничений (4.4) задача становится переопределенной. Переопределенная задача противоречива, и из нее можно получить практически любой желаемый результат.

Совершенно естественно, что принцип причинности (4.3) не выполняется при квантовании в терминах эмлонов, потому что он есть следствие ограничений (4.4). Вторичное квантование в терминах эмлонов [26] не описывает рождения пар. Оно не описывает даже рассеяния частицы на античастице. Но в то же время это квантование непротиворечиво и хорошо определено с формальной точки зрения. Что это означает? Оно означает только, что нелинейный член с самодействием в (4.6) не описывает рождение пар, потому что, по-видимому, рождение пар является боле тонким эффектом. Но тогда почему традиционно при квантовании [27, 28, 29, 30] уравнения (4.6) получают рождение пар? Ответ прост. Из-за переопределенности задачи, что делает постановку задачи противоречивой. Практически это выглядит следующим образом. Наложение ограничений (4.6) приводит к фрагментации единой мировой линии на частицы и античастицы. После рассеяния нужно произвести дефрагментацию и собрать фрагменты в единые мировые линии. Процесс дефрагментации не совершенен из-за непоследовательного пертурбативного описания. Остатки несовершенного процесса дефрагментации имитируют рождение пар. При традиционном подходе любой нелинейный член приводит к рождению пар, тогда как классическое описание второго раздела показывает, что порождающее пары поле должно иметь довольно специфические свойства.

Неудача работы [26] в описании рождения пар и противоречивость традиционного квантования в терминах частиц и античастиц показывают, что необходимо исследовать свойства κ-поля, порождающего пары более тщательно, и попытаться найти фактор, ответственный за рождение пар.

5 Преобразование динамических уравнений

Добавим к действию (1.19) член, описывающий взаимодействие с электромагнитным полем и запишем действие в виде

$$\mathcal{A}[x,\kappa] = \int \left\{-mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} - \frac{e}{c}A_k\dot{x}^k\right\} d^4\xi, \qquad d^4\xi = d\xi_0 d\boldsymbol{\xi}, \tag{5.1}$$

$$K = \sqrt{1+\lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right)}, \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \tag{5.2}$$

где $x = \{x^i(\xi_0,\boldsymbol{\xi})\}$, $i = 0,1,2,3$ суть зависимые переменные. $\xi = \{\xi_0,\boldsymbol{\xi}\} = \{\xi_k\}$, $k = 0,1,2,3$ суть независимые переменные, и $\dot{x}^i \equiv dx^i/d\xi_0$. Величины $\kappa^l = \left\{\kappa^l(x)\right\}$, $l = 0,1,2,3$ суть зависимые переменные, описывающие стохастическую составляющую движения частиц, $A_k = \{A_k(x)\}$, $k = 0,1,2,3$ есть 4-потенциал электромагнитного поля. Мы будем ссылаться на динамическую систему, описываемую действием (5.1), (5.2) как $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$, потому что потенциальное течение в динамической системе $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ описывается уравнением Клейна-Гордона [24]. Мы представим здесь это преобразование к форме действия для уравнения Клейна-Гордона, потому что мы будем использовать промежуточные этапы этого преобразования в дальнейшем исследовании.

Будем рассматривать переменные $\xi = \xi\,(x)$ in (5.1) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. Пусть якобиан

$$J = \frac{\partial\,(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial\,(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det\,||\xi_{i,k}||\,, \qquad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i, \qquad i,k = 0,1,2,3 \tag{5.3}$$

рассматривается как полилинейная функция от $\xi_{i,k}$. Тогда

$$d^4\xi = J d^4 x, \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\xi_0} \equiv \frac{\partial\,(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial\,(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \tag{5.4}$$

После преобразования к зависимым переменным ξ действие (5.1) принимает вид

$$\mathcal{A}\,[\xi, \kappa] = \int \left\{ -mcK\sqrt{g_{ik}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}} - \frac{e}{c}A_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right\} d^4 x, \tag{5.5}$$

Введем новые переменные

$$j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{5.6}$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}\,[\xi, \kappa, j, p] = \int \left\{ -mcK\sqrt{g_{ik}j^i j^k} - \frac{e}{c}A_k j^k + p_k\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} - j^k\right)\right\} d^4 x, \tag{5.7}$$

Вариация действия по ξ_i дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \xi_i} = -\partial_l \left(p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}}\right) = 0, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{5.8}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}}\right) \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}}\xi_{k,l} \equiv J\delta_k^i, \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{5.10}$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение линейных уравнений (5.8) имеет вид

$$p_k = b_0\left(\partial_k \varphi + g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_k \xi_\alpha\right), \qquad k = 0,1,2,3 \tag{5.11}$$

где $b_0 \neq 0$ есть постоянная, $g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right),\ \ \alpha = 1,2,3$ суть произвольные функции от $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Подставим (5.11) в (5.7). Член вида $\partial J/\partial \xi_{0,k}\partial_k\varphi$ приводится к якобиану и не дает вклада в динамические уравнения. Члены вида $\xi_{\alpha,k}\partial J/\partial\xi_{0,k}$ обращаются в нуль в силу тождеств (5.10). Мы получаем

$$\mathcal{A}\left[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa,j\right]=\int\left\{-mcK\sqrt{g_{ik}j^{i}j^{k}}-j^{k}\pi_{k}\right\}d^{4}x, \tag{5.12}$$

где величины π_k определяются соотношениями

$$\pi_{k}=b_{0}\left(\partial_{k}\varphi+g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_{k}\xi_{\alpha}\right)+\frac{e}{c}A_{k},\qquad k=0,1,2,3 \tag{5.13}$$

Интегрирование уравнений (5.8) в виде (5.11) есть именно то интегрирование, которое упоминалось во введении как концептуальное интегрирование, позволяющее ввести волновую функцию. Заметим, что коэффициенты в системе (5.8) уравнений для p_k построены из миноров якобиана (5.3). Именно это обстоятельство позволяет произвести общее интегрирование.

Варьирование (5.12) по κ^l дает

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\kappa^{l}}=-\frac{\lambda^{2}mc\sqrt{g_{ik}j^{i}j^{k}}}{K}\kappa_{l}+\partial_{l}\frac{\lambda^{2}mc\sqrt{g_{ik}j^{i}j^{k}}}{2K}=0 \tag{5.14}$$

Это можно записать в виде

$$\kappa_{l}=\partial_{l}\kappa=\frac{1}{2}\partial_{l}\ln\rho,\qquad e^{2\kappa}=\frac{\rho}{\rho_{0}}\equiv\frac{\sqrt{j_{s}j^{s}}}{\rho_{0}mcK}, \tag{5.15}$$

где $\rho_0 =$const есть постоянная интегрирования. Подставляя (5.2) в (5.15), получаем динамическое уравнение для κ

$$\hbar^{2}\left(\partial_{l}\kappa\cdot\partial^{l}\kappa+\partial_{l}\partial^{l}\kappa\right)=\frac{e^{-4\kappa}j_{s}j^{s}}{\rho_{0}^{2}}-m^{2}c^{2} \tag{5.16}$$

Вариация (5.12) по j^k дает

$$\pi_{k}=-\frac{mcKj_{k}}{\sqrt{g_{ls}j^{l}j^{s}}} \tag{5.17}$$

или

$$\pi_{k}g^{kl}\pi_{l}=m^{2}c^{2}K^{2} \tag{5.18}$$

Подставляя второе уравнение (5.15) в (5.17), получаем

$$j_{k}=-\rho_{0}e^{2\kappa}\pi_{k}, \tag{5.19}$$

Теперь исключим переменные j^k из действия (5.12), используя соотношение (5.19) и (5.15). Получаем

$$\mathcal{A}\left[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa\right]=\int\rho_{0}e^{2\kappa}\left\{-m^{2}c^{2}K^{2}+\pi^{k}\pi_{k}\right\}d^{4}x, \tag{5.20}$$

где π_k задается соотношением (5.13). Используя выражение (5.2) для K, преобразуем первый член действия (5.20) следующим образом.

$$\begin{aligned} -m^2c^2e^{2\kappa}K^2 &= -m^2c^2e^{2\kappa}\left(1+\lambda^2\left(\partial_l\kappa\partial^l\kappa+\partial_l\partial^l\kappa\right)\right) \\ &= -m^2c^2e^{2\kappa}+\hbar^2e^{2\kappa}\partial_l\kappa\partial^l\kappa-\frac{\hbar^2}{2}\partial_l\partial^le^{2\kappa} \end{aligned}$$

Примем во внимание, что последний член имеет вид дивергенции. Он не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Опуская этот член, получаем

$$\mathcal{A}[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa]=\int\rho_0e^{2\kappa}\left\{-m^2c^2+\hbar^2\partial_l\kappa\partial^l\kappa+\pi^k\pi_k\right\}d^4x, \tag{5.21}$$

Вместо динамических переменных $\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa$ введем n-компонентную комплексную функцию

$$\psi=\{\psi_\alpha\}=\left\{\sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi})\right\}=\left\{\sqrt{\rho_0}e^{\kappa+i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi})\right\},\qquad \alpha=1,2,...n \tag{5.22}$$

Здесь u_α суть функции только $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, имеющие следующие свойства

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}u_\alpha^*u_\alpha=1,\qquad -\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi_\beta}-\frac{\partial u_\alpha^*}{\partial\xi_\beta}u_\alpha\right)=g^\beta(\boldsymbol{\xi}) \tag{5.23}$$

где $(^*)$ означает комплексное сопряжение. Число n компонентов волновой функции ψ выбирается таким образом, чтобы уравнения (5.23) имели решение. Тогда мы получаем

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\psi_\alpha^*\psi_\alpha=\rho=\rho_0e^{2\kappa},\qquad \partial_l\kappa=\frac{\partial_l(\psi^*\psi)}{2\psi^*\psi} \tag{5.24}$$

$$\pi_k = -\frac{ib_0(\psi^*\partial_k\psi-\partial_k\psi^*\cdot\psi)}{2\psi^*\psi}+\frac{e}{c}A_k,\qquad k=0,1,2,3 \tag{5.25}$$

Подставляя соотношения (5.24), (5.25) в (5.21), получаем действие, записанное в терминах волновой функции ψ

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\psi,\psi^*] &= \int\left\{\left[\frac{ib_0(\psi^*\partial_k\psi-\partial_k\psi^*\cdot\psi)}{2\psi^*\psi}-\frac{e}{c}A_k\right]\left[\frac{ib_0\left(\psi^*\partial^k\psi-\partial^k\psi^*\cdot\psi\right)}{2\psi^*\psi}-\frac{e}{c}A^k\right]\right. \\ &\left.+\hbar^2\frac{\partial_l(\psi^*\psi)\partial^l(\psi^*\psi)}{4(\psi^*\psi)^2}-m^2c^2\right\}\psi^*\psi d^4x \end{aligned} \tag{5.26}$$

Используем тождество

$$\begin{aligned} &\frac{(\psi^*\partial_l\psi-\partial_l\psi^*\cdot\psi)\left(\psi^*\partial^l\psi-\partial^l\psi^*\cdot\psi\right)}{4\psi^*\psi}+\partial_l\psi^*\partial^l\psi \\ \equiv\ &\frac{\partial_l(\psi^*\psi)\partial^l(\psi^*\psi)}{4\psi^*\psi}+\frac{g^{ls}}{2}\psi^*\psi\sum_{\alpha,\beta=1}^{\alpha,\beta=n}Q_{\alpha\beta,l}^*Q_{\alpha\beta,s} \end{aligned} \tag{5.27}$$

где

$$Q_{\alpha\beta,l}=\frac{1}{\psi^*\psi}\left|\begin{array}{cc}\psi_\alpha & \psi_\beta\\ \partial_l\psi_\alpha & \partial_l\psi_\beta\end{array}\right|,\qquad Q^*_{\alpha\beta,l}=\frac{1}{\psi^*\psi}\left|\begin{array}{cc}\psi^*_\alpha & \psi^*_\beta\\ \partial_l\psi^*_\alpha & \partial_l\psi^*_\beta\end{array}\right| \tag{5.28}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] &= \int\left\{\left(ib_0\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-ib_0\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi+\frac{b_0^2}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\alpha,\beta=n}g^{ls}Q_{\alpha\beta,l}Q^*_{\alpha\beta,s}\psi^*\psi\right.\\ &\left.-m^2c^2\psi^*\psi+\left(\hbar^2-b_0^2\right)\frac{\partial_l\left(\psi^*\psi\right)\partial^l\left(\psi^*\psi\right)}{4\psi^*\psi}\right\}d^4x\end{aligned} \tag{5.29}$$

Рассмотрим случай потенциального течения, когда $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})=0$ и функция ψ имеет только один компонент. Из (5.28) следует, что $Q_{\alpha\beta,l}=0$, и только последний член в (5.29) не является билинейным по ψ,ψ^*. Постоянная b_0 есть произвольная постоянная интегрирования. Поэтому можно положить $b_0=\hbar$. Тогда вместо (5.29) получаем

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*]=\int\left\{\left(i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-m^2c^2\psi^*\psi\right\}d^4x \tag{5.30}$$

Вариация действия (5.30) по ψ^* порождает уравнение Клейна-Гордона

$$\left(-i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-m^2c^2\psi=0 \tag{5.31}$$

Таким образом, описание в терминах уравнения Клейна-Гордона есть частный случай описания с помощью действия (5.1), (5.2).

В случае, когда течение флюида завихренное, и волновая функция ψ имеет два компонента, тождество (5.27) принимает вид

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\psi^*\partial_l\psi-\partial_l\psi^*\cdot\psi\right)\left(\psi^*\partial^l\psi-\partial^l\psi^*\cdot\psi\right)}{4\rho}-\frac{\left(\partial_l\rho\right)\left(\partial^l\rho\right)}{4\rho}\\ \equiv\;&-\partial_l\psi^*\partial^l\psi+\frac{1}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\rho\end{aligned} \tag{5.32}$$

где 3-вектор $\mathbf{s}=\{s_1,s_2,s_3,\}$ определяется соотношениями

$$\rho=\psi^*\psi,\qquad s_\alpha=\frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho},\qquad \alpha=1,2,3 \tag{5.33}$$

$$\psi=\binom{\psi_1}{\psi_2},\qquad \psi^*=\left(\psi_1^*,\psi_2^*\right), \tag{5.34}$$

а матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ имеют вид

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{5.35}$$

Заметим, что 3-векторы $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ суть векторы в пространстве V_ξ потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ и преобразуются как векторы при преобразованиях

(1.6) потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$. Волновая функция ψ есть спинор в пространстве V_ξ. Величины $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\sigma}$ и ψ суть скаляры в 3-пространстве V_x обычных координат $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$.

Вообще говоря, преобразования потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$ и преобразования координат $\mathbf{x}$ независимы. Однако, действие (5.26) не содержит ссылки на потенциалы Клебша $\boldsymbol{\xi}$ и преобразования (1.6) переменных $\boldsymbol{\xi}$. Если мы будем рассматривать только линейные преобразования пространственных координат $\mathbf{x}$

$$x^\alpha \to \tilde{x}^\alpha = b^\alpha + \omega^\alpha_{.\beta} x^\beta, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{5.36}$$

ничто не мешает нам сопровождать каждое преобразование (5.36) аналогичным преобразованием

$$\xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\alpha = b^\alpha + \omega^\alpha_{.\beta} \xi_\beta, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{5.37}$$

потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$. Формулы для линейных преобразований векторов и спиноров в V_x не содержат явно координат $\mathbf{x}$, и можно рассматривать векторы и спиноры в V_ξ как векторы и спиноры в V_x, при условии , что мы рассматриваем линейные преобразования (5.36), (5.37) всегда вместе.

Используя тождество (5.32), мы получаем из (5.26)

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = \int \left\{ \left(i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right)\psi^* \left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right)\psi - m^2c^2\rho - \frac{\hbar^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\rho \right\} d^4x \tag{5.38}$$

Динамическое уравнение, порожденное действием (5.38), имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right)\left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right)\psi - \left(m^2c^2 + \frac{\hbar^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\right)\psi \\ = \;& -\hbar^2 \frac{\partial_l\left(\rho\partial^l s_\alpha\right)}{2\rho}\left(\sigma_\alpha - s_\alpha\right)\psi \end{aligned} \tag{5.39}$$

Градиент единичного 3-вектора $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ описывает завихренную составляющую течения флюида. Если $\mathbf{s}$ =const, динамическое уравнение (5.39) превращается в традиционное уравнение Клейна-Гордона (5.31). Вихрь векторного поля π_k, определяемого соотношением (5.25), выражается через производные единичного 3-вектора $\mathbf{s}$.

Чтобы показать это, представим волновую функцию (5.22) в виде

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}\left(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right)\chi, \qquad \psi^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}\chi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right), \qquad \mathbf{n}^2 = 1, \qquad \chi^*\chi = 1 \tag{5.40}$$

где $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ есть некоторый единичный 3-вектор, $\chi = \binom{\chi_1}{\chi_2}$, $\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*)$ суть постоянные двух-компонентные величины, и $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ суть матрицы Паули (5.35). Единичный вектор $\mathbf{s}$ и единичный вектор $\mathbf{n}$ связаны с помощью соотношений

$$\mathbf{s} = 2\mathbf{n}\left(\mathbf{nz}\right) - \mathbf{z}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}+\mathbf{z}}{\sqrt{2\left(1+\left(\mathbf{sz}\right)\right)}} \tag{5.41}$$

где $\mathbf{z}$ есть постоянный единичный вектор, определенный соотношением

$$\mathbf{z} = \chi^* \boldsymbol{\sigma} \chi, \qquad \mathbf{z}^2 = \chi^* \chi = 1 \tag{5.42}$$

Все 3-векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{z}$ суть векторы в V_ξ. Подставим соотношение (5.40) в выражение $\partial_l \pi_k - \partial_k \pi_l$ для вихря векторного поля π_k, определенного соотношением (5.25). Тогда постепенно понижая степень матриц σ с помощью тождества

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta \equiv \delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma, \tag{5.43}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть псевдотензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{123} = 1$), мы получим после вычислений

$$\begin{aligned} \pi_k &= -\frac{ib_0 \left(\psi^* \partial_k \psi - \partial_k \psi^* \cdot \psi\right)}{2\psi^*\psi} + \frac{e}{c} A_k \\ &= b_0 \left(\partial_k \varphi + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\alpha \partial_k n_\beta z_\gamma\right) + \frac{e}{c} A_k \qquad k = 0,1,2,3 \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\partial_k \pi_l - \partial_l \pi_k = -4b_0 \left[\partial_k \mathbf{n} \times \partial_l \mathbf{n}\right] \mathbf{z} + \frac{e}{c} \left(\partial_k A_l - \partial_l A_k\right), \qquad k,l = 0,1,2,3 \tag{5.45}$$

Соотношение (5.45) может быть выражено также через 3-вектор $\mathbf{s}$, с помощью формул (5.41).

Заметим, что двух-компонентная волновая функция может описывать потенциальное течение. Например, если $\psi = \binom{\psi_1}{\psi_1}$, $s_1 = 1$, $s_2 = s_3 = 0$, динамическое уравнение (5.39) приводится к виду (5.31), и вихрь от π_k, определенный соотношением (5.45) обращается в нуль.

6 Интерпретация решений уравнения Клейна-Гордона

Запишем действие (5.12), (5.2) в произвольной криволинейной системе координат. Для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ получаем

$$\mathcal{A}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa, j] = \int \left\{ -mcK\sqrt{g_{ik} j^i j^k} - j^k \pi_k \right\} \sqrt{-g}\, d^4x, \tag{6.1}$$

$$K = \sqrt{1 + \lambda^2 \left(g_{ik}\kappa^i \kappa^k + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_l \left(\sqrt{-g}\kappa^l\right)\right)}, \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \tag{6.2}$$

$$g = \det \|g_{ik}\| \tag{6.3}$$

где вкличины π_k определяются соотношениями (5.13)

$$\pi_k = b_0 \left(\partial_k \varphi + g^\alpha (\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha\right) + \frac{e}{c} A_k, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{6.4}$$

Пытаясь интерпретировать динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$, описываемую действием (6.1) – (6.4), мы будем использовать *только динамические соображения*. Это означает, что $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ рассматривается как флюид, и мировые линии частиц флюида интерпретируются как средние мировые линии стохастических частиц. Мы рассматриваем динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ как флюид и интерпретируем его движение в терминах гидродинамики. Мы будем игнорировать интерпретацию, основанную на принципах квантовой механики, поскольку эта интерпретация в терминах волновой функции является чисто эмпирической. Она была проверена только для нерелятивистских квантовых явлений. В релятивистском случае имеются проблемы для интерпретации выражений, построенных на основе волновой функции.

С точки зрения гидродинамической интерпретации волновая функция есть только особый метод описания динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$. Этот метод очень удобен для решения динамических уравнений, поскольку они линейны в терминах волновой функции, но он не лучший метод для интерпретации движения флюида.

Мы будем интерпретировать динамическую систему, следя за поведением таких физических величин как поток j^i и тензор энергии-импульса T^{ik}. Тензор энергии-импульса для $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ получается с помощью соотношения (3.2). Применяя соотношение (3.2) к действию (6.1) – (6.4) и принимая во внимание, что плотность функции Лагранжа обращается в нуль в силу (5.17), мы получаем

$$\begin{aligned} T^{ik} &= \frac{mcKj^ij^k}{\sqrt{g_{ls}j^lj^s}} + \lambda^2\frac{mc\sqrt{g_{ls}j^lj^s}}{K}\kappa^i\kappa^k + \lambda^2\frac{mc\sqrt{g_{ls}j^lj^s}}{K}\left(-\frac{1}{2\left(\sqrt{-g}\right)}g^{ik}\partial_l\left(\sqrt{-g}\kappa^l\right)\right) \\ &\quad -\lambda^2\left(\frac{1}{2}g^{ik}\kappa^j\right)\partial_j\frac{mc\sqrt{g_{ls}j^lj^s}}{K} \end{aligned}$$

Используем соотношение (5.15)

$$e^{2\kappa} = \frac{\rho}{\rho_0} \equiv \frac{\sqrt{j_sj^s}}{\rho_0 mcK}. \tag{6.5}$$

Возвращаясь к инерциальной системе координат, где $\sqrt{-g} = c$, получаем

$$T^{ik} = \frac{j^ij^k}{\rho} + \hbar^2\rho\kappa^i\kappa^k - \frac{\hbar^2}{2}g^{ik}\partial_l\left(\rho\kappa^l\right) \tag{6.6}$$

или

$$T^{ik} = \frac{j^ij^k + j^i_{\mathrm{st}}j^k_{\mathrm{st}}}{\rho} - \frac{\hbar}{2}g^{ik}\partial_l j^l_{\mathrm{st}}, \tag{6.7}$$

$$j^k_{\mathrm{st}} = \hbar\rho\kappa^k = \frac{\hbar}{2}\partial^k\rho, \qquad \rho = \rho_0e^{2\kappa} = \frac{\sqrt{j^lj_l}}{mcK}, \qquad \kappa^i = g^{ik}\partial_k\kappa \tag{6.8}$$

Тензор энергии-импульса (6.7) выглядит как тензор энергии-импульса двух флюидов. Поток одного флюида описывается 4-вектором j^i, тогда как поток другого флюида описывается 4-вектором $j^i_{\mathrm{st}} = \hbar\rho\kappa^i = \hbar g^{ik}\rho\partial_k\kappa$. В первом флюиде давления нет. Давление p во втором флюиде описывается выражением

$$p = \frac{\hbar}{2}\partial_l j^l_{\mathrm{st}}$$

Оба флюида взаимодействуют через общий фактор $\rho = \rho_0 e^{2\kappa}$.

Собственные векторы u_i и собственные значения μ тензора энергии-импульса определяются соотношениями

$$T^{ik} u_k = \mu g^{ik} u_k, \qquad u_k = \alpha j_k + \beta j_{\text{st}k} \tag{6.9}$$

Расчет дает

$$\mu_{1,2} = -\frac{\hbar}{2} \partial_l j_{\text{st}}^l + \frac{1}{2\rho} \left(j_l j^l + j_{\text{st}l} j_{\text{st}}^l \pm \sqrt{\left(j^l j_l - \left(j_{\text{st}}^l j_{\text{st}l} \right) \right)^2 + 4 \left(j_{\text{st}}^l j_l \right)^2} \right) \tag{6.10}$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\left(j_l j^l - j_{\text{st}l} j_{\text{st}}^l \pm \sqrt{\left(j^l j_l - \left(j_{\text{st}}^l j_{\text{st}l} \right) \right)^2 + 4 \left(j_{\text{st}}^l j_l \right)^2} \right)}{2 j_l j_{\text{st}}^l} \alpha \tag{6.11}$$

Есть очень простой и интересный случай, когда один из флюидов исчезает и

$$j^i \equiv 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{6.12}$$

Как следует из (5.16), в этом случае скаляр e^κ удовлетворяет свободному уравнению Клейна-Гордона

$$\left(\hbar^2 \partial_l \partial^l + m^2 c^2 \right) e^\kappa = 0 \tag{6.13}$$

и

$$K = \sqrt{1 + \lambda^2 e^{-\kappa} \partial_l \partial^l e^\kappa} = 0 \tag{6.14}$$

С другой стороны, в этом случае волновая функция (5.22) однокомпонентна, и она удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона (5.31). Если условие (6.12) выполнено, волновая функция имеет вид $\psi = e^{\kappa + i\varphi}$, $\varphi =$const. Уравнения (6.13) и (5.31) совместны, если $A_i = 0$.

При выполнении условий (6.12) и (6.14) плотность ρ (6.5) и тензор энергии-импульса (6.7) становятся неопределенными. Кроме того, κ должно быть вещественным и $e^\kappa \geq 0$.

Чтобы получить канонический тензор энергии-импульса для потенциального течения, мы рассмотрим действие вида (5.30) с дополнительным условием $A_i = 0$, где ψ есть однокомпонентная волновая функция. Действие имеет вид

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \hbar^2 \partial_k \psi^* \cdot \partial^k \psi - m^2 c^2 \psi^* \psi \right\} d^4 x \tag{6.15}$$

Тогда канонический тензор энергии-импульса

$$T_{\text{c}}{}_k^l = \hbar^2 \left(\partial_k \psi^* \cdot \partial^l \psi + \partial^l \psi^* \cdot \partial_k \psi \right) - \delta_k^l \left(\hbar^2 \partial_k \psi^* \cdot \partial^k \psi - m^2 c^2 \psi^* \psi \right) \tag{6.16}$$

совпадает с соотношением (6.7).

В самом деле, подставим в (6.16) выражение

$$\partial_k \psi = \sqrt{\rho_0} e^\kappa \partial_k \kappa - \frac{i}{\hbar \sqrt{\rho_0}} e^{-\kappa} j_k = \sqrt{\rho} \partial_k \kappa - \frac{i}{\hbar \sqrt{\rho}} j_k \tag{6.17}$$

которое верно для потенциального течения.

$$T_{ckl}=\frac{j_lj_k}{\rho}+\hbar^2\rho\partial_l\kappa\cdot\partial_k\kappa-\rho_0e^{2\kappa}g_{kl}\left(\hbar^2\partial_s\kappa\cdot\partial^s\kappa+\frac{1}{\rho_0^2}e^{-4\kappa}j_sj^s-m^2c^2\right)$$

Принимая во внимание динамическое уравнение (5.16), исключаем два последних члена

$$T_{ckl}=\frac{j_lj_k}{\rho}+\hbar^2\rho\partial_l\kappa\cdot\partial_k\kappa-g_{kl}\frac{\hbar^2}{2}\partial_s\partial^se^{2\kappa} \tag{6.18}$$

и соотношения(6.6) и (6.18) совпадают.

Решение уравнения (6.13), стационарное во всем пространстве-времени, есть $e^\kappa=e^{\kappa(\mathbf{x})}$. Оно удовлетворяет соотношению

$$\left(\hbar^2\partial_\alpha\partial_\alpha-m^2c^2\right)e^{\kappa(\mathbf{x})}=0$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$\psi_{\mathbf{k}}=e^{\kappa(\mathbf{x})}=B_{\mathbf{k}}\cos\left(\frac{\mathbf{kx}}{\hbar}+\phi_{\mathbf{k}}\right),\qquad \mathbf{k}^2=m^2c^2,\qquad B_{\mathbf{k}}=\text{const} \tag{6.19}$$

Ни одно из этих решений кроме $\psi=0$ не удовлетворяет условию $\psi\geq 0$. Для этого решения

$$T^{00}=0,\qquad T^{0\alpha}=0,$$

и решение $\psi=0$ может быть интерпретировано как вакуумное состояние. Возможность построения линейной комбинации решений (6.19) которая была бы неотрицательной во всем пространстве-времени, представляется проблематичной, хотя это возможно осуществить внутри малых областей Ω_{v} пространства-времени. На границе области Ω_{v} решение ψ становится отрицательным, и κ становится комплексным. Это соответствует $j^k\neq 0$, т.е. появлению сэмлонов (частиц и античастиц). Для решений e^κ, являющихся линейными комбинациями решений (6.19), $T^{00}\geq 0$, и эти решения могут быть интерпретированы как возбужденные состояния вакуума внутри области Ω_{v}. На границах областей Ω_{v} появляются пары сэмлонов. Эти пары, вообще говоря, виртуальны в том смысле, что для каждого из сэмлонов $p_ip^i\neq m^2c^2$.

Другой случай, когда имеется только один флюид, описывается вектором j^k, и $j^l_{\mathrm{st}}=0$ соответствует случаю описания статистического ансамбля классических (детерминированных) релятивистских частиц.

7 Интерпретация κ-поля в динамической системе Клейна-Гордона

Рассмотрим решения свободного уравнения Клейна-Гордона ($A_k=0,\quad k=0,1,2,3$). В этом разделе для простоты расчетов положим $\hbar=c=1$. Общее решение свободного уравнения Клейна-Гордона имеет вид

$$\psi(t,\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int e^{-i\varepsilon_k E(\mathbf{k})t+i\mathbf{kx}}\frac{a(K)}{\sqrt{2E(\mathbf{k})}}dK, \tag{7.1}$$

$$K = \{\varepsilon_k,\mathbf{k}\}, \qquad E(\mathbf{k}) = \left|\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}\right|, \qquad \mathbf{kx}\equiv -k_\alpha x^\alpha \equiv k_\alpha x_\alpha \tag{7.2}$$

где $a(K)$ есть функция от $K=\{\varepsilon_k,\mathbf{k}\}$, $\mathbf{k}=\{k_1,k_2,k_3\}$, $\varepsilon_k=\pm1$ и

$$\int(.)\,dK \equiv \sum_{\varepsilon_k=\pm1}\int(.)\,d\mathbf{k} \equiv \sum_{\varepsilon_k=\pm1}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}(.)\,dk_1dk_2dk_3 \tag{7.3}$$

Положим

$$a_P(K) = a_{\varepsilon_p,\mathbf{p}}(K) = A\sqrt{2E(\mathbf{k})}\exp\left(-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{2\Delta}\right)\delta_{\varepsilon_k,\varepsilon_p}, \qquad A=\mathrm{const} \tag{7.4}$$

Величины $P=\{\varepsilon_p,\mathbf{p}\}$ и Δ суть параметры решения. Мы полагаем

$$\sqrt{\Delta}\ll\lambda^{-1}=m, \qquad \hbar=c=1 \tag{7.5}$$

При выполнении условия (7.5) получаем следующее приближенное выражение для волновой функции

$$\psi_P(t,\mathbf{x}) = \frac{B\Delta^{3/2}}{\left(1+i\varepsilon_k\Delta t\left(\frac{3}{2E}+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right)}\exp\left(-\frac{\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)^2}{2}-i\varepsilon_pE(\mathbf{p})\,t+i\mathbf{px}\right)$$

где

$$\mathbf{v}=\frac{\varepsilon_p\mathbf{p}}{E(\mathbf{p})}, \qquad B=B^*=\mathrm{const} \tag{7.6}$$

При $|t|\ll E/\Delta$ мы будем использовать более простое выражение для волновой функции

$$\psi_P(t,\mathbf{x}) = B\Delta^{3/2}\exp\left(-\frac{\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)^2}{2}-i\varepsilon_pE(\mathbf{p})\,t+i\mathbf{px}\right) \tag{7.7}$$

В области $|\mathbf{x}-\mathbf{v}t|<\Delta^{-1/2}$ пространства-времени мы получаем следующие значения для величин j^k, κ^k, T^0_k

$$\begin{array}{lll}
j^0=(\varepsilon_pE(\mathbf{p})+O(\Delta))\,\rho & \kappa^0=\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)\,\mathbf{v} & T^0_0=(E^2(\mathbf{p})+O(\Delta))\,\rho \\
j^\alpha=(p_\alpha+O(\Delta))\,\rho & \kappa^\alpha=\Delta(x^\alpha-v^\alpha t) & T^0_\alpha=(\varepsilon_pE(\mathbf{p})\,p_a+O(\Delta))\,\rho \\
\rho=\psi_P^*\psi_P & m^2_{\mathrm{eff}}=m^2+O(\Delta) & T^\beta_\alpha=\left(p_\alpha p^\beta+O(\Delta)\right)\rho
\end{array} \tag{7.8}$$

где

$$\psi_P^*\psi_P=\rho_0e^{2\kappa}=B^2\Delta^3\exp\left(-\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)^2\right) \tag{7.9}$$

С гидродинамической точки зрения интерпретация выглядит следующим образом. Мы полагаем, что состояние $P = \{1, \mathbf{p}\}$ с $\varepsilon_p = 1$ соответствует частице, а состояние $P = \{-1, \mathbf{p}\}$ с $\varepsilon_p = -1$ соответствует античастице, потому что, как это следует из (7.8), плотность флюида j^0 имеет различный знак в этих двух состояниях. Полное число сэмлонов есть

$$N_P = \varepsilon_p E(\mathbf{p}) I, \qquad I = \int \psi_P^* \psi_P d\mathbf{x} = B^2 (\pi\Delta)^{3/2} \tag{7.10}$$

Вектор полного энергии-импульса

$$P_k = \left\{ E^2(\mathbf{p}) I, E(\mathbf{p}) \mathbf{p} I \right\} \tag{7.11}$$

не зависит от ориентации ε_p, тогда как энергия на сэмлон

$$\frac{P_0}{N_P} = \frac{E_P}{N_P} = \varepsilon_p E(\mathbf{p}) \tag{7.12}$$

зависит от ε_p. Она отрицательна для $\varepsilon_p = -1$, потому что число N_P сэмлонов отрицательно. Таким образом, состояние ψ_P описывает флюид, состоящий из облака из N_P сэмлонов, движущихся со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E(\mathbf{p}) + O(\Delta)$. Давление во флюиде мало (порядка $O(\Delta)$), и можно говорить о свободно движущихся сэмлонах (частицах или античастицах).

С точки зрения принципов квантовой механики состояние $\psi_{\{1,\mathbf{p}\}}$ (для частиц) интерпретируется аналогично. Но для интерпретации состояния $\psi_{\{-1,\mathbf{p}\}}$ (для античастиц) возникают проблемы [31], связанные с отрицательным значением величины E_P/N_P (энергия на сэмлон).

Рассмотрим теперь состояние $\psi = \psi_{\{1,\mathbf{p}\}} + \psi_{\{1,-\mathbf{p}\}}$. В традиционной квантовой механике волновая функция есть фундаментальный объект теории. Волновые функции $\psi_{\{1,\mathbf{p}\}}$ и $\psi_{\{1,-\mathbf{p}\}}$ эволюционируют независимо, и этот факт интерпретируется в том смысле, что частицы, описываемые волновой функцией $\psi_{\{1,\mathbf{p}\}}$, и частицы, описываемые волновой функцией $\psi_{\{1,-\mathbf{p}\}}$, не взаимодействуют. Таким образом, с точки зрения принципов квантовой механики состояние ψ описывает два облака частиц, движущихся со скоростями $\mathbf{v}$ и $-\mathbf{v}$ одно сквозь другое без взаимодействия.

С гидродинамической точки зрения состояние $\psi = \psi_{\{1,\mathbf{p}\}} + \psi_{\{1,-\mathbf{p}\}}$ описывает довольно сложную картину столкновения двух облаков частиц. В соответствии с гидродинамической интерпретацией мировые линии частиц в двумерном пространстве-времени определяются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{j^1(t,x)}{j^0(t,x)} = \frac{(p \sinh(2\Delta xvt)) - \Delta vt (\sin(2px))}{E(\cosh(2\Delta xvt) + \cos(2px)) + \Delta xv (\sin(2px))} + O\left(\Delta^2\right) \tag{7.13}$$

Форма мировых линий, полученных численным расчетом для области $-2/\sqrt{\Delta} < t < 2/\sqrt{\Delta}$ показана на фиг. 1. Можно видеть, что после столкновения частицы облаков отражаются и движутся в противоположных направлениях. Эта ситуация коррелирует со значениями тензора энергии-импульса и других гидродинамических величин, рассчитанных для пространственно-временно́й области

$x^2, t^2 \leq \Delta^{-1}$, где два облака перекрываются. Эти величины подсчитаны с точностью до Δ^0

$$\begin{array}{lll} j^0 = 2CE(p)\cos^2(px) & \kappa_0 = 0 & T^{00} = 2CE^2(p)\cos^2(px) \\ j_1 = 0 & \kappa_1 = -p\tan(px) & T^{01} = 0 \\ \rho = 2C\cos^2(px) & m_{\text{eff}}^2 = E^2(p) & T^{11} = 2Cp^2\sin^2(px) \end{array} \tag{7.14}$$

где

$$C = B^2 \exp\left(-\Delta\left(x^2 + v^2t^2\right)\right) \tag{7.15}$$

Составляющая тензора энергии-импульса $T^{00} = j^0 j^0/\rho$ определяется 4-вектором j^k, тогда как давление во флюиде определяется компонентом $T^{11} = \rho\kappa^1\kappa^1$.

Если частицы двух облаков не взаимодействуют, тензор энергии-импульса представляет собой сумму тензоров энергии-импульса для каждого облака поотдельности. Он имеет вид

$$T^{00} = 2CE^2(p), \qquad T^{01} = 0, \qquad T^{11} = 2Cp^2 \tag{7.16}$$

и это выражение отличается от (7.14)

Рассмотрим состояние $\psi = \psi_{\{\varepsilon_p, \mathbf{p}\}} + \psi_{\{-\varepsilon_p, \mathbf{p}\}}$. С точки зрения принципов квантовой механики состояние ψ описывает облако частиц и облако античастиц, движущихся со скоростями $\mathbf{v}$ и $-\mathbf{v}$ одно сквозь другое без взаимодействия.

С точки зрения гидродинамической интерпретации состояние $\psi_{\{1,\mathbf{p}\}}+\psi_{\{-1,\mathbf{p}\}}$ описывает сложную картину взаимодействия частиц и античастиц. В процессе взаимодействия происходит рождение и аннигиляция пар. Процесс взаимодействия сбалансирован таким образом, что в конце мы видим разлетающиеся облака частиц и античастиц. Они разлетаются так, как если бы они прошли одно сквозь другое без взаимодействия.

В двумерном пространстве-времени средние мировые линии описываются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{j^1}{j^0} = \frac{p\cosh(2\Delta xvt) + p\cos(2Et) - \Delta vt\sin(2Et)}{E\sinh(2\Delta xvt) + \Delta xv\sin(2Et)}$$

Форма мировых линий, полученная с помощью численного расчета для $-2/\sqrt{\Delta} < x < 2/\sqrt{\Delta}$ представлена на фиг. 2. В состоянии $\psi_{\{1,\mathbf{p}\}} + \psi_{\{-1,\mathbf{p}\}}$ сталкивающиеся частицы и античастицы аннигилируют, и их энергия переходит в энергию κ-поля. После этого κ-поле порождает пары сэмлонов и энергия κ-поля превращается в энергию разлетающихся частиц и античастиц. Расположение пространственно-временны́х областей, где эффективная масса m_{eff} мнима, показано на фиг. 3.

Описанное взаимодействие частиц и античастиц коррелирует со значением тензора энергии-импульса и других гидродинамических величин, подсчитанных в пространственно-временной области $x^2, t^2 \leq \Delta^{-1}$, где облака перекрываются. Эти величины, подсчитанные с точностью Δ^0, приведены ниже

$$\begin{array}{lll} j_0 = 0 & \kappa_0 = -E\tan(Et) & T^{00} = 2E^2C\sin^2(Et) \\ j_1 = -2pC\cos^2(Et) & \kappa_1 = 0 & T^{01} = 0 \\ \rho = 2C\cos^2(Et) & m_{\text{eff}}^2 = -p^2 & T^{11} = 2p^2C\cos^2(Et) \end{array} \tag{7.17}$$

где C определяется соотношением (7.15).

Наше исследование решений свободного уравнения Клейна-Гордона является предварительным рассмотрением, которое необходимо для правильной математической формулировки проблемы столкновения и проблемы рождения пар как частного случая проблемы столкновений. Две различные интерпретации состояний $\psi_{\{\varepsilon_p,\mathbf{p}\}} + \psi_{\{\varepsilon_p,-\mathbf{p}\}}$ и $\psi_{\{1,\mathbf{p}\}} + \psi_{\{-1,-\mathbf{p}\}}$ порождают две различные постановки проблемы столкновений. Традиционная интерпретация, основанная на волновой функции как основном объекте динамики приводит к теории S-матрицы, где невозможно детальное описание процессов внутри области столкновения. Альтернативный подход, основанный на рассмотрении динамики флюида и гидродинамических величин, ведет к другой постановке проблемы столкновений. Сравнение этих двух различных постановок проблемы столкновений возможно только после детальной разработки альтернативной постановки проблемы столкновений. К сожалению, такая постановка не может быть изложена в настоящей работе.

Мы ограничимся рассмотрением проблемы столкновения двух упругих шаров, которая до некоторой степени напоминает проблему столкновения микрочастиц. При лобовом столкновении двух одинаковых упругих шаров они обмениваются своими импульсами, и в целом ситуация может быть описана как прохождение одного шара сквозь другой без взаимодействия. Это очень простая интерпретация, но она не эффективна, потому что она не может быть использована для интерпретации не-лобовых столкновений. Если параметр удара не обращается в нуль или шары не одинаковы, мы вынуждены вводить взаимодействие между шарами. Если мы считаем, что одинаковые шары не взаимодействуют при лобовом столкновении, то трудно понять, почему они начинают взаимодействовать при не-нулевом параметре удара. Нужно будет изобретать специальное взаимодействие для объяснения не-лобовых столкновений. Возможно ли построить теорию столкновения двух шаров, основанную на предположении, что шары не взаимодействуют при лобовом столкновении? Да, это возможно, но такая теория основывается главным образом на законах сохранения энергии-импульса, и она не годится для объяснения неупругих столкновений, где необходимо детальное исследование взаимодействия между шарами.

Подход, когда лобовое столкновение одинаковых упругих шаров рассматривается как сильное взаимодействие двух шаров, которое приводит к обмену импульсами, кажется более естественным, потому что он непринужденно объясняет, почему результат столкновения не сводится к обмену импульсами при не-нулевом параметре удара. При таком подходе обмен импульсами при лобовом столкновении объясняется сбалансированным взаимодействием. Если столкновение не-лобовое, то баланс нарушается. Хотя объяснение сбалансированности взаимодействия более сложно, но применение этого взаимодействия к случаю несбалансированного взаимодействия оказывается более простым. Что-то вроде этого мы имеем в случае двух альтернативных подходов к проблеме столкновения микрочастиц.

8 Заключительные замечания

Таким образом, квантовая система есть частный случай стохастической системы, и квантовые явления могут рассматриваться как результат некоторой квантовой стохастичности, порожденной свойствами пространства-времени [1]. Рождение пар есть естественный результат последовательного релятивистского описания этой стохастичности. Статистическое описание квантовых явлений порождает гидродинамическую интерпретацию квантовых явлений, которая не совпадает, вообще говоря, с интерпретацией, основанной на применении принципов квантовой механики, и интерпретация оказывается существенной для постановки задачи о столкновении микрочастиц.

Список литературы

[1] Yu.A. Rylov, "Non-Riemannian model of space-time, responsible for quantum effects" . *J.Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[2] Yu. A. Rylov, "Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them". (In preparation, available at http:// arXiv.org /abs/physics /0210003).

[3] Rylov Yu.A. "Spin and wave function as attributes of ideal fluid". *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).

[4] E. Madelung, *Z.Phys.* **40** (1926) 322.

[5] L. de Broglie, *Comptes Rendus* **183**, 447 (1926).

[6] D. Bohm, *Phys.Rev.* **85,** 166, 180, (1952).

[7] T. Takabayasi, *Progr. Theor. Phys.*, **8**, 143, (1952).

[8] T. Takabayasi, *Progr. Theor. Phys.*, **9**, 187, (1953).

[9] L. Janosssy and M.Ziegler, *Acta Phys. Hung.*, **16**, 37, (1963).

[10] L. Janosssy and M.Ziegler, *Acta Phys. Hung.*, **16**, 345, (1964).

[11] M. Husar and M. Ziegler-Naray, *Acta Phys. Acad. Scien. Hung.*, **26**, 223, (1969).

[12] F.J. Belinfante, *A Survey of Hidden-Variables Theories*, (Pergamon, Oxford, 1973) and references therein.

[13] D. Bohm and B.J. Hiley, *Phys. Rep.* **172** (1989) 93 and references therein.

[14] P. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993) and references therein.

[15] Yu.A. Rylov, "The equation for isentropic motion of inviscid fluid in terms of wave function" *J. Math. Phys.* **30**, 2516-2520, (1989).

[16] Rylov Yu.A. "Pauli's electron as a dynamic system" *Found. Phys.* **25**, No.7, 1055-1086, (1995).

[17] Rylov Yu.A. "Dirac equation in terms of hydrodynamic variables" , *Advances Appl. Clifford Algebras.* **5**, No. 1, 1-40, (1995).

[18] C.C. Lin, *Proc. International School of Physics "Enrico Fermi".* Course XXI, Liquid Helium , New York, Academic. 1963, pp. 93-146.

[19] A. Clebsch, *J. reine angew. Math.* **54** , 293, (1857).

[20] A. Clebsch, *J. reine angew. Math.* **56** , 1, (1859).

[21] Rylov Yu.A. "Integration of complete system of dynamic equations for ideal fluid". (In preparation, available at http://arXiv.org/abs/*physics/9905044).*

[22] Rylov Yu. A. "Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them". (In preparation, available at http:// arXiv.org/abs */physics/0210003).*

[23] Rylov Yu.A. "Hamilton variational principle for statistical ensemble of deterministic systems and its application for ensemble of stochastic systems." *RJMP*, **9**, iss. 3, 335-348, (2002).

[24] Rylov Yu.A. "Quantum mechanics as a dynamic construction". *Found. Phys.* **28**, No.2, 245-271, (1998).

[25] Rylov Yu.A., "Statistical conception of quantum field theory". *J. Math. Phys.* **35**, 3922-3935, (1994).

[26] Rylov Yu.A. Pair production problem and canonical quantization of nonlinear scalar field in terms of world lines." (In preparation, available at http://arXiv.org/abs */hep-th /0106169).*

[27] J. Glimm and A. Jaffe, *Phys. Rev.* **176** (1968) 1945.

[28] J. Glimm and A. Jaffe, *Ann. Math.* **91** (1970) 362.

[29] J. Glimm and A. Jaffe, *Acta Math.* **125** (1970) 203.

[30] J. Glimm and A. Jaffe, *J. Math. Phys.* **13** (1972) 1568.

[31] Feshbach H., Villars F., Rev. Mod. Phys. **30**, 24, (1958). (1958).