Динамическая расквантизация уравнения Дирака

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, 117526, Москва, пр. Вернадского 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/˜rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site: *http://194.190.131.172/˜rylov/yrylov.htm*

Ключевые слова: квантование, расквантизация, уравнение Дирака, релятивистский ротатор

Аннотация

Строится классическая модель $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ дираковской частицы, т.е. динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемой уравнением Дирака. Классический аналог $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих квантовую постоянную $\hbar$ в качестве параметра. Динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ однозначно определяются уравнением Дирака. Обе динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ оказываются нерелятивистскими. Удается модифицировать нерелятивистскую динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ в релятивистскую $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$. Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$ оказывается двухточечной структурой (частный случай релятивистского ротатора). Это непринужденно объясняет такие странные для точечной структуры свойства системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ как спин и магнитный момент. Для $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$ вычислена функция жесткости $f_{\mathrm{r}}(a)$, описывающая обусловленную вращением часть полной массы, как функцию радиуса ротатора a. Для исследования $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ и построения $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ использовались новые динамические методы: динамическая квантизация и динамическая расквантизация. Эти релятивистские чисто динамические процедуры не используют принципов квантовой механики (КМ). Они обобщают и заменяют традиционное квантование и переход к классическому приближению. Совокупность этих методов образует модельную концепцию квантовых явлений (МККЯ). Методы МККЯ более тонки и эффективны, чем традиционные методы КМ. МККЯ относится к КМ примерно так же, как статистическая физика относится к термодинамике.

1 Введение

В этом исследовании мы пытаемся ответить на вопрос, имеет ли дираковская частица структуру, или это просто точечная частица, имеющая такие необычные для точечной частицы свойства как спин и магнитный момент. Чтобы ответить на этот вопрос, используется процедура динамической расквантизации (D-расквантизация), которая является более тонкой, чем традиционная процедура перехода к классическому приближению. Динамическая расквантизация (D-расквантизация) динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемой уравнением Дирака приводит к классическому релятивистскому ротатору $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$, состоящему из двух связанных заряженных частиц, вращающихся вокруг их центра масс. Примененное к $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, более грубое классическое приближение приводит к точечной классической частице, обладающей спином и магнитным моментом. Характеристикой любого ротатора является функция жесткости f_{r}, которая определяется следующим образом. Пусть $E_{\mathrm{tot}}(a)$ есть полная энергия покоя ротатора как функция его радиуса a. Функция жесткости f_{r} связывает относительную вращательную энергию $\gamma = E_{\mathrm{rot}}/E_{\mathrm{tot}}(0)$ с радиусом a ротатора соотношением

$$\gamma = f_{\mathrm{r}}(a)\,. \tag{1.1}$$

Для нерелятивистского ротатора $\mathcal{S}_{\mathrm{nr}}$ функция жесткости f_{r} связана с потенциальной энергией $U(a)$ связи (струны, соединяющей частицы) с помощью соотношения

$$f_{\mathrm{r}}(a) = \frac{a}{m_0 c^2}\frac{\partial U(a)}{\partial a},$$

где m_0 есть масса частицы ротатора. Потенциальная энергия связи U не может быть введена для релятивистского ротатора, но функция жесткости f_{r} связи релятивистского ротатора может быть введена в любом случае.

Функция жесткости для ротатора $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$, который является классическим аналогом дираковской динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, оказывается имеет вид

$$\gamma = f_{\mathrm{r}}(a) = \frac{\hbar}{\sqrt{\hbar^2 - (4am_0c)^2}} - 1 \tag{1.2}$$

Как можно видеть из (1.2) $\hbar > 4am_0c$, и можно положить $\hbar \to 0$ только в том случае, когда одновременно $a \to 0$. Магнитный момент и спин являются естественными свойствами любого заряженного релятивистского ротатора.

Традиционная расквантизация (классическое приближение) уравнения Дирака не могут дать результат (1.2), потому что в конечном результате всегда полагается $\hbar = 0$. Получается только точечная заряженная частица с магнитным моментом и спином. Вообще, считается, что классический аналог, получаемый как классическое приближение квантовой системы, не может содержать квантовую постоянную $\hbar$ в динамических уравнениях.

Более полная информация о классической природе квантовых систем получается потому, что используется модельная концепция квантовых явлений

(МККЯ), которая относится к традиционной (аксиоматической) квантовой механике примерно так же, как статистическая физика (модельная концепция тепловых явлений) относится к аксиоматической термодинамике. Игнорирование внутренних степеней свободы системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ оправдано, когда рассчитываются атомные структуры. В этом случае энергия взаимодействия мала, внутренние степени свободы не возбуждаются, и их существованием можно пренебречь. Если же исследуется структура элементарных частиц, где энергии взаимодействия очень велики, следует использовать модельную концепцию квантовых явлений (МККЯ), которая способна учесть детали внутренней структуры. Исследование элементарных частиц с помощью традиционных методов квантовой теории напоминает, ситуацию, когда ничего не зная о молекулярном строении вещества, пытаются исследовать структуру кристалла методами аксиоматической термодинамики.

Традиционная расквантизация (Q-расквантизация) квантовой динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ приводит к получению классического аналога $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ квантовой системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$. Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ обладает двумя свойствами:
(1) Динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений.
(2) Динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ не содержат квантовой постоянной $\hbar$.

Принято считать, что эти два свойства тесно связаны и не существует такой динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$, динамические уравнения которой были бы обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими квантовую постоянную $\hbar$ в качестве параметра. Модельная концепция квантовых явлений (МККЯ) разделяет эти два свойства системы $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$. В рамках МККЯ существуют такие классические модели $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ квантовых систем $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$, что динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих $\hbar$ в качестве параметра. Разумеется, можно положить в этих моделях $\hbar = 0$ и получить более грубые модели, которые получаются в результате традиционной расквантизации (Q-расквантизации). Динамические модели МККЯ являются промежуточными между чисто квантовыми и чисто классическими моделями. Практически, модели МККЯ являются классическими моделями, содержащими параметр $\hbar$, и эти модели намного точнее, чем традиционные классические модели.

Заметим, что динамическая расквантизация (D-расквантизация) есть просто *метод исследования* динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, когда сложной динамической системе $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемой системой уравнений в частных производных, ставится в соответствие более простая динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть, например, $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ есть динамическая система, описываемая уравнением Клейна-Гордона. Традиционный классический аналог $\mathcal{S}_{\mathrm{KGc}}$ системы $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ есть бесспиновая релятивистская частица. В рамках МККЯ классический аналог $\mathcal{S}_{\mathrm{KGqu}}$ системы $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ есть релятивистская частица, (описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями) в некотором силовом поле κ, порожденном этой частицей [1]. Поле κ описывает облако пар вокруг частицы.

Взаимодействие между частицей и полем κ содержит параметр $\hbar$. Это взаимодействие исчезает, если положить $\hbar = 0$.

Традиционная квантовая теория утверждает, что классическая релятивистская частица не может рождать пары, а квантовая – может. Почему? Никто не знает. МККЯ утверждает, что источником рождения пар является особое силовое поле, и квантование само по себе не имеет отношения к рождению пар.

МККЯ использует специальные процедуры: динамическую квантизацию (D-квантизацию) и динамическую расквантизацию (D-расквантизацию), которые являются динамическим обобщением традиционных квантовых процедур: квантования (Q-квантования) и получения классического приближения (Q-расквантования). Математической основой МККЯ являются три различных метода описания динамических систем, известных как статистические ансамбли.

Пусть $\mathcal{S}_{\rm c}$ есть классическая динамическая система, описываемая действием

$$\mathcal{S}_{\rm c}: \qquad \mathcal{A}_{\rm c}[\mathbf{x}] = \int L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\, dt \tag{1.3}$$

Здесь $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = L(x, \mathbf{v})$ есть ее лагранжиан и $\mathbf{x} = \{x^\alpha\}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \left\{\frac{dx^\alpha}{dt}\right\}$, $\alpha = 1, 2, ...n$. Статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm c}]$, состоящий из систем $\mathcal{S}_{\rm c}$, описывается действием

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm c}]: \qquad \mathcal{A}_{\rm E}[\mathbf{x}] = \int \mathcal{A}_{\rm c}[\mathbf{x}]\, d\boldsymbol{\tau} = \int L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\, dt d\boldsymbol{\tau} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\tau})$ рассматриваются как функции лагранжевых координат $\tau = \{t, \boldsymbol{\tau}\}$, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, ...n$, которые маркируют элементы (динамические системы $\mathcal{S}_{\rm c}$) статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm c}]$. Эта маркировка произвольна, и действие (1.4) инвариантно относительно преобразования

$$\tau_\alpha \to \tilde{\tau}_\alpha = \tilde{\tau}_\alpha(\boldsymbol{\tau}), \qquad \alpha = 1, 2, ...n, \qquad \frac{\partial(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, ...\tilde{\tau}_n,)}{\partial(\tau_1, \tau_2, ...\tau_n,)} = 1 \tag{1.5}$$

Этот метод описания мы будем называть L-описанием, или L-представлением, потому что он использует в качестве независимых переменных лагранжевы координаты $\boldsymbol{\tau}$.

Статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm c}]$, рассматриваемый как динамическая система, есть разновидность жидкости без давления. Действие (1.4) может быть переписано в пространстве переменных $x^i = \{t, \mathbf{x}\} = \{x^0, \mathbf{x}\}$ в терминах гидродинамических переменных: n-вектора потока $j^i = \{\rho, \mathbf{j}\} = \{\rho, \rho\mathbf{v}\}$ и гидродинамических потенциалов (потенциалов Клебша [2, 3]) $\tau = \{\varphi, \boldsymbol{\tau}\}$. Действие (1.4) преобразуется к виду

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm c}]: \qquad \mathcal{A}_{\rm E}[\rho, \mathbf{v}, \varphi, \boldsymbol{\tau}] = \int \rho\{L(x, \mathbf{v}) - \mathbf{v}\mathbf{p} - p_0\} \mathrm{d}^{n+1}x, \tag{1.6}$$

Здесь зависимые переменные $\rho, \mathbf{v}, \varphi, \boldsymbol{\tau}$ рассматриваются как функции независимых пременных x. Величины $p_k = \{p_0, \mathbf{p}\} = \{p_k\}$, $k = 0, 1, ...n$ определяются соотношениями

$$p_k = b_0 \left(\partial_k \varphi + g^\alpha \left(\boldsymbol{\tau}\right) \partial_k \tau_\alpha\right), \qquad k = 0, 1, ...n \tag{1.7}$$

где $g^a \left(\boldsymbol{\tau}\right)$, $\alpha = 1, 2, ...n$ суть произвольные функции только аргумента $\boldsymbol{\tau}$, и b_0 – произвольная постоянная. Действие (1.6) получается из действия (1.4) с помощью замены переменных. Теперь независмыми переменными являются x, а переменные $\boldsymbol{\tau}$ суть зависимые переменные. Кроме того введены обозначения

$$j^i = \{\rho, \rho\mathbf{v}\} = \frac{\partial(x^i, \tau_1, ...\tau_n)}{\partial(x^0, x^1, ...x^n)}, \qquad i = 0, 1, ...n \tag{1.8}$$

Замена переменных сопровождается интегрированием некоторых динамических уравнений. Произвольные функции $g^a \left(\boldsymbol{\tau}\right)$, $\alpha = 1, 2, ...n$ и произвольная постоянная b_0 являются результатом этого интегрирования. Интегрирование оказывается возможным, потому что динамическая система $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{c}}\right]$ имеет группу симметрии (1.5), содержащую n произвольных функций. Мы не будем входить в детали этой замены переменных, которая оказывается довольно сложной. Подробности этой операции можно найти в работе [4]. Этот метод, использующий лагранжевы координаты $\boldsymbol{\tau}$ в качестве гидродинамических потенциалов, мы будем называть HDP-описанием, или HDP-представлением.

Действие (1.6) может описываться также в терминах ψ-функции (волновой функции). Введем k-компонентную комплексную функцию $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots k$, определяемую соотношениями

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho} e^{i\varphi} u_\alpha(\boldsymbol{\tau}), \qquad \psi^*_\alpha = \sqrt{\rho} e^{-i\varphi} u^*_\alpha(\boldsymbol{\tau}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots k \tag{1.9}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{k} \psi^*_\alpha \psi_\alpha \tag{1.10}$$

где (*) означает комплексное сопряжение, $u_\alpha(\boldsymbol{\tau})$, $\alpha = 1, 2, \ldots k$ суть функции только переменных $\boldsymbol{\tau}$. Они удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^{k} (u^*_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \tau_\beta} - \frac{\partial u^*_\alpha}{\partial \tau_\beta} u_\alpha) = g^\beta(\boldsymbol{\tau}), \qquad \beta = 1, 2, ...n, \qquad \sum_{\alpha=1}^{k} u^*_\alpha u_\alpha = 1 \tag{1.11}$$

k есть такое натуральное число, что уравнения (1.11) допускают решение. Вообще говоря, минимально возможное значение k зависит от вида произвольных функций интегрирования $\mathbf{g} = \{g^\beta(\boldsymbol{\tau})\}$, $\beta = 1, 2, ...n$. После замены переменных действие (1.6) принимает вид

$$\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{c}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{E}}[\psi, \psi^*] = \int \rho\{L(x, \mathbf{V}) - \mathbf{VP} - P_0\} \mathrm{d}^{n+1} x, \tag{1.12}$$

где

$$\rho = \psi^* \psi, \qquad P_l = P_l(\psi, \psi^*) = -\frac{ib_0}{2\psi^*\psi}(\psi^* \partial_l \psi - \partial_l \psi^* \cdot \psi), \qquad l = 0, 1, ...n \quad (1.13)$$

и $\mathbf{V} = \{V^\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2, ...n$ есть некоторая функция от $\mathbf{P}$ and x, определяемая уравнениями

$$\frac{\partial L(x, \mathbf{V})}{\partial V^\beta} - P_\beta = 0, \qquad \beta = 1, 2, ...n \quad (1.14)$$

Если динамическая система $\mathcal{S}_\mathrm{c}$ имеет функцию Гамильтона

$$H(x, \mathbf{p}) = \mathbf{pv} - \mathbf{L}(x, \mathbf{v}) \quad (1.15)$$

то действие (1.12) может быть записано в виде

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{c}]: \qquad \mathcal{A}_\mathrm{E}[\psi, \psi^*] = \int \rho\{-H(x, \mathbf{P}) - P_0\} \mathrm{d}^{n+1}x, \quad (1.16)$$

где P_k и ρ определяются соотношениями (1.13). Этот метод [4], описывающий динамическую систему $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{c}]$ в терминах волновой функции, мы будем называть WF-описанием, или WF-представлением.

Эти три различных метода описания и различные действия (1.4), (1.6), (1.16) могут быть использованы также для описания динамической системы $\mathcal{S}[\mathcal{S}_\mathrm{c}]$, которая представляет собой множество взаимодействующих классических динамических систем $\mathcal{S}_\mathrm{c}$. В этом случае действия (1.4), (1.6), (1.16) содержат дополнительный член $\mathcal{A}_\mathrm{int}$, описывающий взаимодействие динамических систем $\mathcal{S}_\mathrm{c}$.

Применение трех различных методов описания одной и той же динамической системы полезно в том отношении, что оно позволяет отделить свойства динамической системы от свойств метода описания. Это очень важно для исследования свойств динамической системы. Все свойства, общие для всех трех методов описания относятся к свойствам самой динамической системы. Если используется только один из методов описания, например, WF-описание, то довольно трудно различить, что является свойством волновой функции, а что является свойством исследуемой динамической системы. Например, принято думать, что волновая функция есть атрибут любой квантовой динамической системы и что волновая функция есть фундаментальный объект, связанный с квантовыми системами, тогда как волновая функция есть всего лишь способ описания, который с равным правом может быть применен для описания любой динамической системы (квантовой или классической). Использование трех различных методов описания полезно также в том отношении, что L-описание лучше пригодно для интерпретации. HDP-описание больше других пригодно для реализации D-расквантизации и получения классического аналога. WF-описание больше других пригодно для решения динамических уравнений, потому что они иногда оказываются линейными в WF-представлении.

Перечислим свойства этих трех различных описаний применительно к статистическому ансамблю $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$.

Во-первых, эти три представления действий (1.4), (1.6) и (1.12) для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$ содержат производные только в одном направлении. Действие (1.4) содержит только производные по t, действие (1.6) содержит производные только в направлении n-вектора потока $j^{i}=\{\rho,\rho\mathbf{v}\}$.

$$-\rho\left(\mathbf{vp}+p_{0}\right)=b_{0}j^{k}\left(\partial_{k}\varphi+g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\tau}\right)\right)\partial_{k}\tau_{\alpha} \tag{1.17}$$

В действии (1.16) это тоже имеет место, но это не очевидно, потому что оно не содержит явно переменных j^{i}.

Во-вторых, состояние ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$ определяется только с точностью до преобразования (1.5). Мощность группы перемаркировки очень большая, и неопределенность описания велика. Это в особенности справедливо для волновой функции ψ, смысл которой очень неясен. Неопределенность волновой функции ψ больше, чем неопределенность гидродинамических потенциалов $\boldsymbol{\tau}$, потому что произвольные функции g^{α} "спрятаны" внутри волновой функции ψ. Чтобы упростить WF-описание, можно наложить ограничения на выбор волновой функции. Традиционно требуют, чтобы волновая функция удовлетворяла линейным динамическим уравнениям. Остается неясным, всегда ли можно наложить такое ограничение, но во многих физически интересных случаях это оказывается возможным. Такое ограничение упрощает работу с волновыми функциями. Однако, смысл волновой функции остается неясным. Для работы с волновыми функциями, рассматриваемыми как фундаментальные объекты, была разработана система правил (принципы квантовой механики).

В третьих, свойства статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$ не зависят от числа элементов $\mathcal{S}_{\rm c}$ в $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$. Действия (1.6), (1.12) имеют соответственно следующие свойства

$$\mathcal{A}_{\rm E}[\alpha\rho,\mathbf{v},\varphi,\boldsymbol{\tau}]=\alpha\mathcal{A}_{\rm E}[\rho,\mathbf{v},\varphi,\boldsymbol{\tau}],\qquad\mathcal{A}_{\rm E}[\sqrt{\alpha}\psi,\sqrt{\alpha}\psi^{*}]=\alpha\mathcal{A}_{\rm E}[\psi,\psi^{*}] \tag{1.18}$$

где α – произвольная положительная постоянная.

Динамическая квантизация (D-квантизация) есть добавление члена $\mathcal{A}_{\rm int}$ к действию $\mathcal{A}_{\rm E}$ для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$. Член $\mathcal{A}_{\rm int}$ содержит поперечные производные $\partial_{\perp}^{l}$, определенные соотношениями

$$\partial_{||}^{k}\equiv\frac{j^{k}j^{s}}{\rho^{2}}\partial_{s},\qquad\partial_{\perp}^{k}\equiv\partial^{k}-\frac{j^{k}j^{s}}{\rho^{2}}\partial_{s},\qquad\partial^{k}=\partial_{\perp}^{k}+\partial_{||}^{k},\qquad\rho^{2}\equiv j^{s}j_{s} \tag{1.19}$$

Поперечные производные $\partial_{\perp}^{l}$ описывают взаимодействие между элементами $\mathcal{S}_{\rm c}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$. Динамические уравнения для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$ перестают быть обыкновенными дифференциальными уравнениями и образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных. В результате D-квантизации статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$ превращается в приведенный ансамбль $\mathcal{E}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]\equiv\mathcal{S}_{\rm q}\left[\mathcal{S}_{\rm c}\right]$, который описывает множество одинаковых взаимодействующих динамических систем $\mathcal{S}_{\rm c}$. С формальной точки зрения D-квантизация есть очень общая динамическая процедура, которая не содержит традиционных атрибутов квантования, таких как линейные дифференциальные уравнения, квантовая постоянная $\hbar$, линейные операторы и т.п. Тем не менее при некоторых условиях D-квантизация приводит к тому же результату, что и традиционное Q-квантование.

Динамическая система $\mathcal{E}_{\text{red}}[\mathcal{S}_{\text{c}}] \equiv \mathcal{S}_{\text{q}}[\mathcal{S}_{\text{c}}]$ остается статистическим ансамблем, потому что она продолжает удовлетворять условиям (1.18). Динамическая система $\mathcal{S}_{\text{q}}[\mathcal{S}_{\text{c}}]$ может рассматриваться как набор из одинаковых невзаимодействующих стохастических систем $\mathcal{S}_{\text{st}}$, т.е. $\mathcal{S}_{\text{q}}[\mathcal{S}_{\text{c}}] \equiv \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$. Для отдельной системы $\mathcal{S}_{\text{st}}$ динамических уравнений не существует, но динамические уравнения существуют для статистического ансамбля $\mathcal{S}_{\text{q}}[\mathcal{S}_{\text{c}}] \equiv \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$, и исследуя $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$, мы изучаем стохастические системы $\mathcal{S}_{\text{st}}$. По существу, исследование динамических свойств статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$ есть единственный способ изучения стохастических систем $\mathcal{S}_{\text{st}}$. Изучая распределения различных физических величин и их временну́ю эволюцию в статистическом ансамбле $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$, мы можем делать на этой основе некоторые заключения о свойствах стохастической системы $\mathcal{S}_{\text{st}}$.

Продемонстрируем свойства D-квантизации на примере свободной классической частицы, описываемой лагранжианом L и функцией Гамильтона H, которые определяются посредством соотношений

$$L(x,\mathbf{v}) = -mc^2 + \frac{m\mathbf{v}^2}{2}, \qquad H(x,\mathbf{p}) = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \tag{1.20}$$

Предполагается, что член $\mathcal{A}_{\text{int}}$, описывающий взаимодействие, имеет вид

$$\mathcal{A}_{\text{int}}[\rho,\mathbf{v},\varphi,\boldsymbol{\tau}] = -\int \rho\frac{\mathbf{p}_{\text{st}}^2}{2m}\mathrm{d}^{n+1}x, \qquad \mathbf{p}_{\text{st}} = -\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho \tag{1.21}$$

Формально этот член совпадает с потенциальной энергией Бома [5]. Его интерпретация следующая. Движение свободных частиц предполагается стохастическим, и $\mathbf{p}_{\text{st}} = -\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho$ описывает средний импульс случайного движения, где ρ есть коллективная переменная

$$\rho = \frac{\partial(\tau_1,\tau_2,\tau_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}, \tag{1.22}$$

описывающая плотность элементов $\mathcal{S}_{\text{c}}$ в ансамбле $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{c}}]$. Чтобы учесть влияние стохастичности на регулярное движение, следует описываемую соотношением (1.21) энергию среднего стохастического движения добавить к действию (1.6). Рассмотрим для простоты случай, когда течение в $\mathcal{S}_{\text{q}}[\mathcal{S}_{\text{c}}]$ является потенциальным, и можно положить $g^\alpha = 0, \quad \alpha = 1,2,3$ [4]. В этом случае волновая функция ψ может иметь одну составляющую. Тогда действия (1.4), (1.6) и (1.12) для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{c}}]$ принимают соответственно вид

$$\mathcal{S}_{\text{q}}[\mathcal{S}_{\text{c}}]: \qquad \mathcal{A}_{\text{q}}[\mathbf{x},\mathbf{u}_{\text{st}}] = \int\left\{-mc^2 + \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{m\mathbf{u}_{\text{st}}^2}{2} - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\text{st}}\right\}dtd\boldsymbol{\tau} \tag{1.23}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\tau}\right)$ и $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}=\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\left(t,\mathbf{x}\right)$ есть новая переменная, описывающая случайную составляющую движения.

$$\mathcal{S}_{\mathrm{q}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{c}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{q}}[\rho,\varphi]=\int\rho\{-mc^2-\frac{b_0^2\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2}{2m}-\frac{\hbar^2}{8m}\left(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2-b_0\partial_0\varphi\}\mathrm{d}^4x, \quad (1.24)$$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{q}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{c}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{q}}[\psi,\psi^*]=\int\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi$$
$$-mc^2\rho+\frac{b_0^2-\hbar^2}{8\rho m}\left(\nabla\rho\right)^2\}\mathrm{d}^4x, \qquad \rho\equiv\psi^*\psi \qquad (1.25)$$

Взаимодействие между элементами $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ приведенного ансамбля $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{c}}\right]$ описывается в действиях (1.24), (1.25) с помощью членов при множителе $\hbar^2$. В действии (1.23) это взаимодействие описывается с помощью дополнительной зависимой переменной $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$, которая зависит от переменных $\{t,\mathbf{x}\}$, но не от $\{t,\boldsymbol{\tau}\}$, и варьируя действие по переменной $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$, следует использовать $\{t,\mathbf{x}\}$ как независимые переменные

$$\int(\frac{m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2}{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}})dtd\boldsymbol{\tau}\rightarrow\int(\frac{m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2}{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}})\rho dtd\mathbf{x}, \qquad \rho\equiv\frac{\partial\left(\tau_1,\tau_2,\tau_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}$$

Тогда вариация по $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ приводит к динамическому уравнению

$$m\rho\mathbf{u}_{\mathrm{st}}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho=0, \qquad \mathbf{u}_{\mathrm{st}}=-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho \qquad (1.26)$$

которое эквивалентно (1.21). Таким образом, член $m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2/2$ в (1.21) описывает энергию случайной составляющей движения, тогда как член $-\hbar\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}/2$ описывает взаимодействие случайной составляющей с регулярной.

Действие (1.25) WF-описания порождает, вообще говоря, нелинейное динамическое уравнение для ψ. Но если $b_0^2=\hbar^2$, то нелинейный член исчезает, и динамическое уравнение становится линейным. Постоянная b_0 произвольна, и ничто не мешает нам положить $b_0=\hbar$.

Положим $b_0=\hbar$. Действие (1.25) преобразуется в действие

$$\mathcal{A}_{\mathrm{q}}[\psi,\psi^*]=\int\{\frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi-mc^2\psi^*\psi\}\mathrm{d}^4x \qquad (1.27)$$

которое порождает линейное динамическое уравнение

$$i\hbar\partial_0\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi-mc^2\psi=0 \qquad (1.28)$$

Уравнение (1.28) превращается в традиционную форму уравнения Шредингера после преобразования $\psi\rightarrow\psi\exp\left(-imc^2t/\hbar\right)$. Эквивалентность соотношений (1.24) и (1.27) с $b_0=\hbar$ известна очень давно [6, 7].

Сравним действия (1.25) и (1.27). Действие (1.25) содержит только один квантовый член, т.е. член содержащий квантовую постоянную $\hbar$. Если положить $\hbar = 0$, действие (1.25) превращается в действие вида (1.16), описывающее невзаимодействующие частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$. В действии (1.27) все члены, кроме последнего, квантовые. Если положить $\hbar = 0$ в действии (1.27), то оно перестанет описывать что бы то ни было, потому что все члены кроме последнего исчезают. Чтобы извлечь классическое описание, из действия (1.28), нужно использовать изощренные методы получения классического приближения.

Квантовая постоянная $\hbar$ играет различную роль в традиционной квантовой механике и в МККЯ. В КМ квантовая постоянная $\hbar$ является атрибутом Q-квантования в том смысле, что $\hbar$ появляется вместе с Q-квантованием и исчезает вместе с Q-расквантизацией. В МККЯ D-квантизация и D-расквантизация не зависят прямо от $\hbar$, хотя D-квантизация может содержать $\hbar$ в качестве параметра. В МККЯ постоянная $\hbar$ является характеристикой некоторого стохастического агента, который является источником стохастического поведения микрочастиц. Постоянная $\hbar$ так же как и скорость света c может рассматриваться как характеристика пространства-времени [8, 9].

D-квантизация, по определению, есть добавление поперечных к потоку j^k производных, а D-расквантизация есть исключение производных, поперечных к j^k. Обе процедуры возможны только в HDP-представлении, где вектор потока j^k есть явная зависимая переменная. В релятивистском случае Q-квантование может вводить дополнительные степени свободы, содержащие как продольную так и поперечную производные. Это обстоятельство обнаруживается при D-расквантизации.

Уравнение Клейна-Гордона является динамическим уравнением для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$. Оно обычно пишется в WF-представлении. Будучи записано в L-представлении, действие для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ имеет вид [1]

$$\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{L}}[x,\kappa] = \int -mcK\sqrt{\dot{x}^k\dot{x}_k}\,d\tau_0 d\boldsymbol{\tau}, \qquad K=\sqrt{1+\lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l+\partial_l\kappa^l\right)} \tag{1.29}$$

где $\kappa^l = \kappa^l(x)$, $l = 0,1,2,3$ суть функции аргумента $x = \left\{x^k(\tau_0,\boldsymbol{\tau})\right\}$, $k = 0,1,2,3$, $\lambda = \hbar/mc$ есть комптоновская длина волны. Действие (1.29) есть релятивистское обобщение соотношения (1.23). Это можно проверить, разлагая выражение для K по степеням λ^2, пренебрегая временно́й составляющей κ^l и полагая $\mathbf{u}_{\mathrm{st}} = \hbar\boldsymbol{\kappa}/m$. Поле κ в (1.29) так же как и средняя стохастическая скорость $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ в (1.23) описывают стохастический агент, являющийся источником стохастического поведения микрочастиц. Но есть существенное различие между двумя этими описаниями. Описание в терминах $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ не содержит временны́х производных, и средняя стохастическая скорость $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ описывает некоторое поле, жестко связанное с его источником (частицей). Описание в терминах κ содержит временны́е производные, и поле κ может существовать независимо от его источника (частицы). Оба поля $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ и κ описывают облако пар вокруг частицы. Облако, описываемое скоростью $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$, не может оторваться от частицы, тогда как облако пар, описываемое полем κ, может. В случае (1.23) можно объединить частицу с облаком пар, описываемых $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$, в один точечный объект, и рассматривать его как одетую частицу. В случае (1.29) объединить частицу с облаком пар нельзя, потому что облако может существовать отдельно от частицы и уйти от нее, забрав часть ее энергии.

Формально все это следует из динамических уравнений для поля κ, которые имеют вид

$$\kappa_l = -\frac{1}{2}\partial_l \ln \rho, \qquad \rho \equiv \sqrt{\frac{\dot{x}^k \dot{x}_k}{1+\lambda^2\left(\kappa_l \kappa^l + \partial_l \kappa^l\right)}}\frac{\partial\left(\tau_0, \tau_1, \tau, \tau_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} \tag{1.30}$$

Динамические уравнения содержат коллективную переменную ρ, описывающую распределение элементов в статистическом ансамбле, ассоциирующемся с динамической системой $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$. Поле случайных скоростей $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ также связано с аналогичной коллективной переменной. Можно игнорировать эту коллективную переменную в нерелятивистском случае (1.23), потому что облако пар жестко связано с частицей. Кроме того переменная ρ, определенная соотношением (1.22), содержит только поперечные производные, потому что в нерелятивистском случае все пространственные производные являются поперечными. В релятивистском случае (1.29) нельзя игнорировать коллективную переменную ρ, потому что облако пар может существовать независимо от частицы. Рождение пар есть следствие независимого существования облака пар (но не процедуры квантования). Это можно показать математически [1]. Коллективный (статистический) характер κ поля, ответственного за рождение пар, не позволяет выделить классическую динамическую систему из статистического ансамбля, как это возможно в нерелятивистском случае, когда пренебрегается рождением пар.

Дираковская частица есть динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемая уравнением Дирака. Дираковская система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ исследовалась многими исследователями. Перечислить их всех нет возможности, и мы упомянем только некоторых из них. Во-первых, это преобразования уравнения Дирака, выполняемые на основе квантовой механики [10, 11]. Сложная структура уравнения Дирака была обнаружена Шредингером [12], который интерпретировал это как сложное квантовое движение (zitterbewegung). Исследование этого квантового движения и различные модели дираковской частицы можно найти в [13, 14, 15, 16, 17] и в ссылках в них. Наше исследование отличается отсутствием каких бы то ни было предположений о модели дираковской частицы и *использованием только динамических методов*.

Цель исследования – построение динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$, чьи динамические уравнения образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$, мы будем называть классической дираковской частицей. Она имеет конечное число степеней свободы и проще для исследования, чем $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$. D-расквантизация системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ определяет классическую динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ однозначно.

Первый шаг в исследовании – преобразование WF-описания в HDP-описание (второй и третий разделы). В HDP-представлениии осуществляется D-расквантизация, преобразующая $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ в $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$. Это – второй шаг, описанный в четвертом разделе. При написании в HDP-представлении действия для $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ в релятивистски ковариантном виде обнаруживается, что оба действия содержат постоянный времениподобный 4-вектор f^k, описывающий расщепление пространства-времени на пространство и время. Это означает, что обе динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ являются нерелятивистскими. Это неожиданное затруднение обсуждается в пятом разделе. Возникшее препятствие удается преодолеть, несколько модифицируя динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$. Единичный времениподобный 4-вектор f^k отождествляется с постоянной 4-скоростью системы $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ (шестой раздел). После такой модификации динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ превращается в релятивистскую динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$. В седьмом разделе решаются динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$. В восьмом разделе рассматривается релятивистский ротатор $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$ и исследуются его свойства. Сравнивая решения для $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$, обнаруживаем, что $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$ есть релятивистский ротатор и определяем функцию жесткости ротатора $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$. Расчеты преобразования от WF-представления к HDP-представлению довольно громоздки. Они подробно изложены в математических приложениях. К сожалению, представление детальных расчетов необходимо, поскольку их результат (нерелятивистский характер динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$) покажется сомнительным большинству читателей.

2 Преобразование переменных

Рассматривая динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, мы положим для простоты, что скорость света $c = 1$. $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ описывается в WF-представлении действием

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{D}}[\bar{\psi}, \psi] = \int (-m\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi - \frac{i}{2}\hbar\partial_l\bar{\psi}\gamma^l\psi)d^4x. \tag{2.1}$$

Здесь ψ есть четырех-компонентная комплексная волновая функция, $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0$ есть сопряженная волновая функция, и ψ^* есть эрмитово сопряженная функция. γ^i, $i = 0, 1, 2, 3$ суть 4×4 постоянные комплексные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma^l\gamma^k + \gamma^k\gamma^l = 2g^{kl}I, \qquad k, l = 0, 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

где I единичная 4×4 матрица. Действие (2.1) для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ порождает динамическое уравнение, известное как уравнение Дирака

$$i\hbar\gamma^l\partial_l\psi - m\psi = 0, \tag{2.3}$$

и выражения для физических величин: 4-вектора j^k потока частиц и тензор энергии – импульса T_l^k

$$j^k = \bar{\psi}\gamma^k\psi, \qquad T_l^k = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^k\partial_l\psi - \partial_l\bar{\psi}\cdot\gamma^k\psi\right). \tag{2.4}$$

Состояние динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ описывается восмью вещественными зависимыми переменными (восемь вещественных составляющих четырех-компонентной комплексной волновой функции ψ). Используя обозначения

$$\gamma_5 = \gamma^{0123} \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \} = \{-i\gamma^2\gamma^3, -i\gamma^3\gamma^1, -i\gamma^1\gamma^2\} \tag{2.6}$$

сделаем замену переменных

$$\psi = Ae^{i\varphi+\frac{1}{2}\gamma_5\kappa}e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}}e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}\Pi \tag{2.7}$$

$$\psi^* = A\Pi e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}}e^{-i\varphi-\frac{1}{2}\gamma_5\kappa} \tag{2.8}$$

где (*) означает эрмитово сопряжение и

$$\Pi = \frac{1}{4}(1+\gamma^0)(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}), \qquad \mathbf{z} = \{z^\alpha\} = \mathrm{const}, \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \mathbf{z}^2 = 1 \tag{2.9}$$

есть делитель нуля. Величины A, κ, φ, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n} = \{n^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ суть восемь вещественных параметров, определяющих волновую функцию ψ. Эти параметры можно рассматривать как новые зависимые переменные, описывающие состояние динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$. Величина φ есть скаляр, а κ – псевдоскаляр. Шесть переменных A, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n} = \{n^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ могут быть выражены через 4-вектор потока $j^l = \bar\psi\gamma^l\psi$ и 4-псевдовектор спина

$$S^l = i\bar\psi\gamma_5\gamma^l\psi, \qquad l = 0,1,2,3. \tag{2.10}$$

Из-за двух тождеств

$$S^lS_l \equiv -j^lj_l, \qquad j^lS_l \equiv 0. \tag{2.11}$$

имеется только шесть независимых составляющих среди восьми составляющих величин j^l и S^l. Сделаем замену переменных в действии (2.1), используя подстановки (2.7) – (2.9).

Матрицы γ_5, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ определяются соотношениями (2.5), (2.6) и имеют следующие свойства

$$\gamma_5\gamma_5 = -1, \qquad \gamma_5\sigma_\alpha = \sigma_\alpha\gamma_5, \qquad \gamma^{0\alpha} \equiv \gamma^0\gamma^\alpha = -i\gamma_5\sigma_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3; \tag{2.12}$$

$$\left(\gamma^0\right)^* = \gamma^0, \qquad (\gamma^\alpha)^* = -\gamma^\alpha, \qquad \gamma^0\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\gamma^0, \qquad \gamma^0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma^0 \tag{2.13}$$

В соответствии с уравнениями (2.2), (2.5), (2.6) матрицы $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ удовлетворяют соотношению

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma, \qquad \alpha,\beta = 1,2,3, \tag{2.14}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть антисимметричный псевдотензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{123} = 1$).

Используя соотношения (2.12),(2.13), (2.14) и (2.9), легко проверить, что

$$\Pi^2 = \Pi, \qquad \gamma_0\Pi = \Pi, \qquad \mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}\Pi = \Pi, \tag{2.15}$$

$$\Pi\gamma_5\Pi = 0, \qquad \Pi\sigma_\alpha\Pi = z^\alpha\Pi, \qquad \alpha = 1,2,3. \tag{2.16}$$

Вообще говоря, волновые функции ψ, ψ^*, определяемые соотношениями (2.7), (2.8) суть 4×4 комплексные матрицы. При надлежащем представлении, когда Π имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

ψ, ψ^* имеют вид

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Их произведение $\psi^* O\psi$, где O есть произвольная 4×4 матрица, имеет вид

$$\psi^* O\psi = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\Pi = \Pi a \tag{2.19}$$

где a есть некоторая комплексная величина. Если f есть аналитическая функция, обладающая свойством $f(0) = 0$, то функция $f(\psi^* O\psi) = f(a\Pi)$ от 4×4 матрицы типа (2.19) есть матрица $f(a)\Pi$ того же вида. По этой причине мы не будем различать комплексную величину a и комплексную 4×4 матрицу $a\Pi$. В конечных выражениях типа $a\Pi$ (a есть комплексная величина) множитель Π будет опускаться.

С помощью соотношений (2.12) – (2.16) можно привести любое число Клиффорда $\Pi O\Pi$ к виду (2.19), не используя какого-либо конкретного представления γ-матриц. Это свойство будет применяться в наших расчетах. Подсчитывая экспоненты типа (2.7), (2.8), мы будем использовать следующие соотношения

$$e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}} F(\boldsymbol{\sigma})\, e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}} = F(\boldsymbol{\Sigma})$$

где F – произвольная функция, и

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}, \qquad \Sigma_\alpha = e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}\sigma_\alpha e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}} \qquad \alpha = 1, 2, 3; \tag{2.20}$$

удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям (2.14), что и матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}$.

Для переменных $\bar\psi\psi$, j^l, S^l, $l = 0, 1, 2, 3$ получаются следующие выражения

$$\bar\psi\psi = \psi^*\gamma^0\psi = A^2\Pi e^{\gamma_5\kappa}\Pi = A^2\Pi\left(\cos\kappa + \gamma_5\sin\kappa\right)\Pi$$

В силу первого соотношения (2.16), член, линейный по γ_5, обращается в нуль. Тогда получаем

$$\bar\psi\psi = A^2\cos\kappa\Pi$$

$$\begin{aligned}
j^0\Pi &= \bar{\psi}\gamma^0\psi = A^2\Pi e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}} e^{-i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}} e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}\Pi \\
&= A^2\Pi e^{-i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi = A^2\Pi\left(\cosh\eta - \frac{i\gamma_5}{\eta}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}\sinh\eta\right)\Pi \\
&= A^2\cosh(\eta)\Pi \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

где

$$\eta = \sqrt{\boldsymbol{\eta}^2} = \sqrt{\eta^\alpha\eta^\alpha}$$

Снова в силу первого соотношения (2.16) опускаем члены, линейные по γ_5.

Тем же самым способом получаем

$$\begin{aligned}
j^\alpha\Pi &= \psi^*\gamma^{0\alpha}\psi\Pi = A^2\Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}(-i\gamma_5\Sigma_\alpha)e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi = \\
&= A^2\Pi(\cosh\frac{\eta}{2} - i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v}\sinh\frac{\eta}{2})(-i\gamma_5\Sigma_\alpha)(\cosh\frac{\eta}{2} - i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v}\sinh\frac{\eta}{2})\Pi = \\
&= A^2\Pi(\cosh\frac{\eta}{2}\sinh\frac{\eta}{2}\left(\Sigma_\beta\Sigma_\alpha + \Sigma_\beta\Sigma_\alpha\right)v^\beta\Pi
\end{aligned}$$

$$j^\alpha\Pi = A^2\sinh(\eta)v^\alpha\Pi, \qquad \alpha = 1,2,3 \qquad (2.22)$$

где

$$\mathbf{v} = \{v^\alpha\}, \qquad v^\alpha = \eta^\alpha/\eta, \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \mathbf{v}^2 = 1. \qquad (2.23)$$

Введем обозначение $\boldsymbol{\xi} = \{\xi^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ для выражения

$$\xi^\alpha\Pi = \Pi\Sigma_\alpha\Pi, \qquad \alpha = 1,2,3, \qquad \boldsymbol{\xi}^2 = \xi^\alpha\xi^\alpha = 1 \qquad (2.24)$$

Тогда получаем для псевдовектора спина S^l, определяемого соотношением (2.10)

$$\begin{aligned}
S^0\Pi &= \psi^*(-i\gamma_5)\psi = A^2\Pi(-i\gamma_5)e^{-i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi = \\
&= A^2\Pi\sinh(\eta)\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v}\Pi = A^2\sinh(\eta)\boldsymbol{\xi}\mathbf{v}\Pi,
\end{aligned} \qquad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
S^\alpha\Pi &= \psi^*\gamma^0 i\gamma_5\gamma^\alpha\psi = \psi^*\sigma_\alpha\psi = A^2\Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Sigma_\alpha e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi = \\
&= A^2\Pi(\cosh\frac{\eta}{2} - i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v}\sinh\frac{\eta}{2})\Sigma_\alpha(\cosh\frac{\eta}{2} - i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v}\sinh\frac{\eta}{2})\Pi = \\
&= A^2\Pi\left(\cosh^2\frac{\eta}{2}\Sigma_\alpha + \sinh^2\frac{\eta}{2}\left(\Sigma_\beta v^\beta\right)\Sigma_\alpha\left(\Sigma_\gamma v^\gamma\right)\right)\Pi
\end{aligned}$$

Теперь дважды используя соотношения (2.14) для матриц Паули Σ_α, получаем

$$\begin{aligned}
S^\alpha\Pi &= A^2\Pi\left(\cosh^2\frac{\eta}{2}\Sigma_\alpha + \sinh^2\frac{\eta}{2}v^\beta v^\gamma\left(\delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\beta\alpha\mu}\Sigma_\mu\right)\Sigma_\gamma\right)\Pi = \\
&= A^2\Pi\left(\cosh^2\frac{\eta}{2}\Sigma_\alpha + \sinh^2\frac{\eta}{2}\left(v^\alpha v^\gamma\Sigma_\gamma + i\varepsilon_{\beta\alpha\mu}v^\beta v^\gamma\left(\delta_{\mu\gamma} + i\varepsilon_{\mu\gamma\nu}\Sigma_\nu\right)\right)\right)\Pi \\
&= A^2\Pi\left(\cosh^2\frac{\eta}{2}\Sigma_\alpha + \sinh^2\frac{\eta}{2}\left(v^\alpha v^\gamma\Sigma_\gamma - v^\beta v^\beta\Sigma_\alpha + v^\beta v^\alpha\Sigma_\beta\right)\right)\Pi
\end{aligned}$$

$$S^\alpha\Pi = A^2[\xi^\alpha + (\cosh\eta - 1)v^\alpha(\mathbf{v}\boldsymbol{\xi})]\Pi, \qquad \alpha = 1,2,3. \qquad (2.26)$$

Из уравнений (2.21), (2.22), (2.23) следует

$$j^i j_i \Pi = A^4 \Pi, \qquad A = (j^l j_l)^{1/4} \equiv \rho^{1/2} \tag{2.27}$$

В соответствии с третьим уравнением (2.15), (2.20) и (2.24) получаем

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha \Pi &= \Pi \Sigma_\alpha \Pi = \Pi e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}} \sigma_\alpha e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}} \Pi = \\
&= \Pi \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\sin\frac{\pi}{2}\right) \sigma_\alpha \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\sin\frac{\pi}{2}\right) \Pi = \\
&= \Pi \left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right) \sigma_\alpha \left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right) \Pi = \Pi n^\mu n^\nu \sigma_\mu \sigma_\alpha \sigma_\nu \Pi = \\
&= \Pi \left(n^\alpha n^\nu \sigma_\nu + i\varepsilon_{\mu\alpha\gamma}\sigma_\gamma\sigma_\nu n^\mu n^\nu\right) \Pi = \Pi \left(n^\alpha n^\nu \sigma_\nu - \varepsilon_{\mu\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\nu\beta}\sigma_\beta n^\mu n^\nu\right) \Pi = \\
&= \Pi \left(n^\alpha n^\nu z_\nu - \varepsilon_{\mu\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\nu\beta} z^\beta n^\mu n^\nu\right) \Pi \\
&= \left(n^\alpha \left(\mathbf{n}\mathbf{z}\right) + \left(\mathbf{n}\times\left(\mathbf{n}\times\mathbf{z}\right)\right)^\alpha\right) \Pi, \qquad \alpha = 1, 2, 3;
\end{aligned}$$

Или

$$\boldsymbol{\xi} = 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{z}) - \mathbf{z} \tag{2.28}$$

3 Преобразование действия

Последние два члена действия (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi + \text{h.c} &= \frac{i}{2}\hbar\psi^*\left(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\right)\psi + \text{h.c} \\
&= \frac{i}{2}\hbar\psi^*\left(\left(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\right)\left(i\varphi + \frac{1}{2}\gamma_5\kappa\right)\right)\psi + \text{h.c.} \\
&\quad + \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}} e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}} (\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\nabla)(e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}} e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}})\Pi + \text{h.c}
\end{aligned}$$

где "h.c." означает член, полученный из предыдущего с помощью операции эрмитова сопряжения. Расчет этого выражения приводит к следующему результату (см. детали расчета в приложении A). Положим

$$\frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi + \text{h.c} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \tag{3.1}$$

где

$$F_1 + F_2 = -j^l\partial_l\varphi\Pi - \frac{1}{2}\hbar S^l\partial_l\kappa\Pi \tag{3.2}$$

$$F_3 = -\frac{\hbar j^l}{2\left(1 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\partial_l\xi^\beta z^\gamma\Pi \tag{3.3}$$

$$F_4 = -\frac{1}{2}\hbar A^2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_\alpha\eta v^\beta + \sinh\eta\partial_\alpha v^\beta + 2\sinh^2(\frac{\eta}{2})v^\alpha\partial_0 v^\beta\right)\xi^\gamma\Pi \tag{3.4}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть 3-мерный псевдотензор Леви-Чивита.

Мы видим, что выражения (3.2) для F_1 и F_2 так же как и первый член действия (2.1)

$$-m\bar{\psi}\psi = -m\Pi e^{\gamma_5\kappa}\Pi = -mA^2\cos\kappa\Pi = -m\sqrt{j^l j_l}\cos\kappa\Pi \equiv -m\rho\cos\kappa\Pi \qquad (3.5)$$

имеют релятивистски ковариантный вид. Члены F_3 и F_4 имеют нековариантный вид. Попытаемся записать их в ковариантной форме. Все эти члены содержат нековариантный трехмерный псевдотензор Леви-Чивита $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Можно рассматривать его как пространственные составляющие четырехмерного псевдотензора Леви-Чивита ε_{iklm} ($\varepsilon_{0123} = 1$), свернутого с постоянным единичным времениподобным вектором $f^l = \{1,0,0,0\}$. Тогда отличны от нуля только пространственные составляющие псевдотензора $\varepsilon_{iklm}f^m$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma m}f^m, \qquad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3 \qquad (3.6)$$

и можно подставить соотношение (3.6) в выражение (3.3) для F_3.

$$F_3 = \frac{\hbar j^l}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}\varepsilon_{iklm}\xi^i\partial_l\xi^k z^l f^m\Pi \qquad (3.7)$$

где ξ^l, z^l суть 4-псевдовекторы, пространственные составляющие которых в рассматриваемой системе координат суть $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{z}$, а значения временны́х составляющих значения не имеют. Чтобы записать скалярное произведение $\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}$ в ковариантной форме, будем считать, что в рассматриваемой системе координат $z^0 = 0$.

Введем постоянный 4-вектор f^l и постоянный 4-псевдовектор z^l с помощью соотношений

$$f^i = \{1,0,0,0\}, \qquad z^i = \{0,z^1,z^2,z^3\}$$

Тогда $\boldsymbol{\xi}\mathbf{z} = -\xi_l z^l$, и можно переписать соотношение (3.7) в ковариантном виде

$$F_3 = \hbar j^l\varepsilon_{iklm}\frac{\xi^i}{\sqrt{2(1-\xi^s z_s)}}\partial_l\frac{\xi^k}{\sqrt{2(1-\xi^s z_s)}}z^l f^m\Pi \qquad (3.8)$$

Множитель $[2(1-\xi^s z_s)]^{-1/2}$ можно ввести под знак производной, поскольку дифференцирование его дает 0 из-за обращения в нуль множителя $\varepsilon_{iklm}\xi^i\xi^k z^l f^m$.

Наконец, вводя единичный 4-псевдовектор

$$\nu^i = \xi^i - (\xi^s f_s)f^i, \qquad i = 0,1,2,3; \qquad \nu^i\nu_i = -1,$$

и 4-псевдовектор

$$\mu^i \equiv \frac{\nu^i}{\sqrt{-(\nu^l+z^l)(\nu_l+z_l)}} = \frac{\nu^i}{\sqrt{2(1-\nu^l z_l)}} = \frac{\nu^i}{\sqrt{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}}.$$

можно переписать выражение для F_3 в виде

$$F_3 = \hbar j^l\varepsilon_{iklm}\mu^i\partial_l\mu^k z^l f^m\Pi \qquad (3.9)$$

Преобразование выражения (3.4) для F_4 к ковариантному виду довольно громоздко. В результате этого преобразования выражение (3.4) принимает вид (Смотри доказательство этого в приложении B)

$$F_4 = -\frac{\hbar}{2(\rho + f^s j_s)}\varepsilon_{iklm}[\partial^k(j^i + f^i\rho)](j^l + f^l\rho)[\xi^m - (\xi^s f_s)f^m] \tag{3.10}$$

Введем единичный времениподобный вектор

$$q^i \equiv \frac{j^i + f^i\rho}{\sqrt{(j^l + f^l\rho)(j_l + f_l\rho)}} = \frac{j^i + f^i\rho}{\sqrt{2\rho(\rho + j^l f_l)}}, \qquad q_s q^s = 1$$

Тогда соотношение (3.10) может быть записано кратко в ковариантном виде

$$F_4 = \hbar\rho\varepsilon_{iklm}q^i(\partial^k q^l)\nu^m \tag{3.11}$$

Теперь можно записать в ковариантной форме действие (2.1)

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}: \qquad \mathcal{A}_D[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{L}d^4x, \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}_{q1} + \mathcal{L}_{q2} \tag{3.12}$$

$$\mathcal{L}_{cl} = -m\rho - \hbar j^i\partial_i\varphi + \hbar j^s\varepsilon_{iklm}\mu^i\partial_s\mu^k z^l f^m, \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{3.13}$$

$$\mathcal{L}_{q1} = 2m\rho\sin^2(\frac{\kappa}{2}) - \frac{\hbar}{2}S^l\partial_l\kappa, \tag{3.14}$$

$$\mathcal{L}_{q2} = \hbar\rho\varepsilon_{iklm}q^i(\partial^k q^l)\nu^m \tag{3.15}$$

Лагранжиан есть функция 4-вектора j^l, скаляра φ, псевдоскаляра κ, и единичного 3-псевдовектора $\boldsymbol{\xi}$, который связан 4-псевдовектором спина S^l с помощью соотношений

$$\xi^\alpha = \rho^{-1}\left[S^\alpha - \frac{j^\alpha S^0}{(j^0 + \rho)}\right], \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{3.16}$$

$$S^0 = \mathbf{j}\boldsymbol{\xi}, \qquad S^\alpha = \rho\xi^\alpha + \frac{(\mathbf{j}\boldsymbol{\xi})j^\alpha}{\rho + j^0}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{3.17}$$

4 Динамическая расквантизация и динамическая квантизация

Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть некоторая стохастическая система, и $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть результат действия некоторого стохастического агента на детерминированную динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Пусть $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ и $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ суть статистические ансамбли стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и детерминированных динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ соответственно. Любо статистический ансамбль есть распределенная система, и все физические величины $u = u(\mathbf{x})$ являются, вообще говоря, некоторыми функциями коррдинат $\mathbf{x}$ конфигурационного пространства, где описывается $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$.

Если состояние статистического ансамбля таково, что величины u не зависят от $\mathbf{x}$, то такое состояние называется однородным состоянием. Если величины u зависят от $\mathbf{x}$ очень слабо, то такое состояние называется квази-однородным.

Динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ описывают регулярную составляющую движения стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, образующих статистический ансамбль. Стохастическая составляющая движения системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ влияет на регулярную составляющую движения при условии, что состояние ансамбля неоднородно, и имеются градиенты физических величин u. Динамические уравнения для ансамблей $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ и $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ совпадают, если их состояния однородны, и отсутствуют градиенты величин u в динамических уравнениях для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Например, динамические уравнения для статистического ансамбля броуновских частиц имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\left(D\boldsymbol{\nabla} w - \mathbf{u}w\right), \qquad \mathbf{v} = \mathbf{u} - D\boldsymbol{\nabla}\ln w$$

где распределение $w = w(\mathbf{x})$ описывает состояние ансамбля. Скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ описывает движение вязкой среды, где движутся броуновские частицы. Если состояние w однородно, и w =const, то $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, и скорость $\mathbf{v}$ регулярной составляющей движения стохастических броуновских частиц совпадает со скоростью $\mathbf{u}$ свободных частиц движущихся с трением в вязкой среде.

В случае нерелятивистской квантовой системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$, описываемой уравнением Шредингера, система $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ может рассматриваться как динамическая система типа $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Состояние системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ квази-однородно, если все физические величины мало меняются на длине волны де Бройля. В этом случае существует такая система координат и такое состояние $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$, где

$$\lambda_{\mathrm{B}}|\frac{\partial u}{\partial x^{\alpha}}| \ll |u|, \qquad \alpha = 1,2,3, \qquad \lambda_{\mathrm{B}} = \frac{\hbar}{mv} \tag{4.1}$$

Тогда квантовая динамическая система может рассматриваться как классическая (более точно динамическая система может рассматриваться как статистический ансамбль классических систем), в том смысле, что динамические уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ совпадают с уравнениями для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$. Здесь u есть любая физическая величина, и λ_{B} есть длина волны де Бройля. В релятивистском случае нельзя быть уверенным в том, что, вообще, существует такая система координат и такое состояние динамической системы, что выполняется условие условие (4.1).

Локальный релятивистский вариант условия (4.1) записывается в виде

$$\frac{\hbar}{mc}\sqrt{\frac{\left(j_k\partial_{\perp}^{k}u\right)^2}{j^s j_s}} = \frac{\hbar}{mc}\sqrt{\partial_k u\cdot\partial^k u - \frac{\left(j^k\partial_k u\right)^2}{j^s j_s}} \ll |u| \tag{4.2}$$

где c есть скорость света, j^k – 4-вектор тока частиц и $\partial_{\perp}^{k}$ есть поперечная составляющая производной, определенная соотношением (1.19). Условие (4.2) несколько слабее, чем ограничение (4.1), потому что комптоновская длина волны

$\hbar/mc \leq \lambda_{\rm B}$. Однако, условие (4.2) является релятивистски ковариантным и локальным.

Введем процедуру динамической расквантизации (D-расквантизации). Это специальная релятивистски ковариантная процедура, реализующая условие (4.2). Любая производная ∂^k разделяется на продольную составляющую $\partial_{||}^k$ и поперечную $\partial_\perp^k$, где $\partial_{||}^k$ и $\partial_\perp^k$ определяются соотношением (1.19). Поперечной составляющей пренебрегают, и получается динамическая система в квазиоднородном состоянии.

В квазиоднородном состоянии, когда отсутствуют поперечные производные, действие (3.12)–(3.15) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\rm Dqu}[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] &= \int\left\{-m\rho\cos\kappa-\hbar j^i\left(\partial_i\varphi-\frac{\varepsilon_{jklm}\xi^j\partial_i\xi^k z^l f^m}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\right)\right.\\ &\left.-\frac{\hbar j^i}{2\rho(\rho+j^j f_j)}\varepsilon_{klsm}j^k\partial_i j^l f^s\xi^m\right\}d^4x \qquad (4.3)\end{aligned}$$

Заметим, что вторым членом $-\frac{\hbar}{2}S^l\partial_l\kappa$ в соотношении (3.14) пренебрегается, поскольку 4-псевдовектор S^k ортогонален к 4-вектору j^k, и производная является поперечной.

Хотя действие (4.3) содержит неклассическую переменную κ, но фактически эта переменная является постоянной. В самом деле, вариация по κ приводит к динамическому уравнению

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{Dqu}}{\delta\kappa}=m\rho\sin\kappa=0 \qquad (4.4)$$

которое имеет решение

$$\kappa=n\pi,\qquad n=\in\mathbb{Z} \qquad (4.5)$$

Таким образом, эффективная масса $m_{eff}=m\cos\kappa$ имеет два значения

$$m_{eff}=m\cos\kappa=\pm m \qquad (4.6)$$

Значение $m_{eff}=m>0$ ($\kappa=\frac{\pi}{2}+2n\pi$) соответствует минимуму действия (4.3), тогда как значение $m_{eff}=-m<0$ соответствует максимуму. По-видимому, $m_{eff}>0$ соответствует стабильному состоянию системы, а $m_{eff}<0$ – нестабильному.

Исключая κ с помощью подстановки $k=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ в уравнение (4.3), получаем действие

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\rm Dqu}[j,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int\left\{-m\rho-\hbar j^i\left(\partial_i\varphi-\frac{\varepsilon_{jklm}\xi^j\partial_i\xi^k z^l f^m}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\right)\right.\\ \left.-\frac{\hbar j^i}{2\rho(\rho+j^j f_j)}\varepsilon_{klsm}j^k\partial_i j^l f^s\xi^m\right\}d^4x \qquad (4.7)\end{aligned}$$

Введем лагранжевы координаты $\tau = \{\tau_0, \boldsymbol{\tau}\} = \{\tau_i(x)\}$, $i = 0,1,2,3$ как функции координат x таким образом, чтобы только координата τ_0 изменялась вдоль направления j^l, т.е.

$$j^k \partial_k \tau_\mu = 0, \qquad \mu = 1,2,3 \tag{4.8}$$

Будем рассматривать координаты x как функции $\tau = \{\tau_0, \boldsymbol{\tau}\}$. Получаем следующие тождества

$$\frac{\partial D}{\partial \tau_{0,k}} \tau_{i,k} \equiv \delta_i^0 D, \qquad i = 0,1,2,3 \qquad \tau_{i,k} \equiv \partial_k \tau_i, \qquad i,k = 0,1,2,3 \tag{4.9}$$

где

$$D \equiv \frac{\partial(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}, \qquad \frac{\partial D}{\partial \tau_{0,i}} \equiv \frac{\partial(x^i, \tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}. \tag{4.10}$$

Сравнивая (4.8) с (4.9), заключаем, что возможно ввести

$$j^i = \frac{\partial D}{\partial \tau_{0,i}} \equiv \frac{\partial(x^i, \tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{4.11}$$

поскольку динамические уравнения

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}}{\delta \varphi} = \hbar \partial_l j^l = 0 \tag{4.12}$$

тождественно удовлетворяются соотношением (4.11) в силу тождества

$$\partial_i \frac{\partial D}{\partial \tau_{k,i}} \equiv 0, \qquad k = 0,1,2,3.$$

Примем во внимание, что для любой переменной u

$$D^{-1} j^i \partial_i u = D^{-1} \frac{\partial D}{\partial \tau_{0,i}} \partial_i u = \frac{\partial(u, \tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\partial(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)} = \frac{du}{d\tau_0} \tag{4.13}$$

и в частности,

$$D^{-1} j^i = D^{-1} \frac{\partial D}{\partial \tau_{0,i}} \equiv \frac{\partial(x^i, \tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\partial(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)} = \frac{dx^i}{d\tau_0} \equiv \dot{x}^i, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{4.14}$$

Кроме того

$$d^4 x = D^{-1} d^4 \tau = D^{-1} d\tau_0 d\boldsymbol{\tau} \tag{4.15}$$

$$j^i \partial_i \varphi = \frac{\partial(\varphi, \tau_1, \tau_2, \tau_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \tag{4.16}$$

Действие (4.7) может быть переписано в лагранжевых координатах τ в виде

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x, \boldsymbol{\xi}] = \int \left\{ -m\sqrt{\dot{x}^i \dot{x}_i} + \hbar \frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar \frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s \dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s \dot{x}_s} + \dot{x}^0)} \right\} d^4\tau \tag{4.17}$$

где точка означает полную производную $\dot{x}^s \equiv dx^s/d\tau_0$. $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{x^i\}$, $i = 0,1,2,3$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ рассматриваются как функции лагранжевых координат τ_0, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. $\mathbf{z}$ есть постоянный единичный 3-вектор. Член $j^i\partial_i\varphi$ опущен, поскольку он сводится к якобиану (4.16), который не дает вклада в динамические уравнения. Фактически переменные x зависят от $\boldsymbol{\tau}$ как от параметров, потому что действие (4.17) не содержит производных по τ_α, $\alpha = 1,2,3$. Плотность лагранжиана действия (4.17) не содержит явно независимых переменных τ. Следовательно оно может быть записано в виде

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{A}_{\mathrm{dc}}[x,\boldsymbol{\xi}]d\boldsymbol{\tau}, \qquad \mathbf{d}\boldsymbol{\tau} = d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{4.18}$$

где

$$\mathcal{A}_{\mathrm{dc}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int \left\{ -m\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)} \right\} d\tau_0 \tag{4.19}$$

Действие (4.18) есть действие для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dqu}}$, которая представляет собой набор одинаковых независимых динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$. Такая динамическая система называется статистическим ансамблем. Динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ являются элементами (конституэнтами) статистического ансамбля $\mathcal{S}_{\mathrm{Dqu}}$. Динамические уравнения для каждой $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Это можно интерпретировать в том смысле, что динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ может рассматриваться как классическая, хотя ее лагранжиан содержит квантовую постоянную $\hbar$.

Первый член в действии (4.19) релятивистский. Он описывает движение классической дираковской частицы как целого. Последние два члена в действии (4.19) нерелятивистские. Они описывают некоторые внутренние степени свободы классической дираковской частицы. Это внутреннее движение (zitterbewegung) означает, что классическая дираковская частица имеет некоторую внутреннюю структуру, которая описывается с помощью метода, несовместимого с принципами теории относительности. Может быть, классическую дираковскую частицу следует рассматривать как состоящую из нескольких точечных частиц. Во всяком случае классическая дираковская частица не является точечной частицей. Она имеет более сложную структуру, которая описывается переменной $\boldsymbol{\xi}$ и второй производной $\ddot{\mathbf{x}}$.

Легко видеть, что действие (4.19) инвариантно относительно преобразования $\tau_0 \to \tilde{\tau}_0 = F(\tau_0)$, где F есть произвольная монотонная функция. Это преобразование позволяет выбрать выбрать переменную $t = x^0$ в качестве параметра τ_0, или выбрать параметр τ_0 таким образом, что $\dot{x}^l\dot{x}_l = \dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{x}}^2 = 1$. В последнем случае параметр τ_0 есть собственное время вдоль мировой линии классической дираковской частицы.

Можно ввести процедуру динамической квантизации как процедуру обратную динамической расквантизации. Применение динамической квантизации к статистическому ансамблю $\mathcal{S}_{\mathrm{Dqu}}$ означает, что элементы $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ статистического ансамбля $\mathcal{S}_{\mathrm{Dqu}}$ начинают взаимодействовать между собой через некоторое "квантовое векторное поле" κ^i и "скалярное квантовое поле" κ. Разумеется, динамическая квантизация не единственна, потому что квантовые поля κ и κ^i можно ввести различными способами. Квантовые поля κ^i и κ можно ввести таким образом, чтобы динамическая система, образованная множеством одинаковых взаимодействующих динамических систем $\mathcal{S}_{\rm dc}$, совпала с динамической системой $\mathcal{S}_{\rm D}$. Динамическая квантизация есть чисто динамическая процедура. Она позволяет превратить статистический ансамбль $\mathcal{S}_{\rm Dqu}$ классических динамических систем в квантовую систему $\mathcal{S}_{\rm D}$ с помощью динамических методов, т.е. без ссылки на атрибуты квантовой механики. Квантовая система $\mathcal{S}_{\rm D}$ и связанные с ней квантовые эффекты появляются как результат динамического взаимодействия между классическим системами $\mathcal{S}_{\rm dc}$, образующими статистический ансамбль $\mathcal{S}_{\rm D}$. Такое взаимодействие было получено для динамической системы $\mathcal{S}_{\rm KG}$, описываемой уравнением Клейна-Гордона [1]. Теперь мы получим его для динамической системы $\mathcal{S}_{\rm D}$.

Если добавить опущенные члены

$$m\rho\left(1-\cos\kappa\right)-\frac{\hbar}{2}S^l\partial_l\kappa,\qquad \hbar\rho\varepsilon_{iklm}q^i\left(\partial_\perp^k q^l\right)\nu^m$$

к плотности лагранжиана в действии (4.7), мы возвратимся к действию (3.12) – (3.15) для $\mathcal{S}_{\rm D}$. Осуществим это. Получается действие (3.12) – (3.15). Введем новые переменые

$$\kappa^i=q^i=\frac{j^i+\rho f^i}{\sqrt{2\rho(\rho+j^sf_s)}}=\frac{j^i+\rho f^i}{\sqrt{(j^s+\rho f^s)(j_s+\rho f_s)}},\qquad i=0,1,2,3; \tag{4.20}$$

и введем их в плотность лагранжиана (3.15) с помощью множителей Лагранжа λ_i. Тогда $\mathcal{L}_{q2}$ заменится на

$$\mathcal{L}_{q2}'=-\hbar\rho\varepsilon_{iklm}(\partial_\perp^k\kappa^l)\kappa^i\nu^m-\frac{\hbar}{\rho}j^s\varepsilon_{iklm}q^ij^k\partial_sq^l\nu^m-\lambda_i\left(q^i-\kappa^i\right) \tag{4.21}$$

где $\partial_\perp^k$ определяется уравнением (1.19) и

$$\rho\equiv\sqrt{j^lj_l},\qquad \nu^m=[\xi^m-(\xi^sf_s)f^m],\qquad m=0,1,2,3 \tag{4.22}$$

Производная ∂^k в (4.21) разбита на продольную $\partial_{||}^k$ и поперечную $\partial_\perp^k$ составляющие, причем величины q^i в коэффициенте при $\partial_\perp^k$ заменены на κ^i, а в коэффициенте при $\partial_{||}^k$ оставлены прежними. Согласно (4.20) $\kappa^i=q^i$, и такая замена ничего не меняет по существу.

Вариация действия по κ^i приводит к динамическим уравнениям

$$-\hbar\rho\varepsilon_{iklm}(\partial_\perp^k\kappa^l)\nu^m-\hbar\partial_\perp^{*k}\left(\rho\varepsilon_{iklm}\kappa^l\nu^m\right)+\lambda_i=0 \tag{4.23}$$

где оператор $\partial_\perp^{*k}$ определяется соотношением

$$\partial_\perp^{*k}u=\partial^ku-\partial_s(\frac{j^kj^s}{\rho^2}u) \tag{4.24}$$

Исключая λ_i из (4.21) с помощью (4.23), получаем вместо $\mathcal{L}'_{q2}$

$$\mathcal{L}_{q3}=-\hbar\rho\varepsilon_{iklm}(\kappa^l\partial_\perp^k\kappa^i-q^l\partial_\perp^k\kappa^i+\kappa^i\partial_\perp^k q^l)\nu^m-\frac{\hbar j^i}{2\rho(\rho+j^jf_j)}\varepsilon_{klsm}j^k\partial_i j^l f^s\xi^m \quad (4.25)$$

Теперь действие имеет вид

$$\mathcal{A}_D[j,\varphi,\kappa,\xi,\kappa^i]=\int(\mathcal{L}_{cl}+\mathcal{L}_{q1}+\mathcal{L}_{q3})d^4x \quad (4.26)$$

где плотности лагранжиана $\mathcal{L}_{cl}$, $\mathcal{L}_{q1}$, $\mathcal{L}_{q3}$ определяются соответственно соотношениями (3.13), (3.14), (4.25). Динамические уравнения, порожденные действием (4.26) эквивалентны динамическим уравнениям, порожденным действиями (2.1) и (3.12) – (3.15). Действие (4.26) порождает динамическое уравнение

$$\frac{\delta\mathcal{A}_D}{\delta\kappa^i}=-\hbar\varepsilon_{iklm}\{\rho\nu^m\partial_\perp^k(q^l-\kappa^l)+\partial_\perp^{*k}[\rho\nu^m(q^l-\kappa^l)]\}=0 \quad (4.27)$$

где оператор $\partial_\perp^{*k}$ определяется соотношением (4.24). Разрешая уравнение (4.27) относительно κ^i и подставляя κ^i в (4.26), возвращаемся к действию (3.12) – (3.15). Тот факт, что решение (4.20) уравнения (4.27) не единственно, не имеет значения, потому что (4.25) приводится к (3.15) в силу уравнения (4.27). В самом деле, свертывая уравнение (4.27) с κ^i и используя полученное соотношение для исключения κ^i из уравнения (4.21), получаем уравнение (3.15).

Заметим, что κ^l не является полноценной динамической переменной, потому что динамические уравнения (4.27) для κ^l содержат производные только вдоль пространственноподобных направлений, ортогональных к j^i. По существу введение κ^i есть инвариантный (относительно замены переменных) способ отделения классической части действия.

Переменные κ, κ^i, $i=0,1,2,3$ суть специальные квантовые переменные, которые ответственны за квантовые эффекты, описываемые уравнением Дирака. Они вводятся таким способом, что когда они обращаются в нуль, то обращаются в нуль все члены, содержащие поперечные составляющие производных и $\mathcal{S}_{\rm D}$ приводится к $\mathcal{S}_{\rm Dqu}$. В самом деле, подавим квантовые переменные κ, κ^i, $i=0,1,2,3$ в действии (4.25), (4.26). Тогда действие (4.26) приводится к действию (4.7).

5 Релятивистская инвариантность

Принято считать, что возможность записи динамических уравнений в релятивистски ковариантном виде автоматически означает релятивистский характер динамической системы, описываемой этими уравнениями. Вообще говоря, это верно лишь в том случае, если динамические уравнения не содержат абсолютных объектов, или абсолютные объекты, содержащиеся в динамических уравнениях, имеют группу Пуанкаре в качестве своей группы симметрии [18].

Под абсолютным объектом понимается одна или несколько величин, остающихся одними и теми же при всех состояниях динамической системы, т.е. при всех решениях динамических уравнений [18]. Примером абсолютного объекта является заданное внешнее поле или метрический тензор g_{ik} в случае, когда он задается, а не определяется из уравнений тяготения. В случае динамической системы $\mathcal{S}_{\rm D}$, описываемой уравнением Дирака, абсолютным объектом являются дираковские γ-матрицы.

Андерсон [18] детально исследовал роль абсолютных объектов в симметрии динамических систем. Он пришел к следующему заключению. Если динамическая система описывается динамическими уравнениями, записанными в ковариантной форме, то группа симметрии этой динамической системы определяется группой симметрии ее абсолютных объектов. Здесь мы подкрепим этот результат простым примером, записав динамические уравнения заведомо нерелятивистской системы в релятивистски ковариантной форме.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений Максвелла для тензора электромагнитного поля F^{ik} в некоторой инерциальной системе координат x

$$\partial_k F^{ik} = 4\pi J^i, \qquad \varepsilon_{iklm} g^{ij} \partial_j F^{kl} = 0 \tag{5.1}$$

и уравнений

$$m\frac{d}{d\tau}[(l_k\dot{q}^k)^{-1}\dot{q}^i - \frac{1}{2}g^{ik}l_k(l_j\dot{q}^j)^{-2}\dot{q}^s g_{sl}\dot{q}^l] = eF^{il}(q)g_{lk}\dot{q}^k; \qquad i=0,1,2,3 \tag{5.2}$$

$$\dot{q}^k \equiv \frac{dq^k}{d\tau} \tag{5.3}$$

где 4-вектор $q^i = q^i(\tau)$, $i = 0,1,2,3$ описывает координаты точечной частицы как функции параметра τ, а l_i есть постоянный единичный времениподобный вектор

$$g^{ik}l_i l_k = 1; \tag{5.4}$$

а скорость света $c = 1$.

Эта система уравнений релятивистски ковариантна относительно величин q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik}, т.е. она не изменяет свой вид при любом преобразвании Лоренца, сопровождаемом соответствующим преобразованием величин q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik}, где величины q^i, J^i, l_i преобразуются как 4-векторы, а величины F^{ik}, g_{ik} как 4-тензоры

Ссылка на величины q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik} означает, что все они рассматриваются как формальные зависимые переменные, когда сравнивается вид динамических уравнений, записанных в двух различных системах координат. Например, если ссылка на J^i отсутствует в формулировке релятивистской ковариантности, то это означает, что величины J^i рассматриваются как некоторые функции координат x. Если $J^i \neq 0$, то J^i и те же величины $\tilde{J}^i$ в другой системе координат суть различные функции соответственно аргументов x и $\tilde{x}$, и первое уравнение

(5.1) имеет разный вид в различных системах координат. Иначе говоря, динамические уравнения (5.1)–(5.2) не являются релятивистски ковариантными относительно величин q^i, F^{ik}, l_i, g_{ik}. Таким образом, для релятивистской ковариантности важен не только закон преобразования, но и то как рассматривается каждая из величин: как формальная переменная, или как некоторая функция координат.

Следуя Андерсону [18], мы делим величины q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik} на две части: динамические объекты (переменные) q^i, F^{ik} и абсолютные объекты J^i, l_i, g_{ik}. По определению абсолютные объекты имеют одно и то же значение для всех решений динамических уравнений, тогда как значения динамических переменных, вообще говоря, различны для разных решений. Если динамические уравнения записаны в релятивистски ковариантной форме, их группа симметрии (и совместимость с принципами теории относительности) определяется группой симметрии абсолютных объектов J^i, l_i, g_{ik}.

Пусть для простоты $J^i \equiv 0$. Группа симметрии постоянного времениподобного вектора l_i есть группа вращений в 3-мерной плоскости ортогональной 4-вектору l_i. Группа Лоренца есть группа симметрии метрического тензора $g_{ik}=$diag $\{1,-1,-1,-1\}$. Таким образом, группа симметрии всех абсолютных объектов l_i, g_{ik}, $J^i\equiv 0$ есть подгруппа группы Лоренца (вращения в трехмерной плоскости, ортогональной l_i). Так как группа симметрии есть подгруппа группы Лоренца, не совпадающая с группой Лоренца, то система уравнений (5.1)–(5.2) нерелятивистская (несовместимая с принципами теории относительности).

Разумеется, совместимость с принципами теории относительности не может зависеть от того, относительно каких величин рассматривается релятивистская ковариантность уравнений. Например, рассмотрим ковариантность уравнений (5.1), (5.2) относительно величин q^i, F^{ik}, $J^i\equiv 0$. Это означает, что теперь l_i нужно рассматривать как функции x (в данном случае эти функции суть постоянные), потому что ссылка на l_i как на формальную переменную отсутствует. После преобразования к другой системе координат $\tilde{x}^i$ уравнение (5.2) принимает вид

$$m\frac{d}{d\tau}[(\tilde{l}_k\frac{d\tilde{q}^k}{d\tau})^{-1}\frac{d\tilde{q}^i}{d\tau}-\frac{1}{2}g^{ik}\tilde{l}_k(\tilde{l}_j\frac{d\tilde{q}^j}{d\tau})^{-2}\frac{d\tilde{q}^s}{d\tau}\frac{d\tilde{q}_s}{d\tau}]=e\tilde{F}^{il}(\tilde{q})g_{lk}\frac{d\tilde{q}^k}{d\tau} \qquad (5.5)$$

Здесь $\tilde{l}_i$ рассматриваются как функции $\tilde{x}$. Но $\tilde{l}_i$ суть другие функции от $\tilde{x}$, чем l_i от x (другие численные постоянные $\tilde{l}_k = l_j\partial x^j/\partial\tilde{x}^k$ вместо l_k), и уравнения (5.2) и (5.5) имеют различный вид по отношению к величинам q^i, F^{ik}, $J^i\equiv 0$. Это означает, что уравнение (5.2) не является релятивистски ковариантным относительно q^i, F^{ik}, $J^i\equiv 0$, хотя оно релятивистски ковариантно относительно q^i, F^{ik}, l_i, $J^i\equiv 0$.

Наконец, полагая $l_i=\{1,0,0,0\}$, $t=q^0(\tau)$ в (5.2), получаем

$$m\frac{d^2q^\alpha}{dt^2}=eF^{\alpha}_{.0}+eF^{\alpha}_{.\beta}\frac{dq^\beta}{dt}, \qquad i=\alpha=1,2,3; \qquad (5.6)$$

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\frac{dq^\alpha}{dt}\frac{dq^\alpha}{dt}) = eF^\alpha_{.0}\frac{dq^\alpha}{dt}, \qquad i = 0.$$

Легко видеть, что эти уравнения описывают нерелятивистское движение заряженной частицы в заданном электромагнитном поле F^{ik}. Тот факт, что уравнение (5.2) или (5.6) является нерелятивистским связано с расщеплением пространства-времени на пространство и время, что характерно для ньютоновской механики. Это расщепление на пространство и время описывается различными способами в уравнениях (5.2) и (5.6). В уравнении (5.2) оно описывается постоянным времениподобным вектором l_i. В уравнении (5.6) расщепление на пространство и время описывается специальным выбором системы координат, временна́я ось которой направлена вдоль вектора l^i.

Приведенный пример показывает, что нерелятивистское уравнение (5.6) может быть записано в релятивистски ковариантном виде (5.2), при условии, что вводится абсолютный объект l_i, описывающий расщепление на пространство и время.

Матрицы Дирака γ^k суть абсолютные объекты, так же как метрический тензор g^{kl}, который может рассматриваться как абсолютный объект, определяемый соотношением (2.2).

Существует два подхода к уравнению Дирака. В первом из них [19, 20] волновая функция ψ рассматривается как скалярная функция, определенная над полем чисел Клиффорда γ^l

$$\psi = \psi(x,\gamma)\Gamma, \qquad \overline{\psi} = \Gamma\overline{\psi}(x,\gamma), \tag{5.7}$$

где Γ есть постоянный нильпотентный множитель (делитель нуля), обладающий свойством $\Gamma f(\gamma)\Gamma = a\Gamma$. Здесь $f(\gamma)$ – произвольная функция от γ^l и a – комплексное число, зависящее от вида функции f. При таком подходе ψ, $\bar\psi$ преобразуются при преобразовании Лоренца как скаляры, а γ^l преобразуются как компоненты 4-вектора. В этом случае группа симметрии для γ^l есть подгруппа группы Лоренца, и $\mathcal{S}_{\rm D}$ является нерелятивистской системой. Тогда матричный вектор γ^l описывает предпочтительное направление в пространстве-времени.

При втором (традиционном) подходе γ^l, $\quad l = 0,1,2,3$ суть скаляры. а ψ рассматривается как спинор. В этом случае группа симметрии абсолютных объектов γ^l есть группа Лоренца, и динамическая система $\mathcal{S}_{\rm D}$ рассматривается как релятивистская динамическая система.

Разумеется, подходы, приводящие к несовместимым заключениям, не могут быть оба правильными. Один из них ошибочный. Анализируя эти два различные подхода, Зоммерфельд [20] рассматривал первый подход как более обоснованный. Во втором случае, анализ оказывается затруднительным из-за нестандартных преобразований γ^l и ψ при линейных преобразованиях T координат.

В самом деле, преобразование T для вектора $j^l = \bar\psi\gamma^l\psi$ имеет вид

$$\tilde{\bar\psi}\tilde\gamma^l\tilde\psi = \frac{\partial\tilde x^l}{\partial x^s}\bar\psi\gamma^s\psi, \tag{5.8}$$

где величины помеченные тильдой означают величины в преобразованной системе координат. Это преобразование может осуществляться двумя различными путями

$$1: \qquad \tilde{\psi} = \psi, \qquad \tilde{\overline{\psi}} = \overline{\psi}, \qquad \tilde{\gamma}^l = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^s}\gamma^s \tag{5.9}$$

$$2: \qquad \tilde{\gamma}^l = \gamma^l, \qquad \tilde{\psi} = S(\gamma, T)\psi, \qquad \tilde{\overline{\psi}} = \overline{\psi}S^{-1}(\gamma, T), \tag{5.10}$$

$$S^*(\gamma, T)\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}(\gamma, T) \tag{5.11}$$

Соотношение (5.9) соответствует первому подходу, а соотношение (5.10) – второму. Оба подхода приводят к одному и тому же результату при условии, что

$$S^{-1}(\gamma, T)\gamma^l S(\gamma, T) = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^s}\gamma^s \tag{5.12}$$

В частности, для бесконечно малого преобразования Лоренца $x^i \to x^i + \delta\omega^i_{.k}x^k$ $S(\gamma, T)$ имеет вид [21]

$$S(\gamma, T) = \exp\left(\frac{\delta\omega_{ik}}{8}\left(\gamma^i\gamma^k - \gamma^k\gamma^i\right)\right) \tag{5.13}$$

Второй путь (5.10) имеет два недостатка. Во-первых, закон преобразования ψ зависит от γ, т.е. при линейных преобразованиях T координат компоненты ψ преобразуются через ψ и γ^l, а не только через ψ, как это имеет место при преобразованиях тензора, когда компоненты тензора в одной системе координат выражаются через компоненты тензора в другой системе координат, и это преобразование не содержит каких-либо абсолютных объектов. (Например, соотношение (5.8)). Во-вторых, соотношение (5.12) совместимо с соотношением (2.2) только при преобразованиях T между ортогональными системами координат, при которых компоненты $g^{lk} = \{1, -1, -1, -1\}$ метрического тензора являются инваринтными. Иными словами, при втором подходе соотношение (2.2), вообще говоря, нековариантно относительно произвольных линейных преобразований. В этом случае нельзя быть уверенным, что группа симметрии динамической системы совпадает с группой симметрии абсолютных объектов.

Тот факт, что группа симметрии динамической системы совпадает с группой симметрии абсолютных объектов был получен в предположении, что при преобразовании координат каждый объект преобразуется только через его компоненты. Это условие не соблюдено во втором случае, и поэтому нельзя быть уверенным, что симметрия динамической системы совпадает с симметрией абсолютных объектов.

После замены переменных действие (2.1) было преобразовано к виду (3.12) – (3.15), причем γ-матрицы были исключены. Однако, после приведения действия к релятивистски ковариантному виду появились два новых абсолютных объекта: постоянный 4-вектор f^i и постоянный 4-псевдовектор z^i. Далее мы увидим, что 4-псевдовектор z^i является фиктивным, но действие действительно зависит от 4-вектора f^i, который аналогичен по своим свойствам вектору l_i в рассмотренном выше примере (5.2). Это означает, что динамическая система $\mathcal{S}_{\rm D}$ является нерелятивистской, поскольку предполагается абсолютное разделение пространства-времени на пространство и время.

То, что дираковские γ-матрицы содержат постоянный времениподобный вектор, кажется неожиданным. Поскольку вычисления, приводящие к этому результату довольно громоздки, то могут возникнуть сомнения в их правильности. Чтобы устранить сомнения, подробные выкладки приведены в математических приложениях. Кроме того оказывается, что постоянный времениподобный вектор "спрятан" в дираковских γ-матрицах и в случае двумерного уравнения Дирака, когда соответствующие вычисления существенно проще [22].

6 Релятивизация динамических уравнений

Вернемся к действию (4.19), записанному в ковариантной форме

$$\mathcal{S}_{\rm dc}:\mathcal{A}_{\rm dc}\left[x,\xi\right]=\int\{-m\sqrt{\dot{x}^{i}\dot{x}_{i}}-\hbar\frac{\varepsilon_{iklm}\xi^{i}\dot{\xi}^{k}f^{l}z^{m}}{2(1-\xi^{s}z_{s})}-\frac{\hbar}{2}Q\varepsilon_{iklm}\dot{x}^{i}\ddot{x}^{k}f^{l}\xi^{m}\}d\tau_{0} \qquad (6.1)$$

где

$$Q=Q\left(\dot{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^{s}\dot{x}_{s}}(\dot{x}^{l}f_{l}+\sqrt{\dot{x}^{l}\dot{x}_{l}})} \qquad (6.2)$$

Чтобы релятивизировать действие, достаточно превратить абсолютный объект f^i в динамическую переменную, отождествив f^i с 4-скоростью

$$u_{i}=\frac{P_{i}}{M},\qquad M=\sqrt{P_{k}P^{k}} \qquad (6.3)$$

где P_k есть полный импульс динамической системы $\mathcal{S}_{\rm dc}$. и M есть полная масса динамической системы $\mathcal{S}_{\rm dc}$. Пусть L есть лагранжиан действия (6.1). Тогда импульс имеет вид

$$\begin{aligned}P_{i} &= \frac{\partial L}{\partial\dot{x}^{i}}-\frac{d}{d\tau_{0}}\frac{\partial L}{\partial\ddot{x}^{i}}=-m\frac{\dot{x}_{i}}{\sqrt{\dot{x}^{s}\dot{x}_{s}}}-\frac{\hbar}{2}Q\varepsilon_{iklm}\ddot{x}^{k}f^{l}\xi^{m}\\ &\quad -\frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\tau_{0}}\left(Q\varepsilon_{iklm}\dot{x}^{k}\xi^{m}\right)f^{l}-\frac{\hbar}{2}\varepsilon_{sklm}\dot{x}^{s}\ddot{x}^{k}f^{l}\xi^{m}\frac{\partial Q}{\partial\dot{x}^{i}}\end{aligned} \qquad (6.4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}P_{i} &\equiv P_{i}\left(\dot{x},\xi,\dot{\xi},u\right)=-m\frac{\dot{x}_{i}}{\sqrt{\dot{x}^{s}\dot{x}_{s}}}-\hbar Q\varepsilon_{iklm}\ddot{x}^{k}u^{l}\xi^{m}\\ &\quad -\frac{\hbar}{2}Q_{s}\ddot{x}^{s}\varepsilon_{iklm}\xi^{m}\dot{x}^{k}u^{l}-\frac{\hbar}{2}Q\varepsilon_{iklm}\dot{\xi}^{m}\dot{x}^{k}u^{l}-\frac{\hbar}{2}Q_{i}\varepsilon_{sklm}\dot{x}^{s}\ddot{x}^{k}u^{l}\xi^{m}\end{aligned} \qquad (6.5)$$

где

$$Q\equiv Q\left(\dot{x},u\right)=\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^{s}\dot{x}_{s}}(\dot{x}^{l}u_{l}+\sqrt{\dot{x}^{l}\dot{x}_{l}})} \qquad (6.6)$$

$$Q_i \equiv Q_i(\dot{x}, u) = \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^i} = -\frac{\dot{x}_i\left(\dot{x}^l u_l + 2\sqrt{\dot{x}^l \dot{x}_l}\right) + \dot{x}_l \dot{x}^l u_i}{(\dot{x}^s \dot{x}_s)^{3/2}(\dot{x}^l u_l + \sqrt{\dot{x}^l \dot{x}_l})^2}, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{6.7}$$

Вариация действия (6.1) по x^i приводит к динамическим уравнениям

$$\frac{d}{d\tau_0} P_i\left(\dot{x}, \xi, \dot{\xi}, f\right) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{6.8}$$

Это означает, что величина P_i, определенная уравнением (6.5) постоянна $P_i =$const., $i = 0, 1, 2, 3$.

Введем новые динамические переменные u_i и M, определив их соотношениями

$$Mu_i = -P_i\left(\dot{x}, \xi, \dot{\xi}, u\right), \qquad u_i u^i - 1 = 0 \tag{6.9}$$

Эти ограничения добавляются к действию (6.1) с помощью множителей Лагранжа λ^i and η. Одновременно отождествим постоянный 4-вектор f^k с 4-вектором u^k, который является динамической переменной и в то же время $u^k =$const в силу динамических уравнений (6.8) и обозначений (6.9). После отождествления $f^k = u^k$, динамическая система $\mathcal{S}_{\text{dc}}$ превращается в релятивистскую динамическую систему $\mathcal{S}_{\text{dcr}}$, которая описывается действием

$$\mathcal{S}_{\text{dcr}} \quad : \quad \mathcal{A}_{\text{dcr}}[x, \xi, u, M, \lambda, \eta] = \int \left\{ -m\sqrt{\dot{x}^i \dot{x}_i} - \hbar \frac{\varepsilon_{iklm} \xi^i \dot{\xi}^k u^l z^m}{2(1 - \xi^s z_s)} \right.$$
$$\left. - \frac{\hbar}{2} Q \varepsilon_{iklm} \dot{x}^i \ddot{x}^k u^l \xi^m + \lambda^i (Mu_i - P_i) + \eta\left(u_i u^i - 1\right) \right\} d\tau_0 \tag{6.10}$$

где P_i и Q суть известные функции (6.5), (6.6) переменных $\dot{x}, u, \xi, \dot{\xi}$. Теперь действие (6.10) для динамической системы $\mathcal{S}_{\text{dcr}}$ не содержит абсолютных объектов (кроме метрического тензора g_{ik}), и динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\text{dcr}}$ оказываются совместимыми с принципами теории относительности. Динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\text{dcr}}$ совпадают с динамическими уравнениями $\mathcal{S}_{\text{dc}}$ в том частном случае, когда определенный соотношениями (6.4), импульс P_i динамической системы $\mathcal{S}_{\text{dc}}$ выбран таким образом, что $P_i = -\sqrt{P_s P^s} f_i$. Это означает, что системы $\mathcal{S}_{\text{dcr}}$ и $\mathcal{S}_{\text{dc}}$ совпадают в нерелятивистском приближении, когда $f^i = \{1, 0, 0, 0\}$. Процедуру исключения абсолютного объекта f^i и преобразование нерелятивистской динамической системы $\mathcal{S}_{\text{dc}}$ в релятивистскую динамическую систему $\mathcal{S}_{\text{dcr}}$ мы будем называть релятивизацией классической дираковской частицы.

Заметим, что процедура релятивизации может быть применена также к квантовой дираковской частице $\mathcal{S}_{\text{D}}$. Чтобы сделать это, следует написать действие $\mathcal{A}_{\text{Dqur}}$ для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\text{Dqur}}$ динамических систем $\mathcal{S}_{\text{dcr}}$

$$\mathcal{S}_{\text{Dqur}} : \quad \mathcal{A}_{\text{Dqur}}[x, \xi, u, M, \lambda, \eta] = \int L_{\text{dcr}} d\tau_0 d\boldsymbol{\tau} \tag{6.11}$$

где $L_{\rm dcr}$ есть лагранжиан в действии (6.10) и зависимые переменные $x, \xi, u, M, \lambda, \eta$ рассматриваются как функции независимых переменных $\tau = \{\tau_0, \boldsymbol{\tau}\}$. После этого зависимые переменные x^k рассматриваются как независимые переменные, а все остальные переменные рассматриваются как функции переменных x^k. Тогда действие (6.11) преобразуется к виду

$$\mathcal{S}_{\rm Dqur}: \quad \mathcal{A}_{\rm Dqur}[j, \xi, u, M, \lambda, \eta] = \int \mathcal{L}_{\rm dcr} d^4x \tag{6.12}$$

Действие (6.12) отличается от действия (6.11) так же как действие (4.7) отличается от (4.17). После этого можно применять динамическую квантизацию к действию (6.12). Это означает, что следует добавить плотности лагранжианов $\mathcal{L}_{\rm q1}$ и $\mathcal{L}_{\rm q3}$, определенные соответственно соотношениями (3.14) и (4.25) (с f^k замененными на u^k), к плотности лагранжиана $\mathcal{L}_{\rm dcr}$ в (6.12). Плотности лагранжиана $\mathcal{L}_{\rm q1}$ и $\mathcal{L}_{\rm q3}$ содержат поперечные производные и описывают квантовые эффекты. Можно вернуться к описанию в терминах волновых функций, но при этом нельзя быть уверенным, что динамические уравнения будут линейными в терминах волновых функций ψ.

7 Решение динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\rm dcr}$

Решив динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\rm dcr}$ в системе координат, где

$$u^k = \{1, 0, 0, 0\} \tag{7.1}$$

можно получить решения для других значений $u^k =$const с помощью подходящего преобразования Лоренца. При значениях (7.1) динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\rm dcr}$ совпадают с динамическими уравнениями для $\mathcal{S}_{\rm dc}$, при условии, что они написаны для случая $P_i = \{P_0, 0, 0, 0\}$, $f^k = \{1, 0, 0, 0\}$. Итак, мы будем решать динамические уравнения, полученные из действия (4.19), которое написано для случая $f^k = \{1, 0, 0, 0\}$.

Вариация действия (4.19) по $\mathbf{x}$ дает динамическое уравнение

$$\frac{d}{d\tau_0}\left(-m\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}} + \frac{\hbar Q}{2}(\boldsymbol{\xi}\times\ddot{\mathbf{x}}) - \frac{\hbar}{2}\frac{\partial Q}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi} + \frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\tau_0}\left(Q(\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{x}})\right)\right) = 0 \tag{7.2}$$

где

$$Q = Q(\dot{x}) = \left(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s} + \dot{x}^0)\right)^{-1}, \qquad \dot{x}^s\dot{x}_s = \dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{x}}^2 \tag{7.3}$$

Варьируя действие (4.19) по x^0, получаем

$$\frac{d}{d\tau_0}\left(m\frac{\dot{x}^0}{\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}} - \frac{\hbar}{2}\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^0}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}\right) = 0 \tag{7.4}$$

Варьируя действие (4.19) по $\boldsymbol{\xi}$, следует принять во внимание дополнительное условие $\boldsymbol{\xi}^2 = 1$. Полагая

$$\xi^\alpha = \frac{\zeta^\alpha}{\sqrt{\boldsymbol{\zeta}^2}}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{7.5}$$

где $\boldsymbol{\zeta}$ есть произвольный 3-псевдовектор, получаем

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathrm{dc}}}{\delta\zeta^\mu}=\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathrm{dc}}}{\delta\xi^\alpha}\frac{\delta\xi^\alpha}{\delta\zeta^\mu}=\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathrm{dc}}}{\delta\xi^\alpha}\frac{\delta^{\alpha\mu}-\xi^\alpha\xi^\mu}{\sqrt{\boldsymbol{\zeta}^2}}=0 \tag{7.6}$$

Это означает, что имеется только две независимые составляющие динамического уравнения (7.6). Эти компоненты ортогональны к 3-псевдовектору $\boldsymbol{\xi}$ и они могут быть получены из уравнения $\delta\mathcal{A}_{\mathrm{dc}}/\delta\xi^\alpha=0$ с помощью векторного призведения

$$-\hbar\frac{\left(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z}\right)\times\boldsymbol{\xi}}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}+\hbar\left(-\frac{d}{d\tau_0}\frac{(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{z})}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}-\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})^2}\mathbf{z}\right)(\mathbf{z}\times\boldsymbol{\xi})+\hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\times\boldsymbol{\xi}}{2}Q=0 \tag{7.7}$$

После преобразований это уравнение приводится к уравнению (см. Приложение C)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}=-(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\times\boldsymbol{\xi}Q, \tag{7.8}$$

которое не содержит вектора $\mathbf{z}$. Это означает, что $\mathbf{z}$ определяет фиктивное направление в пространстве-времени. Заметим, что $\mathbf{z}$ в действии (3.12) для системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ также фиктивен, поскольку член, содержащий $\mathbf{z}$, один и тот же в обоих действиях (3.12) и (4.7) для $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{Dqu}}$ соответственно.

Выберем параметр τ_0 таким образом, чтобы

$$\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}=\sqrt{\dot{x}_0^2-\dot{\mathbf{x}}^2}=1,\qquad \dot{x}_0=\sqrt{1+\dot{\mathbf{x}}^2} \tag{7.9}$$

Тогда расчет с использованием условия (7.9) дает

$$Q=\frac{1}{1+\dot{x}_0},\qquad \frac{\partial Q}{\partial\dot{x}_0}=-1,\qquad \frac{\partial Q}{\partial\dot{\mathbf{x}}}=\frac{\dot{\mathbf{x}}\,(2+\dot{x}_0)}{(1+\dot{x}_0)^2} \tag{7.10}$$

Интегрирование уравнения (7.4) дает

$$m\dot{x}_0+\frac{\hbar}{2}\,(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\,\boldsymbol{\xi}=-p_0 \tag{7.11}$$

где p_0 есть постоянная интегрированиия.

Исключая $(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}$ из (7.2) с помощью (7.11) и интегрируя его, получаем после упрощений

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1+\dot{x}_0}}\right)\times\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{2}\frac{\dot{\mathbf{x}}\times\dot{\boldsymbol{\xi}}}{\sqrt{1+\dot{x}_0}}\\ =\;&(\mathbf{p}-m\dot{\mathbf{x}})\,\frac{\sqrt{(1+\dot{x}_0)}}{\hbar}+\frac{\dot{\mathbf{x}}\,(2+\dot{x}_0)}{\hbar\,(\dot{x}_0+1)^{3/2}}\,(p_0+m\dot{x}_0)\end{aligned} \tag{7.12}$$

где $p_0,\mathbf{p}$ суть постоянные интегрирования, которые представляют собой постоянные значения 4-импульса $\{P_0,\mathbf{P}\}$ классической дираковской частицы, определяемой соотношением (6.4).

Положим $\mathbf{p}=0$ и введем новые обозначения

$$w_0=\frac{p_0}{m},\qquad \lambda=\frac{\hbar}{m} \tag{7.13}$$

$$\mathbf{y}=\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1+\dot{x}_0}}=\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\dot{\mathbf{x}}^2}}},\qquad \dot{\mathbf{x}}=\mathbf{y}\sqrt{(\mathbf{y}^2+2)} \tag{7.14}$$

$$\dot{x}_0=\sqrt{1+\mathbf{y}^2\left(\mathbf{y}^2+2\right)}=\mathbf{y}^2+1 \tag{7.15}$$

Динамические уравнения (7.12), (7.11), (7.8) для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ приводятся к виду

$$\lambda\dot{\mathbf{y}}\times\left(\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{2}\mathbf{y}\left(\mathbf{y}\boldsymbol{\xi}\right)\right)=-\mathbf{y}\left(\frac{1-w_0}{(\mathbf{y}^2+2)}-w_0\right) \tag{7.16}$$

$$\lambda\dot{\mathbf{y}}\left(\mathbf{y}\times\boldsymbol{\xi}\right)=2\left(1-\frac{1-w_0}{(\mathbf{y}^2+2)}\right) \tag{7.17}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}=\left(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}}\right)\times\boldsymbol{\xi} \tag{7.18}$$

$$\dot{x}_0=\sqrt{1+\mathbf{y}^2\left(\mathbf{y}^2+2\right)}=\mathbf{y}^2+1 \tag{7.19}$$

Из (7.16) следует, что $\mathbf{y}$ ортогонален к $\dot{\mathbf{y}}$ и к $\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{2}\mathbf{y}\left(\mathbf{y}\boldsymbol{\xi}\right)$

$$\left(\mathbf{y}\dot{\mathbf{y}}\right)=0,\qquad \left(\mathbf{y}\boldsymbol{\xi}\right)\left(1+\frac{1}{2}\mathbf{y}^2\right)=0 \tag{7.20}$$

Следовательно,

$$\mathbf{y}^2=b=\mathrm{const},\qquad \left(\mathbf{y}\boldsymbol{\xi}\right)=0 \tag{7.21}$$

и уравнение (7.16) имеет вид

$$\lambda\dot{\mathbf{y}}\times\boldsymbol{\xi}=\left(-\frac{1-w_0}{b+2}+w_0\right)\mathbf{y} \tag{7.22}$$

Хотя из (7.16) – (7.20) не следует прямо, что $(\dot{\mathbf{y}}\boldsymbol{\xi})=0$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}=0$, но специальное исследование показывает, что $\boldsymbol{\xi}=$const, и можно найти такую систему координат, где $\boldsymbol{\xi}=\{0,0,1\}$. В этой системе координат

$$\lambda\dot{y}_2=\left(-\frac{1-w_0}{b+2}+w_0\right)y_1,\qquad -\lambda\dot{y}_1=\left(-\frac{1-w_0}{b+2}+w_0\right)y_2 \tag{7.23}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$y_1=\sqrt{b}\cos\left(\omega\tau_0\right),\quad y_2=\sqrt{b}\sin\left(\omega\tau_0\right), \tag{7.24}$$

где

$$\omega=\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1-w_0}{b+2}+w_0\right) \tag{7.25}$$

Подставляя (7.24) в (7.17), получаем

$$-\left(-\frac{1-w_0}{b+2}+w_0\right)b=2\left(1-\frac{1-w_0}{(b+2)}\right) \tag{7.26}$$

Из (7.26) следует, что постоянные интегрирования b и w_0 связаны соотношением

$$w_0=-\frac{1}{b+1} \tag{7.27}$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{\xi}$ ортогонален к обоим векторам $\mathbf{y}$ и $\dot{\mathbf{y}}$, то уравнение (7.18) удовлетворяется при $\boldsymbol{\xi}$ =const. Комбинируя уравнения (7.24), (7.19) и (7.14), получаем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{y}\frac{\sqrt{b+2}}{b+1}=\left\{\frac{\sqrt{b\,(b+2)}}{b+1}\cos\left(\Omega t\right),-\frac{\sqrt{b\,(b+2)}}{b+1}\sin\left(\Omega t\right),0\right\} \tag{7.28}$$

где

$$\Omega=\frac{\omega}{b+1}=\frac{2}{\lambda\left(b+1\right)^2} \tag{7.29}$$

Интегрирование уравнения (7.28) дает

$$\mathbf{x}=\left\{\lambda\frac{(b+1)\sqrt{b\,(b+2)}}{2}\sin\left(\Omega t\right),\lambda\frac{(b+1)\sqrt{b\,(b+2)}}{2}\cos\left(\Omega t\right),0\right\} \tag{7.30}$$

В этом частном случае мировая линия классической дираковской частицы является спиралью. Полная масса частицы $m_{\rm dcr}=m|w_0|$, радиус $a_{\rm dcr}$ спирали и скорость v частицы определяются соотношениями

$$m_{\rm dcr} = \frac{m}{b+1},\qquad a_{\rm dcr}=\hbar\frac{(b+1)\sqrt{b\,(b+2)}}{2m}=\hbar\frac{\sqrt{b\,(b+2)}}{2m_{\rm dcr}}, \tag{7.31}$$

$$v = \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|=\frac{\sqrt{b\,(b+2)}}{(b+1)} \tag{7.32}$$

Разрешая второе уравнение (7.31) относительно b, выразим b как функцию радиуса $a_{\rm dcr}$ спирали.

$$b=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\zeta^2}}-1,\qquad \zeta=4a_{\rm dcr}\frac{mc}{\hbar}$$

Можно выразить наблюдаемую массу $m_{\rm dcr}$, скорость v и угловую скорость $\omega_{\rm dcr}$ как функции радиуса $a_{\rm dcr}$ спирали. Эти соотношения имеют вид

$$m_{\rm dcr}=\frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{1+\zeta^2}+1\right)}}=\frac{m}{\cosh\beta},\qquad \zeta=4a_{\rm dcr}\frac{mc}{\hbar}=\sinh\left(2\beta\right) \tag{7.33}$$

$$v=c\frac{\zeta}{\left(\sqrt{1+\zeta^2}+1\right)}=c\tanh\beta,\qquad \omega_{\mathrm{dcr}}=\frac{4mc^2}{\hbar}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\zeta^2}+1\right)}=\frac{2mc^2}{\hbar\cosh^2\beta} \tag{7.34}$$

Здесь c есть скорость света.

Заметим, что v есть скорость дираковской частицы в системе координат, где импульс частицы $\mathbf{p}=0$. Кажется странным, что мировая линия свободной дираковской частицы является спиралью, и дираковская частица вращается. Все это выглядит так, как если бы две связанные частицы вращались вокруг их общего центра масс, и мы наблюдали бы только одну из них. Рассмотрим релятивистский ротатор, чтобы проверить эту гипотезу.

8 Релятивистский ротатор

Ротатор – это динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{r}}$, состоящая из двух связанных частиц массы m_0, которые могут вращаться вокруг их общего центра масс, но не могут колебаться. Жесткий нерелятивистский ротатор $\mathcal{S}_{\mathrm{nr}}$ описывается действием

$$\mathcal{S}_{\mathrm{nr}}:\qquad \mathcal{A}\left[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mu\right]=\int\left(\sum_{k=1}^{k=2}\frac{m_0\dot{\mathbf{x}}_k^2}{2}+\mu\left(\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right)^2-4a^2\right)\right)dt \tag{8.1}$$

где $2a$ есть расстояние между частицами. Этот параметр определяется длиной жесткой связи (струны) между частицами. Он не зависит от начальных условий.

Если связь упругая, то действие $\mathcal{S}_{\mathrm{nr}}$ следует записать в виде

$$\mathcal{S}_{\mathrm{nr}}:\qquad \mathcal{A}\left[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mu\right]=\int\left(\sum_{k=1}^{k=2}\frac{m_0\dot{\mathbf{x}}_k^2}{2}-U\left(\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right)^2\right)+\dot{\mu}\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right)^2\right)dt \tag{8.2}$$

где U есть потенциальная энергия взаимодействия двух частиц. Эта энергия постоянна для динамической системы (8.2), из-за динамического уравнения

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\mu}=-\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right)^2=0,\qquad \left(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right)^2=4a^2=\mathrm{const} \tag{8.3}$$

Эволюция переменных $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ не зависит от вида U. Только μ зависит от U. Последнее соотношение (8.3) оказывается интегралом движения. Это означает, что можно опустить потенциальную энергию U в выражении для действия.

В теории относительности жесткие связи невозможны. Для введения потенциальной энергии взаимодействия между частицами также нет оснований, потому что в теории относительности взаимодействие на расстоянии отсутствует. Мы вынуждены избрать другой путь.

Рассмотрим установившееся релятивистское движение двух частиц массы m_0, связанных друг с другом безмассовой эластичной нитью. Условие того, что движение установившееся, означает, что частицы движутся таким образом, что длина нити не изменяется, и можно пренебречь степенями свободы связанными с нитью. Математически это означает, что имеется такая система координат K (может быть, вращающаяся), где частицы неподвижны.

Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, суть мировые линии частиц

$$\mathcal{L}_k: \qquad x_{(k)}^i = x_{(k)}^i(\tau_k), \qquad i = 0, 1, 2, 3; \quad k = 1, 2 \tag{8.4}$$

где τ_k, $k = 1, 2$ суть параметры вдоль этих мировых линий. С геометрической точки зрения установившееся движение частиц означает, что любая пространственная 3-плоскость $\mathcal{S}$, пересекающая $\mathcal{L}_1$ ортогонально, пересекает ортогонально $\mathcal{L}_2$. Это обстоятельство позволяет синхронизировать события на $\mathcal{L}_1$ и на $\mathcal{L}_2$.

Пусть параметры τ_1 и τ_2 выбраны так, что они имеют одно и тоже значение τ в точках $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{S}$ и $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{S}$. Условия того, что движение установившееся (твердотельное) записываются в виде

$$\frac{dx_{(1)}^i(\tau)}{d\tau}\left(x_{(1)i}(\tau) - x_{(2)i}(\tau)\right) = \frac{dx_{(2)}^i(\tau)}{d\tau}\left(x_{(1)i}(\tau) - x_{(2)i}(\tau)\right) = 0 \tag{8.5}$$

Будем описывать движение двух частиц с помощью действия

$$\mathcal{S}_{\text{rr}}: \qquad \mathcal{A}_{\text{rr}}\left[x_{(1)}, x_{(2)}\right] = -\int \sum_{k=1}^{k=2} m_0 \sqrt{\dot{x}_{(k)}^l \dot{x}_{(k)l}}\, d\tau \tag{8.6}$$

где переменные $x_{(k)}$ рассматриваются как функции одного τ. Точка означает дифференцирование по τ. Мировые линии определяются как экстремали функционала (8.6) с дополнительными условиями (8.5).

Удобно ввести новые переменные

$$X^k = \frac{1}{2}\left(x_{(1)}^k + x_{(2)}^k\right), \quad x^k = \frac{1}{2}\left(x_{(1)}^k - x_{(2)}^k\right), \tag{8.7}$$

$$x_{(1)}^k = X^k + x^k, \qquad x_{(2)}^k = X^k - x^k, \tag{8.8}$$

и переписать ограничения (8.5) в эквивалентной форме

$$\frac{d}{d\tau}\left(x^k x_k\right) = 0, \qquad \dot{X}^k x_k = 0 \tag{8.9}$$

Присоединим условия (8.9) к действию с помощью множителей Лагранжа μ и ν. Получаем следующее выражение для действия

$$\mathcal{S}_{\text{rr}}: \qquad \mathcal{A}_{\text{rr}}[X, x, \mu, \nu] = \int \left\{-m_0 R - m_0 r + \dot{\mu} x^k x_k + \nu \dot{X}^k x_k\right\} d\tau \tag{8.10}$$

где

$$R = \sqrt{\left(\dot{X}^k + \dot{x}^k\right)\left(\dot{X}_k + \dot{x}_k\right)}, \qquad r = \sqrt{\left(\dot{X}^k - \dot{x}^k\right)\left(\dot{X}_k - \dot{x}_k\right)} \tag{8.11}$$

Импульсы выражаются следующим образом

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^k} = -\frac{m_0}{R}\left(\dot{X}_k + \dot{x}_k\right) - \frac{m_0}{r}\left(\dot{X}_k - \dot{x}_k\right) + \nu x_k, \qquad (8.12)$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = -\frac{m_0}{R}\left(\dot{X}_k + \dot{x}_k\right) + \frac{m_0}{r}\left(\dot{X}_k - \dot{x}_k\right), \qquad (8.13)$$

Действие (8.10) является инвариантом по отношению к преобразованию $\tau \to f(\tau)$. Используя это, выберем параметр τ так, чтобы $R + r = 1$. Вводя обозначение

$$\beta = R - r, \qquad R + r = 1 \qquad R = \frac{1+\beta}{2}, \qquad r = \frac{1-\beta}{2} \qquad (8.14)$$

и разрешая соотношения (8.12), (8.13) относительно $\dot{X}$ и $\dot{x}$, получаем динамические уравнения

$$\dot{X}_k = -\frac{1}{4m_0}\left(P_k - \nu x_k + \beta p_k\right) \qquad (8.15)$$

$$\dot{x}_k = -\frac{1}{4m_0}\left(\beta P_k - \beta \nu x_k + p_k\right) \qquad (8.16)$$

Вариация действия по X^k, x^k, μ, ν дает соответственно

$$-\dot{P}_k = 0, \qquad \dot{p}_k = 2\dot{\mu} x_k + \nu \dot{X}_k \qquad (8.17)$$

$$2\left(\dot{x}^k x_k\right) = 0, \qquad \dot{X}^k x_k = 0, \qquad (8.18)$$

Уравнения (8.15) – (8.18) образуют полную систему динамических уравнений для определения переменных $X^k, P_k, x^k, p_k, \mu, \nu$ как функций параметра τ.

Из первых уравнений (8.17) и (8.18) следует

$$P_k = \mathrm{const}, \qquad k = 0,1,2,3, \qquad x^k x_k = -a^2 = \mathrm{const} \qquad (8.19)$$

Свертывая уравнения (8.12), (8.13) и второе уравнение (8.17) с x^k и используя уравнения (8.18), получаем соотношения

$$\nu = -\frac{P_k x^k}{a^2}, \qquad p_k x^k = 0, \quad \dot{\mu} = -\frac{x^k \dot{p}_k}{2a^2} \qquad (8.20)$$

$$\dot{p}_s x^s = -p_s \dot{x}^s = \frac{p^k}{4m_0}\left(\beta P_k + p_k\right) \qquad (8.21)$$

$\dot{\mu}$ выражается следующим образом

$$\dot{\mu} = -\frac{\dot{p}_s x^s}{2a^2} = -\frac{p^k}{8m_0 a^2}\left(\beta P_k + p_k\right) \qquad (8.22)$$

Теперь подставим уравнения (8.15), (8.16) в соотношения (8.11). Используя соотношения (8.20), получаем следующие условия

$$(2m_0)^2 = \left(P_k + p_k\right)\left(P^k + p^k\right) + \nu^2 a^2$$

$$(2m_0)^2 = \left(P_k - p_k\right)\left(P^k - p^k\right) + \nu^2 a^2$$

Комбинируя их, получаем

$$p^k p_k = -\left(P^k P_k - 4m_0^2\right) - a^2\nu^2, \qquad P_k p^k = 0 \tag{8.23}$$

Подставим (8.22) во второе уравнение (8.17) и примем во внимание соотношение (8.23) и динамическое уравнение (8.15). Второе уравнение (8.17) преобразуется к

$$\dot{p}_k = -x_k \frac{1}{4m_0 a^2}\left(4m_0^2 - P^s P_s\right) - \frac{\nu}{4m_0}\left(P_k + \beta p_k\right) \tag{8.24}$$

Свертывая (8.24) с p^k и учитывая (8.20), получаем

$$p^k \dot{p}_k = -\beta\nu \frac{p^k p_k}{4m_0} \tag{8.25}$$

Дифференцируя первое уравнение (8.23) и принимая во внимание (8.20), (8.16), получаем

$$p^k \dot{p}_k = -a^2 \nu \dot{\nu} = -\frac{\beta\nu}{4m_0}\left(P_k P^k + \nu^2 a^2\right) \tag{8.26}$$

Сравнивая соотношения (8.25), (8.26) и учитывая (8.23), заключаем, что

$$\beta\nu\left(p_k p^k - 2m_0^2\right) = 0 \tag{8.27}$$

Если $p^k p_k = 2m_0^2 =$const, то из (8.25) следует, что

$$\nu\beta = 0 \tag{8.28}$$

и ограничение (8.27) сводится к (8.28)

Из (8.28) следует

$$\beta = 0 \wedge \nu = 0. \tag{8.29}$$

Чтобы показать это, введем пространственноподобный вектор

$$\zeta_i = \varepsilon_{iklm} x^k p^l P^m. \tag{8.30}$$

Из динамических уравнений (8.16), (8.24) следует

$$\dot{\zeta}_i = \varepsilon_{iklm} \dot{x}^k p^l P^m + \varepsilon_{iklm} x^k \dot{p}^l P^m = 0 \tag{8.31}$$

Пусть

$$\xi_i = \frac{\zeta_i}{\sqrt{-\zeta_k \zeta^k}}, \qquad \xi_i \xi^i = -1 \tag{8.32}$$

Итак, ξ_i есть постоянный единичный пространственноподобный вектор ортогональный к P_k, p_k, x_k. Кроме того вектор p_i ортогонален вектору P_i. Выберем систему координат так, чтобы

$$P_i = \{P_0, 0, 0, 0\}, \quad \xi_i = \{0, 0, 0, 1\}, \tag{8.33}$$

Тогда
$$x^i = \left\{x^0, x^1, x^2, 0\right\}, \qquad p_i = \{0, p_1, p_2, 0\}, \tag{8.34}$$
Пусть $\nu = 0$ есть решение уравнения (8.28). Для $k = 0$ уравнения (8.16), (8.24) имеют соответственно вид

$$\dot{x}_0 = -\frac{1}{4m_0}\beta P_0, \qquad \dot{p}_0 = 0 = \frac{P_0^2 - 4m_0^2}{4m_0 a^2} x_0 \tag{8.35}$$

Из (8.35) следует, что $x_0 = 0$, и $\beta = 0$, т.е. (8.29).

Пусть теперь $\beta = 0$. Тогда для $k = 0$ the уравнения (8.16), (8.24) записываются соответственно в виде

$$\dot{x}_0 = 0, \qquad 0 = \frac{P_0^2 - 4m_0^2}{4m_0 a^2} x_0 - \frac{1}{4m_0}\nu P_0 \tag{8.36}$$

Из (8.36) следует, что $x_0 =$const,

$$\nu = \frac{P_0^2 - 4m_0^2}{P_0 a^2} x_0 = \mathrm{const} \tag{8.37}$$

Условие (8.37) оказывается совместным с (8.23) и вторым соотношением (8.19), если только $\nu = 0$ или $m_0 = 0$. Поскольку $m_0 \neq 0$, то имеют место соотношения (8.29) и $x_0 = 0$. Динамические уравнения (8.16), (8.24) принимают вид

$$\dot{x}_\alpha = -\frac{p_\alpha}{4m_0}, \qquad \dot{p}_\alpha = \frac{P_0^2 - 4m_0^2}{4m_0 a^2} x_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2 \tag{8.38}$$

Решение динамических уравнений (8.38), (8.15) записывается в виде

$$x^i = \{0,\ a\cos(\omega\tau + \phi),\ a\sin(\omega\tau + \phi),\ 0\} \tag{8.39}$$
$$p_i = \{0,\ -4am_0\omega\sin(\omega\tau + \phi),\ 4am_0\omega\cos(\omega\tau + \phi),\ 0\} \tag{8.40}$$
$$X^k = \left\{-\frac{P_0}{4m_0}\tau, 0, 0, 0\right\}, \quad X_0 = t = -\frac{P_0}{4m_0}\tau \tag{8.41}$$

где
$$\omega = \frac{\sqrt{P_0^2 - 4m_0^2}}{4m_0 a}, \tag{8.42}$$

и ϕ – произвольная постоянная.

Заменим независимую переменную τ переменной $t = -\frac{P_0}{4m_0}\tau$. Получаем тогда
$$\omega\tau = \omega_0 t, \qquad \omega_0 = -\frac{\sqrt{P_0^2 - 4m_0^2}}{aP_0} \tag{8.43}$$

$$x_{(1)}^i = \{t,\ a\cos(\omega_0 t + \phi),\ a\sin(\omega_0 t + \phi),\ 0\} \tag{8.44}$$
$$x_{(2)}^i = \{t,\ -a\cos(\omega_0 t + \phi),\ -a\sin(\omega_0 t + \phi),\ 0\} \tag{8.45}$$

Легко видеть, что обе мировые линии $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ являются спиралями. Они описывают вращение двух частиц вокруг их общего центра масс вдоль окружностей радиуса a. Такая динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$ может быть квалифицирована как релятивистский ротатор. Этот ротатор может быть описан относительным увеличением массы $\gamma = (M - 2m_0)/2m_0$, где

$$\gamma = \frac{(M - 2m_0)}{2m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} - 1 = \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2}\left(\sqrt{1 - v^2} + 1\right)} \tag{8.46}$$

Здесь $M = \sqrt{P_i P^i}$ есть полная масса ротатора, и $v = a\omega_0$ есть скорость одной из частиц в системе координат, где покоится центр масс. γ есть часть полной массы, обусловленная вращением.

Расстояние $2a$ между частицами появляется как постоянная интегрирования. В решении (8.44) радиус a и угловая скорость ω_0 вращения суть две независимые постоянные интегрирования.

Для любого реального ротатора эти величины не могут быть независимы. Упругие свойства связи между двумя частицами определяют относительное увеличение массы γ. Эти упругие свойства могут быть описаны функцией жесткости $\gamma = f_{\mathrm{r}}(a)$, которая определяет для любого реального ротатора соотношение между величиной радиуса a и угловой скоростью ω_0, или между a и γ. Для нерелятивистского ротатора функция жесткости $f_{\mathrm{r}}(a)$ связана с потенциальной энергией $U(a)$ упругой связи с помощью соотношения

$$f_{\mathrm{r}}(a) = \frac{a}{mc^2}\frac{\partial U(a)}{\partial a}$$

В релятивистском случае нельзя ввести потенциальную энергию упругой связи. Она заменяется функцией жесткости $f_{\mathrm{r}}(a)$.

Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$, где угловая скорость связана с радиусом спирали, есть частный случай релятивистского ротатора $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$. Чтобы показать это, сравним соотношения (8.43), (8.44) с соотношениями (7.29), (7.30) и отождествим величины ω_0, M, a динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$ соответственно с ω_{dcr}, m_{dcr}, a_{dcr} динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$.

$$\frac{\sqrt{M^2 - 4m_0^2}}{aM} = \frac{4m}{\hbar}\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \zeta^2} + 1\right)}, \qquad M = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{1 + \zeta^2} + 1\right)}} \tag{8.47}$$

$$a = a_{\mathrm{dcr}}, \qquad \zeta = 4a_{\mathrm{dcr}}\frac{m}{\hbar}, \qquad c = 1 \tag{8.48}$$

Разрешая соотношения (8.47) относительно переменных M и m_0, получим все величины релятивистского ротатора $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$ в терминах параметров $\zeta = 4\hbar a_{\mathrm{dcr}}/m$ и m дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$

$$M = m_{\mathrm{dcr}} = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{1 + \zeta^2} + 1\right)}}, \qquad m_0 = \frac{m}{\left(\sqrt{1 + \zeta^2} + 1\right)} \tag{8.49}$$

Можно выразить параметры m, m_{dcr}, ω_{dcr}, v_{dcr} системы $\mathcal{S}_{\mathrm{dcr}}$ в терминах параметров $v = \zeta_0 = 4am_0/\hbar$, m_0 релятивистского ротатора $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$. После вычислений получаем

$$m = 2m_0\frac{1}{1-v^2}, \qquad m_{\mathrm{dcr}} = \frac{2m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \omega_{\mathrm{dcr}} = \frac{4m_0c^2}{\hbar}, \tag{8.50}$$

где

$$v = \zeta_0 = 4a\frac{m_0c^2}{\hbar} \tag{8.51}$$

Релятивистский угловой момент A и магнитный момент μ_0 имеют вид

$$A = 2m_0\frac{av}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \mu_0 = \frac{eav}{2\sqrt{1-v^2}}$$

$$\frac{\mu_0}{A} = \frac{e}{4m_0} = \frac{e}{2m_{\mathrm{dcr}}}\sqrt{1-v^2}$$

Функция жесткости $\gamma = f_{\mathrm{r}}\left(a_{\mathrm{dcr}}\right)$ описывается соотношениями (8.46). Как следует из соотношений (8.50), (8.51) функция жесткости имеет вид

$$\gamma = f_{\mathrm{r}}\left(a\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{\hbar^2 - \left(4am_0c\right)^2}} - 1 \tag{8.52}$$

Из (8.52) следует, что $a \le \frac{\hbar}{4m_0c}$. По-видимому, это указывает на квантовую природу связи между частицами ротатора.

9 Обсуждение

Принято рассматривать дираковскую частицу как точечную конструкцию, обладающую такими характеристиками как масса, заряд, спин и магнитный момент. Спин и магнитный момент кажутся свойствами, чуждыми для точечной конструкции. Направления импульса и скорости дираковской частицы не совпадают. Это тоже довольно странно для точечной структуры. Классическая дираковская частица имеет десять степеней свободы в том смысле, что интегрирование динамических уравнений приводит к появлению десяти постоянных интегрирования. Это слишком много для точечной структуры.

Анализ динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ показывает, что дираковская частица не является точечной структурой. Это более сложная структура, состоящая из двух точечных частиц, связанных между собой. Такие свойства как спин и магнитный момент совершенно естественны для такой динамической системы. Расхождение между направлением скорости и импульса также легко объясняется, если сравнивать переменную скорость одной из частиц с постоянным импульсом всего ротатора. Число степеней свободы также непринужденно объясняется двумя связанными частицами. Шесть степеней свободы, описывающие движение дираковской частицы как целого, являются релятивистскими в том смысле, что глобальная скорость меньше скорости света. Если пренебречь внутренними степенями свободы , которые описываются двумя последними членами в выражении для действия (4.17), динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ становится релятивистской. Нерелятивистский характер динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ связан с некорректным описанием внутренних степеней свободы. Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ может быть сделана релятивистской, если принять, что $\mathcal{S}_{\mathrm{dc}}$ есть частный случай релятивистского ротатора $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$ с функцией жесткости $\gamma = f_{\mathrm{r}}(a)$, описывемой соотношением (8.52). Функция жесткости $\gamma = f_{\mathrm{r}}(a)$, является релятивистски инвариантной характеристикой релятивистского ротатора $\mathcal{S}_{\mathrm{rr}}$.

Непринужденно объясняя все странные свойства дираковской частицы, двухчастичная модель ставит очень важный вопрос. Какова природа связи между двумя частицами ротатора? Появление квантовой постоянной $\hbar$ в соотношении (8.52), описывающем характер связи, показывает, что связь, по-видимому, имеет квантовую природу.

Методами традиционной квантовой механики не удается раскрыть внутреннюю структуру дираковской частицы. Они слишком грубы. Внутренняя структура дираковской частицы раскрывается динамическими методами МККЯ, которые оказываются более тонкими. Внутренняя структура дираковской частицы не имеет значения при расчете стационарных состояний атомов, потому что характерные энергии слишком малы, и внутренние степени свободы дираковской частицы не возбуждаются. Однако, структура дираковской частицы может оказаться важной при исследовании структуры элементарных частиц, потому что характерные энергии достаточно велики, и внутренние степени свободы могут возбуждаться.

Математические приложения

А Вычисление лагранжиана

Вычислим выражение

$$\frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi + \text{h.c} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \tag{A.1}$$

где использованы следующие обозначения

$$F_1 = \frac{i}{2}\hbar\psi^*\left(\left(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\right)i\varphi\right)\psi + \text{h.c.} \tag{A.2}$$

$$F_2 = \frac{i}{2}\hbar\psi^*\left(\left(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_5\kappa\right)\right)\psi + \text{h.c.} \tag{A.3}$$

$$F_3 = +\frac{i}{2}\hbar A^2\Pi\left(\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)e^{-i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}}\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\right)e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla})(e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}})\Pi + \text{h.c.} \tag{A.4}$$

$$F_4 = \frac{i}{2}\hbar A^2\Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\nabla})e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi + \text{h.c.} \tag{A.5}$$

В последнем соотношении матрица $\boldsymbol{\Sigma}$ не дифференцируется

Используя определения j^l и S^l, можно привести выражения F_1 и F_2 к виду

$$F_1 = \frac{i}{2}\hbar\psi^*\left(\left(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\right)i\varphi\right)\psi + \text{h.c.} = -j^l\partial_l\varphi\Pi \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{i}{2}\hbar\psi^*\left(\left(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_5\kappa\right)\right)\psi + \text{h.c} \\ &= \frac{i}{2}\hbar\psi^*\gamma_5\gamma^l\partial_l\left(\frac{1}{2}\gamma_5\kappa\right)\psi + \text{h.c} \end{aligned}$$

$$F_2 = -\frac{1}{2}\hbar S^l\partial_l\kappa\Pi \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{i}{2}\hbar A^2\Pi\left(e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}e^{-i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}}e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}\right)e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\nabla)(e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}})\Pi + \text{h.c.} \\ &= \frac{i}{2}\hbar j^l\Pi\sigma_\alpha\sigma_\beta n^\alpha\partial_l n^\beta\Pi + \text{h.c.} = \frac{i}{2}\hbar j^l n^\alpha\partial_l n^\beta\Pi\left(\delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma\right)\Pi + \text{h.c.} \\ &= \frac{i}{2}\hbar j^l\left(n^\alpha\partial_l n^\alpha + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n^\alpha\partial_l n^\beta z^\gamma\right)\Pi + \text{h.c.} \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{n}^2 = 1$, получаем

$$n^\alpha\partial_l n^\alpha = 0 \tag{A.8}$$

Кроме того из (2.28) следует, что

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\xi} + \mathbf{z}}{\sqrt{2\left(1 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}} \tag{A.9}$$

Тогда

$$F_3 = -\hbar j^l \left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^\alpha \partial_l n^\beta z^\gamma\right)\Pi = -\frac{\hbar j^l}{2\left(1 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \xi^\alpha \partial_l \xi^\beta z^\gamma \Pi \tag{A.10}$$

Вычисление F_4 дает следующий результат

$$\begin{aligned}
F_4 &= \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma\eta}} (\partial_0 - i\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma\nabla}) e^{-\frac{i}{2}\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma\eta}} \Pi + \text{h.c.} \\
&= \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \left(\cosh\frac{\eta}{2} - i\gamma_5 v^\alpha \Sigma_\alpha \sinh\frac{\eta}{2}\right) \\
&\quad \times (\partial_0 - i\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma\nabla}) \left(\cosh\frac{\eta}{2} - i\gamma_5 v^\alpha \Sigma_\alpha \sinh\frac{\eta}{2}\right)\Pi + \text{h.c.} \\
&= \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \left(\cosh\frac{\eta}{2}\sinh\frac{\eta}{2}\partial_0\eta + \sinh^2\frac{\eta}{2} v^\alpha \partial_0 v^\beta \Sigma_\alpha \Sigma_\beta\right)\Pi + \text{h.c.} \\
&\quad + \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \left(\cosh^2\frac{\eta}{2}\Sigma_\alpha\Sigma_\beta v^\beta + \sinh^2\frac{\eta}{2}\Sigma_\beta\Sigma_\alpha v^\beta\right)\partial_\alpha \frac{\eta}{2} + \text{h.c.} \\
&\quad + \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \cosh\frac{\eta}{2}\sinh\frac{\eta}{2}\Sigma_\alpha\Sigma_\beta \partial_\alpha v^\beta \Pi + \text{h.c.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 &= \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma\eta}} (\partial_0 - i\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma\nabla}) e^{-\frac{i}{2}\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma\eta}} \Pi + \text{h.c.} \\
&= \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \left(\cosh\frac{\eta}{2} - i\gamma_5 v^\alpha \Sigma_\alpha \sinh\frac{\eta}{2}\right) \\
&\quad \times (\partial_0 - i\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma\nabla}) \left(\cosh\frac{\eta}{2} - i\gamma_5 v^\alpha \Sigma_\alpha \sinh\frac{\eta}{2}\right)\Pi + \text{h.c.} \\
&= \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \left(\cosh\frac{\eta}{2}\sinh\frac{\eta}{2}\partial_0\eta + \sinh^2\frac{\eta}{2} v^\alpha \partial_0 v^\beta \Sigma_\alpha \Sigma_\beta\right)\Pi + \text{h.c.} \\
&\quad + \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \left(\cosh^2\frac{\eta}{2}\Sigma_\alpha\Sigma_\beta v^\beta + \sinh^2\frac{\eta}{2}\Sigma_\beta\Sigma_\alpha v^\beta\right)\partial_\alpha \frac{\eta}{2}\Pi + \text{h.c.} \\
&\quad + \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \cosh\frac{\eta}{2}\sinh\frac{\eta}{2}\Sigma_\alpha\Sigma_\beta \partial_\alpha v^\beta \Pi + \text{h.c.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 &= \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \left(\frac{1}{2}\sinh\eta\,\partial_0\eta + \sinh^2\frac{\eta}{2} v^\alpha \partial_0 v^\beta i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Sigma_\gamma\right)\Pi + \text{h.c.} \quad + \\
&\quad + \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi \left(\cosh\eta\, v^\alpha + i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} v^\beta \Sigma_\gamma\right)\partial_\alpha \frac{\eta}{2}\Pi + \text{h.c.} \\
&\quad + \frac{i}{4}\hbar A^2 \Pi \sinh\eta \left(\partial_\alpha v^\alpha + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha v^\beta \Sigma_\gamma\right)\Pi + \text{h.c.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 &= -\hbar A^2 \left(\sinh^2\frac{\eta}{2} v^\alpha \partial_0 v^\beta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\gamma\right)\Pi \\
&\quad -\frac{1}{2}\hbar A^2 \Pi \left(\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} v^\beta \xi^\gamma \partial_\alpha \eta + \sinh\eta\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha v^\beta \xi^\gamma\right)\Pi
\end{aligned}$$

$$F_4 = -\frac{1}{2}\hbar A^2 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\partial_\alpha \eta v^\beta + \sinh\eta \partial_\alpha v^\beta + 2\sinh^2(\frac{\eta}{2}) v^\alpha \partial_0 v^\beta\right) \xi^\gamma \Pi \tag{A.11}$$

B Преобразование лагранжиана к ковариантной форме

Покажем, что выражение (3.4) эквивалентно соотношению (3.10)

$$F_4 = -\frac{\hbar}{2(\rho + f^s j_s)} \varepsilon_{iklm} [\partial^k (j^i + f^i \rho)](j^l + f^l \rho)[\xi^m - f^m(\xi^s f_s)] \tag{B.1}$$

Чтобы доказать это утверждение, положим в соотношении (B.1) $f^0 = 1$, $f^\alpha = 0$ и разложим его

$$\begin{aligned} F_4 &= -\frac{\hbar}{2(\rho + f^s j_s)} \varepsilon_{iklm} [\partial^k (j^i + f^i \rho)](j^l + f^l \rho)[\xi^m - f^m(\xi^s f_s)] \\ &= -\frac{\hbar \xi^\mu}{2(\rho + j^0)} \left(\varepsilon_{i0l\mu} \partial^0 (j^i + f^i \rho)(j^l + f^l \rho) + \varepsilon_{i\beta l\mu} \partial^\beta (j^i + f^i \rho)(j^l + f^l \rho)\right) \\ &= -\frac{\hbar \xi^\mu}{2(\rho + j^0)} \left(\varepsilon_{\alpha 0 l \mu} \partial_0 j^\alpha j^\beta + \varepsilon_{0\beta\alpha\mu} \partial^\beta (j^0 + \rho) j^\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta 0\mu} \partial^\beta j^\alpha (j^0 + \rho)\right) \end{aligned}$$

Подставляем выражение j^i через переменные $\mathbf{v}$, η

$$j^0 = \rho \cosh\eta, \qquad j^\alpha = \rho \sinh\eta v^\alpha \tag{B.2}$$

в это выражение и получаем

$$\begin{aligned} F_4 &= -\frac{\hbar \xi^\mu \rho}{2(1 + \cosh\eta)} \sinh^2\eta \varepsilon_{\alpha 0\beta\mu} \partial_0 v^\alpha v^\beta - \frac{\hbar \xi^\mu}{2} \varepsilon_{\alpha\beta 0\mu} \partial_\beta \left(\rho \sinh\eta v^\alpha\right) \\ &\quad -\frac{\hbar \xi^\mu \sinh\eta}{2(1 + \cosh\eta)} \varepsilon_{0\beta\alpha\mu} \partial_\beta \left(\rho(\cosh\eta + 1)\right) v^\alpha \\ &= \frac{\hbar \xi^\mu}{2} \frac{\rho \sinh^2\eta}{(1 + \cosh\eta)} \varepsilon_{0\alpha\beta\mu} \partial_0 v^\alpha v^\beta - \frac{\hbar \xi^\mu}{2} \rho \varepsilon_{0\alpha\beta\mu} \partial_\beta \left(\sinh\eta v^\alpha\right) \\ &\quad + \frac{\hbar \xi^\mu}{2} \frac{\rho \sinh\eta}{(1 + \cosh\eta)} \varepsilon_{0\alpha\beta\mu} \partial_\beta (\cosh\eta + 1) v^\alpha \\ &= -\frac{\hbar \xi^\mu}{2} \rho \varepsilon_{0\alpha\beta\mu} \left(-\frac{\sinh^2\eta}{(1 + \cosh\eta)} \partial_0 v^\alpha v^\beta + \partial_\beta \left(\sinh\eta v^\alpha\right)\right) \\ &\quad + \frac{\hbar \xi^\mu}{2} \rho \varepsilon_{0\alpha\beta\mu} \frac{\sinh\eta}{(1 + \cosh\eta)} \partial_\beta (\cosh\eta + 1) v^\alpha \\ &= -\frac{\hbar \xi^\mu}{2} \rho \varepsilon_{0\alpha\beta\mu} \left(-2\sinh^2\frac{\eta}{2} \partial_0 v^\alpha v^\beta + \cosh\eta v^\alpha \partial_\beta \eta + \sinh\eta \partial_\beta v^\alpha\right) \\ &\quad + \frac{\hbar \xi^\mu}{2} \rho \varepsilon_{0\alpha\beta\mu} \frac{\sinh^2\eta}{(1 + \cosh\eta)} v^\alpha \partial_\beta \eta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{\hbar\xi^\mu}{2}\rho\varepsilon_{0\alpha\beta\mu}\left(-2\sinh^2\frac{\eta}{2}\partial_0 v^\alpha v^\beta + \sinh\eta\partial_\beta v^\alpha\right) \\
& +\frac{\hbar\xi^\mu}{2}\rho\varepsilon_{0\alpha\beta\mu}\frac{\sinh^2\eta - \cosh\eta - \cosh^2\eta}{(1+\cosh\eta)} v^\alpha\partial_\beta\eta \\
= & -\frac{\hbar\xi^\mu}{2}\rho\varepsilon_{0\alpha\beta\mu}\left(-2\sinh^2\frac{\eta}{2}\partial_0 v^\alpha v^\beta + \sinh\eta\partial_\beta v^\alpha + v^\alpha\partial_\beta\eta\right)
\end{aligned}
$$

Полученное выражение совпадает с выражением (3.4) для F_4, что доказывает справедливость выражения (3.10).

C Преобразование уравнения для переменной $\boldsymbol{\xi}$

Преобразуем уравнение (7.7)

$$
\boldsymbol{\xi}\times\left(-\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z} + \frac{(\mathbf{z}\dot{\boldsymbol{\xi}})}{2(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{z} + \frac{\boldsymbol{\xi}(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z})}{2(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}\mathbf{z} - \frac{(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}{2}\mathbf{b}\right) = 0 \tag{C.1}
$$

имея в виду, что $\boldsymbol{\xi}^2 = 1$ и $\mathbf{z}^2 = 1$. Два средних члена могут быть представлены как двойное векторное произведение

$$
\boldsymbol{\xi}\times\left(-\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z} + \frac{1}{2(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}\left(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times((\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{z})\times\mathbf{z})\right) - \frac{(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}{2}\mathbf{b}\right) = 0 \tag{C.2}
$$

Или в виде

$$
\boldsymbol{\xi}\times\left(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\left(-\mathbf{z}+\frac{(\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})\,\mathbf{z}-\boldsymbol{\xi}}{2(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}\right) - \frac{(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}{2}\mathbf{b}\right) = 0 \tag{C.3}
$$

Теперь раскрывая двойное векторное произведение и имея в виду, что $\boldsymbol{\xi}\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$, получаем

$$
-\dot{\boldsymbol{\xi}} - (\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{b}) = 0 \tag{C.4}
$$

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, *Found. Phys.* **28,** 245, (1998).

[2] A. Clebsch, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[3] A. Clebsch, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[4] Yu. A. Rylov, *J. Math. Phys.*, **40,** 256-278, (1999).

[5] D. Bohm, *Phys. Rev.,* **85**, 166, (1952); **85**, 180, (1952).

[6] E. Madelung, *Z. Phys.* **40**, 322, (1926).

[7] L. de Broglie, *Comptes Rendus,* **183**, 447, (1926).

[8] Yu.A. Rylov, *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[9] Yu. A. Rylov, in *Chaos: the interplay between stochastic and deterministic behaviour* in Physics. Springer, Berlin), **457**, 523-529, (1995)

[10] P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics,* 4th ed. Oxford, 1958.

[11] L. L. Foldy, and S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.,* **78**, 29, (1950).

[12] E. Schrödinger, *Sitzungsber. Preuss. Wiss. Phys. Math. Kl.* **24**, 418, (1930).

[13] A. O. Barut, N. Zanghi, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2009, (1984).

[14] A. O. Barut, A. J. Bracken, *Phys. Rev.* **D23**, 2454, (1981).

[15] J. C. Aron, *Found. Phys.* **11**, 863, (1981).

[16] D. Hestenes, *Found. Phys.* **20**, 45, (1990).

[17] W. A. Rodriges Jr., J. Vaz Jr. *Phys. Lett.* **B318**, 623, (1993).

[18] J. L. Anderson, *Principles of relativity physics.* Academic Press, New-York, 1967, pp 75-88.

[19] F. Sauter, *Zs. Phys.* **63,** 803, (1930), **64**, 295, (1930).

[20] A. Sommerfeld, *Atombau and Spektrallinien.* bd.2, Braunschweig, 1951.

[21] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory.* New York, 1961, chp. 4, sec.3.

[22] Yu. A. Rylov, *Adv. Appl. Cliff. Algebras*, **9**, 177, (1999).