Описание метрического пространства как классификация его конечных подпространств

Ю. А. РЫЛОВ
Институт проблем механики РАН,
г. Москва

УДК 514.13

Ключевые слова: метрика, мировая функция, трубка.

Аннотация

Предлагается новый метод описания метрического пространства, использующий его конституэнты — конечные подпространства — в качестве основных объектов описания. Метод позволяет извлечь из метрики зашифрованную в ней информацию о свойствах метрического пространства и описывать геометрию метрического пространства в терминах только его конституэнтов и метрики. Предлагаемый метод позволяет отказаться от ограничений, налагаемых обычно на метрику (аксиома треугольника и неотрицательность квадрата метрики). В результате отбрасывания этих ограничений возникает новая, невырожденная геометрия, называемая также трубчатой геометрией (Т-геометрией), поскольку в ней кратчайшие заменяются полыми трубками. Т-геометрия может быть использована для описания пространства-времени и других геометрий с индефинитной метрикой.

Abstract

Yu. A. Rylov, Description of metric space as a classification of its finite subspaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 7 (2001), no. 4, pp. 1147–1175.

We suggest a new method of metric space description, using its constituents (finite metric subspaces) as basic objects of description. The method allows one to obtain information about the metric space properties from the metric and to describe the metric space geometry in terms of its constituents and metric only. The suggested method permits one to remove the constraints imposed usually on metric (the triangle axiom and non-negativity of the squared metric). Elimination of these constraints leads to a new non-degenerate geometry. This geometry is called tubular geometry (T-geometry), because in this geometry the shortest paths are replaced by hollow tubes. The T-geometry may be used for description of the space-time and of other geometries with indefinite metric.

1. Введение

Под геометрическим объектом понимается некоторое множество точек рассматриваемого пространства, выделенное свойствами его точек. Под гео-

Фундаментальная и прикладная математика, 2001, том 7, № 4, с. 1147–1175.

метрией обычно понимается совокупность всех утверждений (аксиом и теорем) о свойствах всех геометрических объектов. Существует несколько способов описания евклидовой геометрии, которая может рассматриваться как некоторая эталонная геометрия, поскольку другие геометрии получаются из евклидовой геометрии путём её обобщения или модификации.

Наиболее известны следующие три способа описания евклидовой геометрии: (1) описание на основе линейного векторного пространства, (2) описание на основе метрического пространства, (3) аксиоматическая концепция евклидовой геометрии. Аксиоматическая концепция евклидовой геометрии — наиболее старая концепция. В ней евклидова геометрия формулируется в виде системы аксиом. Эти аксиомы описывают однородность, изотропность и непрерывность евклидова пространства и свойства важнейших геометрических объектов, таких как точка, прямая и плоскости различных размерностей. Она не содержит каких-либо числовых характеристик и поэтому практически не может быть подвергнута модификации или обобщению.

Между тем реальная геометрия пространства-времени однородна только приближённо, и нужно уметь строить неоднородные геометрии. Это достигается тем, что в описание евклидовой геометрии вводятся некоторые числовые характеристики, которые можно изменять. Обычно в качестве такой числовой характеристики используется метрика (метрическая функция, описывающая расстояние между парами точек пространства). При одном задании метрики получается евклидова геометрия. При другом — возникают неевклидовы геометрии, которые можно рассматривать как результат деформации евклидова пространства, или как результат обобщения (модификации) евклидовой геометрии.

Обычно метрика вводится в описание евклидова пространства следующим образом. Вводится понятие вектора $\mathbf{u} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}$ как геометрического объекта, состоящего из двух точек: начала P_0 и конца P вектора. Рассматривается линейное векторное пространство, состоящее из векторов $\mathbf{u} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}$, имеющих общее начало в точке P_0. Над векторами можно производить линейные операции (складывать два вектора и умножать вектор на вещественное число), в результате которых получаются новые векторы. При этом существенно используются такие свойства линейного пространства (и евклидовой геометрии), как однородность, изотропность и непрерывность. Кроме того, для любых двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ вводится вещественное число $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}, \mathbf{P}_0\mathbf{Q})$, называемое скалярным произведением этих векторов. После введения скалярного произведения линейное векторное пространство превращается в векторное евклидово пространство. Точечное евклидово пространство, где действует евклидова геометрия, получается из векторного евклидова пространства как множество концов P всех векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ линейного векторного пространства. Метрика $\rho(P, Q)$ (расстояние между точками P и Q) получается из скалярного произведения $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}, \mathbf{P}_0\mathbf{Q})$ векторов с помощью соотношения

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}, \mathbf{P}_0\mathbf{P}) + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}, \mathbf{P}_0\mathbf{Q}) - (\mathbf{P}_0\mathbf{P}, \mathbf{P}_0\mathbf{Q}), \qquad (1.1)$$

где $\sigma(P,Q)$ есть мировая функция, связанная с метрикой ρ соотношением

$$\sigma(P,Q) \equiv \frac{1}{2}\rho^2(P,Q). \tag{1.2}$$

Название «мировая функция» было предложено Сингом [1], который ввёл её для описания риманова пространства и широко использовал для описания геометрии пространства-времени. Использование мировой функции σ вместо метрики ρ во многих случаях оказывается более удобным.

Наоборот, скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}, \mathbf{P}_0\mathbf{Q})$ получается из мировой функции (метрики) с помощью соотношения

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}, \mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = \sigma(P_0,P) + \sigma(P_0,Q) - \sigma(P,Q). \tag{1.3}$$

Наличие линейного векторного пространства позволяет строить в евклидовом пространстве такие важные геометрические объекты, как прямая и плоскости различных размерностей. k-мерная плоскость $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(\mathcal{P}^k)$ задаётся $k+1$ точками $\mathcal{P}^k \equiv \{P_0, P_1, \ldots, P_k\}$, не лежащими на одной $(k-1)$-мерной плоскости $\mathcal{L}_{k-1}$. Она может быть получена как множество концов векторов, образующих линейную оболочку k линейно независимых векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l$, $l = 1, 2, \ldots, k$.

Назовём естественным геометрическим объектом (ЕГО) n-го порядка множество точек, определяемое геометрией и $n+1$ базисными точками $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$. В евклидовом пространстве k-мерная плоскость $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(\mathcal{P}^k)$ определяется $k+1$ точками, не лежащими на одной $(k-1)$-мерной плоскости $\mathcal{L}_{k-1}$ и самой евклидовой геометрией. Это позволяет утверждать, что k-мерная плоскость $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(\mathcal{P}^k)$ есть ЕГО k-го порядка. ЕГО являются важнейшими составляющими описания евклидовой геометрии. В самом деле, при аксиоматическом описании в евклидову геометрию не вводится ни метрика, ни линейное пространство, но ЕГО в нём присутствуют в виде прямой и плоскостей разной размерности. При аксиоматическом описании часть аксиом описывает однородность, изотропность и непрерывность евклидова пространства, а другая часть аксиом, трактующая о свойствах точки, прямой и плоскости, определяет прямую и плоскость (т. е. ЕГО) через их свойства. При этом достигается полное описание евклидовой геометрии, хотя понятия линейного векторного пространства и метрического пространства не вводятся. При изложении евклидовой геометрии на основе линейного векторного пространства эти аксиомы превращаются в теоремы, которые могут быть доказаны на основе свойств линейного векторного пространства. Это означает, что на самом деле для изложения евклидовой геометрии важны естественные геометрические объекты (ЕГО), а не линейное векторное пространство, или аксиомы, трактующие о свойствах точки, прямой и плоскости. Последние важны не сами по себе, а только как средство для определения ЕГО.

Таким образом, если мы хотим научиться достаточно полно описывать неоднородные, неизотропные и необязательно непрерывные геометрии, то следует научиться строить ЕГО в общем случае, не опираясь на линейное векторное пространство, которое однородно, изотропно и непрерывно. При этом для того чтобы геометрия могла быть модифицирована, нужно определять ЕГО через числовые характеристики, например через метрику, рассматривая её как числовую функцию пар точек пространства.

Естественный способ определения ЕГО через метрику выглядит следующим образом. Нужно определить, как можно построить ЕГО для евклидова пространства в терминах мировой функции σ (или метрики ρ), а затем объявить, что полученный способ построения ЕГО пригоден для любой мировой функции (метрики), т. е. для любого метрического пространства.

Связь между линейным векторным пространством (ЛВП), евклидовым векторным пространством (ЕВП), точечным евклидовым пространством (ТЕП) и естественными геометрическими объектами (ЕГО) описывается следующей схемой:

$$\begin{tikzcd} & \text{ЕГО} & \\ \text{ЛВП} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \text{ЕВП} \arrow[r] & \text{ТЕП} \end{tikzcd} \qquad (1.4)$$

На этой схеме ЕГО является атрибутом линейного векторного пространства (ЛВП) и связан с точечным евклидовым пространством (ТЕП) и метрикой через него. На схеме (1.4) линейное векторное пространство (ЛВП) является базовой конструкцией, которая никак не может быть выброшена из описания евклидова пространства. ЛВП обязательно однородно, изотропно и непрерывно и само по себе не содержит метрики (или скалярного произведения). Для того чтобы сделать линейное векторное пространство промежуточной конструкцией, несущественной при построении ЕГО на основе метрики, нужно использовать другую схему описания евклидова пространства, которая может быть получена из схемы (1.4):

$$\text{ТЕП} \longrightarrow \text{ЕВП} \longrightarrow \text{ЛВП} \longrightarrow \text{ЕГО} \qquad (1.5)$$

На схеме (1.5) базовой конструкцией является точечное евклидово пространство (ТЕП), которое является метрическим пространством в том смысле, что основной и единственной характеристикой его является метрика (мировая функция). Если оно одновременно является евклидовым, т. е. однородным, изотропным и непрерывным, то в нём можно ввести линейное векторное пространство и построить ЕГО n-го порядка как множество концов векторов, образующих линейную оболочку n линейно независимых векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l$, $l = 1, 2, \dots, n$, определяемых $n+1$ точками $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$. После того как рецепт построения ЕГО на основе метрики будет получен, можно отбросить линейное пространство с его однородностью, изотропией и непрерывностью как вспомогательную промежуточную конструкцию и перейти к схеме

$$\text{ТЕП} \longrightarrow \text{ЕГО} \qquad (1.6)$$

где способ построения ЕГО не обременён такими ограничениями, как однородность, изотропия и непрерывность пространства, и может быть реализован для любого метрического пространства.

Способ построения ЕГО n-го порядка можно получить следующим образом. Пусть $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\} \subset \Omega$ есть множество из $n+1$ точек $(n = 1, 2, \ldots)$ в точечном евклидовом пространстве и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, суть n векторов, определяемых в векторном евклидовом пространстве этими точками $\mathcal{P}^n$, а $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, — их скалярные произведения. Условие линейной независимости n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, записывается в виде

$$F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \tag{1.7}$$

где

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||, \quad P_0, P_i, P_k \in \Omega, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.8}$$

есть определитель Грама, причём скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)$ предполагается выраженным через мировую функцию σ с помощью (1.3). Чтобы отличать скалярное произведение как атрибут метрического пространства (т. е. скалярное произведение, выраженное через σ без ссылки на линейное векторное пространство) от обычного скалярного произведения, определённого в линейном векторном пространстве, мы будем называть его скалярным σ-произведением и при его записи заменять запятую на точку:

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) \equiv \sigma(P_0, P_i) + \sigma(P_0, P_k) - \sigma(P_i, P_k). \tag{1.9}$$

Таким образом, определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||\Gamma(P_0, P_i, P_k)||, \quad P_0, P_i, P_k \in \Omega, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.10}$$

$$\Gamma(P_0, P_i, P_k) \equiv \sigma(P_0, P_i) + \sigma(P_0, P_k) - \sigma(P_i, P_k) \tag{1.11}$$

выражается только через мировую функцию σ.

Пусть n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы. Тогда $F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0$. Построим линейную оболочку векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, состоящую из векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$. Тогда $n+1$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ линейно зависимы, и точка R удовлетворяет соотношению $F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R) = 0$. Множество $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n) = \{R \mid F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R) = 0\}$ точек R представляет собой n-мерную плоскость, проходящую через $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$. Поскольку соотношение, определяющее это множество, содержит только мировую функцию, то оно определяет некоторое множество точек $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = \{R \mid F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R) = 0\} \subset \Omega$ в любом метрическом пространстве $M = \{\rho, \Omega\}$ независимо от того, можно ли ввести в нём линейное векторное пространство. Это множество $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, называемое трубкой n-го порядка, является аналогом n-мерной плоскости евклидова пространства. $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$, определяющих трубку, будем называть базисными точками трубки или её $(n+1)$-точечным σ-базисом. Трубка n-го порядка может рассматриваться как естественный геометрический объект (ЕГО) метрического пространства, определяемый $(n+1)$-точечным метрическим подпространством $\{\rho, \mathcal{P}^n\}$ ненулевой длины $\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}$.

Что касается линейного векторного пространства, то его можно ввести лишь в том случае, когда пространство однородно, изотропно и непрерывно, т. е. когда оно евклидово и мировая функция удовлетворяет условиям евклидовости (см. далее теорему 3.1). В общем случае возникает неевклидова геометрия, описание которой нужно строить заново, вводя геометрические объекты и понятия с помощью надлежащих определений. Однако прежде чем делать это, полезно сравнить новый метод с традиционным методом описания метрического пространства.

Определение 1.1. Метрическим пространством $M = \{\rho, \Omega\}$ называется множество точек Ω с заданной на $\Omega \times \Omega$ метрикой ρ:

$$\rho\colon\ \Omega \times \Omega \to D_+ \subset \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

$$\rho(P,P) = 0, \quad \rho(P,Q) = \rho(Q,P) \quad \forall P,Q \in \Omega, \tag{1.13}$$

$$D_+ = [0,\infty), \quad \rho(P,Q) = 0, \ \text{ если и только если } \ P = Q, \quad \forall P,Q \in \Omega, \tag{1.14}$$

$$\rho(P,Q) + \rho(Q,R) \geqslant \rho(P,R) \quad \forall P,Q,R \in \Omega. \tag{1.15}$$

Определение 1.2. Метрическим подпространством $M' = \{\rho', \Omega'\}$ метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$ называется любое подмножество $\Omega' \subset \Omega$ точек метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$, снабжённое той же метрикой ρ', являющейся сужением $\rho|_{\Omega' \times \Omega'}$ на множество $\Omega'^2 = \Omega' \times \Omega'$ отображения (1.12).

Легко видеть, что метрическое подпространство $M' = \{\rho', \Omega'\}$ является метрическим пространством.

Определение 1.3. Метрическое пространство $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\rho, \mathcal{P}^n\}$ называется конечным, если оно состоит из конечного числа точек $\mathcal{P}^n \equiv \{P_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Величина $\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}$, определённая соотношениями (1.10), (1.11), называется его длиной.

Определение 1.4. Конечное метрическое пространство $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\rho, \mathcal{P}^n\}$ называется ориентированным $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)}$, если задан порядок его точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$.

Определение 1.5. Описание метрического пространства называется σ-имманентным, если оно не содержит ссылок на объекты и понятия, отличные от подпространств метрического пространства и его метрики.

σ-имманентность описания означает, что оно имманентно метрическому пространству и производится в терминах его метрики и подпространств. Приставка «σ» ассоциируется с мировой функцией σ, которая связана с метрикой с помощью соотношения (1.2).

Понятие σ-имманентного описания метрического пространства аналогично понятию общековариантного описания риманова пространства в том смысле, что то и другое описания позволяют обеспечить адекватное описание, не зависящее от особенностей способа описания. Дело в том, что всякий способ описания геометрии привносит в описание характерные для него объекты и понятия. Это приводит к тому, что не всегда можно определить, что является свойством геометрии, а что является атрибутом способа описания.

В римановой геометрии объектом, порождаемым способом описания, является система координат. Чтобы отстроиться от её влияния на описание, рассматривается описание во всех возможных криволинейных системах координат. Те свойства, которые оказываются общими для описания во всех системах координат, объявляются свойствами геометрии. Есть, однако, свойства описания (размерность, непрерывность), от которых не удаётся отстроиться таким образом, потому что рассматриваются только непрерывные системы координат с одним и тем же числом координат (размерностью). При этом остаётся неясным, что именно в размерности и непрерывности связано с геометрией, а что — со способом описания (системой координат).

σ-имманентность тоже позволяет отстроиться от способа описания, но делается это несколько иначе, чем в случае общековариантного описания римановой геометрии, где рассматриваются все возможные способы описания. В σ-имманентном описании независимость от способа описания достигается тем, что используются только те понятия и объекты, которые имеются в метрической геометрии, или те, которые могут быть построены на их основе. Никакие объекты и понятия, характерные только для способа описания, не используются. Реально при σ-имманентном описании используются конечные подпространства и мировая функция. σ-имманентный способ описания представляет собой манипулирование множествами конституэнтов (подпространств) метрического пространства, в результате которого возникают новые множества конституэнтов. Например, рассмотренное выше построение трубки (ЕГО) n-го порядка, определяемой конечным метрическим подпространством $M_n(\mathcal{P}^n)$ метрического пространства $\{\rho, \Omega\}$ представляет собой классификацию конечных метрических подпространств $M_{n+1}(\mathcal{P}^{n+1}) \supset \supset M_n(\mathcal{P}^n)$ по их длине. Множество всех точек $R \in \Omega$, которые нужно добавить к $\mathcal{P}^n$, чтобы получить конечное подпространство $M_{n+1}(\mathcal{P}^n, R) = = M_n(\mathcal{P}^n) \cup \{R\}$ нулевой длины $F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R) = 0$, образует трубку $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = = \{R \mid F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R) = 0\}$. Всё это не что иное, как манипулирование конституэнтами метрического пространства.

Традиционный способ описания метрического пространства основан на использовании геометрического объекта, называемого кратчайшей [2–4]. Кратчайшая задаётся двумя точками P_0, P_1 и определяется как линия минимальной длины, соединяющая эти точки. Кратчайшая является аналогом евклидовой прямой, и с её помощью можно построить все те геометрические объекты, которые можно построить в евклидовой геометрии из отрезков прямой (т. е. угол, ломаную, треугольник и различные многоугольники). Аналога двумерной плоскости (ЕГО второго порядка) в метрической геометрии ввести не удаётся, и это связано с тем, что традиционное описание не является σ-имманентным. В частности, это означает, что для описания кратчайшей используется специальный способ описания, непригодный для описания ЕГО второго порядка.

Отсутствие σ-имманентности в традиционном способе описания связано с введением чуждого для метрического пространства понятия «линия». Такого объекта нет в самом метрическом пространстве, и линия вводится как дополнительный геометрический объект, связанный со способом описания метрического пространства. Вместе с введением понятия линии и кратчайшей в метрическое пространство вносятся ограничения, связанные с возможностью построения кратчайшей. Условие (1.14) и аксиома треугольника (1.15) являются именно теми ограничениями, которые надо наложить на метрику, чтобы обеспечить возможность построения кратчайшей. Трубка первого порядка определена как множество точек (а не линия), и она может быть построена в метрическом пространстве даже в том случае, когда метрика не удовлетворяет условиям (1.14), (1.15). То, что она вырождается в линию и совпадает с кратчайшей при выполнении условий (1.14), (1.15), обусловлено спецификой метрического пространства, стеснённого условиями (1.14), (1.15).

Возможность описания метрического пространства в терминах одной только кратчайшей ограничена, хотя, проявив достаточно изобретательности, можно осуществить такое описание для двумерных метрических пространств, где нет нужды в использовании ЕГО порядка выше первого. Например, А. Д. Александров показал, что внутренняя геометрия двумерных границ трёхмерных выпуклых тел может быть представлена в σ-имманентном виде [5]. По-видимому, если не вводить понятия трубок порядка выше первого, то решить аналогичную задачу для трёхмерных границ четырёхмерных тел очень трудно.

σ-имманентная концепция описания метрического пространства может быть сформулирована как классификация всех возможных $(n+1)$-точечных метрических подпространств $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\rho, \mathcal{P}^n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\mathcal{P}^n \subset \Omega$ есть множество из $n+1$ точек $P_i \in \Omega$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Каждому $M_n(\mathcal{P}^n)$ приписывается число $|M_n(\mathcal{P}^n)| = |\mathcal{P}^n| = \sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}$, называемое длиной.

Математически классификация конечных метрических подпространств сопровождается тем, что метрическое пространство $\{\rho, \Omega\}$ снабжается рядом σ-имманентных отображений

$$F_n\colon\ \Omega^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad \Omega^{n+1} = \bigotimes_{k=1}^{n+1} \Omega, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.16}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ определяется соотношениями (1.10), (1.11).

Далее будет показано, что классификация конечных метрических подпространств, осуществляемая с помощью ряда отображений (1.16), позволяет извлечь информацию о свойствах метрического пространства, зашифрованную в его метрике. При этом оказывается, что метрическая геометрия (т. е. геометрия, порождаемая метрическим пространством) не менее содержательна, чем евклидова геометрия. Это означает, в частности, что евклидова геометрия может быть сформулирована в σ-имманентном виде. Более того, в σ-имманентной форме может быть сформулирована геометрия любого подмножества точек собственно евклидова пространства. Иначе говоря, метрическая геометрия, построенная на базе метрики, нечувствительна к непрерывности или дискретности пространства.

Наглядно метрическое пространство можно представлять себе как результат деформации D-мерного евклидова пространства E_D с достаточно большим D. Термин «деформация» трактуется в очень широком смысле. Деформация означает изменение расстояний между точками E_D, сопровождаемое отбрасыванием некоторого множества U точек, принадлежащих E_D. При такой деформации ЕГО преобразуются, превращаясь в множества точек более сложной формы, однако они продолжают оставаться атрибутами метрического пространства, так как они σ-имманентны и определяются только метрикой.

При построении метрической геометрии ограничения (1.14), (1.15) на метрику ρ никак не используются. Они нужны только для построения кратчайшей и могут быть отброшены, когда геометрические объекты строятся на основе классификации конечных метрических подпространств $\{\rho, \mathcal{P}^n\}$. В этом случае, заменяя метрику на мировую функцию $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$, мы получаем вместо обычного метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$ более общее метрическое пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$, которое мы будем называть σ-пространством[1]. Геометрию, порождённую σ-пространством, будем называть Т-геометрией. Т-геометрия представляет собой обобщение метрической геометрии на случай, когда не выполнена аксиома треугольника (1.15) и условие (1.14). Т-геометрия может быть использована для описания пространства-времени.

Идея обобщения метрической геометрии с помощью отказа от ограничений (1.14), (1.15), налагаемых на метрическое пространство, не является новой. Она использовалась в работах Менгера [6] и Блюменталя [7] при построении дистантной геометрии. Настоящая работа отличается от этих работ систематическим использованием определения скалярного произведения (1.3) через метрику и пониманием того, что понятие линии (кривой) как фундаментального понятия геометрии несовместимо с отказом от аксиомы треугольника (1.15).

При описанной выше деформации евклидова пространства евклидовы прямые превращаются в полые трубки. (Вообще говоря, возможен случай, когда прямые просто искривляются, оставаясь линиями, но это очень специальный вид деформации.) Полые трубки являются общим случаем, так как одно уравнение, определяющее трубку, описывает, вообще говоря, поверхность. Отсюда и название Т-геометрия, или трубчатая геометрия. С точки зрения

[1] С логической и лингвистической точек зрения было бы правильно давать определение метрического пространства, опустив ограничения (1.14), (1.15), а специальный случай метрического пространства, стеснённого ограничениями (1.14), (1.15), называть вырожденным метрическим пространством или использовать вместо термина «вырожденное» какое-нибудь другое подходящее определение, подчеркивающее специальный вид метрического пространства. К сожалению, в представлениях современных геометров понятие метрического пространства настолько срослось с ограничениями (1.14), (1.15), что попытка изменения терминологии может привести к недоразумениям и путанице. Мы предпочитаем ввести для метрического пространства без ограничений (1.14), (1.15) новый термин σ-пространство.

Т-геометрии метрическая геометрия есть вырожденная геометрия, т. е. такая геометрия, где трубки первого порядка вырождаются в линии (кратчайшие). Т-геометрия представляет собой естественную (невырожденную, вообще говоря) геометрию, т. е. геометрию более общего вида, чем обычная метрическая геометрия. Сильным аргументом в пользу Т-геометрии является то обстоятельство, что на её основе можно построить модель пространства-времени, где квантовые эффекты объясняются как простые Т-геометрические эффекты, а квантовая постоянная является атрибутом пространства-времени [8].

Во втором разделе даны определения основных объектов σ-пространства. Третий раздел посвящён формулировке и доказательству теоремы о том, что евклидова геометрия может быть описана в терминах одной только метрики. В четвёртом разделе обсуждается роль аксиомы треугольника.

2. σ-пространство и его свойства

Определение 2.1. σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть непустое множество Ω точек P с заданной на $\Omega \times \Omega$ вещественной функцией σ:

$$\sigma\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad \sigma(P,P) = 0, \quad \sigma(P,Q) = \sigma(Q,P) \;\; \forall P, Q \in \Omega. \tag{2.1}$$

Функция σ называется мировой функцией или σ-функцией.

Определение 2.2. Непустое подмножество $\Omega' \subset \Omega$ точек σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ с мировой функцией $\sigma' = \sigma|_{\Omega' \times \Omega'}$, являющейся сужением σ на $\Omega' \times \Omega'$, называется σ-подпространством $V' = \{\sigma', \Omega'\}$ σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$.

В дальнейшем мировая функция $\sigma' = \sigma|_{\Omega' \times \Omega'}$, являющаяся сужением σ, будет обозначаться посредством σ. Любое σ-подпространство является σ-пространством.

Определение 2.3. σ-пространство $V' = \{\sigma', \Omega'\}$ называется изометрически вложимым в σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$, если существует такой мономорфизм $f\colon \Omega' \to \Omega$, что $\sigma'(P,Q) = \sigma(f(P), f(Q))$ $\forall P\ \forall Q \in \Omega'$, $f(P), f(Q) \in \Omega$.

Любое σ-подпространство V' σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ изометрически вложимо в него.

Определение 2.4. Два σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ и $V' = \{\sigma', \Omega'\}$ называются изометричными (эквивалентными), если V изометрически вложимо в V' и V' изометрически вложимо в V.

Определение 2.5. Конечным σ-пространством $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\sigma, \mathcal{P}^n\}$ порядка n называется σ-пространство, состоящее из $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$.

Определение 2.6. Длиной (объёмом) конечного σ-пространства $M_n(\mathcal{P}^n)$ порядка n называется число $\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}$, где $F_n(\mathcal{P}^n)$ определяется соотношениями (1.10), (1.11).

Определение 2.7. Конечное σ-пространство $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\sigma, \mathcal{P}^n\}$ называется ориентированным $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)}$, если задан порядок его точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$.

Определение 2.8. Мультивектором m_n n-го порядка называется всякое отображение

$$m_n\colon\ I_n \to \Omega, \quad I_n \equiv \{0, 1, \ldots, n\}\,. \tag{2.2}$$

Множество I_n имеет естественное упорядочение, которое порождает упорядочение образов $m_n(k) \in \Omega$ точек $k \in I_n$.

Упорядоченный список образов точек множества I_n одно-однозначно связан с мультивектором и может использоваться в качестве идентификатора мультивектора. Для записи идентификатора мультивектора n-го порядка будут использоваться различные формы записи:

$$\overrightarrow{P_0 P_1 \ldots P_n} \equiv \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_n \equiv \overrightarrow{\mathcal{P}^n}.$$

Прообразы точек P_k в I_n определяются порядком точек P_k в списке идентификатора. Индекс точки P_k не имеет отношения к её прообразу. Далее идентификатор $\overrightarrow{P_0 P_1 \ldots P_n}$ мультивектора будет использоваться вместо самого мультивектора. В этом смысле мультивектор $\overrightarrow{P_0 P_1 \ldots P_n}$ n-го порядка в σ-пространстве $V = \{\sigma, \Omega\}$ может быть определён как упорядоченное множество $\{P_l\}$, $l = 0, 1, \ldots, n$, из $n{+}1$ точек $P_0, P_1, \ldots, P_n$, принадлежащих σ-пространству V. Точка P_0 есть начало мультивектора $\overrightarrow{P_0 P_1 \ldots P_n}$. Образ $m_n(I_n)$ множества I_n содержит k точек ($k \leqslant n+1$). Множество всех мультивекторов m_n n-го порядка образует множество $\Omega^{n+1} = \bigotimes\limits_{k=1}^{n+1} \Omega$, и любой мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ принадлежит Ω^{n+1}.

Замечание 1. Термин «упорядоченное множество точек $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$» был употреблён в том смысле, что на множестве Ω одна за другой выбираются $n+1$ произвольных точек $P_0, P_1, \ldots, P_n$, среди которых могут быть и одинаковые. В частности, если Ω есть конечное множество, состоящее из k точек, на нём можно выбрать $n{+}1$ произвольных точек $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ и в том случае, когда $n \geqslant k$. Если среди точек $\mathcal{P}^n$ нет одинаковых, наше толкование термина «упорядоченное множество» совпадает с общепринятым толкованием [9], что упорядоченное конечное множество точек $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ есть множество точек (естественно различных), на котором задано бинарное отношение порядка «$<$». Другими словами, традиционно сначала задаётся множество, а затем отношение порядка на нём. В нашем случае конечное множество $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ сразу задаётся как упорядоченное и поэтому может содержать одинаковые точки, различающиеся только порядком. Строгое определение 2.8 мультивектора разночтений не порождает.

Определение 2.9. Вектором $\mathbf{PQ}$ в σ-пространстве V называется мультивектор первого порядка, т. е. упорядоченное множество $\{P, Q\}$ из двух точек P, Q. Точка P есть начало, а Q — конец вектора.

Конечное ориентированное подпространство $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)}$ σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ является мультивектором в V и обозначается посредством $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)} \equiv \overrightarrow{\mathcal{P}^n} \equiv \overrightarrow{\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}}$.

Замечание 2. Любое конечное ориентированное σ-подпространство $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)}$ σ-пространства V является мультивектором в V, но не всякий мультивектор в V является конечным ориентированным σ-подпространством σ-пространства V, поскольку мультивектор может содержать одну и ту же точку многократно, а конечное ориентированное σ-подпространство может содержать каждую точку σ-пространства V не более одного раза. Например, нулевой вектор $\overrightarrow{PP}$, представляющий собой мультивектор первого порядка, состоящий из двух одинаковых точек P, не является ориентированным σ-подпространством σ-пространства V.

Определение 2.10. Скалярным σ-произведением $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ называется вещественное число

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) \equiv \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(Q_0, P_1) - \sigma(Q_0, P_0) - \sigma(P_1, Q_1), \qquad P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega. \tag{2.3}$$

Из этого определения и (2.1) следуют следующие свойства симметрии скалярного σ-произведения

$$(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = -(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = -(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_0). \tag{2.4}$$

Определение 2.11. В соответствии с определением 2.6 длиной $|\mathbf{PQ}|$ вектора $\mathbf{PQ}$ называется число

$$|\mathbf{PQ}| = \sqrt{2\sigma(P,Q)} = \begin{cases} |\sqrt{(\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ})}|, & (\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ}) \geqslant 0, \\ i|\sqrt{(\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ})}|, & (\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ}) < 0, \end{cases} \quad P, Q \in \Omega. \tag{2.5}$$

Определение 2.12. Скалярным σ-произведением $(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})$ двух мультивекторов $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ порядка n называется число

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = \det \|(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k)\|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.6}$$

где скалярное σ-произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k)$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_k$ определено соотношением (2.3).

В σ-пространстве может быть определена операция перестановки точек мультивектора. Рассмотрим два мультивектора n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = \overrightarrow{P_0P_1P_2\ldots P_n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(k\leftrightarrow l)}} = \overrightarrow{P_0P_1\ldots P_{k-1}P_lP_{k+1}\ldots P_{l-1}P_kP_{l+1}\ldots P_n}$ $(n \geqslant 1)$. Последний является результатом перестановки точек P_k, P_l $(k < l)$. Скалярное σ-произведение $(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})$ определяется соотношением (2.6).

Если $k = 0$, то перестановка $P_0 \leftrightarrow P_l$ меняет знак l-й строки определителя (2.6). Кроме того, в результате этой перестановки элементы $(\overrightarrow{P_0P_i}.\overrightarrow{Q_0Q_k})$ i-й строки $(i \neq l)$ превращаются в $(\overrightarrow{P_lP_i}.\overrightarrow{Q_0Q_k}) = (\overrightarrow{P_0P_i}.\overrightarrow{Q_0Q_k}) - (\overrightarrow{P_0P_l}.\overrightarrow{Q_0Q_k})$.

Это соответствует вычитанию l-й строки из i-й строки определителя (2.6) и не меняет его. Таким образом,

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow l)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}), \quad l = 1, 2, \ldots, n, \quad \forall \overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1}. \tag{2.7}$$

Если $k \neq 0$ и $k < l$, то перестановка $P_k \leftrightarrow P_l$ переставляет l-ю и k-ю строки определителя (2.6). Определитель меняет знак, и вместе с (2.7) получаем

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(k\leftrightarrow l)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}), \quad k \neq l, \quad l, k = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad \forall \overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1}. \tag{2.8}$$

Поскольку соотношение (2.8) верно для перестановки любых двух точек мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и для любого мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1}$, то можно написать

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(i\leftrightarrow k)}} = -\overrightarrow{\mathcal{P}^n}, \quad i, k = 0, 1, \ldots, n, \quad i \neq k, \quad n \geqslant 1. \tag{2.9}$$

Итак, изменение знака мультивектора n-го порядка ($n \geqslant 1$) (умножение на число $a = -1$) всегда может быть определено как нечётная перестановка точек мультивектора.

Рассмотрим соотношение

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n} T \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}: \quad (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = (\overrightarrow{\mathcal{R}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) \ \ \forall \overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1} \tag{2.10}$$

между двумя мультивекторами n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \in \Omega^{n+1}$ и $\overrightarrow{\mathcal{R}^n} \in \Omega^{n+1}$. Соотношение (2.10) рефлексивно, симметрично и транзитивно. Его можно рассматривать как соотношение эквивалентности.

Определение 2.13. Два мультивектора n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \in \Omega^{n+1}$ и $\overrightarrow{\mathcal{R}^n} \in \Omega^{n+1}$ эквивалентны $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = \overrightarrow{\mathcal{R}^n}$, если справедливы соотношения (2.10).

Определение 2.14. Если мультивектор n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{N}^n}$ удовлетворяет соотношениям

$$(\overrightarrow{\mathcal{N}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = 0 \quad \forall \overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1}, \tag{2.11}$$

то $\overrightarrow{\mathcal{N}^n}$ есть нулевой мультивектор n-го порядка.

Любой мультивектор n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$, имеющий две одинаковые точки $P_k = P_l$ ($l \neq k$), есть нулевой мультивектор n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{N}^n}$, потому что в этом случае определитель в (2.6) имеет одинаковые строки (k-ю и l-ю) и обращается в нуль для всех $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1}$.

Любой мультивектор n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ или имеет по крайней мере две одинаковые точки и принадлежит к классу эквивалентности $\xi(\mathcal{N}^n)$ нулевых мультивекторов $\overrightarrow{\mathcal{N}^n}$, или имеет все различные точки и принадлежит к классу эквивалентности $\xi(\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n))$, где $\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n) = \{\varepsilon, \sigma, \mathcal{P}^n\}$ есть ориентированное σ-подпространство n-го порядка σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$, состоящее из $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$, а ε есть его ориентация, принимающая значения $\varepsilon = \pm 1$. Таким образом, множество Ω^{n+1} всех мультивекторов n-го порядка может быть представлено в виде

$$\Omega^{n+1} = \xi(\mathcal{N}^n) \bigcup_{\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n)} \xi(\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n)). \tag{2.12}$$

Всякий класс эквивалентности $\xi(\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n))$ содержит $\frac{1}{2}(n+1)!$ элементов. Класс эквивалентности $\xi(+1,\sigma,\mathcal{P}^n)$ может быть получен из мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ с помощью чётных перестановок. Мультивекторы, которые получаются из мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ с помощью нечётных перестановок, принадлежат к классу эквивалентности $\xi(-1,\sigma,\mathcal{P}^n)$. Фактор-множество Ω^{n+1}/T образовано классом эквивалентности $\xi(\mathcal{N}^n)$ нулевых мультивекторов n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{N}^n}$ и ориентированными σ-подпространствами $\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n)$ n-го порядка. Легко проверить, что скалярное σ-произведение $(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})$ двух ненулевых мультивекторов n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\in\xi(\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n))$ и $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}\in\xi(\overrightarrow{M_n}(\mathcal{Q}^n))$ зависит только от ориентированных σ-подпространств n-го порядка $\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n)$, $\overrightarrow{M_n}(\mathcal{Q}^n)$. Таким образом, на самом деле скалярное σ-произведение $(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})$ описывает взаимное расположение ориентированных σ-подпространств n-го порядка $\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n)$ и $\overrightarrow{M_n}(\mathcal{Q}^n)$, которые являются конституэнтами σ-пространства $V=\{\sigma,\Omega\}$. Этот результат показывает, что описание в терминах мультивекторов эквивалентно описанию в терминах конечных σ-подпространств, и *мультивекторы, так же как σ-подпространства, суть естественные конституэнты σ-пространства.* Введение понятия мультивектора и задание взаимного расположения мультивекторов с помощью скалярного σ-произведения позволяет построить любые геометрические объекты.

Таким образом, σ-имманентное описание, используемое в Т-геометрии, есть описание в терминах объектов, имманентных σ-пространству. Это описание не использует никаких дополнительных конструкций вроде линейного векторного пространства или системы координат, налагающих на описание дополнительные ограничения, которых нет в Т-геометрии, взятой самой по себе.

В связи с существующей связью между мультивекторами и конечными σ-подпространствами возникает вопрос, возможно ли выразить скалярное σ-произведение $\overrightarrow{M_n}(\mathcal{P}^n)$ и $\overrightarrow{M_n}(\mathcal{Q}^n)$ прямо в терминах ориентированных σ-подпространств n-го порядка. В принципе, эта проблема может быть решена, но решение будет сложным и неэффективным. Дело в том, что ориентированные σ-подпространства не содержат и не описывают нулевых мультивекторов. В этом отношении они ассоциируются с натуральными числами, которые не содержат нуля, или с записью чисел римскими цифрами, где нуль тоже отсутствует. Что касается мультивекторов, то они содержат нулевые мультивекторы и ассоциируются с множеством целых чисел и с записью чисел арабскими цифрами, где присутствует нуль. Как видно из соотношения (2.12), описание в терминах мультивекторов, будучи приведённым к описанию в терминах σ-подпространств, приводит к появлению класса эквивалентности $\xi(+1,\sigma,\mathcal{P}^n)$, который ассоциируется с натуральными числами и с описанием в терминах σ-подпространств. Но, кроме него, появляется класс эквивалентности $\xi(-1,\sigma,\mathcal{P}^n)$, который ассоциируется с отрицательными числами и может быть получен из класса эквивалентности $\xi(+1,\sigma,\mathcal{P}^n)$ путём введения понятия ориентации. Наконец, ещё появляется класс эквивалентности $\xi(\mathcal{N}^n)$ нулевых мультивекторов, получить которые из σ-подпространств не представляется возможным. Они должны быть введены дополнительно к σ-подпространствам как пустые σ-подпространства. Такое преобразование описания в терминах мультивекторов к описанию в терминах σ-подпространств с дополнительным введением различных пустых σ-подпространств представляется достаточно громоздким. Кроме того, есть сомнения в необходимости и полезности такого преобразования.

По-видимому, неэффективность описания в терминах подпространств по сравнению с описанием в терминах мультивекторов связана с отсутствием независимости между точками конечного подпространства. В самом деле, например, при построении σ-подпространства второго порядка $M_2(\mathcal{P}^2)$ первой точкой P_0 может быть любая точка множества Ω, второй точкой P_1 может быть любая точка множества Ω, кроме точки P_0. Третьей точкой P_2 может быть любая точка множества Ω, кроме точек P_0 и P_1. При построении мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^2}$ таких ограничений нет. Точки P_0 и P_1 не налагают ограничений на выбор точки P_2 мультивектора.

Определение 2.15. В согласии с определением 2.6 длиной $|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|$ мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ называется число

$$|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| = \begin{cases} |\sqrt{(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n})}| = |\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}|, & (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) \geqslant 0, \\ i|\sqrt{(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n})}| = i|\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}|, & (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) < 0, \end{cases} \quad \overrightarrow{\mathcal{P}^n} \subset \Omega, \tag{2.13}$$

где величина $F_n(\mathcal{P}^n)$ определяется соотношениями (1.10), (1.11).

Определение 2.16. Два мультивектора n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ коллинеарны ($\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$), если

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})^2 = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}|^2. \tag{2.14}$$

Определение 2.17. Два коллинеарных мультивектора n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ имеют одинаковую ориентацию $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ (параллельны), если

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}|. \tag{2.15}$$

Они имеют противоположную ориентацию $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ (антипараллельны), если

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}|. \tag{2.16}$$

Определение 2.18. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ параллельны или антипараллельны, если выполнены соответственно соотношения

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|, \tag{2.17}$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = -|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|. \tag{2.18}$$

Определение 2.19. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ коллинеарны, если они параллельны или антипараллельны, т. е.

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2. \tag{2.19}$$

Пример 2.1. Рассмотрим D-мерное точечное собственно евклидово пространство. Его можно рассматривать как метрическое пространство $E_D = \{\rho, \mathbb{R}^D\}$ или как σ-пространство $E_D = V_D = \{\sigma, \mathbb{R}^D\}$, причём $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$ задаётся соотношением

$$\sigma(P,Q) = \sigma(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{D} g_{ik}(x^i - y^i)(x^k - y^k), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.20}$$

где $x = \{x^i\}$ и $y = \{y^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, D$, — контравариантные координаты точек P и Q соответственно в некоторой прямолинейной системе координат K. Здесь $g_{ik} = \text{const}$, $i, k = 1, 2, \ldots, D$, — метрический тензор, $\det \|g_{ik}\| \neq 0$. Собственные значения матрицы g_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, D$, метрического тензора положительны, так что $\sum\limits_{i,k=1}^{D} g_{ik}x^i x^k = 0$, если и только если $x = 0$. Данные выше определения вектора, его длины, скалярного произведения двух векторов и соотношений коллинеарности согласуются с употреблением этих понятий для евклидова пространства. В самом деле, длина вектора $\mathbf{PQ}$ в евклидовом пространстве есть

$$|\mathbf{PQ}| = \sqrt{g_{ik}(x^i - y^i)(x^k - y^k)} = \sqrt{2\sigma(P,Q)}, \tag{2.21}$$

что согласуется с (2.5).

В собственно евклидовом пространстве по теореме косинусов для трёх векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$

$$|\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1|^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 - 2(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1), \tag{2.22}$$

где $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1)$ означает скалярное произведение двух векторов в собственно евклидовом пространстве. Отсюда следует

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) = \frac{1}{2}\{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1|^2 - |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|^2\}. \tag{2.23}$$

Заменяя Q_1 на Q_0, получаем вместо (2.23)

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0) = \frac{1}{2}\{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0|^2 - |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0|^2\}. \tag{2.24}$$

Вычитая теперь (2.24) из (2.23) и учитывая свойства скалярного произведения, получаем

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \frac{1}{2}\{|\mathbf{Q}_0\mathbf{P}_1|^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1|^2 - |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|^2 - |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0|^2\}, \tag{2.25}$$

что согласуется с (2.3), если учесть (2.5).

В собственно евклидовом пространстве векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ параллельны или антипараллельны, если косинус угла ϑ между ними равен соответственно 1 или -1. Поскольку

$$\cos\vartheta = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|^{-1} \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^{-1}, \tag{2.26}$$

получаем согласие с определениями (2.17), (2.18).

В собственно евклидовом пространстве простой m-вектор $\mathbf{m}$ n-го порядка определяется как внешнее (косое) произведение векторов

$$\mathbf{m} = \bigwedge_{i=1}^{i=n} \mathbf{e}_i = \bigwedge_{i=1}^{i=n} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.27}$$

Скалярное произведение двух простых m-векторов n-го порядка $\mathbf{m}$ и $\mathbf{q}$,

$$\mathbf{q} = \bigwedge_{i=1}^{i=n} \mathbf{k}_i, \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.28}$$

определяется с помощью соотношения

$$(\mathbf{m}.\mathbf{q}) = \det ||(\mathbf{e}_i.\mathbf{k}_l)|| = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_l)||, \quad i, l = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.29}$$

В собственно евклидовом пространстве простой m-вектор $\mathbf{m}$ n-го порядка, определяемый соотношением (2.27), антисимметричен относительно перестановки любых двух индексов $i, k = 0, 1, \ldots, n$, $i \neq k$. Для индексов $i, k = 1, 2, \ldots, n$ это следует из свойств операции внешнего умножения.

Для перестановки точек $P_0 \leftrightarrow P_1$ имеем

$$\mathbf{m}_{(0\leftrightarrow 1)} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_0 \bigwedge_{i=2}^{i=n} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = \\ = -\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \bigwedge_{i=2}^{i=n} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) = -\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \bigwedge_{i=2}^{i=n} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i = -\mathbf{m}. \tag{2.30}$$

Аналогичный результат получается для перестановки точек $P_0 \leftrightarrow P_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Сравнение (2.29) с (2.6) и (2.30) с (2.9) показывает, что простой m-вектор (2.27) n-го порядка может быть отождествлён с мультивектором n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$.

Различие между определением 2.8 мультивектора и традиционным определением простого m-вектора (2.27) в том, что первое не использует операций сложения и умножения векторов, которые не определены в σ-пространстве, тогда как традиционное определение (2.27) апеллирует к понятию линейного векторного пространства, где эти операции определены.

В принципе сложение векторов и умножение вектора на число можно определить в σ-пространстве $V = \{\sigma, \Omega\}$ следующим образом. Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ есть сумма векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, если $\exists R \in \Omega$, такая что

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) + (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \quad \forall Q \in \Omega. \tag{2.31}$$

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ есть результат умножения $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ на вещественное число a: $\mathbf{P}_0\mathbf{R} = a\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, если $\exists R \in \Omega$, такая что

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = a(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \quad \forall Q \in \Omega. \tag{2.32}$$

Однако такие определения неэффективны, поскольку в общем случае не существует точки R, удовлетворяющей соотношениям (2.31), (2.32). В случае собственно евклидова пространства, когда точка R, удовлетворяющая (2.31), (2.32), существует, определение операций сложения векторов (2.31) и умножения вектора на число (2.32) совпадает с традиционным определением этих операций в евклидовом пространстве.

Определение 2.20. $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$, $P_i \in \Omega$, $i = 0,1,\ldots,n$, образуют $(n+1)$-точечный σ-базис трубки в σ-пространстве, если мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ имеет ненулевую длину

$$|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \equiv F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0. \tag{2.33}$$

Проиллюстрируем это определение базиса трубки на примере D-мерного собственно евклидова пространства. Пусть задано n векторов $\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, в D-мерном собственно евклидовом пространстве ($n \leqslant D$). В этом случае (1.8) есть определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det \|(\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k)\| = (n! S_n(\mathcal{P}^n))^2, \quad i,k = 1,2,\ldots,n, \tag{2.34}$$

а S_n есть объём $(n+1)$-эдра с вершинами в точках $\mathcal{P}^n$. Обращение в нуль этого определителя есть необходимое и достаточное условие линейной независимости векторов $\mathbf{e}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, в собственно евклидовом пространстве.

Если условие (2.33) выполнено, то n векторов $\mathbf{e}_i$ линейно независимы и могут служить в качестве базиса в n-мерной плоскости $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, проходящей через точки $\mathcal{P}^n$. В частности, если в качестве системы координатных векторов для выражения (2.20) использованы векторы $\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1,2,\ldots,D$, $(D+1)$-точечного σ-базиса трубки $\mathcal{P}^D$, то, как легко проверить с помощью (2.3), (2.20) и (1.11)

$$(\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) = g_{ik}(\mathcal{P}^D) = \Gamma(P_0,P_i,P_k), \quad i,k = 1,2,\ldots,D. \tag{2.35}$$

Определение 2.21. Трубкой $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ n-го порядка ($n = 0,1,\ldots$), образованной $(n+1)$-точечным σ-базисом трубки $\mathcal{P}^n \subset \Omega$ (или мультивектором n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \in \Omega^{n+1}$), называется множество точек $P \in \Omega$:

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \equiv \mathcal{T}_{\mathcal{P}^n} = \{P \mid F_{n+1}(P,\mathcal{P}^n) = 0\}, \quad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0. \tag{2.36}$$

Соотношение (2.36) может быть записано также в терминах мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$:

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = \{P_{n+1} \mid |\overrightarrow{\mathcal{P}^{n+1}}| = 0\}, \quad |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \neq 0. \tag{2.37}$$

Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ представляет собой естественный геометрический объект (ЕГО) n-го порядка, т. е. множество точек, определяемое геометрией и параметрами: $n+1$ точками $\mathcal{P}^n$. Набор всех возможных ЕГО представляет набор σ-имманентных геометрических объектов на множестве Ω. Каждый ЕГО содержит по крайней мере базисные точки $\mathcal{P}^n$.

Замечание 3. Поскольку $(n+1)$-точечный σ-базис трубки $\mathcal{P}^n$ всегда содержит только все различные точки P_i, то он всегда является конечным ориентированным σ-подпространством, т. е. атрибутом σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$. Иначе говоря, определение трубки не содержит никаких объектов, отличных от σ-пространства и его конституэнтов.

Определение 2.22. Сечением $\mathcal{S}_{n;P}$ трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ в точке $P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ называется множество $\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n))$ точек, принадлежащих трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$:

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \left\{ P' \;\middle|\; \bigwedge_{l=0}^{l=n} \sigma(P_l, P') = \sigma(P_l, P) \right\}, \quad P, P' \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n). \tag{2.38}$$

В собственно евклидовом пространстве трубка n-го порядка есть n-мерная плоскость, содержащая точки $\mathcal{P}^n$, а её сечение $\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n))$ в точке P состоит из одной этой точки P.

Лемма 2.1. *Если* $|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \neq 0$, *соотношение* $|\overrightarrow{\mathcal{P}^n R}|^2 = F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R) = 0$ *эквивалентно соотношению*

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel \overrightarrow{\mathcal{P}^{n-1}R}\colon \quad (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^{n-1}R})^2 = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathcal{P}^{n-1}R}|^2, \tag{2.39}$$

описывающему коллинеарность двух мультивекторов n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{P}^{n-1}R} \equiv \overrightarrow{P_0 P_1 \ldots P_{n-1} R}$.

Эта лемма утверждает, что если минор $M_{n\,n}$ элемента $a_{n\,n}$ определителя n-го порядка Δ не равен нулю, соотношение $\Delta = 0$ эквивалентно соотношению $(M_{n\,n-1})^2 = M_{n\,n} M_{n-1\,n-1}$ между минорами $(n-1)$-го порядка определителя Δ. Это доказывается на основе того факта, что n-я строка определителя Δ есть линейная комбинация всех остальных строк.

С помощью леммы определение трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ n-го порядка может быть записано в виде

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \equiv \mathcal{T}_{\mathcal{P}^n} = \{R \mid \overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel \overrightarrow{\mathcal{P}^{n-1}R}\}, \quad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0. \tag{2.40}$$

Кроме того, лемма позволяет ввести новый геометрический объект $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n; Q_0)$, который может быть определён как трубка n-го порядка, проходящая через точку Q_0 коллинеарно мультивектору n-го порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$. В собственно евклидовом пространстве $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n; Q_0)$ есть n-мерная плоскость, проходящая через точку Q_0 коллинеарно n-мерной плоскости $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$.

Определение 2.23. Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n; Q_0)$ n-го порядка, проходящая через заданную точку Q_0 коллинеарно мультивектору $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ n-го порядка, имеющему ненулевую длину $|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 = F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0$, есть множество точек $R \in \Omega$:

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n; Q_0) \equiv \mathcal{T}_{Q_0}(\mathcal{P}^n) = \{R \mid F_{n+1}(\mathcal{P}^{n-1}, R; Q_0) = 0\}, \tag{2.41}$$

где $F_{n+1}(\mathcal{P}^{n-1}, R; Q_0)$ определяется соотношением

$$F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R; Q_0) = \det ||a_{ik}||, \quad i,k = 1,2,\dots,n+1, \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} &a_{i\,k} = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k), && i,k = 1,2,\dots,n, \\ &a_{i\,n+1} = a_{n+1\,i} = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{Q}_0\mathbf{R}), && i = 1,2,\dots,n, \\ &a_{n+1\,n+1} = (\mathbf{Q}_0\mathbf{R}.\mathbf{Q}_0\mathbf{R}). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Определитель (2.42) получается из определителя $F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R)$ вида (1.8) с помощью замены вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ вектором $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ во всех скалярных σ-произведениях, содержащих вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$. Эта замена переносит начало бегущего вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в точку Q_0, в то время как сам бегущий вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ определяется условием $F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R; Q_0) = 0$ и не изменяется. Легко видеть, что $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n; P_0) = \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$.

Наиболее интересны и важны трубки нулевого и первого порядка. Для F_1 получаем из (1.8), (2.3) и (2.1)

$$F_1(P_0, P_1) = 2\sigma(P_0, P_1).$$

Тогда

$$\mathcal{T}(P_0) \equiv \mathcal{T}_{P_0} = \{P \mid \sigma(P_0, P) = 0\}. \tag{2.44}$$

В собственно евклидовом пространстве трубка нулевого порядка $\mathcal{T}_{P_0} = \{P_0\}$ состоит из одной точки P_0, и её сечение $\mathcal{S}_{0;P_0}(\mathcal{T}_{p_0}) = \{P_0\}$ тоже состоит из одной точки P_0. Однако в псевдоевклидовом пространстве, каким является пространство-время в специальной теории относительности, $\mathcal{T}_{P_0}$ есть световой конус с вершиной в точке P_0, и его сечение

$$\mathcal{S}_{0;P}(\mathcal{T}(P_0)) = \{P' \mid \sigma(P_0, P') = 0 \wedge \sigma(P_0, P') = \sigma(P_0, P)\} = \mathcal{T}_{P_0}$$

совпадает со световым конусом.

В описании трубок первого порядка удобно использовать то обстоятельство, что функция $F_2(\mathcal{P}^2)$ может быть представлена в виде произведения

$$F_2(P_0, P_1, P_2) = S_+(P_0, P_1, P_2)S_2(P_0, P_1, P_2)S_2(P_1, P_2, P_0)S_2(P_2, P_0, P_1), \tag{2.45}$$

где

$$S_+(P_0, P_1, P_2) = S(P_0, P_1) + S(P_1, P_2) + S(P_0, P_2), \tag{2.46}$$

$$S_2(P_0, P_1, P_2) = S(P_0, P_1) + S(P_1, P_2) - S(P_0, P_2) \tag{2.47}$$

и $S = \sqrt{2\sigma}$. S_+ обращается в нуль лишь в том случае, если обращается в нуль каждое слагаемое в (2.46). Тогда никакие две точки не образуют σ-базиса, и трубка не определена. Трубку $\mathcal{T}(\mathcal{P}^2)$ можно представить как состоящую из частей, и каждый из сомножителей в (2.45) (кроме S_+) ответственен за одну из её частей.

Положим

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \mathcal{T}_{[P_1P_0]} = \{P \mid S_2(P_0, P, P_1) = 0\}, \tag{2.48}$$

$$\mathcal{T}_{P_0[P_1} = \mathcal{T}_{P_1]P_0} = \{P \mid S_2(P_0, P_1, P) = 0\}. \tag{2.49}$$

Будем называть $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ сегментом трубки между точками P_0, P_1, а $\mathcal{T}_{P_0[P_1}$ — лучом трубки, выходящим из P_1 в направлении от точки P_0.

Из (2.45), (2.48), (2.49) очевидно, что

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \mathcal{T}_{P_0]P_1} \cup \mathcal{T}_{[P_0P_1]} \cup \mathcal{T}_{P_0[P_1}. \tag{2.50}$$

Поскольку соотношение (2.19) эквивалентно уравнению $F_2(\mathcal{P}^2) = F_2(P_2, \mathcal{P}^1) = 0$, то трубка первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ может быть также определена как множество точек P, таких что $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$:

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \{P \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}\}, \tag{2.51}$$

а для лучей трубки могут быть использованы определения

$$\mathcal{T}_{P_0[P_1} = \{P \mid \mathbf{P}_1\mathbf{P} \uparrow\downarrow \mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\}, \tag{2.52}$$

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1} = \{P \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\}. \tag{2.53}$$

Определение 2.24. Ориентированным сегментом $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ трубки первого порядка, образованной вектором $\overrightarrow{P_0P_1} \subset \Omega$ ненулевой длины, называется совокупность $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \mathcal{T}_{[P_0P_1]}\}$ вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$ и сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, образованного этим вектором. Длиной ориентированного сегмента $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ называется величина

$$|\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}| = |\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)}. \tag{2.54}$$

Скалярным σ-произведением $(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{P_0Q})$ ориентированного сегмента $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ и вектора $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ называется число

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{Q_0Q_1}) &= (\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{Q_0Q_1}) = \\ &= \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(Q_0, P_1) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1), \quad P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega.\end{aligned} \tag{2.55}$$

При описании в терминах дифференциальной геометрии геодезическая в D-мерном римановом пространстве рассматривается как *особый вид кривой, обладающей следующими свойствами.*

(i) *Экстремальность.* Расстояние $(2\sigma)^{1/2}$, измеренное между двумя точками вдоль геодезической, является кратчайшим (экстремальным) по сравнению с расстоянием, измеренным вдоль других кривых.

(ii) *Определённость.* Любые две различные точки геодезической однозначно определяют геодезическую, проходящую через эти точки.

(iii) *Минимальность сечения* (одномерность). Всякое сечение геодезической состоит из одной точки.

При традиционном подходе свойство (ii) есть следствие свойства (i) (для достаточно малых областей пространства), однако свойство (iii) есть свойство любой кривой (а не только геодезической).

В Т-геометрии геодезическая рассматривается как особый вид трубки, вырождающейся в линию. Тогда предполагается, что свойства (ii) и (iii) выполнены. Свойство (i) не определено, так как не определено понятие линии.

Попытаемся определить геодезическую как трубку, обладающую одновременно свойством определённости и минимальности сечения.

Определение 2.25. Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ обладает свойством определённости, если для любого $(n+1)$-точечного σ-базиса трубки $\mathcal{Q}^n \subset \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ выполнено условие

$$\mathcal{T}(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{T}(\mathcal{P}^n). \tag{2.56}$$

Определение 2.26. Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ обладает свойством минимальности сечения, если $\forall P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P\} \quad \forall P \in \mathcal{P}^n. \tag{2.57}$$

Определение 2.27. σ-пространство экстремально на трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, если для $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ выполнены условия определённости и минимальности сечения.

Определение 2.28. σ-пространство экстремально на множестве $\mathcal{T}$ трубок $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, если оно экстремально на каждой из трубок множества $\mathcal{T}$.

Определение 2.29. σ-пространство экстремально в n-м порядке, если оно экстремально на всех трубках $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ n-го порядка.

Определение 2.30. Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ называется геодезической трубкой $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, если σ-пространство экстремально на трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$.

Условие экстремальности есть σ-имманентный способ ввести условие вырождения трубок. От условий (1.14), (1.15), которые описывают условие вырождения трубки первого порядка в кратчайшую, условие экстремальности отличается тем, что, во-первых, это условие вырождение трубки любого порядка, а не только трубки первого порядка, во-вторых, это условие локальное в том смысле, что оно может выполняться для одних трубок и не выполняться для для других. Экстремальность трубок первого порядка важна при построении риманова пространства, как специального случая σ-пространства (см. детали в [10]).

3. Евклидово пространство как специальный случай σ-пространства

Определение 3.1. n-мерное евклидово пространство E_n есть множество $\mathbb{R}^n$ всех упорядоченных множеств $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ из n вещественных чисел, на котором для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ задана вещественная функция σ:

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(x_i - y_i)(x_k - y_k), \quad g^{ik} = \text{const}, \quad i,k = 1,2,\dots,n, \tag{3.1}$$

$$\det \|g_{ik}\| = (\det \|g^{ik}\|)^{-1} \neq 0. \tag{3.2}$$

Функция σ называется мировой функцией или просто σ-функцией. n-мерное евклидово пространство E_n является одновременно σ-пространством $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Замечание 4. Термин «евклидово пространство» используется как собирательное понятие по отношению к понятиям «собственно евклидово пространство» и «псевдоевклидово пространство». В случае собственно евклидова пространства матрица метрического тензора g_{ik} имеет собственные значения одного знака, а в случае псевдоевклидова пространства знаки собственных значений матрицы метрического тензора g_{ik} различны.

Замечание 5. Приведённое определение 3.1 очевидным образом эквивалентно определению n-мерного евклидова пространства E_n как n-мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$ векторов $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ с заданным на нём скалярным произведением (x, y) векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$(x,y) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} x_i y_k = \sigma(0,x) + \sigma(0,y) - \sigma(x,y), \quad g^{ik} = \mathrm{const}, \quad i,k = 1,2,\dots,n, \tag{3.3}$$

где σ задано соотношением (3.1).

n-мерное евклидово евклидово пространство $E_n = \{\sigma, \Omega\}$ $(\Omega = \mathbb{R}^n)$, рассматриваемое как σ-пространство, обладает следующими свойствами:

$$\exists \mathcal{P}^n \subset \Omega \quad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \quad F_{n+1}(\Omega^{n+2}) = 0, \tag{3.4}$$

$$\sigma(P,Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)[\Gamma(P_0,P_i,P) - \Gamma(P_0,P_i,Q)] \times \\ \times [\Gamma(P_0,P_k,P) - \Gamma(P_0,P_k,Q)] \quad \forall P,Q \in \Omega, \tag{3.5}$$

$$\Gamma(P_0,P,Q) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\Gamma(P_0,P_i,P)\Gamma(P_0,P_k,Q) \quad \forall P,Q \in \Omega, \tag{3.6}$$

где $\mathcal{P}^n$ есть некоторый $(n+1)$-точечный σ-базис в $\Omega = \mathbb{R}^n$ в смысле определения (2.33), т. е. $F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0$, а величины $\Gamma(P_0, P_k, P)$ определены соотношениями (1.11). При этом $(n+1)$-точечному σ-базису $\mathcal{P}^n$ соответствует базис из n векторов

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \quad P_i \in \mathcal{P}^n, \quad i = 1,2,\dots,n, \tag{3.7}$$

и

$$x_i = x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{e}_i) = \Gamma(P_0,P,P_i), \quad i = 1,2,\dots,n, \quad \forall P \in \Omega \tag{3.8}$$

суть ковариантные координаты вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ в этом базисе. Величины

$$g_{ik} = g_{ik}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) = \Gamma(P_0,P_i,P_k), \quad i,k = 1,2,\dots,n, \tag{3.9}$$

суть ковариантные компоненты метрического тензора в этом базисе $\mathcal{P}^n$. При этом так как $\mathcal{P}^n$ есть σ-базис трубки, то в силу (2.33), (2.34) выполнено условие

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det \|g_{ik}(\mathcal{P}^n)\| \neq 0, \quad i,k = 1,2,\dots,n, \tag{3.10}$$

и можно определить контравариантные компоненты $g^{ik} = g^{ik}(\mathcal{P}^n)$ метрического тензора с помощью соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(\mathcal{P}^n) g^{kl}(\mathcal{P}^n) = \delta_i^l, \quad i,l = 1,2,\dots,n. \tag{3.11}$$

Условия (3.5) и (3.6) эквивалентны, как это следует из (1.11).

Определение 3.2. σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ имеет структуру n-мерного евклидова пространства на Ω, если существует такой $(n+1)$-точечный σ-базис трубки $\mathcal{P}^n \subset \Omega$, что для любых $P, Q \in \Omega$ выполнено условие (3.6).

σ-пространство V, имеющее структуру n-мерного евклидова пространства, не обязательно евклидово, т. к. взаимно однозначного соответствия между точками $P \in \Omega$ и их координатами $x \in \mathbb{R}^n$ может не быть. Например, две точки P и P' могут иметь одинаковые координаты и отображаться в одну точку x евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Наконец, третье свойство евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$ означает, что соотношения

$$\Gamma(P_0, P_i, P) = x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.12}$$

рассматриваемые как уравнения для определения $P \in \Omega = \mathbb{R}^n$, всегда имеют одно и только одно решение.

Заметим, что все три условия записаны в σ-имманентной форме и являются необходимыми свойствами евклидова пространства. В этой связи можно поставить вопрос о том, в какой мере эти три условия являются достаточными для того, чтобы σ-пространство $\{\sigma, \Omega\}$ было евклидовым пространством. Ответ даётся теоремой.

Теорема 3.1. *Для того чтобы σ-пространство $\{\sigma, \Omega\}$ было n-мерным евклидовым пространством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (3.4), (3.5) *и* (3.12).

Доказательство. Необходимость условий (3.4), (3.5) и (3.12) проверяется прямой подстановкой мировой функции σ для n-мерного евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Достаточность. В силу условия (3.4) в σ-пространстве $\{\sigma, \Omega\}$ найдутся $n+1$ точек, образующих $(n+1)$-точечный σ-базис трубки. Пусть $\mathcal{P}^n$ есть такой $(n+1)$-точечный σ-базис трубки и $P, Q \in \Omega$ — две произвольные точки. Введём их ковариантные координаты в $\mathcal{P}^n$ с помощью соотношений типа (3.8):

$$x_i = \Gamma(P_0, P_i, P), \quad y_i = \Gamma(P_0, P_i, Q), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \forall P, Q \in \Omega. \tag{3.13}$$

После этого соотношение (3.6) переписывается в виде

$$(x.y) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} x_i y_k, \quad g^{ik} = g^{ik}(\mathcal{P}^n) \operatorname{const}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.14}$$

В силу условия (3.12) каждой точке $P \in \Omega$ соответствует одна и только одна точка $x \in \mathbb{R}^n$ и наоборот. Иначе говоря, σ-пространство $\{\sigma, \Omega\}$ изометрично n-мерному евклидову пространству $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Следствие теоремы. n-мерное евклидово пространство и все его свойства могут быть описаны σ-имманентно (т. е. в терминах мировой функции).

Иначе говоря, T-геометрия достаточно богата и содержательна, чтобы заключать в себе евклидову геометрию в качестве частного случая, когда мировая функция ограничена σ-имманентным соотношением (3.5) или эквивалентным ему соотношением (3.6). Римановой геометрии тоже можно придать σ-имманентную форму [10], что можно интерпретировать в том смысле, что T-геометрия содержит в себе риманову геометрию в качестве частного случая. T-геометрия достаточно информативна, чтобы содержать в себе и другие геометрии. По-видимому, будет нелегко построить такую геометрию, которая бы не содержалась в T-геометрии. Дело в том, что практически любая T-геометрия может рассматриваться как результат деформации (изменения мировой функции) σ-подпространства евклидова пространства достаточно высокой размерности. При такой вариации содержательность геометрии не уменьшается, так как не уменьшается число трубок. Оно может только увеличиваться за счёт того, что каждая из трубок евклидова пространства, определяемая сразу многими σ-базисами, расщепляется на несколько трубок.

Содержательность геометрии (т. е. количество геометрических объектов, утверждений и теорем) зависит не только от её аксиом, но и от разработанности её математического аппарата. Традиционно метрическая геометрия рассматривается как мало содержательная (во всяком случае менее содержательная, чем евклидова) и всю её содержательность обычно связывают с ограничениями (1.14), (1.15), которые являются существенными для построения кратчайшей и связанных с ней геометрических объектов. По существу, это означает, что содержательность метрической геометрии связывают с обслуживающим её математическим аппаратом. При введении более эффективного математического аппарата, связанного с классификацией (1.15), содержательность геометрии возросла даже при отказе от ограничений (1.14), (1.15) на метрику.

В качестве достоинства T-геометрии следует упомянуть о нечувствительности её математического аппарата к непрерывности множества, на котором она задана. Представим себе, что в трёхмерном евклидовом пространстве взяты 100 точек $\mathcal{P}^{99}$ и требуется изучить геометрию этого множества. Если делать это обычным способом, то нужно рассмотреть трёхмерное евклидово пространство на множестве $\mathbb{R}^3$, ввести систему координат, удалить из него все точки, кроме $\mathcal{P}^{99}$, и начать изучение множества $\mathcal{P}^{99}$, исходя из координат его точек, с точки зрения того, как $\mathcal{P}^{99}$ вложено в евклидово пространство. С точки зрения T-геометрии изучать $\mathcal{P}^{99}$ нужно, наложив на метрику условие (3.5) и отказавшись от (3.12). Таким образом, подход T-геометрии оказывается локальным в том смысле, что изучается геометрия множества $\mathcal{P}^{99}$, а не то, каким образом оно вложено в евклидово пространство.

Отказ от ограничений (3.12) приводит к тому, что отображение $\Omega \to \mathbb{R}^n$ перестаёт быть обратимым. В частности, возможен случай, когда σ-пространство $\{\sigma, \Omega\}$ оказывается σ-подпространством евклидова пространства E_n.

Определение 3.3. Евклидовым σ-пространством $E' = \{\sigma, \Omega'\}$ называется σ-пространство, изометрически вложимое в евклидово пространство. n-мерным евклидовым σ-пространством $E'_n = \{\sigma, \Omega'\}$ называется σ-пространство, изометрически вложимое в n-мерное евклидово пространство $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$, но не вложимое изометрически в $(n-1)$-мерное евклидово пространство $E_{n-1} = \{\sigma, \mathbb{R}^{n-1}\}$.

n-мерное евклидово σ-пространство является σ-подпространством n-мерного евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Из определения трубки (2.36) и последнего условия (3.4) следует, что n-мерное евклидово σ-пространство является трубкой n-го порядка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = \Omega$, порождённой любым $(n+1)$-точечным σ-базисом трубки $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. При этом выполнено условие минимальности сечения трубки (2.57). Тогда имеет место теорема.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{P}^n$ есть $(n+1)$-точечный σ-базис трубки в σ-пространстве $V\{\sigma, \Omega\}$. Тогда для того, чтобы трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ была n-мерным евклидовым σ-пространством, необходимо и достаточно, чтобы:*

(1) *σ-пространство $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ имело структуру n-мерного евклидова пространства на $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$,*

(2) *сечение трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ было минимально в любой точке:*

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P\} \quad \forall P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n).$$

4. Аксиома треугольника как условие вырожденности трубки первого порядка

Изучим ограничения, налагаемые на σ-пространство неравенством треугольника (1.15). Рассмотрим сегмент $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ трубки $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, заключенный между базисными точками P_0, P_1. Он описывается уравнениями (2.47), (2.48). Для непрерывного σ-пространства это некоторая поверхность, содержащая точки P_0, P_1. При этом сама поверхность $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ и область вне её описываются уравнением

$$S_2(P_0, R, P_1) \equiv \rho(P_0, R) + \rho(R, P_1) - \rho(P_0, P_1) \geqslant 0, \tag{4.1}$$

где R есть бегущая точка. Таким образом, на самой поверхности $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ и вне её неравенство треугольника выполнено. Области внутри поверхности $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ соответствует неравенство $S_2(P_0, R, P_1) < 0$, что связано с нарушением аксиомы треугольника. Другими словами, в метрическом пространстве сегмент $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ трубки первого порядка не может иметь внутренних точек, что означает вырождение сегмента трубки в линию или поверхность, не имеющую внутренних точек. В этом смысле метрическая геометрия (т. е. геометрия, порождённая метрическим пространством) есть вырожденная геометрия.

В том случае, когда все трубки $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ вырождаются в соответствующие базисные точки P_0, P_1, неравенство треугольника (1.15) принимает вид строгого неравенства

$$\rho(P_0, R) + \rho(R, P_1) > \rho(P_0, P_1), \quad P_0 \neq R \neq P_1 \neq P_0, \quad \forall P_0, P_1, R \in \Omega. \tag{4.2}$$

В этом случае естественно назвать метрическую геометрию (Т-геометрию) ультравырожденной.

Пример 4.1. Рассмотрим два разных σ-пространства (и две Т-геометрии) на единичном шаре

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}|^2 \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\} \in \mathbb{R}^3, \quad |\mathbf{x}|^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \left(x^i\right)^2. \tag{4.3}$$

σ-пространство $V_E = \{\sigma_E, \Omega\}$ порождает собственно евклидову геометрию T_E:

$$\sigma_E \colon \Omega \times \Omega \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}, \quad \sigma_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega, \tag{4.4}$$

σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ порождает Т-геометрию T на том же самом множестве Ω с помощью соотношений

$$\sigma \colon \Omega \times \Omega \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}, \quad \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2\left(\arcsin\sqrt{\frac{\sigma_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{2}}\right)^2, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega. \tag{4.5}$$

Одновременно с этими двумя σ-пространствами на шаре Ω рассматриваются их σ-подпространства $V_{Es} = \{\sigma_E, \Sigma\}$ и $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ на поверхности шара $\Sigma = \partial\Omega = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}|^2 = 1\} \subset \Omega$. Поскольку Σ есть подмножество множества Ω, то Т-геометрии T_{Es} и T_s на σ-подпространствах $V_{Es} = \{\sigma_E, \Sigma\}$ и $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ порождаются Т-геометриями T_E и T.

Обозначим трубки в σ-пространстве V_E с помощью символа $\mathcal{L}$, а трубки в σ-пространстве V посредством $\mathcal{T}$. Трубки первого порядка $\mathcal{L}_{AB} \subset \Omega$ $(A, B \in \Sigma)$ суть прямые линии в Ω и две точки A, B в Σ. Другими словами, Т-геометрия T_E вырожденна в первом порядке на Ω и ультравырожденна в первом порядке на Σ. Трубки первого порядка $\mathcal{T}_{AB} \subset \Omega$ $(A, B \in \Sigma)$ суть невырожденные трубки на Ω. Они представляют собой поверхности, полученные в результате вращения окружности единичного радиуса, проходящей через точки $A, B \in \Sigma$, вокруг оси $\mathcal{L}_{AB}$ (см. рис. 1). Эти трубки касаются сферы Σ вдоль окружностей максимального радиуса. Сегмент $\mathcal{T}_{[AB]}$ трубки между точками $A, B \in \Omega$ находится внутри шара Ω, тогда как остальная часть трубки $\mathcal{T}_{AB}$ находится вне внутренней части $\Omega\backslash\Sigma$ шара Ω. В результате в σ-пространстве $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ сегмент $\Sigma \cap \mathcal{T}_{[AB]}$ трубки $\Sigma \cap \mathcal{T}_{AB} \subset \Sigma$ $(A, B \in \Sigma)$ есть кратчайшая линия на поверхности сферы Σ, соединяющая точки $A, B \in \Sigma$. Остальная часть трубки $\Sigma \cap \mathcal{T}_{AB} \subset \Sigma$ есть продолжение сегмента $(\Sigma \cap \mathcal{T}_{[AB]}) \subset \Sigma$. Иначе говоря, σ-пространство $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ порождает вырожденную в первом порядке Т-геометрию на Σ. Таким образом, Т-геометрия на $V = \{\sigma, \Omega\}$ невырожденна на Ω и вырожденна на Σ.

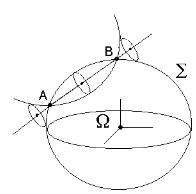

Рис. 1

С другой стороны, Т-геометрия в $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ на сфере Σ может быть построена на основе евклидовой геометрии в $V_E = \{\sigma_E, \Omega\}$. Чтобы построить $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ на основе $V_E = \{\sigma_E, \Omega\}$, нужно использовать экстремальные свойства геодезических.

Рассмотрим трубку второго порядка $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$ $(A, B, C \in \Sigma)$. Эта трубка есть двумерная плоскость, проходящая через точки $A, B, C \in \Sigma$. На $V_{Es} = \{\sigma_E, \Sigma\}$ трубка второго порядка $(\Sigma \cap \mathcal{L}_{ABC}) \subset \Sigma$ имеет форму окружности, проходящей через точки $A, B, C \in \Sigma$.

Чтобы построить внутреннюю Т-геометрию на $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$, порождённую Т-геометрией T_E на Ω, нужно определить метрику $\rho(A, B) = \sqrt{2\sigma(A, B)}$, $A, B \in \Sigma$, на $\Sigma \times \Sigma$ следующим образом:

$$\rho(A, B) = \inf_{C \in \Sigma,\, C \neq A,\, C \neq B} l_C(A, B), \quad A, B \in \Sigma, \tag{4.6}$$

где $l_C(A, B) \subset [0, \infty)$ есть длина кривой $(\Sigma \cap \mathcal{L}_{ABC}) \subset \Sigma$ между точками A, B. Для вычисления длины $l_C(A, B)$ упорядочим точки $R \in (\Sigma \cap \mathcal{L}_{ABC}) \subset \Sigma$ кривой $(\Sigma \cap \mathcal{L}_{ABC}) \subset \Sigma$, решая уравнение

$$\rho_E(A, R)\tau = \rho_E(A, B), \quad R \in (\Sigma \cap \mathcal{L}_{ABC}) \subset \Sigma, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{4.7}$$

где $\rho_E(A, B) = \sqrt{2\sigma_E(A, B)}$.

Решение этого уравнения определяет $R = R_{AB}(\tau, C) \in (\Sigma \cap \mathcal{L}_{ABC}) \subset \Sigma$ как функцию параметра $\tau \in [0, 1]$ и точки $C \in \Sigma$. При этом $A = R_{AB}(0, C)$, $B = R_{AB}(1, C)$. Функция $R = R_{AB}(\tau, C)$ имеет две ветви $R = R_1(\tau, C)$ и $R = R_2(\tau, C)$. Нужно выбрать ветвь с меньшими значениями $\rho_E(A, R_{AB}(\tau, C))$ и определить $l_C(A, B)$ с помощью соотношения

$$l_C(A, B) = \int_0^1 \left[\frac{d\rho_E}{d\tau'}(R_{AB}(\tau, C), R_{AB}(\tau', C))\right]_{\tau'=\tau} d\tau. \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в (4.6), получаем

$$\rho(A, B) = 2 \arcsin \frac{S_E(A, B)}{2}, \quad A, B \in \Sigma, \tag{4.9}$$

что соответствует (4.5).

Этот пример показывает, что, используя евклидову Т-геометрию внутри Ω, можно построить внутреннюю метрику (и Т-геометрию) на поверхности Σ шара Ω. Для построения геометрии на Σ существенно используются экстремальные свойства геодезических (кратчайших) и трубки второго порядка $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$, которые порождают систему кривых на сфере Σ. Из этих кривых отбираются те, расстояния вдоль которых являются минимальными.

По-видимому, с надлежащими оговорками описанная процедура построения метрического пространства на поверхности шара при евклидовой геометрии внутри шара может быть обобщена на случай произвольного тела и произвольного метрического пространства внутри этого тела.

Таким образом, классификация конечных метрических подпространств, использующая ряд отображений (1.16), оказывается эффективным методом исследования метрического пространства, позволяющим описывать евклидову и риманову геометрии в терминах одной только метрики (мировой функции). Геометрии, построенные на основе этой классификации, не используют понятие непрерывности и оказываются нечувствительными к дискретности или непрерывности пространства. Понятие непрерывности может быть введено на основе метрики (мировой функции) путем надлежащей параметризации экстремальных трубок [10].

Литература

[1] Синг Дж. Л. Общая теория относительности. — М.: ИИЛ, 1963.

[2] Топоногов В. А. Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу // УМН. — 1959. — Т. 14. — С. 87.

[3] Александров А. Д., Берестовский В. Н., Николаев И. Г. Обобщенные римановы пространства // УМН. — 1986. — Т. 41, вып. 3. — С. 1–44.

[4] Бураго Ю., Громов М., Перельман Г. Пространства А. Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами // УМН. — 1992. — Т. 47, вып. 2. — С. 3.

[5] Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: ГИТТЛ, 1948.

[6] Menger K. Untersuchen über allgemeine Metrik // Mathematische Annalen. — 1928. — B. 100. — S. 75–113.

[7] Blumenthal L. M. Theory and Applications of Distance Geometry. — Oxford: Clarendon Press, 1953.

[8] Rylov Yu. A. Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects // J. Math. Phys. — 1991. — Vol. 32. — P. 2092.

[9] Архангельский А. В. Канторовская теория множеств. — М.: Изд-во Московского университета, 1988.

[10] Rylov Yu. A. Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry // J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31. — P. 2876.

Статья поступила в редакцию в мае 1999 г.