Комментарий для физиков, написанный 30 января 2011

Эта работа была опубликована в 1995 году в математическом журнале *Advances in Applied Clifford Algebras.* Это моя единственная публикация по Клиффордовым алгебрам. Тем не менее я был несколько раз персонально приглашен для участия в конференциях по Клиффордовым алгебрам, хотя я являюсь физиком и использую Клиффордовы алгебры только как математический метод представления уравнения Дирака. В моей работе γ-матрицы исключаются и уравнение Дирака представляется в гидродинамической форме, где γ-матрицы отсутствуют. С одной стороны, физики не используют метод Заутера - Зоммерфельда для представления γ-матриц в виде клиффордовой алгебры. С другой стороны, можно исключить γ-матрицы, если только они не задаются в виде конкретного представления (т.е. они должны рассматриваться как базисные элементы Клиффордовой алгебры).

Исключение γ-матриц позволяет получить существенные физические результаты: (1) Обнаружение того, что дираковская частица имеет сложную внутреннюю структуру (она не является точечной частицей), (2) обнаружение, что внутренние степени свободы описываются нерелятивистски. Эти утверждения очень существенны, но одновременно они довольно неожиданны, и их нельзя понять без знания метода Заутера – Зоммерфельда. Я пытался опубликовать физически существенные части работы [1, 2] в реферируемых физических журналах. К сожалению, мне это не удалось, потому что, по-видимому, рецензенты не знают метода Заутера – Зоммерфельда представления γ-матриц. Они не доверяют математической корректности моих результатов, хотя эксперты в Клиффордовых геометриях, опубликовавшие мою работу в математическом журнале, доверяли.

Список литературы

[1] Is the Dirac particle composite? *e-print, /physics/0410045.*

[2] Is the Dirac particle completely relativistic? *e-print, /physics/0412032.*

Уравнение Дирака в терминах гидродинамических переменных

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru

Аннотация

Распределенная динамическая система $\mathcal{S}_D$, описываемая уравнением Дирака исследуется просто как динамическая система, т.е. без использования квантовых принципов. Уравнение Дирака описывается в терминах гидродинамических переменных: 4-тока j^i, псевдовектора спина S^i, действия $\hbar\varphi$ и псевдоскаляра κ. В квазиоднородном приближении, когда все трансверсальные производные (ортогональные к вектору тока j^i) малы, система $\mathcal{S}_D$ превращается в статистический ансамбль классических дискретных динамических систем $\mathcal{S}_{dc}$. При некоторых условиях классическая система $\mathcal{S}_{dc}$ описывает точечную классическую частицу, движущуюся в заданном электромагнитном поле. Вообще говоря, мировая линия частицы оказывается винтовой линией, если даже электромагнитное поле отсутствует. Обе динамические системы $\mathcal{S}_D$ и $\mathcal{S}_{dc}$ оказываются нерелятивистскими в том смысле, что динамические уравнения, написанные в терминах гидродинамических переменных не являются релятивистски ковариантными по отношению к ним, хотя все динамические переменные являются тензорами или псевдотензорами. Они становятся релятивистски ковариантными только после добавления постоянного единичного времениподобного вектора f^i, который следует рассматривать как динамическую переменную, описывающую свойства пространства-времени. Эта "постоянная" переменная возникает вместо γ-матриц которые удаляются с помощью делителей нуля в процессе преобразования гидродинамических переменных. Возможно отделение динамических переменных κ, κ^i, ответственных за квантовые эффекты. Это означает, что полагая $\kappa, \kappa^i \equiv 0$, мы превращаем динамическую систему $\mathcal{S}_D$, описываемую уравнением Дирака, в статистический ансамбль $\mathcal{E}_{Dqu}$ классических динамических систем $\mathcal{S}_{dc}$.

1 Введение

Уравнение Дирака, рассматриваемое как динамическое уравнение для волновой функции было исследовано почти полностью в рамках принципов квантовой механики, и тут вряд ли можно сказать что-то новое. В то же самое время уравнение Дирака, рассматриваемое просто как динамическое уравнение для распределенной динамической системы $\mathcal{S}_D$, демонстрирует ряд таких неожиданных свойств как существование динамических переменных κ, ответственных за квантовые эффекты, и появление постоянного времениподобного вектора, описывающего расщепление пространства-времени на пространство и время.

С формальной математической точки зрения наше исследование уравнения Дирака есть просто замена переменных, когда четырех-компонентная комплексная волновая функция Дирака заменяется несколькими тензорными переменными, имеющими также восемь независимых вещественных составляющих. Эти тензорные переменные суть: вектор 4-тока j^i, $i = 0, 1, 2, 3$, псевдовектор спина S^i, $i = 0, 1, 2, 3$, скаляр действия φ, и псевдоскаляр κ. Эти величины будут рассматриваться как гидродинамические переменные.

С физической точки зрения динамическая система $\mathcal{S}_D$ рассматривается как распределенная динамическая система, описывающая некоторым образом движение электрона (или позитрона). Движение отдельной частицы предполагается стохастическим, причем переменные j^i описывают средний 4-ток частиц. Интерпретация других динамических переменных системы $\mathcal{S}_D$ производится на основе сравнения со статистическим ансамблем классических частиц. Квантовый принцип соответствия, когда любой физической величине соответствует линейный оператор, не используется. Другие квантовые принципы тоже не используются. Вместо них используется более общий статистический принцип, который утверждает: *Множество* $\mathcal{E}$ (статистический ансамбль) *многих одинаковых независимых стохастических систем* $\mathcal{S}_s$ *образует детерминированную динамическую систему* $\mathcal{S}_d$ [1]. Термин "стохастическая система" означает, что эксперимент с отдельной системой невоспроизводим, и для такой системы не существует динамических уравнений. Если $\mathcal{S}$ означает или стохастическую систему $\mathcal{S}_s$, или детерминированную систему $\mathcal{S}_d$, то статистический принцип может быть сформулирован в виде

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}] \quad \text{есть} \quad \mathcal{S}_d$$

Статистический принцип можно применять и к квантовым, и к классическим системам. Это более общее утверждение, чем множество квантовых принципов. В частности, он может быть применен для таких стохастических систем, которые не являются ни классическими, ни квантовыми. Главным понятием этого подхода является статистический ансамбль, рассматриваемый как динамическая система (а не как плотность вероятности или амплитуда вероятности). Мы будем ссылаться на этот подход как *динамическую концепцию статистического описания* (ДКСО).

Есть причина для рассмотрения уравнения Дирака без использования квантовых принципов, т.е. просто рассмотрения динамического уравнения для системы $\mathcal{S}_D$. Недавно была предложена гипотеза, что реальное пространство-время есть искаженное пространство-время Минковского, и дисторсия пространства-времени является причиной квантовых эффектов [2]. Дисторсия – это такая деформация пространства-времени, которая преобразует одномерные мировые линии в трехмерные мировые трубки. Мировые трубки частиц оказываются стохастическими, и их статистическое описание совпадает с квантовым описанием, при условии, что постоянная Планка $\hbar$ определяет пространственно-временную дисторсию (толщину трубок). Эта гипотеза была подтверждена для свободных нерелятивистских частиц. Интересно было бы проверить гипотезу в случае релятивистских частиц. Для такой проверки необходимо разделить действие, описывающее ансамбль дираковских частиц на две части: классическую часть и часть, ответственную за квантовые эффекты.

Другой мотив такой. Традиционный формализм квантовой динамики (ФКД) представляет собой аксиоматическое построение.ФКД относится к ДКСО примерно так же, как аксиоматическая термодинамика относится к статистической физике. Например, броуновское движение не может быть объяснено и понято с точки зрения термодинамики. Аксиомы термодинамики не позволяют это сделать. Статистическая физика объясняет явление броуновского движения и ограничивает применение принципов термодинамики, потому что статистический подход более общий, чем подход аксиоматической термодинамики.

Что-то вроде этого можно увидеть в области квантовой динамики. Проблема рождения пар - главная проблема физики высоких энергий. В тех областях, где рождение пар несущественно и может рассматриваться как поправка (например, в квантовой электродинамике) квантовая теория преуспевает. В тех областях, где рождение пар является доминирующим эффектом, квантовая теория (в частности, КТП) терпит неудачу.

За последние пятьдесят лет квантовой теории поля не удалось решить проблему рождения пар. Может быть, проблема рождения пар не может быть решена в рамках квантовых принципов, и необходим более общий статистический подход.

Довольно трудно получить классический предел уравнения Дирака, потому что оно содержит такие неклассические величины как γ-матрицы Дирака, которые едва ли можно рассматривать с классической точки зрения.

Квантовый электрон, движущийся в заданном электромагнитном поле A_l, $l = 0, 1, 2, 3$, описывается обычно уравнением Дирака

$$-i\hbar\gamma^l\partial_l\psi + eA_l\gamma^l\psi + m\psi = 0, \tag{1.1}$$

где ψ есть четырех-компонентная комплексная волновая функция. Скорость света c полагается равной 1. Можно преобразовать переменные ψ и описывать эту систему в терминах переменных φ, j^l, S^l, $(l = 0, 1, 2, 3)$, κ, определенных соотношениями

$$\begin{gathered}
j^l = \bar\psi\gamma^l\psi, \qquad l = 0, 1, 2, 3, \qquad \bar\psi = \psi^*\gamma^0; \\
S^l = i\bar\psi\gamma_5\gamma^l\psi, \qquad l = 0, 1, 2, 3, \qquad \gamma_5 = \gamma^{0123} \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3; \\
\partial_l\varphi = (\bar\psi\partial_l\psi - \partial_l\bar\psi\psi)(2i\bar\psi\psi)^{-1}, \qquad l = 0, 1, 2, 3; \\
\cos\kappa = \bar\psi\psi(j^l j_l)^{-1/2};
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь γ^l, $l = 0, 1, 2, 3$ суть γ-матрицы Дирака, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\gamma^i\gamma^k + \gamma^k\gamma^i = 2g^{ik}, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

где g^{ik} =diag$(1, -1, -1, -1)$ есть метрический тензор. Только две составляющие псевдовектора S^l являются независимыми, потому что выполняются тождества

$$S^lS_l \equiv -j^lj_l, \qquad j^lS_l \equiv 0. \tag{1.4}$$

Псевдовектор S^l интерпретируется как псевдовектор спина, потому что он однозначно связан с тензором спина $S^{ml,k}$, определяемого соотношением [3]

$$S^{ml,k} = \frac{1}{4}\bar\psi(\gamma^k\sigma^{lm} + \sigma^{lm}\gamma^k)\psi, \qquad \sigma^{lm} = \frac{i}{2}(\gamma^l\gamma^m - \gamma^m\gamma^l) \tag{1.5}$$

Соотношение между S^i и $S^{ml,k}$ имеет вид

$$S^i = \frac{1}{3} g^{ij} \varepsilon_{jmlk} S^{ml,k}, \qquad i = 0, 1, 2, 3;$$

$$S^{ml,k} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{imlk} S_i, \qquad m, l, k = 0, 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

Здесь ε_{jmlk} и ε^{imlk} суть псевдотензоры Леви-Чивита ($\varepsilon_{0123} = 1$, $\varepsilon^{0123} = -1$).

Итак, скаляр φ, псевдоскаляр κ, вектор j^l, и псевдовектор S^l имеют 8 независимых составляющих, которые используются вместо 8 вещественных составляющих (4 комплексных составляющих) волновой функции Дирака ψ.

Осуществление такого преобразования является целью настоящей работы. Такое описание может интерпретироваться как описание в терминах гидродинамических переменных. При некоторых условиях динамическая система $\mathcal{S}_D$ превращается в статистический ансамбль $\mathcal{E}_{Dqu}$ классических динамических систем $\mathcal{S}_{dc}$. Система $\mathcal{S}_{dc}$ может интерпретироваться как классический аналог электрона. Ансамбль $\mathcal{E}_{Dqu}$ описывается обычно в терминах гидродинамических переменных j^l, φ, $\boldsymbol{\xi}$. Динамические системы $\mathcal{S}_D$ и $\mathcal{E}_{Dqu}$ различаются некоторыми членами их лагранжианов, но не принципиально. Таким образом, можно рассматривать различие между дираковской динамической системой $\mathcal{S}_D$ и соответствующим классическим статистическим ансамблем.

Во втором разделе исследуются некоторые свойства статистического ансамбля $\mathcal{E}_{cl}$. Третий раздел посвящен введению гидродинамических переменных. В четвертом разделе действие для уравнения Дирака записывается в гидродинамических переменных. Пятый раздел посвящен рассмотрению квази-однородного состояния системы $\mathcal{S}_D$. Релятивистская инвариантность динамических уравнений в терминах гидродинамических переменных обсуждается в шестом разделе. Седьмой раздел посвящен исследованию классического аналога $\mathcal{S}_{dc}$ дираковского электрона..

2 Статистический ансамбль классических динамических систем

Пусть имеется классическая динамическая система $\mathcal{S}$, описываемая функцией Лагранжа $L(t, \mathbf{x}, d\mathbf{x}/dt)$, где $\mathbf{x} = \{x^\alpha\}$, $d\mathbf{x}/dt = \{dx^\alpha/dt\}$, $\alpha = 1, 2, \dots n$ суть обобщенные координаты и скорости. Тогда по определению чистый статистический ансамбль $\mathcal{E}_{cl}$ динамических систем $\mathcal{S}$ представляет собой множество одинаковых независимых систем $\mathcal{S}$. Ее лагранжиан есть сумма (интеграл) лагранжианов L. Действие для ансамбля $\mathcal{E}_{cl}$ имеет вид

$$\mathcal{A}_L[\mathbf{x}] = \int L(t, \mathbf{x}, d\mathbf{x}/dt) dt d\boldsymbol{\xi}, \qquad d\boldsymbol{\xi} = \prod_{\alpha=1}^{\alpha=n} d\xi_\alpha \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots n$ суть лагранжевы координаты, маркирующие системы ансамбля, и $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ есть функция от t и $\boldsymbol{\xi}$.

Динамическая система $\mathcal{E}_{cl}$ может рассматриваться как жидкость, описываемая в лагранжевых координатах (время t и лагранжевы координаты $\boldsymbol{\xi}$ являются независимыми переменными). То же самое действие, записанное в эйлеровых координатах

($t, \mathbf{x}$ суть независимые переменные) имеет вид

$$\mathcal{A}_E[j, \varphi, \boldsymbol{\xi}] = \int \{\mathcal{L}(x, j) - \hbar j^i[\partial_i \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_i \xi_\alpha]\} d^{n+1}x, \qquad d^{n+1}x = \prod_{i=0}^{n} dx^i, \tag{2.2}$$

где $j = \{j^0, \mathbf{j}\}$, $\mathbf{j} = \{j^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots n$, φ, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots n$ суть функции от $x = \{x^0, \mathbf{x}\}$, $x^0 = t$, $\mathbf{x} = \{x^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots n$. Суммирование производится по повторяющимся индексам: по латинским $(0 - n)$ и по греческим $(1 - n)$. Все переменные $j = \{j^0, \mathbf{j}\}$, φ, $\boldsymbol{\xi}$ являются функциями от x. Функция $\mathcal{L}(x, j)$ определяется соотношением

$$\mathcal{L}(x, j) = j^0 L(x^0, \mathbf{x}, \mathbf{j}/j^0) \tag{2.3}$$

где L есть лагранжиан отдельной системы $\mathcal{S}$. Переменные $j = \{j^0, \mathbf{j}\}$ описывают поток частиц в $(n+1)$-мерном пространстве V координат x. Они связаны с переменными $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, $d\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})/dt$ с помощью соотношений

$$j^0 = \det \parallel \xi_{\alpha,\beta} \parallel, \qquad \xi_{\beta,\alpha} \equiv \partial_\alpha \xi_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots n, \qquad \mathbf{j} = j^0 \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{2.4}$$

а функции $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(x)$ определяются как решения уравнений

$$x^\alpha = x^\alpha(t, \boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n.$$

Функции $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$ суть произвольные функции лагранжевых координат ξ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots n$. Появление произвольных функций является результатом интегрирования некоторых динамических уравнений, возникающих в процессе преобразований от действия (2.1) к действию (2.2) (Смотри Приложение A). В свою очередь возможность такого интегрирования связана с инвариантностью динамических уравнений по отношению к произвольному преобразованию лагранжевых координат $\boldsymbol{\xi}$

$$\xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\alpha = \tilde{\xi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \det \parallel \partial\tilde{\xi}_\beta/\partial\xi_\alpha \parallel = 1, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

Поток $j = \{j^0, \mathbf{j}\}$ инвариантен по отношению преобразованию перемаркировки (2.5).

Статистический ансамбль классических систем традиционно описывается функцией распределения $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ в фазовом пространстве координат $\mathbf{x}$ и импульсов $\mathbf{p}$. Для чистого статистического ансамбля функция распределения имеет специальный вид

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = j^0(t, \mathbf{x})\delta[\mathbf{x} - \mathbf{P}(t, \mathbf{x})] \tag{2.6}$$

где

$$\mathbf{p} = \{p_\alpha\}, \qquad p_\alpha = \partial L/\partial(dx^\alpha/dt), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n \tag{2.7}$$

$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \{P_\alpha(t, \mathbf{x})\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots n$ есть множество функций, зависящих только от t и $\mathbf{x}$, а δ означает δ-функцию Дирака. Эволюция этого ансамбля описывается уравнением Лиувилля вида

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} = 0, \tag{2.8}$$

где $H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ есть функция Гамильтона динамической системы $\mathcal{S}$. Динамические уравнения для переменных j^0, $\mathbf{P}(t, \mathbf{x})$ могут быть получены с помощью подстановки уравнения (2.6) в уравнение (2.8).

Среди трех способов [(2.1),(2.2) и (2.8)], описывающих чистый статистический ансамбль, действие (2.2) является наиболее удобным для сравнения с действием для динамической системы $\mathcal{S}_D$.

Динамические уравнения, определяемые действием (2.2), имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \varphi} = \hbar \partial_i j^i = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta j^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j^i} - \hbar \partial_i \varphi - \hbar g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \xi_{\alpha,i} = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots n; \tag{2.10}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \xi_\alpha} = -\hbar \left(\frac{\partial g^\beta(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial g^\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\beta} \right) j^i \partial_i \xi_\beta = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots n; \tag{2.11}$$

j^l, $l = 0, 1, \ldots n$ есть $(n+1)$-вектор тока в пространстве V. Векторное поле j^i к траекториям систем в V. В соответствии с уравнением (2.3) вектор

$$p_l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j^l}, \qquad l = 0, 1, \ldots n; \qquad p_0 = \left[L - \frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/dt)} \right]_{dx^\alpha/dt = j^\alpha/j^0};$$

$$p_\alpha = \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/dt)} \right]_{dx^\alpha/dt = j^\alpha/j^0}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n \tag{2.12}$$

ассоциируется с каноническим импульсом отдельной системы ансамбля. Таким образом в соответствии с (2.10)

$$p_i = \hbar \left(\partial_i \varphi + g^\alpha(\xi) \boldsymbol{\xi}_{\alpha,i} \right), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots n \tag{2.13}$$

где $\hbar$ есть постоянная, имеющая размерность действия. В этом случае φ, g^α и $\boldsymbol{\xi}$ могут рассматриваться как безразмерные величины. Постоянная $\hbar$ может рассматриваться как постоянная Планка, хотя в данном случае она не имеет значения квантовой постоянной.

Исключая переменные φ и $\boldsymbol{\xi}$ из уравнений (2.10), (2.11), получаем уравнения

$$j^i[\partial_i p_k - \partial_k p_i] = j^i[\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}(x,j)}{\partial j^k} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}(x,j)}{\partial j^i}] = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots n \tag{2.14}$$

Уравнения (2.14) вместе с уравнением (2.9) образуют систему из $n+1$ динамических уравнений для некоторой жидкости, описываемой вектором тока j^i.

При линейных преобразованиях координат x^i, $i = 0, 1, \ldots n$ вектор тока j^l, $l = 0, 1, \ldots n$ преобразуется как вектор. В этом случае лагранжевы координаты преобразуются как скаляры. Но рассмотрение $\boldsymbol{\xi}$ в качестве скаляров довольно условно из-за преобразования перемаркировки (2.5).

При преобразовании (2.5) получаем

$$j^l g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \partial_l \xi_\alpha \to j^l \tilde{g}^\alpha(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \partial_l \tilde{\xi}_\alpha, \qquad \tilde{g}^\alpha(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \tilde{\xi}_\alpha} \tag{2.15}$$

Другими словами, $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$ преобразуются при преобразовании перемаркировки как компоненты вектора в пространстве переменных $\boldsymbol{\xi}$. Комбинируя любое линейное преобразование координат x^i с некоторым преобразованием перемаркировки, можно приписать практически любые трансформационные свойства лагранжевым координатам $\boldsymbol{\xi}$.

Любое преобразование перемаркировки (2.5) является калибровочным преобразованием, потому что перемаркировка изменяет описание статистического ансамбля, не меняя самого состояния. Легко проверить, что множество преобразований перемаркировки образует группу.

Для чистого статистического ансамбля классических точечных заряженных частиц, движущихся в заданном электромагнитном поле, действие (2.2) имеет вид

$$\mathcal{A}_{cl}[j,\xi,\varphi] = \int [-m\sqrt{j^l j_l} - eA_l j^l - \hbar j^i(\partial_i\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\xi_{\alpha,i})]d^4x \tag{2.16}$$

где скорость света $c = 1$, и производится суммирование по повторяющимся индексам (0 - 3) для латинских индексов и (1 - 3) для греческих.

3 Преобразование переменных

Для преобразования уравнения Дирака (1.1) к новым переменным (1.2), будем использовать действие для уравнения (1.1)

$$\mathcal{A}_D[\bar\psi,\psi] = \int (-m\bar\psi\psi + \frac{i}{2}\hbar\bar\psi\gamma^l\partial_l\psi - \frac{i}{2}\hbar\partial_l\bar\psi\gamma^l\psi - eA_l\bar\psi\gamma^l\psi)d^4x \tag{3.1}$$

При выражении переменных (1.2) через волновую функцию ψ, будем использовать формализм, где волновая функция рассматривается как клиффордово число с 16 базисными единицами: I, γ^i, γ^{ik}, γ^{ikl}, γ^{iklm} (все единицы различны и клиффордовы числа удовлетворяют соотношениям (1.3)). Приведение клиффордовых чисел осуществляется с помощью делителей нуля [4,5].

Введем мтрицы γ_5, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$

$$\gamma_5 = \gamma^{0123} \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \qquad \sigma_1 = -i\gamma^{23}, \qquad \sigma_2 = -i\gamma^{31}, \qquad \sigma_3 = -i\gamma^{12},$$

$$\gamma_5\sigma_\alpha = \sigma_\alpha\gamma_5, \qquad \gamma^{0\alpha} = -i\gamma_5\sigma_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3; \tag{3.2}$$

$$\gamma^0\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\gamma^0, \qquad \gamma^0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma^0$$

В соответствии с уравнениями (1.3), (3.2) матрицы $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ удовлетворяют соотношению

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma, \qquad \alpha,\beta = 1,2,3 \tag{3.3}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть антисимметричный псевдотензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{123} = 1$).

Определим волновую функцию ψ в виде

$$\psi = Ae^{i\varphi + \frac{1}{2}\gamma_5\kappa}e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}}e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma\zeta}}\Pi$$

$$\bar\psi = \Pi\psi^*\gamma^0, \qquad \psi^* = A\Pi e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma\zeta}}e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}}e^{-i\varphi - \frac{1}{2}\gamma_5\kappa} \tag{3.4}$$

где (*) означает эрмитово сопряжение, и

$$\Pi = \frac{1}{4}(1+\gamma^0)(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}), \qquad \mathbf{z} = \{z^\alpha\} = \mathrm{const}, \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \mathbf{z}^2 = 1 \tag{3.5}$$

есть делитель нуля. Величины A, κ, φ, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$ представляют собой девять вещественных параметров, определяющих волновую функцию ψ.

Используя соотношения (3.2), (3.3), (3.5), легко проверить, что

$$\Pi^2 = \Pi, \qquad \gamma_0\Pi = \Pi, \qquad \mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}\Pi = \Pi, \qquad \Pi\gamma_5\Pi = 0,$$

$$\Pi\sigma_\alpha\Pi = z^\alpha\Pi, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{3.6}$$

Вообще говоря, волновые функции ψ, ψ^*, определенные уравнением (3.4) являются 4×4 комплексными матрицами. В надлежащем представлении, где Π имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

волновые функции ψ, ψ^* имеют вид

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Их произведение $\psi^* O\psi$ имеет вид

$$\psi^* O\psi = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\Pi = \Pi a \tag{3.9}$$

где O есть произвольная 4×4 матрица, и a есть некоторая комплексная величина. Если f есть аналитическая функция, имеющая свойство $f(0) = 0$, то функция $f(a\Pi)$ от некоторой 4×4 матрицы типа (3.9) есть матрица $f(a)\Pi$ того же типа. По этой причине мы не будем различать между комплексной величиной a и комплексной 4×4 матрицей $a\Pi$. В окончательных выражениях типа $a\Pi$ (a есть комплексная величина) множитель Π будет опускаться.

С помощью соотношений (3.2), (3.6) можно привести клиффордово число $\Pi O\Pi$ к виду (3.9), без использования какого-либо конкретного представления γ-матриц. Это свойство будет использоваться в наших расчетах.

С помощью (3.4) переменные $\bar\psi\psi$, j^l, S^l, $l = 0, 1, 2, 3$, определяемые выражениями (1.2), могут быть представлены в виде

$$\bar\psi\psi = \psi^*\gamma^0\psi = A^2\Pi e^{\gamma_5\kappa}\Pi = A^2\cos\kappa\Pi \tag{3.10}$$

$$j^0\Pi = \bar\psi\gamma^0\psi = A^2\Pi e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma\zeta}} e^{-i\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}} e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma\zeta}}\Pi = A^2\Pi e^{-i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma\eta}}\Pi = A^2\cosh(\eta)\Pi \tag{3.11}$$

где

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}, \qquad \Sigma_\alpha = e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma\zeta}}\sigma_\alpha e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma\zeta}}_, \qquad \alpha = 1, 2, 3; \tag{3.12}$$

$$\eta = \sqrt{\boldsymbol{\eta}^2} = \sqrt{\eta^\alpha\eta^\alpha}$$

Матрица Σ_α удовлетворяет тем же самым соотношениям (3.3), как и матрицы σ_α.

Тем же самым способом получаем

$$\begin{aligned} j^\alpha\Pi &= \psi^*\gamma^{0\alpha}\psi\Pi = A^2\Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}(-i\gamma_5\Sigma_\alpha)e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi = \\ &= A^2\Pi(\cosh\tfrac{\eta}{2} - i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v}\sinh\tfrac{\eta}{2})(-i\gamma_5\Sigma_\alpha)(\cosh\tfrac{\eta}{2} - i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v}\sinh\tfrac{\eta}{2})\Pi = \\ &= A^2\sinh(\eta)v^\alpha\Pi, \qquad \alpha = 1,2,3, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$$\mathbf{v} = \{v^\alpha\}, \qquad v^\alpha = \eta^\alpha/\eta, \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \mathbf{v}^2 = 1. \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} S^0\Pi &= \psi^*(-i\gamma_5)\psi = A^2\Pi(-i\gamma_5)e^{-i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi = \\ &= A^2\Pi\sinh(\eta)\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v}\Pi = A^2\sinh(\eta)\boldsymbol{\xi}\Pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^\alpha\Pi = \ & \psi^*\sigma_\alpha\psi\Pi = A^2\Pi e^{\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Sigma_\alpha e^{\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi = \\ & A^2[\xi^\alpha + (\cosh\eta - 1)v^\alpha(\mathbf{v}\boldsymbol{\xi})]\Pi, \qquad \alpha = 1,2,3. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь $\boldsymbol{\xi} = \{\xi^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ определяются соотношением.

$$\xi^\alpha\Pi = \Pi\Sigma_\alpha\Pi, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{3.16}$$

Из уравнений (3.11), (3.13) следует

$$j^ij_i\Pi = A^4\Pi, \qquad A = (j^lj_l)^{1/4} \equiv \rho^{1/2} \tag{3.17}$$

В соответствии с уравнениями (3.12), (3.16) получаем

$$\boldsymbol{\xi}\Pi = \{[\mathbf{z} - \mathbf{n}(\mathbf{nz})]\cos\zeta + (\mathbf{z}\times\mathbf{n})\sin\zeta + \mathbf{n}(\mathbf{nz})\}\Pi \tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} = \{\xi^\alpha\}, \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \zeta = \sqrt{\boldsymbol{\zeta}^2} = \sqrt{\zeta^\alpha\zeta^\alpha}, \\ \mathbf{n} = \boldsymbol{\zeta}/\zeta, \qquad \mathbf{n}^2 = 1 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Волновая функция (3.4) зависит от 9 вещественных параметров: A, φ, κ, η_α, ζ_α, $\alpha = 1,2,3$. Волновая функция имеет 8 независимых вещественных компонент, и не все параметры $A,\varphi,\kappa,\eta^\alpha,\zeta^\alpha$, $\alpha = 1,2,3$ являются независимыми. Фиксируем один из параметров, а именно положим

$$\zeta = \pi \tag{3.20}$$

Тогда уравнение (3.18) принимает вид

$$\boldsymbol{\xi} = 2\mathbf{n}(\mathbf{nz}) - \mathbf{z} \tag{3.21}$$

Оно может быть разрешено относительно $\mathbf{n} = \boldsymbol{\zeta}/\pi$. Получаем

$$\boldsymbol{\zeta}/\pi = \mathbf{n} = (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{z})[2(1 + \mathbf{z}\boldsymbol{\xi})]^{-1/2} \tag{3.22}$$

Используя уравнения (3.11), (3.13), (3.17), (3.22), можно выразить параметры $A,\varphi,\kappa,\eta^\alpha,\zeta^\alpha$, $\alpha = 1,2,3$, описывающие волновую функцию, через переменные $j^i, S^i, \varphi, \kappa$. Получаем

$$\xi^\alpha = \rho^{-1}[S^\alpha - \frac{j^\alpha(S^\beta j^\beta)}{j^0(j^0+\rho)}], \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \rho \equiv \sqrt{j^lj_l} \tag{3.23}$$

$$\cosh\eta = j^0/\rho, \qquad v^\alpha = \frac{\eta^\alpha}{\eta} = \frac{j^\alpha}{\sqrt{(j^0)^2 - j^l j_l}}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{3.24}$$

Используя соотношения (3.4), (3.20) - (3.24), можно представить волновую функцию (3.4) в терминах переменных $j^i, S^i, \kappa, \varphi$:

$$\psi = \frac{ie^{i\varphi+\frac{1}{2}\gamma_5\kappa}}{2\sqrt{(1+\boldsymbol{\xi})(j^0+\rho)}}[(j^0+\rho)(1+\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\sigma}) - i\gamma_5 S^0 - i\gamma_5(\mathbf{j} + i\rho^{-1}\mathbf{j}\times\mathbf{S})\boldsymbol{\sigma}]\Pi \tag{3.25}$$

где $\boldsymbol{\xi}$ выражаются через j^i, S^i с помощью соотношений(3.23). Символ $\times$ означает векторное произведение, и Π определяется соотношением (3.5).

Любое выражение вида $\bar{\psi}O\psi$, где O есть произвольная комбинация γ-матриц, может быть выражено через переменные S^i, j^i, κ. Например,

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}(\gamma^l\gamma^k - \gamma^k\gamma^l)\psi = \frac{1}{2\rho}[(j^k S^l - j^l S^k)\sin\kappa + \varepsilon^{lkim} j_i S_m \cos\kappa]\Pi. \tag{3.26}$$

4 Преобразование действия

Теперь подсчитаем выражение (два средних члена соотношения(3.1))

$$\begin{aligned}\tfrac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi + \text{h.c.} = \;& \tfrac{i}{2}\hbar\psi^*\left[(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla})\left(i\varphi + \tfrac{1}{2}\gamma_5\kappa\right)\right]\psi + \text{h.c.}\\ &+\tfrac{i}{2}\hbar A^2\Pi e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}}e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}}(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\nabla)(e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}}e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}})\Pi + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{4.1}$$

где "h.c." означает член, полученный из предыдущего члена с помощью эрмитова сопряжения. Используя соотношения (3.11)-(3.15), приведем выражение (4.1) к виду

$$\begin{aligned}\tfrac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi + \text{h.c.} = \;& -\hbar j^l\partial_l\varphi - \tfrac{1}{2}\hbar S^l\partial_l\kappa\\ &+\tfrac{i}{2}\hbar A^2\Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\nabla)e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi + \text{h.c.}\\ &+\tfrac{i}{2}\hbar A^2\Pi e^{-i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}}\partial_0 e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}}\Pi + \text{h.c.}\\ &+\tfrac{i}{2}\hbar A^2\Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}(-i\gamma_5\Sigma_\alpha)e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}}\partial_\alpha e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}}\Pi + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{4.2}$$

где матрица $\boldsymbol{\Sigma}$ не дифференцируется.

Принимая во внимание четвертое соотношение (3.6) и уравнения (3.11), (3.13), приведем выражение (4.2) к виду

$$\begin{aligned}\tfrac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi + \text{h.c.} = \;& -\hbar j^l\partial_l\varphi - \tfrac{1}{2}\hbar S^l\partial_l\kappa + \tfrac{i}{2}\hbar j^l\Pi e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}}\partial_l e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}}\Pi + \text{h.c.}\\ &+\tfrac{i}{2}\hbar A^2\Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}(\partial_0 - i\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\nabla)e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{4.3}$$

Подставляя соотношение (3.20) в третий член выражения(4.3), получаем с помощью соотношения (3.22)

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\hbar j^l\Pi e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}}\partial_l e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}}\Pi + \text{h.c.} &= \frac{i}{2}\hbar j^l\Pi\sigma_\alpha\sigma_\beta n_\alpha\partial_l n_\beta\Pi + \text{h.c.}\\ &= -\frac{\hbar j^l}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\partial_l\xi^\beta z^\gamma\Pi = -\hbar j^l g_\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_l\xi^\alpha\Pi\end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$g_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\beta z^\gamma(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})^{-1} \tag{4.5}$$

Расчет последнего члена соотношения (4.3) приводит к следующему результату

$$F_4 = \begin{array}{l} \frac{i}{2}\hbar A^2 \Pi e^{-\frac{i}{2}\gamma_5 \mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}(\partial_0 - i\gamma_5 \mathbf{\Sigma}\nabla)e^{-\frac{i}{2}\gamma_5 \mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\eta}}\Pi + \text{h.c.} = \\ -\frac{1}{2}\hbar A^2 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}[\partial_\alpha \eta v^\beta \xi^\gamma + \sinh\eta \partial_\alpha v^\beta \xi^\gamma + 2\sinh^2(\frac{\eta}{2})v^\alpha \partial_0 v^\beta \xi^\gamma]\Pi \end{array} \tag{4.6}$$

Введем два постоянных вектора

$$f^i = \{1, 0, 0, 0, \}, \qquad z^i = \{0, z^1, z^2, z^3\} \tag{4.7}$$

которые удовлетворяют следующим условиям

$$f^l f_l = 1, \qquad f^l z_l = 0, \qquad z^l z_l = -1. \tag{4.8}$$

С помощью соотношений (3.11), (3.13) и (4.7) приведем выражение (4.6) к виду

$$F_4 = -\frac{\hbar}{2(\rho + f^s j_s)}\varepsilon_{iklm}[\partial^k(j^i + f^i\rho)](j^l + f^l\rho)[\xi^m - f^m(\xi^s f_s)] \tag{4.9}$$

где ε_{iklm} есть псевдотензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{0123} = 1$) and $\xi^m = \{\xi^0, \boldsymbol{\xi}\}$. Значение ξ^0 при этом не существенно.

Введем единичный времениподобный вектор

$$q^i \equiv \frac{j^i + f^i\rho}{\sqrt{(j^l + f^l\rho)(j_l + f_l\rho)}} = \frac{j^i + f^i\rho}{\sqrt{2\rho(\rho + j^l f_l)}} \tag{4.10}$$

и два пространственноподобных вектора

$$\nu^i = \xi^i - f^i(\xi^s f_s), \qquad i = 0, 1, 2, 3; \qquad \nu^i \nu_i = -1, \tag{4.11}$$

$$\mu^i \equiv \frac{\nu^i}{\sqrt{-(\nu^l + z^l)(\nu_l + z_l)}} = \frac{\nu^i}{\sqrt{2(1 - \nu^l z_l)}} = \frac{\nu^i}{\sqrt{2(1 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}}. \tag{4.12}$$

Тогда в соответствии с соотношениями(4.3), (4.4), (4.9) соотношение (4.2) может быть представлено в виде

$$\frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l \partial_l \psi + \text{h.c.} = -\hbar j^l[\partial_l \varphi + g_\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_l \xi^\alpha] - \frac{\hbar}{2}S^l \partial_l \kappa + \hbar\rho\varepsilon_{iklm}q^i(\partial^k q^l)\nu^m \tag{4.13}$$

где второй член может быть записан также в ковариантном виде

$$-\hbar j^l g_\alpha(\xi)\partial_l \xi^\alpha = -\hbar j^l \varepsilon_{jksm}\mu^j(\partial_l \mu^k)f^s z^m \tag{4.14}$$

Теперь с помощью соотношений (3.10)-(3.12) можно представить действие (3.1) в виде

$$\mathcal{A}_D[j, \varphi, \kappa, \boldsymbol{\xi}] = \int(\mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}_{q1} + \mathcal{L}_{q2})d^4x \tag{4.15}$$

$$\mathcal{L}_{cl} = -m\rho - eA_l j^l - \hbar j^i[\partial_i \varphi + g_\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_i \xi^\alpha], \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{4.16}$$

$$\mathcal{L}_{q1} = 2m\rho\sin^2(\frac{\kappa}{2}) - \frac{\hbar}{2}S^l \partial_l \kappa, \tag{4.17}$$

$$\mathcal{L}_{q2} = \hbar\rho\varepsilon_{iklm}q^i(\partial^k q^l)\nu^m \tag{4.18}$$

Величина $g_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ определяется уравнением (4.5). S^l, $l=0,1,2,3$ рассматриваются как функции от j^l и $\boldsymbol{\xi}$, определяемые соотношениями

$$S^0=\mathbf{j}\boldsymbol{\xi},\qquad S^\alpha=\rho\xi^\alpha+\frac{(\mathbf{j}\boldsymbol{\xi})j^\alpha}{\rho+j^kf_k},\qquad \alpha=1,2,3 \tag{4.19}$$

полученными из уравнений (1.4), (3.23). Не все переменные $\boldsymbol{\xi}=\{\xi^\alpha\}$, $\alpha=1,2,3$ являются независимыми, потому что они удовлетворяют ограничениям

$$\boldsymbol{\xi}^2=\xi^\alpha\xi^\alpha=1 \tag{4.20}$$

как это следует из уравнений (3.5), (3.19), (3.21). Вариация действия (4.15) по ξ^α, $\alpha=1,2,3$ при условии (4.20) приводит к динамическим уравнениям

$$\frac{\delta\mathcal{A}_D}{\delta\xi^\alpha}(\delta^{\alpha\beta}-\xi^\alpha\xi^\beta)=0,\qquad \beta=1,2,3 \tag{4.21}$$

Имеется только два независимых уравнения среди уравнений (4.21), потому что свертывание уравнения (4.21) с ξ^β приводит к тождеству. Заметим, что член (4.16) действия (4.15) совпадает с лагранжианом действия (2.16) для статистического ансамбля классических точечных частиц.

Исключая κ из действия (4.15) и динамического уравнения $\delta\mathcal{A}_D/\delta\kappa=0$, можно записать действие (4.15) в виде

$$\mathcal{A}_D[j,\varphi,\boldsymbol{\xi}]=\int(\mathcal{L}''_{cl}+\mathcal{L}''_{q1}+\mathcal{L}_{q2})d^4x \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}''_{cl}+\mathcal{L}''_{q1}=-\sqrt{m^2j^ij_i-\frac{\hbar^2}{4}(\partial_iS^i)^2}-\frac{\hbar}{2}\partial_iS^i\arcsin\left(\frac{\hbar\partial_iS^i}{2m\rho}\right)-\\ -ej^iA_i-\hbar j^i[\partial_i\varphi+g_\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_i\xi^\alpha]\end{aligned} \tag{4.23}$$

где S^i, $i=0,1,2,3$ суть функции от $\boldsymbol{\xi}$ и j^i, определяемые уравнениями (4.19). $\mathcal{L}_{q2}$ определяется соотношением (4.18).

5 Классическая часть действия

Классическая часть действия $\mathcal{A}_D$ может быть отделена или обращением в нуль квантовой постоянной $\hbar$, или использованием квазиоднородного состояния системы, когда все пространственные градиенты малы, и все квантовые эффекты исчезают.

В нерелятивистском случае квазиоднородное состояние удовлетворяет условию

$$\mid\frac{\hbar}{m}\nabla u\mid\ll\mid u\mid,\qquad u=j^0,j^1,j^2,j^3,\kappa. \tag{5.1}$$

которое записывается в системе координат, где $\mid\mathbf{j}\mid\ll\mid j^0\mid$. В общем случае такой системы координат не существует, и условие (5.1) записывается в виде

$$\mid\frac{\hbar}{m}l^i\partial_iu\mid\ll\mid u\mid,\qquad u=j^0,j^1,j^2,j^3,\kappa, \tag{5.2}$$

где l^i есть любой единичный вектор, ортогональный вектору j^i

$$l^i j_i = 0, \qquad l^i l_i = -1. \tag{5.3}$$

Это означает, что все производные поперек направления вектора j^i малы.

Представим все производные в уравнении (4.18) в виде

$$\partial^k q^l = \partial_\perp^k q^l + \frac{j^k j^s}{\rho^2}\partial_s q^l, \qquad \partial_\perp^k \equiv \partial^k - \frac{j^k j^s}{\rho^2}\partial_s \tag{5.4}$$

Первый член в правой части уравнения (5.4) описывает трансверсальную часть производной, т.е. производную в направлении, ортогональном вектору j^i.

В соответствии с уравнением (5.2) все члены, содержащие трансверсальные производные $\partial_\perp^k$ малы по сравнению с первым членом уравнения (4.16). В самом деле, оценка трансверсальной части лагранжиана (4.18) имеет вид

$$\mid \hbar\rho\varepsilon_{iklm} q^i (\partial_\perp^k q^l)\nu^m \mid \cong \hbar\rho \mid \sum_{s=0}^{3} l_{(s)}^i \partial_i q^s \mid \ll m\rho, \tag{5.5}$$

где $l_{(s)}^i, s = 0,1,2,3$ являются единичными векторами, ортогональными вектору j^i

$$l_{(s)}^l = \frac{\varepsilon_{i.sm}^{.j} q^i \nu^m (\delta_j^l - \rho^{-2} j_j j^l)}{\mid \varepsilon_{ijsm} q^i \nu^m (g^{l'j} - \rho^{-2} j^j j^{l'}) \varepsilon_{i'l'sm'} q^{i'} \nu^{m'} \mid^{1/2}}, \qquad s = 0,1,2,3 \tag{5.6}$$

(суммирования по s) нет

Пренебрегая трансверсальной частью и используя уравнения (4.10), (4.11), можно записать уравнение (4.18) в виде

$$\mathcal{L}_{qu2} = \hbar\rho^{-1} j^s \varepsilon_{iklm} q^i j^k (\partial_s q^l)\nu^m = \frac{\hbar j^s}{\sqrt{2\rho(\rho + j^j f_j)}} \varepsilon_{iklm} f^i j^k \partial_s q^l \xi^m$$

$$= \frac{\hbar j^i}{2\rho(\rho + j^j f_j)} \varepsilon_{klsm} j^k \partial_i j^l f^s \xi^m \tag{5.7}$$

Соотношение (4.17) может быть записано в виде

$$\mathcal{L}_{q1} = m\rho(2\sin^2\frac{\kappa}{2} - \frac{\hbar}{2m} w^i \partial_i \kappa), \qquad w^i = \frac{S^i}{\sqrt{-S^l S_l}}, \qquad w^i j_i = 0. \tag{5.8}$$

Примем во внимание, что последний член в первом уравнении (5.8) мал по сравнению с первым членом уравнения (4.16). Тогда, пренебрегая малыми членами и принимая во внимание уравнение (5.7), получаем для действия (4.15)–(4.18) в квазиоднородном состоянии

$$\mathcal{A}_{Dqu}[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] = \int \{-m\rho\cos\kappa - eA_i j^i - \hbar j^i [\partial_i \varphi + g_\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_i \xi^\alpha]$$

$$+ \frac{\hbar j^i}{2\rho(\rho + j^j f_j)} \varepsilon_{klsm} j^k \partial_i j^l f^s \xi^m \} d^4 x \tag{5.9}$$

где $g_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ определяется уравнением (4.5).

Полные производные $\rho^{-1}j^i\partial_i$ от переменных j^i, κ, $\boldsymbol{\xi}$ в динамической системе $\mathcal{S}_{Dqu}$, описываемой действием (5.9), определяются главным образом динамическими уравнениями. Производные в ортогональных направлениях определяются начальными условиями, которые могут быть такими, что эти производные достаточно малы.

Хотя действие (5.9) содержит неклассические переменные κ, но фактически эти переменные малы. В самом деле, варьирование по κ приводит к динамическому уравнению

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{Dqu}}{\delta\kappa} = m\rho\sin\kappa = 0 \tag{5.10}$$

которое имеет решения

$$\kappa = n\pi, \qquad n = \text{integer} \tag{5.11}$$

Таким образом эффективная масса $m_{eff} = m\cos\kappa$ принимает два значения

$$m_{eff} = m\cos\kappa = \pm m \tag{5.12}$$

Значение $m_{eff} = m > 0$, $(\kappa = \frac{1}{2}n\pi)$ соответствует минимуму действия (5.9), тогда как значение $m_{eff} = -m < 0$ соответствует максимуму. По-видимому, $m_{eff} > 0$ соответствует стабильному состоянию ансамбля, а $m_{eff} < 0$ – нестабильному.

Исключая κ с помощью подстановки $k = \frac{1}{2}n\pi$ в уравнение (5.9), получаем действие

$$\mathcal{A}_{Dqu}[j,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int\{-m\rho - eA_ij^i - \hbar j^i[\partial_i\varphi + g_\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_i\xi^\alpha]$$
$$+\frac{\hbar j^i}{2\rho(\rho + j^jf_j)}\varepsilon_{klsm}j^k\partial_ij^lf^s\xi^m\}d^4x \tag{5.13}$$

Введем лагранжевы координаты $\tau = \{\tau_i\}$, $i = 0,1,2,3$ с помощью соотношений

$$j^i = \frac{\partial D}{\partial\tau_{0,i}} \equiv \frac{\partial(x^i,\tau_1,\tau_2,\tau_3)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}, \qquad D \equiv \frac{\partial(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\tau_3)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}; \tag{5.14}$$

$$\tau_{k,i} \equiv \partial_i\tau_k, \qquad i,k = 0,1,2,3$$

Принимая во внимание, что

$$D^{-1}j^i\partial_iu = D^{-1}\frac{\partial D}{\partial\tau_{0,i}}\partial_iu = \frac{\partial(u,\tau_1,\tau_2,\tau_3)}{\partial(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\tau_3)} = \frac{du}{d\tau_0} \tag{5.15}$$

$$d^4x = D^{-1}d^4\tau = D^{-1}d\tau_0d\boldsymbol{\tau} \tag{5.16}$$

$$j^i\partial_i\varphi = \frac{\partial(\varphi,\tau_1,\tau_2,\tau_3)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)} \tag{5.17}$$

действие (5.13) может быть переписано в лагранжевых координатах а виде

$$\mathcal{A}_{Dqu}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int\{-m\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} - eA_i\dot{x}^i + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)}\}d^4\tau \tag{5.18}$$

где точка означает полную производную $d/d\tau_0$. Величины $x = \{x^i\}$, $i = 0,1,2,3$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ рассматриваются как лагранжевы координаты τ_0, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$. Величина $\mathbf{z}$ есть постоянный единичный 3-вектор. Величины $A_i = A_i(x)$, $i = 0,1,2,3$

суть функции от x. Член $j^i\partial_i\varphi$ опущен, потому что он приводится к якобиану (5.17) и не дает вклада в динамические уравнения.

Действие (5.18) описывает статистический ансамбль детерминированных динамических систем $\mathcal{S}_{dc}$. Состояние каждой системы $\mathcal{S}_{dc}$ описывается переменными x^i, $\dot{x}^i$, $\ddot{x}^i$, $\boldsymbol{\xi}$. Переменные $\boldsymbol{\xi}$ связаны со спином соотношением (3.23), которое имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{s}-\frac{(\mathbf{s}\dot{\mathbf{x}})}{\dot{x}^0(\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i}+\dot{x}^0)}\dot{\mathbf{x}},\qquad \mathbf{s}=\boldsymbol{\xi}+\frac{(\boldsymbol{\xi}\dot{\mathbf{x}})}{\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i}(\dot{x}^0+\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i})}\dot{\mathbf{x}} \tag{5.19}$$

Здесь $\mathbf{s}=\mathbf{S}/\rho$ есть единичный 3-вектор спина.

Все это означает, что квазиоднородное приближение динамической системы $\mathcal{S}_D$ представляет собой статистический ансамбль классических детерминированных систем $\mathcal{S}_{dc}$. Систему $\mathcal{S}_{dc}$ следует трактовать как классический аналог дираковского электрона, движущегося в заданном электромагнитном поле. При некоторых условиях классический дираковский электрон превращается в классическую релятивистскую точечную частицу, но, вообще говоря, $\mathcal{S}_{dc}$ представляет собой более сложную конструкцию, чем точечная частица. Поскольку при некоторых условиях $\mathcal{S}_D$ представляет собой статистический ансамбль классических релятивистских частиц, то можно заключить, что, вообще говоря, уравнение Дирака описывает статистический ансамбль заряженных квантовых частиц (а не отдельную частицу). В самом деле, известно только, что система $\mathcal{S}_D$ имеет некоторое отношение к электрону, но не известно, описывает ли $\mathcal{S}_D$ отдельный электрон, или статистический ансамбль электронов. Обнаруживается, что при некоторых (квазиоднородноых) начальных условиях динамическая система $\mathcal{S}_D$ является статистическим ансамблем (классических систем $\mathcal{S}_{dc}$). Это означает, что $\mathcal{S}_D$ представляет собой статистический ансамбль во всех остальных случаях. Но в общем случае $\mathcal{S}_D$ не может быть статистическим ансамблем классических детерминированных систем. Это означает, что $\mathcal{S}_D$ является статистическим ансамблем стохастических систем.

Поскольку квантовые принципы не использовались, то следует использовать статистический принцип, сформулированный в первом разделе. Этот принцип позволяет определять средние значения энергии, импульса, углового момента и других аддитивных величин. В самом деле, поделив аддитивную величину для $\mathcal{S}_D$ на число систем в ансамбле $\mathcal{S}_D$, мы получаем соответствующее среднее значение этой величины для отдельной стохастической системы.

Сравним квазиоднородное приближение с квазиклассическим приближением, которое получается при $\hbar\to 0$. Перейдем к пределу $\hbar\to 0$ в действии (4.15)-(4.18). Получаем

$$\mathcal{A}_{Dcl}[j,\Phi]=\int[-m\sqrt{j^lj_l}-eA_lj^l-j^i\partial_i\Phi]d^4x \tag{5.20}$$

где

$$\Phi=\hbar\varphi \tag{5.21}$$

Член $-\hbar j^i\partial_i\varphi$ соотношения (4.16) может быть сохранен при $\hbar\to 0$ с помощью замены $\varphi\to\Phi=\hbar\varphi$. Но последний член выражения $\mathcal{L}_{cl}$ не может быть сохранен подобной заменой, из-за ограничения (4.20). Например, благодаря ограничению (4.20) замена $\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{w}=\hbar^{1/2}\boldsymbol{\xi}$ приводит к $\mathbf{w}=0$ при $\hbar\to 0$.

Действие (5.20) описывает только часть экстремалей (решений) действия (5.13), а именно ту часть из них, которая не содержит спиновых переменных (3.23) и описывает потенциальные решения, где импульс (2.12) образует потенциальное векторное поле.

$$p_l = \partial_l \Phi \tag{5.22}$$

Квазиоднородное приближение (5.13), получаемое при надлежащем выборе достаточно гладких начальных условий, более реалистично, чем квазиклассическое приближение (5.20), получаемое в пределе $\hbar \to 0$, потому что реально никто не может изменить квантовую постоянную $\hbar$. Таким образом, квазиоднородное приближение является более предпочтительным, чем классическое приближение динамической системы $\mathcal{S}_D$.

Итак, использование квазиоднородноего приближения позволяет выделить классическую часть действия (4.15)-(4.18). Квантовая часть $\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_{q1} + \mathcal{L}_{q2}$ действия (4.15) определяется уравнениями (4.17), (4.18). Выражение $\mathcal{L}_{q1}$ содержит специфическую переменную κ, которая не может интерпретироваться ни как ток, ни как лагранжева координата $\boldsymbol{\xi}$. При подавлении κ (т.е. полагая $\kappa \equiv 0$), член $\mathcal{L}_{q1}$ обращается в нуль. Член $\mathcal{L}_{q2}$ представляет собой квантовый член, вообще говоря, хотя он содержит классическую часть, которая может быть выделена с помощью введения специфических квантовых переменных.

Введем новые переменные

$$\kappa^i = q^i = \frac{j^i + \rho f^i}{\sqrt{2\rho(\rho + j^s f_s)}} = \frac{j^i + \rho f^i}{\sqrt{(j^s + \rho f^s)(j_s + \rho f_s)}}, \qquad i = 0, 1, 2, 3; \tag{5.23}$$

$$\rho \equiv \sqrt{j^l j_l},$$

используя множители Лагранжа λ_i. Тогда $\mathcal{L}_{q2}$ заменяется выражением

$$\mathcal{L}'_{q2} = \hbar\rho\varepsilon_{iklm}(\partial_\perp^k \kappa^l)\kappa^i \nu^m + \frac{\hbar}{\rho} j^s \varepsilon_{iklm} q^i j^k \partial_s q^l \nu^m +$$

$$+\lambda_i[j^i + \rho f^i - \kappa^i \sqrt{2\rho(\rho + j^s f_s)}] \tag{5.24}$$

$$\rho \equiv \sqrt{j^l j_l}, \qquad \nu^m = [\xi^m - f^m(\xi^s f_s)], \qquad m = 0, 1, 2, 3 \tag{5.25}$$

где $\partial_\perp^k$ определяется соотношением (5.4). Тогда вариация действия по κ^i приводит к динамическим уравнениям

$$-\lambda_i \sqrt{2\rho(\rho + j^s f_s)} + \frac{\delta \mathcal{A}''_{q2}}{\delta \kappa^i} = 0, \tag{5.26}$$

$$\mathcal{A}''_{q2}[j, \xi, \kappa^i] = \int \hbar\rho\varepsilon_{iklm}(\partial_\perp^k \kappa^i)\kappa^l \nu^m d^4x \tag{5.27}$$

Разрешая уравнение (5.26) with относительно λ_i и подставляя λ_i в уравнение (5.24), получаем вместо $\mathcal{L}'_{q2}$

$$\mathcal{L}_{q3} = \hbar\rho\varepsilon_{iklm}(\kappa^l \partial_\perp^k \kappa^i - q^l \partial_\perp^k \kappa^i + \kappa^i \partial_\perp^k q^l)\nu^m + \frac{\hbar j^i}{2\rho(\rho + j^j f_j)} \varepsilon_{klsm} j^k \partial_i j^l f^s \xi^m \tag{5.28}$$

Теперь действие имеет вид

$$\mathcal{A}_D[j, \varphi, \kappa, \xi, \kappa^i] = \int (\mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}_{q1} + \mathcal{L}_{q3}) d^4x \tag{5.29}$$

Динамические уравнения, порожденные действиями (3.1), (4.15) и (5.29) эквивалентны. Величины ξ^α не могут интерпретироваться как лагранжевы координаты (числа маркирующие системы ансамбля), потому что они не постоянны вдоль мировых линий частиц, и соотношения (2.10) не возникают. В соответствии с уравнением (3.23) величины ξ^α следует интерпретировать как некоторые функции спина $\mathbf{S} = \{2S^{23,0}, 2S^{31,0}, 2S^{12,0}\} = \{S^1, S^2, S^3\}$.

Переменные κ, κ^i, $i = 0, 1, 2, 3$ суть специфические квантовые переменные, которые ответственны за квантовые эффекты, описываемые уравнением Дирака. В самом деле, подставим $\kappa \equiv 0$, $\kappa^i \equiv 0$, $i = 0, 1, 2, 3$ в действие (5.29). Тогда действие (5.29) превратится в действие (5.13) с $g_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ определяемыми соотношениями (4.5). Действие (5.29) порождает динамическое уравнение

$$\frac{\delta \mathcal{A}_D}{\delta \kappa^i} = \hbar \varepsilon_{iklm} \{\rho \nu^m \partial_\perp^k (q^l - \kappa^l) + \partial_\perp^{*k} [\rho \nu^m (q^l - \kappa^l)]\} = 0 \tag{5.30}$$

где оператор $\partial_\perp^{*k}$ определяется соотношением

$$\partial_\perp^{*k} u = \partial^k u - \partial_s (\frac{j^k j^s}{\rho^2} u) \tag{5.31}$$

Разрешая уравнение (5.30) относительно κ^i и подставляя κ^i в соотношение (5.29), мы возвращаемся к действию (4.15)-(4.18). Тот факт, что решение (5.23) уравнения (5.30) не единственно, значения не имеет, потому что выражение (5.28) приводится к выражению (4.18) в силу уравнения (5.30). В самом, деле, свертывая уравнение (5.30) с κ^i и используя полученное соотношение для исключения κ^i из выражения (5.24), получаем выражение (4.18).

Заметим, что κ^l не является динамической переменной, строго говоря, потому что динамические уравнения (5.30) для κ^l содержат производные только вдоль пространственноподобных направлений, ортогональных к вектору j^i. Скорее введение κ^i является инвариантным (относительно замены переменных) способом выделения классической части действия.

Концентрированная динамическая система $\mathcal{S}_{dc}$ имеет одиннадцать степеней свободы. Она ассоциируется с распределенной динамической системой $\mathcal{S}_D$. Она описывается действием

$$\mathcal{A}_{dc}[x, \boldsymbol{\xi}] = \int \{-m\sqrt{\dot{x}^i \dot{x}_i} - eA_i \dot{x}^i + \hbar \frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar \frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s \dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s \dot{x}_s} + \dot{x}^0)}\} d\tau_0 \tag{5.32}$$

с лагранжианом, который не является релятивистски инвариантным. Это очень удивительный факт, который требует специального исследования.

6 Релятивистская инвариантность

При нашем рассмотрении релятивистской инвариантности уравнения Дирака, записанного в гидродинамических переменных, мы будем следовать подходу Андерсона [6] с той модификацией, что определение релятивистской ковариантности снабжается явной ссылкой на величины относительно которых динамические уравнения релятивистски ковариантны. Рассмотрим простой пример, который имеет отношение к уравнению Дирака.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений Максвелла для тензора электромагнитного поля F^{ik} в некоторой системе координат x

$$\partial_k F^{ik} = 4\pi J^i, \qquad \varepsilon_{iklm} g^{ij} \partial_j F^{kl} = 0 \tag{6.1}$$

и уравнений

$$m\frac{d}{d\tau}[(l_k\dot{q}^k)^{-1}\dot{q}^i - \frac{1}{2}g^{ik}l_k(l_j\dot{q}^j)^{-2}\dot{q}^s g_{sl}\dot{q}^l] = eF^{il}g_{lk}(q)\dot{q}^k; \qquad i = 0,1,2,3 \tag{6.2}$$

$$\dot{q}^k \equiv \frac{dq^k}{d\tau}$$

где $q^i = q^i(\tau)$, $i = 0,1,2,3$ описывают координаты точечной заряженной частицы как функции от параметра τ. Величина l_i есть постоянный времениподобный единичный вектор,

$$g^{ik}l_i l_k = 1; \tag{6.3}$$

и скорость света $c = 1$.

Эта система уравнений является релятивистски ковариантной по отношению к величинам q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik}, т.е. не изменяет свой вид при любом бесконечно малом преобразовании Лоренца

$$x^i \to \tilde{x}^i = x^i + \omega^i_{.k}x^k + o(\omega); \qquad \omega^i_{.k} = g^{il}\omega_{lk}; \qquad \omega_{ik} = -\omega_{ki} \tag{6.4}$$

которое сопровождается соответствующим преобразованием величин q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik},

$$q^i(\tau) \to \tilde{q}^i(\tau) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}q^k(\tau) = q^i + \omega^i_{.k}q^k + o(\omega) \tag{6.5}$$

$$F^{ik}(x) \to \tilde{F}^{ik}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}F^{lj}(x) = F^{ik} + \omega^i_{.l}F^{lk} + \omega^k_{.l}F^{il} + o(\omega) \tag{6.6}$$

$$J^i(x) \to \tilde{J}^i(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}J^k(x) = J^i + \omega^i_{.k}J^k + o(\omega) \tag{6.7}$$

$$l_i \to \tilde{l}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}l_k = l_i + \omega_i^{.k}l_k + o(\omega), \qquad \omega_i^{.k} = g^{kl}\omega_{il} \tag{6.8}$$

$$g_{ik}(x) \to \tilde{g}_{ik}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^k}g_{lj}(x) = g_{ik} + \omega_i^{.l}g_{lk} + \omega_k^{.l}g_{il} + o(\omega) \tag{6.9}$$

Ссылка на величины q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik} означает, что все эти величины рассматриваются как формальные зависимые величины, когда сравнивается вид динамических уравнений, записанных в двух разных системах координат. Например, если отсутствует ссылка на J^i в формулировке релятивистской ковариантности, то это означает, что величины J^i рассматриваются как некоторые заданные функции координат x. Если $J^i \neq 0$, то в соответствии с уравнением (6.7) величины J^i и $\tilde{J}^i$ являются различными функциями аргументов x $\tilde{x}$ соответственно. Тогда первое уравнение (6.1) имеет различный вид в разных системах координат. Другими словами, динамические уравнения (6.1)–(6.2) не являются релятивистски ковариантными по отношению к переменным q^i, F^{ik}, l_i, g_{ik}. Таим образом, для релятивистской ковариантности важны и законы преобразования (6.5)–(6.9) и как рассматривается каждая из величин: как формальная переменная или как некоторая функция координат.

Следуя Андерсену [6], мы разделим величины q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik} на две части: динамические объекты (переменные) q^i, F^{ik} и абсолютные объекты J^i, l_i, g_{ik}. По определению абсолютных объектов они принимают одно и тоже значение для всех решений динамических уравнений, тогда как динамические переменные, вообще говоря, различны для разных решений. Если динамические уравнения записаны в релятивистски инвариантном виде, их группа симметрии (и совместимость с принципами теории относительности) определяется группой симметрии абсолютных объектов J^i, l_i, g_{ik}.

Пусть для простоты $J^i \equiv 0$. Группа симметрии постоянного времениподобного вектора l_i есть группа вращений в 3-плоскости, ортогональной вектору l_i. Группа Лоренца есть группа симметрии метрического тензора g_{ik} =diag $\{1,-1,-1,-1\}$. Таким образом группа симметрии всех абсолютных объектов l_i, g_{ik}, $J^i \equiv 0$ есть подгруппа группы Лоренца (вращение в 3-плоскости, ортогональной вектору l_i). Поскольку группа симметрии есть подгруппа группы Лоренца, не совпадающая группой Лоренца, система уравнений (6.1)–(6.2) является нерелятивистской (несовместимой с принципами теории относительности).

Разумеется, совместимость с принципами теории относительности не зависит от того факта, относительно каких величин рассматривается релятивистская ковариантность. Например, рассмотрим ковариантность уравнений (6.1), (6.2) относительно величин q^i, F^{ik}, $J^i \equiv 0$. Это означает теперь, что вектор l_i должен рассматриваться как функция от x (В данном случае эти функции постоянные), потому что ссылка на вектор l_i как на формальную переменную отсутствует. После преобразований (6.4)–(6.9) уравнение (6.2) принимает вид

$$m\frac{d}{d\tau}[(\tilde{l}_k\frac{d\tilde{q}^k}{d\tau})^{-1}\frac{d\tilde{q}^i}{d\tau}-\frac{\tilde{l}^i}{2}(\tilde{l}_k\frac{d\tilde{q}^k}{d\tau})^{-2}\frac{d\tilde{q}^s}{d\tau}\frac{d\tilde{q}_s}{d\tau}]=e\tilde{F}^i_{.k}\frac{d\tilde{q}^k}{d\tau} \tag{6.10}$$

Здесь $\tilde{l}_i$ рассматриваются как функции от $\tilde{x}$. Но $\tilde{l}_i$ суть другие функции от $\tilde{x}$, чем l_i от x (другие численные постоянные $\tilde{l}_k = l_j\partial x^j/\partial\tilde{x}^k$ вместо l_k), и уравнения (6.2) и (6.10) имеют различный вид по отношению к переменным q^i, F^{ik}, $J^i \equiv 0$. Это означает, что уравнения (6.2) не являются релятивистски ковариантными относительно q^i, F^{ik}, $J^i \equiv 0$, хотя они релятивистски ковариантны относительно q^i, F^{ik}, l_i, $J^i \equiv 0$.

Подставляя $l_i = \{1,0,0,0\}$, $t = q^0(\tau)$ в уравнение (6.2), получаем

$$m\frac{d^2q^\alpha}{dt^2} = eF^\alpha_{.0} + eF^\alpha_{.\beta}\frac{dq^\beta}{dt}, \qquad i=\alpha=1,2,3;$$

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\frac{dq^\alpha}{dt}\frac{dq^\alpha}{dt}) = eF^\alpha_{.0}\frac{dq^\alpha}{dt}, \qquad i=0. \tag{6.11}$$

Легко видеть, что это уравнение описывает нерелятивистское движение заряженной частицы в заданном электромагнитном поле F^{ik}. Тот факт, что уравнения (6.2) или (6.11) являются нерелятивистскими, связан с расщеплением пространства-времени на пространство и время, что характерно для механики Ньютона. Это расщепление на пространство и время описывается разными способами в уравнениях (6.2) и (6.11). Оно описывается постоянным времениподобным вектором l_i в уравнении (6.2). В уравнении (6.11) расщепление на пространство и время описывается специальным выбором системы координат, где временная ось направлена вдоль вектора l^i.

Таким образом, сама по себе релятивистская ковариантность не означает совместимости с принципами специальной теории относительности. Важно также по отношению к каким величинам динамические уравнения являются релятивистски ковариантными.

Нечто подобное мы имеем в случае уравнения Дирака. Уравнение Дирака (1.1) является релятивистски ковариантным по отношению к переменным ψ, A_i, которые следующим образом преобразуются при преобразованиях Лоренца (6.4)

$$A_i(x) \to \tilde{A}_i(\tilde{x}) = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} A_k(x) = A_i + \omega_i^{\cdot k} A_k + o(\omega) \tag{6.12}$$

$$\psi(x) \to \tilde{\psi}(\tilde{x}) = \exp(\frac{1}{4}\gamma^{ik}\omega_{ik})\psi(x) + o(\omega), \tag{6.13}$$
$$\gamma^i \to \tilde{\gamma^i} = \gamma^i, \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Прямой физический смысл переменных ψ неясен. Только такие величины как ток j^i и спин (1.6) имеют прямой физический смысл. Действие (4.15)-(4.18) является результатом преобразования действия (3.1) для уравнения Дирака к переменным j^i, S^i, имеющим физический смысл.

Заменим соотношение (3.23) соотношением

$$\xi^l = \rho^{-1}[S^l - \frac{j^l S^k f_k}{\rho + j^s f_s}], \qquad l = 0, 1, 2, 3; \tag{6.14}$$

где вектор f^l определяется соотношением (4.7). В соответствии с соотношениями (1.4) уравнение (6.14) эквивалентно соотношению (3.23), если имеет место первое соотношение (4.7).

Пусть f^k преобразуется как вектор, тогда в соответствии с соотношением (6.14) ξ^l есть псевдовектор, потому что j^l есть вектор, а S^l есть псевдовектор. Подставляя соотношение (6.14) в действие (5.29), (4.16)-(4.17), (5.28), получаем действие для уравнения Дирака в терминах переменных $j, S, \kappa, \varphi, \kappa^i$

$$\mathcal{A}_D[j, S, \kappa, \varphi, \kappa^i] = \int (\mathcal{L}'_{cl} + \mathcal{L}_{q1} + \mathcal{L}_{q3}) d^4x \tag{6.15}$$

$$\mathcal{L}'_{cl} = -m\rho - ej^i A_i - \hbar j^i(\partial_i\varphi + \varepsilon_{mjkl}\mu^j \partial_i \mu^k f^m z^l) \tag{6.16}$$

где $\mathcal{L}_{q1}$ и $\mathcal{L}_{q3}$ определяются соотношениями (4.17), (5.28), μ^j определяется соотношениями (4.12), (4.11), (6.14), и ν^i определяется соотношением (4.11)

$$\mu^k = [w^k - \frac{j^k w^m f_m}{\rho + j^s f_s}][2(1 + w^l z_l - \frac{j_l z^l w^m f_m}{\rho + j^s f_s})]^{-1/2}, \qquad w^i \equiv \frac{S^i}{\sqrt{-S^l S_i}} \tag{6.17}$$

$$\nu^k = w^k - \frac{j^k w^m f_m}{\rho + j^s f_s} \tag{6.18}$$

Для получения динамических уравнений действие (6.15) варьируется по переменным j^i, S^i, κ^i, φ, κ при добавочных ограничениях (1.4). Вектор f^i и псевдовектор z^i постоянны и удовлетворяют ограничениям (4.8).

Полученные динамические уравнения эквивалентны уравнению Дирака (1.1). Они релятивистски ковариантны относительно величин j^i, S^i, κ^i, φ, κ, A_i, f^i, z^i. Но они, вообще говоря, не релятивистски ковариантны относительно переменных j^i, S^i, κ^i, φ, κ A_i. Это легко проверить, подставив значения (4.7) величин f^i, z^i в действие (6.15)-(6.18).

Таким образом, релятивистская ковариантность динамических уравнений, описываемых в терминах A_i, j^i, S^i, κ^i, φ, κ существенно зависит от введения дополнительных величин f^i, z^i. Эти величины постоянны. Они возникли из делителя нуля (3.5) который может быть записан в ковариантном виде

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(1 + f_l\gamma^l\right)\frac{1}{2}\left(1 - i\gamma_5 f_i z_k \gamma^{ik}\right) \tag{6.19}$$

где f^l есть постоянный времениподобный единичный вектор, а z^l есть постоянный единичный псевдовектор.

Легко проверить, что при условиях (4.8) множители матрицы (6.19) коммутируют, и каждый из них является делителем нуля. Используя обозначения (3.2), получаем, что при выполнении условий (4.7) выражение (6.19) совпадает с соотношением (3.5). Таким образом, переменные f^l, z^l присутствуют в скрытой форме внутри делителя нуля Π выражения (3.4) для волновой функции. Когда говорят, что уравнение Дирака (1.1) релятивистски ковариантно относительно переменных A_i, ψ, то включают в рассмотрение так же абсолютные объекты f^l, z^l, скрытые внутри ψ. Невозможно построить надлежащий делитель нуля без использования абсолютных объектов.

В самом деле, если все компоненты волновой функции ψ заданы, соотношения (1.2) однозначно определяют величины j^l и S^l. Величины φ, κ определены соответственно с точностью до аддитивной постоянной и с точностью до аддитивной постоянной, кратной величине (2π). Величины не зависят от вида делителя нуля Π. Если величины j^l, S^l, φ, κ заданы, то составляющие волновой функции определяются соотношением (3.25) с делителем нуля, определяемым соотношением (3.5). Компоненты волновой функции зависят от параметров, определяющих вид делителя нуля. Другими словами, преобразование от переменных j^l, S^l, φ, κ к волновой функции ψ не является однозначным. Подстановка ψ из соотношения (3.4) в уравнение (1.1) приводит к появлению постоянных параметров f^k, z^k в динамических уравнениях, при условии, что они записаны в релятивистски ковариантной форме.

Общая непрерывная группа симметрии обоих векторов f^k и z^k есть группа вращений внутри двумерной плоскости, ортогональной к бивектору $f^k z^l - f^l z^k$. группа Лоренца не является группой симметрии динамических уравнений. Если особые направления, определяемые параметрами f^k, z^k не являются фиктивными, то динамические уравнения, порождаемые действием (6.15) несовместимы с принципами теории относительности.

Переменная f^l описывает расщепление пространства-времени на пространство и время, что характерно для механики Ньютона. В этом смысле уравнение Дирака не более релятивистское, чем нерелятивистское уравнение (6.2).

7 Концентрированная динамическая система, ассоциированная с уравнением Дирака

Вернемся к исследованию динамической системы $\mathcal{S}_{dc}$. Действие (5.32) может быть представлено в релятивистски ковариантном виде следующим образом

$$\mathcal{A}_{dc}[x,\xi] = \int \{-m\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} - eA_i\dot{x}^i - \hbar\frac{\varepsilon_{iklm}\xi^i\dot{\xi}^k f^l z^m}{2(1-\xi^s z_s)}$$

$$+\hbar\frac{\varepsilon_{iklm}\dot{x}^i\ddot{x}^k f^l\xi^m}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\dot{x}^l f_l + \sqrt{\dot{x}^l\dot{x}_l})}\}d\tau \tag{7.1}$$

где z^i и f^i удовлетворяют соотношениям (4.8), и точка означает дифференцирование по инвариантному параметру τ. Величина ξ^i представляет собой единичный пространственноподоный вектор, ортогональный вектору f^i. Он может быть представлен в виде

$$\xi^i = \frac{\eta^i - f^i\eta^s f_s}{\sqrt{-\eta^l\eta_l + (\eta^l f_l)^2}} \tag{7.2}$$

где η^i есть произвольный пространствнноподобный вектор.

Легко проверить, что

$$\delta\xi^i = \frac{(\delta^i_l + \xi^i\xi_l)(\delta^l_k - f^l f_k)\delta\eta^k}{\sqrt{-\eta^s\eta_s + (\eta^s f_s)^2}} \tag{7.3}$$

Тогда, варьируя действие (7.1) по ξ^i и используя, что $\delta\eta^i$ есть произвольный вектор, получаем динамические уравнения

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{dc}}{\delta\xi^i}(\delta^i_l + \xi^i\xi_l)(\delta^l_k - f^l f_k) = \frac{\delta\mathcal{A}_{dc}}{\delta\xi^i}(\delta^i_k + \xi^i\xi_k - f^i f_k) = 0, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{7.4}$$

Имеется только два независимых динамических уравнения среди уравнений (7.4), потому что свертывание уравнений (7.4) с векторами ξ^k и f^k превращает их в тождества.

Действие (7.1) инвариантно по отношению к замене инвариантного параметра τ

$$\tau \to \tilde{\tau} = f(\tau) \tag{7.5}$$

где f есть произвольная монотонная функция. В частности, параметр τ может быть выбран таким образом, что

$$\dot{x}^i\dot{x}_i = 1 \tag{7.6}$$

В этом случае τ может быть интерпретировано как собственное время.

Выпишем динамические уравнения в случае отсутствия электромагнитного поля $A_i = 0$.

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{dc}}{\delta x^i} = \frac{d}{d\tau}\{\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}} - \hbar\varepsilon_{iklm}[Qf^l\ddot{x}^k\xi^m + \frac{1}{2}\dot{x}^k\frac{d}{d\tau}(Qf^l\xi^m)] -$$

$$-\frac{\hbar}{2}\varepsilon_{jklm}f^l\dot{x}^j\ddot{x}^k\xi^m\frac{\partial Q}{\partial\dot{x}^i}\} = 0, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{7.7}$$

$$\delta\xi^i: \qquad -\{\varepsilon_{sklm}[Pf^l\dot{\xi}^k z^m + \frac{1}{2}\xi^k\frac{d}{d\tau}(Pf^l z^m) + \frac{1}{2}Q\dot{x}^k\ddot{x}^l f^m] +$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_{jklm}f^l\xi^j\dot{\xi}^k z^m\frac{\partial P}{\partial\xi^s}\}(\delta_i^s + \xi^s\xi_i - f^s f_i) = 0 \qquad (7.8)$$

где P и Q определяются соотношениями

$$Q = Q(\dot{x}) = [\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\dot{x}^l f_l + \sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s})]^{-1} \qquad (7.9)$$

$$P = P(\xi) = (1 - z^l\xi_l)^{-1} \qquad (7.10)$$

Уравнение (7.7) интегрируется следующим образом

$$\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}} - \hbar\varepsilon_{iklm}[Qf^l\ddot{x}^k\xi^m + \frac{1}{2}\dot{x}^k\frac{d}{d\tau}(Qf^l\xi^m)] - \frac{\hbar}{2}\varepsilon_{jklm}f^l\dot{x}^j\ddot{x}^k\xi^m\frac{\partial Q}{\partial\dot{x}^i} = p_i \qquad (7.11)$$

$$p_i = \text{const}, \qquad i = 0, 1, 2, 3;$$

Пусть τ есть собственное время, и условие (7.6) выполняется. Свертывая уравнение (7.11) с f^i и исключая последний член в левой части равенства (7.11), получаем

$$-\varepsilon_{iklm}[\ddot{x}^k f^l\xi^m + \frac{1}{2}\dot{x}^k f^l\dot{\xi}^m - \frac{\dot{x}^k f^l\xi^m(\ddot{x}^j f_j)}{2(1+\dot{x}^s f_s)}] = (\delta_i^s - f_i f^s)(u_s - \dot{x}_s)\frac{1+\dot{x}^l f_l}{\lambda}, \qquad (7.12)$$

$$\lambda = \frac{\hbar}{m}, \qquad u_i = \frac{p_i}{m}, \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

Можно видеть из уравнений (7.8), (7.12), что существенны только направления ортогональные времениподобному вектору f^i.

Выберем f^i в виде (4.7). Тогда, используя обозначения

$$x^i = \{x^0, \mathbf{x}\}, \qquad \xi^i = \{0, \boldsymbol{\xi}\}, \qquad z^i = \{0, \mathbf{z}\}, \qquad u^i = \{u^0, \mathbf{u}\}, \qquad (7.13)$$

можно привести уравнения (7.8), (7.12) к виду

$$[-\dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{(\mathbf{z}\dot{\boldsymbol{\xi}})}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{\xi}] \times \mathbf{z} + \frac{\boldsymbol{\xi}(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{z})}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}\mathbf{z} + \frac{(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}{2(1+\dot{x}^0)}\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} = C\boldsymbol{\xi} \qquad (7.14)$$

$$\frac{d}{d\tau}(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1+\dot{x}_0}}) \times \boldsymbol{\xi} + \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\boldsymbol{\xi}}}{2\sqrt{1+\dot{x}_0}} = \frac{\sqrt{1+\dot{x}_0}}{\lambda}(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u}) \qquad (7.15)$$

где C есть некоторая функция от τ.

В соответствии с уравнениями (7.2), (4.7)

$$\boldsymbol{\xi}^2 = 1, \qquad \boldsymbol{\xi}\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0. \qquad (7.16)$$

Используя эти соотношения, можно привести уравнение (7.14) к виду (смотри Приложение B)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})}{1+\dot{x}_0} \times \boldsymbol{\xi} \qquad (7.17)$$

который не содержит вектора $\mathbf{z}$. Это означает, что $\mathbf{z}$ определяет фиктивное направление в пространстве-времени. Заметим, что $\mathbf{z}$ является фиктивным также и в действии

(4.15) для системы $\mathcal{S}_D$, потому что член, содержащий $\mathbf{z}$, один и тот же в действиях (4.15) и (5.13) для $\mathcal{S}_D$ и $\mathcal{S}_{Dqu}$ соответственно.

Уравнение (7.17) может быть записано в релятивистски ковариантном виде

$$\dot{\xi}_i = -\frac{\varepsilon_{iklm}\xi^l f^m \varepsilon^k_{.k'l'm'}\dot{x}^{k'}\ddot{x}^{l'}f^{m'}}{1+f_s\dot{x}^s} \tag{7.18}$$

Система уравнений (7.12), (7.18) релятивистски ковариантна относительно величин x^i, ξ^i, p_i, f^i, причем x^i, p_i, f^i рассматриваются как 4-векторы, а ξ^i как псевдовектор. Но она не является релятивистски ковариантной относительно динамических переменных x^i, ξ^i, p_i. При преобразованиях Лоренца (6.4) множество $\mathcal{S}_f$ всех решений $\{x^i, \xi^i, p_i\}$ уравнений (7.12), (7.18) при фиксированных параметрах f^i преобразуется в другое множество $\mathcal{S}_{\tilde{f}}$ решений $\{\tilde{x}^i, \tilde{\xi}^i, \tilde{p}_i\}$. Но множество $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_f\}$ всех множеств $\mathcal{S}_f$ преобразуется в себя при условии, что f^i удовлетворяет уравнению (4.8).

Формально постоянные интегрирования p_i могут рассматриваться как некоторые параметры системы дифференциальных уравнений (7.18), (7.12). В то же самое время параметры p_i, f^i уравнений (7.18), (7.12) могут рассматриваться как некоторые постоянные интегрирования некоторой системы $\mathcal{D}$ дифференциальных уравнений, которые релятивистски ковариантны по отношению к их динамическим переменным. Множество всех решений $\mathcal{D}$ может быть получено как результат преобразования Лоренца (6.4) множества $\mathcal{S}_p$ всех решений с фиксированными значениями p_i, или как результат преобразования Лоренца (6.4) множества $\mathcal{S}_f$ всех решений с фиксированными значениями величин f^i.

Достаточно исследовать решения $\mathcal{S}_{f_0}$ уравнений (7.12), (7.18) при $f^i_{(0)} = \{1,0,0,0\}$, потому что решения при других значениях величин f^i могут быть получены из решений при $f^i = f^i_{(0)}$ с помощью подходящего преобразования Лоренца.

Уравнение (7.17) описывает вращение единичного 3-вектора $\boldsymbol{\xi}$ вокруг вектора $\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}$ с угловой частотой

$$\boldsymbol{\Omega}_\xi = \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}}{1+\dot{x}_0} \tag{7.19}$$

Исключая $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ с помощью подстановки уравнения (7.17) в уравнение (7.15), и вводя новую переменную $\mathbf{y}$ вместо $\dot{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{y} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1+\dot{x}^0}}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}\sqrt{2+\mathbf{y}^2}, \qquad \dot{x}^0 \equiv \sqrt{1+\dot{\mathbf{x}}^2}, \tag{7.20}$$

можно привести уравнение (7.15) к виду

$$\lambda\dot{\mathbf{y}}\times(\boldsymbol{\xi} + \frac{(\boldsymbol{\xi})}{2\sqrt{2+\mathbf{y}^2}}\mathbf{y}) = (\mathbf{y}\sqrt{2+\mathbf{y}^2} - \mathbf{u})\sqrt{2+\mathbf{y}^2} \tag{7.21}$$

Введем безразмерную переменную $\mathbf{w}$, предполагая ее малой

$$\mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{u}(1+\sqrt{1+\mathbf{u}^2})^{-1/2}, \qquad |\,\mathbf{w}\,| \ll 1 \tag{7.22}$$

Тогда уравнение (7.21) принимает вид

$$\lambda\dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{a} = [G\mathbf{w} + \mathbf{b}(\mathbf{wb})] + O(\mathbf{w}^2), \tag{7.23}$$

$$G = 2 + \mathbf{b}^2, \qquad \mathbf{a} = \boldsymbol{\xi} + \frac{(\boldsymbol{\xi}\mathbf{b})}{2\sqrt{2+\mathbf{b}^2}}\mathbf{b} \tag{7.24}$$

Из уравнения (7.23) следует, что вектор $\mathbf{a}$ ортогонален к правой части уравнения (7.23), или

$$\mathbf{wd} = 0, \qquad \mathbf{d} \equiv G\mathbf{a} + (\mathbf{ba})\mathbf{b} \tag{7.25}$$

Характерная частота для $\mathbf{w}$ есть величина порядка λ^{-1}, тогда как эта частота для $\boldsymbol{\xi}$ есть величина порядка $\lambda^{-1} \mid \mathbf{w} \mid \ll \boldsymbol{\lambda}^{-1}$. Это означает, что интегрируя уравнение (7.23), можно рассматривать $\boldsymbol{\xi}$ как постоянный вектор.

Если $\boldsymbol{\xi} \parallel \mathbf{b}$, $\mathbf{w}$ ортогонально к $\mathbf{b}$, и уравнение (7.23) приводится к виду

$$\lambda\dot{\mathbf{w}} = \frac{G}{\mathbf{a}^2}\mathbf{a} \times \mathbf{w} + O(\mathbf{w}^2), \qquad \mathbf{w}^2 = \mathrm{const} \tag{7.26}$$

который описывает вращение вектора $\mathbf{w}$ с угловой скоростью $G\mathbf{a}/\mathbf{a}^2$.

Если $\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{b} \neq 0$, то выберем ортонормированные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ таким способом, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ лежат в плоскости $\mathcal{P}$, включающей векторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{b}$. Пусть вектор $\mathbf{e}_1$ выбран на плоскости $\mathcal{P}$ таким образом, что $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{d}$. Тогда получаем следующее разложение векторов $\mathbf{w}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$

$$\mathbf{w} = w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 \tag{7.27}$$

В соответствии с уравнениями(7.23), (7.25), (7.27) первое уравнение (7.25) принимает вид

$$w_2[a_1b_1b_2 + a_2(G + b_2^2)] = 0. \tag{7.28}$$

Подставляя уравнения (7.27) в уравнение (7.26), получаем

$$\begin{gathered} -\lambda\dot{w}_3a_2 = b_1b_2w_2 + O(\mathbf{w}^2), \\ \lambda\dot{w}_3a_1 = (G + b_2^2)w_2 + O(\mathbf{w}^2), \\ -\lambda\dot{w}_2a_1 = Gw_3 + O(\mathbf{w}^2), \end{gathered} \tag{7.29}$$

Благодаря уравнению (7.28) два первых уравнения (7.29) эквивалентны. Система уравнений (7.29) может быть легко решена. Решение имеет вид.

$$\mathbf{w} = A[\mathbf{e}_2\cos\phi + (1 + b_2^2/G)^{1/2}\mathbf{e}_3\cos\phi] + O(A^2) \tag{7.30}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_1 = \mathbf{d}/\mid \mathbf{d} \mid, \qquad \mathbf{e}_2 = [1 - (\mathbf{e}_1\boldsymbol{\xi})^2]^{-1/2}\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\xi}, \qquad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \\ \phi = \Omega_x(\tau - \tau_{(0)}) + \phi_{(0)} \end{gathered} \tag{7.31}$$

$$\Omega_x = \frac{G}{\lambda a_1}[1 + b_2^2/G]^{1/2}, \qquad a_1 = (\mathbf{ae}_1), \qquad b_2 = (\mathbf{be}_2) \tag{7.32}$$

Используя уравнения (7.20), (7.22), получаем

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{x}} = u + A[(Ge_2 + \frac{b_2}{G}b)\cos\phi + (G + b_2^2)^{1/2}e_3\sin\phi] + O(A^2) \\ \dot{x}^0 = \sqrt{1 + \dot{\mathbf{x}}^2} \end{gathered} \tag{7.33}$$

$$\mathbf{x} = x_{(0)} + u(\tau - \tau_{(0)}) + A\Omega_x^{-1}[(Ge_2 + \frac{b_2}{G}b)\sin\phi - (G + b_2^2)^{1/2}e_3\cos\phi] + O(A^2)$$

$$x^0 = x^0_{(0)} + \int\limits_{\tau_{(0)}}^{\tau} \sqrt{1 + \dot{\mathbf{x}}^2(\tau')}d\tau' \tag{7.34}$$

Величины $A, \phi_{(0)}, x^0_{(0)}, \mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{u}, \tau_{(0)}$ являются независимыми постоянными интегрирования. Величины $\mathbf{a}, \mathbf{b}, G$ и Ω_x определяются соотношениями (7.22), (7.24), (7.32) через эти постоянные.

В соответствии с уравнением (7.19) угловая скорость Ω_ξ вращения вектора $\boldsymbol{\xi}$ приводится к виду

$$\mathbf{\Omega}_\xi = \frac{A\Omega_x}{1 + \dot{x}^0}[-u \times (Ge_2 + \frac{b_2}{G}b)\sin\phi - (1 + b_2^2G)^{1/2}\mathbf{u} \times \mathbf{e}_3\cos\phi] + O(A^2) \tag{7.35}$$

Угловая скорость $\mathbf{\Omega}_\xi$ быстро осциллирует вокруг среднего значения $< \mathbf{\Omega}_\xi > \simeq O(a^2)$. Это означает, что

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{(0)} + O(A^2) \tag{7.36}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(0)} = \text{const}, \qquad \boldsymbol{\xi}_{(0))}\boldsymbol{\xi}_{(0)} = 1 \tag{7.37}$$

Чтобы показать, что f^i не является фиктивным параметром, рассмотрим точное решение уравнений (7.12), (7.18) при значении f^i, определяемом уравнением (4.7).

$$x^i = \{\sqrt{1 + a^2}\tau,\ -a\Omega^{-1}\sin\phi,\ a\Omega^{-1}\cos\phi,\ 0\}; \qquad \xi^i = \{0, 0, 0, 1\}$$

$$u^i = \{1, 0, 0, 0\}, \qquad \Omega = \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{\lambda}, \qquad \phi = \Omega\tau + \phi_{(0)}, \qquad a = \text{const} \tag{7.38}$$

Если f^i фиктивная величина, то система уравнений (7.12), (7.18) является релятивистски ковариантной относительно векторов x^i, ξ^i, u^i, и векторы $\tilde{x}^i$, $\tilde{\xi}^i$, $\tilde{u}^i$, получаемые из уравнений (7.38) с помощью преобразования Лоренца, должны образовать решение уравнений (7.12), (7.18).

В системе координат, движущейся со скоростью $V = \tanh\vartheta$ в направлении оси x^3 векторы (7.38) имеют вид

$$\tilde{x}^i = \{\tau\sqrt{1 + a^2}\cosh\vartheta,\ -a\Omega^{-1}\sin\phi,\ a\Omega^{-1}\cos\phi,\ \tau\sqrt{1 + a^2}\sinh\vartheta\};$$

$$\tilde{\xi}^i = \{\sinh\vartheta,\ 0,\ 0,\ \cosh\vartheta\}; \qquad \tilde{u}^i = \{\cosh\vartheta,\ 0,\ 0,\ \sinh\vartheta\}; \tag{7.39}$$

$$\Omega = \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{\lambda} \qquad \phi = \Omega\tau + \phi_{(0)}, \qquad a = \text{const}$$

Легко проверить, что (7.39) не является решением уравнений (7.12), (7.18), если $\vartheta \neq 0$ и f^i определяются уравнением (4.7). (Разумеется, соотношение (7.39) является решением уравнений (7.12), (7.18), если $f^i = \tilde{f}^i = \{\cosh\vartheta, 0, 0, \sinh\vartheta\}$). Это означает, что вектор f^i является существенным параметром, и система уравнений (7.12), (7.18) является несовместимой со специальным принципом относительности.

Тот факт, что вектор z^i оказался фиктивным, а вектор f^i – нет, объясняется, по-видимому, неполной симметрией уравнения Дирака по отношению ко времени и к пространству. Матрица γ^0 используется для построения дираковски сопряженного спинора $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0$. Это обстоятельство выделяет матрицу γ^0 среди матриц γ^i.

Пространственно-временное расщепление, порожденное γ^0, появляется в пространственно-временной алгебре (ПВА), предложенной Хестенесом [7]. ПВА представляет собой разновидность Клиффордовой алгебры, описывающей свойства пространства-времени [8]. Это пространственно-временное расщепление связано с использованием матрицы γ^0.

В случае, когда электромагнитное поле не обращается в нуль, величины p_i, определяемые уравнением (7.11), не являются постоянными. Они удовлетворяют уравнениям

$$\dot{p}_i \equiv m\dot{u}_i = eF_{ik}(x)\dot{x}^k, \qquad F_{ik} \equiv \partial_i A_k - \partial_k A_i. \tag{7.40}$$

Среди них имеются только три независимые уравнения

$$m\dot{\mathbf{u}} = e\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}^0 + e[\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}], \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}(x^0, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x^0, \mathbf{x}) \tag{7.41}$$

где $\mathbf{E} = \{E_\alpha\} = \{-F_{\alpha 0}\}$, $\alpha = 1,2,3$; $\mathbf{H} = \{H_\alpha\} = \{-\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma}\}$, $\alpha = 1,2,3$. Система уравнений (7.6), (7.16), (7.17), (7.20), (7.41) является полной системой динамических уравнений для динамических переменных $\boldsymbol{\xi}$,$\mathbf{x}$, x^0, $\mathbf{u}$.

Для не слишком сильного электромагнитного поля, когда Лармрова частота много меньше, чем Ω_x ($eH/m \ll \Omega_x \simeq m/\hbar$, т.е. если $H \ll 10^{12}G$), величина $\mathbf{u}$ в уравнении (7.21) может рассматриваться приблизительно как постоянная. Тогда мировая линия $x^i = x^i(\tau)$, $i = 0,1,2,3$ описывающая решение системы уравнений (7.6), (7.16), (7.17), (7.20), (7.21), (7.41), представляет собой винтовую линию вокруг мировой линии $X^i = X^i(\tau)$. Последняя описывает движение ведущего центра и удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{X}^i = eF^i_{.k}(X)\dot{X}^k, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{7.42}$$

Вообще говоря, заряженная частица, движущаяся таким образом, должна интенсивно излучать электромагнитные волны. В результате ее мировая линия должна приближаться к мировой линии ведущего центра.

Такое движение электрона по винтовой линии ассоциируется с классической моделью [9] шредингеровского zitterbewegung [10]. Другие подходы к интерпретации zitterbewegung можно найти в работах [11-14] и в ссылках в них.

8 Обсуждение

Кажется, что p_i и $\dot{x}^i$ следует интерпретировать соответственно как 4-импульс и 4-скорость динамической системы $\mathcal{S}_{dc}$. Но тогда динамическую систему $\mathcal{S}_{dc}$ едва ли можно интерпретировать как точечную классическую систему. Для этого есть две причины. Во-первых, импульс p_i и скорость $\dot{x}^i$ точечной частицы связаны алгебраическим соотношением вида $p_i = m\dot{x}_i$. Для динамической системы $\mathcal{S}_{dc}$ различие между $y^i = \dot{x}^i(1+\dot{x}^0)^{-1/2}$ и $u^i = p^i/m$ описывается динамической переменной w^i, которая вводится уравнением (7.22). В соответствии с уравнением (7.21) это различие пропорционально квантовой постоянной $\hbar$. Во-вторых, очень трудно понять, почему мировая линия свободной частицы является винтовой линией, закрученной вокруг прямой линии

$$X^i = \frac{p^i}{m}(\tau - \tau_{(0)}) + X^i_{(0)}. \tag{8.1}$$

даже в отсутствие электромагнитного поля.

Все это может быть объяснено при помощи предположения, что вектор x^i что описывает наблюдаемую часть сложной связанной системы, чей центр инерции X^i движется в соответствии с уравнением (8.1) в случае, когда $A_i \equiv 0$ и в соответствии с уравнением (7.42) в случае не слишком сильного электромагнитного поля. Но при такой интерпретации динамическая система $\mathcal{S}_{dc}$ не является точечной частицей с внутренними степенями свободы. Она представляет собой динамическую систему, из нескольких частиц, взаимодействующих на расстоянии. Но такое взаимодействие на расстоянии не совместимо с принципом относительности.

Можно попытаться спасти совместимость с теорией относительности, рассматривая некоторую распределенную классическую динамическую систему $\mathcal{S}_\phi$ вместо концентрированной динамической системы $\mathcal{S}_{dc}$. Динамическая система $\mathcal{S}_{dc}$ появляется как элемент статистического ансамбля $\mathcal{S}_{Dqu}$. Однопараметрический статистический ансамбль динамических систем $\mathcal{S}_{dc}$ также может рассматриваться как элемент статистического ансамбля $\mathcal{S}_{Dqu}$. Например, можно рассматривать множество $\mathcal{S}_\phi$ систем $\mathcal{S}_{dc}$, имеющих все одинаковые постоянные интегрирования $\{a, x^0_{(0)}, \mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{u}, \tau_{(0)}, \boldsymbol{\xi}_{(0)}\}$ кроме постоянной $\phi_{(0)}$. Пусть значения величины $\phi_{(0)}$ равномерно распределены среди систем $\mathcal{S}_{dc}$. (Например, в уравнении (7.38) величины x^i рассматриваются как функции двух переменных τ и $\phi_{(0)}$ с фиксированным параметром a). Тогда $\mathcal{S}_\phi$ может рассматриваться как кольцо. Мировые линии частиц кольца образуют двумерную мировую трубку в пространстве-времени. Такая конструкция более симметрична, чем частица, движущаяся по винтовой линии. Кроме того, такое кольцо не излучает электромагнитных волн. Статистический ансамбль $\mathcal{S}_{Dqu}$ может рассматриваться как состоящий из колец $\mathcal{S}_\phi$, которые являются распределенными классическими динамическими системами. К сожалению, кольца $\mathcal{S}_\phi$ и их двумерные мировые трубки не совместимы с понятием точечной частицы.

Можно попытаться связать мировые трубки со свойствами пространства-времени (а не со структурой динамических систем $\mathcal{S}_\phi$). В этом случае надо допустить, что дисторсия пространства-времени отлична от нуля, т.е. Трехмерные трубки (а не прямые линии) являются характерными структурами пространства-времени [2,15]. Тогда можно надеяться устранить несовместимость между понятием точечной частицы и цилиндрическими пространственно-временными структурами, порожденными уравнением Дирака. Заметим, что в искаженном пространстве-времени импульс частицы и ее скорость являются независимыми величинами, которые не связаны между собой алгебраическими соотношениями.

Таким образом, хорошо известная динамическая система $\mathcal{S}_D$, описываемая уравнением Дирака, исследована просто как динамическая система без использования каких бы то ни было дополнительных предположений. Полученные результаты можно суммировать следующим образом.

1. При описании динамической системы $\mathcal{S}_D$ в терминах гидродинамических переменных было обнаружено, что в квазиоднородном приближении динамическая система $\mathcal{S}_D$ превращается в статистический ансамбль $\mathcal{S}_{Dqu}$ классических динамических систем $\mathcal{S}_{dc}$. Это означает, что, вообще говоря, динамическая система $\mathcal{S}_D$ представляет собой ансамбль стохастических систем, и это позволяет отделить классическую часть $\mathcal{L}_{Dqu}$ полного лагранжиана $\mathcal{L}_D$.

2. Оказывается возможным отделение классической части $\mathcal{L}_{Dqu}$ лагранжиана с помощью специальных квантовых переменных κ, κ^i, ответственных за квантовые эффекты. Подавляя квантовые переменные (полагая $\kappa, \kappa^i \equiv 0$), мы преобразуем

лагранжиан $\mathcal{L}_D$ динамической системы $\mathcal{S}_D$ в его классическую часть $\mathcal{L}_{Dqu}$.

3. Преобразование уравнения Дирака к гидродинамическим переменным выделяет особое направление в пространстве-времени. Это выделенное направление описывается времениподобным вектором f^k. Существование выделенного направления в пространстве-времени не совместимо со специальным принципом относительности. Это означает, что уравнение Дирака не совместимо со специальным принципом относительности, и нуждается в модификации для осуществления такой совместимости.

4. Динамическая система $\mathcal{S}_{dc}$ является классическим аналогом квантового дираковского электрона. Динамическая система $\mathcal{S}_{dc}$ не может интерпретироваться как заряженная точечная частица. Скорее она представляет собой нелокальную динамическую систему в пространстве-времени Минковского, или точечную частицу, но в неримановом (искаженном) пространстве-времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ A
Классический ансамбль, описываемый в лагранжевых и эйлеровых координатах

Покажем эквивалентность двух форм (2.1) и (2.2) действия для статистического ансамбля классических систем. Введем временную лагранжеву координату ξ_0, предполагая, что $t = t(\xi_0)$, $x = \{t, \mathbf{x}\} = x(\xi)$, $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$. Тогда действие (2.1) можно переписать в виде

$$A_L[x] = \int \mathcal{L}(x, \dot{x})\, d^{n+1}\boldsymbol{\xi}, \quad \dot{x} \equiv \partial x/\partial \xi_0, \quad d^{n+1}\boldsymbol{\xi} = d\xi_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{A.1}$$

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = L(x^0, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}/\dot{x}^0)\dot{x}^0. \tag{A.2}$$

В соответствии с выражением (A.2) лагранжиан $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ представляет собой однородную функцию первого порядка от $\dot{x}$, т.е.

$$\mathcal{L}(x, a\dot{x}) = a\mathcal{L}(x, \dot{x}), \tag{A.3}$$

где a есть произвольный параметр.

Пусть имеется вариационная проблема с функционалом действия (A.1). Покажем, что она эквивалентна вариационной проблеме с функционалом действия (2.2).

Рассматривая величины $\xi = \{\xi_i\}$, $i = 0, 1, \dots n$ как функции от $x = \{x^i\}$, $i = 0, 1, \dots n$, мы можем сформулировать вариационную проблему с действием (A.1) как вариационную проблему с действием

$$\mathcal{A}[\xi] = \int \mathcal{L}(x, \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}) d^{n+1}x, \qquad \xi = \xi(x) \tag{A.4}$$

где J есть якобиан

$$J \equiv \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n)}{\partial(x^0, x^1, \dots x^n)} \equiv \det \parallel \xi_{i,k} \parallel,$$

$$\xi_{i,k} \equiv \partial \xi_i / \partial x^k, \qquad i, k = 0, 1, \dots n \tag{A.5}$$

и

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \equiv \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)}{\partial(x^0, x^1, \dots x^n)} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0} J, \qquad i = 0, 1, \dots n \tag{A.6}$$

При выводе действия (A.4) из действия (A.1), использовались соотношения (A.3), (A.6).

В вариационной проблеме с действием (A.4) лагранжевы координаты $\xi = \{\xi_i\}$, $i = 0, 1, \dots n$ являются зависимыми динамическими переменными, рассматриваемыми как функции независимых переменных $x = \{x^i\}$, $i = 0, 1, \dots n$.

Используем обозначения

$$j^i = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}, \qquad i = 0, 1, \dots n \tag{A.7}$$

Добавляя ограничения (A.7) к действию (A.4), мы не изменяем вариационной проблемы, потому что действие (A.4) не содержит переменных j^i, и соотношения (A.7) на самом деле не являются ограничениями. Введем ограничения (A.7) в действие (A.4) с помощью множителей Лагранжа $p = \{p_i\}$, $i = 0, 1, \dots n$. Величины j^i и p_i, $i = 0, 1, \dots n$ означают соответственно плотность тока и плотность импульса в пространстве $\{t, \mathbf{x}\}$.

Тогда получаем

$$\mathcal{A}[j, p, \xi] = \int [L(x, j) - p_i(j^i - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}})] dx^{n+1}. \tag{A.8}$$

Динамические уравнения, порожденные действием (A.8) имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \xi_\alpha} = -\partial_k (p_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,l} \partial \xi_{\alpha,k}}) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \dots n; \tag{A.9}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta j^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial j^i} - p_i = 0, \qquad i = 0, 1, \dots n \tag{A.10}$$

Вариация по p_i приводит к уравнениям (A.7).

Используя тождества

$$\partial_k (\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,l} \partial \xi_{i,k}}) \equiv 0, \qquad i, l = 0, 1, \dots n, \qquad \partial_k j^k = \partial_k \frac{\delta J}{\delta \xi_{0,i}} \equiv 0, \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,i} \partial \xi_{j,k}} \xi_{j,l} \equiv \delta_l^k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} - \delta_l^i \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad i, k, l = 0, 1, \dots n, \tag{A.12}$$

и исключая переменные ξ, можно привести уравнения (A.7), (A.9), (A.10) к традиционному гидродинамическому виду (2.9), (2.14).

Вместо того, чтобы исключать переменные ξ можно проинтегрировать уравнения (A.9), (A.10) в виде

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}(x, j)}{\partial j^k} = \hbar \partial_k \varphi + \hbar g^\beta(\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\beta; \qquad k = 0, 1, \dots n, \tag{A.13}$$

где $g^\beta(\boldsymbol{\xi})$, $\beta = 1, 2, \dots n$ суть произвольные функции аргументов $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots$n. Величина φ есть некоторая новая переменная. Величина $\hbar$ есть постоянная Планка, которая вводится для переменной φ, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots n$ и функции g^β безразмерные величины. В данном контексте постоянная $\hbar$ не имеет квантового смысла.

В самом деле, подставим соотношение (A.13) в уравнение (A.9) и используем первое уравнение (A.11), антисимметрию выражения $\partial^2 J/\partial\xi_{0,l}\partial\xi_{\alpha,k}$ и симметрию выражения $\partial_k\partial_l\varphi$ относительно перестановки индексов l,k. Получаем

$$\partial_k[\frac{\partial^2 J}{\partial\xi_{0,l}\partial\xi_{\alpha,k}}g^\beta(\boldsymbol{\xi})\xi_{\beta,l}]=0,\qquad \alpha=1,2,\dots n. \qquad (A.14)$$

Используя теперь тождество

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\xi_{0,l}\partial\xi_{\alpha,k}}\xi_{\beta,l}\equiv-\delta^\alpha_\beta\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}},\qquad \alpha,\beta=1,2\dots n,\qquad k=0,1,\dots n, \qquad (A.15)$$

и второе соотношение (A.11), можно привести уравнение (A.14) к виду

$$-\delta^\alpha_\beta\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\xi_{\gamma,k}\frac{\partial g^\beta(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_\gamma}=0,\qquad \alpha=1,2,\dots n. \qquad (A.16)$$

В силу тождества

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\xi_{l,k}\equiv\delta^0_l J,\qquad l=0,1,\dots n \qquad (A.17)$$

уравнение (A.16) удовлетворяется для любых функций $g^\beta(\boldsymbol{\xi})$, $\beta=1,2,\dots$n. Таким образом соотношение (A.13) есть общее решение системы уравнений (A.9).

Подставим соотношение (A.13) в действие (A.8) и воспользуемся тем, что в силу соотношения (A.17)

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}p_k=\hbar\frac{\partial(\varphi,\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)}{\partial(x^0,x^1,\dots x^n)}. \qquad (A.18)$$

Тогда действие (A.8) превращается в действие (2.2). Член (A.18) опущен, потому что он не дает вклада в динамические уравнения. Таким образом, действие (2.2) есть следствие действия (2.1).

Пусть теперь имеется вариационная проблема с функционалом (2.2). Соответствующие динамически уравнения имеют вид (2.9)–(2.11). Соотношения (A.7) удовлетворяют уравнениям (2.9), (2.11) тождественно, и использование их в качестве дополнительных условий не изменяет вариационной проблемы. Подставляя (A.7) в действие (2.2) и используя тождества (A.17), (A.18), получаем действие (A.4), которое эквивалентно действию (2.1). Таким образом, вариационные проблемы с действиями (2.1) и (2.2) эквивалентны.

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Мы покажем здесь, что при выполнении условий

$$\boldsymbol{\xi}^2=1,\qquad \mathbf{z}^2=1 \qquad (B.1)$$

уравнение

$$-\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z}+\frac{(\mathbf{z}\dot{\boldsymbol{\xi}})}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{z}+\frac{\boldsymbol{\xi}(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z})}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}\mathbf{z}-\frac{(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}{2}\mathbf{b}=C\boldsymbol{\xi}, \qquad (B.2)$$

где $\mathbf{b}$ есть заданный вектор и C есть неопределенная функция от τ, приводится к виду

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\xi} \tag{B.3}$$

Пусть $\mathbf{z}\boldsymbol{\xi} = \cos\alpha \neq \pm 1$. Введем ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$

$$\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\xi}, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{z})}{\sin\alpha}, \qquad \boldsymbol{\xi} = \cos\alpha \tag{B.4}$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{z})}{\sin\alpha} = \frac{\mathbf{z} - \boldsymbol{\xi}\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{B.5}$$

Тогда

$$\mathbf{z} = \mathbf{e}_1 \sin\alpha + \mathbf{e}_3 \cos\alpha, \qquad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\xi}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \qquad \mathbf{b} = b_\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{B.6}$$

Из (B.1) и (B.6) следует, что

$$\boldsymbol{\xi}\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0, \qquad \dot{\xi}_3 = 0, \qquad z_2 = 0. \tag{B.7}$$

Подставляя уравнения (B.6), (B.7) в уравнение (B.2) и приравнивая коэффициенты перед базисными векторами $\mathbf{e}_\alpha$, получаем

$$\mathbf{e}_1 : \qquad \dot{\xi}_2 = -b_1 \tag{B.8}$$

$$\mathbf{e}_2 : \qquad \dot{\xi}_1 = b_2 \tag{B.9}$$

$$\mathbf{e}_3 : \qquad C = \frac{b_3}{2}(1 + \cos\alpha) - \frac{2 + \cos\alpha}{2(1 + \cos\alpha)} \sin\alpha \dot{\xi}_2. \tag{B.10}$$

Уравнение (B.3) следует из уравнений (B.7)-(B.9). Уравнения (B.8)–(B.10) определяют неопределенную функцию C через заданный вектор $\mathbf{b}$ и скалярное произведение $(\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})$.

Если $\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi}$, уравнение (B.2) приводится к виду

$$-\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\xi} - \mathbf{b} = C\boldsymbol{\xi}. \tag{B.11}$$

Образуя векторное произведение уравнения (B.11) с $\boldsymbol{\xi}$ и используя (B.7), получаем уравнение (B.3).

Если $\mathbf{z} = -\boldsymbol{\xi}$, то уравнение (B.2) становится неопределенным, и нужно использовать предельный переход $\boldsymbol{\xi} \to -\mathbf{z}$. Он приводит к результату (B.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Yu.A.Rylov, *Physics Essays.* **4**, 300, (1991).
[2] Yu.A.Rylov, *J. Math. Phys.*. **32**, 2092, (1991).
[3] N.N.Bogolyubov, D.V.Shirkov, *Введение в теорию квантованных полей.*, Москва, Наука, 1984, гл.1, разд.7.
[4] F.Sauter, *Zs.Phys.* **63**, 803, (1930), **64**, 295, (1930).
[5] A.Sommerfeld, *Atombau and Spektrallinien.* bd.2, Braunschweig, 1951.
[6] J.L.Anderson, *Principles of Relativity Physics.* Academic Press, New York, 1967. pp. 75–88.
[7] D.Hestenes, *Space-Time Algebra.* Gordon and Breach, New York, 1966
[8] D.Hestenes, *Advances in Applied Clifford Algebras* **2**, 215, (1992).
[9] A.O.Barut, N.Zanghi, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2009, (1984).

[10] E.Schrödinger, *Sitzungsber. Preuss. Wiss. Phys. Math. Kl.* **24**, 418, (1930).
[11] A.O.Barut, A.J.Bracken, *Phys. Rev.* **D23**, 2454, (1981).
[12] J.C.Aron, *Found. Phys.* **11**, 863, (1981).
[13] D.Hestenes, *Found. Phys.* **20**, 45, (1990).
[14] W.A.Rodriges Jr., J.Vaz Jr. *Phys. Lett.* **B318**, 623, (1993).
[15] Yu.A.Rylov, *J. Math. Phys.* **33**, 4220, (1992).