Принцип деформации как основа физической геометрии и его применение к геометрии пространства-времени

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
119526, Москва, Проспект Вернадского 101 - 1
e-mail: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/˜rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site:
http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/˜rylov/yrylov.htm

Аннотация

Физическая геометрия изучает взаимное расположение геометрических объектов и точек в пространстве или в пространстве-времени, которое описывается функцией расстояния d, или мировой функцией $\sigma = d^2/2$. Предлагается новый общий метод построения геометрии. Собственно евклидова геометрия записывается в терминах ее мировой функции σ_{E}. Любая физическая геометрия $\mathcal{G}$ получается из евклидовой геометрии как результат замены евклидовой мировой функции σ_{E} мировой функцией σ физической геометрии $\mathcal{G}$. Этот метод очень прост и эффективен. Он вводит новое свойство геометрии: невырожденность геометрии. Используя этот метод, можно построить детерминированную геометрию пространства-времени с изначально стохастическим движением свободных частиц и геометризованной массой частиц. Такая пространственно-временна́я геометрия, определенная надлежащим образом (с квантовой постоянной как атрибутом пространства-времени), позволяет объяснить квантовые эффекты как результат статистического описания стохастического движения частиц (без использования принципов квантовой механики).

1 Введение

Геометрия лежит в основании физики, и правильная концепция геометрии очень важна для последовательного развития физики. Принято считать, что все проблемы обоснования геометрии решены много лет назад. Это верно, но это касается геометрии, рассматриваемой как логическое построение. Физиков интересует геометрия, рассматриваемая как наука о взаимном расположении геометрических объектов в пространстве или в пространстве-времени. Эти два аспекта совершенно различны, и можно говорить о двух различных геометриях, используя для них различные названия. Геометрия как логическое построение – это всегда однородная геометрия, где все точки имеют одинаковые свойства. Известный математик Феликс Клейн [1] считал, что только однородные геометрии заслуживают названия геометрии. По его мнению, риманову геометрию (вообще говоря, неоднородную) следует называть римановой географией, или римановой топографией. Другими словами, Феликс Клейн рассматривал геометрию главным образом как логическое построение. Мы будем называть такую геометрию математической геометрией.

Геометрию, рассматриваемую как науку о взаимном расположении геометрических объектов, мы будем называть физической геометрией, потому что в этом аспекте геометрии заинтересованы главным образом физики. Физические геометрии, вообще говоря, неоднородны, хотя они могут быть и однородными тоже. Например, собственно евклидова геометрия, с одной стороны, является физической геометрией, но, с другой стороны, она является логическим построением, потому что она однородна и может быть построена из простых элементов (точек, прямых, плоскостей и т.д.). Все элементы евклидовой геометрии имеют одинаковые свойства в разных местах. Эти свойства могут быть описаны с помощью аксиом. Одинаковость геометрических элементов позволяет построить математическую (однородную) геометрию с помощью логических рассуждений. Собственно евклидова геометрия была построена много лет назад Евклидом. Нерпотиворечивость этого построения была исследована и доказана в [2]. Такое построение очень сложно даже в случае собственно евклидовой геометрии, потому что простые геометрические объекты используются для построения более сложных объектов, и сложный геометрический объект $\mathcal{O}$ нельзя построить без построения более простых составляющих этого объекта $\mathcal{O}$.

Заметим, что строя свою геометрию, Евклид не использовал координат для маркировки точек пространства. Его описание однородной геометрии было бескоординатным. Это означает, что координаты не являются необходимым атрибутом геометрии. Система координат есть метод описания, который может использоваться или не использоваться. Применение координат и других средств описания ставит проблему отделения свойств геометрии от свойств средств описания. Обычно разделение свойств геометрии и свойств системы координат осуществляется следующим образом. Геометрия описывается во всех возможных системах координат. Преобразования от одной системы координат к другой образуют группу преобразований. Инварианты этой группы преобразований имеют одни и те же значения во всех системах координат, и следовательно, они описывают свойства рассматриваемой геометрии.

В этом месте мы должны сделать важное замечание. *Любая геометрия есть совокупность всех геометрических объектов* $\mathcal{O}$ *и всех отношений* $\mathcal{R}$ *между* *ними.* Всякий геометрический объект $\mathcal{O}$ есть подмножество точек некоторого точечного множества Ω, на котором задана геометрия. В римановой геометрии (и других неоднородных геометриях) множество Ω есть n-мерное многообразие, точки P которого маркируются n координатами $x = \{x^1, x^2, ...x^n\}$. Эта маркировка (арифметизация пространства) рассматривается как необходимый атрибут римановой геометрии. Большинство геометров полагают, что риманова геометрия (и, вообще, физическая геометрия) не может быть построена без введения многообразия. Иначе говоря, они полагают, что многообразие есть атрибут римановой геометрии (и, вообще, любой непрерывной геометрии). Эта вера основана на том факте, что риманова геометрия всегда строится на некотором многообразии. Однако, это заблуждение. Тот факт, что мы всегда строим физическую геометрию на некотором многообразии, не означает, что физическая геометрия не может быть построена без ссылки на многообразие или систему координат. Разумеется, некоторая маркировка точек пространства удобна, но она не имеет отношения к построению геометрии, и физическую геометрию следует строить без ссылки на систему координат. Использование системы координат налагает ограничения на свойства построенной физической геометрии. Например, если мы используем непрерывную систему координат (многообразие), мы можем построить только непрерывную физическую геометрию. Чтобы построить дискретную физическую геометрию, построение геометрии не должно содержать ссылки на систему координат.

Здесь мы представляем метод построения физической геометрии, который не содержит ссылки на систему координат и другие средства описания. Он содержит ссылку только на функцию расстояния d, которая является существенной характеристикой физической геометрии.

Если геометрия неоднородна, и прямые, находящиеся в разных местах, имеют различные свойства, то нельзя описать свойства этих прямых с помощью аксиом, потому что нет таких аксим, которые были бы справедливы для всей геометрии. Взаимное расположение точек в физической (неоднородной) геометрии, заданной на множестве Ω точек P, описывается с помощью функции расстояния $d(P, Q)$

$$d: \qquad \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}, \qquad d(P, P) = 0, \qquad \forall P \in \Omega \tag{1.1}$$

где $\mathbf{R}$ есть множество всех вещественных чисел. Функция расстояния d есть главная характеристика физической геометрии. Кроме того функция расстояния d есть *единственная характеристика* любой физической геометрии. Функция расстояния d полностью определяет физическую геометрию. Это утверждение очень важно для построения физической геометрии. Ниже оно будет доказано. Любая физическая геометрия $\mathcal{G}$ строится из собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}$ с помощью деформации, т.е. заменой евклидовой функции расстояния d_E на функцию расстояния нужной геометрии. Например, строя риманову геометрию, мы заменяем бесконечно малое евклидово расстояние $dS_\mathrm{E} = \sqrt{g_{\mathrm{E}ik}dx^i dx^k}$ римановым бесконечно малым расстоянием $dS = \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$. Повидимому, нет метода построения неоднородной физической геометрии, отличного от деформации евклидовой геометрии (или некоторой другой однородной геометрии), которая строится как математическая геометрия на основе аксиоматики и логики. К сожалению, традиционный метод построения римановой геометрии содержит ссылку на систему координат. Однако, эта ссылка может быть устранена, если использовать конечное расстояние d вместо бесконечно малого расстояния dS.

Для описания физической геометрии используется мировая функция σ [3], которая связана с функцией расстояния d с помощью соотношения $\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}d^2(P,Q)$. Мировая фунция определяется соотношением

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbf{R}, \qquad \sigma(P,P)=0, \qquad \forall P\in\Omega \tag{1.2}$$

где $\mathbf{R}$ есть множество всех вещественных чисел. Использование мировой функции более удобно в том отношении, что мировая функция вещественна даже тогда, когда функция расстояния d мнима и не удовлетворяет определению (1.1). Это важно при рассмотрении геометрии пространства-времени как физической геометрии.

Вообще говоря, физическая геометрия не может быть построена как логическая конструкция, потому что любое изменение мировой функции сопровождается изменением аксиоматики. Логическое построение практически нереально, потому что множество физических геометрий континуально. Содержит ли мировая функция всю информацию, необходимую для построения физической геометрии? Это очень важный вопрос. Например, можно ли извлечь информацию о размерности пространства из мировой функции для случая евклидовой геометрии? Несколько ниже мы дадим положительный ответ на этот вопрос. Сейчас мы сформулируем метод построения физической геометрии.

Представим себе, что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть описана в терминах и только в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. Такое описание называется σ-имманентным. Это означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и любое соотношение $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ между геометрическими объектами в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть описано в терминах σ_{E} в виде $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Чтобы получить соответствующий геометрический объект $\mathcal{O}$ и соответствующее соотношение $\mathcal{R}$ между геометрическими объектами в другой физической геометрии $\mathcal{G}$, достаточно заменить евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией σ физической геометрии $\mathcal{G}$ в описании $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$.

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})\rightarrow\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma), \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})\rightarrow\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma)$$

Индекс 'E' показывает, что геометрический объект построен на основе евклидовой аксиоматики. При таком построении не нужны ни аксиомы, ни логические рассуждения. Не нужно никаких средств описания (топологических структур, непрерывности, многообразия, размерности и т.д.). Фактически используется аксиоматика евклидовой геометрии, которая деформируется заменой $\sigma_{\mathrm{E}}\rightarrow\sigma$. Эта замена может быть интерпретирована как деформация евклидова пространства. Отсутствие ссылок на средства описания является большим преимуществом рассматриваемого метода построения геометрии. Кроме того нет необходимости строить всю геометрию $\mathcal{G}$. Мы можем построить и исследовать только интересующую нас часть геометрии $\mathcal{G}$. Любая физическая геометрия может быть построена как результат деформации евклидовой геометрии.

Геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается с помощью каркас-оболочного метода [4]. Это означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ рассматривается как множестово объединений и пересечений элементарных геометрических объектов (ЭГО).

Конечное множество $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ параметров оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$ образует каркас элементарного объекта (ЭГО) $\mathcal{E} \subset \Omega$. Множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ точек, образующих ЭГО называется оболочкой его каркаса $\mathcal{P}^n$. Для непрерывной физической геометрии оболочка $\mathcal{E}$ представляет собой обычно непрерывное множество точек. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$, определяющая ЭГО, есть функция текущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ есть алгебраическая функция s аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ есть мировая функция от двух аргументов $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$, либо принадлежащих каркасу $\mathcal{P}^n$, либо совпадающих с текущей точкой R. Таким образом, элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется своим каркасом и своей оболочной функцией.

Например, сфера $\mathcal{S}(P_0, P_1)$ с центром в точке P_0 определяется соотношением

$$\mathcal{S}(P_0, P_1) = \{R | f_{P_0 P_1}(R) = 0\}, \qquad f_{P_0 P_1}(R) = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0, R)} \tag{1.3}$$

где P_1 есть точка, принадлежащая сфере. Элементарный объект $\mathcal{E}$ определяется сразу во всех физических геометриях. В частности, он определяется в собственно евклидовой геометрии, где мы можем получить его истолкование. Мы интерпретируем элементарные геометрические объекты $\mathcal{E}$, используя наше знание собственно евклидовой геометрии. Таким образом, собственно евклидова геометрия используется как эталонная геометрия для интерпретации любой физической геометрии.

Мы не пытаемся повторять предписания Евклида для построения геометрии. Вместо этого мы берем геометрические объекты и соотношения между ними, полученные в рамках евклидовой геометрии и записываем их в терминах мировой функции. После этого мы деформируем их, заменяя евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией σ строящейся геометрии. На практике построение элементарного геометрического объекта сводится к представлению соответствующего евклидова геометрического объекта в σ-имманентном виде, т.е. в терминах евклидовой мировой функции. Последняя проблема есть проблема собственно евклидовой геометрии. Проблема представления геометрического объекта (или соотношения между объектами) в σ-имманентном виде есть действительная проблема построения физической геометрии.

Очень важно, что такое построение не использует координат и других методов описания, потому что использование методов описания накладывает ограничения на построенную геометрию. Всякое средство описания есть некоторая стуктура St, заданная на базовой евклидовой геометрии с мировой функцией σ_{E}. Замена $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ достаточна для построения единственной физической геометрии $\mathcal{G}_\sigma$. Если мы используем дополнительную структуру St для построения физической геометрии, мы получаем, вообще говоря, другую геометрию $\mathcal{G}_{St}$, которая совпадает с $\mathcal{G}_\sigma$ не для всех σ, а только для некоторых мировых функций σ. Таким образом, использование дополнительных средств описания ограничивает список возможных физических геометрий. Например, если мы используем координатное описание при построении физической геометрии, то полученная геометрия оказывается непрерывной, потому что описание с помощью координат эффективно только для непрерывных геометрий, где число координат совпадает с размерностью геометрии.

Строя геометрию $\mathcal{G}$ с помощью деформации, мы существенно используем тот факт, что евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ есть математическая геометрия, которая была построена на основе евклидовой аксиоматики и логических рассуждений.

Мы будем называть этот метод построения физической геометрии принципом деформации и понимать деформацию в широком смысле этого слова. В частности, деформация евклидова пространства может преобразовывать евклидову поверхность в точку и евклидову точку в поверхность. Такая деформация может удалять некоторые точки евклидова пространства, нарушая его непрерывность или уменьшая число его измерений. Такая деформация может добавлять точки к евклидову пространству, увеличивая число его измерений. Другими словами, принцип деформации есть очень общий метод построения физической геометрии.

Принцип деформации как метод построения физической геометрии имеет две стадии:

(i) Представление геометрических объектов $\mathcal{O}$ и соотношений $\mathcal{R}$ евклидовой геометрии в σ-имманентной форме, т.е. в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E}.

(ii) Замена евклидовой функции σ_{E} мировой функцией σ искомой геометрии.

Физическая геометрия, построенная с помощью только принципа деформации (т.е. без использования других методов) называется Т-геометрией (трубчатой геометрией) [5, 4, 6]. Т-геометрия есть наиболее общий вид физической геометрии.

Применение принципа деформации как метода построения физической геометрии ограничено двумя условиями.

1. Описывая евклидовы геометрические объекты $\mathcal{O}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и евклидовы соотношения $\mathcal{R}(\sigma_{\mathrm{E}})$ в терминах σ_{E}, мы не должны использовать специальные свойства евклидовой мировой функции σ_{E}. В частности, определения объектов $\mathcal{O}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и соотношений $\mathcal{R}(\sigma_{\mathrm{E}})$ должны иметь один и тот же вид в евклидовых геометриях разных размерностей. Они не должны зависеть от размерности евклидова пространства.

2. Принцип деформации должен применяться отдельно от других мето-

дов построения геометрии. В частности, нельзя применять топологические структуры при построении физической геометрии. При построении физической геометрии нельзя использовать геометрические структуры, потому что для эффективного использования принципа деформации построенная физическая геометрия должна определяться только мировой функцией (метрикой).

2 Описание собственно евклидова пространства в терминах мировой функции

Ключевой точкой построения физической геометрии является описание евклидовой геометрии в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. Мы будем называть такое описание σ-имманентным описанием. К сожалению, оно не было известно в течении многих лет, хотя все физики знали, что бесконечно малый интервал $dS=\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$ есть единственная существенная характеристика геометрии пространства-времени, и изменяя это выражение, мы изменяем геометрию пространства-времени. С физической точки зрения σ-иманентное описание очень разумно, поскольку оно не содержит никакой посторонней информации. σ-имманентное описание не ссылается на средства описания (размерность, многообразие, систему координат). Отсутствие ссылок на средства описания важно в том отношении, что не возникает необходимости отделять информацию о самой геометрии от информации о средствах описания. σ-имманентное описание содержит только существенную характеристику геометрии: ее мировую функцию. Впервые σ-имманентное описание было получено в 1990 году [5].

Первый вопрос, касющийся σ-имманентного описания такой. Содержит ли мировая функция информацию, достаточную для описания физической геометрии? Ответ положительный, по крайней мере, в случае собственно евклидовой геометрии, и этот ответ дается доказательством следующей теоремы.

Пусть σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ есть множество Ω точек P с заданной на нем мировой функцией σ

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbf{R}, \qquad \sigma(P,P)=0, \qquad \forall P\in\Omega \tag{2.1}$$

где $\mathbf{R}$ есть множество всех вещественных чисел. Пусть вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1=\{P_0,P_1\}$ есть упорядоченное множество из двух точек P_0, P_1, и его длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ определяется соотношением $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2=2\sigma(P_0,P_1)$.

Теорема

σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ есть n-мерное собственно евклидово пространство, если и только если мировая функция σ удовлетворяет следующим условиям, записанным в терминах мировой функции σ.

I. Условие симметрии:

$$\sigma(P,Q)=\sigma(Q,P), \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{2.2}$$

II. Определение размерности:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ... P_n\}, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{2.3}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)||, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{2.4}$$

Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) \tag{2.5}$$

Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$ суть базисные векторы прямолинейной системы координат K_n с началом координат в точке P_0. Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i, l = 1, 2, ...n \tag{2.6}$$

III. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)(x_i(P) - x_i(Q))(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{2.7}$$

где координаты $x_i(P)$ точки P суть ковариантные координаты вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, определенные соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.8}$$

IV: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{2.9}$$

V. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbf{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.10}$$

рассматриваемая как система уравнений для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$ всегда имеет одно и только одно решение. Условия II – V содержат ссылку на размерность n евклидова пространства.

Поскольку возможно σ-имманентное описание собственно евклидовой геометрии, то оно возможно и для любой T-геометрии, потому что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ и любое соотношение $\mathcal{R}$ в физической геометрии $\mathcal{G}$ получается из соответствующего геометрического объекта $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и из соответствующего соотношения $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ с помощью замены $\sigma_\mathrm{E} \to \sigma$ в описании объекта $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ и соотношения $\mathcal{R}_\mathrm{E}$. Для того, чтобы такая замена была возможна, описание объекта $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ и соотношения $\mathcal{R}_\mathrm{E}$ не должно ссылаться на специальные свойства мировой функции σ_E, описываемые условиями II – V. Формальным признаком применения условий II – V является ссылка на размерность n, потому что любое из условий II – V содержит ссылку на размерность n собственно евклидова пространства.

Если тем не менее мы используем одно из специальных свойств II – V евклидова пространства в σ-имманентном описании геометрического объекта $\mathcal{O}$, или соотношения $\mathcal{R}$, мы ссылаемся на размерность n и в конечном счете на систему координат, которая является только средством описания.

Покажем это на примере определения прямой в n-мерном евклидовом пространстве. Прямая $\mathcal{T}_{P_0Q}$ в собственно евклидовом пространстве определяется двумя ее точками P_0 и Q $(P_0 \neq Q)$ как множество точек R

$$\mathcal{T}_{P_0Q} = \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}\} \tag{2.11}$$

где условие $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ означает, что векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны, т.е. скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R})$ этих двух векторов удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R})^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\,(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \tag{2.12}$$

где скалярное произведение определяется соотношением (2.5). Таким образом, прямая линия $\mathcal{T}_{P_0Q}$ определяется σ-имманентно, т.е. в терминах мировой функции σ. Мы будем использовать два различных названия (прямая и трубка) для геометрического объекта $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Мы будем использовать термин "прямая", когда хотим подчеркнуть, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ есть результат деформации евклидовой прямой. Мы будем использовать термин "трубка", когда хотим подчеркнуть, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ может быть многомерной поверхностью.

В евклидовой геометрии можно использовать другое определение коллинеарности. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ and $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны, если составляющие векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в некоторой системе координат пропорциональны. Например, в n-мерной евклидовой геометрии можно ввести прямолинейную систему координат, выбрав $n+1$ точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и образовав n базисных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$. Тогда условие коллинеарности может быть записано в виде n уравнений

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = a\,(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R})\,, \qquad i = 1, 2, ...n, \tag{2.13}$$

где a есть некоторая вещественная постоянная. Соотношения (2.13) являются соотношениями для ковариантных составляющих векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в рассматриваемой системе координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$. Пусть точки $\mathcal{P}^n$ выбраны таким образом, что $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \neq 0$. Тогда, исключая параметр a из соотношений (2.13), получаем $n-1$ независимых соотношений, и геометрический объект

$$\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n} \;\; = \;\; \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}\} = \bigcap_{i=2}^{i=n} \mathcal{S}_i, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{S}_i = \left\{ R \left| \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})} = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R})} \right. \right\}, \qquad i = 2, 3, ...n \qquad (2.15)$$

определенный в соответствии с (2.13), зависит от $n+2$ точек $Q, \mathcal{P}^n$. Этот геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ определен σ-имманентно. Это есть комплекс, состоящий из прямой линии и системы координат, представленной $n+1$ точками $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$. В евклидовом пространстве зависимость от выбора системы координат и от $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$, определяющих эту систему координат, фиктивна. Геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит только от двух точек P_0, Q и совпадает с прямой линией $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Однако, при деформации евклидова пространства геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{T}_{P_0Q}$ деформируются различно. Точки $P_1, P_2, ...P_n$ перестают быть фиктивными в определении объекта $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, и геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{T}_{P_0Q}$ становятся различными, вообще говоря, геометрическими объектами. Однако, будучи, вообще говоря, различными, они могут совпадать в некоторых частных случаях.

Какой из двух геометрических объектов в деформированной геометрии следует рассматривать как прямую линию, проходящую через точки P_0 и Q в геометрии $\mathcal{G}$? Разумеется, это $\mathcal{T}_{P_0Q}$, потому что ее определение не содержит ссылки на систему координат, тогда как определение величины $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит от выбора системы координат, представленной точками $\mathcal{P}^n$. Вообще говоря, определения геометрических объектов и соотношений между ними не должны ссылаться на средства описания.

Однако, в данном случае геометрический объект $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является, вообще говоря, $(n-1)$-мерной поверхностью, тогда как объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является пересечением $(n-1)$ поверхностей размерности $(n-1)$, т.е. $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является, вообще говоря, одномерной кривой. Одномерная кривая $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ лучше соответствует нашим идеям о прямой линии, чем $(n-1)$-мерная поверхность $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Тем не менее, в физической геометрии $\mathcal{G}$ именно $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является аналогом евклидовой прямой линии.

Очень трудно преодолеть наше традиционное представление, что евклидова прямая не может быть деформирована в многомерную поверхность, и *эта идея многие годы препятствовала построению Т-геометрий.* На практике использовались такие физические геометрии, где деформация евклидова пространства преобразовывала евклидовы прямые в одномерные линии. Это означает, что выбирались такие геометрии, где геометрические объекты $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ совпадали.

$$\mathcal{T}_{P_0Q} = \mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n} \qquad (2.16)$$

Условие (2.16) совпадения объектов $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, наложенное на Т-геометрию, ограничивает список возможных Т-геометрий.

Рассмотрим метрическую геометрию, заданную на множестве Ω точек. Метрическое пространство $M = \{\rho, \Omega\}$ задается метрикой (расстоянием) ρ.

$$\rho \quad : \qquad \Omega \times \Omega \to [0, \infty) \subset \mathbf{R} \qquad (2.17)$$

$$\rho(P, P) = 0, \qquad \rho(P, Q) = \rho(Q, P), \qquad \forall P, Q \in \Omega \qquad (2.18)$$

$$
\begin{aligned}
\rho(P,Q) &\geq 0, \qquad \rho(P,Q)=0, \quad \text{iff } P=Q, \qquad \forall P,Q\in\Omega \qquad (2.19)\\
0 &\leq \rho(P,R)+\rho(R,Q)-\rho(P,Q), \qquad \forall P,Q,R\in\Omega \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{R}$ есть множество всех вещественных чисел. На первый взгляд метрическое пространство есть частный случай σ-пространства (2.1), и метрическая геометрия есть специальный случай T-геометрии с дополнительными ограничениями (2.19), (2.20), налагаемыми на мировую функцию $\sigma=\frac{1}{2}\rho^2$. Однако, это не так, потому что метрическая геометрия не использует принцип деформации. Тот факт, что евклидова геометрия может быть описана σ-имманентно, так же как условия (2.3) - (2.10), были неизвестны до 1990 года. Дополнительные (по отношению к σ-пространству) условия (2.19), (2.20) налагаются для того, чтобы исключить ситуацию, когда прямая не является одномерной линией. Дело в том, что в метрической геометрии кратчайшая (прямая) может быть построена только в том случае, когда она одномерна.

Рассмотрим множество $\mathcal{EL}(P,Q,a)$ точек R

$$
\mathcal{EL}(P,Q,a)=\{R|f_{P,Q,a}(R)=0\}, \qquad f_{P,Q,a}(R)=\rho(P,R)+\rho(R,Q)-2a \quad (2.21)
$$

Если метрическое пространство совпадает с собственно евклидовым пространством, это множество точек есть эллипсоид с фокусами в точках P,Q и большой полуосью a. Соотношения $f_{P,Q,a}(R)>0$, $f_{P,Q,a}(R)=0$, $f_{P,Q,a}(R)<0$ определяют соответственно внешние точки, граничные точки и внутренние точки эллипсоида. Если $\rho(P,Q)=2a$, то получается вырожденный эллипсоид, который совпадает с сегментом $\mathcal{T}_{[PQ]}$ прямой линии, проходящей через точки P, Q. В собственно евклидовой геометрии вырожденный эллипсоид является одномерным сегментом прямой линии, но совсем не очевидно, что одномерность будет иметь место в случае произвольной метрической геометрии. Для того, чтобы такой вырожденный эллипсоид был одномерным в любом метрическом пространстве необходимо, чтобы любой вырожденный эллипсоид $\mathcal{EL}(P,Q,\rho(P,Q)/2)$ не имел внутренних точек. Это условие записывается в виде

$$
f_{P,Q,\rho(P,Q)/2}(R)=\rho(P,R)+\rho(R,Q)-\rho(P,Q)\geq 0 \qquad (2.22)
$$

Сравнивая соотношение (2.22) с соотношением (2.20), мы видим, что ограничение (2.20) вводится для того, чтобы сделать прямую (кратчайшую) линию одномерной (отсутствие внутренних точек в геометрическом объекте, определяемом двумя точками).

Поскольку метрическая геометрия не использует принцип деформации, то это – бедная геометрия. В рамках этой геометрии нельзя построить скалярное произведение двух векторов, определить линейную зависимость векторов и построить такие геометрические объекты как плоскости. Все эти объекты, так же как и другие, строятся на основе деформации евклидовой геометрии.

Обобщая метрическую геометрию, Менгер [7] и Блюменталь [8] отбросили аксиому треугольника (2.20). Они пытались построить дистантную геометрию, которая была бы более общей геометрией, чем метрическая. Поскольку они не использовали принцип деформации, они не могли определить кратчайшую (прямую) линию без ссылки на топологическое понятие кривой $\mathcal{L}$, определенной как непрерывное отображение

$$\mathcal{L}: \qquad [0,1] \rightarrow \Omega \tag{2.23}$$

которое не может быть выражено только через расстояние. В результате дистантная геометрия не получилась чисто метрической геометрией, какой является Т-геометрия.

3 Условия применения принципа деформации

Римановы геометрии удовлетворяют условию (2.16). Риманова геометрия является разновидностью неоднородной геометрии, и следовательно, она использует принцип деформации. При построении римановой геометрии бесконечно малое евклидово расстояние деформируется в бесконечно малое риманово расстояние. Деформация выбрана таким образом, что евклидова прямая $\mathcal{T}_{\mathrm{E}P_0Q}$, проходящая через точку P_0, коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, пребразовывалась бы в геодезическую $\mathcal{T}_{P_0Q}$, проходящую через точку P_0, колинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ в римановом пространстве.

Заметим, что в Т-геометрии, удовлетворяющей условию (2.16) для всех точек $Q, \mathcal{P}^n$, прямая линия

$$\mathcal{T}_{Q_0;P_0Q} = \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q} || \mathbf{Q}_0\mathbf{R}\} \tag{3.1}$$

проходящая через точку Q_0 коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, вообще говоря, не является одномерной кривой. Если бы римановы геометрии были Т-геометриями, они должны были бы содержать неодномерные геодезические (прямые). Но римановы геометрии не являются Т-геометриями, потому что при их построении был использован не только принцип деформации, а были использованы также другие методы, содержащие ссылку на средства описания. В частности, в римановых геометриях, вообще говоря, отсутствует абсолютный параллелизм, и нельзя определить прямую линию (3.1), потому что соотношение $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ не определено, если точки P_0 и Q_0 не совпадают. С одной стороны отсутствие абсолютного параллелизма позволяет обойти проблему неодномерности прямых линий. Но с другой стороны, это делает римановы геометрии непоследовательными, поскольку они перестают быть Т-геометриями, которые последовательны по построению (см. детали в [9]).

Дело в том, что использование *одного только принципа деформации* достаточно для построения физической геометрии. Кроме того такое построение последовательно, поскольку исходная евклидова геометрия последовательна и, деформируя ее, мы не используем никаких логических рассуждений. Если мы вводим некоторую дополнительную структуру (например, топологическую структуру), мы получаем обогащенную физическую геометрию, т.е. физическую геометрию с дополнительной структурой на ней. Физическая геометрия с дополнительной структурой на ней есть более содержательная конструкция, чем просто физическая геометрия. Однако, это верно только в том случае, если дополнительная структура рассматривается как дополнение к физической геометрии. Если же мы используем дополнительную структуру в построении геометрии, то мы отождествляем эту дополнительную структуру с одной из структур физической геометрии. Если же мы требуем, чтобы эта дополнительная структура была одной из структур физической геометрии, мы ограничиваем применение принципа деформации и ограничиваем список возможных физических геометрий, потому что совпадение дополнительной структуры с некоторой структурой физической геометрии возможно не для всех физических геометрий, а только для некоторых из них.

Пусть, например, мы используем понятие кривой $\mathcal{L}$ (2.23) для построения физической геометрии. Понятие кривой $\mathcal{L}$, рассматриваемой как непрерывное отображение есть топологическая структура, которая не может быть выражена через расстояние или мировую функцию. Введение отображения (2.23) требует введения топологического пространства и, в частности, понятия непрерывности. Если мы отождествляем топологическую кривую (2.23) с "метрической" кривой, определенной как ломаная линия

$$\mathcal{T}_{\mathrm{br}} = \bigcup_i \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}, \qquad \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} = \left\{R|\sqrt{2\sigma\left(P_i, P_{i+1}\right)} - \sqrt{2\sigma\left(P_i, R\right)} - \sqrt{2\sigma\left(R, P_{i+1}\right)}\right\} \tag{3.2}$$

состоящая из отрезков $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ прямой линии, между точками P_i, P_{i+1}, мы ограничиваем список возможных геометрий, потому что такое отождествление возможно только в некоторых геометриях. Отождествляя (2.23) и (3.2), мы исключаем все дискретные физические геометрии и те непрерывные физические геометрии, где сегмент $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ прямой линии есть поверхность, а не одномерное множество точек. Таким образом, дополнительные структуры могут приводить к (i) обогащенным физическим геометриям, (ii) ограниченным физическим геометриям и (iii) ограниченным обогащенным геометриям. Результат зависит от метода использования дополнительной структуры.

Заметим, что некоторые ограничения (непрерывность, выпуклость, отсутствие абсолютного параллелизма), налагаемые на физические геометрии являются результатом несогласованности применяемых методов построения геометрии. В Т-геометрии, которая использует только принцип деформации, таких ограничений нет. Кроме того Т-геометрия обладает некоторым новым свойством физической геометрии, которое традиционно не принимается другими версиями геометрии. Это свойство, называемое невырожденностью геометрии, следует прямо из применения произвольных деформаций собственно евклидовой геометрии.

Геометрия вырождена в точке P_0 в направлении вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$, $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \neq 0$, если соотношения

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) = \sqrt{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{R}|}, \qquad |\mathbf{P}_0\mathbf{R}| = a \neq 0 \tag{3.3}$$

рассматриваемые как уравнения для определения точки R, имеют не более одного решения для любых значений $a \neq 0$. В противном случае геометрия невырождена в точке P_0 в направлении вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$. Заметим, что первое уравнение (3.3) есть условие параллельности векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$.

Собственно евклидова геометрия вырождена, т.е. она вырождена во всех точках в направлении всех векторов.

Рассматривая геометрию Минковского, следует различать между геометрией Минковского и Т-геометрией Минковского. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией, но различаются определением параллельности. В Т-геометрии Минковского параллельность двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определяется первым уравнением (3.3). Это определение основано на принципе деформации. В геометрии Минковского параллельность определяется соотношением типа (2.13)

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}) = a\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right), \qquad i = 1, 2, ...n, \qquad a > 0 \tag{3.4}$$

где точки $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ определяют прямолинейную систему координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ..n$ в n-мерной геометрии Минковского (n-мерная псевдоевклидова геометрия индекса 1). Зависимость определения (3.4) от точек $(P_1, P_2, ...P_n)$ фиктивна, но зависимость от числа $n + 1$ точек $\mathcal{P}^n$ существенна. Таким образом, определение (3.4) зависит от метода описания геометрии.

Т-геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех времениподобных векторов, и она невырождена, вообще говоря, во всех точках в направлении всех пространственноподобных векторов. Геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех векторов. Традиционно используют геометрию Минковского, игнорируя невырожденность в пространственноподобных направлениях.

Рассматривая собственно риманову геометрию, следует различать между римановой Т-геометрией и римановой геометрией. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией. Они различаются в определении параллелизма. В римановой Т-геометрии параллелизм двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определяется первым соотношением (3.3). В римановой геометрии параллелизм двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определен только в случае, когда точки P_0 и Q_0 совпадают. Параллелизм удаленных векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$, вообще говоря, не определен. Этот факт известен как отсутствие абсолютного параллелизма.

Собственно риманова Т-геометрия локально вырождена, т.е. она вырождена во всех точках P_0 в направлении всех векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$. В общем случае, когда $P_0 \neq Q_0$, риманова Т-геометрия, вообще говоря, невырождена. Собственно риманова геометрия вырождена, потому что она вырождена локально. тогда как нелокальная невырожденность не определена в римановой геометрии из-за отсутствия абсолютного параллелизма. Традиционно используется риманова геометрия, а свойство невырожденности полностью игнорируется.

С точки зрения традиционного подхода к физической геометрии невырожденность есть нежелательное свойство физической геометрии, хотя с точки зрения логики и с точки зрения принципа деформации невырожденность является естественным свойством физической геометрии. Нелокальная невырожденность изгоняется из собственно римановой геометрии отрицанием существования параллельности удаленных векторов. Невырожденность в направлении пространсвенноподобных векторов изгоняется из геометрии Минковского с помощью переопределения понятия параллельности двух векторов. Однако, невырожденность есть важное свойство реальной геометрии пространства-времени. Чтобы осознать это, рассмотрим пример.

4 Простой пример невырожденной геометрии пространства-времени

Т-геометрия [4] определяется на σ-пространстве $V=\{\sigma,\Omega\}$, где Ω есть произвольное множество точек и мировая функция σ определяется соотношениями

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega\to\mathbf{R}, \qquad \sigma(P,Q)=\sigma(Q,P), \qquad \sigma(P,P)=0, \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{4.1}$$

где $\mathbf{R}$ есть множество всех вещественных чисел. Геометрические объекты (вектор $\mathbf{PQ}$, скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$, и коллинеарность $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, сегмент прямой линии $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, и т.д.) определяются в σ-пространстве точно так же, как они σ-имманентно определяются в собственно евклидовом пространстве. Практически используется принцип деформации, хотя он не упоминается в определениях.

Рассмотрим простой пример геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, описываемый Т-геометрией на четырехмерном многообразии. $\mathcal{M}_{1+3}$. Мировая функция σ_{d} описывается соотношением

$$\sigma_{\mathrm{d}}=\sigma_{\mathrm{M}}+D(\sigma_{\mathrm{M}})=\begin{cases}\sigma_{\mathrm{M}}+d & \text{если } \sigma_0<\sigma_{\mathrm{M}}\\ \left(1+\frac{d}{\sigma_0}\right)\sigma_{\mathrm{M}} & \text{если } 0\leq\sigma_{\mathrm{M}}\leq\sigma_0\\ \sigma_{\mathrm{M}} & \text{если } \sigma_{\mathrm{M}}<0\end{cases} \tag{4.2}$$

где $d\geq 0$ и $\sigma_0>0$ суть некоторые постоянные. Величина σ_{M} есть мировая функция в пространственно-временно́й геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. В ортогональной прямолинейной (инерциальной) системе координат $x=(t,\mathbf{x})$ мировая функция σ_{M} имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{M}}(x,x')=\frac{1}{2}\left(c^2(t-t')^2-(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2\right) \tag{4.3}$$

где c есть скорость света.

Сравним ломаную линию (3.2) в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ и в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ с дисторсией $D(\sigma_{\mathrm{M}})$. Мы предполагаем, что $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ есть времениподобная ломаная линия, и все звенья $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ ломаной $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ времениподобны и имеют одну и ту же длину

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{d}}=\sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}(P_i,P_{i+1})}=\mu_{\mathrm{d}}>0, \qquad i=0,\pm1,\pm2,... \tag{4.4}$$

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{M}} = \sqrt{2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_i, P_{i+1}\right)} = \mu_{\mathrm{M}} > 0, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{4.5}$$

где индексы "d" и "M" означают, что величина подсчитывается с помощью σ_{d} и σ_{M} соответственно. Вектор $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ интерпретируется как импульс частицы на сегменте $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$, величина $|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = \mu$ интерпретируется как ее (геометрическая) масса. Из определения (2.5) и соотношения (4.2) следует, что для времениподобных векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ с $\mu > \sqrt{2\sigma_0}$

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{d}}^2 = \mu_{\mathrm{d}}^2 = \mu_{\mathrm{M}}^2 + 2d, \qquad \mu_{\mathrm{M}}^2 > 2\sigma_0 \tag{4.6}$$

$$(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{d}} = (\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{M}} + d \tag{4.7}$$

Расчет формы сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}(\sigma_{\mathrm{d}})$ в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ дает соотношение

$$r^2(\tau) = \begin{cases} \tau^2\mu_{\mathrm{d}}^2 \frac{\left(1-\frac{\tau d}{2(\sigma_0+d)}\right)^2}{\left(1-\frac{2d}{\mu_{\mathrm{d}}^2}\right)} - \frac{\tau^2\mu_{\mathrm{d}}^2\sigma_0}{(\sigma_0+d)}, & 0 < \tau < \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\mathrm{d}}} \\ \frac{3d}{2} + 2d\left(\tau - 1/2\right)^2 \left(1 - \frac{2d}{\mu_{\mathrm{d}}^2}\right)^{-1}, & \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\mathrm{d}}} < \tau < 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\mathrm{d}}} \\ \left(1-\tau\right)^2\mu_{\mathrm{d}}^2 \left[\frac{\left(1-\frac{(1-\tau)d}{2(\sigma_0+d)}\right)^2}{\left(1-\frac{2d}{\mu_{\mathrm{d}}^2}\right)} - \frac{\sigma_0}{(\sigma_0+d)}\right], & 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\mathrm{d}}} < \tau < 1 \end{cases}, \tag{4.8}$$

где $r(\tau)$ есть пространственный радиус сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}(\sigma_{\mathrm{d}})$ в системе координат, где точки P_0 и P_1 имеют координаты $P_0 = \{0,0,0,0\}$, $P_1 = \{\mu_{\mathrm{d}},0,0,0\}$, а τ есть параметр вдоль сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}(\sigma_{\mathrm{d}})$ $(\tau(P_0) = 0,\ \tau(P_1) = 1)$. Можно усмотреть из (4.8), что характерная величина радиуса сегмента равна $\sqrt{d}$.

Пусть ломаная трубка $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ описывает "мировую линию" свободной частицы. Это по определению означает, что каждое звено $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$ параллельно смежному звену $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$

$$\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i \uparrow\uparrow \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}: \qquad (\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}) - |\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|\,|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = 0 \tag{4.9}$$

Определение параллельности различно в геометриях $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ и $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. В результате звенья, параллельные в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, не параллельны в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ и наоборот.

Пусть $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{M}})$ описывает мировую линию свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Угол ϑ_{M} между смежными звеньями в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ определяется соотношением

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{M}} = \frac{(\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_{\mathrm{M}}}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}} \cdot |\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0|_{\mathrm{M}}} = 1 \tag{4.10}$$

Угол $\vartheta_{\mathrm{M}} = 0$, и геометрический объект $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{M}})$ есть времениподобная прямая на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$.

Пусть теперь $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{d}})$ описывает мировую линию свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Угол ϑ_{d} между смежными звеньями в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ определяется соотношением

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{d}} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{d}}}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{d}} \cdot |\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_{\mathrm{d}}} = 1 \tag{4.11}$$

Угол $\vartheta_{\rm d}=0$ также. Если нарисовать ломаную трубку $\mathcal{T}_{\rm br}(\sigma_{\rm d})$ на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$, используя координаты опорных точек P_i, и измерить угол $\vartheta_{\rm dM}$ между смежными звеньями в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$, мы получим для угла $\vartheta_{\rm dM}$ следующее соотношение

$$\cosh\vartheta_{\rm dM}=\frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\rm M}}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\rm M}\cdot|\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_{\rm M}}=\frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\rm d}-d}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\rm d}^2-2d} \qquad (4.12)$$

Подставляя величину $(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\rm d}$, взятую из (4.11), мы получим

$$\cosh\vartheta_{\rm dM}=\frac{\mu_{\rm d}^d-d}{\mu_{\rm d}^2-2d}\approx 1+\frac{d}{\mu_{\rm d}^2},\qquad d\ll\mu_{\rm d}^2 \qquad (4.13)$$

Таким образом, $\vartheta_{\rm dM}\approx\sqrt{2d}/\mu_{\rm d}$. Это означает, что смежное звено расположено на конусе с углом $\sqrt{2d}/\mu_{\rm d}$, и вся линия $\mathcal{T}_{\rm br}(\sigma_{\rm d})$ имеет случайную форму, потому что каждое звено вихляет с характерным углом $\sqrt{2d}/\mu_{\rm d}$. Характерный угол вихляния зависит от дисторсии пространства-времени d и от массы частицы $\mu_{\rm d}$. Угол вихляния мал для частиц большой массы. Случайное смещение конца сегмента порядка $\mu_{\rm d}\vartheta_{\rm dM}=\sqrt{2d}$, т.е. того же порядка, что и толщина сегмента. Это вполне понятно, поскольку оба явления имеют одну и ту же причину – дисторсию D пространства-времени.

Следует заметить, что влияние геометрии пространства-времени на стохастичность движения частицы нелокально в том смысле, что вид мировой функции (4.2) для значений $\sigma_{\rm M}<\frac{1}{2}\mu_{\rm d}^2$ несущественен для стохастичности движения частицы массы $\mu_{\rm d}$.

Ситуация, когда мировая линия свободной частицы стохастична при детерминированной геометрии, и эта стохастичность зависит от массы частицы, кажется экзотичной и неправдоподобной. Но эксперименты показывают, что движение реальных частиц малой массы действительно стохастично, и эта стохастичность возрастает, если масса частицы уменьшается. С физической точки зрения теоретическое обоснование стохастичности желательно, и многие исследователи изобретают стохастические геометрии, некоммутативные геометрии и другие экзотические геометрические построения для того, чтобы получить квантовую стохастичность. Но в римановой геометрии пространства-времени свободное движение частицы не зависит от ее массы, и в рамках римановой геометрии пространства-времени трудно объяснить стохастичность свойствами пространства-времени. Геометрия $\mathcal{G}_{\rm d}$ с дисторсией непринужденно объясняет стохастичность и ее зависимость от массы частицы. Кроме того при надлежащем выборе дисторсии d статистическое описание стохастических мировых трубок $\mathcal{T}_{\rm br}$ приводит к квантовому описанию (уравнению Шредингера) [10]. Достаточно положить

$$d=\frac{\hbar}{2bc}, \qquad (4.14)$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c – скорость света и b есть некоторая универсальная постоянная, связывающая геометрическую массу μ с обычной массой

m частицы с помощью соотношения

$$m = b\mu \tag{4.15}$$

Другими словами, пространственно-временна́я геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ с дисторсией (4.2) ближе к реальной геометрии пространства-времени, чем геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$.

5 Статистическое описание случайных мировых трубок

Статистическое описание мировых линий не может быть вероятностным статистическим описанием, потому что число мировых линий может быть отрицательным. В самом деле, плотность мировых линий в окрестности пространственно-временно́й точки x определяется соотношением

$$dN = j^k dS_k \tag{5.1}$$

где dN есть поток мировых линий через пространственноподобную площадку dS_k. 4-вектор $j^k = j^k(x)$ описывает плотность мировых линий в окрестности точки x. Величина dN может быть интерпретирована как число мировых линий в окрестности точки x. Это число может быть отрицательным.

В нерелятивистском случае соотношение (5.1) превращается в соотношение

$$dN = j^0 dS_0 = \rho dV \tag{5.2}$$

где плотность частиц $j^0 = \rho \geq 0$, и ρ может служить основой для введения плотности вероятности. В релятивистском случае нельзя ввести плотность вероятности, потому что плотность мировых линий описывается 4-вектором j^k.

Для статистического описания случайных мировых линий мы используем динамическую концепцию статистического описания (ДКСО), которое не использует понятия плотности вероятности [11].

Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть стохастическая частица, состояние X которой описывается переменными $\left\{\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\}$, где $\mathbf{x}$ описывает положение частицы. Эволюция состояния частицы случайна, и не существует динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Эволюция состояния частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ содержит как регулярную, так и случайную составляющие. Для выделения регулярной составляющей мы рассмотрим множество (статистический ансамбль) $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ из многих одинаковых независимых случайных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Все случайные частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ стартуют из одного и того же состояния. Это означает, что все $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ приготовляются одним и тем же способом. Если число N таких частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ очень велико, случайные элементы эволюции компенсируют друг друга, а регулярные накапливаются. В пределе $N \to \infty$ статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ превращается в динамическую систему, чье состояние эволюционирует в соответствии с некоторыми динамическими уравнениями.

Пусть статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ классических детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ описывается действием $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}[\mathcal{S}_{\rm d}(P)]}$, где P суть параметры, описывающие $\mathcal{S}_{\rm d}$ (например, масса, заряд). Пусть под влиянием некоторого стохастического агента детерминированная частица $\mathcal{S}_{\rm d}$ превращается в стохастическую частицу $\mathcal{S}_{\rm st}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]}$ для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ приводится к действию $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm red}[\mathcal{S}_{\rm d}]}=\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]}$ для некоторого множества $\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ одинаковых взаимодействующих детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm red}[\mathcal{S}_{\rm d}]}$ как функционал от состояния детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ имеет вид $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}[\mathcal{S}_{\rm d}(P_{\rm eff})]}$, где параметры $P_{\rm eff}$ являются параметрами P детерминированной частицы $\mathcal{S}_{\rm d}$, усредненными по статистическому ансамблю, и это усреднение описывает взаимодействие частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ во множестве $\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$. Это означает, что

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]}=\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm red}[\mathcal{S}_{\rm d}(P)]}=\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}[\mathcal{S}_{\rm d}(P_{\rm eff})]} \tag{5.3}$$

Другими словами, стохастичность частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$ в ансамбле $\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ заменяется взаимодействием частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ в $\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$, и это взаимодействие описывается заменой

$$P\rightarrow P_{\rm eff} \tag{5.4}$$

в действии $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}[\mathcal{S}_{\rm d}(P)]}$.

Свободная частица имеет единственных параметр – свою массу m, и действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm d}}$ для свободной детерминированной частицы имеет вид

$$\mathcal{S}_{\rm d}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm d}}\left[\mathbf{x}\right]=\int\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^{2}dt \tag{5.5}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t\right)=\left\{x^{1}\left(t\right),x^{2}\left(t\right),x^{3}\left(t\right)\right\}$, а время t является независимой переменной.

Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}[\mathcal{S}_{\rm d}(P)]}$ для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ свободных детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}[\mathcal{S}_{\rm d}]}\left[\mathbf{x}\right]=\int\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^{2}dtd\boldsymbol{\xi} \tag{5.6}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)=\left\{x^{1}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right),x^{2}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right),x^{3}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)\right\}$. Независимые переменные $\boldsymbol{\xi}=\left\{\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3}\right\}$ маркируют элементы $\mathcal{S}_{\rm d}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$. Переменные $\boldsymbol{\xi}$ известны как лагранжевы координаты. Статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ есть непрерывная динамическая система, имющая бесконечное число степеней свободы, тогда как частица $\mathcal{S}_{\rm d}$ есть дискретная динамическая система, имеющая шесть степеней свободы.

Если частицы стохастические, действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]}$ для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ свободных квантово-стохастических частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^{2}+\frac{m}{2}\mathbf{u}^{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}dtd\boldsymbol{\xi} \tag{5.7}$$

где $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ есть векторная функция от аргументов $t,\mathbf{x}$ (а не от $t,\boldsymbol{\xi}$), и $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ есть векторная функция от независимых переменных $t,\boldsymbol{\xi}$. 3-вектор $\mathbf{u}$ описывает среднее значение стохастической составляющей движения частицы, которое является функцией переменных $t,\mathbf{x}$. Первый член $\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2$ описывает энергию регулярной составляющей движения стохастической частицы. Второй член $m\mathbf{u}^2/2$ описывает энергию случайной составляющей скорости. Составляющие $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и $\mathbf{u}$ полной скорости связаны с разными степенями свободы, и их энергии должны быть представлены в виде суммы в выражении для плотности функции Лагранжа. Последний член $-\hbar\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}/2$ описывает взаимодействие между регулярной составляющей $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и случайной $\mathbf{u}$. Заметим, что $m\mathbf{u}^2/2$ является функцией от $t,\mathbf{x}$. Она влияет на регулярную составляющую $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ как потенциальная энергия $U(t,\mathbf{x},\nabla\mathbf{x})=-m\mathbf{u}^2/2$, порожденная случайной составляющей.

Динамическая система (5.7) является статистическим ансамблем, потому что плотность функции Лагранжа в действии (5.7) не зависит явно от $\boldsymbol{\xi}$, и мы можем представить действие для отдельной системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{st}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{st}}}[\mathbf{x},\mathbf{u}]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}dt \tag{5.8}$$

К сожалению, выражение для действия (5.8) является только символическим, потому что дифференциальный оператор $\boldsymbol{\nabla}=\{\partial/\partial x^\alpha\}$, $\alpha=1,2,3$ определен в непрерывной окрестности точки $\mathbf{x}$, а не для одной точки $\mathbf{x}$. Выражение (5.8) перестает быть символическим, если только $\hbar=0$. В этом случае последний член, содержащий $\boldsymbol{\nabla}$ обращается в ноль. Вариация действия (5.8) по $\mathbf{u}$ дает $\mathbf{u}=0$, и действие (5.8) совпадает с действием (5.6) для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Если $\hbar\neq 0$, выражение для действия (5.8) не является хорошо определенным, и динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ не существуют.

Динамическое уравнение для $\mathbf{u}$ получается из функционала действия (5.7) с помощью вариации по $\mathbf{u}$. Если квантовая постоянная $\hbar=0$, то из динамического уравнения для $\mathbf{u}$ следует, что $\mathbf{u}=0$, и действие (5.7) приводится к виду (5.6). В общем случае $\hbar\neq 0$ мы должны перейти к независимым переменным $\mathbf{x}$ потому что $\mathbf{u}$ является функцией от $t,\mathbf{x}$. Мы получаем вместо (5.7)

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\mathbf{x},\mathbf{u}]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}\rho\, dt\, d\mathbf{x} \tag{5.9}$$

$$\rho=\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}=\left(\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}\right)^{-1} \tag{5.10}$$

Вариация (5.10) по $\mathbf{u}$ дает

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta\mathbf{u}}=m\rho\mathbf{u}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho=0 \tag{5.11}$$

Разрешая динамическое уравнение (5.11) относительно $\mathbf{u}$ в виде

$$\mathbf{u} = -\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho \tag{5.12}$$

можно исключить среднюю стохастическую скорость $\mathbf{u}$ из действия (5.9). Получаем вместо (5.9)

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\mathbf{x}\right] = \int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 - U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right)\right\}\rho dt d\mathbf{x} \tag{5.13}$$

где

$$\rho U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right) = -\frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho} - \frac{\hbar^2}{4m}\rho\boldsymbol{\nabla}^2\ln\rho \tag{5.14}$$

и ρ определяется выражением (5.10). Исключая дивергенцию, получаем вместо (5.14)

$$U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right) = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{4m}\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}^2\rho \tag{5.15}$$

Последний член в (5.15) не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Действие (5.13) превращается в

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\boldsymbol{\xi}\right] = \int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2}\right\}\rho dt d\mathbf{x} \tag{5.16}$$

где переменные $t, \mathbf{x}$ являются независимыми переменными, а переменные $\boldsymbol{\xi}$ рассматриваются как зависимые переменные. Величины ρ и $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ являются функциями производных от зависимых переменных $\boldsymbol{\xi}$ по t и $\mathbf{x}$

$$\rho = \frac{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)} \tag{5.17}$$

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial\left(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)} = \rho^{-1}\frac{\partial\left(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(t, x^1, x^2, x^3\right)}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{5.18}$$

Динамические уравнения, порожденные действием (5.16), довольно сложны. Однако, в терминах волновой функции, действие (5.16) принимает более простой вид [12].

В терминах двухкомпонентной волновой функции ψ

$$\psi = \left\{\psi_1, \psi_2\right\}, \qquad \psi^* = \left\{\begin{array}{c}\psi_1^* \\ \psi_2^*\end{array}\right\}, \qquad \rho \equiv \psi^*\psi \equiv \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2, \tag{5.19}$$

действие (5.18) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right] \quad : \qquad & \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\psi, \psi^*\right] = \int\left\{\frac{ib_0}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi\right) - \frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi\right. \\ & \left. + \frac{b_0^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}\left(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\right)^2\rho + \frac{b_0^2 - \hbar^2}{8\rho m}\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2\right\}dt d\mathbf{x},\end{aligned} \tag{5.20}$$

где

$$s_\alpha \equiv \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{5.21}$$

и σ_α суть матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

Здесь постоянная b_0 является произвольной постоянной. Переход от действия (5.16) к действию (5.20) с помощью замены переменных сопровождается интегрированием динамических уравнений и появлением трех произвольных функций $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \{g^1(\boldsymbol{\xi}), g^2(\boldsymbol{\xi}), g^3(\boldsymbol{\xi})\}$.

Замена переменных, связывающая зависимые переменные $\boldsymbol{\xi}$ и ψ, имеет вид (смотри Приложение А или [12])

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u_\alpha^*(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.23}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha^*\psi_\alpha, \tag{5.24}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Величины $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, ...n$ являются функциями только переменных $\boldsymbol{\xi}$ и удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \xi_\beta}u_\alpha\right) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}), \qquad \beta = 1, 2, 3, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^* u_\alpha = 1. \tag{5.25}$$

Здесь φ есть новая зависимая переменная, возникшая из фиктивной временнóй лагранжевой координаты ξ_0, а b_0 есть произвольная постоянная. Число n есть такое натуральное число, что уравнения (5.25) допускают решение. Вообще говоря, n зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\boldsymbol{\xi})\}$, $\beta = 1, 2, 3$.

Смысл волновой функции ψ не ясен, и интерпретация производится на основе действия (5.9) или (5.16), где смысл всех величин ясен. Действие (5.9) описывает течение некоторой жидкости с плотностью ρ, определяемой соотношением (5.10), и с плотностью потока

$$\mathbf{j} = \rho\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{5.26}$$

В терминах волновой функции ψ эти величины имеют вид

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad \mathbf{j} = -\frac{ib_0}{2m}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \psi\right) \tag{5.27}$$

Функции $\mathbf{g}$ определяют завихренность течения жидкости. Если $\mathbf{g} = 0$, уравнения (5.25) имеют решение $u_1 = 1$, $u_\alpha = 0$, $\alpha = 2, 3, ...n$. В этом случае функция ψ может иметь один компонент (остальные обращаются в нуль), и течение жидкости потенциальное. Функция ψ имеет вид

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}, \qquad \psi^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi} \tag{5.28}$$

и скорость жидкости

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \boldsymbol{\nabla}\frac{b_0\varphi}{m} \tag{5.29}$$

имеет потенциал $b_0\varphi/m$.

В частном случае потенциального течения жидкости

$$s_\alpha \equiv \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho} = \text{const}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{5.30}$$

и действие (5.20) превращается действие

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\mathrm{q}}[\psi,\psi^*] = \int\left\{\frac{ib_0}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi\right) - \frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi + \frac{b_0^2-\hbar^2}{8\rho m}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2\right\}dtd\mathbf{x}, \tag{5.31}$$

Если выбрать произвольную постоянную b_0 в виде $b_0 = \hbar$, действие (5.31) превращается в действие

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\mathrm{q}}[\psi,\psi^*] = \int\left\{\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi\right\}dtd\mathbf{x}, \tag{5.32}$$

имеющее уравнение Шредингера

$$i\hbar\partial_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi \tag{5.33}$$

в качестве динамического уравнения. Выражения (5.27) для плотности частиц и плотности тока частиц превращаются в традиционные выражения

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad \mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi\right) \tag{5.34}$$

Интерпретация всех величин получается на основе того факта, что квантовое описание в терминах уравнения Шредингера есть частный случай статистического описания в терминах статистического ансамбля (5.7).

Можно ли получить статистический ансамбль (5.7) из статистического ансамбля (5.6) с помощью замены $m \to m_{\text{eff}}$? Да, это возможно, если представить нерелятивистское действие (5.6) как нерелятивистское приближение

$$\mathcal{E}_\mathrm{d}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_\mathrm{d}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]}[\mathbf{x}] = \int\left\{-mc^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right\}dtd\boldsymbol{\xi} \tag{5.35}$$

релятивистского действия

$$\mathcal{E}_\mathrm{d}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_\mathrm{d}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]}[\mathbf{x}] = -\int mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2}dtd\boldsymbol{\xi} \tag{5.36}$$

Действие (5.7) получается из действия (5.35) как результат замены

$$m \to m_{\text{eff}} = m\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2c^2} + \frac{\hbar}{2mc^2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right) \tag{5.37}$$

Практически замена производится только в первом члене действия (5.35), потому что замена во втором члене дает дополнительный член порядка c^{-2}, который мал в нерелятивистском приближении. Другой вариант замены в действии (5.35) имеет вид

$$m \to m_{\text{eff}} = m\left(1 - \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}^2\rho\right) \tag{5.38}$$

или

$$m \to m_{\text{eff}} = m\left(1 + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2}\right) \tag{5.39}$$

Соотношение (5.38) получается из соотношения (5.37) после подстановки (5.12). Производя замену (5.39) в действии (5.35), получаем в нерелятивистском приближении действие (5.16).

В релятивистском случае вместо замены (5.37) получаем

$$m^2 \to m_{\text{eff}}^2 = m^2\left(1 + u_l u^l + \lambda\partial_l u^l\right), \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \tag{5.40}$$

где переменные $u^k = u^k(x) = u^k(t, \mathbf{x})$, $k = 0, 1, 2, 3$ являются новыми зависимыми переменными, описывающими среднее значение случайной составляющей 4-скорости частицы. Замена (5.40) в действии (5.36) для статистического ансамбля свободных релятивистских частиц приводит в конце концов к действию [13]

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{\hbar^2\partial_k\psi^*\partial^k\psi - m^2c^2\rho - \frac{\hbar^2}{4}(\partial_l s_\alpha)\left(\partial^l s_\alpha\right)\rho\right\} d^4x \tag{5.41}$$

где ψ есть двухкомпонентная волновая функция (5.23) - (5.25). Переменные ρ, s_α определяются соотношениями (5.27), (5.30), и кроме того постоянная $b_0 = \hbar$. Действие (5.41) является действием для статистического ансамбля свободных стохастических релятивистских частиц. В случае потенциального течения, когда волновая функция ψ может быть однокомпонентной, s_α =const, и динамическое уравнение для действия (5.41) представляет собой уравнение Клейна-Гордона.

$$\hbar^2\partial_k\partial^k\psi + m^2c^2\psi = 0 \tag{5.42}$$

6 Определение эффективной массы

Мы намерены показать, что замена (5.39) следует из вида мировой функции (4.2). На самом деле в работе [10] была решена обратная задача. Какой должна быть геометрия однородного пространства-времени, если статистическое описание свободных нерелятивистских частиц приводит к квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера? Решив эту задачу, мы получили мировую функцию (4.2). Сейчас мы покажем, что эффективная масса m_{eff} нерелятивистской частицы определяется соотношением (5.39).

Математический формализм теоретической физики приспособлен для работы в пространстве-времени Минковского. Математического формализма для работы в искаженном пространстве-времени V_{d} с мировой функцией (4.2) в настящее время еще нет. Мы вынуждены работать в пространстве-времени Минковского, используя традиционный формализм и принимая во внимание искажение пространства времени с помощью некоторых поправок.

Введем понятие приведенного вектора $\vec{p} = \vec{p}(a, P_0, P_1)$ как единства вещественного или мнимого числа a и двух точек $\{P_0, P_1\}$

$$\vec{p} = \vec{p}(a, P_0, P_1) = a\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right) = a\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \tag{6.1}$$

Число a назовем масштабом приведенного вектора. Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является частным случаем приведенного вектора $a\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ с масштабом $a = 1$. Скалярное произведение двух приведенных векторов $a_1\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $a_2\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$\left(a_1\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.a_2\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right) = a_1a_2\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right) \tag{6.2}$$

Рассмотрим статистический ансамбль релятивистских частиц, описываемый действием (5.36) с ориентированной массой m_{o}, определенной соотношением

$$m_{\text{o}} = b\mu_{\text{o}}, \qquad \mu_{\text{o}} = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\vec{u}\left(R\right)\right) \tag{6.3}$$

где $\vec{u} = \vec{u}(R)$ есть единичный приведенный вектор 4-скорости в точке $R \in \mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ есть вектор импульса, деленный на скорость света c. Величина m_{o} называется ориентированной массой, потому что она зависит от взаимной ориентации векторов импульса и 4-скорости. Ориентированная масса имеет разный знак для частицы и античастицы.

4-скорость $\vec{u} = \vec{u}(R)$ является единичным приведенным вектором внутри сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ в пространстве-времени V_{d}

$$\vec{u}\left(R\right) = \left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_{\text{d}}^{-1}\mathbf{P}_0\mathbf{R} = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_{\text{d}}^{-1/2}\mathbf{P}_0\mathbf{R}, \qquad R \in \mathcal{T}_{[P_0P_1]} \tag{6.4}$$

$$\left(\vec{u}\left(R\right).\vec{u}\left(R\right)\right)_{\text{d}} = 1 \tag{6.5}$$

Масса частицы, определенная соотношением (6.3), различна в V_{d} и в V_{M}. Поскольку $R \in \mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ и, следовательно, $\mathbf{P}_0\mathbf{R} \uparrow\uparrow_{\text{d}} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_{\text{d}} = \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\text{d}} \cdot \left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_{\text{d}}, \tag{6.6}$$

получаем для m_{od}

$$\begin{aligned} m_{\text{od}} &= b\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\vec{u}\left(R\right)\right)_{\text{d}} = b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_{\text{d}}^{-1}\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_{\text{d}} \\ &= b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_{\text{d}}^{-1} \cdot \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\text{d}} \cdot \left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_{\text{d}} = b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\text{d}} = b\mu_{\text{d}} \end{aligned} \tag{6.7}$$

где b есть постоянная, определенная соотношением (4.15).

Если точка R на сегменте $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ не слишком близка к концам P_0 и P_1, (т.е. $|\mathbf{P}_0\mathbf{R}|_{\rm d}^2 > 2\sigma_0$, $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\rm d}^2 > 2\sigma_0$) и выполняется соотношение (4.7), получаем для ориентированной массы $m_{\rm oM}$ в $V_{\rm M}$

$$\begin{aligned} m_{\rm oM} &= b\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\vec{u}\left(R\right)\right)_{\rm M} = b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_{\rm d}^{-1}\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_{\rm M} \\ &= b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_{\rm d}^{-1}\left(\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_{\rm d} - 2d\right) \\ &= b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\rm d} - 2db\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_{\rm d}^{-1} = b\mu_{\rm d} - \frac{2bd}{\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_{\rm d}} \end{aligned} \tag{6.8}$$

Таким образом, масса частицы $m_{\rm oM}$, определенная соотношением (6.3) и вычисленная в $V_{\rm M}$ зависит от точки R на поверхности сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. В действии (5.36) используется некоторая эффективная масса $m_{\rm eff}$, вычисленная в соответствии с (6.8) в пространстве-времени Минковского $V_{\rm M}$ с помощью соотношения

$$m_{\rm eff} = b\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\vec{u}_{\rm eff}\right)_{\rm M} \tag{6.9}$$

где приведенный вектор $\vec{u}_{\rm eff}$ является средней 4-скоростью внутри сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$.

Пусть точка P является центром сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, как это показано на рис. 1. Точки P' и P'' являются центрами сегментов $\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$, $\mathcal{T}_{[P_0''P_1'']}$, смежных мировых трубок статистического ансамбля. Рассмотрим нерелятивистский случай. Тогда векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0'\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{P}_0''\mathbf{P}_1''$ можно считать параллельными в $V_{\rm M}$. Пусть сегменты $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, $\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$, $\mathcal{T}_{[P_0''P_1'']}$ расположены таким образом, что $P \in \mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$, $P \in \mathcal{T}_{[P_0''P_1'']}$. 4-скорость сегмента $\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$, определяемая вектором $\mathbf{P}_0'\mathbf{P}$, и 4-скорость сегмента $\mathcal{T}_{[P_0''P_1'']}$, определяемая вектором $\mathbf{P}_0''\mathbf{P}$, дают вклад в эффективную 4-скорость $\vec{u}_{\rm eff}$ сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Поместим начало приведенного вектора эффективной 4-скорости $\vec{u}_{\rm eff}$ в точку P. Пусть пространственное расстояние между точками P, P' и P, P'' равно l. В соответствии с соотношением (4.8) получаем

$$l = \sqrt{-\left|\mathbf{PP}'\right|^2} = \sqrt{-\left|\mathbf{PP}''\right|^2} = r\left(0.5\right) = \sqrt{\frac{3d}{2}} = \sqrt{\frac{3\hbar}{4bc}} \tag{6.10}$$

Выберем систему координат с началом в точке P и с временно́й осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. В этой системе координат в пространстве-времени $V_{\rm M}$ ковариантные компоненты вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ имеют вид

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right)_k = \{\mu_{\rm d}c, 0, \} \tag{6.11}$$

Контравариантные компоненты 4-скорости сегмента $\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$ имеют вид

$$u^k = \left\{u^0, \mathbf{u}\right\} = \left\{\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}, -\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}\right\}, \qquad \mathbf{v} = -\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\rm d}}c \tag{6.12}$$

где $\mathbf{x}$ суть пространственные координаты точки P'. Эффективная 4-скорость в точке P представляет собой сумму вкладов всех сегментов $\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$

$$u_{\text{eff}}^0 = A\int \rho\left(\mathbf{x}\right)\delta\left(l^2-\mathbf{x}^2\right)u^0\left(\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}, \tag{6.13}$$

$$l=\sqrt{\frac{3\hbar}{4bc}} \tag{6.14}$$

$$\mathbf{u}_{\text{eff}} = A\int \rho\left(\mathbf{x}\right)\delta\left(l^2-\mathbf{x}^2\right)\mathbf{u}\left(\mathbf{x}\right)d\mathbf{x} = -A\int \frac{\rho\left(\mathbf{x}\right)\delta\left(l^2-\mathbf{x}^2\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\text{d}}}\right)^2}}\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\text{d}}}d\mathbf{x} \tag{6.15}$$

где величина ρ есть плотность мировых трубок в статистическом ансамбле, а величина A определяется из условия нормировки приведенного вектора $\vec{u}_{\text{eff}}\left(P\right)$

$$c^2\left(u_{\text{eff}}^0\right)^2-\mathbf{u}_{\text{eff}}^2=1 \tag{6.16}$$

Предполагая, что $\rho\left(\mathbf{x}\right)$ изменяется медленно и разлагая $\rho\left(\mathbf{x}\right)$ в ряд по степеням $\mathbf{x}$, получаем из (6.13), (6.15)

$$u_{\text{eff}}^0 = A\int \frac{\rho}{c\sqrt{1-\left(\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\text{d}}}\right)^2}}\delta\left(l^2-\mathbf{x}^2\right)d\mathbf{x} = \frac{2\pi A\rho l}{c\sqrt{1-\left(\frac{2l}{\mu_{\text{d}}}\right)^2}} \tag{6.17}$$

$$\mathbf{u}_{\text{eff}} = -A\int \frac{\left(\mathbf{x}\boldsymbol{\nabla}\right)\rho}{\sqrt{1-\left(\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\text{d}}}\right)^2}}\delta\left(l^2-\mathbf{x}^2\right)\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\text{d}}}cd\mathbf{x} = -\frac{4\pi A l^3\boldsymbol{\nabla}\rho}{3\mu_{\text{d}}\sqrt{1-\left(\frac{2l}{\mu_{\text{d}}}\right)^2}} \tag{6.18}$$

где ρ есть значение плотности в точке P. Подставляя (6.17), (6.18) в (6.16) и используя (6.14), получаем

$$A=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{2l}{\mu_{\text{d}}}\right)^2}}{2\pi l\rho\sqrt{1-\left(\frac{\hbar}{2m_{\text{d}}c}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2}} \tag{6.19}$$

Подставляя (6.19) в (6.17), получаем

$$u_{\text{eff}}^0=\frac{1}{c\sqrt{1-\left(\frac{\hbar}{2m_{\text{d}}c}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2}} \tag{6.20}$$

Из соотношений (6.9), (6.11) и (6.20) следует

$$m_{\text{eff}}=m_{\text{d}}cu_{\text{eff}}^0=m_{\text{d}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\hbar}{2m_{\text{d}}c}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2}}=m_{\text{d}}\left(1+\frac{\hbar^2}{8m_{\text{d}}^2c^2}\left(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2\right) \tag{6.21}$$

Этот результат совпадает с соотношением (5.39).

Мы допускаем, что существуют другие методы расчета величины m_{eff}, которые дают другой результат. В этом случае следует выбрать другую мировую функцию пространства-времени V_{d}, которая приводит к результату (6.21), потому что мы знаем, что эффективная масса, определяемая соотношением (6.21) согласуется с экспериментальными данными. Мы знаем о геометрии искаженного пространства-времени только то, что оно порождает стохастическое движение свободных частиц. Информация о его мировой функции получается из требования, чтобы мировая функция приводила к эффективной массе, определяемой соотношением (6.21).

Дальнейшее развитие статистического описания геометрической стохастичности приводит к созданию модельной концепции квантовых явлений (МККЯ), которая относится к традиционной теории квантовых явлений примерно так же, как статистическая физика относится к аксиоматической термодинамике. МККЯ является хорошо определенной релятивистской концепцией с эффективными методами исследования [14], тогда как традиционная квантовая теория не является хорошо определенной, так как она использует неправильную геометрию пространства-времени. Неправильность геометрии компенсируется дополнительными гипотезами (принципами квантовой механики). Кроме того имеются проблемы с применением формализма нерелятивистской квантовой механики к релятивистским явлениям.

Геометрия $\mathcal{G}_{\text{d}}$ так же однородна, как геометрия Минковского, потому что мировая функция σ_{d} инвариантна относительно всех преобразований координат, относительно которых инвариантна мировая функция σ_{M}. В этой связи возникает вопрос, нельзя ли придумать аксиоматику для $\mathcal{G}_{\text{d}}$ и получить геометрию $\mathcal{G}_{\text{d}}$ из этой аксиоматики с помощью надлежащих логических рассуждений. Заметим, что такая аксиоматика должна зависеть от параметра d, потому что мировая функция σ_{d} зависит от этого параметра. Если $d = 0$, эта аксиоматика совпадает с аксиоматикой геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\text{M}}$. Если $d \neq 0$, эта аксиоматика не может совпадать с аксиоматикой геометрии $\mathcal{G}_{\text{M}}$, потому что некоторые аксиомы геометрии $\mathcal{G}_{\text{M}}$ не выполняются в этом случае.

Вообще говоря, изобретение аксиоматики, зависящей от параметра d и в общем случае от функции дисторсии D, представляется очень трудной задачей. Кроме того, зачем изобретать аксиоматику? Мы получили аксиоматику для собственно евклидовой геометрии, которая была построена раньше. Нет необходимости повторять этот процесс всякий раз, когда мы строим новую геометрию. Достаточно применить принцип деформации к уже построенной евклидовой геометрии, записанной в σ-имманентном виде. Применение принципа деформации к евклидовой геометрии – это очень простая и очень общая поцедура, которая не ограничена условиями непрерывности, выпуклости и другими искусственными ограничениями, порожденными предвзятым подходом к физической геометрии (Предвзятость подхода заключается в априорном допущении об одномерности прямой линии в любой физической геометрии, которое напоминает утверждение древних египтян, что все реки текут на север).

Итак, мы видим, что невырожденность физической геометрии так же как неодномерность прямой линии являются свойствами реальных физических геометрий. Собственно евклидова геометрия является основой для всех физических геометрий, и она вырождена полностью. Однако, это не причина для отрицания существования невырожденных физических геометрий.

Таким образом, принцип деформации вместе с σ-имманентным описанием оказывается очень эффективным математическим инструментом для построения физических геометрий.

1. Принцип деформации использует результаты, полученные при построении собственно евклидовой геометрии и не добавляет каких-нибудь дополнительных предположений о свойствах геометрических объектов.

2. Принцип деформации использует только действительную характеристику физической геометрии – ее мировую функцию и не использует каких-нибудь дополнительных средств описания.

3. Принцип деформации очень прост и позволяет исследовать только ту часть геометрии, которая нам интересна.

4. Применение принципа деформации позволяет получить истинную геометрию пространства-времени, неожиданные свойства которой не могут быть получены при традиционном подходе к физической геометрии.

Приложение A. Преобразование действия для статистического ансамбля.

Чтобы преобразвать действие (5.16) к описанию в терминах волновой функции, перепишем его в виде

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]}\left[\mathbf{x}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^{2}-\frac{\hbar^{2}}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^{2}}{\rho^{2}}\right\}dtd\boldsymbol{\xi} \tag{A.1}$$

где

$$\rho=\frac{\partial\left(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3}\right)}{\partial\left(x^{1},x^{2},x^{3}\right)}=\left(\frac{\partial\left(x^{1},x^{2},x^{3}\right)}{\partial\left(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3}\right)}\right)^{-1} \tag{A.2}$$

Введем независимую переменную ξ_0 вместо переменной $t=x^0$ и перепишем действие (A.1) в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]}\left[x\right]=\int\left\{\frac{m\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\alpha}}{2\dot{x}^{0}}-\frac{\hbar^{2}}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^{2}}{\rho^{2}}\right\}d^{4}\xi, \qquad \dot{x}^{k}\equiv\frac{\partial x^{k}}{\partial\xi_{0}} \tag{A.3}$$

где $\xi=\{\xi_0,\boldsymbol{\xi}\}=\{\xi_k\}$, $k=0,1,2,3$, $x=\left\{x^k\left(\xi\right)\right\}$, $k=0,1,2,3$. Здесь и далее производится суммирование по повторяющимся греческим индексам $(1-3)$.

Будем рассматривать переменные $\xi = \xi(x)$ в (A.3) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. Пусть якобиан

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det ||\xi_{i,k}||, \qquad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i, \qquad i,k = 0,1,2,3 \qquad (A.4)$$

рассматривается как полилинейная функция от переменных $\xi_{i,k}$. Тогда

$$d^4\xi = J d^4 x, \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0} \equiv \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}, \qquad i = 0,1,2,3 \quad (A.5)$$

После преобразования к зависимым переменным ξ Действие (A.3) принимает вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{st}[\mathcal{S}_{st}]}[\xi] = \int \left\{ \frac{m}{2}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\right)^{-1} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho} \right\} d^4x, \qquad (A.6)$$

Здесь зависимая переменная ξ_0 фиктивна.

Введем новые переменные

$$j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad k = 0,1,2,3, \qquad \rho = j^0 \qquad (A.7)$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{st}[\mathcal{S}_{st}]}[\xi, j, p] = \int \left\{ \frac{m}{2}\frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho} + p_k\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} - j^k\right)\right\} d^4x, \qquad (A.8)$$

Здесь и далее производится суммирование $(0-3)$ по повторяющимся латинским индексам.

Заметим, что в соответствии с (A.5), соотношения (A.7) могут быть записаны в виде

$$j^k = \left\{ \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}, \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\left(J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}}\right)\left(J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\right)^{-1}\right\} = \left\{\rho, \rho\frac{dx^\alpha}{dt}\right\}, \qquad \rho \equiv \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \quad (A.9)$$

Из (A.9) очевидно, что j^k есть 4-поток частиц, причем $j^0 = \rho$ является плотностью частиц.

Вариация действия (A.8) по ξ_i дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{st}[\mathcal{S}_{st}]}}{\delta \xi_i} = -\partial_l\left(p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}}\right) = -\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}}\partial_l p_k = 0, \qquad i = 0,1,2,3 \qquad (A.10)$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}}\right) \qquad (A.11)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}}\xi_{k,l} \equiv J\delta_k^i, \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{A.12}$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение линейных уравнений (A.10) имеет вид

$$p_k = \frac{b_0}{2}\left(\partial_k \varphi + g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_k \xi_\alpha\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{A.13}$$

где $b_0 \neq 0$ есть произвольная постоянная, $g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть произвольные функции переменных $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Именно это концептуальное интегрирование позволяет ввести волновую функцию. Подставим (A.13) в (A.8). Член вида $\partial_k\varphi\partial J/\partial\xi_{0,k}$ приводится к якобиану и не дает вклада в динамическое уравнение. Члены вида $\xi_{\alpha,k}\partial J/\partial\xi_{0,k}$ обращаются в нуль в силу тождеств (A.12). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]}\left[\varphi, \boldsymbol{\xi}, j\right] = \int \left\{\frac{m}{2}\frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0} - j^k p_k - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho}\right\} d^4x, \qquad j^0 = \rho \tag{A.14}$$

где величины p_k определяются соотношениями (A.13)

Варьирование действия (A.14) по j^k дает

$$p_0 = -\frac{m}{2}\frac{j^\alpha j^\alpha}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2} + 2\boldsymbol{\nabla}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)}{\rho}\right) \tag{A.15}$$

$$p_\beta = m\frac{j^\beta}{\rho}, \qquad \beta = 1, 2, 3 \tag{A.16}$$

Исключим теперь переменные $\mathbf{j} = \{j^1, j^2, j^3\}$ из действия (A.14), используя соотношение (A.16). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]}\left[\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}\right] = \int \left\{-p_0 - \frac{p_\beta p_\beta}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2}\right\}\rho d^4x, \tag{A.17}$$

где величины p_k определяются соотношением (A.13).

Теперь вместо зависимых переменных $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$ введем n-компонентную комплексную функцию ψ, определив ее соотношениями (5.23) – (5.25)

Функция ψ следующим образом построена из переменной φ, плотности жидкости ρ и лагранжевых координат $\boldsymbol{\xi}$, рассматриваемых как функции от $(t, \mathbf{x})$, [12]. n-компонентная комплексная функция $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ определяется соотношениями

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u_\alpha^*(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{A.18}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{n}\psi_\alpha^*\psi_\alpha, \tag{A.19}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Величины $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ суть функции только переменных $\boldsymbol{\xi}$, и удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \xi_\beta}u_\alpha\right) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}), \qquad \beta = 1, 2, 3, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^* u_\alpha = 1. \tag{A.20}$$

Число n есть такое натуральное число, что уравнения (A.20) допускают решение. Вообще говоря, n зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\boldsymbol{\xi})\}$, $\beta = 1, 2, 3$. Функции $\mathbf{g}$ определяют завихренность течения жидкости.

Легко проверить, что

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad \rho p_0\,(\varphi, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) \tag{A.21}$$

$$\rho p_\alpha\,(\varphi, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_\alpha\psi - \partial_\alpha\psi^*\cdot\psi), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{A.22}$$

Вариационная проблема с функционалом действия (A.17) оказывается эквивалентной вариационной проблеме с функционалом действия

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\psi, \psi^*] = \int\left\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi)\right.$$
$$\left. + \frac{b_0^2}{8m\rho}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)^2 - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho}\right\}\mathrm{d}^4x. \tag{A.23}$$

Мы надеемся, что в случае $n = 2$ уравнения (A.20) имеют решение для любых функций $\mathbf{g}$, потому что в этом случае число (четыре) вещественных составляющих функции ψ совпадает с числом гидродинамических переменных j^k ($k = 0, 1, 2, 3$). (Однако, это утверждение пока не доказано). Для двухкомпонентной функции ψ ($n = 2$) выполняются следующие тождества

$$(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2 - (\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)^2 \equiv 4\rho\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \rho^2\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2\,, \tag{A.24}$$

$$\rho \equiv \psi^*\psi, \qquad s \equiv \frac{\psi^*\boldsymbol{\sigma}\psi}{\rho}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_\alpha\}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{A.25}$$

где σ_α суть матрицы Паули. В силу тождества (A.24) действие (A.23) приводится к виду

$$\mathcal{E}_{\rm st}\,[\mathcal{S}_{\rm st}] \quad : \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]}\,[\psi, \psi^*] = \int\left\{\frac{ib_0}{2}\,(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi\right.$$
$$\left. + \frac{b_0^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2\rho + \frac{b_0^2 - \hbar^2}{8\rho m}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2\right\}d^4x, \tag{A.26}$$

где $\mathbf{s}$ и ρ определяются соотношениями (A.25). Таким образом, мы доказали соотношение (5.20).

Список литературы

[1] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung die Mathematik im 19. Jahrhundert* teil 1, Berlin, Springer 1926.

[2] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* 7 Auflage, ed. B.G.Teubner, Leipzig, Berlin, 1930.

[3] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960..

[4] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (available at http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002).

[5] Yu. A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).

[6] Yu. A. Rylov, Asymmetric nondegenerate geometry. (In preparation, available at http://arXiv.org/abs/math.MG/0205061).

[7] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).

[8] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[9] Yu. A. Rylov, Deformation principle and problem of parallelism in geometry and physics. *(*In preparation, available at http://arXiv.org/abs/ math.GM /0210413)

[10] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[11] Yu. A. Rylov, Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0210003).

[12] Yu. A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).

[13] Yu. A. Rylov, Classical description of pair production. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0301020).

[14] Yu. A. Rylov, Model conception of quantum phenomena: logical structure and investigation methods. (In preparation, available at http://arXiv.org/abs /physics/0310050, v2).