Дискриминационные свойства компактификации в дискретном однородном и изотропном пространстве-времени

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, Москва 119526, Проспект Вернадского 101-1.
e-mail: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Рассматривается компактификация 5-мерной пространственно-временной геометрии Калуцы-Клейна. Предполагается, что геометрия пространства-времени дискретна, однородна и изотропна. Показывается, что рассмотрение геометрии пространства-времени как физической геометрии, т.е. геометрии полностью описываемой однозначной мировой функцией, приводит к дискриминации некоторых значений заряда частицы (составляющей импульса вдоль пятого направления). При традиционном подходе, когда мировая функция становится многозначной после компактификации, значения электрического заряда элементарной частицы остаются неограниченными, и это обстоятельство не согласуется с экспериментальными данными. Важно, что дискретная геометрия задается на континуальном множестве точек. Это обстоятельство делает возможным совмещение дискретности с однородностью и изотропностью геометрии.

1 Введение

Роль геометрии пространства-времени в описании физических явлений в микромире возросла из-за появления более общей концепции геометрии. В двадцатом веке риманова геометрия рассматривалась как наиболее общая геометрия, пригодная для описания пространства-времени. Однако, риманова геометрия не может описывать такие свойства пространства-времени как дискретность, ограниченная делимость геометрических объектов и дискретные характеристики элементарных частиц (таких как масса, заряд, угловой момент). Дискретные характеристики элементарных частиц рассматриваются обычно как динамические свойства элементарных частиц.

На самом деле, при правильной концепции геометрии пространства-времени сами элементарные частицы так же как их свойства и их динамика могут рассматриваться в терминах подходящей геометрии пространства-времени и только в терминах этой геометрии. Традиционная концепция геометрии, предполагающая, что любая геометрия аксиоматизируема и может быть выведена из системы аксиом, оказывается ошибочной. В любой аксиоматизируемой геометрии отношение эквивалентности предполагается транзитивным. Только при транзитивном отношении эквивалентности множество всех геометрических утверждений (т.е. геометрия) могут быть выведены из аксиоматики (конечного множества базовых геометрических утверждений).

В конце двадцатого века был придуман новый метод построения физической геометрии [1]. Физическая геометрия является такой геометрией, которая полностью описывается мировой функцией σ. Мировая функция $\sigma(P,Q)$ является однозначной функцией любых двух точек $P,Q\in\Omega$, где Ω есть множество всех точек (или событий), на котором задана геометрия.

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P)=0, \qquad \forall P\in\Omega \tag{1.1}$$

Мировая функция $\sigma(P,Q)=\frac{1}{2}\rho^2(P,Q)$, где $\rho(P,Q)$ есть расстояние между точками P и Q.

С одной стороны собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является аксиоматизируемой геометрией, которая может быть выведена из евклидовой аксиоматики [2]. С другой стороны, собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является физической геометрией. Это означает, что все определения $\mathcal{D}_{\mathrm{E}}$ геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ могут быть выражены в терминах евклидовой мировой функции в виде $\mathcal{D}_{\mathrm{E}}=\mathcal{D}_{\mathrm{E}}[\sigma_{\mathrm{E}}]$. Существует теорема, в которой доказывается это утверждение [3, 1]. Если теперь заменить евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией σ некоторой другой физической геометрии $\mathcal{G}$ во всех определениях $\mathcal{D}_{\mathrm{E}}:\mathcal{D}_{\mathrm{E}}[\sigma_{\mathrm{E}}]\rightarrow\mathcal{D}_{\mathrm{E}}[\sigma]$, то получатся все определения $\mathcal{D}_{\mathrm{E}}[\sigma]$ физической геометрии $\mathcal{G}$. Процедура замены представляет собой деформацию собственно евклидовой геометрии, когда евклидово расстояние $\rho_{\mathrm{E}}=\sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}}$ заменяется расстоянием $\rho=\sqrt{2\sigma}$ физической геометрии $\mathcal{G}$. Таким образом, любая физическая геометрия получается из собственно евклидовой геометрии с помощью деформации.

Вообще говоря, физическая геометрия на аксоматизируема, потому что аксиоматизация геометрии возможна только, если отношение эквивалентности транзитивно. В самом деле, в собственно евклидовой геометрии вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяется как упорядоченное множество $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1=\{P_0,P_1\}$ из двух точек P_0, P_1. Эквивалентность (равенство) двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется двумя соотношениями. Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$), если

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)=|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|\cdot|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|\wedge|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|=|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{1.2}$$

где скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1)+\sigma(P_1, Q_0)-\sigma(P_0, Q_0)-\sigma(P_1, Q_1), \quad \forall P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega \tag{1.3}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = 2\sigma(P_0, P_1) \tag{1.4}$$

а σ означает мировую функцию собственно евклидовой геометрии. Первое соотношение (1.2) описывает параллельность векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, тогда как второе соотношение описывает равенство их длин. Определение эквивалентности содержит только точки P_0, P_1, Q_0, Q_1, определяющие векторы и мировую функцию между этими точками. Определение не содержит ссылки на систему координат и на размерность собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Это чисто геометрическое определение, которое не содержит ссылки на средства описания. В собственно евклидовой геометрии определение (1.2) эквивалентности совпадает с традиционным определением скалярного произведения на основе линейного векторного пространства. Отношение эквивалентности (1.2) транзитивно в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, и эта транзитивность является специальным свойством собственно евклидовой геометрии.

В произвольной физической геометрии $\mathcal{G}$ определение эквивалентности имеет тот же вид (1.2) с мировой функцией σ, описывающей геометрию $\mathcal{G}$. Однако, в общем случае отношение эквивалентности (1.2), вообще говоря, не является транзитивным, потому что в случае произвольной мировой функции σ эквивалентность двух векторов, вообще говоря многовариантна. Это означает, что в точке P_0 может существовать много векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1''$, ..., которые эквивалентны вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в точке Q_0, тогда как векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1''$, ... не эквивалентны между собой.

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \wedge \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1'\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \wedge \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\overline{\mathrm{eqv}}\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1' \tag{1.5}$$

где символ $\overline{\mathrm{eqv}}$ означает неэквивалентность. Если соотношения (1.5) имеют место, то отношение эквивалентности интранзитивно, потому что для транзитивного отношения эквивалентности из

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \wedge \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1'\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \tag{1.6}$$

следует, что

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1' \tag{1.7}$$

С другой стороны, число векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1''$, ..., эквивалентных вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в точке Q_0 зависит от числа решений двух уравнений (1.2), рассматриваемых как уравнения для определения точки P_1 при фиксированных точках P_0, Q_0, Q_1 (или при фиксированной точке P_0 и векторе $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$). Число этих решений зависит от вида мировой функции σ. Мы будем различать три разных случая:

(1) Одновариантность по отношению к точкам P_0, Q_0, Q_1, когда имеется одно и только одно решение для точек P_0, Q_0, Q_1. В этом случае отношение эквивалентности транзитивно, если одновариантность выполняется для любых точек P_0, Q_0, Q_1.

(2) Многовариантность по отношению к точкам P_0, Q_0, Q_1, когда имеется более одного решения для некоторых точек P_0, Q_0, Q_1. В этом случае отношение эквивалентности интранзитивно.

(3) Нуль-вариантность по отношению к точкам P_0, Q_0, Q_1, когда не существует решения для некоторых точек P_0, Q_0, Q_1. В этом случае отношение эквивалентности может быть и транзитивным, и интранзитивным.

Второй случай является наиболее сильным в том смысле, что появление многовариантности по отношению к некоторым трем точкам P_0, Q_0, Q_1 порождает интранзитивность отношения эквивалентности, и следовательно, неаксиоматизируемость физической геометрии, потому что транзитивность отношения эквивалентности является необходимым условием аксиоматизируемости. Второй и третий случай совместимы в том смысле, что многовариантность может выполняться для некоторых точек P_0, Q_0, Q_1, тогда как нуль-вариантность имеет место для некоторых других точек P_0', Q_0', Q_1'.

Заметим, что геометрия Минковского может быть аксиоматизируемой и нефизической, и геометрия Минковского может быть физической и неаксиоматизируемой. Вообще говоря, в этом случае имеются две разные геометрии, имеющие одну и ту же мировую функцию. Мы будем использовать для них два разных названия. Геометрию Минковского, которая является физической, будем называть σ-минковской геометрией. σ-минковская геометрия не аксоматизируема, потому что она многовариантна по отношению к любой точке P_0 и любому пространственноподобному вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \{Q_0, Q_1\}$. Традиционная геометрия Минковского, которая строится на основе линейного пространства с заданным на нем скалярным произведением, аксиоматизируема (она выводится из некоторой аксиоматики), но она не является физической геометрией. Геометрия Минковского не может быть построена на основе одной только мировой функции. Построение геометрии Минковского содержит ссылку на средства описания в виде системы координат. Хотя построение геометрии Минковского инвариантно относительно преобразований системы координат, но оно не инвариантно относительно преобразования размерности системы координат (смотри подробную дискуссию в [4]). Геометрию Минковского следует квалифицировать как обогащенную физическую геометрию, т.е. физическую геометрию с некоторой дополнительной структурой, заданной на физической геометрии. Существование дополнительной структуры налагает добавочные ограничения на геометрию.

Различие между геометрией пространства-времени Минковского и σ-минковской геометрией проявляется только при рассмотрении пространственноподобных векторов, по отношению к которым σ-минковская геометрия многовариантна. Однако пространственноподобные векторы не фигурируют в динамике частиц, и различие между σ-минковской геометрией пространства-времени и геометрией Минковского остается невостребованным. Если считать геометрию наукой о взаимном расположении и форме геометрических объектов, то следует предпочесть σ-минковскую геометрию, потому что расстояние между любой парой точек полностью определяет взаимное расположение геометрических объектов и их форму. Что касается аксиоматизируемости геометрии, то это свойство важно только для вывода геометрических утверждений из аксиоматики. С точки зрения геометрии как науки о расположении геометрических объектов, аксиоматизация является вторичным свойством и практически все физические геометрии не аксиоматизируемы. Собственно евклидова геометрия является очень важным исключением, которое позволяет строить физические геометрии с помощью деформации собственно евклидовой геометрии. Вывод аксиоматизируемой геометрии из аксиоматики имеет два существенных недостатка. Во-первых, нужно формулировать геометрические утверждения и доказывать соответствующие теоремы. Геометрические утверждения нужно формулировать и доказывать для каждой новой геометрии. Эти процедуры сложны с технической точки зрения. Кроме того, только геометрии с транзитивным отношением эквивалентности могут быть выведены из аксиоматики. Во-вторых, нужно придумывать аксиомы и проверять их непротиворечивость. Противоречивость геометрии означает, что, используя два разных пути вывода некоторого утверждения, можно получить два несовместимых утверждения. *Противоречивость геометрии является свойством метода ее построения, а не свойством самой геометрии.* В физической геометрии, построенной на основе принципа деформации, вопрос о ее противоречивости является бессмысленным, потому что проблема формулирования геометрических утверждений отсутствует вовсе. Все утверждения физической геометрии берутся из собственно евклидовой геометрии в готовом виде. Точнее, определения геометрических объектов в терминах мировой функции берутся из собственно евклидовой геометрии. Если при этом нужно определить свойства этих объектов, то они рассчитываются на основе мировой функции. Поскольку мировые функции в рассматриваемой геометрии и евклидовой геометрии, вообще говоря, разные, то вычисленные свойства могут быть разными в рассматриваемой геометрии и евклидовой геометрии.

Наконец, метод построения физической геометрии, основанный на использовании линейного векторного пространства, (например, построение римановой геометрии) исходит из некоторого n-мерного многообразия $\mathcal{M}_n$, где задается метрический тензор g_{ik}. Мировая функция σ задается соотношением

$$\sigma\left(x,x'\right)=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_{xx'}}\sqrt{g_{ik}\left(x\right)dx^i dx^k}\right)^2 \tag{1.8}$$

где интегрирование производится вдоль геодезической $\mathcal{L}_{xx'}$, соединяющей точки x и x'. Может существовать несколько геодезических, соединяющих точки x и x'. В этом случае мировая функция σ оказывается многозначной. В этом случае мировая функция является производной величиной, и она может быть многозначной. Однако, в физической геометрии мировая функция является первичной величиной, она определяет физическую геометрию, и она не может быть многозначной. Чтобы сделать риманову геометрию с многозначной мировой функцией (1.8) физической геометрией (σ-риманова геометрия), необходимо превратить многозначную мировую функцию в однозначную, выбрав только одну из ветвей мировой функции (1.8). Различный выбор ветвей порождает разные мировые функции и, следовательно, разные σ-римановы геометрии. Таким образом, n-мерное многообразие $\mathcal{M}_n$ с метрическим тензором, заданном на нем, порождает несколько σ-римановых геометрий, если выражение (1.8) оказывается многозначным для некоторых пар точек x, x'.

Построение σ-римановых геометрий с помощью преобразования многозначной мировой функции (1.8) в однозначную мировую функцию сопровождается появлением нуль-вариантности для некоторых точек. Разумеется, этот механизм построения физической геометрии из римановой геометрии с помощью придания единственности мировой функции не является единственным. Однако, этот механизм интересен с физической точки зрения, потому что σ-риманова геометрия с устранением лишних ветвей мировой функции получается в результате компактификации плоской пространственно-временной геометрии (например, компактификация 5-мерного пространства-времени Калуцы-Клейна [6, 7]). Нуль-вариантность порождает некоторый дискриминационный механизм, ответственный за дискретные значения параметров элементарных частиц. В частности, компактификация пятой координаты в геометрии Калуцы-Клейна приводит к ограничениям на возможный электрический заряд элементарной частицы.

Эта работа посвящена рассмотрению процедуры компактификации в геометрии Калуцы-Клейна, которая сопровождается построением дискриминационного механизма, налагающего ограничения на значение электрического заряда элементарных частиц. Однако сначала мы упомянем о влиянии многовариантности на динамику элементарных частиц.

2 Влияние многовариантности на динамику частицы

В пространстве-времени Минковского динамика точечной частицы описывается времениподобной мировой линией $\mathcal{L}$ частицы. В инерциальной системе координат $x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ мировая функция $\sigma_{\mathrm{M}}(x, x')$ между двумя точками с координатами x и x' имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{M}}(x, x') = \frac{1}{2} g_{ik} \left(x^i - x'^i\right) \left(x^k - x'^k\right) \qquad (2.1)$$

где метрический тензор имеет вид g_{ik} =diag$\{c^2, -1, -1, -1\}$, c есть скорость света. Мировая линия $x = x(\tau)$ заряженной частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле F_{ik}, описывается динамическим уравнением

$$m\frac{d}{d\tau}\frac{cg_{il}\frac{dx^l}{d\tau}}{\sqrt{g_{jn}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau}}}=\frac{e}{c}F_{ik}\left(x\right)\frac{dx^k}{d\tau},\qquad i=0,1,2,3 \tag{2.2}$$

где m есть масса частицы, e есть электрический заряд частицы, а τ есть параметр вдоль мировой линии. Постоянные m и e представляют собой не-геометрические характеристики точечной частицы.

Вообще говоря, масса m и заряд e могут быть геометризованы, т.е. они могут рассматриваться как геометрические характеристики точечной частицы. Однако, это возможно только в рамках физической геометрии, которая формулируется в терминах мировой функции. Движение точечной частицы описывается мировой цепью $\mathcal{C}$, состоящей из связанных векторов $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$, $s=...0,1,...$

$$\mathcal{C}=\bigcup_s \mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1} \tag{2.3}$$

где вектор $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}=\{P_s,P_{s+1}\}$ представляет собой упорядоченное множество из двух точек P_s,P_{s+1}. Мировая цепь $\mathcal{C}$ представляет собой упорядоченное множество точек $...P_0,P_1,...P_s,...$ Расстояние $|\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}|$ между смежными точками P_s,P_{s+1} одно и то же.

$$|\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}|=\mu,\qquad s=...0,1,.. \tag{2.4}$$

Величина $\mu=|\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}|$ представляет собой длину звена мировой цепи. Она определяет геометрическую массу μ. Геометрическая масса μ связана с обычной массой m с помощью соотношения

$$m=b\mu \tag{2.5}$$

где b есть некоторая универсальная постоянная. Геометрическая масса μ является геометрической характеристикой частицы, так же как и вектор $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$, представляющий собой геометрический импульс частицы.

Движение (2.2) точечной частицы в электромагнитном поле может описываться как свободное движение частицы в 5-мерном пространстве-времени Калуцы-Клейна. Тот факт, что движение точечной частицы в физической геометрии пространства-времени является свободным, означает, что смежные векторы мировой цепи являются эквивалентными.

$$\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}\mathrm{eqv}\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2},\qquad s=...0,1,.. \tag{2.6}$$

Пусть нет электромагнитного поля. Тогда динамическое уравнение (2.2) превращается в динамическое уравнение

$$m\frac{d}{d\tau}\frac{cg_{il}\frac{dx^l}{d\tau}}{\sqrt{g_{jn}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau}}}=0 \tag{2.7}$$

Его решение

$$x^i = x^i(\tau) = X^i + U^i\tau, \qquad X^i, U^i = \text{const}, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{2.8}$$

не зависит от массы m и совпадает с решением уравнений (2.6), (1.2) в пространстве-времени Минковского. Однако, если пространство-время Минковского немного деформировать, решение может оказаться зависящим от массы.

Рассмотрим деформированную геометрию пространства-времени $\mathcal{G}_{\rm d}$, описываемую мировой функцией

$$\sigma_{\rm d} = \sigma_{\rm M} + d, \qquad d = \frac{1}{2}\lambda_0^2 \text{sgn}(\sigma_{\rm M}), \qquad \lambda_0 = \text{const} \tag{2.9}$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{если} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{если} \quad x = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

где $\sigma_{\rm M}$ есть мировая функция пространственно-временной геометрии Минковского, и λ_0 есть некоторая элементарная длина геометрии $\mathcal{G}_{\rm d}$.

Длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\rm d}$ любого вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ имеет вид

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\rm d}^2 = 2\sigma_{\rm d}(P_0, P_1) = 2\sigma_{\rm M}(P_0, P_1) + \lambda_0^2 \text{sgn}(\sigma_{\rm M}(P_0.P_1)) \tag{2.11}$$

Другими словами, если расстояние между точками P_0, P_1 является времениподобным в $\mathcal{G}_{\rm d}$ ($\sigma_{\rm d}(P_0, P_1) > 0$), оно является времениподобным также в $\mathcal{G}_{\rm M}$ ($\sigma_{\rm M}(P_0, P_1) > 0$). Если расстояние между точками P_0, P_1 является пространственноподобным в $\mathcal{G}_{\rm d}$ ($\sigma_{\rm d}(P_0, P_1) < 0$), оно является пространственноподобным также и в $\mathcal{G}_{\rm M}$ ($\sigma_{\rm M}(P_0, P_1) < 0$). Из (2.11) следует, что любое времениподобное (и пространственноподобное) расстояние больше, чем $\sqrt{2}\lambda_0$. Это означает, что в пространственно-временной геометрии $\mathcal{G}_{\rm d}$ нет близких точек, и геометрию $\mathcal{G}_{\rm d}$ следует квалифицировать как дискретную геометрию пространства-времени. Геометрия $\mathcal{G}_{\rm d}$ задана на непрерывном многообразии Минковского. Кажется довольно неожиданным, что дискретная геометрия может быть задана на том же самом множестве точек, на котором можно задать непрерывную геометрию. Этот сюрприз объясняется тем, что при традиционном подходе, основанном на концепции линейного пространства, дискретная геометрия задается на счетном множестве точек, тогда как непрерывная геометрия задается на континуальном точечном множестве.

Традиционно дискретная геометрия описывается следующим образом. Рассмотрим некоторую геометрию $\mathcal{G}_{\rm c}$ (евклидову, Минковского или риманову) на некотором многообразии $\mathbb{M}_{n+1}$ и введем на нем некоторую криволинейную систему координат $(x^0, x^1, ...x^n)$. Удалим из многообразия $\mathbb{M}_{n+1}$ все точки за исключением точек со всеми целочисленными координатами. В результате получилось множество точек $\mathbb{M}_{\rm d}$, точки которого маркировались целочисленными координатами x^s, $s = 0,1,,..n$. Мировая функция $\sigma(P,Q)$ между точками $P, Q \in \mathbb{M}_{\rm d}$ та же самая, что и между теми же самыми точками $P, Q \in \mathbb{M}_{n+1}$. В результате получилась та же геометрия $\mathcal{G}_{\rm c}$ на подмножестве $\mathbb{M}_{\rm d}$ множества

$\mathbb{M}_{n+1}$. В дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{c}}$, определенной на $\mathbb{M}_{\mathrm{d}}$, имеется элементарная длина λ, определенная соотношением

$$\lambda = \min_{\forall P,Q\in\mathbb{M}_{\mathrm{d}}} \left\{ \left| \sqrt{2\sigma(P,Q)} \right| \right\} \quad \text{для} \quad \left| \sqrt{2\sigma(P,Q)} \right| > 0 \tag{2.12}$$

В этом традиционном определении дискретной геометрии используются такие средства описания как многообразие $\mathbb{M}_{n+1}$ и система координат на нем. Геометрия, полученная на $\mathbb{M}_{\mathrm{d}}$ существенно зависит от выбора системы координат. Кроме того, оказывается невозможным получить дискретную геометрию на континуальном множестве точек.

Определение (2.9) не использует каких бы то ни было средств описания. Оно использует только мировую функцию, и дискретность геометрии возникает из того факта, что $|\sigma(P,Q)| \notin \left(0, \sqrt{2}\lambda_0\right)$ для $\forall P, Q \in \Omega$, где Ω есть множество точек, где задана геометрия. Множество Ω может быть дискретным или непрерывным. Это обстоятельство не существенно для построения дискретной геометрии.

Характер геометрии (дискретность или непрерывность) зависит только от вида мировой функции. Разумеется, непрерывная геометрия может быть задана только на континуальном точечном множестве. Однако, как мы видели, дискретная геометрия может быть задана также на континуальном множестве точек.

Как мы видели, σ-минковская геометрия многовариантна по отношению к любой точке и любому пространственноподобному вектору. Пространственно-временная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ многовариантна по отношению к времениподобным векторам тоже, и это обстоятельство оказывается важным для динамики точечной частицы, потому что динамика имеет дело с времениподобными векторами. Свободное движение точечной частицы оказывается зависящим от геометрической массы μ частицы и от элементарной длины λ_0, которая ответственна за многовариантность геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ по отношению к времениподобным векторам.

Два смежных звена $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ эквивалентны, и, следовательно, удовлетворяют соотношениям типа (1.2). Пусть координаты точек суть

$$P_0 = \{0,0,0,0\}, \quad P_1 = \{\mu,0,0,0\}, \quad P_2 = \{2\mu+\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \tag{2.13}$$

а координаты векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ равны

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{\mu,0,0,0\}, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \{\mu+\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = \{2\mu+\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \tag{2.14}$$

Примем во внимание, что

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{d}}^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}^2 = 2\sigma_{\mathrm{M}}(P_0,P_1) + \lambda_0^2 \mathrm{sgn}\left(\sigma_{\mathrm{M}}(P_0,P_1)\right) \tag{2.15}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_{\mathrm{d}} = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_{\mathrm{M}} + w(P_0,P_1,P_1,P_2) \tag{2.16}$$

Здесь индексы "M" и "d" означают, что величины рассчитаны в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ и $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ соответственно, и для времениподобных векторов (2.14)

$$w(P_0,P_1,P_1,P_2) = d(P_0,P_2) + d(P_1,P_1) - d(P_0,P_1) - d(P_1,P_2) = -\frac{1}{2}\lambda_0^2 \tag{2.17}$$

Соотношение $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$eqv$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ имеет вид двух уравнений

$$\mu(\mu+\alpha_0)-\frac{1}{2}\lambda_0^2=\mu^2+\lambda_0^2 \tag{2.18}$$

$$\mu^2=(\mu+\alpha_0)^2-\alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_3^2 \tag{2.19}$$

Величины α должны быть определены из этих уравнений. Решение уравнений (2.18), (2.19) имеет вид

$$\alpha_0=\frac{3\lambda_0^2}{2\mu},\qquad \alpha_1=\lambda_0\sqrt{3+\frac{9\lambda_0^2}{4\mu^2}}\sin\theta\cos\varphi, \tag{2.20}$$

$$\alpha_2=\lambda_0\sqrt{3+\frac{9\lambda_0^2}{4\mu^2}}\sin\theta\sin\varphi,\qquad \alpha_3=\lambda_0\sqrt{3+\frac{9\lambda_0^2}{4\mu^2}}\cos\theta \tag{2.21}$$

где величины θ и φ произвольны.

Таким образом, положение звена $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ по отношению к смежному звену $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ оказывается неопределенным (многовариантным). Возможные положения звена $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ лежат на образующей конуса с осью $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и углом ϕ при вершине, которая расположена в точке P_1. Угол ϕ определяется соотношением

$$\tan\phi=\frac{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}{\mu+\alpha_0}=\frac{\lambda_0}{\mu\left(1+\frac{3\lambda_0^2}{\mu^2}\right)}\sqrt{3+\frac{9\lambda_0^2}{4\mu^2}}\approx\frac{\lambda_0\sqrt{3}}{\mu},\qquad \text{if } \lambda_0\ll\mu \tag{2.22}$$

Если элементарная длина $\lambda_0\to 0$, пространственно-временная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ превращается в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, и конус вырождается в прямую линию.

Неопределенное (многовариантное) положение смежных звеньев приводит к вихлянию мировой цепи точечной частицы. Выберем элементарную длину пространственно-временной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ в виде

$$\lambda_0^2=\frac{\hbar}{bc} \tag{2.23}$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света, а постоянная b есть универсальная постоянная (2.5), связывающая геометрическую массу μ с обычной массой m. Тогда статистическое описание вихляющих мировых цепей эквивалентно квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера [5]. Квантовая постоянная $\hbar$ появляется в динамике частицы как параметр пространственно-временной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Традиционные квантовые принципы оказываются излишними. Таким образом, многовариантная геометрия пространства-времени позволяет описывать квантовые эффекты как геометрические эффекты. Кроме того, масса m точечной частицы оказывается геометризованной ее связью (2.5) с геометрической массой $\mu=|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{d}}$.

У нас нет прямой информации о геометрии пространства-времени в микромире. В макромасштабе геометрия пространства-времени может рассматриваться как непрерывная, потому что возможная дискретность мелкомасшабна и не может быть обнаружена в макроскопических экспериментах. Однако на микромасштабах геометрия пространства-времени может оказаться дискретной. Дискретная геометрия пространства-времени порождает многовариантность, ответственную за квантовые эффекты. Невозможно ничего возразить против дискретности геометрии пространства-времени на малых масштабах. Такую возможность следует рассмотреть. Дискретная геометрия пространства-времени должна рассматриваться в рамках физической геометрии, которая описывает дискретные и непрерывные геометрии, используя единый метод описания.

3 Мировая функция пространства-времени Калуцы-Клейна

Пространственно-временная геометрия Калуцы-Клейна $\mathcal{G}_{\mathrm{K}}$ задается на 5-мерном многообразии в системе координат с координатами $x = \{x^0, x^1, x^2, x^3, x^5\}$. Четыре координаты $\{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{x^0, \mathbf{x}\}$ описывают положение частицы в четырехмерном пространстве-времени Минковского, тогда как зарядовая координата x^5 описывает дополнительные характеристики частицы, ответственные за взаимодействие с электромагнитным полем.

Ковариантный метрический тензор γ_{AB}, $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$ определяется соотношением

$$\gamma_{AB} = \left\| \begin{array}{cc} g_{ik} - a_i a_k & a_k \\ a_i & -1 \end{array} \right\|, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3, \qquad A, B = 0, 1, 2, 3, 5 \tag{3.1}$$

где g_{ik}, $i, k = 0, 1, 2, 3$ есть метрический тензор в обычном 4-мерном пространстве. Величины a_k, $k = 0, 1, 2, 3$ связаны с электромагнитным потенциалом A_k, $k = 0, 1, 2, 3$ с помощью соотношений

$$a_k = \varkappa A_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

где $\varkappa$ есть некоторая универсальная постоянная. Ковариантный метрический тензор γ^{AB}, $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$ имеет вид

$$\gamma^{AB} = \left\| \begin{array}{cc} g^{ik} & g^{il} a_l \\ g^{kl} a_l & -1 + g^{jl} a_j a_l \end{array} \right\|, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3, \qquad A, B = 0, 1, 2, 3, 5 \tag{3.3}$$

Предполагается, что ни электромагнитные потенциалы a_k, ни метрический тензор g_{ik} не зависят от зарядовой координаты x^5.

Тогда действие

$$\mathcal{A}[x] = \int \left\{ -m_5 c \sqrt{\gamma_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B} \right\} d\tau, \qquad x = \left\{ x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau), x^5(\tau) \right\} \tag{3.4}$$

описывает движение заряженной частицы в гравитационном поле, описываемом метрическим тензором g_{ik} и в электромагнитном поле A_k. Соответствующие динамические уравнения получаются в результате варьирования действия (3.4) по переменным x^A, $A = 0, 1, 2, 3, 5$.

$$\frac{dp_A}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial x^A}\left(m_5 c\sqrt{\gamma_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B}\right), \qquad A = 0, 1, 2, 3, 5 \tag{3.5}$$

где

$$p_A = -\frac{m_5 c\gamma_{AB}\dot{x}^B}{\sqrt{\gamma_{CD}\dot{x}^C\dot{x}^D}}, \qquad A = 0, 1, 2, 3, 5 \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial x^A}\gamma^{AB}\frac{\partial S}{\partial x^B} = (m_5 c)^2, \qquad p_A = \frac{\partial S}{\partial x^A}, \qquad A = 0, 1, 2, 3, 5 \tag{3.7}$$

Поскольку γ_{AB} не зависит от x^5, из (3.5) следует, что составляющая канонического импульса $p_5 =$const. Тогда, принимая во внимание (3.1), уравнение (3.7) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^i} + p_5 a_i\right) g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^k} + p_5 a_k\right) = (m_5 c)^2 + p_5^2 \tag{3.8}$$

Сравнивая (3.8) с уравнением Гамильтона - Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^i} + \frac{e}{c}A_i\right) g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^k} + \frac{e}{c}A_k\right) = m^2 c^2 \tag{3.9}$$

описывающим движение точечной частицы с массой m и зарядом e в четырехмерном пространстве-времени с электромагнитным потенциалом A_k, $k = 0, 1, 2, 3$, заключаем, что уравнения (3.8) и (3.9) эквивалентны, если

$$m = \sqrt{m_5^2 + c^{-2}p_5^2}, \qquad p_5 = \frac{e}{\varkappa c}, \qquad a_k = \varkappa A_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{3.10}$$

где $\varkappa$ есть некоторая универсальная постоянная.

Первоначальное действие (3.4) имеет вид действия для геодезической в 5-мерном римановом пространстве с метрическим тензором (3.1). Итак, движение точечной заряженной частицы в 4-мерном римановом пространстве-времени с электромагнитным полем может быть описано как свободное движение частицы в 5-мерном римановом пространстве-времени. Электрический заряд e частицы геометризуется в том смысле, что он оказывается связанным с составляющей p_5 импульса частицы вдоль пятой (зарядовой) координаты x^5.

Однако, пятая координата x^5 ненаблюдаема, и пытаются объяснить это обстоятельство с помощью гипотезы, что пространство-время Калуцы-Клейна является тонким в направлении пятой координаты x^5. Предполагается, что пространство-время Калуцы-Клейна компактифицировано в направлении пятой координаты x^5, т.е. точки с координатами $\{x^0, x^1, x^2, x^3, x^5\}$ и $\{x^0, x^1, x^2, x^3, x^5 + 2kL\}$ совпадают, где L есть некоторая универсальная постоянная, а k – любое целое число.

4 Дискриминационные свойства компактификации геометрии Калуцы-Клейна

Попытаемся проанализировать влияние компактификации на геометрию Калуцы-Клейна $\mathcal{G}_{\mathrm{K}}$. Для простоты рассмотрим случай, когда отсутствуют гравитационное и электромагнитное поля. Метрический тензор (3.1) принимает вид $\gamma_{AB}=$diag$(c^2,-1,-1,-1,-1)$ и $a_k=0$, $k=0,1,2,3$. Геодезические $\mathcal{L}_{P_0P_1}$, проходящие через точки P_0 и P_1 с координатами

$$P_0=\{0,0,0,0,0\}\,,\qquad P_1=\left\{y^0,y^1,y^2,y^3,y^5\right\},\qquad y^0,y^1,y^2,y^3,y^5\in\mathbb{R} \tag{4.1}$$

имеют вид

$$x^k=y^k\tau,\qquad x^5=\left(y^5+2nL\right)\tau,\qquad k=0,1,2,3 \tag{4.2}$$

где τ является параметром вдоль геодезической, а n есть произвольное целое число. Компактификация может рассматриваться как склеивание точек с координатами $\{x^0,x^1,x^2,x^3,x^5-L\}$ и $\{x^0,x^1,x^2,x^3,x^5+L\}$. В результате получается "цилиндр" вместо плоскости.

Определив мировую функцию $\sigma_{\mathrm{K}}\left(P_0,P_1\right)$ с помощью (1.8) как интеграл вдоль геодезической, соединяющей точки P_0 и P_1, получаем многозначную мировую функцию, потому что имеется много геодезических разной длины, соединяющих точки P_0 и P_1. Если геометрия пространства-времени строится в соответствии с традиционным методом, основанном на понятиях линейного векторного пространства, метрический тензор является первичной величиной, тогда как мировая функция является вторичной (производной) величиной. В этом случае можно принять ситуацию с многозначной мировой функцией и попытаться как-то интерпретировать это обстоятельство.

Однако, если геометрия пространства-времени является физической геометрией, где мировая функция представляет собой первичную (фундаментальную) величину, то многозначную первичную величину принять нельзя. Нужно использовать однозначную мировую функцию и нужно выбрать только один из многих возможных вариантов геодезических (4.2). Для различного выбора геодезической (4.2), определяющей мировую функцию получаются различные геометрии пространства-времени.

Однозначная мировая функция ограничивает возможные значения электрического заряда, рассматриваемого как импульс вдоль направления пятой координаты x^5 в пространстве-времени Калуцы-Клейна. Электрический заряд элементарной частицы оказывается ограниченным в результате использования однозначной мировой функции. Компактификация с многозначной мировой функцией не позволяет получить такого ограничения.

Рассмотрим простейший случай, когда мировая функция определяется интегралом (1.8) вдоль "кратчайшей" геодезической, соответствующей геодезическим (4.2). Эта геодезическая делает менее одного оборота вокруг "цилиндра". В этом случае мировая функция зависит от стандартизованного значения x_{st}^5

координаты x^5

$$\sigma_{\mathrm{K}}(x,x') = \frac{1}{2}\left(\left(x^0 - x'^0\right)^2 - (\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2 - \left(\left(x^5 - x'^5\right)_{\mathrm{st}}\right)^2\right) \tag{4.3}$$

где $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$

$$x_{\mathrm{st}} = \left\{ \begin{array}{ll} 2L\left\{\frac{x}{2L}\right\} & \text{если} \quad 2L\left\{\frac{x}{2L}\right\} \leq L \\ 2L\left\{\frac{x}{2L}\right\} - 2L & \text{если} \quad L < 2L\left\{\frac{x}{2L}\right\} \end{array} \right., \qquad 2L\left\{\frac{x}{2L}\right\} \in [0, 2L) \tag{4.4}$$

Здесь $\{x\}$ означает дробную часть десятичного числа x, а $[x]$ представляет собой целую часть числа x. Другими словами, $[x]$ и $\{x\}$ определяются соотношениями

$$[x] = \max\left(k \in \mathbb{Z} | k \leq x\right), \tag{4.5}$$

где $\mathbb{Z}$ есть множество всех целых чисел.

$$\{x\} = x - [x] \tag{4.6}$$

Координата x^5_{st} является стандартизованной координатой $x^5_{\mathrm{st}} \in (-L, L]$, хотя формально $x^5 \in \mathbb{R}$. Выражение $\left(x^5 - x'^5\right)_{\mathrm{st}} \in (-L, L]$, хотя формально $x^5, x'^5 \in \mathbb{R}$. Получаем

$$(x_{\mathrm{st}} - x'_{\mathrm{st}})_{\mathrm{st}} = \left\{ \begin{array}{lll} x_{\mathrm{st}} - x'_{\mathrm{st}} & \text{если} & -L < x_{\mathrm{st}} - x'_{\mathrm{st}} \leq L \\ -2L + x_{\mathrm{st}} - x'_{\mathrm{st}} & \text{если} & L < x_{\mathrm{st}} - x'_{\mathrm{st}} \leq 2L \\ 2L + x_{\mathrm{st}} - x'_{\mathrm{st}} & \text{если} & -2L < x_{\mathrm{st}} - x'_{\mathrm{st}} \leq -L \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Выбор мировой функции σ_{K} в виде (4.3), (4.4) соответствует геодезической (4.2), которая делает менее одного оборота вокруг "цилиндра".

Мировая функция (4.3), (4.4) является нуль-вариантной по отношению к некоторым векторам. Рассмотрим точки и соответствующие векторы, которые могли бы быть смежными векторами мировой цепи.

$$P_0 = \{0,0,0,0,0\}, \qquad P_1 = \{s_0, s_1, s_2, s_3, l\}, \tag{4.8}$$

$$P_2 = \{2s_0 + \alpha_0, 2s_1 + \alpha_1, 2s_2 + \alpha_2, 2s_3 + \alpha_3, 2l + \alpha_5\} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = s = \{s_0, s_1, s_2, s_3, l\}, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = s + \alpha = \{s_0 + \alpha_0, s_1 + \alpha_1, s_2 + \alpha_2, s_3 + \alpha_3, l + \alpha_5\} \tag{4.11}$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = 2s + \alpha = \{2s_0 + \alpha_0, 2s_1 + \alpha_1, 2s_2 + \alpha_2, 2s_3 + \alpha_3, 2l + \alpha_5\} \tag{4.12}$$

Покажем, что если пятая координата $x^5 = l$ удовлетворяет соотношению

$$|l| > \frac{L}{2} \tag{4.13}$$

то вектор $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, эквивалентный вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, не существует. Это означает, что мировая цепь свободной точечной частицы со звеном $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ не может существовать.

Условия эквивалентности $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ для векторов (4.10), (4.11) записываются в виде

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{K}} = |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|^2_{\mathrm{K}} \tag{4.14}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_{\mathrm{K}} = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{K}} \tag{4.15}$$

где индекс "K" означает, что соответствующие величины взяты в геометрии (4.3).

Предположим, что вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является времениподобным в том смысле, что

$$s_0^2 > L^2 + \mathbf{s}^2, \qquad \mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\} \tag{4.16}$$

Поскольку

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_{\mathrm{K}} = \sigma_{\mathrm{K}}(P_0, P_2) - \sigma_{\mathrm{K}}(P_0, P_1) - \sigma_{\mathrm{K}}(P_1, P_2) \tag{4.17}$$

то развернутая форма уравнений (4.14) и (4.15) имеет вид

$$s_0^2 - \mathbf{s}^2 - l^2 = (s_0 + \alpha_0)^2 - (\mathbf{s} + \boldsymbol{\alpha})^2 - ((l + \alpha_5)_{\mathrm{st}})^2 \tag{4.18}$$

$$(2s_0 + \alpha_0)^2 - (2\mathbf{s} + \boldsymbol{\alpha})^2 - (2l + \alpha_5)^2_{\mathrm{st}} = 4\left(s_0^2 - \mathbf{s}^2 - l^2\right) \tag{4.19}$$

Взяв сумму уравнений (4.19) и (4.18), получаем

$$2s_0\alpha_0 - 2\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha} - (2l + \alpha_5)^2_{\mathrm{st}} + (l + \alpha_5)^2_{\mathrm{st}} = -3l^2 \tag{4.20}$$

$$\alpha_0 = \frac{2\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha} + (2l + \alpha_5)^2_{\mathrm{st}} - (l + \alpha_5)^2_{\mathrm{st}} - 3l^2}{2s_0} \tag{4.21}$$

Подставляя (4.21) в (4.18), получаем

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = (2l + \alpha_5)^2_{\mathrm{st}} - 2(l + \alpha_5)^2_{\mathrm{st}} - 2l^2 + \left(\frac{2\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha} + (2l + \alpha_5)^2_{\mathrm{st}} - (l + \alpha_5)^2_{\mathrm{st}} - 3l^2}{2s_0}\right)^2 \tag{4.22}$$

Положим

$$\beta = \beta_{\mathrm{st}} = (l + \alpha_5)_{\mathrm{st}} \tag{4.23}$$

Тогда

$$(2l + \alpha_5)_{\mathrm{st}} = (l + \beta)_{\mathrm{st}} = l + \beta + \gamma \tag{4.24}$$

где

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{если} & -L < l + \beta \leq L \\ -2L & \text{если} & L < l + \beta \leq 3L \\ 2L & \text{если} & -3L < l + \beta \leq -L \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{если} & -L - l < \beta \leq L - l \\ -2L & \text{если} & L - l < \beta \leq 3L - l \\ 2L & \text{если} & -3L - l < \beta \leq -L - l \end{array} \right. \tag{4.25}$$

Заметим, что нас интересует величина β, потому что это пятая координата вектора $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, который определяется с точностью до $2kL$, где k есть произвольное целое число

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 &= \{s_0 + \alpha_0, s_1 + \alpha_1, s_2 + \alpha_2, s_3 + \alpha_3, \beta\} \\ &= \{s_0 + \alpha_0, s_1 + \alpha_1, s_2 + \alpha_2, s_3 + \alpha_3, \beta + 2kL\} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Подставляя (4.23) и (4.24) и (4.22), получаем после преобразований

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = +\frac{2\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha} l\left(\beta-l\right)}{s_0^2}+\frac{\left(\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha}\right)^2}{s_0^2}-\left(l-\beta\right)^2\left(1-\frac{l^2}{s_0^2}\right)+\gamma^2\left(\frac{\frac{1}{2}\gamma+\left(l+\beta\right)}{s_0}\right)^2$$
$$+\gamma\left(\gamma+2\left(l+\beta\right)\right)\left(1+\frac{l\left(\beta-l\right)+\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha}}{s_0^2}\right) \qquad (4.27)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\gamma=0, \qquad -L<\beta+l\leq L, \qquad (4.28)$$

Тогда получаем из (4.27)

$$\boldsymbol{\alpha}^2=-\left(l-\beta\right)^2\left(1-\frac{l^2}{s_0^2}\right)+\left(\frac{\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha}}{s_0}\right)^2-2\frac{\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha}}{s_0^2}l\left(l-\beta\right) \qquad (4.29)$$

Можно увидеть, что уравнение (4.29) имеет очевидное решение

$$\boldsymbol{\alpha}=\left\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right\}=\left\{0,0,0\right\}, \qquad \beta=l \qquad (4.30)$$

Из (4.28) и (4.30) следует, что

$$-L/2<l\leq L/2, \qquad -L/2<\beta\leq L/2 \qquad (4.31)$$

Чтобы получить другие решения, положим

$$\beta=l+\varepsilon \qquad (4.32)$$

Получаем вместо (4.29)

$$\boldsymbol{\alpha}^2=-\varepsilon^2\left(1-\frac{l^2}{s_0^2}\right)+\left(\frac{\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha}}{s_0}\right)^2+2\frac{\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha}}{s_0^2}l\varepsilon \qquad (4.33)$$

Или

$$\sum_\beta\left(s_0^2\alpha_\beta^2-2ls_\beta\varepsilon\alpha_\beta-\sum_\nu s_\beta s_\nu\alpha_\beta\alpha_\nu\right)+\varepsilon^2\left(s_0^2-l^2\right)=0 \qquad (4.34)$$

Мы должны найти такие пространственноподобные векторы $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\varepsilon\}$ и такое значение переменной l, которые удовлетворяют уравнению (4.34).

Выберем ось x^1 вдоль 3-вектора $\mathbf{s}$. Уравнение (4.34) принимает вид

$$\left(s_0^2-s_1^2\right)\alpha_1^2+s_0^2\alpha_2^2+s_0^2\alpha_3^2+\left(s_0^2-l^2\right)\varepsilon^2-2ls_1\varepsilon\alpha_1=0 \qquad (4.35)$$

Левая часть уравнения (4.35) является квадратичной формой относительно переменных $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\varepsilon\}$. Матрица квадратичной формы уравнения (4.35) имеет вид

$$\left\Vert\begin{array}{cccc} s_0^2-s_1^2 & 0 & 0 & -ls_1 \\ 0 & s_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_0^2 & 0 \\ -ls_1 & 0 & 0 & \left(s_0^2-l^2\right) \end{array}\right\Vert \qquad (4.36)$$

Собственные векторы и собственные значения квадратичной формы (4.36) имеют вид,

$$\left\{\begin{array}{c}0\\1\\0\\0\end{array},\begin{array}{c}0\\0\\1\\0\end{array},\begin{array}{c}-\frac{l}{s_1}\\0\\0\\1\end{array}\right\}\leftrightarrow s_0^2,\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{l}s_1\\0\\0\\1\end{array}\right\}\leftrightarrow -l^2+s_0^2-s_1^2 \tag{4.37}$$

Уравнение (4.34) имеет тривиальное решение (4.30): $\boldsymbol{\alpha}=\{0,0,0\},\varepsilon = 0$. Уравнение (4.34) имеет нетривиальное решение, если по крайней мере одно из собственных значений матрицы (4.36) обращается в нуль. Для временеподобного вектора $\{s_0,\mathbf{s},l\}$ получаем

$$s_0^2>\mathbf{s}^2+l^2 \tag{4.38}$$

Попробуем найти такие значения переменной l, для которых собственное значение обращается в нуль. Первое собственное значение выражения (4.37) всегда положительно. Второе собственное значение выражения (4.37) обращается в нуль, если

$$s_0^2-s_1^2-l^2=0 \tag{4.39}$$

Выполнение соотношения (4.39) не возможно из-за (4.38). Это означает, что собственные значения матрицы (4.36) не обращаются в нуль, и уравнение (4.34) имеет только тривиальное решение

$$\boldsymbol{\alpha}=\{0,0,0\},\quad \alpha_0=0,\quad \varepsilon=0,\quad \alpha_5=0,\quad \beta=l\quad \text{если}\quad -L/2<l\leq L/2 \tag{4.40}$$

Рассмотрим случай

$$\gamma=-2L,\qquad L<l+\beta\leq 3L \tag{4.41}$$

В нерелятивистском случае $\mathbf{s}^2,l^2,L^2\ll s_0^2$ уравнение (4.27) принимает вид

$$\boldsymbol{\alpha}^2=(l+\beta+\gamma)^2-2\beta^2-2l^2$$

$$\boldsymbol{\alpha}^2+(l-\beta)^2-2L\left(2L-2\left(l+\beta\right)\right)=0 \tag{4.42}$$

Это уравнение может быть записано в виде

$$l+\beta=-\frac{\boldsymbol{\alpha}^2+(l-\beta)^2}{4L}+L\leq L \tag{4.43}$$

Из сравнения соотношений (4.41) и (4.43) следует что уравнение (4.42) не имеет решений, удовлетворяющих неравенству (4.41) даже в случае, когда

$$\boldsymbol{\alpha}=\{0,0,0\},\qquad l=\beta=L/2 \tag{4.44}$$

Рассмотрим случай

$$\gamma=2L,\qquad -3L<l+\beta\leq -L \tag{4.45}$$

В нерелятивистском случае $\mathbf{s}^2, l^2, L^2 \ll s_0^2$ уравнение (4.27) принимает вид

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = -(l-\beta)^2 + 2L(2L + 2(l+\beta)) \tag{4.46}$$

В соответствии с (4.45) это уравнение может быть записано в виде

$$l + \beta = \frac{\boldsymbol{\alpha}^2 + (l-\beta)^2}{4L} - L \leq -L \tag{4.47}$$

Из уравнения (4.47) и неравенства (4.45) следует, что решение уравнения (4.47) имеет вид

$$\boldsymbol{\alpha} = \{0,0,0\}, \qquad l = \beta = -L/2 \tag{4.48}$$

Объединяя (4.40) с (4.48), получаем, что если векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ времениподобны в смысле (4.16), единственное решение уравнения (4.22) есть

$$\boldsymbol{\alpha} = 0, \qquad \alpha_5 = 0, \qquad \alpha_0 = 0, \qquad -\frac{L}{2} \leq l \leq \frac{L}{2} \tag{4.49}$$

Таким образом, получается, что в точке P_1 имеется только один вектор $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \{s_0, s_1, s_2, s_3, l\}$, который эквивалентен вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{s_0, s_1, s_2, s_3, l\}$ в точке P_0. Эта эквивалентность имеет место только, если l удовлетворяет соотношению

$$|l| \leq \frac{L}{2} \tag{4.50}$$

Если соотношение (4.50) не выполняется, в точке P_1 не существует вектора $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, который был бы эквивалентен вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{s_0, s_1, s_2, s_3, l\}$ в точке P_0.

Если геометрия Калуцы-Клейна не компактифицирована, векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{s_0, 0, 0, 0, l\}$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \{s_0, 0, 0, 0, l\}$ эквивалентны при любом значении заряда l (при $l^2 < s_0^2$). Таким образом, компактификация дискриминирует большие значения зарядовой координаты $x^5 = l$. При традиционном подходе к геометрии Калуцы-Клейна, основанной на линейном векторном пространстве, компактификация не дискриминирует какие бы то ни было значения зарядовой координаты x^5.

Зарядовая координата $x^5 = l$ представляет собой зарядовую составляющую вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{s_0, 0, 0, 0, l\}$, который является вектором импульса. Дискриминация значений величины l является дискриминацией зарядовой составляющей p_5 вектора импульса $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, т.е. дискриминацией заряда частицы.

Традиционный метод компактификации, использующий однозначный метрический тензор (но многозначную мировую функцию), не позволяет получить ограничение на модуль электрического заряда элементарной частицы. Он порождает только периодическую зависимость от пятой координаты. Разумеется, эта периодическая зависимость относится только к состоянию статистического ансамбля, но не к состоянию отдельной частицы. Вместо динамических уравнений для отдельной свободной частицы

$$\frac{d}{dt}x^A(t) = v^A(t), \qquad \frac{dv^A(t)}{dt} = 0, \qquad A = 1,2,3,5 \tag{4.51}$$

следует рассматривать динамические уравнения для статистического ансамбля, состоящего из свободных частиц, чье движение описывается уравнениями (4.51). В частности, если состояние этого ансамбля описывается волновой функцией $\psi\left(t,\mathbf{x},x^5\right)$, то волновая функция должна быть периодической функцией пятой координаты x^5

$$\psi\left(t,\mathbf{x},x^5\right)=\psi\left(t,\mathbf{x},x^5+2kL\right) \tag{4.52}$$

где k есть любое целое число. В рамах квантовой механики эта периодичность приводит к тому, что оператор электрического заряда $-i\hbar\partial/\partial x^5$ имеет собственные значения кратные некоторому элементарному заряду.

После компактификации однозначная волновая функция ограничивает перемещение частицы в направлении пятой координаты. Однако она, вообще говоря, не ограничивает зарядовую составляющую p_5 вектора импульса. Зарядовая составляющая p_5 ограничивается если (1) *звенья мировой цепи имеют конечную длину* и (2) *мировая функция однозначна.* Если одно из этих условий нарушено, то величина зарядовой составляющей p_5 вектора импульса может не ограничиваться.

В частности, при традиционном подходе, когда мировая функция становится многозначной после компактификации, перемещение частицы вдоль направления x^5, и составляющая импульса p_5 частицы остаются неограниченными. Если мировая функция однозначна после компактификации, и звенья мировой цепи бесконечно малы, то перемещение частицы вдоль направления x^5 оказывается ограниченным, но составляющая импульса p_5 остается неограниченной. В частности, в дискретной геометрии пространства-времени, где звенья мировой цепи не могут быть бесконечно малыми, составляющая момента p_5 оказывается ограниченной, если мировая функция сделана однозначной после компактификации.

Хорошо известно, что стабильные элементарные частицы имеют электрический заряд $0,\pm e_0$, где e_0 есть элементарный электрический заряд. Только коротко живущие резонансы имеют заряд кратный элементарному. По-видимому они представляют собой связанные состояния нескольких элементарных частиц. Что касается кварков, которые имеют дробный электрический заряд, то они не могут быть вырваны из стабильных элементарных частиц. Кварки представляют собой скорее элементы структуры элементарных частиц, чем сами элементарные частицы.

Таким образом, экспериментальные данные подтверждают естественное предположение об однозначности мировой функции после компактификации.

5 Компактификация в дискретном пространстве-времени Калуцы-Клейна

Рассмотрим компактификацию дискретного пространства-времени Калуцы-Клейна. Мировая функция имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{dK}}\left(x,x'\right)=\sigma_{\mathrm{K}}\left(x,x'\right)+\frac{\lambda_0^2}{2}\mathrm{sgn}\left(\sigma_{\mathrm{K}}\left(x,x'\right)\right) \tag{5.1}$$

где σ_{K} определяется соотношением (4.3), (4.4). Поскольку геометрия пространства-времени с мировой функцией (5.1) дискретна, мировая цепь частицы имеет звенья конечной длины, потому что в дискретном пространстве-времени длина звена не может быть бесконечно малой. Рассмотрим два времениподобных вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ мировой цепи. Векторы определяются соотношениями (4.8) - (4.12). Эти векторы предполагаются эквивалентными и удовлетворяющими соотношениям типа (4.14), (4.15).

Перепишем эти уравнения в развернутом виде

$$s_0^2-\mathbf{s}^2-l^2=\left(s_0+\alpha_0\right)^2-\left(\mathbf{s}+\boldsymbol{\alpha}\right)^2-\left(l+\alpha_5\right)_{\mathrm{st}}^2 \tag{5.2}$$

$$\left(\left(2s_0+\alpha_0\right)^2-\left(2\mathbf{s}+\boldsymbol{\alpha}\right)^2-\left(2l+\alpha_5\right)_{\mathrm{st}}^2\right)+\lambda_0^2=4\left(\left(s_0^2-\mathbf{s}^2-l^2\right)+\lambda_0^2\right) \tag{5.3}$$

Комбинируя уравнения (5.2) (5.3), получаем

$$\alpha_0=\frac{2\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha}+\left(2l+\alpha_5\right)_{\mathrm{st}}^2-\left(l+\alpha_5\right)_{\mathrm{st}}^2-3l^2+3\lambda_0^2}{2s_0} \tag{5.4}$$

Подставляя (5.4) в (5.2), получаем

$$\boldsymbol{\alpha}^2=\left(2l+\alpha_5\right)_{\mathrm{st}}^2-2\left(l+\alpha_5\right)_{\mathrm{st}}^2-2l^2+3\lambda_0^2+\left(\frac{2\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha}+\left(2l+\alpha_5\right)_{\mathrm{st}}^2-\left(l+\alpha_5\right)_{\mathrm{st}}^2-3l^2+3\lambda_0^2}{2s_0}\right)^2 \tag{5.5}$$

или

$$\boldsymbol{\alpha}^2=\left(l+\gamma\right)\left(l+2\beta+\gamma\right)-\beta^2-2l^2+3\lambda_0^2+\left(\frac{2\mathbf{s}\boldsymbol{\alpha}+\left(l+\gamma\right)\left(l+2\beta+\gamma\right)-3l^2+3\lambda_0^2}{2s_0}\right)^2 \tag{5.6}$$

где γ определяется соотношением (4.25)

Мы будем рассматривать только нерелятивистский случай $\mathbf{s}^2,l^2,L^2\ll s_0^2$ для времениподобных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. В случае, когда, $\gamma=0$ и в соответствии с (4.23), (4.25)

$$-L<l+\beta\leq L \tag{5.7}$$

получаем из (5.6)

$$\boldsymbol{\alpha}^2+\left(\beta-l\right)^2=r_1^2,\qquad r_1^2=3\lambda_0^2 \tag{5.8}$$

Соотношение (5.8) описывает сферу радиуса

$$r_1 = \sqrt{3}\lambda_0 \tag{5.9}$$

с центром $\{\boldsymbol{\alpha}_{\rm c}, \beta_{\rm c}\} = \{\mathbf{0}, l\}$ в 4-мерном пространстве координат $\{\boldsymbol{\alpha}, \beta\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta\}$.

Решение уравнения (5.8) имеет вид

$$\alpha_1 = r_1 \sin\theta \sin\phi_2 \sin\phi_3, \qquad \alpha_2 = r_1 \sin\theta \sin\phi_2 \cos\phi_3, \tag{5.10}$$

$$\alpha_3 = r_1 \sin\theta \cos\phi_2, \qquad \beta = l + r_1 \cos\theta, \qquad \alpha_0 = 0, \tag{5.11}$$

которое верно для

$$r_1 \cos\theta \leq L - 2l. \tag{5.12}$$

Здесь r_1 определяется соотношением (5.9), и θ, ϕ_2, ϕ_3 суть произвольные числа. Хотя решение (5.10), (5.11) многозначно, но оно располагается на расстоянии порядка λ_0 от однозначного решения. При $\lambda_0 = 0$ радиус r_1 сферы (5.8) обращается в нуль и решение (5.10), (5.11) совпадает с (4.49).

Нас интересует поведение решений уравнения (5.8) вблизи границы $x^5 = L/2$. Сфера (5.8) или полностью находится внутри области $-L/2 < x^5 < L/2$, или пересекает границу $x^5 = L/2$. В последнем случае используем обозначение

$$l = \frac{L}{2} + \delta, \qquad -\frac{r_1}{2} < \delta \leq \frac{r_1}{2} \tag{5.13}$$

тогда в соответствии с (5.11)

$$\beta = \frac{L}{2} + \delta + r_1 \cos\theta \tag{5.14}$$

Угол $\theta_{\max}$ пересечения сферы (5.8) с границей $x^5 = L/2$ определяется соотношением

$$\cos\theta_{\max} = -\frac{2\delta}{r_1} \tag{5.15}$$

которое получается из (5.12). Положение сечения сферы определяется из соотношения

$$\beta_{\max} = L/2 + \delta + r_1 \cos\theta_{\max} = L/2 - \delta \tag{5.16}$$

которое соответствует условию

$$\beta_{\max} + l = L \tag{5.17}$$

Радиус R сечения сферы имеет вид

$$R = r_1 \sin\theta_{\max} = r_1 \sqrt{(1 - \cos^2\theta_{\max})} = \sqrt{r_1^2 - 4\delta^2} \tag{5.18}$$

Можно видеть, значение $x^5_{(2)} = \beta$ of the charge coordinate x^5 ектора $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ всегда меньше, чем $\frac{L}{2} + \frac{r_1}{2}$. Кроме того, значение $x^5_{(2)} = \beta$ зарядовой координаты $x^5_{(2)}$ вектора $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ меньше, чем $L/2$, если зарядовая координата $x^5_{(1)} = l$

вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ больше, чем $L/2$. Другими словами, зарядовая координата x^5 "отражается" от границы $x^5 = L/2$ в следующем смысле. Если координата $x^5_{(1)}$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ оказывается вблизи границы $x^5 = L/2$, $x^5_{(1)} \in (L/2 - r_1/2, L/2)$, то координата $x^5_{(2)}$ вектора $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ может ыть больше,чем $L/2$. Например, может быть, что $x^5_{(2)} \in (L/2, L/2 + r_1/2)$. Однако, координата $x^5_{(3)}$ следующего звена $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ будет меньше, чем $L/2$. В соответствии с (5.14) $x^5_{(3)} \in \left(\frac{L}{2} - \frac{3r_1}{2}, \frac{L}{2} - \frac{r_1}{2}\right)$. Таким образом, мировая цепь не может перейти через границу $x^5 = L/2$, хотя отельные точки мировой цепи могут иметь координату $x^5 \in (L/2 + r_1/2)$. Поведение мировой цепи вблизи границы $x^5 = -L/2$ такое же, как вблизи границы $x^5 = L/2$. Мировая цепь отражается от границы $x^5 = -L/2$. Таким образом, мировая цепь будет находиться в области $-L/2 < x^5 < L/2$.

В случае непрерывного пространства-времени, когда $\lambda_0 = 0$, мировая линия не проникает через границу $x^5 = L/2$. В случае дискретного пространства-времени, когда $\lambda_0 > 0$, одна точка мировой цепи может проникнуть сквозь границу $x^5 = L/2$. Однако следующая точка мировой цепи вернется в область $-L/2 < x^5 < L/2$. Мы будем называть решения, удовлетворяющие условию (5.7), базовыми решениями, тогда как решения, удовлетворяющие условиям (4.41), будут называться дополнительными. Поведение мировой цепи вблизи границы $x^5 = L/2$ напоминает поведение квантовой частицы вблизи стенки потенциальной ямы.

Рассмотрим случай (дополнительных решений), когда

$$\gamma = -2L, \qquad L < l + \beta \leq 2L \tag{5.19}$$

В нерелятивистском случае уравнение (5.6) принимает вид

$$\boldsymbol{\alpha}^2 + (\beta - l + 2L)^2 = r_2^2, \qquad r_2 = \sqrt{8L^2 - 8lL + 3\lambda_0^2} \tag{5.20}$$

Это уравнение описывает сферу радиуса r_2 с центром в точке $\{\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{c}}\beta_{\mathrm{c}}\} = \{\mathbf{0}, l - 2L\}$. Из (5.20) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r_2 \sin\theta_{\mathrm{ad}} \sin\phi_2 \sin\phi_3, \qquad \alpha_2 = r_2 \sin\theta_{\mathrm{ad}} \sin\phi_2 \cos\phi_3, \qquad \alpha_3 = r_2 \sin\theta_{\mathrm{ad}} \cos\phi_2, \\ \beta &= l - 2L + r_2 \cos\theta_{\mathrm{ad}}, \qquad \alpha_0 = 0, \qquad \text{for} \quad r_2 \cos\theta_{\mathrm{ad}} \geq 3L - 2l \end{aligned} \tag{5.21}$$

где $\theta_{\mathrm{ad}}, \phi_2, \phi_3$ суть произвольные числа. В случае (5.19) и $\lambda_0 = 0$ получаем, что $r_2 = 2L$ $\beta = l = L/2$.

Положим

$$l = L/2 + \delta, \qquad |\delta| \leq \frac{r_1}{2} \tag{5.22}$$

Получаем из первого неравенства (5.19) и (5.21)

$$0 < 2\delta - 2L + r_2 \cos\theta_{\mathrm{ad}} \tag{5.23}$$

где θ_{ad} есть угол между осью и образующей конуса с вершиной в точке $(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{c}}\beta_{\mathrm{c}}) = (\mathbf{0}, l - 2L)$. Конус основывается на множестве решений сферы (5.20). Получаем из (5.18) и (5.19) для минимального значения $\cos\theta_{\rm min}$ величины $\cos\theta_{\rm ad}$

$$\cos^2\theta_{\rm min} = \frac{(2L-2\delta)^2}{4L^2-8L\delta+r_1^2} \tag{5.24}$$

$$\sin^2\theta_0 = 1-\cos^2\theta_{\rm min} = \frac{\frac{1}{4}r_1^2-\delta^2}{r_2^2}, \qquad \delta^2 \leq \frac{1}{4}r_1^2 \tag{5.25}$$

Из (5.25) следует, что в случае (5.19) имеются дополнительные решения, если

$$l = L/2+\delta, \qquad \delta^2 < \frac{r_1^2}{4} \leq \frac{L^2}{4} \tag{5.26}$$

Минимальное значение $\beta_{\rm min}$ определяется условием

$$\beta_{\rm min} + l = L \tag{5.27}$$

которое совпадает с максимальным значением (5.17) для базовых решений. Радиус $R_{\rm ad}$ соответствующего сечения сферы (5.20) имеет вид

$$R_{\rm ad} = r_2\sin\theta_0 = \sqrt{r_1^2-4\delta^2} \tag{5.28}$$

Радиус $R_{\rm ad}$ совпадает с радиусом (5.18). Решения показаны на рисунке 1.

Действие границы $x^5 = L/2$ Изменяет поверхность сферы базовых решений. Множество всех решений имеет форму двух сомкнутых сферических сегментов разного радиуса. Ограничение (4.50) на электрический заряд частицы прямо связано с конечной длиной звеньев мировой цепи. В дискретной геометрии пространств-времени (5.1) длина звена мировой цепи по необходимости конечна (а не бесконечно мала), потому что бесконечно малых длин не существует. В непрерывной геометрии пространства-времени, длина звена мировой цепи может быть в принципе бесконечно малой. В этом случае компактификация пространства-времени не ограничивает максимального значения электрического заряда.

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что электрический заряд стабильной элементарной частицы равен $0, \pm e_0$, где e_0 есть элементарный заряд частицы.

6 Ограничение на максимальный заряд элементарной частицы

Таким образом компактификация пространства-времени Калуцы-Клейна приводит к дискриминации некоторых значений зарядовой составляющей p_5 зарядовой составляющей импульса (заряда). Дискриминация является следствием того факта, что не все звенья мировой цепи элементарной частицы возможны в компактифицированной геометрии. При традиционном подходе к геометрии

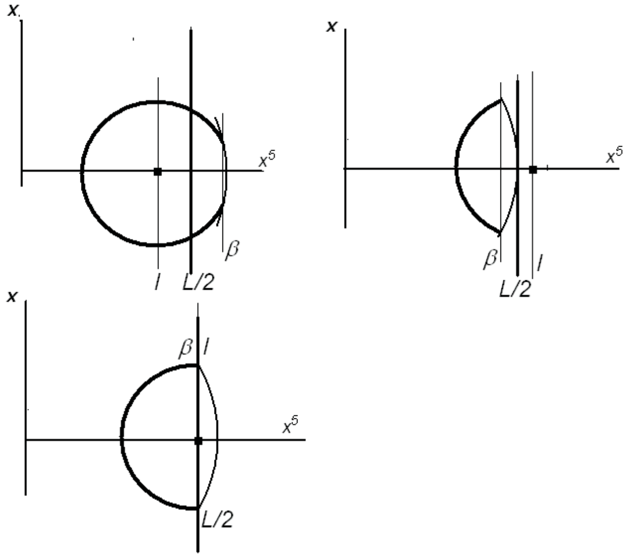

Рис. 1: Множества решений в зависимости от значения l, показанного маленьким черным квадратом. Базовые решения показаны толстыми линиями. Дополнительные решения показаны тонкими линиями.

Калуцы-Клейна, когда геометрия пространства-времени строится как риманова геометрия (а не физическая геометрия), отсутствует дискриминация максимального значения составляющей p_5 импульса частицы.

Во всех случаях электрический заряд имеет вид $e = ne_0$, где e_0 есть элементарный заряд, и n есть целое число. Этот факт связан с периодичностью волновой функции по пятой координате x^5. Усредняя случайные мировые цепи, получаем динамическое уравнение типа уравнения Шредингера. В области, где точка P_2 вектора $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ расположена на сфере (5.8), это уравнение имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_5}\frac{\partial^2\psi}{\partial\left(x^5\right)^2} - \frac{\hbar^2}{2m_5}\boldsymbol{\nabla}^2\psi \tag{6.1}$$

В других областях это уравнение несколько видоизменяется. Мы не будем принимать во внимание это изменение и используем уравнение (6.1) для приближенной оценки связи между периодом $2L$ и возможными значениями элементарной длины λ_0.

Решение уравнения (6.1) имеет вид

$$\psi\left(t, \mathbf{x}, x^5\right) = \sum_n a_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t + i\frac{\mathbf{p}_n\mathbf{x}}{\hbar} + i\frac{(p_5)_n}{\hbar}x^5\right) \tag{6.2}$$

где

$$(p_5)_n = \frac{e}{\varkappa c}n, \qquad E_n = c\sqrt{m_5^2c^2 + p_n^2 + (p_5)_n^2} \tag{6.3}$$

n есть целое число, $\varkappa$ есть универсальная постоянная (3.2). a_n суть произвольные комплексные числа. Величина $m_5 = \text{const}$ есть 5-масса частицы, тогда как обычная масса $m = \sqrt{m_5^2 + p_n^2 c^{-2}}$ зависит от составляющей p_5 импульса. Для того, чтобы ψ была однозначной функцией x^5, составляющая p_5 импульса должна иметь вид

$$(p_5)_n = \frac{\hbar}{2L} k_n, \qquad k_n \text{ есть целое число} \tag{6.4}$$

Волновая функция (6.2) должна описывать стационарное состояние, потому что в нестационарном состоянии заряженная частица излучает электромагнитные волны. В результате частица очень быстро оказывается в стационарном состоянии, где плотность заряда и плотность тока заряда постоянны, и частица перестает излучать. Волновая функция (6.2) однозначна, если все E_n в сумме (6.2) равны и любое E_n не изменяется при при вариации k_n. Эти условия выполняются, если сумма (6.2) содержит только один член, и составляющая p_5 импульса имеет вид

$$p_5 = \frac{\hbar}{2L} s \tag{6.5}$$

где s есть некоторое целое число.

Из сравнения соотношений (6.3) и (6.5) следует, что

$$\varkappa = \frac{\hbar e_0}{2Lc} \tag{6.6}$$

где e_0 есть элементарный электрический заряд, и $2L$ есть период пятой координаты x^5.

С другой стороны, составляющая p_5 импульса вдоль пятого направления связана с составляющей π_5 геометрического импульса вдоль пятого направления с помощью соотношения

$$p_5 = bc\pi_5 \tag{6.7}$$

В соответствии с соотношением (4.50), где универсальная постоянная b определяется соотношением (2.5),

$$|\pi_5| = |l| < \frac{L}{2}, \tag{6.8}$$

Используя соотношения (6.5), (6.7), (6.8), получаем

$$\pi_5 = \frac{p_5}{bc} = \frac{1}{bc}\frac{\hbar}{2L} s = \frac{\lambda_0^2}{L} s \tag{6.9}$$

и

$$\lambda_0 < \frac{L}{\sqrt{2\,|s|}} \tag{6.10}$$

Таким образом, если

$$\frac{L}{2} < \lambda_0 < \frac{L}{\sqrt{2}} \tag{6.11}$$

$|s| = 1$, и модуль $|e|$ заряда e стабильной элементарной частицы не больше, чем элементарный заряд e_0. Вообще говоря, приближение (6.1) слишком грубо, и соотношение (6.11) нельзя рассматривать как верное соотношение. Тем не менее соотношение (6.11) показывает, что период $2L$ пятой координаты x^5 имеет порядок λ_0, и возможно, такое взаимоотношение между L и λ_0, что модуль $|e|$ заряда e стабильной элементарной частицы не больше элементарного заряда e_0.

Таким образом, компактификация геометрии пространства-времени Калуцы-Клейна накладывает ограничения на возможный электрический заряд элементарной частицы. Нужно только использовать физическую геометрию, которая применяет единый формализм для описания непрерывных и дискретных геометрий.

7 Заключительные замечания

Дискретность пространства-времени в микромире кажется более простым и естественным предположением, чем предположение о непрерывном пространстве-времени, оборудованном квантовыми принципами. Дискретность пространства-времени позволяет описывать квантовые эффекты без ссылки на квантовые принципы. Описывая дискретность пространства-времени, элементарная длина λ_0 определяет квантовую постоянную $\hbar$. Дискретность пространства-времени оказывается совместной с его однородностью и изотропией. Однако, эта совместность может быть понята только в рамках физической геометрии, которая использует один и тот же формализм для описания дискретных и непрерывных геометрий. Комбинация дискретного пространства-времени с его компактификацией позволяет получить ограничения на электрический заряд стабильных элементарных частиц. Эти ограничения известны из экспериментов, но им нет объяснения в рамках квантовой теории

Список литературы

[1] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), *e-print http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002.*

[2] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* 7 Auflage, B.G.Teubner, Leipzig, Berlin, 1930.

[3] Yu.A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J.Math. Phys.* **31**, 2876-2890 (1990).

[4] Yu. A. Rylov, Multivariance as a crucial property of the microcosm physics. *e-print*, *http://arXiv.org/abs/0806.1716.*

[5] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, 2092-2098, (1991).

[6] O.Klein, Quantentheorie and funfdimensionale Relativitatstheorie. *Zeits.f.Physik*, **37**, 895 (1926).

[7] Ю.Владимиров, *Геометрофизика*, Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.