# Динамика стохастических систем и особенности измерений в них

Ю.А. Рылов

Институт Проблем механики РАН,
Россия, Москва 119526, проспект Вернадского 101-1
e-mail: rylov@ipmnet.ru

**Аннотация**

Обращается внимание на тот факт, что стохастические физические системы не являются полностью случайными. Их эволюция содержит как регулярную, так и стохастическую составляющие. Динамические системы рассматриваются как частный случай физических систем с нулевой стохастической составляющей эволюции. Разработан математический формализм для описания регулярной составляющей эволюции физических систем (стохастических и детерминированных). Регулярная составляющая эволюции системы $\mathcal{S}$ описывается явно среднестатистической системой $\langle\mathcal{S}\rangle$, которая является детерминированной (динамической) системой. Действие $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$ для $\langle\mathcal{S}\rangle$ приводится к виду действия $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm red}[\mathcal{S}_{\rm d}]}$ для набора $\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ тождественных взаимодействующих детерминированных систем $\mathcal{S}_{\rm d}$. Вид взаимодействия систем $\mathcal{S}_{\rm d}$ неявно описывает характер стохастической составляющей эволюции системы $\mathcal{S}$. Обсуждаются взаимоотношения в процессе измерения между физической системой $\mathcal{S}$ и среднестатистической динамической системой $\langle\mathcal{S}\rangle$. Имеется, по крайней мере, два вида измерений: отдельные измерения ($S$-измерения), связанные с измерениями в $\mathcal{S}$ и массовые измерения ($M$-измерения), связанные с измерениями в $\langle\mathcal{S}\rangle$. Отождествление $S$-измерения и $M$-измерения является источником недоразумений и парадоксов.

## 1 Введение

Рассмотрим некоторую физическую систему $\mathcal{S}$. Ее временна́я эволюция может быть детерминированной или стохастической. В первом случае физическая система $\mathcal{S}$ ассоциируется с некоторой динамической системой. Динамическая система $\mathcal{S}_{\rm d}$ есть совокупность состояния системы, описываемого динамическими переменными $X$, и динамических уравнений, описывающих эволюцию состояния $X$. Если число динамических переменных конечно или счетно, динамическая система $\mathcal{S}_{\rm d}$ называется дискретной динамической системой. Эволюция состояния $X = \{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\}$, $\mathbf{x} = \{x^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, ..., n$ дискретной динамической системы $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ описывается функционалом действия

$$\mathcal{S}_\mathrm{d}: \quad \mathcal{A}[\mathbf{x}] = \int L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}},)\, dt, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{1.1}$$

Решения динамических уравнений являются экстремалями функционала (1.1). Они получаются в результате варьирования действия по переменным $\mathbf{x}$.

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta x^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, ..., n \tag{1.2}$$

Канонический импульс $p = \{p_0, \mathbf{p}\} = \{p_i\}$, $i = 1, 2, ...n$ ассоциируется с дискретной динамической системой $\mathcal{S}_\mathrm{d}$

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, ...n; \qquad p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\beta}\dot{x}^\beta - L \tag{1.3}$$

Если динамические переменные $X$, описывающие состояние динамической системы $\mathcal{S}_\mathrm{d}$, образуют непрерывное множество, то система $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ называется непрерывной динамической системой. Динамические переменные $X = u = \{u_B\}$, $B = 1, 2, ...s$ непрерывной динамической системы маркируются некоторыми величинами $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, ..., x^n\}$. Зависимые переменные $u = \{u_B\}$, $B = 1, 2, ...s$ рассматриваются как функции независимых переменных $x = \{t, \mathbf{x}\} = \left\{x^k\right\}$, $k = 0, 1, ...n$, где $t = x^0$ есть время.

Непрерывная динамическая система описывается функционалом действия

$$\mathcal{S}_\mathrm{d}: \quad \mathcal{A}[u] = \int \mathcal{L}(u, \partial_k u_B)\, d^{n+1}x, \qquad \partial_k u_B \equiv \frac{\partial u_B}{\partial x^k}, \qquad d^{n+1}x = \prod_{k=0}^{k=n} dx^k \tag{1.4}$$

Величина $\mathcal{L}$ называется плотностью функции Лагранжа.

Динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ получаются как уравнения для экстремалей функционала действия (1.4) с помощью варьирования по зависимым переменным $u$

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta u_B} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_B} - \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{B,k}}\right) = 0, \qquad B = 1, 2, ...s \tag{1.5}$$

Здесь и далее по повторяющимся латинским индексам предполагается суммирование от 0 до $n$. Поток $j^k(x)$

$$j^k(x) = \sum_{B=1}^{B=s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{B,k}} u_B \tag{1.6}$$

и тензор энергии-импульса $T_l^k(x)$

$$T_l^k(x) = \sum_{B=1}^{B=s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{B,k}} u_{B,l} - \delta_l^k \mathcal{L} \tag{1.7}$$

суть физические величины являющиеся атрибутами непрерывной динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$.

Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является дискретной стохастической системой, т.е. такой системой, чье состояние описывается конечным или счетным числом переменных и для которой не существует динамических уравнений. Понятие состояния для стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ несколько условно, потому что динамических уравнений нет и можно изменить число переменных $X$, описывающих состояние системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Мы будем рассматривать дискретную стохастическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ как дискретную динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, чье эволюция подпорчена влиянием некоторого стохастического агента. Тогда динамические переменные $X$, описывающие состояние динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, можно рассматривать как переменные, описывающие состояние соответствующей стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$.

Отсутствие динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ не означает, что эволюция системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является полностью стохастической и не имеет ничего регулярного. Можно выделить регулярную составляющую $\mathcal{C}_{\mathrm{reg}}$ эволюции системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, если проследить за эволюцией многих одинаковых независимых систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, начинающих эволюцию с одинаково приготовленных состояний. Такое множество динамических или стохастических систем называется статистическим ансамблем $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]$ систем $\mathcal{S}$, где $N$ есть число систем $\mathcal{S}$ в ансамбле $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]$.

Рассмотрим статистический ансамбль $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, состоящий из многих ($N \to \infty$) стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Из-за независимости систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ стохастические составляющие эволюции состояния компенсируются, а регулярные составляющие накапливаются. В результате при $N \to \infty$ остается только регулярная составляющая эволюции состояния. Состояние статистического ансамбля эволюционирует детерминировано (регулярно). Формально это обстоятельство проявляется в том, что статистический ансамбль $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ оказывается динамической системой, для которой существуют динамические уравнения. Однако, статистический ансамбль $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ является непрерывной динамической системой, хотя составляющие его системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ дискретны и случайны.

Существование регулярной составляющей эволюции стохастических систем позволяет работать со стохастическими системами как с динамическими системами, чья эволюция подпорчена случайной составляющей эволюции. При этом мы должны изменить наш подход к эволюции дискретных физических систем $\mathcal{S}$. Любая физическая система ($\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$) рассматривается как стохастическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, содержащая как регулярную составляющую $\mathcal{C}_{\mathrm{reg}}$ эволюции, так и стохастическую $\mathcal{C}_{\mathrm{st}}$. Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ (детерминированная физическая система) есть специальный случай системы $\mathcal{S}$, когда стохастическая составляющая эволюции обращается в нуль $\mathcal{C}_{\mathrm{st}} = 0$. Регулярная составляющая эволюции $\mathcal{C}_{\mathrm{reg}}$ дискретной физической системы $\mathcal{S}$ описывается среднестатистической динамической системой $\langle\mathcal{S}\rangle$. Среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ есть непрерывная динамическая система даже в том случае, когда $\mathcal{S}$ является дискретной динамической системой $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Другими словами, $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\rangle$ не совпадает, вообще говоря, с $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, потому что $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\rangle$ есть непрерывная динамическая система, тогда как $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть дискретная система.

Такая ситуация возникает потому, что описание системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ как частного случая физической системы $\mathcal{S}$ более информативно, чем описание системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ как дискретной динамической системы. Среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ описывает обе эволюционные составляющие $\mathcal{C}_{\mathrm{reg}}$ и $\mathcal{C}_{\mathrm{st}}$. Регулярная составляющая $\mathcal{C}_{\mathrm{reg}}$ описывается, когда $\langle\mathcal{S}\rangle$ рассматривается как непрерывная динамическая система. Стохастическая составляющая $\mathcal{C}_{\mathrm{st}}$ описывается с помощью приведения действия $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$ для системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ к виду действия $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}}$ для непрерывного множества $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ одинаковых дискретных динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, взаимодействующих между собой. Тогда вид взаимодействия систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ маркирует и неявно описывает стохастическую эволюционную составляющую $\mathcal{C}_{\mathrm{st}}$.

Формально эволюция стохастической составляющей $\mathcal{C}_{\mathrm{st}}$ описывается введением новой зависимой динамической переменной. В простейшем случае, когда динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть свободная частица, эта дополнительная переменная есть скорость $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\left(t,\mathbf{x}\right)$, описывающая среднее значение стохастической составляющей эволюции $\mathcal{C}_{\mathrm{st}}$ (случайная скорость). Это выглядит следующим образом.

Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть стохастическая частица, чье состояние $X$ описывается переменными $\left\{\mathbf{x},\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\}$, где $\mathbf{x}$ описывает положение частицы. Эволюция состояния частицы случайна, и не существует динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Эволюция состояния $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ содержит как регулярную так и стохастическую составлющие. Чтобы отделить регулярную составляющую, рассмотрим множество (статистический ансамбль) $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ из многих одинаковых независимых стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Все стохастические частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ стартуют с одного и того же начального состояния. Это означает, что все $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ приготовляются одним и тем же путем. Если число $N$ систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ очень велико, сучайные элементы эволюции компенсируют друг друга, а регулярные составляющие эволюции накапливаются. В пределе $N\to\infty$ статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ превращается в динамическую систему, чье состояние эволюционирует в соответствии с некоторыми динамическими уравнениями.

Пусть статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ классических детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ описывается действием $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)]}$, где $P$ параметры, описывающие $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ (например, масса, заряд). Пусть под действием некоторого стохастического агента детерминированная частица $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ превращается в стохастическую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}$ для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ приводится к действию $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]}=\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}$ для некоторого множества $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ тождественных взаимодействующих детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]}$ как функционал от $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ имеет вид $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P_{\mathrm{eff}})]}$, где параметры $P_{\mathrm{eff}}$ суть параметры $P$ детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, усредненные по статистическому ансамблю, и это усреднение описывает взаимодействие частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в множестве $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$. Это означает, что

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}=\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)]}=\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P_{\mathrm{eff}})]} \tag{1.8}$$

Другими словами стохастичность частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ в ансамбле $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ заменяется взаимодействием $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$, и это взаимодействие описывается заменой

$$P \to P_{\mathrm{eff}} \tag{1.9}$$

в действии $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)]}$.

Действие для ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ свободных детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(m)]}[\mathbf{x}] = \int L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) dt d\boldsymbol{\xi}, \tag{1.10}$$

где функция Лагранжа описывается соотношением

$$L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = -mc^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 \tag{1.11}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Здесь переменные $\boldsymbol{\xi}$ маркируют частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$. Действие (1.10) описывает некоторую жидкость без давления.

Масса $m$ есть единственный параметр для свободной незаряженной частицы. Если стохастичность квантовая, то замена (1.9) имеет вид

$$m \to m_{\mathrm{eff}} = m\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2c^2} + \frac{\hbar}{2mc^2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right) \tag{1.12}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ есть среднее значение стохастической составляющей скорости. Квантовая постоянная $\hbar$ появляется здесь как постоянная связи, описывающая взаимодействие между регулярной и стохастической составляющими движения частицы. Скорость $\mathbf{u}$ предполагается малой по сравнению со скоростью света $c$. Мы должны сделать замену (1.12) только в первом члене выражения (1.11), потому что та же замена во втором члене дает величину порядка $O(c^{-2})$. После замены (1.12) действие (1.10) превращается в действие

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(m_{\mathrm{eff}})]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) + L_{\mathrm{st}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})\, dt d\boldsymbol{\xi}, \tag{1.13}$$

$$L_{\mathrm{st}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}) = \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} \tag{1.14}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, но $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ есть функция от $t, \mathbf{x}$. Действие (1.13) также описывает жидкость, но теперь это жидкость с давлением, и ее потенциальное течение описывается уравнением Шредингера [5].

Итак, по существу замена (1.12) описывает *процедуру квантования*, потому что она вводит квантовую постоянную $\hbar$ и добавочную динамическую переменную $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, описывающую стохастическую составляющую. Действие (1.13) описывает свободную квантовую частицу $\langle \mathcal{S}_{\mathrm{st}} \rangle$ полностью, и нет небходимости в дополнительных предположениях (например, в принципах квантовой механики). В принципе замена (1.9) допускает модификацию или коррекцию процедуры квантования, при условии что вместо замены (1.12) используется другая замена. В традиционной квантовой механике такая модификация процедуры квантования невозможна, потому что она определяется принципами квантовой механики. Другими словами, квантовая система есть только одна из возможных стохастических систем.

Описание физической системы $\mathcal{S}$ с помощью среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ есть статистическое описание системы $\mathcal{S}$, потому что это описание ссылается на много тождественных систем $\mathcal{S}$. Статистическое описание не может предсказать результат измерения некоторой физической величины $\mathcal{R}$. Статистическое описание предсказывает только вероятность $w(R')$ получения результата $R'$ измерения, но не самого результата $R'$. Это означает, что любое предсказание статистического описания проверяется массовым измерением ($M$-измерением), т.е. с помощью многих отдельных одинаковых экспериментов. Это верно даже в том случае, когда предсказание является совершенно определенным, например, когда $w(R') = 1$, или $w(R') = 0$. Для проверки правильности предсказания $w(R') = 1$ не достаточно произвести один эксперимент и получить результат $R'$. Нужно произвести много измерений и получить результат $R'$ во всех случаях.

Описание системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ как дискретной динамической системы предполагает, что $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть детерминированная физическая система. Тот факт, что $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть детерминированная физическая система, не проверяется в эксперименте. Предполагается, что повторные измерения дают один и тот же результат, и нет необходимости это проверять. Этот подход правилен, если только наш мир полностью детерминирован. Он не может быть использован, если есть стохастические физические системы, и нельзя знать заранее, является ли данная физическая система детерминированной или стохастической.

Описывая дискретные динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ как дискретные динамические системы, мы предсказываем результат измерения некоторой величины $\mathcal{R}$, но не вероятность результата. Это возможно только, если все возможные физические системы являются детерминированными, и мы заранее уверены в том, что рассматриваемые физические системы суть динамические системы.

Реальный мир не является полностью детерминированным. В нем имеются стохастические системы (например, квантовые системы), поэтому следует описывать статистически даже те физические системы, которые мы считаем детерминированными. Если физическая система $\mathcal{S}$, будучи на самом деле детерминированной $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, описывается как $\langle\mathcal{S}\rangle$, то детерминированный характер системы $\mathcal{S}$ может быть получен из вида статистического описания в терминах среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$. Другими словами, всякую физическую систему $\mathcal{S}$ следует описывать как стохастическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, используя среднестатистическую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$ как главный объект динамики, описывающий регулярную и стохастическую составляющие эволюции физической системы. Такой подход к динамике физических систем мы будем называть динамической концепцией статистического описания (ДКСО).

Пусть $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}\right]$ есть статистический ансамбль, состоящий из $N$ независимых одинаковых стохастических систем $\mathcal{S}$. Если $N$ достаточно велико, $(N\to\infty)$, то $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}\right]$ есть детерминированная физическая система независимо от того, является ли $\mathcal{S}$ детерминированной системой или нет. Пусть $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]}$ есть действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}\right]$. Поскольку статистический ансамбль состоит из одинаковых независимых систем, его действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]}$ обладает свойством

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[aN,\mathcal{S}]}=a\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]},\qquad a>0,\qquad a=\mathrm{const},\qquad N,aN\gg 1 \tag{1.15}$$

Рассмотрим статистический ансамбль, чье действие $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$ имеет вид

$$\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]} \tag{1.16}$$

Детерминированную физическую систему, для которой действие имеет вид (1.16), будем называть среднестатистической системой $\langle\mathcal{S}\rangle$. Система $\langle\mathcal{S}\rangle$ есть статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}\right]$, нормированный на одну систему. В соответствии с определением (1.16) и свойством (1.15) действие $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$ для среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ инвариантно относительно преобразования

$$N\to aN,\qquad a>0,\qquad a=\mathrm{const} \tag{1.17}$$

Формально среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ может рассматриваться как статистический ансамбль, состоящий из одной системы $\mathcal{S}$. В тоже самое время в соответствии с (1.16) этот статистический ансамбль $\langle\mathcal{S}\rangle$ есть детерминированная физическая система, потому что для $\langle\mathcal{S}\rangle$ имеется действие, и это действие построено из действия для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}\right]$ с очень большим числом $N$ элементов $(N\to\infty)$.

Состояние $X$ нерелятивистской детерминированной системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть точка в фазовом пространстве. Состояние ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ есть плотность $d\left(X\right)$ состояний $X$ в фазовом пространстве. Величина $dN=d(X)dX$ может рассматриваться как число элементов ансамбля, чьи состояния находятся внутри интервала $(X,X+dX)$. Число $d(X)dX$ состояний внутри фазового объема всегда неотрицательно. При надлежащей нормировке величина $d\left(X\right)$ может быть интерпретирована как плотность вероятности. В случае нерелятивистской системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ можно рассчитать среднее значение $\langle f\left(X\right)\rangle$ по статистическому ансамблю $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ от любой функции $f$ состояния $X$ системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$.

В общем случае релятивистской стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ для описания эволюции стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ используется статистический ансамбль $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Состояние ансамбля $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]$ также определяется величиной $d(X)$, которая описывает распределение (плотность) состояний $X$ отдельных элементов $\mathcal{S}$ ансамбля $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]$. Но в случае релятивистской системы распределение $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ не является плотностью точек в фазовом пространстве. Состояние $d\left(X\right)$ есть довольно сложная тензорная величина. Ранг тензора $d\left(X\right)$ зависит от числа частиц в физической системе $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$.

В любом случае величина $d(X)$ не является скаляром и не может быть истолкована как плотность вероятности, потому что она может быть отрицательной. Это приводит к тому, что число элементов ансамбля $dN$ в состоянии, лежащем в интервале $(X, X + dX)$, может оказаться отрицательным. Возможность появления отрицательного числа элементов ансамбля связано с существованием систем (антисистем), эволюционирующих в направлении, обратном направлению возрастания времени. Например, частица описывается ее мировой линией $\mathcal{L}$ в пространстве-времени. При этом считается, что мировая линия имеет ориентацию (единичный вектор $n^i$, касательный к $\mathcal{L}$). Этот вектор описывает направление эволюции системы. Если этот вектор направлен в будущее, то $\mathcal{L}$ описывает эволюцию частицы. Если он направлен в прошлое, то $\mathcal{L}$ описывает эволюцию античастицы. Таким образом, частица и античастица различаются направлением временно́й эволюции, т.е. знаком временно́го компонента $n^0$ вектора $n^i$.

Поскольку в релятивистском случае, вообще говоря, нельзя ввести плотность вероятности состояния $X$, то нельзя подсчитать среднюю величину $\langle f(X)\rangle$. Однако, можно рассчитать средние значения $\langle A\rangle$ аддитивных величин $A$: число частиц $n$, энергию $E$, импульс $\mathbf{P}$ и угловой момент $M^{\alpha\beta}$. Это оказывается возможным, потому что статистический ансамбль $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}]$ есть набор независимых динамических систем $\mathcal{S}$, и если $E$ есть энергия системы $\mathcal{S}$, то энергия ансамбля $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}]$ есть сумма энергий отдельных систем $\mathcal{S}$, образующих $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}]$. Однако, среднее значение $\langle f(A)\rangle$ некоторой функции $f$ от аддитивных величин $A = n, E, \mathbf{P}, M^{\alpha\beta}$, вообще говоря, вычислить нельзя. Например, $\langle E^2\rangle$, вообще говоря, вычислить нельзя. В этом смысле такое описание динамики стохастических систем менее информативно, чем вероятностное описание. Потеря информативности связана с тем фактом, что распределение $d(X)$ может быть отрицательным и не может быть истолковано как плотность вероятности состояния $X$.

Существует несколько причин, почему в релятивистском случае распределение $d(X)$ может быть отрицательным. Мы укажем только одну из них: описание рождения и уничтожения пар.

Частица и античастица являются двумя различными состояниями одного физического объекта – мировой линии. Мировую линию рассматриваемую как физический объект (а не как способ описания эволюции частицы) мы будем обозначать посредством МЛ и называть эмлоном (это способ прочтения аббревиатуры МЛ). Следует иметь в виду, что рассмотрение частицы и античастицы как двух разных состояний МЛ и связанная с этим возможность эволюции физической системы в обратном направлении совершенно необходимы, если мы хотим, чтобы число физических систем сохранялось в теории и в то же время она описывала такие процессы, как рождение и аннигиляция пар частиц. Если частицу и античастицу рассматривать как две различные физические системы, отличающиеся значением некоторого параметра, то в процессе аннигиляции частицы и античастицы происходит уменьшение числа систем на два. Совершенно непонятно, каким образом можно описывать в классической теории изменение числа физических систем.

Если принимается, что МЛ (эмлон) есть реальный физический объект, то сечение эмлона гиперплоскостью $t =$const (СМЛ) образует два сорта точечных обектов (частицу и античастицу). Число $dN$ этих точечных объектов (СМЛ) в 3-объеме $dS_k$ определяется соотношением

$$dN = j^k dS_k$$

где $j^k$ есть коэффициент пропорциональности, описывающий плотность эсэмлонов (так мы прочитываем аббревиатуру СМЛ) внутри 3-объема $dS_k$. Число $dN$ эсэмлонов может иметь любой знак, потому что составляющая $j^0$ может иметь любой знак для фиксированного $dS_k$. Мы принимаем, что знак числа эсэмлонов $dN$ положителен для частиц и отрицателен для античастиц. Термин "СМЛ" (эсэмлон) используется как коллективное понятие по отношению к терминам "частица" и "античастица". Если, например, имеется одна частица и одна античастица, то полное число эсэмлонов равно нулю, и это число не изменяется в процессе аннигиляции. Если мы связываем динамическую систему с отдельным эсэмлоном, то для сохранения числа динамических систем (СМЛ) в динамической теории необходимо рассматривать распределения $d(X)$ (в данном случае $d(X) = j^k(x)$), где $d$ может быть любым вещественным числом.

Тот факт, что распределение $d$, описывающее состояние статистического ансамбля $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}_{\rm st}]$, может быть отрицательным, создает определенные проблемы при интерпретации. В частности, $d(X)$ уже не может интерпретироваться как плотность вероятности. Например, состояние с одним физическим объектом (одна физическая система) уже не может рассматриваться как состояние с одной частицей. Это может быть состояние с двумя частицами и одной античастицей, тремя частицами и двумя античастицами и т.д. Однако, только такое описание эволюции статистического ансамбля $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}]$, где число физических систем не изменяется, оказывается возможным в классической теории. Что касается интерпретации, то этот вопрос будет рассмотрен ниже.

В общем случае распределение $d(X)$, описывающее состояние ансамбля, оказывается тензорной величиной. Ранг тензора зависит от числа эмлонов в динамической системе $\mathcal{S}$. В случае нерелятивистских детерминированных систем $\mathcal{S}$ возможен нерелятивистский вариант описания статистического ансамбля $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}]$. Однако, в случае стохастических нерелятивистских систем $\mathcal{S}$ статистический ансамбль $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}]$ следует описывать, пользуясь общим релятивистским методом, так как стохастическая составляющая эволюции может оказаться релятивистской даже в том случае, когда регулярная является нерелятивистской.

Рассматривая детерминированную физическую систему $\mathcal{S}_{\rm d}$ как частный случай динамической системы $\mathcal{S}$, мы вынуждены исследовать $\langle \mathcal{S}_{\rm d} \rangle$ вместо $\mathcal{S}_{\rm d}$. Только в этом случае методы описания $\mathcal{S}_{\rm d}$ и $\mathcal{S}_{\rm st}$ оказываются одинаковыми. В самом деле, если $\mathcal{S}_{\rm st}$ описывается как $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$, нам нужно описывать $\mathcal{S}$ как $\langle \mathcal{S} \rangle$ даже в том случае, когда стохастическая составляющая эволюции системы $\mathcal{S}$ стремится к нулю, и $\mathcal{S} \to \mathcal{S}_{\rm d}$. В этом случае описание системы $\mathcal{S}$ стремится к

$\langle \mathcal{S}_{\rm d} \rangle$, но не к $\mathcal{S}_{\rm d}$. С формальной точки зрения правильно описывать все системы $\mathcal{S}$ как $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$, чтобы избежать скачка описания, когда $\mathcal{S}$ совпадает с $\mathcal{S}_{\rm d}$.

Описание системы $\mathcal{S}$ как системы $\langle \mathcal{S} \rangle$, даже в случае, когда $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\rm d}$ приводит к тому, что основным объектом динамики всегда является среднестатистическая система $\langle \mathcal{S} \rangle$. Это означает, что формализм динамики имеет дело только со среднестатистическим системами $\langle \mathcal{S} \rangle$. Однако измерения над физической системой $\mathcal{S}$ связаны с рассмотрением обеих систем $\mathcal{S}$ и $\langle \mathcal{S} \rangle$. Очень важно делать различие между $\langle \mathcal{S} \rangle$ и $\mathcal{S}$ при рассмотрении экспериментов с стохастическими и детерминированными системами, потому что их смешение приводит к недоразумениям и парадоксам.

Наша концепция динамики стохастических и детерминированных систем может быть квалифицирована как динамическая концепция статистического описания (ДКСО). Эта концепция осуществляет *статистическое описание*, потому что основной объект динамики: среднестатистическая динамическая система $\langle \mathcal{S} \rangle$ построена на основе многих тождественных объектов $\mathcal{S}$. В то же самое время статистическое описание физических систем производится в безвероятностном виде, т.е. без использования теории вероятностей.

В ДКСО среднестатистическая система $\langle \mathcal{S} \rangle$ рассматривается как основной объект динамики. К этому побуждает и новейшее развитие пространственно-временно́й геометрии [1, 2, 3]. В соответствии с этой теорией пространства-времени геометрия пространства-времени есть причина того, что движение частиц является изначально стохастическим. Влияние этой стохастичности на движение частицы тем больше, чем меньше масса частицы. Это означает, что детерминированное движение частиц следует объяснять через стохастическое, а не наоборот, как это пытались делать раньше, когда движение частиц в пространстве-времени рассматривалось как изначально детерминированное.

Во втором разделе рассматриваются различные методы описания среднестатистических систем $\langle \mathcal{S} \rangle$. В третьем разделе рассматриваются особенности измерений в стохастических системах.

## 2 Методы описания статистических ансамблей

Итак, фундаментальным объектом динамики является чистый статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\rm p}[\mathcal{S}_{\rm d}]$ физических систем $\mathcal{S}_{\rm d}$. В нерелятивистской теории чистый статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\rm p}[\mathcal{S}_{\rm d}]$ детерминированных физических систем $\mathcal{S}_{\rm d}$ определяется как статистический ансамбль, функция распределения $F_{\rm p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ которого в фазовом пространстве гамильтоновых переменных $\mathbf{x} = \{x^\alpha\}$, $\mathbf{p} = \{p_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, ...n$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{E}_{\rm p}[\mathcal{S}_{\rm d}]: \qquad F_{\rm p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \rho(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(t, \mathbf{x})) \tag{2.1}$$

где $\rho(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \{P_\alpha(t, \mathbf{x})\}$, $\alpha = 1, 2, ...n$ суть функции только времени $t$ и обобщенных координат $\mathbf{x}$. Другими словами, чистый ансамбль $\mathcal{E}_{\rm p}[\mathcal{S}_{\rm d}]$ есть динамическая система, рассматриваемая в конфигурационном пространстве координат $\mathbf{x}$. Релятивистское обобщение чистого статистического ансамбля, определенного в виде (2.1), трудно, и для такого обобщения мы используем другие формы представления чистого статистического ансамбля. Имеется несколько различных форм представления.

Система (2.1) есть флюидообразная динамическая система в $n$-мерном пространстве $V_n$ координат $\mathbf{x}$. Действие $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ записывается как сумма действий для независимых детерминированных динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, каждая из которых описывается функцией Лагранжа $L\left(t,\mathbf{x},\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)$. Функционал действия для динамической системы, описываемой функцией распределения (2.1) может быть записан следующим образом

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]: \qquad \mathcal{A}_L[\mathbf{x}]=\int\limits_{V_\xi} \mathrm{d}^n\boldsymbol{\xi}\int L(t,\mathbf{x},\frac{d\mathbf{x}}{dt})\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}^n\boldsymbol{\xi}=\prod_{\alpha=1}^{\alpha=n}\mathrm{d}\xi_\alpha, \tag{2.2}$$

где зависимые переменные $\mathbf{x}=\{x^\alpha\}, \quad \alpha=1,2,...n$, рассматриваются как функции независимых переменных $\xi=\{t,\boldsymbol{\xi}\}=\{\xi_0,\boldsymbol{\xi}\}=\{\xi_k\}, \quad k=0,1,...n$. Переменные $\boldsymbol{\xi}$ маркируют элементы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ статистического ансамбля и изменяются внутри области $V_\xi$.

Число $N$ элементов $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в статистическом ансамбле $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ задается соотношением

$$N=\int\limits_{V_\xi}\mathrm{d}^n\boldsymbol{\xi}=\int\limits_{V_x}\rho\mathrm{d}^n x, \qquad \rho=\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,...\xi_n\right)}{\partial\left(x^1,x^2,...x^n\right)} \tag{2.3}$$

где $V_x$ есть область в пространстве $V_n$ координат $\mathbf{x}$, занятая жидкостью. Число $N$ предполагается очень большим $N\to\infty$. Свойства статистического ансамбля не зависят от числа $N$ его элементов при условии, что $N$ достаточно велико. Действие (2.2) пригодно для описания релятивистских динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Обобщение на случай стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ также возможно, хотя оно не очень очевидно.

Сделаем замену переменных в (2.2) и рассмотрим независимые переменные $\boldsymbol{\xi}$ как функции переменных $\mathbf{x}$, или рассмотрим $\xi=\{\xi_i\}$, $i=0,1,...n$ как функции переменных $x=\{x^i\}, \;\; i=0,1,...n$, причем $\xi_0$ есть фиктивная переменная и $x^0=t$ есть время. Тогда после интегрирования некоторых динамических уравнений действие (2.2) принимает вид [4, 5]

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]: \;\; \mathcal{A}_E[j,\varphi,\boldsymbol{\xi}]=\int\{L(x^0,\mathbf{x},\frac{\mathbf{j}}{j^0})j^0-j^ip_i\}\mathrm{d}^{n+1}x, \tag{2.4}$$

$$p_i=b_0\left[\partial_i\varphi+g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_i\xi_\alpha\right], \qquad i=0,1,...,n,, \qquad \partial_i\equiv\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.5}$$

где зависимые переменные $\rho,\ \varphi,\ \boldsymbol{\xi}=\{\xi_\alpha\}, \;\; \alpha=1,2,...n$ динамических систем $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ суть функции независимых переменных $\mathbf{x}=\{x^\alpha\}$, $\alpha=1,2,...n$. Здесь и далее производится суммирование по повторяющимся греческим индексам от 1 до $n$, а по латинским – от 0 до $n$. Поток флюида описывается вектором $j^i$

$$j^i=\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,i}}=\frac{\partial\left(x^i,\xi_1,\xi_2,...\xi_n\right)}{\partial\left(x^0,x^1,...x^n\right)}=J\frac{\partial x^i}{\partial x^0}, \qquad i=0,1,...n, \qquad \rho=j^0=\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,0}} \tag{2.6}$$

где определитель $J$ рассматривается как полилинейная функция переменных $\xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i \qquad i,k = 0,1,...n$

$$J \equiv \frac{\partial\left(\xi_0, \xi_1, ...\xi_n\right)}{\partial\left(x^0, x^1, ...x^n\right)} \equiv \det||\xi_{i,k}||, \qquad \xi_{i,k} \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} \equiv \partial_k \xi_i \qquad i,k = 0,1,...n \tag{2.7}$$

Переменная $\rho = j^0$ описывает плотность элементов ансамбля (плотность флюида). Величина $b_0$ есть произвольная ненулевая постоянная, а функции $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \left\{g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\right\}, \ \ \alpha = 1,2,...n$ суть произвольные функции аргумента $\boldsymbol{\xi}$. Величины $b_0$ и $\mathbf{g}$ являются результатом интегрирования динамических уравнений, возникающих в процессе замены переменных [4].

Атрибутами динамической системы $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ являются число $N$ динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ (частиц), поток $j^k$ частиц, тензор энергии-импульса $T_l^k$

$$T_l^k = -p_l j^k - \left\{L(x^0, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{j}}{j^0})j^0 - j^i p_i\right\}\delta_l^k, \tag{2.8}$$

и плотность углового момента $M^{ikl}$. Плотность импульса $p_k$ и плотность потока частиц $j^k$ задаются соответственно уравнениями (2.5) и (2.7). Число $N$ систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ описывается соотношением (2.3). Преобразование числа $N$ вида (1.17)

$$N \to \tilde{N} = a^n N \tag{2.9}$$

возникает при преобразовании $\boldsymbol{\xi}$ вида

$$\boldsymbol{\xi} \to \tilde{\boldsymbol{\xi}} = a\boldsymbol{\xi} \tag{2.10}$$

При этом преобразовании

$$j^k \to \tilde{j}^k = a^n j^k, \qquad g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \to \tilde{g}^\alpha(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) = g^\alpha(\boldsymbol{\xi})/a. \tag{2.11}$$

Тогда действие (2.4) преобразуется так же, как и $N$, т.е.

$$\mathcal{A} \to a^n \mathcal{A}. \tag{2.12}$$

Это означает, что действие (2.4) описывает статистический ансамбль. Действие (2.4) описывает статистический ансамбль детерминированных физических систем. Это следует из того факта, что действие (2.4) содержит производные только в направлении вектора $j^k$ в виде $j^k\partial_k \quad (\partial_k j^k = 0)$. В этом случае система уравнений в частных производных приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для того, чтобы действие (2.4) описывало статистический ансамбль стохастических систем, достаточно видоизменить его таким образом, чтобы действие перестало зависеть только от $j^k\partial_k$, но при преобразовании $\boldsymbol{\xi} \to \tilde{\boldsymbol{\xi}} = a\boldsymbol{\xi}$ вместе с (2.11) действие (2.4) продолжало бы преобразовываться в соответствии с (2.12).

Исключая переменные $j^k$ из действия (2.4), получаем [5] вместо (2.4)

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]: \qquad \mathcal{A}_E[\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}] = \int \rho\{-H\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right) - p_0\}\mathrm{d}^{n+1}x, \tag{2.13}$$

Величина $H(t,\mathbf{x},\mathbf{p}) = H(x^0,\mathbf{x},\mathbf{p})$ есть функция Гамильтона для детерминированной системы $\mathcal{S}_\mathrm{d}$. Переменная $\rho = j^0$ определяется с помощью (2.6), а величины $p_k$ задаются соотношениями (2.5).

Динамические переменные $\boldsymbol{\xi}$ интерпретируются как лагранжевы координаты, или как гидродинамические потенциалы (потенциалы Клебша [6, 7]). Они постоянны вдоль мировой линии любой частицы флюида.

Все три формы (2.2), (2.13), (2.4) действия эквивалентны и описывают одну и ту же вариационную проблему [5].

С помощью замены переменных действие (2.13) может быть преобразовано для описания в терминах волновой функции [4]. Введем $k$-компонентную комплексную функцию $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,\dots k$, определив ее с помощью соотношений

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u_\alpha^*(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1,2,\dots k \tag{2.14}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{k}\psi_\alpha^*\psi_\alpha$$

где (*) означает комплексное сопряжение, $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1,2,\dots k$ суть функции только переменных $\boldsymbol{\xi}$. Они удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial\xi_\beta}u_\alpha) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}), \qquad \beta = 1,2,...n, \qquad \sum_{\alpha=1}^{k}u_\alpha^*u_\alpha = 1 \tag{2.15}$$

$k$ есть такое натуральное число, что уравнения (2.15) допускают решение. Вообще говоря, $k$ зависит от вида произвольных функций интегрирования $\mathbf{g} = \{g^\beta(\boldsymbol{\xi})\}$, $\beta = 1,2,...n$.

Легко проверить, что

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad p_l = -\frac{ib_0}{2\psi^*\psi}(\psi^*\partial_l\psi - \partial_l\psi^*\cdot\psi), \qquad l = 0,1,...n \tag{2.16}$$

Тогда вариационная задача с действием (2.13) оказывается эквивалентной [4] вариационной задаче с функционалом действия

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] \;\; = \;\; & \int\left\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi)\right.\\ & \left.-H\left(x, -\frac{ib_0}{2\psi^*\psi}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)\right)\psi^*\psi\right\}\mathrm{d}^{n+1}x\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $\boldsymbol{\nabla} = \{\partial_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,...n$.

При описании с помощью действия (2.17) преобразование (2.9) числа $N$ систем $\mathcal{S}_\mathrm{d}$ появляется при преобразовании

$$\psi \to \tilde{\psi} = \alpha^{n/2}\psi \tag{2.18}$$

когда плотность потока $\mathbf{j}$ и плотность $\rho = j^0$

$$\mathbf{j} = -\frac{ib_0}{2}(\psi^* \boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \psi), \qquad \rho = \psi^*\psi \tag{2.19}$$

преобразуются по правилу (2.11). Тогда действие (2.17) преобразуется как (2.12), и, следовательно, является действием для статистического ансамбля. Как в случае действия (2.4) действия (2.13) и (2.17) также содержат производные только в комбинации $j^k\partial_k$ $(\partial_k j^k = 0)$, но увидеть это довольно трудно. Чтобы показать это для (2.13), следует использовать определение функции Гамильтона

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{x}}\mathbf{p} - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \qquad \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$$

Тогда, принимая во внимание, что $\mathbf{j} = \dot{\mathbf{x}} j^0 = \dot{\mathbf{x}}\rho$, плотность функции Лагранжа для (2.13)

$$\rho\{-H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) - p_0\} = \rho L\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{j}}{j^0}\right) - \mathbf{j}\mathbf{p} - \rho p_0 = \rho L\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{j}}{j^0}\right) - j^k p_k$$

приводится к плотности функции Лагранжа действия (2.4). Та же самая ситуация с действием (2.17), чья плотность функции Лагранжа приводится к плотности функции Лагранжа для (2.13).

Для того, чтобы действие (2.4) описывало статистический ансамбль стохастических систем достаточно, чтобы действие содержало производные не только в направлении вектора потока $j^k$ и в то же время действие (2.4) преобразовывалось бы в соответствии с (2.12) при преобразовании (2.9) числа элементов ансамбля.

Представим себе теперь, что функция Лагранжа в действии (2.4) дополнительно зависит от аргументов $s_k = h_k \partial_k \log\rho = h_k \partial_k \log j^0$, $s_{kl} = h_{kl}\partial_k\partial_l \log\rho$, $k, l = 0, 1, \ldots n$, (суммирования по $k$ и $l$ здесь нет), где $h_k$, $h_{kl}$ суть некоторые постоянные. Аргументы $s_k$ и $s_{kl}$ инвариантны относительно преобразования (2.9). Если функция Лагранжа $L$ в (2.4) зависит от $s_k$ и $s_{kl}$, то она преобразуется при преобразовании (2.9) точно так же, как она преобразовывалась бы, если бы она не зависела от $s_k$ и $s_{kl}$. Это означает, что действие остается действием для некоторого статистического ансамбля независимых динамических систем. Но теперь действие содержит производные не только в направлении вектора $j^k$. Тогда система динамических уравнений будет существенно такой системой уравнений в частных производных, которая не может быть приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Следовательно, статистический ансамбль не может рассматриваться как состоящий из детерминированных динамических систем, потому что в этом случае динамические уравнения могли бы быть приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая ситуация может интерпретироваться в том смысле, что элементы статистического ансамбля суть стохастические системы, и для них не существует динамических уравнений.

Разумеется, аналогичное рассмотрение справедливо для других форм (2.13), (2.2), (2.17) действия. В частности, если функция Гамильтона $H(\mathbf{x},\mathbf{p})$ в (2.17) взята в виде

$$H_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{8m}(\nabla \ln \rho)^2, \tag{2.20}$$

то динамическое уравнение для среднестатистической системы $\langle \mathcal{S} \rangle$ имеет вид уравнения Шредингера для свободной частицы, при условии, что *произвольная постоянная* $b_0$ *выбрана равной квантовой постоянной* $\hbar$*, и рассматривается случай потенциального течения флюида*, когда волновая функция $\psi$ может иметь только одну составляющую [4, 5].

Следует заметить, что рассмотрение статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$ с эффективной функцией Гамильтона, зависящей от переменных $s_k$ и $s_{kl}$ эквивалентно рассмотрению некоторого непрерывного множества $\mathcal{S}_{\text{q}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$ взаимодействующих детерминированных физических систем $\mathcal{S}_{\text{d}}$. Например, когда эффективная функция Гамильтона взята в виде (2.20), действие (2.2) принимает вид

$$\mathcal{S}_{\text{q}}[\mathcal{S}_{\text{d}}]: \qquad \mathcal{A}_{\text{q}}[\mathbf{x},\mathbf{u}_{\text{st}}] = \int \left\{ \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{m\mathbf{u}_{\text{st}}^2}{2} - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\text{st}} \right\} dt d^3\boldsymbol{\xi} \tag{2.21}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{u}_{\text{st}} = \mathbf{u}_{\text{st}}(t,\mathbf{x})$ есть новая динамическая переменная и $\boldsymbol{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}$. Новая динамическая переменная $\mathbf{u}_{\text{st}}$ есть функция от $\mathbf{x}$ и зависит от $\boldsymbol{\xi}$ через $\mathbf{x}$. Величина $\mathbf{u}_{\text{st}}$ может быть истолкована как средняя скорость стохастической составляющей. Последний член в (2.21) описывает влияние стохастичности на регулярную составляющую эволюции. Динамические уравнения, порожденные действием (2.21), для зависимых переменных $\rho$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_{\text{st}}$, $\boldsymbol{\xi}$ имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}(\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad m\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\right) = -\boldsymbol{\nabla} U_{\text{B}}(t,\mathbf{x})$$

$$\mathbf{u}_{\text{st}} = -\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi} = 0$$

где

$$\rho = \frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}, \qquad \mathbf{u} = \frac{\partial(\mathbf{x},\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}, \qquad U_{\text{B}}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla^2\sqrt{\rho}$$

Здесь $U_{\text{B}}(t,\mathbf{x})$ есть потенциал Бома, рассматриваемый как функция $t,\mathbf{x}$. Вводя

$$R = \rho^{-1} = \frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}$$

как полилинейную функцию переменных $x^{\alpha,\beta} = x^{\alpha,\beta}(t,\boldsymbol{\xi}) \equiv \partial x^\alpha/\partial \xi_\beta$ и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x^{\alpha,\beta}}\frac{\partial}{\partial \xi_\beta},$$

можно записать динамические уравнения в терминах независимых переменных $t, \boldsymbol{\xi}$

$$m\ddot{x}^{\alpha} = \frac{\hbar^2}{2mR}\frac{\partial R}{\partial x^{\alpha,\beta}}\frac{\partial}{\partial \xi_\beta}\left[\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial R}{\partial x^{\mu,\nu}}\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x^{\mu,\sigma}}\frac{\partial}{\partial \xi_\sigma}\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\right] \tag{2.22}$$

$$u_{\mathrm{st}}^{\alpha}(t, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\hbar}{2mR}\frac{\partial R}{\partial x^{\alpha,\beta}}\frac{\partial}{\partial \xi_\beta}\frac{1}{R},$$

Этот пример показывает, что свободная нерелятивистская квантовая система есть стохастическая физическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, чья регулярная составляющая эволюции описывается среднестатистической системой $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Динамическое уравнение для $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ есть свободное уравнение Шредингера. Формализм квантовой механики имеет дело только с $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ и полностью игнорирует $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Однако, при рассмотрении квантовых измерений мы имеем дело с обеими физическими системами $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Рассматривая квантовые измерения, иногда путают $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Это может приводить к недоразумениям и парадоксам.

Динамические уравнения (2.22) могут рассматриваться как уравнения для непрерывного множества тождественных детерминированных систем, маркируемых параметрами $\boldsymbol{\xi}$. Эти системы взаимодействуют между собой через некоторый самосогласованный потенциал $U_{\mathrm{B}}(t, \mathbf{x})$. Таким образом, ансамбль независимых стохастических систем $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ может рассматриваться как набор $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ взаимодействующих детерминированных систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, и вид их взаимодействия описывает характер стохастичности. При вероятностном описании стохастических систем (например, при традиционном описании броуновских частиц) характер стохастичности описывается с помощью вероятности перехода $w(X, X')$ из состояния $X$ в состояние $X'$. В ДКСО характер стохастичности описывается видом взаимодействия между детерминированными системами $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в непрерывном наборе $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}] = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ детерминированных систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$.

Обобщение действия на случай стохастических систем осуществляется наиболее просто в случае (2.17), когда действие описывается в терминах волновой функции. Для того чтобы действие было действием для статистического ансамбля, достаточно чтобы плотность функции Лагранжа была однородной функцией первого порядка от комбинации $\psi^*\psi$.

# 3 Измерение в стохастических системах

Рассмотрим некоторые проблемы измерений, проводимых над стохастическими системами $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, на примере квантовой механики, которая является частным случаем динамики стохастических систем. Квантовая механика есть аксиоматическая версия динамики стохастических систем, где волновая функция $\psi$ рассматривается как фундаментальный объект динамики, тогда как в ДКСО волновая функция есть только метод описания статистического ансамбля. В квантовой механике предполагается, что плотность функции Лагранжа для любой квантовой системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ есть линейная функция от $\psi$ и линейная функция от $\psi^*$. Тогда при преобразовании (2.8) условие (2.12 ) выполнено, и рассматриваемая динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$, описываемая с помощью волновой функции, может рассматриваться как чистый статистический ансамбль $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$. Если кроме того волновая функция нормирована на единицу, статистический ансамбль $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ превращается в среднестатистическую систему $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$.

Квантовая механика есть частный случай динамики стохастических систем, а квантовые системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ есть специальная, хорошо исследованная, разновидность стохастических систем. Обсуждая измерения над недетерминированными системами, мы будем иметь ввиду главным образом теорию квантовых измерений.

Математическая сторона проблемы квантовых измерений хорошо разработана [8, 9, 10]. К сожалению, практически все авторы игнорируют тот факт, что квантовая механика есть статистическая концепция, содержащая два сорта объектов: индивидуальные физические системы $\mathcal{S}$, и среднестатистические системы $\langle\mathcal{S}\rangle$. Математический формализм квантовой механики имеет дело только с $\langle\mathcal{S}\rangle$, описывая их в терминах волновой функции. Все предсказания квантовой механики делаются только для среднестатистических систем $\langle\mathcal{S}\rangle$, а не для индивидуальных систем $\mathcal{S}$.

В предыдущем разделе мы видели, что волновая функция описывает состояние среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$, или статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}\right]$, но не состояния индивидуальной системы $\mathcal{S}$. Производя отдельное измерение мы имеем дело с индивидуальной системой $\mathcal{S}$.

На самом деле, в квантовой механике имеются, по крайней мере, два различных вида измерений: отдельное измерение ($S$-измерение), т.е. измерение над индивидуальной системой $\mathcal{S}$, и массовое измерение ($M$-измерение), т.е. измерение над многими отдельными системами, составляющими статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}\right]$, или среднестатистическую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$. Свойства $S$-измерения и $M$-измерения совершенно различны, и их смешение приводит к недоразумениям.

$S$-измерение величины $\mathcal{R}$ производится над отдельной системой $S$ при помощи некоторого измерительного прибора $\mathcal{M}$. $S$-измерение приводит к определенному результату $R'$ и никак не влияет волновую функцию $\psi$, описывающую состояние системы $\langle S\rangle$ . Что касается состояния $X$ стохастической системы $S$, то оно случайно и не рассматривается квантовой механикой, которая описывает только воспроизводимые (регулярные) черты стохастических систем.

$M$-измерение величины $\mathcal{R}$ есть серия из $N$ ($N \to \infty$) $S$-измерений, производимых над отдельными системами $S$, образующими $\langle S\rangle$. Результат $M$-измерения есть некоторое распределение $f\left(R'\right)$ значений $R'$, потому что различные $S$-измерения, составляющие $M$-измерение, дают, вообще говоря, разные значения $R'$ величины $\mathcal{R}$. После $M$-измерения чистое состояние $\psi$ системы $\langle S\rangle$ превращается, вообще говоря, в смешанное состояние, описываемое матрицей плотности $\rho = |\psi_{R'}\rangle \left|\langle\psi|\psi_R\rangle\right|^2 \langle\psi_{R'}|$, где $|\psi_{R'}\rangle$ есть собственная функция оператора $R$ для величины $\mathcal{R}$, соответствующая собственному значению $R'$.

Согласно принципам квантовой механики воздействие измерителя $\mathcal{M}$ на измеряемую среднестатистическую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$ может быть только видоизменением гамильтониана $H$, описывающего эволюцию среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$. Однако, каким бы ни было это видоизменение гамильтониана, эволюция состояния происходит так, что чистое состояние $\psi$ среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ остается чистым. Тем не менее воздействие измерителя $\mathcal{M}$ на $\langle\mathcal{S}\rangle$ в состоянии $\psi$ приводит к переходу $\langle\mathcal{S}\rangle$ в смешанное состояние $\rho$. Качественно это объясняется тем, что измеритель $\mathcal{M}$ преобразует единый гамильтониан $H$ в несколько различных гамильтонианов $H_1$, $H_2, \ldots$, зависящих от состояния $\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ измерителя $\mathcal{M}$.

Рассмотрим те системы $\mathcal{S}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}\,[N, \mathcal{S}]$, которые дали при измерении величины $\mathcal{R}$ значение $R_1$. Они образуют подансамбль $\mathcal{E}_1\,[N_1, \mathcal{S}]$ статистического ансамбля $\mathcal{E}\,[N, \mathcal{S}]$. При фиксировании значения $R_1$ измеряемой величины $\mathcal{R}$ измеритель $\mathcal{M}$ будет находиться в состоянии $\varphi_1$. Это приведет к тому, что подансамбль $\mathcal{E}_1\,[N_1, \mathcal{S}]$ систем $\mathcal{S}$, которые дали при измерении результат $R_1$, будет эволюционировать с гамильтонианом $H_1$. Подансамбль $\mathcal{E}_2\,[N_2, \mathcal{S}]$ систем $\mathcal{S}$, которые дали при измерении значение $R_2$ величины $\mathcal{R}$, будет эволюционировать с другим гамильтонианом $H_2$, потому что при этом измеритель $\mathcal{M}$ будет находиться в другом состоянии $\varphi_2$. Каждому значению $R_k$ измеряемой величины $\mathcal{R}$ будет соответствовать эволюция подансамбля $\mathcal{E}_k\,[N_k, \mathcal{S}]$ статистического ансамбля $\mathcal{E}\,[N, \mathcal{S}]$ с гамильтонианом $H_k$. При этом число систем $N_k$ в соответствующем подансамбле $\mathcal{E}_k\,[N_k, \mathcal{S}]$ будет пропорционально вероятности измерения значения $R_k$ измеряемой величины $\mathcal{R}$. Эволюция разных подансамблей $\mathcal{E}_k\,[N_k, \mathcal{S}]$ различна. Это приводит к тому, что нельзя больше говорить об одной волновой функции, описывающей состояние всего ансамбля $\mathcal{E}\,[N, \mathcal{S}]$, а следует говорить о состояниях подансамблей $\mathcal{E}_k\,[N_k, \mathcal{S}]$, составляющих статистический ансамбль $\mathcal{E}\,[N, \mathcal{S}]$.

Вообще говоря, формально можно представлять себе $M$-измерение как некоторую абстрактную однократную процедуру, производимую над среднестатистической системой $\langle\mathcal{S}\rangle$. Действие $M$-измерения на среднестатистическую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$ формально описывается правилом редукции волновой функции, предложенным фон Нейманом [8].

$$\psi \to |\psi_R\rangle \left|\langle\psi|\psi_R\rangle\right|^2 \langle\psi_R| \tag{3.1}$$

Влияние $M$-измерения (3.1) на состояние $\psi$ системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ известно как редукция волновой функции. Для процесса редукции важно, чтобы результат $R_k$ измерения величины $\mathcal{R}$ был зафиксирован, т.е. чтобы измеритель $\mathcal{M}$ находился в состоянии $\varphi_k$, потому что только в этом случае можно говорить об определенном гамильтониане $H_k$, который определяет эволюцию подансамбля $\mathcal{E}_k\,[N_k, \mathcal{S}]$. Именно эта процедура измерения ($M$-измерения) рассматривается в большинстве работ [8, 9].

Можно ли говорить о получении определенного значения $R_k$ при $M$-измерении величины $\mathcal{R}$ для среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$? Это возможно, но это будет новый вид $M$-измерения, так называемое селективное $M$-измерение, или $SM$-измерение. $SM$-измерение есть $M$-измерение, сопровождающееся селекцией только тех систем $\mathcal{S}$, для которых отдельное $S$-измерение дает один и тот же результат измерения $R_k$. При этом не имеет значения кто производит селекцию: прибор, человек или окружающая среда. Селекция прямо входит в определение $SM$-измерения, и она должна быть кем-то или чем-то произведена. Процесс селекции индивидуальных систем $\mathcal{S}$ можно интерпретировать как статистическое воздействие измерителя $\mathcal{M}$ на среднестатистическую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$.

Само по себе статистическое воздействие не является силовым воздействием. Это есть воздействие измерителя $\mathcal{M}$, приводящее к селекции одних и дискриминации других элементов статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\infty,\mathcal{S}\right]$. В принципе можно говорить о статистическом воздействии измерителя $\mathcal{M}$ на состояние измеряемой среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$. Состояние системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ определяется распределением $d(X)$ (или волновой функцией $\psi$) величин $X$, описывающих состояние систем $\mathcal{S}$. Статистическое воздействие измерителя $\mathcal{M}$ на $\langle\mathcal{S}\rangle$ приводит к изменению этого распределения.

Свойства различных видов измерения величины $\mathcal{R}$ представлены в таблице

| *вид измер.* | *объект измер.* | *сост. перед* | *состояние после измер.* | *резул. измер.* | *влияние на сост.* |
|---|---|---|---|---|---|
| S | $S$ | $\psi$ | $\psi$ | $R'$ | нет |
| M | $\langle S\rangle$ | $\psi$ | $\lvert\psi_R\rangle\left\lvert\langle\psi\vert\psi_R\rangle\right\rvert^2\langle\psi_R\rvert$ | $f\left(R'\right)$ | редукция |
| SM | $\langle S\rangle$ | $\psi$ | $\psi_{R'}$ | $R'$ | изменение чис. сост. |

Уместно заметить, что квантовая механика делает предсказания, касающиеся только $M$-измерений. Любое предсказание квантовой механики, может быть проверено только с помощью $M$-измерения, и не существует предсказания, которое можно было бы проверить с помощью одного индивидуального измерения ($S$-измерения). Результат индивидуального измерения ($S$-измерения) величины $\mathcal{R}$ в отдельной квантовой системе предсказать нельзя *никогда*. Все, что можно сделать, пользуясь аппаратом квантовой механики – это предсказать вероятность того, что при $S$-измерении величины $\mathcal{R}$ будет получен результат $R'$. Однако, предсказать вероятность результата вовсе не означает предсказания самого результата.

Чтобы понять, что означает с измерительной точки зрения предсказание вероятности результата, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть расчет на основе аппарата квантовой механики дает, что вероятность получить $R'$ при измерении величины $\mathcal{R}$ в квантовой системе, находящейся в состоянии $|\psi\rangle$ равна $1/2$. Как можно проверить экспериментально, что вероятность равна именно $1/2$, а, скажем, не $3/4$ или $1/4$? Ясно, что в одном индивидуальном измерении величины $\mathcal{R}$ этого проверить нельзя. Для проверки предсказания необходимо провести $N$, $(N\to\infty)$ отдельных измерений, причем доля измерений, в которых получено значение $R'$ величины $\mathcal{R}$, дает требуемое значение вероятности. Это верно даже в том случае, когда предсказанная вероятность равна единице. В этом случае для проверки предсказания также недостаточно, одного индивидуального измерения, а необходимо провести серию из многих индивидуальных измерений величины $\mathcal{R}$, и предсказание будет правильным, если во всех случаях будет получено значение $R'$.

В этом пункте квантовая механика отличается от классической механики, в которой результаты повторных индивидуальных измерений дают один и тот же результат. Классическая механика принимает, что два разных индивидуальных измерения, произведенных над системой, приготовленной одним и тем же способом, всегда дают один и тот же результат. Классическая механика считает возможным не проверять это обстоятельство, поэтому она всегда предсказывает значение $R'$ измеряемой величины $\mathcal{R}$ (вероятность значения $R'$ принимается равной единице и не проверяется).

Квантовая механика допускает что два разных индивидуальных измерения, произведенных над системой, приготовленной одним и тем же способом, могут давать разные результаты. Поэтому она предсказывает только вероятность значения $R'$ измеряемой величины $\mathcal{R}$ (но не само значение $R'$). При проверке проверяется значение вероятности (оно проверяется даже если предсказанное значение вероятности равно единице или нулю), а для такой проверки необходимо $M$-измерение. Иначе говоря, два предсказания: (1) "измерение величины $\mathcal{R}$ должно дать значение $R'$" и (2) "измерение величины $\mathcal{R}$ должно с вероятностью 1 дать значение $R'$" суть два разных предсказания, проверяемые измерениями различного типа. Предсказания первого типа может делать только классическая механика. Квантовая механика может делать только предсказания второго типа.

Все это означает, что аппарат квантовой механики и его предсказания не имеют отношения к индивидуальным измерениям, а только к массовым измерениям ($M$-измерениям). Вообще, появление термина вероятность во всех предсказаниях квантовой механики связано с тем, что аппарат квантовой механики имеет дело только с распределениями $d(X)$ величин $X$, которые воспроизводятся при повторных измерениях, а не с самими величинами $X$, значения которых случайны и не воспроизводимы. Это означает, что математический аппарат квантовой механики имеет дело со среднестатистическими объектами $\langle\mathcal{S}\rangle$ (или статистическими ансамблями индивидуальных систем).

По существу квантовая механика исследует динамические характеристики среденестатистических систем $\langle\mathcal{S}\rangle$ и провозглашает их средними характеристиками систем $\mathcal{S}$. Иногда квантовая механика претендует на предсказания распределений, которые оказываются формальными и не могут быть проверены на опыте. Например, распределение $|\langle p|\psi\rangle|^2$ по импульсам частицы в чистом состоянии, описываемом волновой функцией $|\psi\rangle$, имеет формальный характер, потому что оно не может быть проверено экспериментально. Здесь $|p\rangle$ означает собственную функцию оператора импульса $p = -i\hbar\nabla$. Разумеется, можно получить распределение $|\langle p|\psi\rangle|^2$ экспериментально. Для этого достаточно бросить поток частиц на дифракционную решетку и исследовать дифракционную картину. Но формализм квантовой механики предполагает, что полученное таким образом распределение по импульсам должно быть приписано некоторому состоянию (некоторой волновой функции $|\psi\rangle$). Получение распределения $|\langle p|\psi\rangle|^2$ требует длительного времени. Это время тем длиннее, чем более точное распределение получено. За это время волновая функция существенно изменится, и становится неясным какой волновой функции следует приписать полученное распределение. Таким образом, экспериментально получить распределение $|\langle p|\psi\rangle|^2$ можно, но его нельзя приписать какому-то определенному состоянию, и это не будет проверкой предсказания квантовой механики. Произведенный анализ [11] показывает, что распределение по импульсам, полученное экспериментально, нельзя приписать какому-либо состоянию (волновой функции).

Мы видели в первом разделе, что среднестатистическая система не описывает распределение по энергиям или импульсам. Как тогда следует интерпретировать экспериментально полученное распределение $|\langle p|\psi\rangle|^2$ по импульсам? Ответ выглядит следующим образом. Распределение $|\langle p|\psi\rangle|^2$ не есть распределение по импульсам. Это – распределение по *средним импульсам.* Поясним, что означает термин средний импульс. Пусть область $V$, занятая пучком частиц, разделена на области $V_1,V_2,...,V_n,...$ Каждая из областей $V_k$ мала, но в то же время ее линейный размер $l_k \gg \lambda_c$, где $\lambda_c$ есть комптоновская длина волны. Подсчитаем среднее значение $\langle \mathbf{p}_k\rangle$ импульса $\mathbf{p}$ частицы внутри области $V_k$. Такая величина может быть подсчитана, потому что плотность импульса есть аддитивная величина и среднее значение $\langle \mathbf{p}_k\rangle$ может быть подсчитано для каждой области. Обоснование высказанного утверждения можно найти в [11]. Здесь мы только проиллюстрируем на простом примере различие между распределением по импульсам и распределением по средним импульсам.

Рассмотрим течение газа в области $V$. Разделим область $V$ на малые, но макроскопические области $V_1,V_2,...,V_n,...$ Подсчитаем среднее значение $\langle \mathbf{p}_k\rangle$ импульса $\mathbf{p}$ молекулы внутри области $V_k$. Множество всех $\langle \mathbf{p}_k\rangle$, взятых в некоторый момент времени, дает распределение молекул газа по средним импульсам. Ясно, что реальное распределение молекул газа по скоростям (распределение Максвелла) отличается от распределения молекул газа по макроскопическим средним скоростям $\langle \mathbf{v}_k\rangle = \langle \mathbf{p}_k\rangle/m$. Представим себе, что мы измеряем положения молекулы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, разделенные промежутком времени $\Delta t$ и определяем скорость молекулы с помощью соотношения $\mathbf{v} = (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\Delta t$. Если $\Delta t$ много меньше, чем среднее время $\tau$ между столкновениями молекул, то полученное распределение по скоростям будет распределением Максвелла. Наоборот, если $\Delta t \gg \tau$, то полученная скорость будет средней макроскопической скоростью газа, и полученное распределение есть распределение по средним скоростям газа.

Что-то вроде рассмотренного примера мы получим в случае с пучком частиц. Использование дифракционной решетки эквивалентно измерению положений частицы, разделенных временны́м интервалом $\Delta t \to \infty$. Это приводит к распределению по средним импульсам частиц. Если интервал $\Delta t$ достаточно мал и расстояние $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}-\mathbf{x}'$ между последующими положениями частицы $\mathbf{x}$ и

$\mathbf{x}'$ мало, то в соответствии с соотношением неопределенности импульс частицы возрастает, и мы начинаем измерять стохастическую составляющую движения частицы. При очень малых $\Delta t$ мы измеряем только случайную составляющую движения, которая зависит только от $\Delta t$ и практически не зависит от волновой функции пучка частиц.

Рассмотрим теперь хорошо известный парадокс "шредингеровского кота". Сначала изложим его в традиционной манере. В закрытый ящик помещен кот, причем жизнь кота в ящике определяется состоянием радиоактивного атома, помещенного в этот ящик. Пока атом не распался, кот жив. Как только атом распадется, кот умирает. Состояние атома представляет собой линейную суперпозицию состояний распавшегося атома и нераспавшегося атома. Соответственно состояние кота представляет собой суперпозицию мертвого кота и живого кота. Парадокс усматривается в одновременном существовании живого и мертвого кота. При этом открытие ящика и наблюдение состояния кота мгновенно переводит кота из состояния, в котором он ни жив ни мертв, в определенное состояние, где он или жив, или мертв.

Парадокс является результатом простого недоразумения, когда отождествляются два разных объекта: реальный индивидуальный Кот и абстрактный среднестатистический $\langle$кот$\rangle$. Волновая функция описывает состояние абстрактного среднестатистического $\langle$атома$\rangle$, а состояние $\langle$атома$\rangle$ определяет состояние среднестатистического $\langle$кота$\rangle$. К реальному Коту, сидящему в ящике, волновая функция прямого отношения не имеет. Среднестатистический $\langle$кот$\rangle$ имеет к реальному Коту примерно такое же отношение, какое имеет среднестатистический житель города Москвы к реальному Ивану Петровичу Сидорову, живущему, где-нибудь на Ленинском проспекте. Если мы производим $S$-наблюдение, т.е. открываем один вполне определенный ящик и обнаруживаем там живого кота, то у нас нет никаких оснований для утверждения, что открыв ящик, мы изменили состояние $\langle$кота$\rangle$. Никакого парадокса при этом не возникает. Если мы проводим $M$-наблюдение, т.е. если мы рассматриваем $N$, $(N \gg 1)$ ящиков с котами, то раскрыв их все одновременно, мы не обнаружим определенного результата. В некоторых ящиках окажутся живые коты, в других – мертвые. В этом случае измерение состояния абстрактного среднестатистического $\langle$кота$\rangle$ приведет к изменению его состояния в том смысле, что его состояние из чистого превратится в смешанное, однако, никакого парадокса в этом нет.

Наконец, если мы производим селективное массовое измерение ($SM$-измерение), т.е. одновременно открываем $N$, $(N \gg 1)$ ящиков с котами и выбираем из них те, в которых остались живые коты, то мы с одной стороны получаем определенный результат (живые коты), а с другой стороны живых котов много и они образуют статистический ансамбль, состояние которого описывается некоторой вполне определенной волновой функцией. Однако, парадокса все равно не возникает, поскольку причина изменения волновой функции среднестатистического $\langle$кота$\rangle$ вполне очевидна – это селекция живых котов из всего набора, состоящего из живых и мертвых котов.

Парадокс шредингеровского кота является частным случаем парадокса, усматриваемого иногда в процессе редукции волновой функции в результате проведенного измерения. Для избежания парадокса достаточно следовать простому правилу формальной логики, которое гласит: "Нельзя использовать один и тот же термин для обозначения различных объектов (однако, можно использовать несколько различных терминов для обозначения одного и того же объекта)". Обычно в квантовой механике это правило нарушается. Используется один и тот же термин для индивидуального объекта и среднестатистического. Как следствие используется один и тот же термин для различных процессов измерения.

Следует отметить, что большой вклад в отождествление $S$-измерения с $M$-измерением сделало формальное представление об $M$-измерении как о некотором однократном акте воздействия (измерения) на среднестатистическую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$. Это представление стирает различие между $S$-измерением и $M$-измерением и создает опасную иллюзию, что $S$-измерение и $M$-измерение – это одна и та же процедура. После такого отождествления процесс измерения приобретает противоречивые свойства. С одной стороны он всегда приводит к определенному результату ($S$-измерение), с другой стороны его результатом является распределение измеряемой величины ($M$-измерение). С одной стороны измерение ($S$-измерение) как однократный акт, производимый над $\mathcal{S}$, не имеет отношения к волновой функции и среднестатистической системе $\langle\mathcal{S}\rangle$, с другой стороны ($M$-измерение) измерение приводит к редукции состояния системы $\langle\mathcal{S}\rangle$.

Вообще, упомянутое выше нарушение правила формальной логики является источником многих парадоксов и противоречий. Некоторые экзотические интерпретации квантовой механики (например, [12, 13]) отпадают сами по себе, если следовать упомянутому выше нехитрому правилу логики и различать между индивидуальным объектом и статистически усредненным.

Следует отметить, что во многих случаях бывает непросто определить свойством какого объекта (индивидуального или среднестатистического) является то или другое свойство. Например, является ли половинный спин электрона индивидуальным свойством или коллективным свойством, т.е. является ли спин 1/2 свойством отдельного электрона, или свойством среднестатистического электрона (статистического ансамбля). При традиционном подходе, когда не различают между отдельным электроном и среднестатистическим, такой проблемы просто не существует. При более внимательном подходе к вопросу, мы вынуждены констатировать, что нам мало что известно о свойствах отдельного электрона. В большинстве случаев мы имеем дело с измерениями, производимыми над многими электронами, ибо только они являются воспроизводимыми. Поэтому некоторые выводы о свойствах отдельного электрона крайне ненадежны.

Например, принято считать, что опыт Штерна – Герлаха, когда пучок электронов, пролетающих через область с сильно неоднородным магнитным полем, расщепляется на два пучка, свидетельствует о том, что каждый отдельный электрон обладает определенным спином и соответствующей проекцией магнитного момента на направление магнитного поля. На самом деле, опыт Штерна – Герлаха показывает лишь то, что гамильтониан, описывающий движение среднестатистического электрона в магнитном поле, имеет при фиксированном импульсе электрона два разных дискретных состояния, различающиеся энергией и нумеруемые магнитным квантовым числом. Вопрос о том, связана ли дискретность магнитного квантового числа с какой-либо дискретностью в свойствах отдельного электрона, остается открытым, поскольку дискретность энергетических уровней не связана прямо с дискретным характером взаимодействия. Например, энергетические уровни заряженной бесспиновой частицы в кулоновом поле дискретны, хотя никакой дискретности в свойствах отдельной частицы не наблюдается. Несомненно, что расщепление пучка связано с "магнитным моментом электрона", поскольку оно пропорционально градиенту магнитного поля. Однако, остается открытым вопрос, является ли "магнитный момент электрона" свойством индивидуального электрона $\mathcal{S}$ или коллективным свойством среднестатистического электрона $\langle\mathcal{S}\rangle$ (см. детали обсуждения в [14]). Заметим, что при отождествлении $\langle\mathcal{S}\rangle$ и $\mathcal{S}$ эта проблема исчезает.

Иногда считают, что спектр электромагнитного излучения, испускаемого возбужденным атомом есть свойство индивидуального (а не среднестатистического) атома. Аргументируется это тем, что современные технические средства позволяют поймать в ловушку один атом и изучать его уровни возбуждения и спектр излучения. При этом упускается из виду то обстоятельство, что спектр излучения атома нельзя измерить в результате одного отдельного измерения ($S$-измерения). Спектр излучения атома получается в результате многократных измерений излучения одного и того же атома, состояние которого приготовляется одним и тем же способом, т.е. по существу производится измерение излучения среднестатистического атома. Для проведения такого $M$-измерения не имеет значения производим ли мы одновременно одно измерение над многими одинаково приготовленными атомами, или многократно производим одно и то же измерение над одним единственным атомом, многократно приготовляя его состояние одним и тем же способом. В обоих случаях мы будем иметь дело со среднестатистическим атомом.

# 4 Заключительные замечания

Итак, физическая система $\mathcal{S}$ с конечным числом степеней свободы имеет регулярную и случайную составляющие своей эволюции. Регулярная составляющая описывается явно среднестатистической системой $\langle\mathcal{S}\rangle$, которая представляет собой детерминированную физическую (динамическую) систему с бесконечным числом степеней свободы. Случайная составляющая эволюции системы $\mathcal{S}$ также описывается с помощью $\langle\mathcal{S}\rangle$. Это описание неявно. Действие для системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ приводится к виду действия для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$, которая представляет собой набор взаимодействующих одинаковых динамических систем $\mathcal{S}_{\rm d}$. Член в действии, ответственный за взаимодействие систем $\mathcal{S}_{\rm d}$, описывает неявно случайную составляющую эволюции системы $\mathcal{S}$. Система $\mathcal{S}$ имеет конечное число степеней свободы, тогда как система $\langle\mathcal{S}\rangle$, описывающая ее динамику, имеет бесконечное число степеней свободы. С информационной точки зрения система $\langle\mathcal{S}\rangle$ сложнее, чем система $\mathcal{S}$, но мы вынуждены исследовать $\langle\mathcal{S}\rangle$, если мы хотим изучать динамику стохастических систем.

# Список литературы


[1] Yu. A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).

[2] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[3] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **30**, 733-760, (2002).

[4] Yu. A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.*, **40,** 256-278, (1999).

[5] Yu. A. Rylov, "Hamilton variational principle for statistical ensemble of deterministic systems and its application for ensemble of stochastic systems." RJMP, **9**, iss. 3, 361-370, (2002),

[6] A. Clebsch, Über eine allgemaine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[7] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[8] J.V. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, Springer, 1932.

[9] М.Б. Менский, Явление декогеренции и теория непрерывных квантовых измерений *УФН* **168**, 1017-1035, (1998).

[10] М.Б. Менский, *УФН* **170**, 631, (2000).

[11] Yu.A. Rylov, The correspondence principle and measurability of physical quantities in quantum mechanics in *Uncertainty Principle and Foundations of Quantum Mechanics.* ed. W.Price and S.Chissick, Wiley, N.Y., 1977, p.109.

[12] H. Everett, *Rev. Mod. Phys.* **29** 454 (1957); Reprinted in *Quantum Theory and Measurement* (Eds. J.A. Wheeler, W.H. Zurek) (Princeton, N.J.: Princeton University Press. 1983)

[13] B.S. DeWitt and N. Graham (Eds) *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1973).

[14] Yu.A. Rylov, "Pauli's electron as a dynamic system" *Found. Phys.* **25** no.7, 1055-1086, (1995).