Евклидова геометрия как алгоритм для построения обобщенных геометрий.

Ю.А. Рылов

Аннотация

Показано, что обобщенная геометрия может быть получена как деформация собственно евклидовой геометрии. Алгоритм построения любого высказывания $\mathcal{S}$ собственно евклидовой геометрии $\mathcal{E}$ может быть описан в терминах евклидовой мировой функции σ_{E} в виде $\mathcal{S}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Заменяя евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией σ геометрии $\mathcal{G}$, получаем соответствующее высказывание $\mathcal{S}(\sigma)$ обобщенной геометрии $\mathcal{G}$. Такое построение обобщенных геометрий (известных как T- геометрии) использует только хорошо известные алгоритмы собственно евклидовой геометрии и ничего сверх этого. Такой метод построения геометрии очень прост и эффективен. Используя T-геометрию как геометрию пространства-времени, можно построить детерминированные геометрии пространства-времени с изначально стохастическим движением свободных частиц и геометризованной массой частиц. Такая пространственно-временна́я геометрия, определенная надлежащим образом (с квантовой постоянной как атрибутом геометрии) позволяет объяснять квантовые эффекты как результат статистического описания стохастического движения частиц (без использования квантовых принципов).

1 Введение

Евклидова геометрия была построена Евклидом много лет тому назад. Она может рассматриваться как набор алгоритмов, необходимых для построения геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и соотношений $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ между ними. Эти алгоритмы построения геометрических объектов были получены логическим путем из фундаментальных положений (аксиом). Всякий алгоритм $\mathcal{A}_{\mathrm{E}}$ построения некоторого геометрического объекта $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ может рассматриваться как оператор O, воздействующий на множество Ω точек P, на котором строится геометрия. Объекты, подвергающиеся действию операторов, принято называть операндами. В данном случае точки P множества Ω являются операндами алгоритмов евклидовой геометрии.

Имеется необходимость в построении обобщенных (не-евклидовых) геометрий, которые отличаются от собственно евклидовой геометрии в разных аспек-

тах. Например, обобщенная геометрия нужна для описания свойств реального пространства-времени.

В начале XX века возникла проблема описания движения тел с очень большими скоростями. Она была решена построением теории относительности, где прямое произведение времени и евклидова пространства было заменено пространственно-временно́й геометрией Минковского. Другую проблему начала XX века: стохастическое движение частиц с малой массой также следовало решить модификацией пространственно-временно́й геометрии. Дело в том, что движение свободных частиц определяется *только свойствами пространства-времени* (или свойствами его геометрии). Интенсивность стохастической составляющей движения частицы зависит от ее массы. Она очень мала для частиц большой массы и существенна для частиц малой массы. Это означает, что в соответствующей пространственно-временно́й геометрии движение свободной частицы должно быть изначально стохастическим, а масса частицы должна быть геометризована для того, чтобы можно было учесть влияние массы на свободное движение. В начале XX века такой геометрии не существовало в рамках римановой геометрии. Более того, было трудно представить себе такую пространственно-временну́ю геометрию, где движение свободных частиц стохастично. Позже пытались решить проблему, используя стохастические пространственно-временны́е геометрии [4, 2]. Однако, стохастическая геометрия не является геометрией в точном смысле слова. Стохастическая геометрия – это обычная пространственно-временна́я геометрия (например, геометрия Минковского) с дополнительной структурой, заданной на пространстве-времени.

В результате проблема стохастического движения частиц не была решена на фундаментальном уровне (с помощью модификации пространства-времени). Вместо этого стохастические проявления пространственно-временно́й геометрии приписали свободной частице в виде ее квантовых свойств, порождаемых квантовыми принципами. Введение квантовых принципов позволило объяснить все нерелятивистские квантовые эффекты. Однако, релятивистские квантовые эффекты не могли быть описаны на основе квантовых принципов, потому что квантовые принципы были нерелятивистскими. Чтобы распространить квантовую теорию на релятивистские явления, нужно вернуться на фундаментальный уровень, т.е. к правильной пространственно-временно́й геометрии, которая верна как для нерелятивистских, так и для релятивистских явлений.

Традиционный метод построения обобщенной геометрии представляет собой модификацию евклидовых алгоритмов. Видоизменяются некоторые евклидовы аксиомы. Кроме того используется деформация евклидова пространства. Бесконечно малый евклидов интервал $dS_{\rm E} = \sqrt{g_{{\rm E}ik}dx^i dx^k}$ заменяется римановым интервалом $dS_{\rm R} = \sqrt{g_{{\rm R}ik}dx^i dx^k}$. Вообще, евклидов алгоритм построения геометрии заменяется другим алгоритмом. Этот новый алгоритм используется для построения неевклидовой геометрии. Чтобы построить обобщенную геометрию (например, риманову), повторяются многие (иногда почти

все) логические построения Евклида. Такой метод очень сложен. Кроме того нужно, чтобы независимые модификации различных евклидовых аксиом были совместны между собой.

Существует другой метод обобщения евклидовой геометрии. Мы не меняем евклидовых алгоритмов построения геометрии, но заменяем операнды евклидовых алгоритмов. Мировая функция σ используется в качестве операнда евклидовых алгоритмов вместо множества Ω точек P, которые обычно являются операндами евклидовых алгоритмов.

Мировая функция $\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\rho^2(P,Q)$, где $\rho(P,Q)$ является расстоянием между точками P,$Q \in \Omega$. (Мы не используем термин метрика для ρ, потому что метрика предполагается ограниченной условием положительности и аксиомой треугольника, тогда как термин расстояние ρ свободен от этих ограничений). Мировая функция σ определяется соотношением

$$\sigma: \qquad \Omega \otimes \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P) = 0, \qquad \forall P \in \Omega \tag{1.1}$$

Мировая функция была введена Сингом [11], и это очень важная величина в собственно евклидовой геометрии. Однако, мировая функция σ не только важная величина. Она является *единственно важной* величиной в собственно евклидовой геометрии. Это означает, что собственно евклидова геометрия и все ее алгоритмы могут быть описаны в терминах и только в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. Свойство геометрии быть полностью описанной в терминах и только в терминах мировой функции называется свойством σ-имманентности. Описание геометрии в терминах ее мировой функции представляет собой σ-имманентное описание этой геометрии.

σ-имманентное свойство евклидовой геометрии было обнаружено сравнительно недавно [5, 7]. Было доказано, что собственно евклидова геометрия может быть представлена в терминах и только в терминх функции σ_{E}, при условии, что функция σ_{E} удовлетворяет ряду условий, записанных в терминах σ_{E}. По определению, *любая геометрия есть совокупность всех геометрических объектов* $\mathcal{O}$ *и всех соотношений* $\mathcal{R}$ *между ними.* σ-имманентность собственно евклидовой геометрии означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и любое соотношение$\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть представлено в терминах евклидовой мировой функции σ_{E} в виде $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$.

Допустим, что обобщенная геометрия $\mathcal{G}$ обладает свойством σ-имманентности. Тогда геометрия $\mathcal{G}$ может быть построена как результат деформации собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. В самом деле, собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ есть совокупность геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и соотношений $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Сделаем замену

$$\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma, \qquad \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \to \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma), \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \to \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma) \tag{1.2}$$

Тогда совокупность геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma)$, соотношений $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma)$ и мировой функции σ образует обобщенную геометрию $\mathcal{G}$.

Заметим, что геометрические объекты $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$, $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma)$ и соотношения $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$, $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma)$ построены с помощью тех же самых алгоритмов построения евклидовой геометрии. Только операнды σ_{E} и σ различны в этих двух случаях. Таким образом различные обобщенные геометрии $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ различаются значением их операндов σ_1 and σ_2, а не алгоритмов их построения. Это очень удобно, потому что замена операнда много проще, чем замена алгоритма. Мы можем не заботиться о совместности различных изменений евклидовых алгоритмов, как это имеет место при традиционном подходе к построению обобщенной геометрии, когда заменяется алгоритм при постоянном операнде. Кроме того мы можем оценить мощность множества обобщенных геометрий, которая может рассматриваться как мощность множества функций от двух аргументов. Мощность этого множества больше, чем мощность множества всех римановых геометрий, которая может быть оценена как мощность множества всех объектов, каждый из которых состоит из нескольких функций одного аргумента. Напрмер, множество всех однородных изотропных T-геометрий определяется функцией одного аргумента, тогда как множество всех однородных изотропных римановых геометрий маркируется размерностью n и индексом $\nu = 1, 2, ...n$.

С прикладной точки зрения T-геометрии интересны в том отношении, что они содержат такие пространственно-временны́е геометрии, где движение свободных частиц является изначально стохастическим. Более того, пространственно-временна́я T-геометрия со стохастическим движением свободных частиц является общим случаем, тогда как пространственно-временна́я T-геометрия с детерминированным движением свободных частиц является вырожденным случаем.

Далее мы сформулируем главную теорему о σ-имманентности собственно евклидовой геометрии. Но сначала приведем примеры σ-имманентного описания объектов собственно евклидовой геометрии.

Пусть $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ есть скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{E}}$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Оно может быть записано в σ-имманентном виде (т.е. в терминах мировой функции σ_{E})

$$\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}): \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{E}} = \sigma_{\mathrm{E}}(P_0, P_1) + \sigma_{\mathrm{E}}(P_0, P_2) - \sigma_{\mathrm{E}}(P_1, P_2) \tag{1.3}$$

где индекс 'E' показывает, что величина относится к евклидовой геометрии. Легко видеть, что (1.3) есть следствие евклидовых соотношений

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{E}} = 2\sigma_{\mathrm{E}}(P_0, P_1) \tag{1.4}$$

$$|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|^2_{\mathrm{E}} = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{E}} = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2_{\mathrm{E}} + |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|^2_{\mathrm{E}} - 2(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{E}} \tag{1.5}$$

В соответствии с (1.2) в обобщенной геометрии $\mathcal{G}$ получаем вместо (1.3)

$$\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma): \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = \sigma(P_0, P_1) + \sigma(P_0, P_2) - \sigma(P_1, P_2) \tag{1.6}$$

Такой способ построения соотношений обобщенной геометрии очень прост. Он не использует никаких логических рассуждений. Он основан на допущении, что *любая обобщенная геометрия обладает σ-имманентным свойством.*

При этом существенно используется тот факт, что собственно евклидова геометрия уже построена, и все необходимые логические построения уже сделаны в собственно евклидовой геометрии.

Мы будем называть принципом деформации применение замены (1.2) к построению обобщенной геометрии. Всякая замена расстояния ρ, или мировой функции σ между точками пространства означает деформацию пространства. Мы будем толковать понятие деформации в широком смысле слова. Деформация может преобразовывать точку в поверхность и поверхность в точку. Деформация может удалять некоторые точки евклидова пространства, нарушая его непрерывность, или уменьшая размерность. Деформация может добавлять дополнительные точки к евклидову пространству, увеличивая его размерность. Мы можем интерпретировать любое σ-имманентное обобщение евклидовой геометрии как ее деформацию. Иначе говоря, принцип деформации есть очень общий метод построения обобщенных геометрий.

Построение неоднородной геометрии на аксиоматической основе практически невозможно, потому что имеется очень много разных неоднородных геометрий. Очень трудно придумать аксиоматику для неоднородных геометрий, где одинаковые геометрические объекты имеют разные свойства в разных местах. Кроме того невозможно придумать аксиоматику для каждой из этих геометрий. Таким образом, использованию принципа деформации при построении неоднородной обобщенной геометрии нет альтернативы. Реальная проблема состоит в последовательном применении принципа деформации. Поскольку *уже один принцип деформации достаточен для построения T-геометрии*, нельзя использовать дополнительные средства построения геометрии. При построении T-геометрии нельзя использовать систему координат и другие средства описания.

Математики снабжают физиков своими геометрическими построениями, и физики верят, что пространство-время непрерывно. Непрерывность пространства-времени нельзя проверить экспериментально, и единственной причиной непрерывности пространства-времени является тот факт, что математики умеют строить только непрерывные геометрии, а построить дискретные геометрии им не удается.

Та же самая ситуация с размерностью пространства. Геометры считают размерность имманентным свойством любой геометрии. Они могут себе представить n-мерную риманову геометрию, но не могут себе представить геометрию без размерности, или геометрию переменной размерности. Причиной подобных убеждений является тот факт, что размерность многообразия и его непрерывность являются исходными точками построения римановой геометрии, и в этом месте нельзя отделить свойства геометрии от свойств многообразия.

В T-геометрии мы имеем дело с геометрией самой по себе, потому что никакие средства описания не используются. В результате T-геометрия нечувствительна к непрерывности или дискретности пространства, так же как и к его размерности. Применение дополнительных средств описания приводит к непоследовательности и ограничению списка возможных обобщенных геоме-

трий.

Всякое обобщение собственно евклидовой геометрии основано на некотором свойстве евклидовой геометрии (или ее объектов). Это свойство сохраняется во всех обобщенных геометриях, тогда как другие свойства евклидовой геометрии варьируются. Характер и свойства полученной обобщенной геометрии существенно зависят от выбора сохраняющегося свойства базовой евклидовой геометрии. Например, риманова геометрия есть такое обобщение евклидовой геометрии, где сохраняются одномерность и непрерывность евклидовой прямой, тогда как ее кривизна и кручение варьируются. Прямая рассматривается как главный геометрический объект евклидовой геометрии, и предполагается, что такие свойства евклидовой прямой как непрерывность и одномерность (отсутствие толщины) сохраняются при обобщении. Это означает, что непрерывность и одномерность прямой линии должны быть главными свойствами обобщенной (римановой) геометрии. В соответствии с таким выбором сохраняющегося геометрического объекта вводится понятие кривой $\mathcal{L}$ как непрерывное отображение отрезка вещественной оси на пространство Ω

$$\mathcal{L}: \qquad [0,1] \to \Omega \tag{1.7}$$

Чтобы ввести понятие непрерывности, которое является базовым понятием обобщения, вводится понятие топологического пространства, размерости пространства Ω и другие базовые понятия римановой геометрии, которые необходимы для построения риманового обобщения евклидовой геометрии. Однако, эти свойства не являются необходимыми для построения T-геомтрии.

Свойство σ-имманентности евклидовой геометрии является свойством всей евклидовой геометрии. Используя σ-имманентность для обобщения, мы не налагаем никаких ограничений на отдельные геометрические объекты евклидовой геометрии. В результате σ-имманентное обобщение оказывается наиболее мощным обобщением. Кроме того с общей точки зрения, использование свойства всей геометрии для обобщения представляется более разумным, чем использование свойств отдельного геометрического объекта. Таким образом, σ-имманентное обобщение евклидовой геометрии, использующее свойство всей евклидовой геометрии, представляется более обоснованным, чем риманово обобщение, использующее свойства евклидовой прямой.

Перечислим наиболее привлекательные черты σ-имманентного обобщения евклидовой геометрии:

1. Для обобщения используется σ-имманентность, которая является свойством всей геометрии (а не свойством отдельного геометрического объекта, как это имеет место при римановом обобщении).

2. σ-имманентное обобщение не использует каких-либо логических построений, и σ-имманентное обобщение автоматически так же непротиворечиво, как и евклидова геометрия, чья аксиоматика используется неявно. В частности, T-геометрия не содержит каких-либо теорем. В результате

главной проблемой T-геометрии является правильное σ-имманентное описание геометрических объектов и соотношений евклидовой геометрии. σ-имманентное описание включает некоторые тонкости, которые будут обсуждены ниже.

3. σ-имманентное обобщение – это очень мощное обобщение, которое варьирует практически все свойства евклидовой геометрии, включая такие как транзитивность параллелизма и непрерывность, которые сохраняются при римановом обобщении.

4. σ-имманентное обобщение позволяет использовать бескоординатное описание и игнорировать проблемы, связанные с преобразованиями координат и преобразованиями других средств описания.

5. T-геометрия может использоваться как геометрия пространства-времени. В этом случае трубчатый характер прямых непринужденно объясняет стохастические мировые линии квантовых микрочастиц. Рассматривая квантовую постоянную $\hbar$ как атрибут геометрии пространства-времени, можно получить квантовое описание как статистическое описание случайных мировых линий [6]. Такая пространственно-временна́я геометрия не может быть получена в рамках риманова обобщения евклидовой геометрии.

6. Практически все упомянутые выше σ-имманентного обобщения являются следствием того факта, что мировая функция σ является операндом алгоритмов построения собственно евклидовой геометрии.

2 Евклидова геометрия в σ-имманентной форме

Определение. *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть множество Ω точек P с заданной мировой функцией σ*

$$\sigma : \qquad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P) = 0, \qquad \forall P \in \Omega \tag{2.1}$$

Пусть собственно евклидова геометрия задана на множестве Ω, и величина

$$\rho(P_0, P_1) = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)}, \qquad P_0, P_1 \in \Omega \tag{2.2}$$

является евклидовым расстоянием между точками P_0, P_1.

Пусть вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{P_0, P_1\}$ есть упорядоченное множество из двух точек P_0, P_1. Точка P_0 является началом вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, а точка P_1 – его концом. Длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяется соотношением

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = 2\sigma(P_0, P_1) \tag{2.3}$$

В евклидовой геометрии скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)$ между двумя векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, имеющими общее начало P_0 выражается соотношением (1.6)

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = \sigma(P_0,P_1) + \sigma(P_1,P_0) - \sigma(P_1,P_2) \tag{2.4}$$

Из выражения (2.4), записанного для скалярных произведений $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1)$ и $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0)$, и из свойств скалярного произведения в евклидовом пространстве следует, что скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ может быть записано в σ-имманентном виде

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) &= (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) - (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0) = \\ &\sigma(P_0,Q_1) + \sigma(P_1,Q_0) - \sigma(P_0,Q_0) - \sigma(P_1,Q_1)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Пусть $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ суть n векторов в евклидовом пространстве. Необходимое и достаточное условие их линейной зависимости есть

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| = 0, \qquad i,k = 1,2,..n, \qquad \mathcal{P}^n = \{P_0,P_1,...P_n\} \tag{2.6}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||$ есть определитель Грама, построенный из скалярных произведений векторов.

Сформулируем теорему о σ-имманентности евклидовой геометрии.

Теорема. *σ-пространство $V = \{\sigma,\Omega\}$ является n-мерным собственно евклидовым пространством, если и только если мировая функция σ удовлетворяет следующим условиям, записанным в терминах мировой функции σ.*

I. Условие симметрии:

$$\sigma(P,Q) = \sigma(Q,P), \qquad \forall P,Q \in \Omega \tag{2.7}$$

II. Определение размерности:

$$\exists\mathcal{P}^n \equiv \{P_0,P_1,...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{2.8}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама (2.6). Векторы P_0P_i, $i = 1,2,...n$ являются базисными векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0. Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i,k = 1,2,...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\, g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta^i_l, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i,l = 1,2,...n \tag{2.9}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{2.10}$$

III. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\,(x_i(P) - x_i(Q))\,(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P,Q \in \Omega \tag{2.11}$$

где координаты $x_i(P)$, $i = 1, 2, ...n$ *точки* P *являются ковариантными координатами вектора* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, *определенными соотношениями*

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.12}$$

IV: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ *имеет только положительные собственные значения*

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{2.13}$$

V. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.14}$$

рассматриваемая как система для определения точки P *как функции координат* $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$, *имеет всегда одно и только одно решение.* Условия II – V содержат ссылку на размерность n евклидова пространства.

Теорема утверждает, что собственно евклидово пространство обладает свойством σ-имманентности, и следовательно, любое утверждение $\mathcal{S}$ собственно евклидовой геометрии может быть выражено в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E} евклидовой геометрии в виде $\mathcal{S}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Производя замену $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ в утверждении $\mathcal{S}$, получаем соответствующее утверждение $\mathcal{S}(\sigma)$ другой T-геометрии $\mathcal{G}$, описываемой мировой функцией σ.

3 Построение геометрических объектов в σ-имманентном виде

В T-геометрии геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается с помощью каркас-оболочного метода [7]. Это означает, что геометрический объект $\mathcal{O}$ рассматривается как множество объединений и пересечений элементарных геометрических объектов (ЭГО).

Конечное множество $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ параметров оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$ образует каркас элементарного геометрического объекта (ЭГО) $\mathcal{E} \subset \Omega$. Множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ точек, образующих ЭГО, называется оболочкой его каркаса $\mathcal{P}^n$. Для непрерывной обобщенной геометрии оболочка $\mathcal{E}$ обычно является непрерывным множеством точек. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$

$$f_{\mathcal{P}^n}: \qquad \Omega \to \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

определяющая ЭГО, является функцией бегущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ предполагается алгебраической функцией от s аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ является мировой функцией от двух аргуметов $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$, или принадлежащих каркасу $\mathcal{P}^n$, или совпадающих с бегущей точкой

R. Таким образом, геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется своим каркасом и его оболочной функцией как множество нулей оболочной функции

$$\mathcal{E} = \{R | f_{\mathcal{P}^n}(R) = 0\} \tag{3.2}$$

Например, цилиндр $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ с точками P_0, P_1 на оси цилиндра и точкой Q на его поверхности определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(P_0, P_1, Q) &= \{R | f_{P_0P_1Q}(R) = 0\}, \\ f_{P_0P_1Q}(R) &= F_2(P_0, P_1, Q) - F_2(P_0, P_1, R) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$F_2(P_0, P_1, Q) = \begin{vmatrix} (\mathbf{P_0P_1}.\mathbf{P_0P_1}) & (\mathbf{P_0P_1}.\mathbf{P_0Q}) \\ (\mathbf{P_0Q}.\mathbf{P_0P_1}) & (\mathbf{P_0Q}.\mathbf{P_0Q}) \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

Здесь $\frac{1}{2}\sqrt{F_2(P_0, P_1, Q)}$ есть площадь треугольника с вершинами в точках P_0, P_1, Q. Равенство $F_2(P_0, P_1, Q) = F_2(P_0, P_1, R)$ означает, что расстояние между точкой Q и осью, определяемой вектором $\mathbf{P_0P_1}$, равно расстоянию между точкой R и осью.

Элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется во всех геометриях сразу. В частности, он определяется в собственно евклидовой геометрии, где он получает истолкование. Элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ интерпретируется на основе нашего знания собственно евклидовой геометрии. Таким образом, собственно евклидова геометрия используется для интерпретации любой обобщенной геометрии в качестве эталонной геометрии. В частности, цилиндр (3.3) однозначно определяется в любой T-геометрии с любой мировой функцией σ.

В евклидовой геометрии точки P_0 и P_1 определяют ось цилиндра. Форма цилиндра зависит от его оси и радиуса, но не от расположения точек P_0, P_1 на оси цилиндра. В результате в евклидовой геометрии цилиндры $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ и $\mathcal{C}(P_0, P_2, Q)$ совпадают, если векторы $\mathbf{P_0P_1}$ и $\mathbf{P_0P_2}$ коллинеарны. В общем случае произвольной T-геометрии цилиндры $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ и $\mathcal{C}(P_0, P_2, Q)$ не совпадают, вообще говоря, даже если векторы $\mathbf{P_0P_1}$ и $\mathbf{P_0P_2}$ коллинеарны. Таким образом, вообще говоря, деформация евклидовой геометрии расщепляет евклидовы геометрические объекты.

При построении обобщенной геометрии мы не пытаемся повторять вывод евклидовых алгоритмов из других аксиом. Мы берем геометрические объекты и соотношения между ними, полученные в рамках евклидовой геометрии, и описываем их в терминах мировой функции. После этого деформируем их, заменяя евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией интересующей нас геометрии. На практике построение элементарных геометрических объектов сводится к представлению элементарного геометрического объекта в σ-имманентном виде, т.е. в терминах мировой функции. Последняя задача есть проблема собственно евклидовой геометрии. Задача представления геометрического объекта (или соотношения между объектами) в σ-имманентном виде есть реальная проблема построения T-геометрии.

Приложение принципа деформации ограничено двумя условиями.

1. Принцип деформации применяется отдельно от других методов построения геометрии. В частности, при построении обобщенной геометрии нельзя использовать топологические структуры, потому что для эффективного применения принципа деформации получаемая обобщенная геометрия должна определяться только мировой функцией.

2. Описывая евклидовы геометрические объекты $\mathcal{O}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и евклидовы соотношения $\mathcal{R}(\sigma_{\mathrm{E}})$ в терминах σ_{E}, нельзя использовать специальные свойства евклидовой мировой функции σ_{E}. В частности, определения $\mathcal{O}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и $\mathcal{R}(\sigma_{\mathrm{E}})$ должны иметь один и тот же вид в евклидовых геометриях разных размерностей. Они не должны зависеть от размерности евклидова пространства.

Построение T-геометрии не использует координат и других методов описания, потому что использование средств описания накладывает ограничения на создаваемую геометрию. Всякий способ описания представляет собой структуру St, заданную на базовой евклидовой геометрии с мировой функцией σ_{E}. Замена $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ достаточна для построения единственной обобщенной геометрией $\mathcal{G}_{\sigma}$. Если использовать дополнительную структуру St для построения T-геометрии, то мы получим, вообще говоря, другую геометрию $\mathcal{G}_{St}$, которая совпадает с $\mathcal{G}_{\sigma}$ не для всех σ, а только для некоторых мировых функций σ. Таким образом, использование дополнительных средств описания ограничивает список возможных обобщенных геометрий. Например, если мы используем координатное описание при построеии обобщенной геометрии, то полученная геометрия оказывается непрерывной, потому что описание с помощью координат эффективно только для непрерывных геометрий, где число координат совпадает с размерностью геометрии.

Поскольку σ-имманентное описание собственно евклидовой геометрии возможно, то оно возможно и для любой T-геометрии, потому что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ и любое соотношение $\mathcal{R}$ в физической геометрии $\mathcal{G}$ получаются из соответствующего геометрического объекта $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и соответствующего соотношения $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ с помощью замены $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ в описании $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$. Для того, чтобы это было возможно, описание $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ не должно ссылаться на особые свойства евклидовой геометрии σ_{E}, описываемые условиями II – V. Формальным признаком применения условий II – V является ссылка на размерность n, потому что каждое из условий II – V содержит ссылку на размерность n собственно евклидовой геометрии.

Предположим, что геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_n}(\sigma_{\mathrm{E}_n}, n)$ определен в n-мерном евклидовом пространстве, и это определение явно ссылается на размерность n евклидова пространства. Деформируем n-мерное евклидово пространство E_n в m-мерное евклидово пространство E_m. Тогда мы должны сделать замену

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}_n}(\sigma_{\mathrm{E}_n}, n) \to \mathcal{O}_{\mathrm{E}_n}(\sigma_{\mathrm{E}_m}, n) \tag{3.5}$$

С другой стороны можно определить тот же самый геометрический объект прямо в m-мерном евклидовом пространстве E_m в виде $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_m}(\sigma_{\mathrm{E}_m}, m)$. Приравн-

нивая это выражение к (3.5), получаем

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}_n}\left(\sigma_{\mathrm{E}_m}, n\right) = \mathcal{O}_{\mathrm{E}_m}\left(\sigma_{\mathrm{E}_m}, m\right), \qquad \forall m, n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

Это означает, что определение геометрического объекта $\mathcal{O}$ не должно зависеть от размерности евклидова пространства.

Если мы тем не менее используем специальные свойства II – V евклидова пространства в σ-имманентном описании геометрического объекта $\mathcal{O}$, или соотношения $\mathcal{R}$ и ссылаемся на размерность n, то, в конечном счете, мы ссылаемся на систему координат, которая является только средством описания.

Продемонстрируем это на примере определения прямой в евклидовом пространстве. Прямая $\mathcal{T}_{P_0Q}$ в собственно евклидовом пространстве определяется двумя ее точками P_0, Q, $(P_0 \neq Q)$ как множество точек R

$$\mathcal{T}_{P_0Q} = \left\{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q} || \mathbf{P}_0\mathbf{R}\right\}, \tag{3.7}$$

где условие $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ означает, что векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны, т.е. скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R})$ этих двух векторов удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad \left(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)^2 = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}\right)\left(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right) \tag{3.8}$$

где скалярное произведение определено соотношением (2.5). Таким образом, прямая линия $\mathcal{T}_{P_0Q}$ определяется σ-имманентно, т.е. в терминах мировой функции σ. Мы будем использовать два разных названия (прямая и трубка) для геометрического объекта $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Термин "прямая" используется, когда нужно подчеркнуть, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ есть результат деформации евклидовой прямой. Термин "трубка" используется, когда нужно подчеркнуть то, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ может быть многомерной поверхностью.

В евклидовой геометрии можно использовать другое определение коллинеарности. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны, если составляющие векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в некоторой прямолинейной системе координат пропорциональны. Например, в n-мерном евклидовом пространстве можно ввести прямолинейную систему координат, выбрав $n+1$ точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и образовав n базисных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$. Тогда условие коллинеарности может быть записано в виде n уравнений

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}\right) = a\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right), \qquad i = 1, 2, ...n, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{3.9}$$

где $a \neq 0$ есть некоторая вещественная постоянная. Соотношения (3.9) являются соотношениями для ковариантных составляющих векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в рассматриваемой системе координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$. Определение коллинеарности (3.9) зависит от размерности n евклидова пространства. Пусть точки $\mathcal{P}^n$ выбраны таким образом, что $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \neq 0$. Тогда исключая параметр a из соотношений (3.9), получаем $n-1$ независимых соотношений, и геометрический объект

$$\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n} \;=\; \left\{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right\} = \bigcap_{i=2}^{i=n} \mathcal{S}_i, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{S}_i \;=\; \left\{ R \,\middle|\, \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})} = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R})} \right\}, \qquad i = 2,3,...n \qquad (3.11)$$

определенный в соответствии с (3.9), зависит от $n+2$ точек $Q, \mathcal{P}^n$. Этот геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ определен σ-имманентно. Это – комплекс, состоящий из прямой линии и системы координат, представленной $n+1$ точкой $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$. В евклидовом пространстве зависимость от системы координат и от n точек $\{P_1, ...P_n\}$, определяющих эту систему является фиктивной. Геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит существенно только от двух точек P_0, Q и в евклидовом пространстве совпадает с прямой линией $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Однако, при деформации евклидова пространства геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, $\mathcal{T}_{P_0Q}$ деформируются различно. Точки $P_1, P_2, ...P_n$ перестают быть фиктивными в определении $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, и геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{T}_{P_0Q}$ становятся, вообще говоря, разными геометрическими объектами. Однако, будучи различными, вообще говоря, они могут совпадать в некоторых частных случаях.

Какой из двух геометрических объектов в деформированной геометрии $\mathcal{G}$ следует рассматривать как прямую линию? Разумеется, это – $\mathcal{T}_{P_0Q}$, потому что его определение не содержит ссылки на систему координат, тогда как определение $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит от выбора системы координат, представляемой точками $\mathcal{P}^n$. Вообще, определения геометрических объектов и соотношений между ними не должны ссылаться на средства описания. В противном случае точки, определяющие систему координат, будут включены в определение геометрического объекта.

Однако, в данном случае геометрический объект $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является, вообще говоря, $(n-1)$-мерной поверхностью, тогда как $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является пересечением $(n-1)$ $(n-1)$-мерных поверхностей, т.е. $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является, вообще говоря, одномерной кривой. Одномерная кривая $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ лучше соответствует нашим представлениям о прямой линии, чем $(n-1)$-мерная поверхность $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Тем не менее, в обобщенной геометрии $\mathcal{G}$ именно $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является аналогом евклидовой прямой.

Очень трудно преодолеть традиционное представление, что евклидова прямая не может деформироваться в многомерную поверхность, и *это представление долгие годы препятствовало построению T-геометрии.* Практически использовались такие обобщенные геометрии, где деформация евклидова пространства преобразовывала евклидову прямую в одномерную линию. Это означает, что выбирались такие геометрии, где геометрические объекты $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ совпадали.

$$\mathcal{T}_{P_0Q} = \mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n} \qquad (3.12)$$

Условие (3.12) совпадения объектов $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, наложенное на T-геометрию, ограничивает список возможных T-геометрий.

Вообще говоря, условие (3.12) выполнено быть не может, потому что левая часть равенства (3.12) не зависит от точек $\{P_1, P_2, ...P_n\}$, тогда как правая часть равенства (3.12), вообще говоря, зависит. Трубка $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ не зависит от точек $\{P_1, P_2, ...P_n\}$, если расстояния $\sqrt{2\sigma(P_i, P_k)}$ между любыми двумя точками $P_i, P_k \in \mathcal{P}^n$ бесконечно малы. В римановой геометрии ограничение (3.12)

выполняется при дополнительных условиях

$$\sqrt{2\sigma\left(P_i,P_k\right)}=\text{infinitesimal},\qquad i,k=1,2,...n \tag{3.13}$$

4 Взаимодействие между метрической геометрией и T-геометрией

Рассмотрим метрическую геометрию, заданную на множестве Ω точек. Метрическое пространство $M=\{\rho,\Omega\}$ задается метрикой (расстоянием) ρ.

$$\begin{aligned}
\rho &: \quad \Omega\times\Omega\to[0,\infty)\subset\mathbb{R} && (4.1)\\
\rho(P,P) &= 0,\qquad \rho(P,Q)=\rho(Q,P),\qquad \forall P,Q\in\Omega && (4.2)\\
\rho(P,Q) &\geq 0,\quad \rho(P,Q)=0,\quad \text{если и только если } P=Q,\quad \forall P,Q\in\Omega && (4.3)\\
0 &\leq \rho(P,R)+\rho(R,Q)-\rho(P,Q),\qquad \forall P,Q,R\in\Omega && (4.4)
\end{aligned}$$

На первый взгляд, метрическое пространство является частным случаем σ-пространства (2.1), и метрическая геометрия является частным случаем T-геометрии с дополнительными ограничениями (4.3), (4.4), наложенными на мировую функцию $\sigma=\frac{1}{2}\rho^2$. Однако, это не так, потому что метрическая геометрия не снабжена принципом деформации. Метрическая геометрия на использует алгоритмов построения евклидовой геометрии. Принцип деформации мог использоваться в метрической геометрии только в координатной форме

$$g_{\mathrm{E}ik}dx^idx^k\to g_{ik}dx^idx^k \tag{4.5}$$

потому что бескоординатная форма (1.2) принципа деформации так же как σ-имманентность евклидовой геометрии и комплекс условий (2.7) - (2.14) не были известны до 1990 года, хотя каждое из соотношений (2.7) - (2.14) было хорошо известно. Однако, метрическая геометрия описывается в бескоординатной форме, и применение деформации (4.5) невозможно в метрической геометрии.

Дополнительные (по отношению к σ-пространству) соотношения (4.3), (4.4) налагаются для того, чтобы обеспечить одномерность прямых линий. В метрической геометрии кратчайшая (прямая) линия может быть построена только в том случае, когда она одномерна..

Рассмотрим множество $\mathcal{EL}\left(P,Q,a\right)$ точек R

$$\mathcal{EL}\left(P,Q,2a\right)=\left\{R|f_{P,Q,2a}\left(R\right)=0\right\},\qquad f_{P,Q,2a}\left(R\right)=\rho(P,R)+\rho(R,Q)-2a \tag{4.6}$$

Если метрическое пространство совпадает с собственно евклидовым пространством, то это множество точек является эллипсоидом с фокусами в точках P,Q и большой полуосью a. Соотношения $f_{P,Q,2a}\left(R\right)>0$, $f_{P,Q,2a}\left(R\right)=0$, $f_{P,Q,2a}\left(R\right)<0$ определяют соответственно внешние точки, точки на границе и внутренние точки эллипсоида. Если $\rho\left(P,Q\right)=2a$, то получаем вырожденный

эллипсоид, который совпадает с сегментом $\mathcal{T}_{[PQ]}$ прямой линии, проходящей через точки P, Q. В собственно евклидовой геометрии вырожденный эллипсоид является одномерным сегментом прямой линии, однако, вовсе не очевидно, что он будет одномерным в произвольной метрической геометрии. Для того, чтобы вырожденный эллипсоид был одномерным в любом метрическом пространстве, неоходимо, чтобы любой вырожденный эллипсоид $\mathcal{EL}\left(P,Q,\rho\left(P,Q\right)\right)$ не имел внутренних точек. Это огранчение записывается в виде

$$f_{P,Q,\rho(P,Q)}\left(R\right)=\rho(P,R)+\rho(R,Q)-\rho(P,Q)\geq 0 \tag{4.7}$$

Сравнивая соотношение (4.7) с (4.4), видим, что условие (4.4) введено для того, чтобы сделать прямые (кратчайшие) одномерными (отсутствие внутренних точек в геометрическом объекте, определяемом двумя точками).

Поскольку метрическая геометрия не использует принципа деформации, она является бедной геометрией, потому что в рамках этой геометрии нельзя построить скалярное произведение двух векторов, определить линейную независимость векторов и построить такие геометрические объекты как плоскости. Все эти объекты, так же как и другие строятся на основе деформации собственно евклидовой геометрии.

Обобщая метрическую геометрию, Менгер [3] и Блюменталь [1] отбросили аксиому треугольника (4.4). Они пытались построить дистантную геометрию, которая была бы более общей геометрией, чем метрическая геометрия. Поскольку они не использовали принципа деформации, они не могли определить кратчайшую (прямую) без ссылки на топологическое понятие кривой $\mathcal{L}$, определяемой как непрерывное отображение (1.7), которое не может быть выражено через расстояние. В результате дистантная геометрия не стала чисто метрической геометрией (т.е. геометрией, определяемой только расстоянием).

Заметим, что риманова геометрия использует принцип деформации в координатной форме. Дистантная геометрия не могла использовать его в такой форме, потому что метрическая и дистантная геометрии формулируются в бескоординатном виде. Однако, применение принципа деформации в бескоординатном виде требует использования свойства σ-имманентности евклидовой геометрии. К. Менгер шел к понятию σ-имманентности и остановился в одном шаге перед ним. Взглянем на теорему Менгера [3], записанную в наших обозначениях.

Теорема. *σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ является изометрически вложимым в n-мерное собственно евклидово пространство E_n, если и только если любое множество из $n+3$ точек, принадлежащих Ω, изометрически вложимо в E_n.*

Теорема о σ-имманентности евклидовой геометрии получается из теоремы Менгера, если вместо условия "любое множество из $n+3$ точек, принадлежащих Ω изометрически вложимо в E_n" написать условие (2.11), которое также содержит $n+3$ точки: $P,Q,\mathcal{P}^n$ и описывает тот факт, что $\{P,Q,\mathcal{P}^n\}\subset E_n$. В этом случае условие теоремы будет содержать только ссылку на свойства ми-

ровой функции евклидова пространства, а не на евклидовость пространства. (Непрерывностью σ-пространства V в данном случае пренебрегают).

5 Условия применения принципа деформации

Римановы геометрии удовлетворяют условию (3.12). Они представляют собой разновидность неоднородной обобщенной геометрии и, следовательно, используют принцип деформации. При построении римановой геометрии бесконечно малое евклидово расстояние деформируется в риманово расстояние. Деформация выбирается так, чтобы евклидова прямая $\mathcal{T}_{\mathrm{E}P_0Q}$, проходящая через точку P_0, коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, преобразовывалась в геодезическую $\mathcal{T}_{P_0Q}$, проходящую через точку P_0, коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ в римановом пространстве.

Заметим, что в T-геометриях, удовлетворяющих условию (3.12) для всех точек $Q, \mathcal{P}^n$, прямая линия

$$\mathcal{T}_{Q_0;P_0Q} = \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}\} \tag{5.1}$$

проходящая через точку Q_0 коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, не является, вообще говоря, одномерной линией. Если бы римановы геометрии были T-геометриями, они содержали бы неодномерные геодезические (прямые линии). Однако, римановы геометрии не являются T-геометриями, потому что при их построении используется не только принцип деформации, но и некоторые другие методы, содержащие ссылку на средства описания. В частности, в римановых геометриях отсутствует абсолютный параллелизм, и нельзя определить прямую линию (5.1), потому что условие коллинеарности $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ не определено, если точки P_0 и Q_0 не совпадают. С одной стороны, отсутствие абсолютного параллелизма позволяет обойти проблему неодномерности прямых. С другой стороны, это делает римановы геометрии непоследовательными, потому что они перестают быть T-геометриями, которые последовательны по построению (смотри детали в [8]).

Дело в том, что применения *только принципа деформации* достаточно для построения обобщенной геометрии. Кроме того такое построение последовательно, потому что не используется никаких логических рассуждений. Если ввести добавочную структуру (например, топологическую структуру), то получим обогащенную геометрию, т.е. геометрию, снабженную дополнительной структурой на ней. Геометрия, снабженная дополнительной структурой, является более богатой конструкцией, чем просто геометрия. Однако, это верно только в том случае, когда дополнительная структура является дополнением к геометрии. Если использовать дополнительную структуру при построении геометрии, мы отождествляем дополнительную структуру с одной из структур геометрии. Требование того, чтобы дополнительная структура была структурой геометрии, ограничивает применение принципа деформации и уменьшает список возможных геометрий, потому что совпадение дополнительной структуры с некоторой структурой геометрии возможно не для всех геометрий, а только для некоторых из них.

Пусть, например, мы используем для построения обобщенной геометрии понятие кривой $\mathcal{L}$ (1.7). Кривая $\mathcal{L}$, рассматриваемая как непрерывное отображение, является топологической структурой, которая не может быть выражена только через мировую функцию. Использование отображения (1.7) требует введения понятия топологического пространства и, в частности, понятия непрерывности. Если отождествить топологическую кривую (1.7) с "метрической" кривой, определяемой как ломаная линия

$$\mathcal{T}_{\rm br} = \bigcup_i \mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma\left(P_i, P_{i+1}\right)} - \sqrt{2\sigma\left(P_i, R\right)} - \sqrt{2\sigma\left(R, P_{i+1}\right)} \right\}$$

состоящая из прямолинейных сегментов $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$ между точками P_i, P_{i+1}, то список возможных геометрий ограничивается, потому что отождествление возможно только в некоторых геометриях. Отождествляя (1.7) и (5.2), мы исключаем все дискретные геометрии и те T-геометрии, где сегмент $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$ прямой линии является поверхностью, а не одномерным множеством точек. Таким образом, дополнительные структуры приводят к (i) обогащенным геометриям, (ii) ограниченным геометриям и (iii) ограниченным обогащенным геометриям. Результат зависит от способа использования дополнительной структуры.

Заметим, что некоторые ограничения (непрерывность, выпуклость, отсутствие абсолютного параллелизма), налагаемые на обобщенные геометрии являются результатом несогласованности средств описания, используемых при построении геометрии. В T-геометрии, которая использует только принцип деформации, таких ограничений нет. Кроме того в T-геометрии появляется некоторое новое свойство обобщенной геометрии, которое отсутствует в традиционных версиях обобщенной геометрии. Это свойство, называемое невырожденностью геометрии, следует прямо из использования произвольных деформаций собственно евклидовой геометрии.

Определение. *Геометрия вырождена в точке P_0 в направлении вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$, $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \neq 0$, если соотношения*

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) = \sqrt{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{R}|}, \qquad |\mathbf{P}_0\mathbf{R}| = a \neq 0, \tag{5.3}$$

рассматриваемые как уравнения для определения точки R, имеют не более одного решения для любого $a \neq 0$. В противном случае геометрия невырождена в точке P_0 в направлении вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$.

Заметим, что первое уравнение (5.3) является условием параллельности векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$.

Собственно евклидова геометрия вырождена, т.е. она вырождена во всех точках в направлении всех векторов. Рассматривая геометрию Минковского, следует различать между геометрией Минковского и T-геометрией Минковского. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией и различаются в определении параллельности. В T-геометрии Минковского

параллельность двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определяется первым уравнением (5.3). Это определение основывается на принципе деформации. В n-мерной геометрии Минковского (n-мерная псевдоевклидова геометрия индекса 1) параллельность определяется соотношением типа (3.9)

$$\mathbf{Q_0Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P_0R}: \qquad (\mathbf{P_0P}_i.\mathbf{Q_0Q}) = a\,(\mathbf{P_0P}_i.\mathbf{P_0R}), \qquad i = 1,2,...n, \qquad a > 0 \tag{5.4}$$

где точки $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ определяют в n-мерной геометрии Минковского прямолинейную систему координат с базисными векторами $\mathbf{P_0P}_i$, $i = 1,2,..n$. Зависимость определения (5.4) от точек $(P_0, P_1, ...P_n)$ фиктивна, но зависимость от числа $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$ существенна. Таким образом, определение (5.4) зависит от способа описания геометрии.

T-геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех времениподобных векторов, и невырождена во всех точках в направлении всех пространственноподобных векторов. Геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех векторов. Традиционно используется геометрия Минковского, а невырожденность пространственноподобных направлений игнорируется.

Рассматривая собственно риманову геометрию, следует различать между римановой T-геометрией и римановой геометрией. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией. Они различаются в определении параллельности. В римановой T-геометрии параллельность двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определяется сотношением (5.3). В римановой геометрии параллельность двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определена только в случае, когда точки P_0 и Q_0 совпадают. Параллельность удаленных векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$, вообще говоря, не определена. Этот факт известен как отсутствие абсолютного параллелизма.

Собственно риманова геометрия локально вырождена, т.е. вырождена во всех точках P_0 в направлении всех векторов $\mathbf{P_0Q}$ с началом в точке P_0. В общем случае, когда $P_0 \neq Q_0$, собственно риманова T-геометрия, вообще говоря, невырождена. Однако, локально собственно риманова T-геометрия вырождена так же, как и собственно риманова геометрия. Собственно риманова геометрия вырождена, потому что она вырождена локально, тогда как нелокальная невырожденность в римановой геометрии не определена из-за отсутствия абсолютного параллелизма. Традиционно используют риманову геометрию, (а не риманову T-геометрию), полностью игнорируя свойство невырожденности.

С точки зрения традиционного подхода к обобщенной геометрии невырожденность является нежелательным свойством геометрии, хотя с точки зрения логики и принципа деформации *невырожденность является неотъемлемым свойством T-геометрии.* Нелокальная невырожденность удаляется из собственно римановой геометрии отрицанием понятия параллельности удаленных векторов. Невырожденность пространственноподобных направлений устраняется из геометрии Минковского с помощью переопределения параллельности векторов. Однако, невырожденность является важным свойством геометрии реального пространства-времени. Чтобы оценить это, рассмотрим пример.

6 Простой пример невырожденной геометрии пространства-времени

Пусть пространственно-временная геометрия $\mathcal{G}_{\rm d}$, описывается T-геометрией на четырехмерном многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$. Мировая функция $\sigma_{\rm d}$ задается соотношением

$$\sigma_{\rm d} = \sigma_{\rm M} + D\left(\sigma_{\rm M}\right) = \begin{cases} \sigma_{\rm M} + d & \text{если } \sigma_0 < \sigma_{\rm M} \\ \left(1 + \frac{d}{\sigma_0}\right)\sigma_{\rm M} & \text{если } 0 \le \sigma_{\rm M} \le \sigma_0 \\ \sigma_{\rm M} & \text{если } \sigma_{\rm M} < 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

где $d \ge 0$ и $\sigma_0 > 0$ – некоторые постоянные. Величина $\sigma_{\rm M}$ есть мировая функция в пространственно-временной геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$. В прямолинейной ортогональной (инерциальной) системе координат $x = \{t, \mathbf{x}\}$ мировая функция $\sigma_{\rm M}$ имеет вид

$$\sigma_{\rm M}\left(x, x'\right) = \frac{1}{2}\left(c^2\left(t - t'\right)^2 - \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right)^2\right) \tag{6.2}$$

где c есть скорость света.

Сравним ломаную линию (5.2) в пространственно-временной геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$ и в невырожденной геометрии $\mathcal{G}_{\rm d}$. Предположим, что $\mathcal{T}_{\rm br}$ есть времениподобная ломаная линия. Все звенья $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$ ломаной $\mathcal{T}_{\rm br}$ времениподобны и имеют одну и ту же длину

$$\left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right|_{\rm d} = \sqrt{2\sigma_{\rm d}\left(P_i, P_{i+1}\right)} = \mu_{\rm d} > 0, \qquad i = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{6.3}$$

$$\left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right|_{\rm M} = \sqrt{2\sigma_{\rm M}\left(P_i, P_{i+1}\right)} = \mu_{\rm M} > 0, \qquad i = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{6.4}$$

где индексы "d" и "M" означают величины, рассчитанные соответственно с помощью $\sigma_{\rm d}$ и с помощью $\sigma_{\rm M}$. Вектор $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ рассматривается как импульс частицы на сегменте $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$, а величина $\left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right| = \mu$ интерпретируется как ее масса. Из определения (2.5) и соотношения (6.1) следует, что для времениподобных векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ с $\mu > \sqrt{2\sigma_0}$

$$\left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right|_{\rm d}^2 = \mu_{\rm d}^2 = \mu_{\rm M}^2 + 2d, \qquad \mu_{\rm M}^2 > 2\sigma_0 \tag{6.5}$$

$$\left(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right)_{\rm d} = \left(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right)_{\rm M} + d \tag{6.6}$$

Расчет формы сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}\left(\sigma_{\rm d}\right)$ в $\mathcal{G}_{\rm d}$ дает соотношение

$$r^2(\tau) = \begin{cases} \tau^2\mu_{\rm d}^2\dfrac{\left(1 - \frac{\tau d}{2(\sigma_0+d)}\right)^2}{\left(1 - \frac{2d}{\mu_{\rm d}^2}\right)} - \dfrac{\tau^2\mu_{\rm d}^2\sigma_0}{(\sigma_0+d)}, & 0 < \tau < \dfrac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\rm d}} \\ \dfrac{3d}{2} + 2d\left(\tau - 1/2\right)^2\left(1 - \frac{2d}{\mu_{\rm d}^2}\right)^{-1}, & \dfrac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\rm d}} < \tau < 1 - \dfrac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\rm d}} \\ (1-\tau)^2\mu_{\rm d}^2\left[\dfrac{\left(1 - \frac{(1-\tau)d}{2(\sigma_0+d)}\right)^2}{\left(1 - \frac{2d}{\mu_{\rm d}^2}\right)} - \dfrac{\sigma_0}{(\sigma_0+d)}\right], & 1 - \dfrac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\rm d}} < \tau < 1 \end{cases}, \tag{6.7}$$

где $r\,(\tau)$ есть пространственный радиус сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}\,(\sigma_{\rm d})$ в системе координат, где точки P_0 и P_1 имеют координаты $P_0 = \{0,0,0,0\}$, $P_1 = \{\mu_{\rm d},0,0,0\}$ и τ является параметром вдоль сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}\,(\sigma_{\rm d})$, $(\tau\,(P_0) = 0,\ \tau\,(P_1) = 1)$. Из (6.7) можно видеть, что характерный радиус сегмента равен $\sqrt{d}$.

Пусть ломаная трубка $\mathcal{T}_{\rm br}$ описывает "мировую трубку" свободной частицы. По определению, это означает, что любое звено $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$ параллельно смежному звену $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$

$$\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i \uparrow\uparrow \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}: \qquad (\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}) - |\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|\cdot|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = 0 \tag{6.8}$$

Определение параллельности различно в геометриях $\mathcal{G}_{\rm M}$ и $\mathcal{G}_{\rm d}$. В результате звенья, параллельные в геометрии $\mathcal{G}_{\rm M}$, не параллельны в $\mathcal{G}_{\rm d}$ и наоборот.

Пусть $\mathcal{T}_{\rm br}\,(\sigma_{\rm M})$ описывает мировую линию свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_{\rm M}$. Угол $\vartheta_{\rm M}$ между смежными звеньями в $\mathcal{G}_{\rm M}$ определяется соотношением

$$\cosh\vartheta_{\rm M} = \frac{(\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_{\rm M}}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\rm M}\cdot|\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0|_{\rm M}} = 1 \tag{6.9}$$

Угол $\vartheta_{\rm M} = 0$, и геометрический объект $\mathcal{T}_{\rm br}\,(\sigma_{\rm M})$ является времениподобной прямой на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$.

Пусть теперь $\mathcal{T}_{\rm br}\,(\sigma_{\rm d})$ описывает мировую трубку свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_{\rm d}$. Угол $\vartheta_{\rm d}$ между смежными звеньми в $\mathcal{G}_{\rm d}$ определяется соотношением

$$\cosh\vartheta_{\rm d} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\rm d}}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\rm d}\cdot|\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_{\rm d}} = 1 \tag{6.10}$$

Угол $\vartheta_{\rm d} = 0$ также. Если нарисовать ломаную трубку $\mathcal{T}_{\rm br}\,(\sigma_{\rm d})$ на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$, используя координаты базовых точек P_i и измерить угол $\vartheta_{\rm dM}$ между смежными звеньями в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$, то получим из (6.5), (6.6) следующее выражение для угла $\vartheta_{\rm dM}$

$$\cosh\vartheta_{\rm dM} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\rm M}}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\rm M}\cdot|\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_{\rm M}} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\rm d} - d}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|^2_{\rm d} - 2d} \tag{6.11}$$

Подставляя значение величины $(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\rm d}$, взятой из (6.10), (6.5), получаем

$$\cosh\vartheta_{\rm dM} = \frac{\mu^d_{\rm d} - d}{\mu^2_{\rm d} - 2d} \approx 1 + \frac{d}{\mu^2_{\rm d}}, \qquad d \ll \mu^2_{\rm d} \tag{6.12}$$

Следовательно, $\vartheta_{\rm dM} \approx \sqrt{2d}/\mu_{\rm d}$. Это означает, что смежное звено располагается на конусе с углом $\sqrt{2d}/\mu_{\rm d}$, и вся трубка $\mathcal{T}_{\rm br}\,(\sigma_{\rm d})$ имеет случайную форму, потому что каждое звено вихляет с характерным углом $\sqrt{2d}/\mu_{\rm d}$. Угол вихляния зависит от дисторсии d и от массы частицы $\mu_{\rm d}$. Угол вихляния мал для частицы большой массы. Случайное смещение конца сегмента порядка $\mu_{\rm d}\vartheta_{\rm dM} = \sqrt{2d}$, т.е. того же порядка, что и толщина сегмента. Это естественно, потому что эти два явления имеют общую причину: дисторсию D пространства-времени.

Следует заметить, что влияние геометрии пространства-времени на движение частицы нелокально в том смысле, что вид мировой функции (6.1) для значений $\sigma_{\rm M} < \frac{1}{2}\mu_{\rm d}^2$ не существенен для стохастичности движения частицы массы $\mu_{\rm d}$.

Такая ситуация, когда мировая линия свободной частицы является стохастической в детерминированной геометрии, и эта стохастичность зависит от массы частицы, кажется экзотической и невероятной. Однако, эксперименты показывают что движение реальных частиц малой массы действительно стохастично, и эта стохастичность возрастает, когда масса частицы уменьшается. С физической точки зрения теоретическое обоснование стохастичности желательно, и некоторые исследователи изобретают стохастические геометрии, квантовые геометрии и другие экзотические геометрические построения, чтобы получить квантовую стохастичность. Однако, в римановой геометрии пространства-времени движение частицы не зависит от ее массы, и в рамках римановой геометрии пространства-времени трудно объяснить квантовую стохастичность свойствами пространственно-временной геометрии. Невырожденная геометрия $\mathcal{G}_{\rm d}$ непринужденно объясняет стохастичность и ее зависимость от массы частицы. Больше того, при надлежащем выборе дисторсии d статистическое описание стохастической $\mathcal{T}_{\rm br}$ приводит к квантовому описанию (в терминах уравнения Шредингера) [6]. Для этого достаточно положить

$$d = \frac{\hbar}{2bc} \tag{6.13}$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c – скорость света, а b есть некоторая универсальная постоянная, свзывающая геометрическую массу μ с обычной массой частицы m с помощью соотношения $m = b\mu$. Иными словами, невырожденная геометрия (6.1) ближе к реальной геометрии, чем геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$.

Дальнейшее развитие статистического описания геометрической стохастичности приводит к созданию модельной концепции квантовых явлений(МККЯ), которая относится к обычной квантовой теории примерно так же, как статистическая физика относится к аксиоматической термодинамике. МККЯ представляет собой хорошо определенную релятивистскую концепцию с эффективными методами исследования [10], тогда как традиционная квантовая теория не является хорошо определенной, потому что содержит неправильную пространственно-временную геометрию, чья некорректность компенсируется дополнительными гипотезами (квантовыми принципами). Кроме того она имеет проблемы с применением нерелятивистского формализма квантовой механики к описанию релятивистских явлений.

Геометрия $\mathcal{G}_{\rm d}$, так же как и геометрия Минковского является однородной геометрией, потому что мировая функция $\sigma_{\rm d}$ инвариантна относительно всех преобразований координат, относительно которых инвариантна мировая функция $\sigma_{\rm M}$.

Список литературы

[1] Blumenthal, L.M. [1953] *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press.

[2] Блохинцев Д.И. *Пространство и время в микромире*. Наука, 1970, стр. 261.

[3] Menger, K.[1928] Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113.

[4] Menger, K. [1951], *Proc. Nat. Acad. Soc. USA*, **37**, 226, (1951).

[5] Rylov, Yu.A. [1990] Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890.

[6] Rylov, Yu.A. [1991] Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098.

[7] Rylov, Yu.A. [2002] Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760.

[8] Rylov, Yu.A. [2002] Deformation principle and problem of parallelism in geometry and physics. *(*In preparation, available at http://arXiv.org/abs/ math.GM /0210413)

[9] Rylov, Yu.A. [2002] Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0210003).

[10] Rylov, Yu.A. [2003] Model conception of quantum phenomena: logical structure and investigation methods. (In preparation, available at http://arXiv.org/abs /physics/0310050, v2).

[11] Synge, J.L. [1960] *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam.