Геометрии с интранзитивным отношением эквивалентности

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, Москва 119526, Проспект Вернадского 101-1.
e-mail: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Рассматривается геометрия с интранзитивным отношением эквивалентности. Такая геометрия является физической геометрией, т.е. она полностью описывается мировой функцией, которая представляет собой половину квадрата функции расстояния. Физическая геометрия, вообще говоря, не может быть аксиоматизирована. Она получается в результате деформации собственно евклидовой геометрии. Класс физических геометрий является более мощным, чем класс аксиоматизируемых геометрий. Физическая геометрия позволяет описывать такие геометрические свойства как дискретность, зернистость и ограниченная делимость. Эти свойства оказываются важными в применении к пространству-времени. Они позволяют объяснить дискриминационные свойства пространства-времени, которые порождают дискретные параметры элементарных частиц. Математический формализм физической геометрии очень прост. Физическая геометрия формулируется в геометрических терминах (в терминах точек и мировой функции) без использования средств описания (системы координат, размерности пространства, многообразия и т.п.).

1 Введение

Физическая геометрия является наукой, которая исследует взаимное расположение геометрических объектов в пространстве, или взаимное расположение событий в пространстве событий (в пространстве-времени). Геометрические объекты представляют собой некоторые подмножества точек на точечном множестве Ω, где задана геометрия. Точечное множество Ω называется пространством или пространством-временем (если точки множества Ω являются событиями). Физическая геометрия представляет собой множество всех утверждений о свойствах всех геометрических объектов, принадлежащих пространству Ω. Физическая геометрия $\mathcal{G}$ определена полностью, если заданы все расстояния $\rho(P,Q)$ между любыми парами точек $P,Q\in\Omega$. Интуитивно ясно, что взаимное расположение геометрических объектов полностью определяется, если расстояния $\rho(P,Q)$ заданы для всех пар точек. В случае собственно евклидовой геометрии тот факт, что собственно евклидова геометрия полностью описывается в терминах расстояния ρ, доказан [1]. Вообще говоря, мировая функция $\sigma(P,Q)=\frac{1}{2}\rho^2(P,Q)$ более удобна, чем расстояние, потому что мировая функция вещественна в тех случаях, когда ρ может быть мнимым (например, в геометрии Минковского). Термин "мировая функция" был введен Дж.Л. Сингом в его изложении общей теории относительности [2].

Мировая функция σ определяется следующим образом

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P)=0, \qquad \forall P\in\Omega \tag{1.1}$$

Построение геометрических объектов и описание их свойств является основной проблемой любой геометрии. Множество геометрических объектов и множество всех утверждений об их свойствах представляет собой континуальное множество, и очень трудно построить их без надлежащей формализации.

Евклидов метод построения геометрии позволяет построить геометрии, которые могут быть аксиоматизированы, т.е. такие геометрии, где множество $\mathcal{S}$ всех утверждений может быть выведено из множества $\mathcal{A}$ основных утверждений (аксиом) с помощью правил формальной логики. Аксиомы описывают свойства базовых геометрических объектов (точка, отрезок, угол). Комбинируя базовые объекты, получаем более сложные геометрические объекты, состоящие из многих базовых объектов. Утверждения, касающиеся этих сложных объектов, выводятся с помощью правил формальной логики из аксиом, которые описывают свойства базовых объектов.

Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть построена евклидовым методом. Доказано, что евклидовы аксиомы, используемые для описания базовых объектов (точка,отрезок ,угол) непротиворечивы [3]. Таким образом собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть аксиоматизирована. Возможность аксиоматизации вместе с формальной логикой используется для увеличения числа геометрических утверждений, когда континуальное множество всех геометрических утверждений получается из конечного числа базовых утверждений (аксиом).

Поскольку был известен только один способ увеличения числа геометрических утверждений, то этот способ (выведение из аксиом) был использован для построения не-евклидовых геометрий. Полагают, что изменяя надлежащим образом аксиоматику (свойства базовых элементов), можно получать другие (не-евклидовы) геометрии. Для того, чтобы построение не-евклидовой геометрии $\mathcal{G}$ с помощью этого метода было возможно, должны выполняться следующие условия:

1. Аксиоматика непротиворечива, т.е. любые два разных метода вывода геометрического утверждения должны давать один и тот же результат.

2. Все утверждения геометрии $\mathcal{G}$ могут быть выражены в терминах мировой функции σ.

Если первое условие выполнено, а второе – нет, то полученная не-евклидова геометрия $\mathcal{G}$ не является физической геометрией. Такую геометрию следует квалифицировать как математическую геометрию. Таким образом, математическая геометрия есть такое множество утверждений (логическое построение), которая может быть выведена из системы аксиом с помощью правил формальной логики. Некоторые математические геометрии не удовлетворяют второму условию. Такие геометрии не являются физическими геометриями. Они не могут использоваться для описания пространства-времени. Например, аффинная геометрия и проективная геометрия являются примерами математических геометрий, Второе условие не выполняется для этих геометрий, потому что они не содержат понятия расстояния (мировой функции).

Однако, математическая геометрия может быть одновременно физической геометрией. Например, собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является математической и физической геометрией одновременно, т.е. для нее выполнены оба условия.

В математической геометрии увеличение числа геометрических утверждений осуществляется с помощью логических рассуждений (доказательство теорем и т.п.). В физической геометрии, которая не является одновременно математической геометрией, вообще говоря, нет способа увеличения числа геометрических утверждений. В любой физической геометрии все утверждения берутся из эталонной физической геометрии, которая является одновременно и физической и математической геометрией. Множество утверждений в любой физической геометрии то же самое, что и множество утверждений в эталонной физической геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$. Эталонная физическая геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ – это такая физическая геометрия, которая может быть аксиоматизирована. Таким образом, множество всех геометрических утверждений эталонной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ получается с помощью логических рассуждений так же, как и в любой математической геометрии. После этого множество $\mathcal{S}$ всех утверждений $\mathcal{P}$ геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ выражается в терминах мировой функции σ_{st} геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ в виде $\mathcal{P}=\mathcal{P}\left(\sigma_{\mathrm{st}}\right)$. Это возможно, потому что $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ является физической геометрией. Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может использоваться в качестве эталонной физической геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$. Любое утверждение геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть выражено в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. Например, пусть в декартовой системе координат n-мерной собственно евклидовой геометрии векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ имеют координаты

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1=\left\{x_1,x_2,...x_n\right\},\qquad \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1=\left\{y_1,y_2,...y_n\right\} \tag{1.2}$$

и мировая функция имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{E}}\left(P_0,P_1\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(x_k\right)^2 \tag{1.3}$$

Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ записывается в виде

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sum_{k=1}^{k=n} x_k y_k \tag{1.4}$$

Скалярное произведение (1.4) может быть представлено в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma_{\mathrm{E}}(P_0, Q_1) + \sigma_{\mathrm{E}}(P_1, Q_0) - \sigma_{\mathrm{E}}(P_0, Q_0) - \sigma_{\mathrm{E}}(P_1, Q_1) \tag{1.5}$$

Эквивалентность (равенство) векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ традиционно определяется в виде

$$x_k = y_k, \qquad k = 1, 2, ...n \tag{1.6}$$

В терминах мировой функции условие (1.6) эквивалентности $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ записывается в виде двух соотношений

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \quad : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{1.7}$$

$$\wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{1.8}$$

где

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) = 2\sigma_{\mathrm{E}}(P_0, P_1) \tag{1.9}$$

Легко проверить, что соотношение (1.6) эквивалентно соотношениям (1.7), (1.8). Это означает, что условия (1.7), (1.8) могут быть использованы как определение отношения эквивалентности двух векторов $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. В соответствии с (1.5) определение (1.7), (1.8) ссылается только на точки P_0, P_1, Q_0, Q_1, определяющие векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, и на мировую функцию σ_{E} между этими точками, тогда как определение (1.6) содержит ссылку на размерность n собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и на декартову систему координат в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Определение (1.6) предполагает возможность введения линейного векторного пространства в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Условие (1.7) означает, что векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ параллельны, тогда как условие (1.8) означает, что их длины равны.

Определение (1.7), (1.8) является более общим, чем определение (1.6), потому что оно не использует средства описания (систему координат) и не предполагает введения линейного векторного пространства. Определение (1.7), (1.8) может использоваться в любой физической геометрии $\mathcal{G}$ независимо от того, можно ли ввести линейное пространство в этой геометрии $\mathcal{G}$. Заменяя евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией σ физической геометрии $\mathcal{G}$ в формулах (1.6) – (1.8), получаем отношение эквивалентности в физической геометрии $\mathcal{G}$. Такая замена означает деформацию собственно евклидовой геометрии, когда изменяется расстояние между точками.

Отношение эквивалентности (1.7), (1.8) транзитивно в собственно евклидовой геометрии, но, вообще говоря, интранзитивно в физической геометрии. В самом деле, если фиксировать точки P_0, P_1, Q_0 и решить уравнения (1.7), (1.8) относительно точки Q_1, то в собственно евклидовой геометрии мы получим всегда одно и только одно решение. Это решение описывает хорошо известное свойство собственно евклидовой геометрии, что в точке Q_0 имеется один и только один вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, который равен вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в точке P_0. Тогда для любых точек $P_0, P_1, Q_0, Q_1, R_0R_1$ из $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \wedge \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$ следует, что $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$. Транзитивность отношения эквивалентности является специальным свойством собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}$, которого может не быть в произвольной физической геометрии.

В общем случае физической геометрии $\mathcal{G}$, когда евклидова мировая функция σ_E в соотношениях (1.7), (1.8) заменена другой мировой функцией σ, нельзя гарантировать ни существования вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, эквивалентного вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, ни его единственности.

Если имеется два разных вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1' \wedge \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\overline{\mathrm{eqv}}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'$, где $\overline{\mathrm{eqv}}$ означает неэквивалентность, то отношение эквивалентности интранзитивно. Интранзитивность связана с многовариантностью отношения эквивалентности. По определению, если в точке Q_0 имеется несколько векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1', \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'', ...$, которые эквивалентны вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в точке P_0, но они не эквивалентны между собой, то отношение эквивалентности многовариантно в точке Q_0 по отношению к вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Отношение эквивалентности может быть нуль-вариантным для точки Q_0 по отношению к вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, если в точке Q_0 нет векторов, эквивалентных вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Нуль-вариантность может рассматриваться как частный случай многовариантости, хотя нуль-вариантность связана с интранзитивностью иным способом.

Случай, когда в точке P_0 имеются два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, которые эквивалентны, но не совпадают

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, \quad P_1 \neq P_2 \tag{1.10}$$

вообще говоря, тоже возможен. Это частный случай интранзитивной (многовариантной) эквивалентности. Другими словами, совпадение двух векторов и их эквивалентность, вообще говоря, разные вещи. Два совпадающих вектора всегда эквивалентны, но два эквивалентных вектора, имеющих общее начало, могут не совпадать.

Физическая геометрия, вообще говоря, многовариантна (и интранзитивна). Собственно евклидова геометрия – единственный пример одновариантной физической геометрии. Даже псевдоевклидова геометрия, вообще говоря, многовариантна.

В качестве примера рассмотрим 4-мерную геометрию Минковского, которая является псевдоевклидовой геометрией индекса 1. Пусть в инерциальной системе координат точки $P_0 = Q_0$, P_1, Q_1 имеют координаты

$$P_0 = Q_0 = \{0,0,0,0\}, \qquad P_1 = \left\{x^0, x^1, x^2, x^3\right\}, \qquad Q_1 = \left\{y^0, y^1, y^2, y^3\right\} \tag{1.11}$$

В этой системе координат мировая функция имеет вид

$$\sigma_\mathrm{M}(P_1, Q_1) = \sigma_\mathrm{M}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\left(x^0 - y^0\right)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2\right) = \frac{1}{2}x^k y_k \tag{1.12}$$

Здесь x^k и x_k суть соответственно контравариантные и ковариантные координаты точки P_1. По повторяющимся контравариантным и ковариантным индексам производится суммирование от 0 до 3. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \left\{x^0, \mathbf{x}\right\} = \left\{x^0, x^1, x^2, x^3\right\}, \qquad \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \left\{y^0, \mathbf{y}\right\} = \left\{y^0, y^1, y^2, y^3\right\} \tag{1.13}$$

Условие (1.7), (1.8) эквивалентности векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ имеет вид

$$\frac{1}{2}y^k y_k + \frac{1}{2}x^k x_k - \frac{1}{2}\left(x^k - y^k\right)\left(x_k - y_k\right) = x^k x_k \tag{1.14}$$

$$x^k x_k = y^k y_k \tag{1.15}$$

Полагая

$$\alpha^k = x^k - y^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{1.16}$$

получаем

$$\alpha^k \alpha_k = 0, \qquad 2y^k \alpha_k = 0 \tag{1.17}$$

Если вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ времениподобен, т.е. $y^k y_k > 0$, то имеется единственное решение уравнений (1.17)

$$\alpha^k = 0, \qquad x^k = y^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{1.18}$$

и этот результат совпадает с традиционным определением эквивалентности векторов в пространстве Минковского

$$x^k = y^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{1.19}$$

Если вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ пространственноподобен, т.е. $y^k y_k < 0$, решение уравнения (1.17) имеет вид

$$x = \left\{x^0, \mathbf{x}\right\}, \qquad x^0 = y^0 + \alpha, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{y} + \alpha\mathbf{n} \tag{1.20}$$

где α произвольное вещественное число, $\mathbf{n}$ есть единичный 3-вектор, который образует угол ϕ с 3-вектором $\mathbf{y}$. Угол ϕ определяется соотношением

$$\cos\phi = \frac{y^0}{|\mathbf{y}|} \tag{1.21}$$

Угол ϕ вещественен, если вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ пространственноподобен или изотропен ($|y^0| \leq |\mathbf{y}|$). В частности, если система координат выбрана так, что 3-вектор $\mathbf{y} = \{y^1, 0, 0\}$, то получаем

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \left\{y^0, y^1, 0, 0\right\}, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \left\{y^0 + \alpha, y^1 + \alpha\frac{y^0}{y^1}, 0, 0\right\} \tag{1.22}$$

где α есть произвольное вещественное число. Мы будем называть физическую геометрию, описываемую мировой функцией (1.12) σ-минковской физической геометрией. Термин "геометрия Минковского" мы оставим для геометрии, построенной традиционным способом. Таким образом, σ-минковская геометрия многовариантна по отношению к пространственноподобным и изотропным векторам и одновариантна по отношению к времениподобным векторам. Отношение эквивалентности в σ-минковской геометрии интранзитивно. Это означает, что σ-минковская геометрия не может быть аксиоматизирована, потому что аксиоматизация геометрии порождает транзитивное (и одновариантное) отношение эквивалентности.

При традиционном подходе, основанном на использовании линейного векторного пространства, геометрия Минковского одновариантна по отношению к любым векторам. Одновариантность обусловлена использованием отношения эквивалентности (1.19), которое формулируется в терминах координат. Использование координат может быть заменено четырьмя соотношениями, записанными в терминах мировой функции. Например

$$x^k = g^{kl} x_l, \qquad x_k = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{OS}_k), \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{1.23}$$

где метрический тензор определен через мировую функцию (1.12) и соотношение (1.5) с помощью соотношений

$$g_{kl} = (\mathbf{OS}_k.\mathbf{OS}_l), \qquad g^{kj} g_{jl} = \delta^k_l, \qquad k, l = 0, 1, 2, 3 \tag{1.24}$$

Четыре соотношения (1.6) принимают вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{OS}_k) = (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{OS}_k), \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{1.25}$$

Они содержат ссылку на пять дополнительных точек O, S_0, S_1, S_2, S_3, представляющих систему координат. Хотя эти соотношения инвариантны по отношению к выбору пяти точек O, S_0, S_1, S_2, S_3, но они чувствительны к числу этих точек, которое зависит от от размерности геометрии Минковского. Определение эквивалентности двух векторов в любой физической геометрии зависит только от точек P_0, P_1, Q_0, Q_1, которые определяют векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ и от мировой функции между этими точками. Зависимость от дополнительных точек означает, что рассматриваемая геометрия не является физической геометрией. Рассматриваемая геометрия является обогащенной физической геометрией, т.е. физической геометрией с некоторой дополнительной структурой, заданной на физической геометрии. В данном случае система координат играет роль этой дополнительной структуры.

В любом случае σ-минковская геометрия, рассматриваемая как физическая геометрия, является геометрией, которая многовариантна по отношению к пространственноподобным и изотропным векторам. Таким образом, отношение эквивалентности (1.7), (1.8) верно в пространственно-временной σ-минковской геометрии, и σ-минковская геометрия многовариантна по отношению к пространственноподобным и изотропным векторам.

Работая с пространственно-временной геометрией Минковского, физики используют соотношение эквивалентности (1.18) и рассматривают геометрию пространства-времени как одновариантную (транзитивную)геометрию. Такой подход оказывается правильным, поскольку рассматриваются только частицы с времениподобными мировыми линиями. Все векторы, имеющие отношение к времениподобным мировым линиям оказываются времениподобными. Для этих векторов отношение эквивалентности (1.18) совпадает с отношением эквивалентности (1.7), (1.8).

Однако, для рассмотрения свободных частиц, чьи мировые линии являются пространственноподобными винтовыми линиями с времениподобной осью, нужно правильное отношение эквивалентности (1.7), (1.8). Строго говоря, свободные частицы с такой винтообразной мировой линией не могут существовать в σ-минковской геометрии пространства-времени. Однако небольшая модификация σ-минковской геометрии пространства-времени допускает существование свободных частиц с винтообразной пространственноподобной мировой линией [4]. Такие частицы ассоциируются с классической дираковской частицей [5, 6]. При традиционном подходе дираковская частица ассоциируется с квантовой физикой, которая не имеет простой геометрической интерпретации, потому что γ-матрицы, используемые при описании дираковской частицы, не имеют прямой геометрической интерпретации в терминах точек пространства-времени.

Вообще, работая с геометрией Минковского, мы сталкиваемся с альтернативой:

1. Геометрия Минковского ((σ-минковская геометрия) является физической геометрией, и тогда она многовариантна и не может быть аксиоматизирована.

2. Геометрия Минковского является одновариантной и она может быть аксиоматизирована. Но тогда она не является физической геометрией.

Физики склонны выбирать первый вариант, потому что им нужна геометрия для описания свойств пространства-времени, где главной величиной является пространственно-временное расстояние (мировая функция). То обстоятельство, можно ли аксиоматизировать геометрию пространства-времени, представляется им второстепенным делом.

Напротив, математики склонны выбирать второй вариант. Для них очень важно, можно ли аксиоматизировать геометрию и можно ли изобретать новые аксиомы и доказывать новые теоремы. Проблема приложений геометрии к физике и проблема, можно ли рассматривать геометрию как физическую, представляются математикам второстепенными.

Следует заметить, что требуя аксиоматизации геометрии, математики получают много проблем, которые легко можно обойти. Они полагают, что любая геометрия может быть выведена из надлежащей аксиоматики, т.е. может быть аксиоматизирована. Такой подход порождает проблему непротиворечивости геометрии проблему формулирования и доказательства разных геометрических теорем. Использование физических геометрий, которые строятся путем деформации собственно евклидовой геометрии, свободно от этих проблем. Используя метод построения геометрии, основанный на деформации собственно евклидовой геометрии (принцип деформации), можно построить физические геометрии, которые не могут быть построены с помощью метода аксиоматизации.

2 Геометрия или способ описания геометрии?

Как правило, математики не принимают интранзитивное отношение эквивалентности. Они говорят: "Во всех математических работах отношение эквивалентности определяется как транзитивная операция. Если Вы хотите использовать интранзитивную операцию, используйте другой термин для этой операции, например, "обобщенная эквивалентность" или другой термин, отличный от термина эквивалентность. Это необходимо, чтобы избежать недоразумений". Математики были бы правы, если бы строилась другая абстрактная логическая конструкция. Однако обсуждаются свойства реального объекта, пространственно-временной геометрии, и следует использовать понятия, пригодные для описания пространства-времени. Недоразумение возникает из-за того, что математики рассматривают линейное векторное пространство с заданным на нем скалярным произведением, как необходимый атрибут физической геометрии и настаивают на том, что все понятия, используемые для описания линейного векторного пространства, являются пригодными для описания физической геометрии (геометрии пространства-времени).

На самом деле, линейное векторное пространство с заданным на нем скалярным произведением, вообще говоря, не является атрибутом физической геометрии. Некоторые понятия линейного векторного пространства имеют другой смысл, отличающийся от смысла этих понятий, используемых в динамике и в физической геометрии. Приведем другие возражения против физической геометрии. В физической геометрии вектор $\mathbf{PQ}$ представляет собой упорядоченное множество из двух точек $\{P, Q\}$. При традиционном подходе к геометрии вектор есть элемент линейного векторного пространства. В результате математики возражают против определения вектора как множества из двух точек.

Рассмотрим два различных определения скалярного произведения двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, координатное представление которых имеет вид (1.12). Традиционное определение, основанное на концепции линейного векторного пространства, имеет вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = x^k y_k \tag{2.1}$$

Альтернативное определение имеет вид (1.5). Определение (2.1) невозможно, если не используется концепция линейного векторного пространства. Определение (1.5) невозможно, если геометрия не является физической геометрией, и мировая функция не может быть введена. Когда геометрия основана на концепции линейного векторного пространства, и кроме того геометрия является физической, то оба определения совпадают. Какое из двух определения является более фундаментальным? Если рассматривается геометрия пространства-времени (физическая геометрия), то определение (1.5) является правильным определением скалярного произведения. В этом случае традиционное определение, основанное на концепции линейного векторного пространства может не существовать, и его можно игнорировать. Если рассматривается математическая геометрия, и возможность аксиоматизации является главным свойством геометрии, то определение (2.1) является правильным определением. Однако, такая математическая геометрия не имеет отношения к пространственно-временной геометрии реального мира. В любом случае нет причин изобретать новое название для скалярного произведения (1.5). Аналогичные аргументы используются в пользу определения вектора как упорядоченного множества из двух точек.

Третий аргумент против физической геометрии выглядит следующим образом. Отрезок прямой не имеет толщины (он является одномерным). Это одна из аксиом Евклида, и эта аксиома существенна при традиционном построении линейного векторного пространства с заданным на нем скалярным произведением.

Все аргументы против многовариантной физической геометрии основаны на предположении, что линейное векторное пространство является необходимым атрибутом физической геометрии. На самом деле, физическая геометрия строится без ссылки на линейное векторное пространство и его свойства. Имеются три различных представления собственно евклидовой геометрии [7], и линейное векторное пространство является только вспомогательной структурой, которая используется в одном из представлений (V-представление) собственно евклидовой геометрии. Следует подчеркнуть, что линейное векторное пространство с заданным на нем скалярным произведением *не является геометрией, а только вспомогательной структурой*, которая необходима для введения понятия угла. Другими словами, линейное векторное пространство является только одним из возможных способов, используемых для описания собственно евклидовой геометрии. Нельзя настаивать на том, что понятия этого метода описания являются адекватными в любой физической геометрии.

Хотя различные представления собственно евклидовой геометрии описаны в [7], основные положения этой работы представлены здесь, потому что они очень важны для понимания аргументов, выдвигаемых математиками против интранзитивной (многовариантной) физической геометрии.

3 Три представления собственно евклидовой геометрии

Имеется, по крайней мере, три представления собственно евклидовой геометрии, которые различаются числом и выбором базовых элементов (первичных понятий). Евклидово представление (E-представление) собственно евклидовой геометрии содержит три базовых элемента: точка, отрезок, угол. Отрезок есть отрезок прямой линии. Он состоит из бесконечного числа точек. Отрезок однозначно определяется своими концевыми точками. Угол – это фигура, образованная двумя отрезками, так что конец одного отрезка совпадает с концом другого отрезка. Свойства базовых элементов описываются системой аксиом. Любой геометрический объект может рассматриваться как некоторая композиция блоков (*точка, отрезок, угол*). Число блоков может быть бесконечным. Отрезки определяют расстояния. Углы определяют взаимную ориентацию отрезков. Сравнение геометрических объектов (фигур) $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$ производится их перемещением и наложением. Если две фигуры совпадают при наложении, они считаются эквивалентными (равными). Векторное представление (V-представление) собственно евклидовой геометрии содержит два базовых элемента (*точка, вектор*). С точки зрения E-представления вектор есть направленный отрезок прямой, определяемый двумя точками. Одна точка является началом вектора, а другая – является концом вектора. Чтобы построить угол нужна некоторая вспомогательная структура, известная как линейное векторное пространство с заданным на нем скалярным произведением. Эта структура описывает взаимоотношение двух векторов. Взаимная ориентация дух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ описывается углом θ между ними. Этот угол определяется соотношением

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2| \cos\theta = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \tag{3.1}$$

где $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)$ есть скалярное произведение векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$. Величины $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ и $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|$ являются их длинами.

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1), \qquad |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \tag{3.2}$$

Таким образом переход от E-представления с тремя базовыми элементами к V-представлению с двумя базовыми элементами возможен, при условии, что свойства вектора определяются тем фактом, что вектор является элементом линейного векторного пространства с заданным на нем скалярным произведением, т.е. имеется вспомогательная структура, описывающая взаимоотношение двух векторов.

Возможно дальнейшее уменьшение числа базовых элементов в описании собственно евклидовой геометрии. Существует σ-представление (в терминах мировой функции) собственно евклидовой геометрии, содержащее только один базовый элемент (точку). Кроме того, имеется структура, позволяющая получить другие базовые элементы E-представления (вектор и угол). Этой структурой является мировая функция, описывающая взаимоотношение двух точек.

Переход от E-представления к V-представлению уменьшает число базовых элементов. Одновременно этот переход порождает новую структуру (линейное векторное пространство). Линейное векторное пространство с заданным на нем скалярным произведением, определяет те свойства вектора, которые позволяют восстановить удаленный угол и его свойства.

Переход от V-представления к σ-представлению также уменьшает число базовых элементов. Остается только один базовый элемент (*точка*). Одновременно этот переход заменяет линейное векторное пространство новой двухточечной структурой (*мировой функцией*), которая описывает взаимоотношение двух точек (вместо двух векторов). σ-представление не было известно раньше. Оно появилось только в конце двадцатого века [1], и его свойства еще полностью не исследованы. В двадцатом веке математики использовали V-представление как наиболее развитое описание геометрии.

Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть аксиоматизирована. Аксиоматика должна зависеть от представления, которое используется для описания

$\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. В E-представлении имеется аксиоматика $\mathcal{A}_{\mathrm{E}}$. В V-представлении другая аксиоматика $\mathcal{A}_{\mathrm{V}}$. В σ-представлении – третья аксиоматика $\mathcal{A}_{\sigma}$. Аксиоматики $\mathcal{A}_{\mathrm{E}}, \mathcal{A}_{\mathrm{V}}$ и $\mathcal{A}_{\sigma}$ содержат разные аксиомы, но эти аксиоматики эквивалентны в том смысле, что любые две аксиоматики могут быть получены из третьей аксиоматики. Однако, это верно только для собственно евклидовой геометрии. Если немного изменить одну из аксиоматик, например, $\mathcal{A}_{\mathrm{V}}$, надеясь получить другую геометрию (например, псевдоевклидову), аксиоматики $\mathcal{A}_{\mathrm{E}}, \mathcal{A}_{\mathrm{V}}$, $\mathcal{A}_{\sigma}$ перестанут быть эквивалентными, вообще говоря, потому что система аксиом (аксиоматика) представляет собой конечное множество утверждений аксиоматизируемой геометрии. Рассматривая во введении модификацию аксиоматики $\mathcal{A}_{\mathrm{V}}$, с целью получить псевдоевклидову геометрию, мы обнаружили, что простой отказ от неотрицательности длины вектора порождает альтернативу: или нефизическая геометрия, или многовариантная физическая геометрия с интранзитивным отношением эквивалентности. Во всяком случае, после такой очень простой модификации нельзя рассматривать аксиоматики $\mathcal{A}_{\mathrm{V}}$ и $\mathcal{A}_{\sigma}$ как эквивалентные.

Базовые элементы (точка, отрезок, угол) не являются независимыми. Строя обобщенную геометрию в V-представлении следует согласованно модифицировать свойства базовых элементов. В σ-представлении имеется только один базовый элемент (точка), и отсутствует проблема согласованной модификации разных базовых элементов, потому что базовый элемент только один. Взаимоотношение двух точек в собственно евклидовой геометрии может быть изменено произвольным изменением мировой функции. Поскольку все утверждения собственно евклидовой геометрии выражаются через мировую функцию, то любое изменение мировой функции порождает согласованное изменение свойств других геометрических объектов (включая такие важные объекты как прямая и отношение эквивалентности)

Например, в E-представлении прямая не имеет толщины, и это является аксиомой, которая используется в E-представлении, так же как и в V-представлении. В σ-представлении отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ прямой между точками P_0 и P_1 является одним из утверждений физической геометрии, которое не претендует на то, чтобы быть аксиомой. Это утверждение (определение) справедливо для всех физических геометрий, включая собственно евклидову геометрию. В σ-представлении отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ определяется как множество точек R

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma\left(P_0, R\right)} + \sqrt{2\sigma\left(R, P_1\right)} = \sqrt{2\sigma\left(P_0, P_1\right)} \right\} \tag{3.3}$$

Определение (3.3) отрезка $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ содержит только точки P_0, P_1, определяющие отрезок, мировую функцию между точками P_0, P_1 и бегущей точкой R множества $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$.

Вообще говоря, множество (3.3) представляет собой поверхность. Размерность этой поверхности зависит от размерности множества Ω и от вида мировой функции. Если σ есть мировая функция собственно евклидовой геометрии ($\sigma = \sigma_{\mathrm{E}}$), прямая (3.3) является одномерной линией независимо от размерности множества Ω. Это свойство есть специальное свойство собственно евклидовой геометрии, определяемое свойствами мировой функции σ_{E} . Если мировая функция $\sigma \neq \sigma_{\mathrm{E}}$, множество (3.3), вообще говоря, не является одномерным. В случае, когда Ω является n-мерным многообразием, размерность множества (3.3) равна, вообще говоря, $n-1$. Аксиома аксиоматик $\mathcal{A}_{\mathrm{E}}$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{V}}$, которая провозглашает, что прямая не имеет толщины, несовместима, вообще говоря, с (3.3). Аксиома об одномерности множества $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, вообще говоря не верна в деформированной физической геометрии, описываемой мировой функцией $\sigma \neq \sigma_{\mathrm{E}}$.

С точки зрения физической геометрии одномерность отрезка (3.3) является следствием определения (3.3) и специальных свойств евклидовой мировой функции σ_{E}. Если мировую функцию σ_{E} заменить другой мировой функцией σ, специальные свойства мировой функции σ_{E}, вообще говоря, нарушаются, и отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ перестает быть одномерным.

4 Особенности и возможности многовариантных физических геометрий

Многовариантные физические геометрии, т.е. физические геометрии с интранзитивным отношением эквивалентности обладают такими возможностями, которыми не обладают аксиоматизируемые геометрии. Многовариантные физические геометрии не могут быть аксиоматизируемыми геометриями, потому что в любой аксиоматизируемой геометрии отношение эквивалентсти транзитивно, и аксиоматизируемая геометрия одновариантна. Класс возможных физических (многовариантных) геометрий более мощен, чем класс аксиоматизируемых геометрий. Например, класс однородных изотропных физических геометрий маркируется функцией одного аргумента. Любая однородная изотропная геометрия пространства-времени описывается мировой функцией вида

$$\sigma = F(\sigma_{\mathrm{M}}) \tag{4.1}$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского, а F есть произвольная вещественная функция, обладающая свойством $F(0) = 0$. Среди этих геометрий есть только одна риманова геометрия – геометрия Минковского. Другие физические геометрии не являются римановыми. Как мы видели в первом разделе, геометрия с мировой функцией Минковского или физическая (тогда она многовариантна и не может быть аксиоматизирована), или она может быть аксиоматизирована, но тогда она не является физической геометрией.

Многовариантная геометрия может быть дискретна, и эта геометрия может быть задана на непрерывном многообразии Минковского. Мировая функция σ_{d} дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ выражается через мировую функцию Минковского σ_{M}. Например, геометрия пространства-времени с мировой функцией

$$\sigma_{\mathrm{d}} = \sigma_{\mathrm{M}} + d\,\mathrm{sgn}(\sigma_{\mathrm{M}}), \qquad d \equiv \lambda_0^2 = \frac{\hbar}{2bc} = \mathrm{const} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{если} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{если} \quad x = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

дискретна, потому что в этой геометрии нет близких точек, т.е. точек, разделенных расстоянием, меньшим чем $\sqrt{2}\lambda_0$. Эта мировая функция σ_{d} лоренц-инвариантна, поскольку σ_{d} является функцией σ_{M}, а σ_{M} является лоренц-инвариантной. Обычно считается, что дискретная геометрия есть геометрия, задаваемая на точечном множестве типа решетки, что несовместимо с лоренц-инвариантностью. Дискретность пространственно-временной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ кажется удивительной, потому что она задана на непрерывном многообразии Минковского. Традиционно дискретное пространство ассоциируется с решеткой. Дискретное пространство-время на непрерывном многообразии представляется невозможным. Этот пример показывает, что физическая геометрия и непрерывное многообразие, где задается геометрия, являются совершенно разными вещами. Многообразие и его размерность являются только атрибутами, векторного представления собственно евклидовой геометрии (т.е. атрибутами метода описания), тогда как дискретность является атрибутом самой геометрии. Кроме того, движение свободных частиц в пространственно-временной геометрии (4.2) оказывается многовариантным (стохастическим), и статистическое описание этого многовариантного движения эквивалентно квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера [8]. Пространственно-временная геометрия (4.2) содержит элементарную длину λ_0, которая выражается через квантовую постоянную $\hbar$, через скорость света c и через универсальную постоянную b. Универсальная постоянная b связывает геометрическую длину вектора μ вектора импульса $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ с массой m, которая ассоциируется с вектором импульса $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ с помощью соотношения

$$m = b\mu = b\left|\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}\right| \tag{4.4}$$

По-видимому, квантовые эффекты в движении свободных частиц и дискретность геометрии пространства-времени являются связанными вещами.

Дискретность геометрии пространства-времени может быть неполной. Например, пространственно-временная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$, описываемая мировой функцией

$$\sigma_{\mathrm{g}} = \sigma_{\mathrm{M}} + \lambda_0^2 \left\{ \begin{array}{lll} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathrm{M}}) & \text{если} & |\sigma_{\mathrm{M}}| > \sigma_0 \\ \frac{\sigma_{\mathrm{M}}}{\sigma_0} & \text{если} & |\sigma_{\mathrm{M}}| \leq \sigma_0 \end{array} \right. , \qquad \lambda_0^2, \sigma_0 = \mathrm{const} \geq 0 \tag{4.5}$$

Если постоянная $\sigma_0 \to 0$, пространственно-временная геометрия (4.5) стремится к дискретной геометрии (4.2). Из (4.5) следует, что плотность $\rho(\sigma_{\mathrm{g}})$ точек в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$ относительно геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ описывается соотношением

$$\rho(\sigma_{\mathrm{g}}) = \frac{d\sigma_{\mathrm{M}}(\sigma_{\mathrm{g}})}{d\sigma_{\mathrm{g}}} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{если} & |\sigma_{\mathrm{g}}| > \sigma_0 + \lambda_0^2 \\ \frac{\sigma_0}{\sigma_0+\lambda_0^2} & \text{если} & |\sigma_{\mathrm{g}}| \leq \sigma_0 + \lambda_0^2 \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Из соотношения (4.6) видно, что относительная плотность $\rho(\sigma_{\mathrm{g}})$ частиц для $\sigma_{\mathrm{g}} \in \left(-\sigma_0 - \lambda_0^2, \sigma_0 + \lambda_0^2\right)$ меньше единицы. Относительная плотность $\rho(\sigma_{\mathrm{g}}) \to 0$, когда $\sigma_0 \to 0$, и геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$ стремится к дискретной геометрии (4.2). Пространственно-временную геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$, где относительная плотность $\rho(\sigma_{\mathrm{g}})$

удовлетворяет условию $|\rho(\sigma_{\rm g})| < 1$ для $|\sigma_{\rm g}| < \lambda_0^2$, следует квалифицировать как частично дискретную, или зернистую геометрию пространства-времени. Зернистая геометрия не может быть воспринята в терминах геометрии, основанной на концепции линейного векторного пространства.

Тем не менее в рамках многовариантной физической геометрии зернистая геометрия является обычной геометрией, в которой могут быть введены все понятия и объекты собственно евклидовой геометрии. Другое дело, что некоторые из этих объектов выглядят довольно экзотично и необычно.

Псевдо-риманова геометрия многовариантна по отношению к пространственноподобным векторам, как мы видели на примере σ-минковской геометрии. Однако собственно риманова геометрия также, вообще говоря, многовариантна из-за своей кривизны. Вообще говоря, многовариантность физической геометрии проявляется в неодномерности прямых. Прямая (геодезическая) $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, проходящая через точки P_0 и P_1 является одномерной в собственно римановой геометрии. Одномерность геодезической обусловлена особым свойством римановой мировой функции

$$\sigma_{\rm R}(P_0,P_1) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}} \sqrt{g_{ik}(x)\,dx^i dx^k}\right)^2 \tag{4.7}$$

где интегрирование производится вдоль отрезка геодезической $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, соединяющего точки P_0 и P_1.

Мировая функция, определяемая соотношением (4.7), удовлетворяет аксиоме треугольника

$$\sqrt{2\sigma_{\rm R}(P_0,R)} + \sqrt{2\sigma_{\rm R}(R,P_1)} \geq \sqrt{2\sigma_{\rm R}(P_0,P_1)}, \qquad \forall P_0,P_1,R \in \Omega \tag{4.8}$$

и это свойство обеспечивает одномерность прямой $\mathcal{T}_{P_0;P_0P_1}$, проходящей через точку P_0 коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. В общем случае прямая, проходящая через точку Q_0, коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{Q_0;P_0P_1} = \{R | \mathbf{Q}_0\mathbf{R} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\} \tag{4.9}$$

где условие коллинеарности $\mathbf{Q}_0\mathbf{R} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ описывается соотношением

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{R} \quad \parallel \quad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1: \qquad \left|\begin{array}{cc} (\mathbf{Q}_0\mathbf{R}.\mathbf{Q}_0\mathbf{R}) & (\mathbf{Q}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{R}) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) \end{array}\right| \tag{4.10}$$

$$= \quad |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 |\mathbf{Q}_0\mathbf{R}|^2 - (\mathbf{Q}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)^2 = 0 \tag{4.11}$$

В римановой геометрии только прямая $\mathcal{T}_{P_0;P_0P_1}$ одномерна, тогда как прямая (4.9) с $P_0 \neq Q_0$ не является одномерной, вообще говоря. Это обстоятельство является проявлением многовариантности римановой геометрии, рассматриваемой как физическая геометрия. Однако, обычно риманова геометрия не рассматривается как физическая геометрия с мировой функцией, определенной соотношением (4.7). Чтобы устранить путаницу, мы будем использовать термин

"σ-риманова геометрия"для физической геометрии с мировой функцией (4.7), оставляя термин "риманова геометрия" для логического построения в его традиционном виде, когда вводится бесконечно малый интервал на многообразии. Многие утверждения σ-римановой геометрии и соответствующие утверждения римановой геометрии, касающиеся динамики в пространстве-времени, совпадают. Они различаются в области ферпараллелизма (параллельность удаленных векторов). В σ-римановой геометрии имеется абсолютный параллелизм, и он многовариантен. В римановой геометрии параллелизм удаленных векторов запрещен (он просто не используется). Тогда прямая (4.9) с $P_0 \neq Q_0$ не может быть построена. В римановой геометрии вместо абсолютного параллелизма вводится параллельный перенос. Результат параллельного переноса зависит от пути переноса, т.е. по существу, параллельность удаленных векторов многовариантна. Однако, принять концепцию многовариантности нельзя, потому что построение римановой геометрии основано на транзитвном отношении эквивалентности. Абсолютный параллелизм, который был бы с необходимостью многовариантным несовместим с транзитивностью отношения эквивалентности. Однако, запрет абсолютного параллелизма (отказ от рассмотрения параллелизма удаленных векторов) не устраняет противоречия между многовариантностью параллелизма и транзитивным отношением эквивалентности, потому что противоречивость не исчезает из-за того, что отказываются рассматривать следствия этой противоречивости.

У σ-римановой геометрии нет проблем с противоречивостью, потому что это физическая геометрия, которая многовариантна и не может быть аксиоматизирована. Физическая геометрия, которая не выводится из аксиом, не может быть противоречивой в принципе, потому что противоречивость означает, что два различные метода выведения некоторого утверждения приводят к разным результатам.

В любой математической модели отношение эквивалентности транзитивно. Это свойство математической модели обеспечивает определенность (одновариантность) всех утверждений, сделанных на основе математической модели. Если отношение эквивалентности интранзитивно, заключения, сделанные на основе такой модели перестают быть определенными. Они становятся многовариантными. Логическое построение с интранзитивным отношением эквивалентности и, следовательно, с многовариантными заключениями не может рассматриваться как математическая модель, потому что она непричинна и бесполезна. На основе такой модели нельзя делать определенных предсказаний. Кроме того, такая модель не может быть аксиоматизирована, потому что аксиоматизация предполагает одновариантность заключений.

К счастью, многовариантная модель может быть сведена к одновариантной модели при условии объединения многих заключений, следующих из одного утверждения, в одно заключение. Другими словами, множество разных объектов рассматривается как единый объект (статистический ансамбль). Можно работать со статистическим ансамблем, рассматривая его как единый объект. Тогда многовариантная модель может перестать быть многовариантной.

Она превращается в одновариантную (транзитивную) модель, при условии, что ее объектами будут статистические ансамбли первоначальных объектов. Такая процедура известна как статистическое описание, которое имеет дело со среднестатистическими объектами. Предсказания модели относительно среднестатистических объектов (статистических ансамблей), которые теперь являются объектами модели, могут оказаться одновариантными, если статистическое описание производится надлежащим образом. Другими словами, производимое надлежащим образом, статистическое описание преобразует многовариантную модель в одновариантную математическую модель. Процедура статистического описания хорошо известна. Она используется в разных областях теоретической физики.

В физической геометрии наряду с многовариантностью может существовать нуль-вариантность, когда в точке P_0 не существует ни одного вектора, эквивалентного заданному вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. Если многовариантность может быть учтена в динамике с помощью подходящего статистического описания, то нуль-вариантность не может быть учтена этим способом. Нуль-вариантность порождает некий дискриминационный механизм, запрещающий некоторые значения динамических параметров (массы, заряды, угловые моменты) [4, 9]. Статистическое описание может быть учтено в рамках квантовых принципов и квантовой механики, тогда как дискриминационный механизм не может быть учтен квантовыми принципами (По крайней мере, мы не умеем этого делать).

Чтобы понять, почему дискриминационный механизм представляет собой нечто внешнее по отношению к квантовой динамике, следует иметь в виду, что динамика в физической геометрии пространства-времени отличается от традиционной динамики, построенной в рамках V-представления. Традиционная динамика основана на концепции линейного пространства, которая предполагает неограниченную делимость пространства-времени и которая ассоциируется с описанием в терминах дифференциальных уравнений.

В пространстве-времени, описываемом физической геометрией, которая может быть зернистой и иметь ограниченную делимость, динамика формулируется изначально в терминах конечных (недифференциальных) динамических уравнений. Например, если пространство-время дискретно, то было бы странно требовать, чтобы динамические уравнения формулировались в терминах дифференциальных уравнений, потому что в дискретном пространстве-времени нет бесконечно малых расстояний.

5 Динамика в физической геометрии пространства-времени

В пространстве-времени Минковского движение точечной частицы описывается ее мировой линией $\mathcal{L}$, которая может рассматриваться как цепь бесконечно малых связанных векторов $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$, $k = ..0, 1, ...$ Все векторы $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ являются бесконечно малыми и времениподобными. Если движение частицы свободное, смежные векторы $\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{P}_k$ и $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ эквивалентны. Поскольку бесконечно малые векторы $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ времениподобны, их эквивалентность является одновариантной. Кроме того, точечной частице приписывается не-геометрическая величина m, известная как масса частицы. Вектор $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ описывает состояние точечной частицы в точке $P_k \in \mathcal{L}$. Поскольку вектор $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ является бесконечно малым, то используется конечный вектор $\mathbf{p}$, параллельный бесконечно малому вектору $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ и имеющий длину, равную массе m. Вектор $\mathbf{p}$ известен как 4-вектор импульса.

В физической пространственно-временной геометрии геометрический объект представляет собой подмножество точек пространства-времени Ω. Геометрический объект рассматривается как композиция элементарных геометрических объектов (ЭГО), Всякий элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется своим каркасом $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega$ и своей оболочной функцией $f_{\mathcal{P}^n}$

$$f_{\mathcal{P}^n}: \qquad \Omega \rightarrow \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Каркас $\mathcal{P}^n$ представляет собой множество из $n+1$ точек точечного множества Ω. Оболочная функция представляет собой функцию бегущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ предполагается алгебраической функцией от s аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ есть мировая функция от двух аргументов $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$, принадлежащих или каркасу $\mathcal{P}^n$, или совпадающих с бегущей точкой R. Таким образом, элементарный геометрический объект определяется своим каркасом и свой оболочной функцией

$$\mathcal{E} = \{R | f_{\mathcal{P}^n}(R) = 0\}, \qquad \mathcal{E} \subset \otimes \tag{5.2}$$

Например, круговой цилиндр $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ с точками P_0, P_1 на оси цилиндра и с точкой Q на его поверхности определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(P_0, P_1, Q) &= \{R | f_{P_0P_1Q}(R) = 0\}, & (5.3)\\ f_{P_0P_1Q}(R) &= F_2(P_0, P_1, Q) - F_2(P_0, P_1, R) & (5.4)\end{aligned}$$

$$F_2(P_0, P_1, Q) = \left| \begin{array}{cc} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \end{array} \right| \tag{5.5}$$

Здесь $\sqrt{F_2(P_0, P_1, Q)}$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, и $\frac{1}{2}\sqrt{F_2(P_0, P_1, Q)}$ есть площадь треугольника с вершинами в точках P_0, P_1, Q. Равенство $F_2(P_0, P_1, Q) = F_2(P_0, P_1, R)$ означает, что расстояние между точкой Q и осью, определяемой вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, равно расстоянию между точкой R и осью.

Элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется во всех физических геометриях сразу. В частности, он определяется в собственно евклидовой геометрии, где он может получить интерпретацию. Можно интерпретировать элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$, используя наше знание собственно евклидовой геометрии. Таким образом, при интерпретации любой физической геометрии собственно евклидова геометрия используется как эталонная геометрия. В частности, цилиндр (5.3) однозначно определяется в любой физической геометрии с мировой функцией σ.

В евклидовой геометрии точки P_0 и P_1 определяют ось цилиндра. В собственно евклидовой геометрии форма цилиндра зависит от его оси и его радиуса, но не от положения точек P_0, P_1 на оси цилиндра. В результате в собственно евклидовой геометрии цилиндры $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ и $\mathcal{C}(P_0, P_2, Q)$ совпадают, при условии, что векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ коллинеарны. В общем случае физической геометрии цилиндры $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ и $\mathcal{C}(P_0, P_2, Q)$, вообще говоря, не совпадают, даже если векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ коллинеарны. Таким образом, вообще говоря, деформация евклидовой геометрии расщепляет евклидовы геометрические объекты. Это является проявлением многовариантности физической геометрии.

Два элементарных геометрических объекта $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{E}^{(2)}_{\mathcal{Q}^n}$ эквивалентны, если эквивалентны их каркасы $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и $\mathcal{Q}^n = \{Q_0, Q_1, ...Q_n\}$

$$\mathcal{P}^n \mathrm{eqv} \mathcal{Q}^n : \qquad \mathbf{P}_i\mathbf{P}_k \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k, \qquad i, k = 0, 1, ...n \tag{5.6}$$

и их оболочные функции $f^{(1)}_{\mathcal{P}^n}$ и $f^{(2)}_{\mathcal{Q}^n}$ эквивалентны

$$f^{(1)}_{\mathcal{P}^n}(R) = \Phi\left(f^{(2)}_{\mathcal{Q}^n}(R)\right), \qquad \Phi(0) = 0, \qquad \forall R \in \Omega \tag{5.7}$$

Для формулировки динамики геометрических объектов важна только эквивалентность их каркасов, и далее мы не будем различать между геометрическими объектами и их каркасами. Эволюция свободного геометрического объекта описывается цепью $\mathcal{C}$ из связанных геометрических объектов (каркасов) $...\mathcal{P}^n_{(1)}, \mathcal{P}^n_{(2)}, ...\mathcal{P}^n_{(s)}, ...$ Звенья (геометрические объекты) мировой цепи $\mathcal{C}$ связаны в том смысле, что

$$P_1^{(s)} = P_0^{(s+1)}, \qquad s = ...0, 1, ... \tag{5.8}$$

Вектор $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}$, связывающий смежные звенья цепи, называется ведущим вектором. Поскольку физическая геометрия пространства-времени, вообще говоря, многовариантна, то только смежные звенья мировой цепи являются эквивалентными. Геометрический объект, чей каркас содержит более двух точек, будет интерпретироваться как составная частица. Точечная частица описывается двумя точками $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1} = \{P_s, P_{s+1}\}$. Вектор $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ интерпретируется как геометрический импульс частицы, и $\mu = |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}|$ есть геометрическая масса точечной частицы. Геометрическая масса μ связана с обычной массой m точечной частицы соотношением (4.4).

Динамика свободной составной частицы формулируется в терминах только геометрических понятий (точки и мировые функции между ними). Отсутствуют ссылки на средства описания (координаты, размерность). В результате рассмотрение инвариантности относительно преобразований координат или любые отображения не имеют отношения к динамике. Динамика свободной составной частицы, описываемой каркасом $\mathcal{P}^n$, представляет собой трансляцию (без вращения) всех точек каркаса на расстояние, описываемое ведущим вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Вращение отсутствует только с точки зрения геометрии $\mathcal{G}$, описываемой мировой функцией σ. Та же самая мировая цепь, описываемая в терминах геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, содержит трансляцию, сопровождаемую вращением.

Динамика свободной составной частицы в физической геометрии пространства-времени может быть сведена к динамике составной частицы, движущейся в пространственно-временной геометрии Минковского под действием некоторых метрических сил. Пусть мировая функция имеет вид

$$\sigma(P_0,P_1)=\sigma_{\mathrm{M}}(P_0,P_1)+d(P_0,P_1), \qquad \forall P_0,P_1\in\Omega \tag{5.9}$$

Условие эквивалентности (5.6) может быть записано в виде

$$\left(\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}.\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right) = \left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|^2, \qquad k,l=0,1,...n, \qquad s=...0,1,... \tag{5.10}$$

$$\left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|^2 = \left|\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right|^2, \quad k,l=0,1,...n, \quad s=...0,1,... \tag{5.11}$$

Используя (5.9), можно переписать соотношения (5.10), (5.11) в виде

$$\left(\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}.\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right)_{\mathrm{M}}+w\left(P_k^{(s)},P_l^{(s)},P_k^{(s+1)},P_l^{(s+1)}\right)$$

$$=\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_k^{(s)},P_l^{(s)}\right)+2d\left(P_k^{(s)},P_l^{(s)}\right) \tag{5.12}$$

$$2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_k^{(s)},P_l^{(s)}\right)+2d\left(P_k^{(s)},P_l^{(s)}\right)=2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_k^{(s+1)},P_l^{(s+1)}\right)+2d\left(P_k^{(s+1)},P_l^{(s+1)}\right) \tag{5.13}$$

где

$$w\left(P_k^{(s)},P_l^{(s)},P_k^{(s+1)},P_l^{(s+1)}\right) = d\left(P_k^{(s)},P_l^{(s+1)}\right)+d\left(P_l^{(s)},P_k^{(s+1)}\right) \tag{5.14}$$

$$-d\left(P_k^{(s)},P_k^{(s+1)}\right)-d\left(P_l^{(s)},P_l^{(s+1)}\right) \tag{5.15}$$

Индекс "M" у скалярного произведения означает, что скалярное произведение вычисляется в геометрии Минковского. Скалярное произведение двух векторов $\left(\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}.\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right)_{\mathrm{M}}$ может быть представлено в виде

$$\left(\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}.\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right)_{\mathrm{M}}=\left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}\left|\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}\cosh\left(\Delta\varphi_{kl}^{(s)}\right) \tag{5.16}$$

где $\Delta\varphi_{kl}^{(s)}$ есть угол между времениподобными векторами $\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}$, $\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}$ в пространственно-временной геометрии Минковского. Угол $\Delta\varphi_{kl}^{(s)}$ может описывать вращение в следующем смысле. Если два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ имеют общее начало и их длины равны $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|=|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|$, то скалярное произведение двух векторов $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_{\mathrm{M}}$ можно представить в виде

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{M}}=|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}\cdot|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|_{\mathrm{M}}\cosh\varphi \tag{5.17}$$

где φ есть угол между векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$. Пусть $\varphi=0$, тогда

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{M}}=|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}\cdot|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|_{\mathrm{M}} \tag{5.18}$$

и вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ совпадает с вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, т.е. $P_1 = P_2$, если векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ времениподобны ($|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}} = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|_{\mathrm{M}} > 0$). Если векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ пространственноподобны ($|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}} = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|_{\mathrm{M}} < 0$), то векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, вообще говоря, не совпадают ($P_1 \neq P_2$), хотя угол φ между ними обращается в нуль. Такая ситуация возникает, потому что геометрия Минковского одновариантна относительно времениподобных векторов и многовариантна относительно пространственноподобных векторов. Представление скалярного произведения в виде (5.16) полезно только для времениподобных векторов ($\left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|_{\mathrm{M}} > 0$, $\left|\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}} > 0$), потому что для пространственноподобных векторов угол $\Delta\varphi_{kl}^{(s)}$ не описывает взаимное расположение векторов полностью.

Пусть оба вектора $\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}$ и $\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}$ времениподобны в геометрии Минковского, т.е.

$$\left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|_{\mathrm{M}} > 0, \qquad \left|\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}} > 0 \tag{5.19}$$

С помощью (5.16) уравнения (5.12) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|_{\mathrm{M}} \left|\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}} \cosh\left(\Delta\varphi_{kl}^{(s)}\right) - 2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}\right) \\ = 2d\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}\right) - w\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}, P_k^{(s+1)}, P_l^{(s+1)}\right)\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\cosh\left(\Delta\varphi_{kl}^{(s)}\right) = \frac{\left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}}{\left|\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}} + \frac{2d\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}\right) - w\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}, P_k^{(s+1)}, P_l^{(s+1)}\right)}{\left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|_{\mathrm{M}} \left|\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}} \tag{5.21}$$

В случае, когда пространственно-временная геометрия однородна и изотропна в том смысле, что

$$d\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}\right) = d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}\right)\right), \qquad \forall P_k^{(s)}, P_l^{(s)} \in \Omega \tag{5.22}$$

имеют место следующие соотношения

$$\left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|_{\mathrm{M}} = \left|\mathbf{P}_k^{(s+1)}\mathbf{P}_l^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}, \qquad k, l = 0, 1, ...n \tag{5.23}$$

Динамические уравнения (5.21) могут быть переписаны в виде

$$\cosh\left(\Delta\varphi_{kl}^{(s)}\right) - 1 = 2\sinh^2\frac{\Delta\varphi_{kl}^{(s)}}{2} = \frac{2d\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}\right) - w\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}, P_k^{(s+1)}, P_l^{(s+1)}\right)}{\left|\mathbf{P}_k^{(s)}\mathbf{P}_l^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}^2} \tag{5.24}$$

где $w\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}, P_k^{(s+1)}, P_l^{(s+1)}\right)$ определяется соотношением (5.15).

В случае пространственно-временной геометрии (4.2), где $d\left(P_0, P_1\right) = \text{const}$, динамическое уравнение (5.24) для времениподобных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, принимает вид

$$\sinh \frac{\Delta\varphi_{kl}^{(s)}}{2} = \sqrt{\frac{d}{2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}\right)}}, \qquad \sigma_{\mathrm{M}}\left(P_k^{(s)}, P_l^{(s)}\right) > 0, \qquad k \neq l \qquad (5.25)$$

В частном случае точечной частицы, когда звено мировой цепи состоит из двух точек $\mathcal{P}^1 = \{P_0, P_1\}$ динамическое уравнение (5.25) принимает вид

$$\sinh \frac{\Delta\varphi_{01}^{(s)}}{2} = \sqrt{\frac{d}{2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0^{(s)}, P_1^{(s)}\right)}} \qquad (5.26)$$

Мировая цепь точечной частицы в пространственно-временной геометрии (4.2) с $d = \hbar/\left(2bc\right)$ описывается в терминах геометрии Минковского. Каждое следующее звено $\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}$ мировой цепи получается из предыдущего звена $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}$ как результат трансляции на расстояние $\sqrt{2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0^{(s)}, P_1^{(s)}\right)}$ и вращением на угол $\Delta\varphi_{kl}^{(s)}$, который определяется динамическим уравнением (5.26). Величина угла $\Delta\varphi_{kl}^{(s)}$ определяется, но ось вращения остается неопределенной. В результате положение следующего звена $\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}$ оказывается неопределенным. В соответствии с динамическим уравнением (5.26) возможные положения звена $\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}$ образуют конус с углом $\Delta\varphi_{kl}^{(s)}$ при вершине. Поскольку такой конус образуется в каждом звене мировой цепи, то цепь оказывается многовариантной. Статистическое описание такой вихляющей цепи приводит к уравнению Шредингера [8] для свободной частицы массы

$$m = b^{-1}\sqrt{2\sigma\left(P_0^{(s)}, P_1^{(s)}\right)} = b^{-1}\sqrt{2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0^{(s)}, P_1^{(s)}\right) + \frac{\hbar}{bc}} \qquad (5.27)$$

В терминах физической пространственно-временной геометрии $\mathcal{G}$, описываемой мировой функцией σ, мировая цепь тоже оказывается многовариантной, хотя в терминах мировой функции σ имеется только трансляция во времениподобном направлении без вращения. Тем не менее, трансляция оказывается многовариантной, потому что мировая функция σ описывает пространственно-временную геометрию, которая многовариантна по отношению к любым (времениподобным и пространственноподобным) векторам.

Таким образом, динамика свободной составной частицы может быть описана в любой физической геометрии. Динамика, вообще говоря, многовариантна. Она полностью определяется пространственно-временной геометрией и не содержит ссылок на какие-нибудь средства описания. Свободное движение составной частицы может быть приведено к описанию в рамках пространственно-временной геометрии Минковского. Однако, в этом случае движение частицы перестает быть свободным. Получается движение в поле некоторых метрических полей, порождаемых геометрией пространства-времени. Этот эффект хорошо известен в общей теории относительности. Свободная частица, движущаяся в искривленном пространстве-времени, может описываться как частица, движущаяся в гравитационном поле в пространстве-времени Минковского.

Динамика свободной составной частицы определяется полностью геометрией пространства-времени и только геометрией пространства-времени. Масса точечной частицы геометризуется в том смысле, что она определяется длиной звеньев мировой цепи. Динамические уравнения, представленные в терминах геометрии Минковского оказываются уравнениями в конечных разностях (а не дифференциальными уравнениями). При некоторых условиях они могут быть сведены к дифференциальным уравнениям. Динамика не ограничена требованием непрерывности пространства-времени и его неограниченной делимости. Динамика не содержит ссылки на линейное векторное пространство и его свойства, хотя динамика может быть описана в терминах пространственно-временной геометрии Минковского, которая использует свойства линейного векторного пространства.

6 Заключительные замечания

Геометрия с интранзитивным отношением эквивалентности является новой концепцией геометрии. Ее название еще не установилось. Имеются разные названия этой геометрии, отражающие процесс ее становления и ее различные свойства: физическая геометрия, трубчатая геометрия (T-геометрия), многовариантная геометрия, интранзитивная геометрия. Многовариантная геометрия строится на основе принципа деформации, когда все утверждения геометрии получаются в результате деформации собственно евклидовой геометрии. Этот метод построения свободен от недостатков традиционного евклидова метода, когда все геометрические утверждения выводятся из некоторой аксиоматики. Евклидов метод непригоден для построения физической геометрии, потому что почти все физические геометрии не могут быть аксиоматизированы. Например, риманова геометрия не может быть аксиоматизирована. Если тем не менее, риманова геометрия строится традиционным евклидовым методом на основе аксиом, которые явно не формулируются, то она оказывается непоследовательной. Она отличается в некоторых деталях от σ-римановой геометрии, т.е. от геометрии, построенной на основе принципа деформации.

Применение метода деформации для построения физической геометрии свободно от таких проблем, как проверка непротиворечивости аксиоматики и вывод геометрических утверждений, сопровождаемый формулировкой и доказательством многочисленных теорем.

Класс физических геометрий более мощен, чем класс аксиоматизируемых геометрий, представляющих собой логические построения. Эти логические построения (исключая собственно евклидову геометрию) не имеют прямого отношения к геометрии как науке о взаимном расположении геометрических объектов в пространстве или в пространстве-времени.

Физическая геометрия позволяет рассматривать и описывать такие свойства пространства-времени как дискретность, зернистость и ограниченная делимость пространства-времени. Эти свойства не могут описываться геометриями, построенными на основе линейного векторного пространства и неограниченной делимости пространства. Интранзитивное отношение эквивалентности и связанная с ним многовариантность являются источником зернистости и ограниченной делимости пространства-времени. Эти свойства геометрии пространства-времени важны для построения дискриминационного механизма. порождающего дискретные параметры элементарных частиц. Физическая геометрия пространства-времени позволяет объяснять структуру элементарных частиц геометрически, т.е. как простую комбинацию точек пространства-времени, игнорируя такие вторичные конструкции как волновая функция и другие квантовые атрибуты.

Физическая геометрия представляет собой дальнейшее развитие геометрических методов в их применении к исследованию свойств пространства-времени. Применение методов физической геометрии к исследованию свойств пространства-времени осуществляет дальнейшую геометризацию физики микромира, начало которой положили специальная теория относительности и общая теория относительности.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Journ. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (See also *e-print http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002*).

[2] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[3] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* 7 Auflage, B.G.Teubner, Leipzig, Berlin, 1930.

[4] Yu. A. Rylov, Discrimination of particle masses in multivariant space-time geometry *e-print http://arXiv.org/abs/0712.1335.*

[5] Yu. A.Rylov, Is the Dirac particle completely relativistic? *e-print http://arXiv.org/abs/physics/0412032.*

[6] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle composite? e-print http://arXiv.org/abs/physics/0410045

[7] Yu.A.Rylov, Different representations of Euclidean geometry. *e-print http://arXiv.org/abs/0709.2755*

[8] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time, responsible for quantum effects, *J. Math. Phys.* **32** (8), 2092 - 2098, (1991).

[9] Yu. A. Rylov, Geometrical dynamics: spin as a result of rotation with superluminal speed. *e-print http://arXiv.org/abs/0801.1913.*