Скрытые динамические переменные в завихренном течении баротропной жидкости

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
Россия 117526, Москва, Пр. Вернадского 01-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{\ }rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Невязкая баротропическая жидкость исследуется как динамическая система с помощью вариационных методов. Традиционное описание в терминах переменных (плотность ρ, скорость $\mathbf{v}$, и маркировка линий тока $\boldsymbol{\xi}$) оказывается неэффективной для завихренных течений, потому что динамические уравнения для $\boldsymbol{\xi}$ содержат неопределенный параметр. Оказывается возможным полное описание баротропной жидкости в терминах комплексного потенциала жидкости ψ_α, $\alpha = 1, 2, ...n$. При возвращении к описанию в терминах $\rho, \mathbf{v}$ появляются добавочные динамические переменные: спин $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Спин описывает дополнительную завихренность, заключенную в жидкости Появление дополнительной переменной $\mathbf{s}$ (вместо $\boldsymbol{\xi}$) существенно при описании турбулентных явлений.

Ключевые слова: невязкая жидкость; скрытые переменные; волнвая функция; маркировка линий тока; скрытая завихренность; вектор спина; турбулентность.

1 Введение

Турбулентные явления обычно описываются уравнениями Навье-Стокса. Чем меньше вязкость μ, тем сильнее турбулентные явления. Если μ стремится к нулю, Уравнения Навье-Стокса переходят в уравнения Эйлера.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p, \qquad p = p(\rho) = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.2}$$

где $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ есть плотность жидкости, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ есть скорость жидкости, $p = p(\rho) = \rho^2 \partial E(\rho)/\partial\rho$ есть давление и $E(\rho)$ есть внутренняя энергия жидкости на единицу массы. Уравнения (1.1), (1.2) написаны для баротропной жидкости. Кажется, что они вообще не описывают турбулентности. Это довольно странно, потому что при $\mu = 0$ турбулентные явления должны быть максимальными.

Имеется такая возможность, что присутствуют другие динамические переменные (отличные от ρ и $\mathbf{v}$), которые описывают турбулентность. Такая возможность обычно не рассматривается, потому что система уравнений(1.1), (1.2) является замкнутой системой динамических уравнений. Однако, тем не менее система уравнений (1.1), (1.2) не является полной системой динамических уравнений для динамической системы: баротропная жидкость S_b. Определение дополнительных динамических переменных для S_b является целью этой публикации.

Многочисленные попытки получить динамические уравнения (1.1), (1.2) из вариационного принципа оказались неудачными [1]. Однако, вариационный принцип может быть получен, если использовать условие Лина [2]

$$\partial_0 \boldsymbol{\xi} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1, \xi_1)$ суть переменные, маркирующие частицы жидкости. Условие Лина следует ввести в функционал действия как стороннее условие. Это означает, что условие Лина является дополнительным динамическим уравнением. Однако, дальнейшее исследование показывает, что семь уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) образуют полную систему динамических уравнений для S_b только в случае потенциального течения. В общем случае добавочные динамические уравнения имеют вид

$$\partial_0 \xi_\alpha + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\xi_\alpha = -\omega \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega^{\beta\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{1.4}$$

где ω есть произвольная величина,

$$\Omega^{a\mu}(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial g^\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial g^\mu(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\alpha} \right) \tag{1.5}$$

и $\mathrm{g}^\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть функции, которые определяются из начальных условий. Уравнения (1.4) совпадают с (1.3), если $\Omega^{a\mu}(\boldsymbol{\xi}) = 0$, т.е. в случае потенциального течения. В общем случае уравнение (1.4) не может быть решено из-за неопределенной величины ω.

2 Вариационный принцип

Функционал действия для уравнений Эйлера (1.1), (1.2) имеет вид

$$\mathcal{A}[\xi, j, p] = \int\limits_{V_x} \left\{ \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho_0} - \rho_0 E(\rho) - p_k \left(j^k - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right) \right\} d^4 x, \tag{2.1}$$

Он содержит стороннее условие (1.3) в виде

$$j^k - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0 \tag{2.2}$$

где $J = J_{\xi/x}$ есть определитель якобиана

$$J_{\xi/x} = J\left(\xi_{l,k}\right) = \frac{\partial\left(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)} = \det\left|\left|\xi_{l,k}\right|\right|, \tag{2.3}$$

$$\xi_{l,k} \equiv \frac{\partial \xi_l}{\partial x^k} \qquad l,k = 0,1,2,3$$

При работе с якобианом J полезны следующие тождества

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}}\xi_{k,l} \equiv J\delta_k^i, \qquad \partial_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \equiv 0, \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{l,s}} \equiv J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}}\right) \tag{2.5}$$

Используя первое тождество (2.4), получаем

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\xi_{\alpha,k} = j^k \xi_{\alpha,k} = \rho\partial_0\xi_\alpha + \rho v^\alpha \xi_\alpha = 0 \tag{2.6}$$

Это означает, что (2.6) эквивалентно (1.3).

Вариация (2.1) по ξ_l дает

$$\delta\xi_l: \qquad -\partial_s\left(p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{l,s}}\right) = 0, \qquad l = 0,1,2,3 \tag{2.7}$$

Используя (2.4) и (2.5), можно переписать это уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}}\right)p_k = 0 \tag{2.8}$$

Уравнения (2.8) могут быть проинтегрированы в виде

$$p_k = b\left(\partial_k\varphi + g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_k\xi_\alpha\right), \qquad k = 0,1,2,3 \tag{2.9}$$

где $g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)$, $\alpha = 1,2,3$ суть произвольные функции от $\boldsymbol{\xi}$, $\varphi = g^0\left(\xi_0\right)$ есть новая переменная введенная вместо фиктивной переменной ξ_0, b есть произвольная постоянная. Используя тождества (2.4), этот факт может быть проверен прямой постановкой (2.9) в (2.8). Заметим, что это интегрирование было произведено Клебшем для несжимаемой жидкости [4, 5] 160 лет тому назад.

Теперь подставим p_k из (2.9) в действие (2.1). Положим $b = 1$. Мы получим новый функционал действия

$$\mathcal{A}\left[\xi,j,\varphi\right] = \int\limits_{V_x}\left\{\frac{\mathbf{j}^2}{2\rho_0} - \rho_0 E\left(\rho_0\right) - j^k\left(\partial_k\varphi + g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_k\xi_\alpha\right)\right\}d^4x, \tag{2.10}$$

который эквивалентен функционалу действия (2.1). Он содержит произвольные функции $g\left(\boldsymbol{\xi}\right)$. Здесь

$$j^0 = \rho_0, \qquad \mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} = \left\{j^1, j^2, j^3\right\} \tag{2.11}$$

Функции $g(\boldsymbol{\xi})$ рассматриваются как фиксированные функции $\boldsymbol{\xi}$.

Варьирование (2.10) по ξ_α дает

$$\delta\xi_\alpha : \qquad \rho_0\Omega^{a\mu}(\boldsymbol{\xi})\left(\partial_0\xi_\alpha + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\xi_\alpha\right) = 0, \tag{2.12}$$

где

$$\Omega^{a\mu}(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial g^\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_\mu} - \frac{\partial g^\mu(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_\alpha}\right) \tag{2.13}$$

и $\mathbf{v}$ определяются соотношением

$$\delta j^\mu : \qquad v^\mu \equiv \frac{j^\mu}{\rho_0} = \partial_\mu\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\partial_\mu\xi_\alpha \tag{2.14}$$

I Если $\det\left|\left|\Omega^{\alpha\beta}\right|\right| \neq 0$, условия Лина

$$\left(\partial_0\xi_\alpha + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\xi_\alpha\right) = 0 \tag{2.15}$$

следуют из (2.12).

Однако, матрица $\Omega^{\alpha\beta}$ антисимметрична и в трехмерном пространстве

$$\det\left|\left|\Omega^{\alpha\beta}\right|\right| = \begin{vmatrix} 0 & \Omega^{12} & \Omega^{13} \\ -\Omega^{12} & 0 & \Omega^{23} \\ -\Omega^{13} & -\Omega^{23} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{2.16}$$

Тогда из (2.12) следует

$$\partial_0\xi_\alpha + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\xi_\alpha = -\omega\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Omega^{\beta\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{2.17}$$

где $\omega = \omega(t, \boldsymbol{\xi})$ есть произвольная величина.

Полученное уравнение (2.17) содержит начальное динамическое уравнение (1.3) как частный случай. Для потенциального течения, когда $\Omega^{\beta\gamma}(\boldsymbol{\xi}) = 0$, уравнение (2.17) превращается в (1.3). В функционале действия (2.1) первоначальное соотношение (1.3) используется как стороннее условие. Настоящие скрытые переменные более богаты, чем это описывается условиями Лина. По этой причине уравнение (2.17) не получается из функционала действия (2.1).

Если $\omega(t, \boldsymbol{\xi}) \neq 0$, Динамические уравнения (2.17) описывают изменение условий Лина (1.3). Возникает другая маркировка линий тока, чем та, которая описывается условиями Лина (1.3). Если течение потенциальное, и $\boldsymbol{\Omega}^{\alpha\beta} = 0$ маркировка не зависит произвольной величины $\omega(t, \boldsymbol{\xi})$.

Таким образом, хотя решение $\rho_0, \mathbf{v}$ задачи Коши для Эйлеровой системы гидродинамических уравнений (1.1), (1.2) единственно (в том смысле, что оно не содержит неопределенных величин) решение $\rho_0, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$ для задачи Коши полной системы гидродинамических уравнений (1.1), (1.2), (2.17) не является единственном (в том смысле, что оно содержит неопределенную величину $\omega(t, \mathbf{x})$). Причина этой неединственности - влияние перемешивания. Наше рассмотрение является формальным. Из этого рассмотрения нельзя понять механизм влияния перемешивания. Тем не менее это влияние имеет место, и следует исследовать его более внимательно.

Замечание. Переменные $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ не определены единственным образом. Это может быть результатом неудачного выбора переменных $\boldsymbol{\xi}$.

3 Описание в терминах комплексного потенциала жидкости

Введем новые комплексные динамические переменные $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, определив их соотношениями

$$j^0 = \rho = \sum_{\alpha=1,2} \psi_\alpha^* \psi_\alpha \equiv \psi^* \psi \tag{3.1}$$

$$v^\beta (t, \mathbf{x}) = -\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\psi_\alpha^* \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial \xi_\beta} \psi_\alpha}{\psi^* \psi} \equiv -\frac{i}{2} \frac{\psi^* \partial_\beta \psi - \partial_\beta \psi^* \psi}{\psi^* \psi}, \quad \beta = 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

Это такие переменные, где возможно полное описание динамической системы, описываемой действием (2.10). Эти переменные известны как комплексный потенциал жидкости ψ (волновая функция [3]). Он используется в квантовой механике как волновая функция.

Комплексный потенциал жидкости определяется через переменные $\rho, \mathbf{v}$ с помощью дифференциальных соотношений, и ψ не может быть выражен через $\rho, \mathbf{v}$ единственным образом. В терминах ψ функционал действия (2.10) принимает вид

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int\limits_{V_x} \left\{ \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} \left(\psi_\alpha^* \partial_0 \psi_\alpha - \partial_0 \psi_\alpha^* \cdot \psi_\alpha \right) - \rho E(\rho) \right\} d^4 x$$

$$+ \int\limits_{V_x} \frac{\mathbf{1}}{8} \left(\sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} \left(\psi_\alpha^* \partial_\beta \psi_\alpha - \partial_\beta \psi_\alpha^* \cdot \psi_\alpha \right) \right)^2 d^4 x$$

$$- \int\limits_{V_x} \frac{1}{4} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=2} \sum_{\alpha\neq\gamma=1}^{\alpha\neq\gamma=2} \left(\left(\psi_\alpha^* \partial_\beta \psi_\alpha - \partial_\beta \psi_\alpha^* \cdot \psi_\alpha \right) \left(\psi_\gamma^* \partial_\beta \psi_\gamma - \partial_\beta \psi_\gamma^* \cdot \psi_\gamma \right) \right) d^4 x \tag{3.3}$$

где

$$\rho = \psi \psi^* = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} \psi_\alpha \psi_\alpha^* \tag{3.4}$$

Вариация (3.3) по ψ_α^* $\alpha = 1, 2$ приводит к динамическим уравнениям

$$i\partial_0 \psi_\alpha + \frac{1}{2} \left(\left(\psi_\alpha^* \partial_\beta \psi_\alpha - \partial_\beta \psi_\alpha^* \cdot \psi_\alpha \right) \right) \partial_\beta \psi_\alpha - \frac{1}{2} \left(\psi_{3-\alpha}^* \partial_\beta \psi_{3-\alpha} - \partial_\beta \psi_{3-\alpha}^* \cdot \psi_{3-\alpha} \right) \partial_\beta \psi_\alpha$$

$$- \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho E(\rho) \right) \psi_\alpha + \frac{1}{2} \partial_\beta \left(\left(\psi_{3-\alpha}^* \partial_\beta \psi_{3-\alpha} - \partial_\beta \psi_{3-\alpha}^* \cdot \psi_{3-\alpha} \right) \psi_\alpha \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2 \tag{3.5}$$

Вариация (3.3) по ψ_α приводи к динамическим уравнениям, которые комплексно сопряжены к (3.5). Комплексный потенциал жидкости $\psi = \{\psi_\alpha\}, \alpha = 1, 2$ является 2-компонентной функцией. Он построен из потенциалов Клебша (2.9).

Динамические уравнения в терминах ψ не содержат неопределенных величин типа ω в (2.17). Однако, неопределенность в определении переменных $\boldsymbol{\xi}$ остается, потому что переменные $\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$ определяются через ψ из соотношений (3.1) и (3.2)

Комплексный потенциал жидкости ψ является естественным атрибутом динамики жидкости, но он не известен исследователям, имеющим дело с динамикой жидкостей. Он используется в квантовой механике под именем волновой функции. Природа комплексного потенциала жидкости ψ не была известна в течение всего XX века. В квантовой механике волновая функция ψ рассматривалась как аксиоматический объект неизвестной природы. Этот факт приводил к многочисленным интерпретациям квантовой механики, которые порождались неизвестной природой волновой функции ψ. То же самое действие (2.10), написанное в терминах потенциала жидкости ψ порождает (3.5). Эти уравнения разрешены относительно временных производных и не содержат неопределенных величин. Но теперь неопределенность помещена в потенциал жидкости ψ через переменные $\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$. Если начальные условия заданы для переменных $\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$ в виде

$$\rho\left(0, \mathbf{x}\right)=\rho_{\mathrm{in}}\left(\mathbf{x}\right), \quad v^{\alpha}\left(0, \mathbf{x}\right)=g^{\alpha}\left(\mathbf{x}\right), \quad \xi_{\alpha}\left(0, \mathbf{x}\right)=x^{\alpha} \tag{3.6}$$

динамические уравнения, записанные в терминах $\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$, не могут быть решены однозначно, из-за неопределенной величины $\omega\left(t, \mathbf{x}\right)$ в (2.17). Динамические уравнения (3.5) не могут быть решены однозначно при начальных условиях (3.6), потому что в этом случае начальные условия $\psi_{\alpha}\left(0, \mathbf{x}\right)$ не могут быть определены однозначно через переменные $\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$. Однако, если начальные условия $\psi_{\alpha}\left(0, \mathbf{x}\right)$ для потенциала жидкости ψ заданы, уравнения (3.5) могут быть решены, потому что они не содержат неопределенных параметров.

Это означает, что динамические переменные $\rho_0, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$ не образуют полного набора переменных для баротропной жидкости, тогда как компоненты ψ_{α} потенциала жидкости ψ образуют полный набор динамических переменных. В случае потенциального течения динамические переменные $\rho_0, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$ образуют полный набор динамических переменных для баротропной жидкости. В случае завихренного течения динамические переменные $\rho_0, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$ не образуют полного набора динамических переменных, которые необходимы для описания завихренного течения баротропной жидкости. Итак, добавочные динамические (скрытые) переменные ψ_{α}, которые необходимы для полного описания баротропной жидкости, связаны с вращательным движением жидкости.

Можно использовать скрытые вещественные переменные $\mathbf{s} =\{s_1, s_2, s_3\}$, определенные соотношениями

$$s_1=\frac{\psi^{*}\sigma_1\psi}{\rho}=\frac{1}{\rho}\psi^{*}\left(\begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array}\right)\psi=\frac{1}{\rho}\left(-i\psi_1^{*}\psi_2+i\psi_2^{*}\psi_1\right) \tag{3.7}$$

$$s_2=\frac{\psi^{*}\sigma_2\psi}{\rho}=\frac{1}{\rho}\psi^{*}\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\psi=\frac{1}{\rho}\left(\psi_1^{*}\psi_2+\psi_2^{*}\psi_1\right) \tag{3.8}$$

$$s_3=\frac{\psi^{*}\sigma_3\psi}{\rho}=\frac{1}{\rho}\psi^{*}\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right)\psi=\frac{1}{\rho}\left(\psi_1^{*}\psi_1-\psi_2^{*}\psi_2\right) \tag{3.9}$$

Динамические уравнения для $\mathbf{s}$ получаются с помощью уравнений (3.5). В квантовой механике переменные $\mathbf{s}$ известны как спиновые переменные, описывающие угловой момент частиц.

4 Заключительные замечания

Мы рассмотрели баротропную жидкость. Однако, волновая функция появляется в результате интегрирования уравнения (2.7), которое не зависит от состояния жидкости. Таким образом, полученный результат справедлив для любой невязкой жидкости. Вязкая баротропная жидкость описывается уравнениями Навье-Стокса. Если вязкость стремится к нулю, уравнения Навье-Стокса стремятся к уравнениям Эйлера. Если вязкость уменьшается, турбулентные явления возрастают. Если вязкость исчезает, турбулентность становится максимальной. При этих условиях кажется довольно естественным, что обычное описание с помощью уравнений Эйлера не может описать нерегулярных линий тока, связанных с возможной турбулентностью. Может быть описание жидкости в терминах потенциала жидкости (волновой функции) было бы полезным для описания турбулентных явлений. Описание в терминах ψ позволяет следить за эволюцией линий тока, хотя такое описание не связано с начальными значениями наблюдаемых переменных $\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$. Кроме того не ясно, как можно ввести потенциал жидкости в описание вязкой жидкости, которая не описывается вариационным принципом.

Список литературы

[1] R. Salmon, Hamilton fluid mechanics, *Ann. Rev. Fluid. Mech.* **20**, 225-256, 1988.

[2] C.C. Lin, Hydrodynamics of Helium II. *Proc. Int. Sch Phys.* Course XXI, pp. 93-146, New York, Academic, 1963.

[3] Yu.A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.***40**, 256 -278, (1999)

[4] A. Clebsch, Über eine allgemaine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[5] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[6] Yu. A. Rylov, Hydrodynamic equations for incompressible inviscid fluid in terms of generalized stream function. *Int. J. Math. & Mat. Sci.* vol. **2004**, No. 11, 21 February 2004, pp. 541-570. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0303065)