Гидродинамические уравнения для несжимаемой невязкой жидкости в терминах обобщенной функции тока

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, 117526, Москва, пр. Вернадского 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site:
http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm

Аннотация

Гидродинамические уравнения для идеальной несжимаемой жидкости записаны в терминах обобщенной функции тока. Двумерный вариант этих уравнений преобразуется к одному динамическому уравнению для функции тока, содержащему произвольную функцию, которая определяется условиями втекания, заданными на границе. Для определения единственного решения нужно задать на границе скорость и завихренность (а не только скорость). Это неожиданное обстоятельство следует интерпретировать в том смысле, что жидкость имеет больше степеней свободы, чем это принято думать. Неучтенность степени свободы, связанной с завихренностью, обусловлена также тем, что завихренность менее наблюдаемая величина, чем скорость. Показано, что описание завихренного течения существенно использует потенциалы Клебша.

Ключевые слова: идеальная жидкость, потенциалы Клебша, завихренное течение.

1 Введение

В этой работе мы записываем гидродинамические уравнения для идеальной жидкости в терминах потенциалов Клебша [1, 2]. Это представление позволяет проинтегрировать гидродинамические уравнения и получить эффективное описание завихренного обтекания. Мы обнаружили неожиданный факт, что эффективное описание завихренного течения нельзя осуществить без введения потенциалов Клебша. Вообще говоря, проблема потенциального обтекания и проблема завихренного обтекания ставятся по-разному. Покажем это на примере стационарного двумерного течения несжимаемой жидкости. В этом случае один из потенциалов Клебша может совпадать с функцией тока ψ. Потенциальное течение описывается уравнением для функции тока ψ

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \tag{1.1}$$

где индексы означают соответствующие частные производные. Для завихренного стационарного течения уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \Omega(\psi) \tag{1.2}$$

где $\Omega(\psi)$ есть некоторая функция аргумента ψ, описывающая характер и интенсивность завихренности. Полученное уравнение отличается от (1.1) дополнительным членом. Оба уравнения (1.1) и (1.2) суть уравнения эллиптического типа. Чтобы получить единственное решение уравнения (1.1), достаточно задать значения функции тока ψ на границе Σ объема V, где рассматривается течение. То же самое верно и для уравнения (1.2), при условии, что вид функции $\Omega(\psi)$ известен. Однако, значение ψ на Σ не позволяет определить вид функции $\Omega(\psi)$. Для определения $\Omega(\psi)$ нужна дополнительная информация, заданная на границе Σ.

Чтобы поставить задачу обтекания завихренным потоком, нужно определить какого рода информация на границе достаточна для получения единственного решения уравнения (1.2). Теория завихренных течений не может существовать без постановки этой задачи. К сожалению, нам не удалось найти в литературе постановку проблемы обтекания завихренным потоком. Нам известны только отдельные точные решения [3]. Это означает, что теории завихренных течений не существует. Уравнение (1.1) есть частный случай уравнения (1.2), когда $\Omega(\psi) = 0$.

Уравнение (1.2) получается из традиционных гидродинамических уравнений для двумерного течения несжимаемой жидкости, которые имеют вид

$$u_x + v_y = 0, \qquad \partial_y(uu_x + vu_y) = \partial_x(uv_x + vv_y) \tag{1.3}$$

где u и v суть составляющие скорости соответственно вдоль осей x и y. Вводя функцию тока ψ

$$u = -\psi_y, \qquad v = \psi_x \tag{1.4}$$

мы удовлетворяем первому уравнению (1.3) тождественно. Второе уравнение (1.3) принимает вид

$$\frac{\partial(\omega,\psi)}{\partial(x,y)}=0,\qquad \omega\equiv\psi_{xx}+\psi_{yy} \tag{1.5}$$

Соотношение (1.2) есть общее решение $\omega=\Omega(\psi)$ уравнения (1.5), где Ω есть произвольная функция ψ.

Цель настоящей работы постановка задачи завихренного обтекания. Задача эффективно решается в терминах обобщенной функции тока (ОФТ), которая имеет несколько компонентов. ОФТ есть обобщение обычной функции тока на более сложный случай. К сожалению, в других более сложных случаях постановка задачи завихренного обтекания требует специального хорошо развитого формализма.

Этот формализм основан на применении якобианного формализма к описанию гидродинамических уравнений, записанных в терминах потенциалов Клебша. Мы будем называть этот формализм формализмом обобщенной функции тока (ОФТ-формализм). Использование якобианного формализма применительно к потенциалам Клебша восходит к работа Клебша [1, 2], который получил свои гидродинамические потенциалы, работая с якобианами. В современной гидродинамике потенциалы Клебша рассматриваются формально вне связи их с якобианным формализмом [4]. Потенциалы Клебша называют другими именами (лагранжевы координаты, лагранжевы переменные [5], метки жидких частиц). Имеется несколько версий представлений потенциалов Клебша. Элементы якобианного формализма использовались многими авторами ([6, 7, 8, 9, 5] и рядом других). Однако, в решении проблемы обтекания якобианный формализм практически не используется, так же как и потенциалы Клебша. Нас интересует только версия употребления потенциалов Клебша, связанная с использование якобианного формализма (ОФТ-формализм). Мы будем использовать симметричную относительно пространства и времени версию якобианного формализма, которая оказалась простой и эффективной. Создается впечатление, что прогресс в исследовании завихренных течений связан главным образом с развитием якобианного формализма вместе с потенциалами Клебша (ОФТ-формализм). Изложение якобианного формализма можно найти в [10], так же как в [11], где он использован для описания течения жидкости в терминах волновых функций.

Почему потенциалы Клебша важны при постановке задачи о завихренном обтекании? Член $\Omega(\psi)$ в правой части равенства (1.2) описывает завихренность. В соответствии с теоремой Кельвина о циркуляции завихренность вморожена в жидкость и движется вместе с жидкостью. Потенциалы Клебша (метки частиц жидкости) так же как и обобщенная функция тока (ОФТ) тоже вморожены в жидкость. Они тоже движутся вместе с жидкостью. В результате потенциалы Клебша и обобщенная функция тока (ОФТ) оказываются эффективным инструментом для описания завихренности.

Завихренное течение жидкости обладает свойствами, которые отсутствуют в потенциальных течениях.

1. Рассмотрение перемещения жидкости и использование потенциалов Клебша, описывающих это перемещение, существенно для завихренных течений, потому что это перемещение переносит завихренность, которая влияет на поле скоростей, тогда как это перемещение не имеет значения в потенциальных течениях, где нет завихренности.

2. Граничные условия для завихренного течения содержат больше информации, чем граничные условия для потенциального течения. Эта дополнительная информация есть информация о завихренности, которая сохраняется в любой идеальной жидкости. Хотя поле завихренности

   $$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$$

   определяется полем скоростей $\mathbf{v}$, но это верно только внутри некоторого 3-объема V, где завихренность определяется с помощью диференцирования поля скоростей. На границе Σ 3-объема V можно рассчитать только составляющую завихренности $\boldsymbol{\omega}$ вдоль нормали к Σ. Составляющие завихренности $\boldsymbol{\omega}$ касательные к Σ должны быть заданы дополнительно. Это означает, что в завихренном течении появляются дополнительные (по отношению к потенциальному течению) степени свободы, и нужна дополнительная информация в граничных условиях для их описания.

Первое свойство анализируется в [10]. Здесь мы о нем тоже расскажем. Принято считать, что проблема обтекания может быть решена в результате рассмотрения только системы уравнений Эйлера.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p, \qquad p = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})S = 0 \tag{1.8}$$

где p есть давление, и $E = E(\rho, S)$ есть внутренняя энергия единицы массы, рассматриваемая как функция плотности ρ и энтропии S. Внутренняя энергия $E = E(\rho, S)$ есть единственная характеристика идеальной жидкости. Перемещение жидких частиц (т.е. их траектории и закон движения вдоль них) в заданном поле скорости $\mathbf{v}$ описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) \tag{1.9}$$

где $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ есть решение системы (1.6)-(1.8). Уравнения (1.6) - (1.9) образуют полную систему гидродинамических уравнений, но вид этой системы едва ли является подходящим, потому что динамические переменные $\rho, \mathbf{v}, S$ в (1.6) - (1.8) суть функции $t, \mathbf{x}$, тогда как $\mathbf{x}$ в (1.9) есть функция от t и от меток $\boldsymbol{\xi}$ для частиц жидкости.

Пусть $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}) = \{\xi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть три независимых интеграла уравнений (1.9). Значения $\boldsymbol{\xi}$ трех интегралов могут маркировать частицы жидкости (лагранжевы координаты). Тогда метки $\boldsymbol{\xi}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi} = 0, \tag{1.10}$$

которые эквивалентны трем уравнениям (1.9). Система уравнений (1.6) - (1.9) едва ли воспринимается как единая динамическая система, поскольку система уравнений (1.6)-(1.8) замкнута, и ее динамические переменные $\rho, \mathbf{v}, S$ суть функции от $t, \mathbf{x}$, тогда как динамические переменные уравнений (1.9) суть функции переменных $t, \boldsymbol{\xi}$. Однако, эквивалентная система (1.6)-(1.8), (1.10) уравнений для переменных $\rho, \mathbf{v}, S, \boldsymbol{\xi}$, которые зависят от $t, \mathbf{x}$, есть единая система динамических уравнений. Эта система получена из вариационного принципа, тогда как эйлерова система (1.6)-(1.8) динамических уравнений может быть получена из вариационного принципа только для случая потенциального течения. Система (1.6)-(1.8) есть замкнутая подсистема единой системы динамических уравнений (1.6)-(1.8), (1.10). На основании этой замкнутости система уравнений Эйлера (1.6)-(1.8) традиционно рассматривается как полная система гидродинамических уравнений, тогда как, на самом деле, система уравнений Эйлера (1.6)-(1.8) есть только усеченная система, т.е. только часть полной системы гидродинамических уравнений, образуемой уравнениями (1.6)-(1.8), (1.10). Если мы работаем только с системой уравнений Эйлера, мы не можем, вообще говоря, ее проинтегрировать. Если тем не менее удается проинтегрировать ее в некоторых частных случаях, то в проинтегрированных динамических уравнениях появляются потенциалы Клебша $\boldsymbol{\xi}$ Если мы используем полную систему уравнений (1.6)-(1.8), (1.10), мы всегда можем ее проинтегрировать и уменьшить число динамических уравнений. Это интегрирование сопровождается появлением в динамических уравнениях трех произвольных функций $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \{g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\}$, $\alpha = 1, 2, 3$ от потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$ ¡Эти функции содержат полную информацию о начальных и граничных условиях.

Проинтегрированные уравнения имеют различный вид для завихренного и потенциального течений. В частности, если $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{g} = 0$, что в случае баротропной жидкости соответствует потенциальному течению, то уравнения (1.10), известные как условия Лина [12], не являются динамическими уравнениями в проинтегрированной системе динамических уравнений, и переменные $\boldsymbol{\xi}$ не имеют отношения к расчету течения жидкости. В общем случае завихренного течения, когда $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{g} \neq 0$ тождественно, уравнения (1.10) являются динамическими уравнениями для жидкости. Мы покажем это как только будет развит надлежащий математический формализм.

2 Якобианный формализм

Рассмотрим математический объект, симметричный относительно пространства и времени и называемый якобианом

$$J \equiv \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \equiv \det||\xi_{i,k}||, \qquad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k}, \qquad i,k = 0,1,2,3 \quad (2.1)$$

Здесь $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\} = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть четыре скаляра, рассматриваемые как функции от $x = \{x^0, \mathbf{x}\}$, $\xi = \xi(x)$. Эти функции $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ предполагаются независимыми в том смысле, что $J \neq 0$. Полезно рассматривать якобиан J как 4-линейную функцию переменных $\xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i$, $i,k = 0,1,2,3$. Тогда можно ввести производные якобиана по $\xi_{i,k}$. Производная $\partial J/\partial \xi_{i,k}$ появляется в результате замены ξ_i на x^k в соотношении (2.1).

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}} \equiv \frac{\partial(\xi_0, ...\xi_{i-1}, x^k, \xi_{i+1}, ...\xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}, \qquad i,k = 0,1,2,3 \quad (2.2)$$

Например,

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \equiv \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}, \qquad i = 0,1,2,3 \quad (2.3)$$

Это правило верно также для высших производных J.

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{i,k} \partial \xi_{s,l}} \equiv \frac{\partial(\xi_0, ...\xi_{i-1}, x^k, \xi_{i+1}, ...\xi_{s-1}, x^l, \xi_{s+1}, ...\xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

$$\equiv \frac{\partial(x^k, x^l)}{\partial(\xi_i, \xi_s)} \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \equiv J(\frac{\partial x^k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi_s} - \frac{\partial x^k}{\partial \xi_s}\frac{\partial x^l}{\partial \xi_i}), \qquad i,k,l,s = 0,1,2,3 \quad (2.4)$$

Из (2.1), (2.2) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^k}{\partial \xi_i} &\equiv \frac{\partial(\xi_0, ...\xi_{i-1}, x^k, \xi_{i+1}, ...\xi_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} \\ &\equiv \frac{\partial(\xi_0, ...\xi_{i-1}, x^k, \xi_{i+1}, ...\xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} \equiv \frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}}, \qquad i,k = 0,1,2,3 \quad (2.5) \end{aligned}$$

и (2.4) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{i,k} \partial \xi_{s,l}} \equiv \frac{1}{J}(\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{s,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{s,k}}), \qquad i,k,l,s = 0,1,2,3 \quad (2.6)$$

Производная $\partial J/\partial \xi_{i,k}$ является алгебраическим дополнением к элементу $\xi_{i,k}$ определителя (2.1). Тогда мы получаем следующие тождества

$$\xi_{l,k}\frac{\partial J}{\partial \xi_{s,k}} \equiv \delta_l^s J, \qquad \xi_{k,l}\frac{\partial J}{\partial \xi_{k,s}} \equiv \delta_l^s J, \qquad l,s = 0,1,2,3 \quad (2.7)$$

$$\partial_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}} \equiv \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{i,k} \partial \xi_{s,l}} \partial_k \partial_l \xi_s \equiv 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{2.8}$$

Здесь и далее производтся суммирование по повторяющимся индексам: (0-3) для латинских индексов и (1-3) – для греческих . Тождество (2.8) может рассматриваться как следствие тождества (2.6) и симметрии выражения $\partial_k \partial_l \xi_s$ относительно перестановки индексов k, l. Свертка (2.6) с ∂_k, или ∂_l также обращается в нуль.

$$\partial_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{i,k} \partial \xi_{s,l}} \equiv \frac{\partial^3 J}{\partial \xi_{i,k} \partial \xi_{s,l} \partial \xi_{m,n}} \partial_k \partial_n \xi_m \equiv 0, \qquad i, l, s = 0, 1, 2, 3. \tag{2.9}$$

Соотношения (2.1) – (2.6) написаны для четырех независимых переменных x, но они верны очевидным образом для любого числа $n+1$ переменных $x = \{x^0, x^1, \dots x^n\}$ и $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$, $\quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n\}$.

Применение якобиана J в гидродинамике основано на свойстве, которое может быть сформулировано как свойство обобщенной функции тока (ОФТ) $\boldsymbol{\xi}$ =$\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ в $(n+1)$-мерном пространстве координат $x = \{x^0, x^1, ..., x^n\}$. На основе обобщенной функции тока можно построить n-вектор j^i

$$j^i = m \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}, \qquad j^i = \{\rho, \rho \mathbf{v}\}, \qquad m = \text{const} \tag{2.10}$$

таким образом, что j^i тождественно удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_i j^i = 0 \tag{2.11}$$

для любого выбора переменных $\boldsymbol{\xi}$. Кроме того переменные $\boldsymbol{\xi}$ постоянны вдоль любой линии $\mathcal{L}$, касательной к n-вектору j^i, и могут маркировать эту линию, потому что множество величин $\boldsymbol{\xi}$ различно для различных линий.

В случае динамической системы (1.6) - (1.8), (1.10) $j^i = \{\rho, \rho \mathbf{v}\}$. Это означает, что уравнения (1.6), (1.10) удовлетворяются при любом выборе обобщенной функции тока (потенциалов Клебша) $\boldsymbol{\xi}$. Заменяя вектор потока $j^i = \{\rho, \rho \mathbf{v}\}$, выраженный через $\boldsymbol{\xi}$, в оставшихся гидродинамических уравнениях, мы получаем динамические уравнения для определения обобщенной функции тока $\boldsymbol{\xi}$. Эта процедура несущественна в случае потенциального течения, когда условия Лина (1.10) не важны. Однако, это очень эффективная процедура в случае завихренного течения, потому что она уменьшает число динамических уравнений, которые нужно решить.

Уравнение непрерывности (2.11) используется без приближений во всех гидродинамических моделях, и замена переменных $\{\rho, \rho \mathbf{v}\} \leftrightarrow \boldsymbol{\xi}$ описываемая с помощью (2.10) иногда оказывается полезной. В частности, в случае установившегося двумерного течения несжимаемой жидкости обобщенная функция тока $\boldsymbol{\xi}$ приводится к одной переменной $\xi_2 = \psi$, известной как функция тока. В этом случае имеется только две существенных независимых переменных $x^0 = x$, $x^1 = y$, и соотношения (2.10), (2.11) приводятся к

$$\rho^{-1} j_x = u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \rho^{-1} j_y = v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.12}$$

Определяя линию тока как линию касательную к потоку j

$$\frac{dx}{j_x} = \frac{dy}{j_y}, \tag{2.13}$$

получаем, что функция тока постоянна вдоль линии тока, потому что в соответствии с двумя первыми уравнениями (2.12), $\psi = \psi(x, y)$ есть интеграл уравнения (2.13).

В общем случае, когда размерность пространства равна n и $x = \{x^0, x^1, \ldots x^n\}$, $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$, величины $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots n$ постоянны вдоль линии $\mathcal{L}: \ x = x(\tau)$ касательной к вектору потока $j = \{j^i\}$, $i = 0, 1, \ldots n$

$$\mathcal{L}: \qquad \frac{dx^i}{d\tau} = j^i(x), \qquad i = 0, 1, \ldots n \tag{2.14}$$

где τ есть параметр вдоль линии $\mathcal{L}$. Это утверждение формулируется математически в виде

$$\frac{d\xi_\alpha}{d\tau} = j^i \partial_i \xi_\alpha = m \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \partial_i \xi_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n \tag{2.15}$$

Последнее равенство следует из первого тождества (2.7), взятого для $s = 0$, $l = 1, 2, \ldots n$

Интерпретация линии (2.14), касательной к потоку различна в разных случаях. Если $x = \{x^0, x^1, \ldots x^n\}$ содержит только пространственные координаты, линия (2.14) есть линия в обычном пространстве. Она трактуется как линия тока, и $\boldsymbol{\xi}$ можно истолковать как величины постоянные вдоль линии тока (т.е. как обобщенную функция тока). Если x^0 есть временна́я координата, уравнение (2.14) описывает линию в пространстве-времени. Эта линия (известная как мировая линия жидкой частицы) определяет движение жидкой частицы. Величины $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$, постоянные вдоль мировой линии, различны , вообще говоря, для разных частиц. Если ξ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots n$ независимы, то их можно использовать для маркировки частиц жидкости.

Таким образом, хотя интерпретация соотношения (2.10), рассматриваемого как замена зависимых переменных j переменными $\boldsymbol{\xi}$, может быть различна, с математической точки зрения это преобразование означает замену уравнения непрерывности некоторыми уравнениями для обобщенной функции тока $\boldsymbol{\xi}$. Различие в интерпретации в данном контексте значения не имеет.

Если m есть постоянная и $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ есть произвольная функция от $\boldsymbol{\xi}$, то выражение

$$j^i = m\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \equiv m\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}, \qquad i = 0, 1, 2, 3, \tag{2.16}$$

можно рассматривать как 4-поток, удовлетворяющий уравнению непрерывности (2.11). Это следует из тождества

$$m\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \equiv m \frac{\partial(x^i, \tilde{\xi}_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}, \qquad \tilde{\xi}_1 = \int_0^{\xi_1} \rho_0(\xi_1', \xi_2, \xi_3) d\xi_1'. \tag{2.17}$$

Якобианный формализм очень полезен для манипуляций с гидродинамическими уравнениями (1.6)-(1.8), (1.10). Например, можно проинтегрировать полную систему из 5+3 динамических уравнений (1.6)-(1.8), (1.10), приведя ее к системе из пяти динамических уравнений, записанных в виде [10]

$$S(t, \mathbf{x}) = S_0(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.18}$$

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \equiv \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial(\boldsymbol{\xi})}{\partial(\mathbf{x})} \tag{2.19}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\varphi, \boldsymbol{\xi}, \eta, S) \equiv \nabla\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\nabla\xi_\alpha - \eta\nabla S, \tag{2.20}$$

где $S_0(\boldsymbol{\xi})$, $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ и $g(\boldsymbol{\xi}) = \{g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\}$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть произвольные функции интегрирования от аргумента $\boldsymbol{\xi}$, φ, η суть новые зависимые переменные, удовлетворяющие динамическим уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u}(\varphi, \boldsymbol{\xi}, \eta, S)\nabla\varphi - \frac{1}{2}[\mathbf{u}(\varphi, \boldsymbol{\xi}, \eta, S)]^2 + \frac{\partial(\rho E)}{\partial\rho} = 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathbf{u}(\varphi, \boldsymbol{\xi}, \eta, S)\boldsymbol{\nabla}\eta = -\frac{\partial E}{\partial S}. \tag{2.22}$$

Если пять зависимых переменных φ, $\boldsymbol{\xi}$, η удовлетворяют системе уравнений (1.10), (2.21), (2.22), пять динамических переменных S, ρ, $\mathbf{v}$ (2.18)–(2.20) удовлетворяют динамическим уравнениям (1.6)–(1.8). Неопределенные функции $S_0(\boldsymbol{\xi})$, $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$, и $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$ могут быть определены из начальных и граничных условий таким образом, чтобы начальные и граничные условия для переменных φ, $\boldsymbol{\xi}$, η были универсальны в том смысле, что они не зависят от течения жидкости [10]. Далее динамические уравнения (1.10), (2.21), (2.22) будут получаться прямо из вариационного принципа.

3 Вариационный принцип

Идеальная (недиссипативная) жидкость есть непрерывная динамическая система, чьи динамические уравнения могут быть получены из вариационного принципа с функционалом действия

$$\mathcal{A}_{\mathrm{L}}[\mathbf{x}] = \int \{\frac{m}{2}(\frac{d\mathbf{x}}{dt})^2 - V\}\rho_0(\boldsymbol{\xi})dt d\boldsymbol{\xi}, \tag{3.1}$$

где координаты $\mathbf{x} = \{x^\alpha(t, \boldsymbol{\xi})\}$, $\alpha = 1, 2, 3$ жидких частиц суть зависимые переменные, рассматриваемые как функции независимых переменных времени t и меток (лагранжевых координат) $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Величина $d\mathbf{x}/dt$ есть производная от $\mathbf{x}$ по t при фиксированных $\boldsymbol{\xi}$.

$$\frac{dx^\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} \equiv \frac{\partial(x^\alpha, \boldsymbol{\xi})}{\partial(t, \boldsymbol{\xi})} \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

$\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ есть некоторая неотрицательная весовая функция, а V есть потенциал некоторого самосогласованного силового поля, которое зависит от $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{x}$ и производных от $\mathbf{x}$ по $\boldsymbol{\xi}$. m =const есть масса жидкой частицы. Величина массы несущественна, и без потери общности можно положить $m = 1$. Для идеальной жидкости потенциал V есть такая функция от $\boldsymbol{\xi}$ и $\partial\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\xi}$, которая может быть представлена в виде

$$V(\boldsymbol{\xi}, \partial\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\xi}) = mE(\rho, S), \qquad \rho = \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\right)^{-1}, \qquad S = S_0(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.3)$$

где энтропия на единицу массы $S = S_0(\boldsymbol{\xi})$ есть заданная функция от $\boldsymbol{\xi}$, определяемая начальными условиями. ρ есть плотность жидкости, и $E(\rho, S)$ есть внутренняя энергия жидкости на единицу массы. Величина $E(\rho, S)$ рассматривается как заданная функция ее аргументов.

Вариационный принцип (3.1) порождает систему динамических уравнений шестого порядка для шести зависимых переменных $\mathbf{x}$, $d\mathbf{x}/dt$, рассматриваемых как функции независимых переменных t, $\boldsymbol{\xi}$. Такой способ описания известен как лагранжево описание жидкости. Если переменные t, $\mathbf{x}$ рассматриваются как независимые переменные и шесть переменных $\boldsymbol{\xi}$, $\partial\boldsymbol{\xi}/\partial t$ рассматриваются как зависимые переменные, то возникает система динамических уравнений шестого порядка для переменных $\boldsymbol{\xi}$, $\partial\boldsymbol{\xi}/\partial t$. Она известна как эйлерово описание жидкости.

Способ маркировки частиц жидкости переменными $\boldsymbol{\xi}$ несущественен с физической точки зрения. Это обстоятельство проявляется в существовании группы преобразований перемаркировки.

$$\xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\alpha = \tilde{\xi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad D \equiv \det \parallel \partial\tilde{\xi}_\alpha/\partial\xi_\beta \parallel \neq 0, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \qquad (3.4)$$

Действие (3.1) оказывается инвариантным относительно группы перемаркировки, если V имеет вид (3.3), где S есть скаляр и $\rho(\boldsymbol{\xi})$ есть скалярная плотность, т.е. при преобразованиях (3.4) величина $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ преобразуется следующим образом

$$\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \to \tilde{\rho}_0(\tilde{\boldsymbol{\xi}}), \qquad \rho(\boldsymbol{\xi}) \to \tilde{\rho}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \rho(\boldsymbol{\xi})D \qquad (3.5)$$

Группа перемаркировки используется в гидродинамике сравнительно недавно [13, 7, 14, 15, 16, 17, 5].

Группа перемаркировки есть группа симметрии динамической системы. Это может быть использовано для упрощения описания жидкости. Имеется по крайней мере два разных способа использования группы перемаркировки. Первый (традиционный) способ упрощения есть использование перемаркировочно-инвариантных переменных $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, ρ, S, рассматриваемых как функции от независимых переменных $t, \mathbf{x}$. Мы будем называть на этот способ описания перемаркировочно-инвариантным описанием (ПИО). Переменные $\boldsymbol{\xi}$, описывающие маркировку, исключаются. При таком исключении переменных $\boldsymbol{\xi}$ динамические уравнения (1.10) также устраняются на том основании, что оставшаяся система динамических уравнений Эйлера (1.6)-(1.8) для пяти зависимых переменных $\mathbf{v}$, ρ, S является замкнутой. Традиционно большинство исследователей используют ПИО и, следовательно, систему динамических уравнений Эйлера. Другой способ упрощения описания – это использование группы перемаркировки для интегрирования полной системы динамических уравнений (1.6)-(1.8), (1.10) и использование системы (1.10), (2.21), (2.22).

Вообще говоря, эквивалентность системы (1.10), (2.21), (2.22) и системы (1.6)-(1.8), (1.10) может быть проверена прямой подстановкой переменных ρ, S, $\mathbf{v}$, определенных соотношениями (2.18)–(2.20), в уравнения (1.6)–(1.8). Используя уравнения (1.10), (2.21), (2.22), мы получим тождества после соответствующих вычислений. Однако, такой расчет не выявляет связи между интегрированием и инвариантностью по отношению к группе перемаркировки (3.4). Кроме того оказывается неясным смысл новых переменных φ, η.

Мы будем использовать для своих исследований вариационный принцип (3.1). Заметим, что в течение долгого времени получение вариационного принципа для гидродинамических уравнений (1.6)–(1.8) было самостоятельной проблемой [18, 6, 7, 12, 19, 15, 9]. Существование этой проблемы связано с отсутствием понимания того факта, что система гидродинамических уравнений (1.6)–(1.8) является усеченной системой, а полная система динамических уравнений (1.6)-(1.8), (1.10) включает уравнения (1.10), описывающие движение жидких частиц в заданном поле скоростей. Вариационный принцип может порождать только полную систему динамических уравнений (а не ее замкнутую подсистему). Не понимая этого, пытались построить лагранжиан для системы (1.6)–(1.8) как сумму некоторых условий и величин, взятых с множителями Лагранжа. В качестве таких условий брались динамические уравнения (1.6)–(1.8) и некоторые другие условия.

Сейчас эта проблема решена (см. обзор Сэлмона [9]) на основе эйлеровской версии вариационного принципа (3.1), где в общем случае уравнения (1.10) появляются автоматически и пренебречь ими нельзя. В нашей версии вариационного принципа мы следуем Сэлмону [9], используя, однако, некоторые вариации, необходимые для того, чтобы подчеркнуть усеченный характер гидродинамических уравнений (1.6)–(1.8), потому что понимание усеченного характера системы (1.6)–(1.8) устраняет проблему получения вариационного принципа для гидродинамических уравнений (1.6)–(1.8).

Исходным пунктом является действие (3.1). Мы предпочитаем работать с эйлеровым описанием, когда лагранжевы координаты (маркировка частиц)) $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ рассматриваются как зависимые переменные, а эйлеровы координаты $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{t, \mathbf{x}\}$, $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$ рассматриваются как независимые переменные. Здесь ξ_0 есть времена́я лагранжева координата, которая эволюционирует произвольно вдоль траектории частицы. Сейчас ξ_0 есть фиктивная переменная, но после интегрирования уравнений переменная ξ_0 перестает быть фиктивной и превращается в переменную φ, появляющуюся в проинтегрированной системе (1.10), (2.21), (2.22).

Далее будут использоваться обозначения, симметричные относительно пространства и времени, что значительно упрощает расчеты. В эйлеровом описании функционал действия (3.1) представляется как интеграл по независимым переменным $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{t, \mathbf{x}\}$. Мы используем якобианный формализм для преобразования действия (3.1).

Заметим, что в соответствии с (2.5) производная (3.2) может быть записана в виде

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\right)^{-1}, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{3.6}$$

Тогда составляющие 4-потока $j = \{j^0, \mathbf{j}\} \equiv \{\rho, \rho\mathbf{v}\}$ могут быть представлены в виде (2.16), при условии, что используются обозначения (2.19)

$$j^0 = \rho = m\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \equiv m\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial(x^0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \tag{3.7}$$

При таком виде плотности массы ρ 4-поток $j = \{j^i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$ тождественно удовлетворяет уравнению непрерывности (2.11), которое выполняется в силу тождеств (2.7), (2.8). Кроме того в силу тождеств (2.7), (2.8) условия Лина (1.10) выполняются тождественно

$$j^i \partial_i \xi_\alpha = m\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \partial_i \xi_\alpha \equiv 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{3.8}$$

Составляющие j^i инвариантны относительно группы перемаркировки (3.4), если функция $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ преобразуется в соответствии с (3.5).

Получаем

$$\rho_0(\boldsymbol{\xi}) dt d\boldsymbol{\xi} = \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} dt d\mathbf{x} = \frac{\rho}{m} dt d\mathbf{x} \tag{3.9}$$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}}\right)^2 \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\right)^{-2}, \tag{3.10}$$

и вариационная проблема с функционалом действия (3.1) записывается как вариационная проблема с функционалом действия

$$\mathcal{A}_{\mathrm{E}}[\boldsymbol{\xi}] = \int \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}}\right)^2 \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\right)^{-2} - E \right\} \rho dt d\mathbf{x}, \tag{3.11}$$

где ρ есть заданная функция от $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$ и от $\xi_{\alpha,i} \equiv \partial_i \xi_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, $i = 0, 1, 2, 3$, определяемая с помощью (3.7). E есть внутренняя энергия жидкости, которая предполагается заданной функцией от ρ и $S_0(\boldsymbol{\xi})$

$$E = E(\rho, S_0(\boldsymbol{\xi})), \tag{3.12}$$

где ρ определяется соотношением (3.7) и $S_0(\boldsymbol{\xi})$ есть некоторая фиксированная функция от $\boldsymbol{\xi}$, описывающая начальное распределение энтропии по жидкости.

Действие (3.11) инвариантно относительно подгруппы $\mathcal{G}_{S_0}$ группы перемаркировки (3.4). Подгруппа $\mathcal{G}_{S_0}$ определяется таким образом, что всякая поверхность $S_0(\boldsymbol{\xi})$ =const инвариантна относительно $\mathcal{G}_{S_0}$. Вообще говоря, подгруппа $\mathcal{G}_{S_0}$ определяется двумя произвольными функциями от $\boldsymbol{\xi}$.

Действие (3.11) порождает систему динамических уравнений шестого порядка, состоящую из трех уравнений второго порядка для трех зависимых переменных $\boldsymbol{\xi}$. Инвариантность действия (3.11) относительно подгруппы $\mathcal{G}_{S_0}$ позволяет частично проинтегрировать систему динамических уравнений. Порядок системы понижается и появляются две произвольные функции. Порядок системы понижается до пяти (а не до четырех), поскольку фиктивная зависимая переменная ξ_0 перестает быть фиктивной в результате этого интегрирования.

К сожалению, подгруппа $\mathcal{G}_{S_0}$ зависит от вида функции $S_0(\boldsymbol{\xi})$ и не может быть получена в общем виде. В том частном случае, когда $S_0(\boldsymbol{\xi})$ не зависит от $\boldsymbol{\xi}$, подгруппа $\mathcal{G}_{S_0}$ совпадает со всей группой $\mathcal{G}$, и порядок системы понижается до четырех.

В общем случае удобно ввести новую зависимую переменную

$$S = S_0(\boldsymbol{\xi}). \tag{3.13}$$

Добавление новой переменной увеличивает число зависимых динамических переменных, но в то же время делает действие инвариантным относительно всей группы $\mathcal{G}$ преобразований перемаркировки. Это позволяет проинтегрировать систему динамических уравнений и уменьшить ее порядок. В соответствии с (3.8) переменная S удовлетворяет динамическому уравнению (1.8)

$$j^i \partial_i S = 0. \tag{3.14}$$

В силу обозначений (2.16) и тождеств (2.7), (2.8) уравнения (3.14), (3.8) выполняются тождественно. Таким образом, они могут быть добавлены к функционалу действия (3.11) как добавочные условия, не изменяя вариационной проблемы. Добавляя (3.14) к лагранжиану действия (3.11) с помощью можителей Лагранжа η, мы получаем

$$\mathcal{A}_{\mathrm{E}}[\boldsymbol{\xi}, \eta, S] = \int \left\{ \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \right)^2 \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \right)^{-1} - \rho E + \eta \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \partial_k S \right\} dt d\mathbf{x} \tag{3.15}$$

где $E = E(\rho, S)$. Действие (3.15) инвариантно относительно группы перемаркировки $\mathcal{G}$, которая определяется тремя произвольными функциями от $\boldsymbol{\xi}$.

Чтобы получить динамические уравнения, удобно ввести новые зависимые переменные j^i, определенные с помощью (2.16). Введем новые переменные j^i с помощью обозначений (2.16), взятых с множителями Лагранжа p_i, $i = 0, 1, 2, 3$. Введение соотношений (2.16) в качестве дополнительных условий не изменяет вариационной проблемы, потому что условия (2.16) всегда совместимы с динамическими уравнениями, порожденными действием (3.15). Тогда действие (3.15) принимает вид

$$\mathcal{A}_{\mathrm{E}}[\rho, \mathbf{j}, \boldsymbol{\xi}, p, \eta, S] = \int \left\{ \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho} - \rho E - p_k \left(j^k - m\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right) + \eta j^k \partial_k S \right\} dt d\mathbf{x} \tag{3.16}$$

Для получения динамических уравнений варьируются переменные $\rho, \mathbf{j}, \boldsymbol{\xi}, p, \eta, S$. Исключим переменные p_i из действия (3.16). Динамические уравнения, возникающие в результате варьирования по ξ_α имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathrm{E}}}{\delta \xi_\alpha} \equiv \hat{\mathcal{L}}_\alpha p = -m\partial_k \left(\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,i} \partial \xi_{\alpha,k}} p_i\right) + m \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} p_k = 0, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{3.17}$$

где $\hat{\mathcal{L}}_\alpha$ суть линейные операторы, действующие на переменные $p = \{p_i\}$, $i = 0,1,2,3$. Эти уравнения могут быть принтегрированы в виде

$$p_i = g^0(\xi_0)\partial_i \xi_0 + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_i \xi_\alpha, \qquad i = 0,1,2,3, \tag{3.18}$$

где ξ_0 есть некоторая новая переменная (временна́я лагранжева координата), $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1,2,3$ суть произвольные функции от меток, $\boldsymbol{\xi}$, $g^0(\xi_0)$ призвольная функция от ξ_0. Соотношения (3.18) удовлетворяют тождественно уравнениям (3.17). В самом деле, подставляя (3.18) в (3.17) и используя (2.6), (2.7), мы получаем

$$-m\partial_k \left\{\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \left[\frac{\partial J}{\partial \xi_{\alpha,k}} g^0(\xi_0) - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\right]\right\} + m \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\alpha} J g^0(\xi_0) = 0, \qquad \alpha = 1,2,3, \tag{3.19}$$

Дифференцируя фигурные скобки и используя тождества (2.8), (2.7), заключаем, что (3.19) есть тождество.

Полагая для простоты

$$\partial_k \varphi = g^0(\xi_0)\partial_k \xi_0, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{3.20}$$

получаем

$$p_k = \partial_k \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_k \xi_\alpha, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{3.21}$$

Заметим, что возможность интегрирования уравнений (3.17) при помощи якобианного формализма и появление произвольных функций $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$ есть результат инвариантности действия относительно группы перемаркировки (3.4).

Подставляя (3.21) в (3.16), можно исключить переменные p_i, $i = 0,1,2,3$ из функционала (3.16). Член $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_k \xi_\alpha \partial J/\partial \xi_{0,k}$ обращается в нуль, член $\partial_k \varphi \partial J/\partial \xi_{0,k}$ не дает вклада в динамические уравнения. Функционал действия принимает вид

$$\mathcal{A}_{\mathrm{g}}[\rho, \mathbf{j}, \boldsymbol{\xi}, \eta, S] = \int \left\{\frac{\mathbf{j}^2}{2\rho} - \rho E - j^k \left(\partial_k \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_k \xi_\alpha - \eta \partial_k S\right)\right\} dt d\mathbf{x} \tag{3.22}$$

где $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$ рассматриваются как фиксированные функции от $\boldsymbol{\xi}$, которые определяются из начальных условий. Варьируя действие (3.22) по φ, $\boldsymbol{\xi}$, η, S, $\mathbf{j}$, ρ, получаем динамические уравнения

$$\delta \varphi : \qquad \partial_k j^k = 0, \tag{3.23}$$

$$\delta\xi_\alpha : \qquad \Omega^{\alpha\beta} j^k \partial_k \xi_\beta = 0, \qquad \alpha = 1,2,3, \tag{3.24}$$

где $\Omega^{\alpha\beta}$ определяются соотношениями

$$\Omega^{\alpha\beta} = \frac{\partial g^\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial g^\beta(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\alpha}, \qquad \alpha, \beta = 1,2,3 \tag{3.25}$$

$$\delta\eta : \qquad j^k \partial_k S = 0, \tag{3.26}$$

$$\delta S : \qquad j^k \partial_k \eta = -\rho \frac{\partial E}{\partial S}, \tag{3.27}$$

$$\delta \mathbf{j} : \qquad \mathbf{v} \equiv \mathbf{j}/\rho = \nabla\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \nabla \xi_\alpha - \eta \nabla S, \tag{3.28}$$

$$\delta\rho : \qquad -\frac{\mathbf{j}^2}{2\rho^2} - \frac{\partial(\rho E)}{\partial \rho} - \partial_0 \varphi - g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \partial_0 \xi_\alpha + \eta \partial_0 S = 0, \tag{3.29}$$

При получении соотношений (3.24), (3.27), было использовано уравнение непрерывности (3.23). Легко видеть, что (3.24) эквивалентно условиям Лина (1.10), если

$$\det \parallel \Omega^{\alpha\beta} \parallel \neq 0 \tag{3.30}$$

Если условие (3.30) выполнено и уравнения (1.10) удовлетворяются, уравнения (3.26) и (3.23) могут быть проинтегрированы соответственно в виде (2.18) и (2.19). Уравнения (3.27) и (3.28) эквивалентны уравнениям (2.22) и (2.20). Наконец, исключая $\partial_0 \xi_\alpha$ и $\partial_0 S$ из (3.29) с помощью (1.10) и (3.26), получаем уравнение (2.21) и, следовательно, систему динамических уравнений (1.10), (2.21), (2.22), где используются обозначения (2.18)–(2.20).

Усеченная система (1.6)–(1.8) может быть получена из уравнений (3.23)–(3.29) следующим образом. Уравнения (3.23), (3.26) совпадают с (1.6), (1.8). Для получения (1.7) заметим, что завихренность $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ и $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ получаются из (3.28) в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \Omega^{\alpha\beta} \nabla \xi_\beta \times \nabla \xi_\alpha - \nabla \eta \times \nabla S \tag{3.31}$$

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = \Omega^{\alpha\beta} \nabla \xi_\beta (\mathbf{v}\nabla) \xi_\alpha + \nabla S (\mathbf{v}\nabla) \eta - \nabla \eta (\mathbf{v}\nabla) S \tag{3.32}$$

Образуем разность между временно́й производной от (3.28) и градиентом выражения (3.29). Исключая $\Omega^{\alpha\beta} \partial_0 \boldsymbol{\xi}_\alpha$, $\partial_0 S$ и $\partial_0 \eta$ с помощью уравнений (3.24), (3.26), (3.27), получаем

$$\partial_0 \mathbf{v} + \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{\partial^2(\rho E)}{\partial \rho^2} \nabla \rho + \frac{\partial^2 (\rho E)}{\partial \rho \partial S} \nabla S - \rho \frac{\partial E}{\partial S} \nabla S$$

$$-\Omega^{\alpha\beta} \nabla \xi_\beta (\mathbf{v}\nabla) \xi_\alpha + \nabla \eta (\mathbf{v}\nabla) S - \nabla S (\mathbf{v}\nabla) \eta = 0 \tag{3.33}$$

Используя (3.31), (3.32), приведем выражение (3.33) к виду

$$\partial_0 \mathbf{v} + \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{1}{\rho} \nabla (\rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \tag{3.34}$$

В силу тождества

$$\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})\equiv\nabla\frac{\mathbf{v}^2}{2}-(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \tag{3.35}$$

последнее уравнение эквивалентно (1.7). Заметим, что при получении усеченной системы (1.6) – (1.8) условие (3.30) не используется, и система (1.6) – (1.8) верна в любом случае.

В общем случае (3.30), диференцируя уравнения (3.28), (3.29) и исключая переменные φ, $\boldsymbol{\xi}$, η, мы получаем усеченную систему (1.6) – (1.8), тогда как система (1.10), (2.21), (2.22) следует из системы (3.23) – (3.29) прямо (т.е. без дифференцирования). Это означает, что система (1.10), (2.21), (2.22) есть проинтегрированная система, тогда как усеченная система (1.6) – (1.8) не проинтегрирована, хотя формально они одного и того же порядка.

Действие вида (3.22), или близкое к этому виду было получено некоторыми авторами [19, 9], но величины g^α, $\alpha=1,2,3$ всегда рассматривались как дополнительные зависимые переменные (а не как неопределенные функции от $\boldsymbol{\xi}$, которые могут быть выражены через начальные условия). Действие не рассматривалось как функционал от фиксированных неопределенных функций $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$.

Итак, пять уравнений (1.10), (2.21), (2.22) с S, ρ и $\mathbf{v}$, определенные соответственно посредством (2.18), (2.19) и (2.20), образуют систему пятого порядка для пяти зависимых переменных $\xi=\{\xi_0,\boldsymbol{\xi}\}$, η. Уравнения (1.6), (1.8),(1.10), (2.21),(2.22) образуют систему уравнений седьмого порядка для семи переменных ρ, $\boldsymbol{\xi}$, φ, η, S.

Если $\Omega^{\alpha\beta}\equiv 0$, то из (3.25) следует, что

$$g^\alpha(\boldsymbol{\xi})=\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\Phi(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.36}$$

Тогда из (3.28) и (3.36) следует

$$\mathbf{v}=\mathbf{j}/\rho=\nabla(\varphi+\Phi(\boldsymbol{\xi}))-\eta\nabla S, \tag{3.37}$$

В случае изэнтропического течения ($\nabla S=0$) величины $\Omega^{\alpha\beta}$ совпадают с завихренностью, и течение жидкости завихренное, как это следует из (3.30). В этом случае так же как в случае выполнения (3.37) динамические уравнения (3.24) выполняются в силу соотношений $\Omega^{\alpha\beta}\equiv 0$, и условия Лина (1.10) не следуют из динамических уравнений (3.24). В этом частном случае добавление условий Лина (1.10) к усеченной системе (1.6), (1.8) не является необходимым.

Система уравнений (3.23) – (3.29), так же как система уравнений (1.10), (2.18) - (2.22) содержат полную информацию о течении жидкости в неограниченном пространстве. Система уравнений (1.10), (2.18) - (2.22) есть система из пяти уравнений в частных производных для пяти динамических переменных φ, η, $\boldsymbol{\xi}$, и нужно задать для них начальные условия. Однако, начальные условия для переменных φ, η, $\boldsymbol{\xi}$ можно задать в универсальной форме, которая одинакова для всех течений жидкости. Например, можно положить

$$\boldsymbol{\xi}(0,\mathbf{x})=\boldsymbol{\xi}_{\rm in}(\mathbf{x})=\mathbf{x},\qquad \varphi(0,\mathbf{x})=0,\qquad \eta(0,\mathbf{x})=0 \tag{3.38}$$

Тогда в соответствии с (3.28) начальные значения переменных ρ, S, $\mathbf{v}$ имеют вид

$$\mathbf{v}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{3.39}$$

$$\rho(0,\mathbf{x}) = \rho_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi}) = \rho_{\text{in}}(\mathbf{x}), \qquad S(0,\mathbf{x}) = S_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi}) = S_{\text{in}}(\mathbf{x}) \tag{3.40}$$

где $\rho_{\text{in}}(\mathbf{x})$, $S_{\text{in}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}_{\text{in}}(\mathbf{x})$ суть заданные начальные значения, определяющие течение жидкости. Переменные $\boldsymbol{\xi}$ маркируют частицы жидкости, и выбор маркировки несуществен.

Пусть теперь вид $\varphi(0,\mathbf{x})$ и $\eta(0,\mathbf{x})$ изменен, и мы имеем$\varphi(0,\mathbf{x}) = \varphi_{\text{in}}(\mathbf{x})$, $\eta(0,\mathbf{x}) = \eta_{\text{in}}(\mathbf{x})$, где $\varphi_{\text{in}}(\mathbf{x})$, и $\eta_{\text{in}}(\mathbf{x})$ суть некоторые заданные функции. Эта замена может быть скомпенсирована изменением $\mathbf{g}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_{\text{in}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\nabla}\varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}) + \eta_{\text{in}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}S_{\text{in}}(\mathbf{x})$$

если замена осуществлена таким образом, что начальные значения величин ρ, S, $\mathbf{v}$ остаются неизменными. Все это означает, что динамические уравнения (1.10), (2.18) - (2.22) содержат полную информацию о течении жидкости, потому что выбор начальных значений для переменных φ, η, $\boldsymbol{\xi}$ не существенен для расчета течения жидкости в бесконечном пространстве. V.

Это верно также для течения жидкости в полупространстве $x^3 \geq 0$, как это показано в [10]. В этом случае граничные условия для $\mathbf{v}$ на границе $x^3 = 0$ выражаются через произвольные функции $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}|x^3 < 0\}$, тогда как начальные условия выражаются через произвольные функции $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}|x^3 \geq 0\}$. По-видимому, функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ определяют начальные и граничные условия для скорости $\mathbf{v}$ также в случае течения жидкости в любом ограниченном объеме V, хотя это пока не доказано.

Итак, информация, существенная для определения течения жидкости описывается функциями $\rho_{\text{in}}(\mathbf{x})$, $S_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{g}$. Эта информация вводится в динамические уравнения в виде неопределенных функций. Несущественная информация, относящаяся к методам описания жидкости, задается начальными и граничными условиями для переменных φ, η, $\boldsymbol{\xi}$. Переменные $\boldsymbol{\xi}$, φ, η суть вспомогательные переменные, задающие способ описания течения жидкости. Потенциалы Клебша $\boldsymbol{\xi}$ маркируют частицы жидкости. В то же время переменые $\boldsymbol{\xi}$ описывают перемещение частиц вдоль их траекторий, и это описание не зависит от способа маркировки. Переменные φ, η описывают разбиение поля скорости $\mathbf{v}$ на части. Вид этого разбиения несущественен. Вспомогательные переменные $\boldsymbol{\xi}$, φ, η описываются уравнениями в частных производных, тогда как само течение жидкости описывается конечными соотношениями, содержащими произвольные функции $\rho_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi})$, $S_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$ (при фиксированных переменных φ, η, $\boldsymbol{\xi}$, заданных как функции от $t,\mathbf{x}$).

Ситуация довольно необычная и неожиданная. Можно получить результат расчета течения жидкости, но он ссылается на способ описания (переменные $\boldsymbol{\xi}$, φ, η), и этот способ описания определяется дифференциальными уравнениями в частных производных. Непонятно, как разрешить и эффективно использовать эту ситуацию.

4 Вариационный принцип для несжимаемой жидкости

Несжимаемая жидкость постоянной плотности есть частный случай идеальной жидкости, когда можно положить $\rho = \rho_0$ =const. В этом случае уравнение непрерывности (3.23), содержащее временнýю производную от плотности ρ и определяющее временнýю эволюцию плотности ρ, принимает вид

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) не содержит временны́х производных, вообще. Оно представляет собой скорее ограничение, налагаемое на начальные значения скорости $\mathbf{v}$, чем динамическое уравнение, описывающее эволюцию одной из динамических переменных. Формально это означает, что система гидродинамических уравнений перестает быть гиперболической и становится эллиптической. Это обстоятельство изменяет постановку задачи о течении жидкости.

Положим $\rho = \rho_0$ =const в действии (3.22) и введем новые переменные

$$\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho_0, \qquad \rho_0 = \mathrm{const} \tag{4.2}$$

Легко проверить, что $\eta = \eta(\boldsymbol{\xi})$, $S = S_0(\boldsymbol{\xi})$, и последний член в (3.22) может быть объединен с членом $j^k g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_k\boldsymbol{\xi}_\alpha$. Таким образом, действие для несжимаемой жидкости выглядит следующим образом

$$\mathcal{A}_{\mathrm{E}}[\mathbf{v},\boldsymbol{\xi},\varphi] = \rho_0\int\{\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\varphi - g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_\alpha - g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha\}dtd\mathbf{x}, \tag{4.3}$$

где $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$ суть произвольные функции от $\boldsymbol{\xi}$.

Вариация по $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\xi}$, φ дает

$$\delta\mathbf{v}: \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha \tag{4.4}$$

$$\rho_0^{-1}\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathrm{E}}}{\delta\xi_\alpha} = \Omega^{\alpha\beta}(\partial_0\xi_\beta + \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\xi_\beta) = 0, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{4.5}$$

$$\rho_0^{-1}\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathrm{E}}}{\delta\varphi} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} = 0 \tag{4.6}$$

В общем случае условие (3.30) выполняется, и множитель $\Omega^{\alpha\beta}$ в (4.5) можно опустить.

Подставляя (4.4) в (4.5) и (4.6), получаем

$$\Omega^{\alpha\beta}\left(\partial_0\xi_\beta + \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^\gamma(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nabla}\xi_\gamma\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_\beta\right) = 0, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\varphi + g^{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nabla}\xi_\beta\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nabla}^2\xi_\alpha = 0, \qquad g^{\alpha,\beta} \equiv \frac{\partial g^\alpha}{\partial\xi_\beta} \tag{4.8}$$

Динамическое уравнение для φ не содержит временно́й производной. Если $\Omega^{\alpha\beta} \equiv 0$, течение жидкости потенциальное, и динамические уравнения (4.7) выполняются независимо от условий Лина, которые имеют вид

$$(\partial_0\xi_\beta + (\nabla\varphi + g^\gamma(\boldsymbol{\xi})\nabla\xi_\gamma)\,\nabla\xi_\beta) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{4.9}$$

В этом случае условия Лина (4.9) не являются динамическими уравнениями.

Традиционные гидродинамические уравнения для несжимаемой жидкости

$$\nabla\mathbf{v} = 0, \qquad \partial_0\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} \tag{4.10}$$

получаются из соотношений (4.4)-(4.6). Дифференцируя (4.4) по t, получаем

$$\partial_0\mathbf{v} = \nabla[\partial_0\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_\alpha] - \Omega^{\alpha\beta}\partial_0\xi_\beta\nabla\xi_\alpha \tag{4.11}$$

где $\Omega^{\alpha\beta}$ определяется с помощью (3.25). Из (4.4) следует

$$\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = \Omega^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})\nabla\xi_\beta(\mathbf{v}\nabla)\xi_\alpha. \tag{4.12}$$

В силу (4.5) последний член в правой части соотношения (4.11) совпадает с правой частью уравнения (4.12). Тогда используя тождество (3.35), получаем

$$\partial_0\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \nabla\left(\partial_0\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) \tag{4.13}$$

Уравнение (4.13) совпадает со вторым уравнением (4.10), если использовать обозначение

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \partial_0\varphi - g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_\alpha, \qquad p_0 = \text{const} \tag{4.14}$$

Здесь давление p определяется после решения системы гидродинамических уравнений (4.4)-(4.6), или (4.10).

Подчеркнем, что традиционный вид (4.10) гидродинамических уравнений получается получается из гидродинамических уравнений (4.4)-(4.6) *с помощью дифференцирования.* Это означает, что гидродинамичекие уравнения вида (4.4)-(4.6) являются *результатом интегрирования* гидродинамических уравнений (4.10) вместе с условиями Лина (1.10). Интересно также, что система уравнений (4.4)-(4.6) содержит временны́е производные только в динамических уравнениях (4.5).

5 Двумерное течение несжимаемой жидкости

Мы упоминали во введении, что постановка задачи об обтекании различна для потенциального и завихренного течений. Это различие появляется только после интегрирования. Она различна не только для двумерного течения несжимаемой жидкости. Она различна для любой невязкой жидкости, и причина этого различия лежит в динамических уравнениях (3.24) (или (4.5)), которые в случае $\Omega^{\alpha\beta} \equiv 0$ игнорируют степени свободы, связанные с вращением. Метод, использованный для получения (1.2) не может быть использован в общем случае, и здесь мы изложим метод, который может быть распространен на любую идеальную жидкость. Метод основан на использовании обобщенной функции тока (совместное применение якобианного формализма и описания в терминах потенциалов Клебша). Чтобы избежать технических сложностей мы применим этот метод к случаю двумерного течения несжимаемой жидкости, когда обобщенная функция тока имеет только одну составляющую.

Уравнения (1.1) и (1.2) различны. Первое уравнение линейно, тогда как второе – квазилинейно. Первое уравнение может быть легко решено, тогда как второе может быть решено только с помощью последовательных приближений. Различие в сложности уравнений (1.1) и (1.2) чисто техническое, тогда как различие в постановке задачи принципиальное. Идея исследования очень проста. Вводя обобщенную функцию тока, мы ξ_2 мы удовлетворяем уравнениям (4.5), (4.6) для любых ξ_2. Тогда из (4.4) мы получаем динамическое уравнение для определения ξ_2 и необходимые граничные условия для этого уравнения.

Хотя можно работать с уравнениями (4.4) – (4.6) для несжимаемой жидкости, мы предпочитаем рассматривать динамические уравнения для слабо сжимаемой жидкости, чья внутренняя энергия задается выражением

$$E(\rho) = E_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/\varepsilon}, \qquad E_0, \rho_0 = \text{const}, \qquad \varepsilon \ll 1 \tag{5.1}$$

Несжимаемая жидкость получается в пределе $\varepsilon \to 0$. Мы рассматриваем динамические уравнения, полученные из действия (3.22) с энтропией S =const и $\eta = 0$. Эти уравнения имеют вид

$$\partial_k j^k = 0, \qquad j^0 \equiv \rho \tag{5.2}$$

$$\Omega^{\alpha\beta} j^k \xi_{\beta,k} = 0, \qquad \alpha = 1,2 \tag{5.3}$$

где $\Omega^{\alpha\beta}$ определяется соотношением (3.25).

$$\frac{j^\mu}{\rho} = \partial_\mu \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\xi_{\alpha,\mu}, \qquad \mu = 1,2, \tag{5.4}$$

$$\xi_{\alpha,\mu} \equiv \partial_\mu \xi_\alpha, \qquad \mu, \alpha = 1,2$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial \rho} = -\frac{\mathbf{j}^2}{2\rho^2} - \partial_0\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\xi_{\alpha,0} \tag{5.5}$$

Здесь и далее суммирование производится по повторяющимся греческим индексам (1,2) и по повторяющимся латинским индексам от 0 до 2. Мы будем использовать обозначения $(x^0, x^1, x^2) = (t, x, y)$. Запятая перед индексом k означает дифференцирование по x^k, например, $\xi_{\alpha,k} \equiv \partial_k \xi_\alpha$.

Положим

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2)}{\partial(x^0, x^1, x^2)}, \qquad j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = \frac{\partial\left(x^k, \xi_1, \xi_2\right)}{\partial(x^0, x^1, x^2)}, \qquad k = 0,1,2, \tag{5.6}$$

где ξ_1, ξ_2 суть некоторые функции от (t, x, y). Уравнения (5.2), (5.3) удовлетворяются соотношениями (5.6) для любых функций ξ_1, ξ_2, в силу тождеств

$$\partial_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \equiv 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \xi_{\alpha,k} \equiv 0, \qquad \alpha = 1, 2 \tag{5.7}$$

Подставляя (5.1) в (5.5), получаем

$$(E_0)^\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^\varepsilon \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \left(-\frac{\mathbf{j}^2}{2\rho^2} - \partial_0 \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \xi_{\alpha,0}\right)^\varepsilon \tag{5.8}$$

В пределе $\varepsilon \to 0$ уравнение (5.8) превращается в

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x^1, x^2)} = 1 \tag{5.9}$$

В стационарном случае можно принять, что ξ_2 не зависит от времени t

$$\xi_1 = \xi_1(t, x, y), \qquad \xi_2 = \xi_2(x, y) \tag{5.10}$$

и

$$\xi_{2,0} \equiv 0. \tag{5.11}$$

Уравнение (5.9) принимает вид

$$\xi_{2,2} \xi_{1,1} - \xi_{2,1} \xi_{1,2} - \rho_0 = 0. \tag{5.12}$$

Рассмотрим уравнение (5.12) как уравнение для зависимой переменной ξ_1 с заданной функцией $\xi_2 = \xi_2(x, y)$. Уравнение в частных производных первого порядка эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\xi_{2,2}} = \frac{dy}{-\xi_{2,1}}, \qquad \frac{dx}{\xi_{2,2}} = \frac{d\xi_1}{\rho_0}. \tag{5.13}$$

Легко видеть, что

$$C_2 = \xi_2(x, y) \tag{5.14}$$

есть интеграл первого уравнения (5.13). Разрешая уравнение (5.14) относительно y, получаем

$$y = F_2(x, C_2), \qquad \xi_2(x, F_2(x, C_2)) = C_2 \tag{5.15}$$

Подставляя (5.15) во второе уравнение (5.13), можно проинтегрировать его в виде

$$\xi_1 = \rho_0 \left[C_1(t, C_2) + \int\limits_{-L}^{x} \frac{dx}{\xi_{2,2}(x, F_2(x, C_2))} \right]_{C_2 = \xi_2(x,y)} \tag{5.16}$$

где C_1 есть произвольная функция аргументов (t, C_2). Здесь $x = -L$ есть поверхность втекания $\mathcal{S}_{\text{in}}$, где заданы условия втекания. Поверхность втекания расположена в жидкости, и все динамические уравнения должны выполняться на $\mathcal{S}_{\text{in}}$.

Дифференцируя второе уравнение (5.15) по C_2, получаем

$$\xi_{2,2}\left(x, F_2\left(x, C_2\right)\right) F_{2;2}\left(x, C_2\right) = 1 \tag{5.17}$$

Здесь и далее символ ';' означает дифференцирование по одному из аргументов функции. Индекс после символа ';' означает порядковый номер аргумента. С помощью (5.17) интеграл в (5.16) может быть записан в виде

$$\int\limits_{-L}^{x} \frac{dx}{\xi_{2,2}\left(x, F_2\left(x, C_2\right)\right)} = \frac{\partial}{\partial C_2} \int\limits_{-L}^{x} F_2\left(x, C_2\right) dx \tag{5.18}$$

Соотношение (5.16) принимает вид

$$\xi_1 = \rho_0 \left[C_1\left(t, C_2\right) + \frac{\partial}{\partial C_2} \int\limits_{-L}^{x} F_2\left(x, C_2\right) dx \right]_{C_2=\xi_2(x,y)} \tag{5.19}$$

Дифференцируя (5.16), получаем

$$\xi_{1,0} = \rho_0 \left[\frac{\partial C_1\left(t, C_2\right)}{\partial t} \right]_{C_2=\xi_2(x,y)} = \rho_0 C_{1;1}\left(t, \xi_2\right) \tag{5.20}$$

В соответствии с (5.10) и (5.6) получаем

$$j^1 = -\frac{\partial\left(\xi_1, \xi_2\right)}{\partial\left(x^0, x^2\right)} = -\xi_{1,0}\xi_{2,2}, \qquad j^2 = \frac{\partial\left(\xi_1, \xi_2\right)}{\partial\left(x^0, x^1\right)} = \xi_{1,0}\xi_{2,1} \tag{5.21}$$

и уравнения (5.4) принимают вид

$$u = v^1 = -\frac{\xi_{1,0}\xi_{2,2}}{\rho_0} = \partial_1\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\xi_{\alpha,1} \tag{5.22}$$

$$v = v^2 = \frac{\xi_{1,0}\xi_{2,1}}{\rho_0} = \partial_2\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\xi_{\alpha,2} \tag{5.23}$$

Условие совместности уравнений (5.22) и (5.23) имеет вид

$$-\partial_2 \frac{\xi_{1,0}\xi_{2,2}}{\rho_0} - \partial_1 \frac{\xi_{1,0}\xi_{2,1}}{\rho_0} = \left(g^{\alpha,\beta}(\boldsymbol{\xi}) - g^{\beta,\alpha}(\boldsymbol{\xi})\right)\xi_{\alpha,1}\xi_{\beta,2}, \qquad g^{\alpha,\beta} \equiv \frac{\partial g^\alpha}{\partial \xi_\beta} \tag{5.24}$$

Подставляя (5.20) и используя обозначение (3.25), получаем

$$\left(\psi_{,11} + \psi_{,22}\right) = -\rho_0\Omega^{12}(\xi_1, \xi_2), \tag{5.25}$$

где функция тока ψ определяется соотношением

$$\psi = C_0\left(t, \xi_2\right) = \int C_{1;1}\left(t, \xi_2\right) d\xi_2 \tag{5.26}$$

Соотношение (5.26) выбрано таким образом, что уравнения (5.22), (5.23) совпадают с (1.4). Разрешим уравнение (5.26) относительно ξ_2 в виде $\xi_2 = Q(t,\psi)$, где $Q(t,\psi)$ есть функция обратная к $C_0(t,\xi_2)$

$$C_0(t, Q(t,\psi)) = \psi \tag{5.27}$$

Подставляя ξ_2 в (5.16), мы получим потенциалы Клебша ξ_1 и ξ_2, выраженные через ψ с помощью соотношений

$$\xi_2 = Q(t,\psi), \qquad \xi_1 = \xi_1(t,x,\psi) = \rho_0 \left[C_1(t, C_2) + \frac{\partial}{\partial C_2} \int\limits_{-L}^{x} F_2(x, C_2)\, dx \right]_{C_2 = Q(t,\psi)} \tag{5.28}$$

В соответствии с (5.21), (5.20) и (5.26) получаем

$$j^1 = -\rho_0 \psi_{,2}, \qquad j^2 = \rho_0 \psi_{,1} \tag{5.29}$$

Динамическое уравнение (5.25) для функции тока ψ есть дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа. Оно содержит неопределенные функции $\Omega^{12}(\xi_1,\xi_2)$, $C_0(t,\xi_2)$, которые определяются из условий втекания. Время t появляется в этом уравнении только как параметр, описывающий эволюцию потенциала Клебша ξ_1. Динамическое уравнение (5.25) применимо для произвольного двумерного течения идеальной несжимаемой жидкости.

Замечание. Уравнение (5.25) может быть получено прямым интегрированием уравнений Эйлера для двумерного течения несжимаемой жидкости. В самом деле, исключая давление из уравнений (4.10), получаем

$$u_{,1} + v_{,2} = 0, \qquad \partial_2(u_{,0} + uu_{,1} + vu_2) = \partial_1(v_{,0} + uv_{,1} + vv_{,2}) \tag{5.30}$$

где u и v суть составляющие скорости вдоль оси x-ов и оси y-ов соответственно. Вводя функцию тока ψ

$$u = -\psi_{,2}, \qquad v = \psi_{,1} \tag{5.31}$$

мы удовлетворяем первому уравнению (5.30) тождественно. Второе уравнение (5.30) принимает вид

$$\partial_0 \omega - \frac{\partial(\omega,\psi)}{\partial(x,y)} = 0, \qquad \omega \equiv \psi_{,11} + \psi_{,22} \tag{5.32}$$

В стационарном случае результат интегрирования рассмотрен во введении.

В случае произвольного течения уравнение (5.32) приводится к виду

$$\frac{d\omega}{dt} = \partial_0\omega + u\partial_1\omega + v\partial_2\omega = 0 \tag{5.33}$$

Решение уравнения (5.33) может быть представлено в виде

$$\omega = \psi_{,11} + \psi_{,22} = \Omega(\xi_1,\xi_2) \tag{5.34}$$

где ξ_1 и ξ_2 суть два независимых решения уравнения (5.33), т.е. ξ_1 и ξ_2 суть потенциалы Клебша, удовлетворяющие уравнениям (1.10). Таким образом, проблема интегрирования системы уравнений Эйлера оказывается связанной с рассмотрением условий Лина. Утверждение, что можно исследовать движение жидкости, рассматривая только систему уравнений Эйлера и полностью игнорируя условия Лина, есть только иллюзия. На самом деле, условия Лина спрятаны внутри системы уравнений Эйлера и проявляются после интегрирования.

В простейшем случае, когда все частицы пересекают границу, функция $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ определяется из условий втекания на границе рассматриваемого течения. Если течение жидкости содержит частицы, которые все время движутся внутри рассматриваемого объема и не пересекают его границу, то функция $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ задается для этих частиц также, хотя их выражение через граничные условия невозможно. Здесь мы рассматриваем только простейший случай завихренного движения, когда нет замкнутых линий тока. Случай с замкнутыми линиями тока завихренного течения внутри потенциального течения рассматривается в работе [20]. В этой работе функция $\Omega(\xi_2) = f(\psi)$ задается на замкнутых линиях тока без ссылки на граничные условия.

В рассматриваемом случае динамическое уравнение (5.34) оказывается содержащим информацию о граничных условиях. Это означает, что для завихренного течения раздельное исследование динамических уравнений и граничных условий становится невозможным. Появление нескольких неопределенных функций от ψ в динамических уравнениях типа (1.5) для завихренных стационарных течений хорошо известно (см. например, обзор [3]). К сожалению, иногда отсутствует исследование причины появления этих функций.

Получая основное уравнение (5.25), мы использовали свойства потенциалов Клебша, описываемые уравнениями (5.4). Эти соотношения содержат неопределенные функции $g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$, которые описывают влияние граничных условий на вид динамических уравнений. Неопределенные функции $g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ описывают общие свойства идеальной жидкости, которые могут быть использованы не только для исследования несжимаемой жидкости. Информация, содержащаяся в трех функциях $g^{a}(\boldsymbol{\xi})$ от трех аргументов ξ_1, ξ_2, ξ_3 много больше, чем информация содержащаяся в одной функции $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ от двух аргументов. Возможно, что не вся эта информация существенна, но некоторая часть этой информации несомненно существенна. По этой причине мы исследуем динамические уравнения (4.4) –(4.6), а не систему уравнений Эйлера (5.30), которая содержит эту информацию в неявной форме.

Последний краткий вывод (5.30) – (5.34) соотношения (5.34) игнорирует общие соотношения (5.3), (5.4), однако, в конце концов он приводит к (5.34), т.е. к описанию в терминах потенциалов Клебша.

6 Условия втекания для стационарного течения

Предположим, что условия стационарного втекания заданы на плоскости $\mathcal{S}_{\text{in}}$: $x=-L=$const. В стационарном случае функция тока ψ не зависит от времени t. Можно положить в (5.25) $C_0(t,\xi_2)=C_0(\xi_2)$. На поверхности втекания мы выберем функцию ξ_2 в виде

$$\xi_2(-L,y)=y \tag{6.1}$$

В соответствии с (5.21), (5.20) условия втекания имеют вид

$$u(-L,y) = -C_{1;1}(-L,y)=V_x(y) \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(-L,y) = \frac{1}{\rho_0}\left[\partial_1\left(\xi_{1,0}(t,y)\,\xi_{2,1}(x,y)\right)\right]_{x=-L}=W(y) \tag{6.3}$$

где u и v суть составляющие скорости вдоль оси x-ов и оси y-ов соответственно. Предполагается, что $V_x(y)$ и $W(y)$ суть известные функции, определяющие условия втекания жидкости. Получаем из (6.2) и (5.26)

$$C_1(t,y)=-\int\limits_0^t V_x(y)\,dt\equiv S(y)\,t,\qquad C_0(y)=-\int V_x(y)\,dy \tag{6.4}$$

Левая часть равенства (5.24) при $x=-L$ равна

$$\frac{\partial}{\partial y}u(-L,y)-\frac{\partial v}{\partial x}(-L,y)=\frac{\partial}{\partial y}V_x(y)-W(y), \tag{6.5}$$

Тогда как правая часть равенства (5.24) при $x=-L$ равна $\rho_0\Omega^{12}(\xi_1(t,-L,y),y)$. Тогда, используя представление (5.16), получаем из (5.24), (5.28) при $x=-L$

$$\rho_0\Omega^{12}(\rho_0C_1(t,y),y)=\frac{\partial}{\partial y}V_x(y)-W(y)\equiv U(y) \tag{6.6}$$

где $U(y)$ есть известная функция переменной y. Поскольку правая часть равенства (6.6) не зависит от t, левая часть равенства (6.6) не зависит от C_1, и Ω^{12} зависит только от ξ_2

$$\Omega^{12}(\xi_1,\xi_2)=\Omega^{12}(0,\xi_2)=\frac{1}{\rho_0}U(\xi_2)=\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}V_x(\xi_2)-W(\xi_2)\right) \tag{6.7}$$

Таким образом, условия втекания (6.2), (6.3) позволяют определить неопределенные функции Ω^{12} и C_1. Интересно, что условия втекания задаются на поверхности втекания $\mathcal{S}_{\text{in}}$: $x=-L$. Задаются составляющая u скорости и производная $\partial v/\partial x$ (нормальная к $\mathcal{S}_{\text{in}}$) от составляющей v (но не сама составляющая v). Информация, доставляемая составляющей скорости v на поверхности втекания $\mathcal{S}_{\text{in}}$, оказывается недостаточной для определения неопределенных функций Ω^{12} и C_1. Производная $\partial v/\partial x$ вместе с $\partial u/\partial y$ определяют завихренность.

Как мы отмечали в конце второго раздела, производная $\partial u/\partial y$ может быть вычислена, если составляющая скорости u задана на поверхности втекания, тогда как $\partial v/\partial x$ вычислена быть не может. Для определения завихренности, нужно задать $\partial v/\partial x$ на поверхности втекания, тогда как касательная составляющая v скорости не является необходимой для определения завихренности.

Проблема стационарного обтекания
препятствия

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости внутри пространственной области V, ограниченной двумя стенками $\mathcal{S}_1 : y = -R =$const, $\mathcal{S}_2 : \; y = R$, поверхностью втекания $\mathcal{S}_{\text{in}} : \; x = -L =$const, поверхностью вытекания $\mathcal{S}_{\text{out}} : \; x = L$, и поверхностью $\mathcal{S}_{\text{ob}}$ некоторого препятствия, помещенного в окрестности начала координат. Форма препятствия определяется соотношением

$$\mathcal{S}_{\text{ob}} : \;\; \Sigma_{\text{ob}}(x, y) = 0 \tag{6.8}$$

Граничные условия формулируются следующим образом.

$$\begin{gathered} \mathcal{S}_1 : \; \psi(x, -R) = \psi_1 = \text{const}, \qquad \mathcal{S}_2 : \; \psi(x, R) = \psi_2 = \text{const} \\ \mathcal{S}_{\text{ob}} : \; \psi(x, R) = \psi_{\text{ob}} = \text{const} \end{gathered} \tag{6.9}$$

Постоянные ψ_1 и ψ_2 связаны соотношением

$$\psi_2 - \psi_1 = -\int\limits_{-R}^{R} V_x(y)\, dy \tag{6.10}$$

Условия (6.9) означают, что нормальная составляющая скорости обращается в нуль на всех стенках. Значение величины ψ_{ob} описывает циркуляцию вокруг препятствия, потому что $\psi_{\text{ob}} - \psi_1$ описывает среднее значение потока между $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_{\text{ob}}$. Например, если $\psi_{\text{ob}} = \psi_1$, то циркуляция вокруг препятствия такова, что жидкость протекает только между $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_{\text{ob}}$.

Граничные условия на поверхности втекания $\mathcal{S}_{\text{in}}$ имеют вид

$$\mathcal{S}_{\text{in}} : \; \psi(-L, y) = \psi_1 - \int\limits_{-R}^{y} V_x(y)\, dy \tag{6.11}$$

где составляющая $V_x(y)$ скорости предполагается заданной. Граничные условия на поверхности вытекания $\mathcal{S}_{\text{out}}$ имеют вид

$$\mathcal{S}_{\text{out}} : \; \psi(L, y) = \psi_{\text{out}}(y), \qquad \psi_{\text{out}}(-R) = \psi_1, \qquad \psi_{\text{out}}(R) = \psi_2 \tag{6.12}$$

где $\psi_{\text{out}}(y)$ есть некоторая заданная функция. Она описывает распределение скорости по поверхности вытекания. Чтобы понять, почему такое распределение должно быть задано и почему оно не определяется условиями втекания, представим себе, что вне объема V в непосредственной близости от поверхности вытекания $\mathcal{S}_{\text{out}}$ имеются некоторые препятствия. Распределение скорости по $\mathcal{S}_{\text{out}}$ зависит от размера, формы и расположения этих препятствий. Описание этих препятствий осуществляется с помощью $\psi_{\text{out}}(y)$.

Рассмотрим течение вокруг препятствия и перепишем динамическое уравнение (5.25) в виде

$$\mathcal{L}\psi = \Omega(\psi) \tag{6.13}$$

$$\mathcal{L}\psi = \nabla^2\psi = \psi_{,11} + \psi_{,22} \tag{6.14}$$

$$\Omega(\psi) = -\rho_0\Omega^{12}(\xi_2) = -U(\xi_2) = -U(Q(\psi)) \tag{6.15}$$

где функция U определяется как функция аргумента y с помощью соотношения (6.6)

$$U(y) = \frac{\partial}{\partial y}V_x(y) - W(y)$$

Функция $\xi_2 = Q(\psi)$ определяется как функция аргумента ψ соотношением

$$\psi = \psi_1 - \int\limits_{-R}^{Q(\psi)} V_x(y)\,dy \tag{6.16}$$

В частности, если $V_x(y) = V_0 =$const, то $\xi_2 = Q(\psi) = (\psi_1 - \psi)/V_0$.

Динамическое уравнение (6.13), вообще говоря, является нелинейным. Его решение является достаточно трудным. Однако, целью настоящей работы является не решение уравнений, а только постановка задачи обтекания, поскольку даже эта задача не решена для завихренных течений. Что касается решения уравнения (6.13), то это особая проблема, которую можно решать разными методами.

Если завихренность Ω мала, то динамическое уравнение (6.13) может быть решено с помощью метода последовательных приближений. Чтобы получить нулевое приближение $\psi_{(0)}$, рассмотрим линейное уравнение

$$\mathcal{L}\psi_{(0)} = \nabla^2\psi_{(0)} = 0 \tag{6.17}$$

с граничными условиями (6.9) – (6.12), которые для краткости запишем в виде

$$\left[\psi_{(0)}\right]_{\Sigma} = \psi_{\Sigma}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Sigma \tag{6.18}$$

где Σ есть граница рассматриваемого объема жидкости.

Пусть $G\left(\mathbf{x}|\mathbf{x}'\right)$ есть функция Грина для уравнения (6.17). Она определяется соотношениями

$$\nabla^2 G\left(\mathbf{x}|\mathbf{x}'\right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \qquad G\left(\mathbf{x}|\mathbf{x}'\right)_{x\in\Sigma} = 0 \tag{6.19}$$

Решение уравнения (6.17) дается формулой

$$\psi_{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial G\left(\mathbf{x}|\mathbf{x}'\right)}{\partial n'}\psi_{\Sigma}(x')\,dS' \tag{6.20}$$

где $\partial/\partial n'$ означает производную по x' в направлении, нормали к Σ. Решение (6.20) есть потенциальное приближение к решению уравнения (6.13) для завихренного течения.

Первое приближение задается соотношением

$$\psi_{(1)}(\mathbf{x}) = \psi_{(0)}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_V G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')\,\Omega\left(\psi_{(0)}(\mathbf{x}')\right) dV' \tag{6.21}$$

где интегрирование производится по объему V, заполненному жидкостью.

$$\psi_{(n)}(\mathbf{x}) = \psi_{(0)}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_V G(\mathbf{x}|\mathbf{x}')\,\Omega\left(\psi_{(n-1)}(\mathbf{x}')\right) dV', \qquad n = 2, 3, ... \tag{6.22}$$

Если итерационный процесс сходится, мы получаем решение проблемы завихренного стационарного обтекания препятствия. Можно надеяться, что итерационный процесс окажется эффективным, по крайней мере, для малой завихренности Ω.

7 Примеры двумерного стационарного обтекания.

Рассмотрим стационарное течение, ограниченное двумя параллельными стенками $\mathcal{S}_1:\ y=0, \quad \mathcal{S}_2:\ y=b$, и с поверхностями втекания и вытекания $\mathcal{S}_{\text{in}}:\ x=0$ и $\mathcal{S}_{\text{out}}:\ x=a$ соответственно. Чтобы получить простое и точное решение, выберем следующие граничные условия

$$\psi(x,0) = 0, \qquad \psi(x,b)=0, \tag{7.1}$$

$$\psi(0,y) = V_0\sin\frac{\pi y}{b}, \qquad \psi(a,y) = V_0\sin\frac{\pi y}{b}, \qquad V_0 = \text{const} \tag{7.2}$$

$$\psi_{,11}(0,y) = k^2 V_0\sin\frac{\pi y}{b}, \qquad k = \sqrt{\Omega + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}, \qquad \Omega = \text{const} \tag{7.3}$$

В этом случае завихренность $\Omega(\psi)$ в правой части равенства (6.13) определяется на границе $x=0$ первым соотношением (7.2) и условием (7.3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}u(0,y) - \frac{\partial}{\partial x}v(0,y) &= \psi_{,11}(0,y) + \psi_{,22}(0,y) = \left(k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right)V_0\sin\frac{\pi y}{b}\\ &= \Omega\psi(0,y)\end{aligned}$$

Это означает, что функция $\Omega(\psi)$ в правой части равенства (6.13) имеет вид $\Omega(\psi) = \Omega\psi$, Ω =const, и динамическое уравнение принимает вид линейного уравнения

$$\nabla^2\psi = \Omega\psi, \qquad \Omega = \text{const} \tag{7.4}$$

Его решение, удовлетворяющее граничным условиям (7.1), (7.2), имеет вид

$$\psi = V_0 \frac{\sinh(kx) + \sinh(k(a-x))}{\sinh(ka)} \sin\frac{\pi y}{b}, \qquad k = \sqrt{\Omega + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \tag{7.5}$$

Это решение описывает множество течений с нулевым полным потоком через поверхность втекания. Решения этого множества различаются мощностью циркуляции, которая описывается параметром Ω.

Рассмотрим стационарное слабо завихренное течение между двумя концентрическими цилиндрами радиусов a и b ($a < b$). Выберем систему координат с осью z вдоль оси цилиндра и с началом координат на оси цилиндра. Направим ось x вдоль средней скорости V_0 течения. Введем в плоскости (x, y) полярные координаты (r, φ) и поставим граничные условия для функции тока следующим образом.

$$\psi(a,\varphi) = 0, \qquad \psi(b,\varphi) = -V_0\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) b\sin\varphi, \tag{7.6}$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi(r,\varphi)}{\partial r}\right)\right]_{r=b} = \omega_1(\varphi) = \omega(\psi(b,\varphi)) = \begin{cases} \omega(\psi) & \text{если} \quad |\psi| < \psi_0 \\ 0 & \text{если} \quad |\psi| > \psi_0 \end{cases} \tag{7.7}$$

где $\omega_1(\varphi)$ есть некоторая заданная функция от φ. Предполагается, что течение является завихренным только в той части жидкости, которая протекает вблизи цилиндра. Пусть $-\psi_0$ и ψ_0

$$\psi_0 = V_0\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) Na \tag{7.8}$$

суть значения функции тока на границе между завихренной и потенциальной частями течения. Na есть поперечный размер завихренной области ($N \gg 1$). После постановки задачи мы положим $b \to \infty$. Потенциальное течение вокруг цилиндра описывается функцией тока $\psi_{(0)}$, которая задается выражением [4]

$$\psi_{(0)}(r,\varphi) = -V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) r\sin\varphi, \qquad r > a \tag{7.9}$$

где r, φ суть полярные кординаты на плоскости (x, y).

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{7.10}$$

Потенциальное течение (7.9) используется для постановки граничных условий на границе цилиндра радиуса b.

В соответствии с (6.21) и (7.6) - (7.9) получаем для первого приближения

$$\psi_{(1)}(r,\varphi) = \psi_{(0)}(r,\varphi) - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\left|\psi_{(0)}(r',\varphi')\right| < \psi_0} G(r,\varphi|r',\varphi')\,\omega\left(\psi_{(0)}(r',\varphi')\right) r'dr'd\varphi' \tag{7.11}$$

где функция ω определяется соотношением (7.7), а функция Грина $G(r,\varphi|r',\varphi')$ взята для случая $b=\infty$. Она имеет вид

$$G(r,\varphi|r',\varphi') = \ln\frac{a^2+\frac{r^2r'^2}{a^2}-2rr'\cos(\varphi-\varphi')}{r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')} \tag{7.12}$$

и интегрирование производится по области, где $\left|\psi_{(0)}(r,\varphi)\right| < \psi_0$ =const, поскольку только в этой области завихренность отлична от нуля. В соответствии с (7.8), (7.9) эта область определяется соотношением

$$\left|V_0\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)r\sin\varphi\right| < V_0 N a, \qquad r>a,\ \ b=\infty \tag{7.13}$$

где $N\gg 1$. Если

$$r<R=a\left(\frac{N}{2}+\sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2+1}\right), \tag{7.14}$$

неравенство (7.13) удовлетворяется для любого угла φ, и для $r'<R$ следует интегрировать в (7.11) по всем значениям угла φ'. Для $r'>R$ полезно ввести переменную η с помощью соотношения

$$\varphi' = \Phi(r,\eta) = \arcsin\frac{\eta}{V_0\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)r} \tag{7.15}$$

и интегрировать по η в области, где $r'>R$.

Мы получаем

$$\psi_{(1)} = \psi_{(0)} + I_1 + I_2 + I_3 \tag{7.16}$$

где

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_a^R r'dr'\int\limits_0^{2\pi} G(r,\varphi|r',\varphi')\,\omega\left(\psi_{(0)}(r',\varphi')\right)d\varphi' \tag{7.17}$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_R^\infty r'^2dr'\int\limits_{-\Phi(r',\psi_0)}^{\Phi(r',\psi_0)} \frac{G(r,\varphi|r',\Phi(r',\eta))\,\omega(-\eta)\,V_0\left(1-\frac{a^2}{r'^2}\right)d\eta}{\sqrt{V_0^2\left(1-\frac{a^2}{r'^2}\right)^2r'^2-\eta^2}} \tag{7.18}$$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_R^\infty r'^2dr'\int\limits_{\pi-\Phi(r',\psi_0)}^{\pi+\Phi(r',\psi_0)} \frac{G(r,\varphi|r',\Phi(r',\eta))\,\omega(-\eta)\,V_0\left(1-\frac{a^2}{r'^2}\right)d\eta}{\sqrt{V_0^2\left(1-\frac{a^2}{r'^2}\right)^2r'^2-\eta^2}} \tag{7.19}$$

где $\psi_0 = V_0Na$. Хотя вычисление интегралов (7.17) – (7.19) не очень просто, они дают первое приближение задачи завихренного обтекания цилиндра.

8 Заключение

Теория завихренных течений более сложна, чем теория потенциальных. Для этого есть две причины.

1. Динамические уравнения для завихренных течения почти всегда оказываются нелинейными. Их нельзя решить точно.

2. Проблема обтекания завихренными течениями до сих пор не поставлена нужным образом.

Первая проблема чисто математическая. Ее существование совершенно очевидно для всех исследователей. Вторая проблема физическая. Мне кажется, что едва ли найдутся исследователи, догадывающиеся о существовании этой проблемы. Первая проблема очень трудна. Вторая проблема не столь трудна, но она гораздо важнее первой проблемы. Почему?

Во-первых, потому, что само существование второй проблемы кажется проблематичным. Во-вторых, потенциальное течение есть специальный (вырожденный) случай завихренного течения, когда завихренность обращается в нуль. Переход от общего случая к вырожденному довольно прост. Обратный переход от вырожденного случая к общему много труднее, потому что общий случай содержит дополнительную информацию, которая отсутствует в вырожденном случае. Если мы не сможем правильно оценить эту дополнительную информацию, мы не сможем построить совершенную теорию. На практике мы игнорируем динамические уравнения (1.10) и граничные условия, необходимые для определения завихренности. В результате мы получаем несовершенную концепцию, где игнорируются некоторые степени свободы. В некоторых случаях эти скрытые степени свободы неожиданно прявляют себя, и мы пытаемся понять, что бы могли означать эти эффекты. В любом случае серьезное математическое исследование таких сложных гидродинамических проблем как турбулентность невозможно, если теория завихренных течений несовершенна.

Список литературы

[1] Clebsch, A. Über eine allgemaine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[2] Clebsch, A. Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[3] Long, R.R. Finite amplitude disturbances in the flow of inviscid rotating and stratified fluid over obstacles. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **4**, 69-92, (1972).

[4] Lamb, H. *Hydrodynamics*, New York, Dover. (1932) sec. 68.

[5] Zakharov, V.E. and Kuznetsov E.A. Hamilton formalizm for systems of the hydrodynamic type. *Sov. Sci. Rev. (Ed. by S.P.Novikov)* **91**, 1310-1340, (1986); *УФН* **167**, 1137-1167, (1997).

[6] Herivel, J.W. The derivation of the equations of motion of an ideal fluid by Hamilton's principle. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51**, 344-349, (1955).

[7] Eckart, C. Variation principles of hydrodynamics. *Phys. Fluids* **3**, 421-427, (1960).

[8] Бердичевский В.Л. *Вариационные принципы механики сплошных сред*, Наука. 1983.

[9] Salmon, R. Hamilton fluid mechanics. *Ann Rev. Fluid Mech.* **20**, 225-256, (1988).

[10] Rylov Yu.A. Integration of complete system of dynamic equations for ideal fluid. *e-print physics*/9905044.

[11] Rylov Yu.A. Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).

[12] Lin, C.C. Hydrodynamics of Helium II. *Proc. Int. Sch Phys.* Course XXI, pp. 93-146, New York, Academic, 1963.

[13] Eckart, C. The electrodynamics of material media. *Phys. Rev.* **54**, 920-923, (1938).

[14] Calkin, M.G. An action for magnetohydrodynamics. *Canad.J. Phys.***41**, 2241-2251, (1963).

[15] Bretherton, F.P. A note on Hamilton's principle for perfect fluids. *J. Fluid. Mech.* **44**, 19-31, (1970).

[16] Friedman, J.L. and Schutz, B.F. Lagrangian perturbation theory of non-relativistic fluids. *Astrophys. J.* **221**, 937-957, (1978).

[17] Salmon, R. Hamilton's principle and Ertel's theorem. *Am. Inst. Phys. Conf. Proc.* **88**, 127-135, (1982).

[18] Давыдов, Б. Вариационный принцип и канонические уравнения для идеальной жидкости, *ДАН СССР*, **69**, 165-168, (1949).

[19] Seliger, R.L. & Whitham, F.R.S. Variational principles in continuum mechanics. *Proc. Roy. Soc. London* **A305**, 1-25, (1967).

[20] Elcart A., Fornberg B. and Miller K. Some steady axisymmetric vortex flows past a sphere. *J. Fluid. Mech,* **433**, *315-328, (2001).*

[21] Morse P.M. and Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics.* McGraw-Hill Book Co. Inc. 1953, bd 1, sec. 6.3