Является ли дираковская частица полностью релятивистской?

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
119526, Москва, Проспект Вернадского, 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site:
http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm

Аннотация

Исследуется дираковская частица, т.е. динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемая свободным уравнением Дирака. Хотя обычно уравнение Дирака записывается в релятивистски ковариантной форме, динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ не является полностью релятивистской, потому что описание содержит такие абсолютные объекты как γ-матрицы γ^k, образующие матричный вектор. γ-матрицы могут быть исключены с помощью подходящей замены переменных, но вместо них появляется постоянный времениподобный вектор f^k. Вектор f^k описывает абсолютное расщепление пространства-времени на пространство и время, которое характерно для нерелятивистского описания. Чтобы исследовать степень нарушения релятивистского описания динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, рассматривается классическая дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$, полученная из $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ с помощью релятивистской динамической расквантизации. Классическая динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ оказывается составной, потому что она имеет десять степеней свободы. Шесть трансляционных степеней свободы описываются релятивистски (без ссылки на f^k), тогда как четыре внутренних степени свободы описываются нерелятивистски, потому что их описание содержит ссылку на f^k. Связывая абсолютный вектор f^k с вектором энергии-импульса для $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$, мы минимально видоизменяем классическую дираковскую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$. Вектор f^k перестает быть абсолютным, и описание модифицированной дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ становится полностью релятивистским. Решаются динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$. Сравниваются решения для $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$.

Ключевые слова: расквантизация, уравнение Дирака, релятивистская инвариантность.

1 Введение

Вопросительный знак в названии статьи кажется неуместным, потому что проблема релятивистской инвариантности уравнения Дирака была решена много лет тому назад. Уравнение Дирака было предложено Дираком как релятивистское уравнение, и его релятивистская инвариантность была доказана Дираком [1]. Уравнение Дирака исследовалось многими авторами [2] - [8], но это исследование всегда проводилось в рамках принципов квантовой механики. Доказательство релятивистской инвариантности уравнения Дирака можно найти в любом учебнике по квантовой механике. Почему же возник этот вопрос?

Дело в том, что релятивистской ковариантности динамических уравнений, вообще говоря, недостаточно для совместности с принципами теории относительности. Уравнение Дирака содержит такие специфические величины как γ-матрицы. Если произвести замену переменных, устраняющую γ-матрицы, то получится система динамических уравнений, которая не будет релятивистски ковариантной. Такой переход к восьми гидродинамическим переменным: 4-вектору $j^k = \bar{\psi}\gamma^k\psi$, $k = 0,1,2,3$, 4-псевдовектору $S^k = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^k\psi$, $k = 0,1,2,3$, скаляру φ и псевдоскаляру κ вместо восьми вещественных зависимых переменных ψ необходим, если мы хотим получить классический аналог $\mathcal{S}_{\rm Dcl}$ дираковской частицы $\mathcal{S}_{\rm D}$ [9].

Дираковская частица $\mathcal{S}_{\rm D}$ есть динамическая система, описываемая действием

$$\mathcal{S}_{\rm D}: \qquad \mathcal{A}_{\rm D}[\bar{\psi},\psi] = \int(-m\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi - \frac{i}{2}\hbar\partial_l\bar{\psi}\gamma^l\psi)d^4x \tag{1.1}$$

Здесь ψ есть четырехкомпонентная комплексная волновая функция, ψ^* есть эрмитово сопряженная волновая функция, и $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0$ является сопряженной волновой функцией. γ^i, $i = 0,1,2,3$ суть 4×4 постоянные комплексные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma^l\gamma^k + \gamma^k\gamma^l = 2g^{kl}I, \qquad k,l = 0,1,2,3. \tag{1.2}$$

где I есть единичная 4×4 матрица, и g^{kl} =diag$(c^{-2},-1,-1,-1)$ есть метрический тензор. Рассматривая динамическую систему $\mathcal{S}_{\rm D}$, мы для простоты выбрали такие единицы измерения, где скорость света $c = 1$. Действие (1.1) порождает динамическое уравнение

$$i\hbar\gamma^l\partial_l\psi - m\psi = 0 \tag{1.3}$$

и выражения для физических величин: 4-вектора тока j^k частиц и тензора энергии-импульса T_l^k

$$j^k = \bar{\psi}\gamma^k\psi, \qquad T_l^k = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^k\partial_l\psi - \partial_l\bar{\psi}\cdot\gamma^k\psi\right) \tag{1.4}$$

Динамическое уравнение (1.3) известно как уравнение Дирака.

Подчеркнем, что 4-ток j^k, так же как и тензор энергии-импульса T_l^k являются атрибутами дираковской частицы $\mathcal{S}_{\rm D}$. В частности, это означает, что изменяя выражение (1.4) для 4-тока j^k, мы изменяем динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, если даже динамическое уравнение (1.3) не изменяется.

Классическая дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ (классический аналог дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$)) представляет собой дискретную динамическую систему, т.е. динамическую систему, имеющую конечное число (10) степеней свободы. Действие и динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ получаются в результате динамической расквантизации динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ [9]. По определению, процедура динамической расквантизации означает замену

$$\partial^l \to \partial_{||}^l = \frac{j^l j^k}{j^s j_s}\partial_k, \qquad l = 0, 1, 2, 3, \qquad \partial^k \equiv g^{kl}\partial_l \equiv g^{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}, \qquad j_l \equiv g_{lk}j^k \quad (1.5)$$

в действии (1.1) и, следовательно, в динамическом уравнении (1.3).

После такой замены система дифференциальных уравнений в частных производных (1.3) становится эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, потому что все динамические уравнения содержат производные только в направлении вектора j^k. Векторное поле j^k в пространстве-времени определяет множество мировых линий $\mathcal{L}$, касательных к j^k. После динамической расквантизации (1.5) динамические уравнения содержат только производные вдоль $\mathcal{L}$. Это означает, что задавая значения зависимых переменных в некоторой точке мировой линии $\mathcal{L}_1$, можно определить значения зависимых переменных во всех точках мировой линии $\mathcal{L}_1$ независимо от других мировых линий $\mathcal{L}$. Таким образом, после динамической расквантизации динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ превращается в динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{Dqu}}$, описывающую статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}\right]$ классических динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$.

Динамическая расквантизация обладает следующими свойствами:

1. Динамическая расквантизация полностью определяется динамической системой $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$.

2. Динамическая расквантизация имеет результатом единственную динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$.

3. Динамическая расквантизация является релятивистски ковариантной процедурой.

Из двух последних свойств следует, что если динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ является нерелятивистской, то динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ не может быть релятивистской.

Вообще говоря, используя первое уравнение (1.4), можно было бы применить процедуру (1.5) прямо к (1.3). Однако, полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i\hbar\left(\bar{\psi}\gamma_l\psi\right)\left(\bar{\psi}\gamma^k\psi\right)\gamma^l\partial_k\psi - m\left(\bar{\psi}\gamma_k\psi\right)\left(\bar{\psi}\gamma^k\psi\right)\psi = 0$$

слишком сложна для исследования из-за ее нелинейности. Описание в терминах волновой функции эффективно, если только динамические уравнения линейны в терминах волновой функции. В случае нелинейных динамических уравнений более эффективно введение динамических переменных, физический смысл которых ясен.

Исследование динамической системы $\mathcal{S}_{\rm Dcl}$ вместо $\mathcal{S}_{\rm D}$ полезно, потому что $\mathcal{S}_{\rm Dcl}$ имеет конечное число степеней свободы. Может оказаться, что некоторые степени свободы описывается релятивистски, тогда как другие степени свободы описываются нерелятивистски.

2 Преобразование переменных

Состояние динамической системы $\mathcal{S}_{\rm D}$ описывается восемью вещественными динамическими переменными (восемь вещественных компонентов четырехкомпонентной вещественной волновой функции ψ). При преобразовании действия (1.1), использовался математический формализм [11, 12], где волновая функция ψ рассматривается как функция гиперкомплексных чисел γ и координат x. В этом случае динамические величины получаются при свертывании выражений $\psi^*O\psi$ с делителями нуля. Этот формализм позволяет работать с γ-матрицами, не фиксируя их представления.

Используя обозначения

$$\gamma_5=\gamma^{0123}\equiv\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\}=\{-i\gamma^2\gamma^3,-i\gamma^3\gamma^1,-i\gamma^1\gamma^2\} \tag{2.2}$$

сделаем замену переменных

$$\psi=Ae^{i\varphi+\frac{1}{2}\gamma_5\kappa}\exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\Pi \tag{2.3}$$

$$\bar{\psi}=\psi^*\gamma^0$$

$$\psi^*=A\Pi\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}\right)e^{-i\varphi-\frac{1}{2}\gamma_5\kappa} \tag{2.4}$$

где (*) означает эрмитово сопряжение, и

$$\Pi=\frac{1}{4}(1+\gamma^0)(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}),\qquad \mathbf{z}=\{z^\alpha\}=\text{const},\qquad \alpha=1,2,3;\qquad \mathbf{z}^2=1 \tag{2.5}$$

есть делитель нуля. Величины A, κ, φ, $\boldsymbol{\eta}=\{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n}=\{n^\alpha\}$, $\alpha=1,2,3$, $\mathbf{n}^2=1$ суть восемь вещественных параметров, определяющих волновую функцию ψ. Эти параметры можно рассматривать как новые зависимые переменные, описывающие состояние динамической системы $\mathcal{S}_{\rm D}$. Величина φ является скаляром, а κ – псевдоскаляром. Шесть остальных величин A, $\boldsymbol{\eta}=\{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n}=\{n^\alpha\}$,

$\alpha = 1,2,3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ могут быть выражены через 4-вектор тока $j^l = \bar{\psi}\gamma^l\psi$ и 4-псевдовектор спина

$$S^l = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^l\psi, \qquad l = 0,1,2,3 \tag{2.6}$$

Из-за двух тождеств

$$S^l S_l \equiv -j^l j_l, \qquad j^l S_l \equiv 0. \tag{2.7}$$

имеется только шесть независимых составляющих среди восьми компонентов величин j^l, и S^l.

После преобразования получаем (см. детали в [9])

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{D}}[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{L}d^4x, \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{cl}} + \mathcal{L}_{\mathrm{q1}} + \mathcal{L}_{\mathrm{q2}} \tag{2.8}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}} = -m\rho - \hbar j^i\partial_i\varphi - \frac{\hbar j^l}{2\,(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\partial_l\xi^\beta z^\gamma, \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{2.9}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q1}} = 2m\rho\sin^2(\frac{\kappa}{2}) - \frac{\hbar}{2}S^l\partial_l\kappa, \tag{2.10}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q2}} = \frac{\hbar(\rho+j_0)}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial^\alpha\frac{j^\beta}{(j^0+\rho)}\xi^\gamma - \frac{\hbar}{2(\rho+j_0)}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\partial^0 j^\beta\right)j^\alpha\xi^\gamma \tag{2.11}$$

Здесь и далее производится суммирование по повторяющимся греческим индексам от 1 до 3, а по повторяющимся латинским индексам от 0 до 3. Лагранжиан есть функция от 4-вектора j^l, скаляра φ, псевдоскаляра κ, и единичного псевдовектора $\boldsymbol{\xi}$, который связан с 4-псевдовектором спина S^l с помощью соотношений

$$\xi^\alpha = \rho^{-1}\left(S^\alpha - \frac{j^\alpha S^0}{(j^0+\rho)}\right), \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{2.12}$$

$$S^0 = \mathbf{j}\boldsymbol{\xi}, \qquad S^\alpha = \rho\xi^\alpha + \frac{(\mathbf{j}\boldsymbol{\xi})j^\alpha}{\rho+j^0}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{2.13}$$

Единичный 3-псевдовектор $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ связан с 3-вектором $\mathbf{n} = \{n_1,n_2,n_3,\}$ в (2.3), (2.4) при помощи соотношения

$$\boldsymbol{\xi} = 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{z}) - \mathbf{z} \tag{2.14}$$

Как можно увидеть из (2.9) – (2.11), только два первых члена в (2.9) и два члена в (2.10) записаны в релятивистски ковариантной форме. Они инвариантны. Другие члены записаны в нековариантном виде. Нековариантный член в (2.9) содержит трехмерный псевдотензор Леви-Чивита $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Он может рассматриваться как пространственные составляющие четырехмерного псевдотензора Леви-Чивита ε_{iklm} $(\varepsilon_{0123} = 1)$, свернутого с постоянным времениподобным единичным вектором $f^l = \{1,0,0,0\}$. Тогда отличны от нуля только пространственные составляющие псевдотензора $\varepsilon_{iklm}f^m$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma m}f^m, \qquad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3 \tag{2.15}$$

и можно подставить соотношение (2.15) в выражение (2.9).

Чтобы записать выражение (2.11) в релятивистски инвариантной форме, также введем постоянный 4-вектор f^l

$$f^i = \{1, 0, 0, 0\} \tag{2.16}$$

и примем во внимание, что трехмерный псевдотензор Леви-Чивита $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ может рассматриваться как составляющая $\varepsilon_{0\alpha\beta\gamma}$ четырехмерного псевдотензора Леви-Чивита ε_{iklm}. Легко проверить, что выражение (2.11) может быть записано в виде

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q}2} = \frac{\hbar}{2}\varepsilon_{ikl\gamma}\left(j^i + f^i\rho\right)\partial^k \frac{j^l + f^l\rho}{(j^s f_s + \rho)}\xi^\gamma \tag{2.17}$$

где суммирование по латинским индексам производится $(0-3)$, а по греческим – $(1-3)$.

Запишем соотношения (2.12), (2.13) в ковариантном виде. Будем рассматривать 3-псевдовектор $\boldsymbol{\xi} = \{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ как пространственные составляющие 4-псевдовектора $\xi^k = \{\xi^0, \boldsymbol{\xi}\} = \{\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3\}$. Тогда соотношения (2.12), (2.13) принимают вид

$$\xi^k = \rho^{-1}\left(S^k - \frac{j^k S^l f_l}{(j^s f_s + \rho)}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3; \tag{2.18}$$

$$\xi^k \xi_k = \left(\frac{S^l f_l}{(j^s f_s + \rho)}\right)^2 - 1$$

$$S^k = \xi^k \rho + j^k (\xi^s f_s), \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{2.19}$$

Введем четырехкомпонентную величину

$$\nu^k = \xi^k - f^k (\xi^s f_s), \qquad k = 0, 1, 2, 3; \qquad \nu^l \nu_l = -1 \tag{2.20}$$

В системе координат, где записано выражение (2.17) и где вектор f^k имеет вид (2.16), получаем $\nu^0 = 0$, $\nu^\alpha = \xi^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. Соотношение (2.17) может быть записано в ковариантном виде

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q}2} = \hbar\rho\varepsilon_{iklm} q^i \left(\partial^k q^l\right)\nu^m \tag{2.21}$$

где q^k есть единичный 4-вектор

$$q^k = \frac{j^k + f^k\rho}{\sqrt{2\rho\,(j^s f_s + \rho)}}, \qquad q^k q_k = 1 \tag{2.22}$$

Аналогично, можно записать в ковариантной форме выражение (2.9). Вводя единичный постоянный пространственноподобный 4-псевдовектор

$$z^k = \{0, \mathbf{z}\} = \left(0, z^1, z^2, z^3\right), \qquad z^k z_k = -1, \qquad \boldsymbol{\xi}\mathbf{z} = -\xi_l z^l \tag{2.23}$$

где 3-псевдовектор $\mathbf{z}$ определен соотношением (2.5), запишем последний член выражения (2.9) в виде

$$-\frac{\hbar j^l}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\partial_l\xi^\beta z^\gamma=-\hbar j^s\varepsilon_{iklm}\frac{\xi^i}{\sqrt{2\left(1-\xi_s z^s\right)}}\partial_s\frac{\xi^k}{\sqrt{2\left(1-\xi_s z^s\right)}}z^l f^m \tag{2.24}$$

Множитель $\left[2\left(1-\xi^s z_s\right)\right]^{-1/2}$ введен под знак производной, потому что дифференцирование его дает 0 из-за обращающегося в нуль множителя $\varepsilon_{iklm}\xi^i\xi^k z^l f^m=0$.

Наконец, вводя 4-псевдовектор

$$\mu^i\equiv\frac{\nu^i}{\sqrt{-(\nu^l+z^l)(\nu_l+z_l)}}=\frac{\nu^i}{\sqrt{2(1-\nu^l z_l)}}=\frac{\nu^i}{\sqrt{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}}. \tag{2.25}$$

перепишем последний член выражения (2.9) в виде

$$-\frac{\hbar j^l}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\partial_l\xi^\beta z^\gamma=\hbar j^s\varepsilon_{iklm}\mu^i\partial_s\mu^k z^l f^m \tag{2.26}$$

Теперь мы можем записать действие (2.8) в ковариантном виде

$$\mathcal{S}_{\rm D}:\qquad \mathcal{A}_{\rm D}[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}]=\int\mathcal{L}d^4x,\qquad \mathcal{L}=\mathcal{L}_{\rm cl}+\mathcal{L}_{\rm q1}+\mathcal{L}_{\rm q2} \tag{2.27}$$

$$\mathcal{L}_{\rm cl}=-m\rho-\hbar j^i\partial_i\varphi+\hbar j^s\varepsilon_{iklm}\mu^i\partial_s\mu^k z^l f^m,\qquad \rho\equiv\sqrt{j^l j_l} \tag{2.28}$$

$$\mathcal{L}_{\rm q1}=2m\rho\sin^2(\frac{\kappa}{2})-\frac{\hbar}{2}S^l\partial_l\kappa, \tag{2.29}$$

$$\mathcal{L}_{\rm q2}=\hbar\rho\varepsilon_{iklm}q^i(\partial^k q^l)\nu^m \tag{2.30}$$

где φ есть скаляр, κ является псевдоскаляром, величины j^k, q^k,f^k суть 4-векторы, а величины S^k, μ^k, ν^k, z^k – 4-псевдовекторы. 4-вектор S^k выражается через переменные j^k и ξ^k с помощью соотношений (2.19). 4-псевдовектор ξ^k содержит только два независимых компонента, потому что он удовлетворяет соотношениям

$$\xi^k\xi_k=\left(\xi^s f_s\right)^2-1,\qquad \left(j_k\xi^k\right)+\left(\xi^s f_s\right)\rho=0 \tag{2.31}$$

которые обеспечивают выполнение соотношений (2.7).

3 Релятивистская инвариантность

Принято считать, что возможность записи динамических уравнений в релятивистски ковариантном виде автоматически означает релятивистский характер динамической системы, описываемой этими уравнениями. Вообще говоря, это верно лишь в том случае, если динамические уравнения не содержат абсолютных объектов, или абсолютные объекты, содержащиеся в динамических уравнениях, имеют группу Пуанкаре в качестве своей группы симметрии [10]. Под абсолютным объектом понимается одна или несколько величин, остающихся одними и теми же при всех состояниях динамической системы, т.е. при всех решениях динамических уравнений [10]. Примером абсолютного объекта является заданное внешнее поле или метрический тензор g_{ik} в случае, когда он задается, а не определяется из уравнений тяготения. В случае динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемой уравнением Дирака, абсолютным объектом являются дираковские γ-матрицы.

Андерсон [10] детально исследовал роль абсолютных объектов в симметрии динамических систем. Он пришел к следующему заключению. Если динамическая система описывается динамическими уравнениями, записанными в ковариантной форме, то группа симметрии этой динамической системы определяется группой симметрии ее абсолютных объектов. Здесь мы подкрепим этот результат простым примером, записав динамические уравнения заведомо нерелятивистской системы в релятивистски ковариантной форме.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений Максвелла для тензора электромагнитного поля F^{ik} в некоторой инерциальной системе координат x

$$\partial_k F^{ik} = 4\pi J^i, \qquad \varepsilon_{iklm} g^{ij} \partial_j F^{kl} = 0 \tag{3.1}$$

и уравнений

$$m\frac{d}{d\tau}[(l_k\dot{q}^k)^{-1}\dot{q}^i - \frac{1}{2}g^{ik}l_k(l_j\dot{q}^j)^{-2}\dot{q}^s g_{sl}\dot{q}^l] = eF^{il}(q)g_{lk}\dot{q}^k; \qquad i = 0,1,2,3 \tag{3.2}$$

$$\dot{q}^k \equiv \frac{dq^k}{d\tau} \tag{3.3}$$

где 4-вектор $q^i = q^i(\tau)$, $i = 0,1,2,3$ описывает координаты точечной частицы как функции параметра τ, а l_i есть постоянный единичный времениподобный вектор

$$g^{ik}l_i l_k = 1; \tag{3.4}$$

а скорость света $c = 1$.

Эта система уравнений релятивистски ковариантна относительно величин q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik}, т.е. она не изменяет свой вид при любом преобразвании Лоренца, сопровождаемом соответствующим преобразованием величин q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik}, где величины q^i, J^i, l_i преобразуются как 4-векторы, а величины F^{ik}, g_{ik} как 4-тензоры

Ссылка на величины q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik} означает, что все они рассматриваются как формальные зависимые переменные, когда сравнивается вид динамических уравнений, записанных в двух различных системах координат. Например, если ссылка на J^i отсутствует в формулировке релятивистской ковариантности, то это означает, что величины J^i рассматриваются как некоторые функции координат x. Если $J^i \neq 0$, то J^i и те же величины $\tilde{J}^i$ в другой системе координат суть различные функции соответственно аргументов x и $\tilde{x}$, и первое уравнение (3.1) имеет разный вид в различных системах координат. Иначе говоря, динамические уравнения (3.1)–(3.2) не являются релятивистски ковариантными относительно величин q^i, F^{ik}, l_i, g_{ik}. Таким образом, для релятивистской ковариантности важен не только закон преобразования, но и то как рассматривается каждая из величин: как формальная переменная, или как некоторая функция координат.

Следуя Андерсону [10], мы делим величины q^i, F^{ik}, J^i, l_i, g_{ik} на две части: динамические объекты (переменные) q^i, F^{ik} и абсолютные объекты J^i, l_i, g_{ik}. По определению абсолютные объекты имеют одно и то же значение для всех решений динамических уравнений, тогда как значения динамических переменных, вообще говоря, различны для разных решений. Если динамические уравнения записаны в релятивистски ковариантной форме, их группа симметрии (и совместимость с принципами теории относительности) определяется группой симметрии абсолютных объектов J^i, l_i, g_{ik}. Динамические уравнения совместимы с принципами относительности, если группа Лоренца является группой симметрии абсолютных объектов.

Пусть для простоты $J^i \equiv 0$. Группа симметрии постоянного времениподобного вектора l_i есть группа вращений в 3-мерной плоскости ортогональной 4-вектору l_i. Группа Лоренца есть группа симметрии метрического тензора $g_{ik} = \mathrm{diag}\ \{1, -1, -1, -1\}$. Таким образом, группа симметрии всех абсолютных объектов l_i, g_{ik}, $J^i \equiv 0$ есть подгруппа группы Лоренца (вращения в трехмерной плоскости, ортогональной l_i). Так как группа симметрии есть подгруппа группы Лоренца, не совпадающая с группой Лоренца, то система уравнений (3.1)–(3.2) нерелятивистская (несовместимая с принципами теории относительности).

Разумеется, совместимость с принципами теории относительности не может зависеть от того, относительно каких величин рассматривается релятивистская ковариантность уравнений. Например, рассмотрим ковариантность уравнений (3.1), (3.2) относительно величин q^i, F^{ik}, $J^i \equiv 0$. Это означает, что теперь l_i нужно рассматривать как функции x (в данном случае эти функции суть постоянные), потому что ссылка на l_i как на формальную переменную отсутствует. После преобразования к другой системе координат $\tilde{x}^i$ уравнение (3.2) принимает вид

$$m\frac{d}{d\tau}[(\tilde{l}_k\frac{d\tilde{q}^k}{d\tau})^{-1}\frac{d\tilde{q}^i}{d\tau} - \frac{1}{2}g^{ik}\tilde{l}_k(\tilde{l}_j\frac{d\tilde{q}^j}{d\tau})^{-2}\frac{d\tilde{q}^s}{d\tau}\frac{d\tilde{q}_s}{d\tau}] = e\tilde{F}^{il}(\tilde{q})g_{lk}\frac{d\tilde{q}^k}{d\tau} \qquad (3.5)$$

Здесь $\tilde{l}_i$ рассматриваются как функции $\tilde{x}$. Но $\tilde{l}_i$ суть другие функции от $\tilde{x}$, чем l_i от x (другие численные постоянные $\tilde{l}_k = l_j\partial x^j/\partial\tilde{x}^k$ вместо l_k), и уравнения (3.2) и (3.5) имеют различный вид по отношению к величинам q^i, F^{ik}, $J^i \equiv 0$. Это означает, что уравнение (3.2) не является релятивистски ковариантным относительно q^i, F^{ik}, $J^i \equiv 0$, хотя оно релятивистски ковариантно относительно q^i, F^{ik}, l_i, $J^i \equiv 0$.

Наконец, полагая $l_i = \{1, 0, 0, 0\}$, $t = q^0(\tau)$ в (3.2), получаем

$$m\frac{d^2q^\alpha}{dt^2} = eF^\alpha_{.0} + eF^\alpha_{.\beta}\frac{dq^\beta}{dt}, \qquad i = \alpha = 1, 2, 3; \tag{3.6}$$

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\frac{dq^\alpha}{dt}\frac{dq^\alpha}{dt}) = eF^\alpha_{.0}\frac{dq^\alpha}{dt}, \qquad i = 0. \tag{3.7}$$

Теперь уравнения(3.6), (3.7) не содержат абсолютный объект l_k. Легко видеть, что эти уравнения описывают нерелятивистское движение заряженной частицы в заданном электромагнитном поле F^{ik}. Тот факт, что уравнения (3.2) или (3.6) являются нерелятивистскими, связан с расщеплением пространства-времени на пространство и время, что характерно для механики Ньютона. Любая 3-плоскость, ортогональная вектору l^k, состоит из одновременных событий. Это расщепление пространства-времени описывается различными способами в уравнениях (3.2) и (3.6). Оно описывается постоянным времениподобным вектором l_k в (3.2). В уравнении (3.6) расщепление пространства-времени описывается специальным выбором системы координат, временна́я ось которой направлена вдоль вектора l^k, и все события, имеющие одну и ту же координату t одновременны абсолютно.

С физической точки зрения ньютонова концепция пространства-времени и концепция специальной теории относительности различаются числом инвариантов, описывающих пространство-время. В ньютоновой концепции пространства-времени имеются две независимые инвариантные величины: время t и расстояние $r = |\mathbf{x}|$. Эта концепция ассоциируется с описанием в терминах времени t и пространственных координат $\mathbf{x}$. Это описание известно как нековариантное описание, и (3.6), (3.7) есть пример такого описания. В релятивистской концепции пространства-времени имеется только одна инвариантная величина: пространственно-временно́й интервал $s = \sqrt{c^2t^2 - r^2}$. Релятивистская концепция пространства-времени ассоциируется с описанием в терминах 4-вектора $x^k = \{t, \mathbf{x}\}$. Это описание известно как (релятивистски) ковариантное описание.

Можно ли описывать релятивистские явления, используя нековариантное описание, ассоциирующееся с ньютоновой концепцией? Да, это возможно, и нековариантное описание релятивистских явлений часто используется. Наоборот, можно ли описывать нерелятивистские явления, используя релятивистски ковариантное описание, ассоциирующееся с релятивистской концепцией пространства-времени? Да, это возможно. Релятивистски ковариантное описание нерелятивистских явлений возможно при условии, что это описание содержит два независимых пространственно-временны́х инварианта: время t и расстояние r. Чтобы получить два инварианта: t и r из пространственно-временно́го интервала s, нужно ввести постоянный абсолютный 4-вектор l^k ($l^k l_k = 1$). Этот вектор ассоциируется с пространством-временем и позволяет построить из пространственно-временно́го интервала s два пространственно-временны́х инварианта t и r

$$t = x^k l_k, \qquad r = \sqrt{(x^k l_k)^2 - x^k x_k}, \qquad c = 1$$

Таким образом, появление абсолютного постоянного времениподобного вектора l^k в релятивистски ковариантном описании физического явления порождает подозрение, что явление является нерелятивистским (несовместимым с принципами относительности). Физическое явление будет релятивистским, если вектор l^k в данном описании окажется фиктивным. В противном случае, физическое явление будет нерелятивистским, потому что его описание содержит два пространственно-временны́х инварианта t и r. Релятивистски ковариантное описание нерелятивистских явлений практически не используется, и большинство исследователей убеждены, что любое релятивистски ковариантное описание является описанием релятивистского явления.

Рассмотренный пример показывает, что нерелятивистское уравнение (3.6) может быть записано в релятивистски ковариантном виде (3.2), если ввести абсолютный объект l_i, описывающий расщепление пространства-времени.

Матрицы Дирака γ^k суть абсолютные объекты, так же как метрический тензор g^{kl}, который может рассматриваться как абсолютный объект, определяемый соотношением (1.2). Из соотношения (1.2) следует, что γ-матрицы должны преобразовываться как 4-векторы при линейных преобразованиях пространственно-временны́х координат x, потому что правая часть равенства (1.2) является тензором при линейных преобразованиях координат x. Хотя правая часть равенства (1.2) является инвариантом при преобразованиях Лоренца, нельзя считать γ^i инвариантами, потому что γ^i не могут быть инвариантами при линейных преобразованиях координат.

Существует два подхода к уравнению Дирака. В первом из них [11, 12] волновая функция ψ рассматривается как скалярная функция, определенная над полем чисел Клиффорда γ^l

$$\psi = \psi(x,\gamma)\Gamma, \qquad \overline{\psi} = \Gamma\overline{\psi}(x,\gamma), \tag{3.8}$$

где Γ есть постоянный нильпотентный множитель (делитель нуля), обладающий свойством $\Gamma f(\gamma)\Gamma = a\Gamma$. Здесь $f(\gamma)$ – произвольная функция от γ^l и a – комплексное число, зависящее от вида функции f. При таком подходе ψ, $\bar{\psi}$ преобразуются при преобразовании Лоренца как скаляры, а γ^l преобразуются как компоненты 4-вектора. В этом случае группа симметрии для γ^l есть подгруппа группы Лоренца, и $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ является нерелятивистской системой. Тогда матричный вектор γ^l описывает предпочтительное направление в пространстве-времени.

При втором (традиционном) подходе γ^l, $\quad l = 0,1,2,3$ суть скаляры. а ψ рассматривается как спинор. В этом случае группа симметрии абсолютных объектов γ^l есть группа Лоренца, и динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ рассматривается как релятивистская динамическая система.

Разумеется, подходы, приводящие к несовместимым заключениям, не могут быть оба правильными. Один из них ошибочный. Анализируя эти два различные подхода, Зоммерфельд [12] рассматривал первый подход как более обоснованный. Во втором случае, анализ оказывается затруднительным из-за нестандартных преобразований γ^l и ψ при линейных преобразованиях T координат.

В самом деле, преобразование T для вектора $j^l = \bar{\psi}\gamma^l\psi$ имеет вид

$$\tilde{\bar{\psi}}\tilde{\gamma}^l\tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^s}\bar{\psi}\gamma^s\psi, \tag{3.9}$$

где величины помеченные тильдой означают величины в преобразованной системе координат. Это преобразование может осуществляться двумя различными путями

$$1: \qquad \tilde{\psi} = \psi, \qquad \tilde{\overline{\psi}} = \overline{\psi}, \qquad \tilde{\gamma}^l = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^s}\gamma^s \tag{3.10}$$

$$2: \qquad \tilde{\gamma}^l = \gamma^l, \qquad \tilde{\psi} = S(\gamma, T)\psi, \qquad \tilde{\overline{\psi}} = \overline{\psi}S^{-1}(\gamma, T), \tag{3.11}$$

$$S^*(\gamma, T)\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}(\gamma, T) \tag{3.12}$$

Соотношение (3.10) соответствует первому подходу, а соотношение (3.11) – второму. Оба подхода приводят к одному и тому же результату при условии, что

$$S^{-1}(\gamma, T)\gamma^l S(\gamma, T) = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^s}\gamma^s \tag{3.13}$$

В частности, для бесконечно малого преобразования Лоренца $x^i \to x^i + \delta\omega^i_{.k}x^k$ $S(\gamma, T)$ имеет вид [13]

$$S(\gamma, T) = \exp\left(\frac{\delta\omega_{ik}}{8}\left(\gamma^i\gamma^k - \gamma^k\gamma^i\right)\right) \tag{3.14}$$

Второй путь (3.11) имеет два недостатка. Во-первых, закон преобразования ψ зависит от γ, т.е. при линейных преобразованиях T координат компоненты ψ преобразуются через ψ и γ^l, а не только через ψ, как это имеет место при преобразованиях тензора, когда компоненты тензора в одной системе координат выражаются через компоненты тензора в другой системе координат, и это преобразование не содержит каких-либо абсолютных объектов. (Например, соотношение (3.9)). Во-вторых, соотношение (3.13) совместимо с соотношением (1.2) только при преобразованиях T между ортогональными системами координат, при которых компоненты $g^{lk} = \{1, -1, -1, -1\}$ метрического тензора являются инвариантными. Иными словами, при втором подходе соотношение (1.2), вообще говоря, нековариантно относительно произвольных линейных преобразований. В этом случае нельзя быть уверенным, что группа симметрии динамической системы совпадает с группой симметрии абсолютных объектов.

Тот факт, что группа симметрии динамической системы совпадает с группой симметрии абсолютных объектов был получен в предположении, что при преобразовании координат каждый объект преобразуется только через его компоненты. Это условие не соблюдено во втором случае, и поэтому нельзя быть уверенным, что симметрия динамической системы совпадает с симметрией абсолютных объектов.

После замены переменных действие (1.1) было преобразовано к виду (2.8) – (2.11), причем γ-матрицы были исключены. Однако, после приведения действия к релятивистски ковариантному виду появились два новых абсолютных объекта: постоянный 4-вектор f^i и постоянный 4-псевдовектор z^i. Далее мы увидим, что 4-псевдовектор z^i является фиктивным, но действие действительно зависит от 4-вектора f^i, который аналогичен по своим свойствам вектору l_i в рассмотренном выше примере (3.2). Это означает, что динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ является нерелятивистской, поскольку предполагается абсолютное разделение пространства-времени на пространство и время.

4 Модификация классической дираковской частицы

Не все члены в действии (2.27) – (2.30) содержат абсолютные объекты f^k и z^k. Два первых члена в (2.28) и член (2.29) не содержат абсолютных объектов. Это означает, что диракоская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ описывается частично релятивистски и частично нерелятивистски. Чтобы определить, что именно описывается релятивистски, полезно исследовать классическую дираковскую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$, которая является дискретной динамической системой, т.е. динамической системой, имеющей конечное число степеней свободы. Классическая дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ однозначно определяется дираковской частицей $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ с помощью релятивистской процедуры (1.5). Исследуя классическую дираковкую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$, можно определить, какие степени свободы описываются нерелятивистски и подправить нерелятивистское описание.

После динамической расквантизации (1.5) действия (2.8) получаем действие для классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$. Согласно расчетам работы [9] получаем

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int \left\{ -\kappa_0 m\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)} \right\} d\tau_0 \tag{4.1}$$

где координаты $x = x(\tau_0) = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{x^0, x^2, x^2, x^3\}$ классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ и ее внутренние переменные $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\tau_0) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, $\boldsymbol{\xi}^2 = 1$ рассматриваются как функции переменной τ_0. Величина $\kappa_0 = \pm 1$ получается как результат решения [9] динамического уравнения для динамической переменной κ.

Действие (4.1) может быть записано в релятивистски ковариантной форме

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\xi] = \int \{ -\kappa_0 m\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} - \hbar\frac{\varepsilon_{iklm}\xi^i\dot{\xi}^k f^l z^m}{2(1-\xi^s z_s)} + \frac{\hbar}{2}Q\varepsilon_{iklm}\dot{x}^i\ddot{x}^k f^l\xi^m \} d\tau_0 \tag{4.2}$$

$$Q = Q(\dot{x}, f) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^s \dot{x}_s}(\dot{x}^l f_l + \sqrt{\dot{x}^l \dot{x}_l})}, \qquad \dot{x}^l \equiv \frac{dx^l}{d\tau_0} \tag{4.3}$$

где 4-векторы f^k, z^k определяются соответственно соотношениями (2.16), (2.23) и

$$\xi^k = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}, \qquad \xi^l f_l = 0 \tag{4.4}$$

4-вектор z^k оказывается фиктивным (Смотри Приложение B этой работы или работы [9]). Однако, 4-вектор f^k не является фиктивным.

Действие (4.2) инвариантно относительно замены независимой переменной τ_0

$$\tau_0 \to \tilde{\tau}_0 = F(\tau_0) \tag{4.5}$$

где F есть произвольная монотонная функция. Переменная τ_0 может быть выбрана таким образом, что

$$\sqrt{\dot{x}^s \dot{x}_s} = 1 \tag{4.6}$$

для всех значений независимой переменной τ_0. Формально выражение (4.6) оказывается интегралом динамических уравнений, порожденных действием (4.2).

Первый член в (4.2) описывается релятивистски, потому что он не содержит абсолютного объекта f^k. Этот член описывает трансляционные степени свободы. Два последних члена содержат абсолютный объект f^k. Они описывают внутренние степени свободы. Описание внутренних степеней свободы оказывается нерелятивистским.

Если положить $\hbar = 0$ в действии (4.2), то внутренние степени свободы классической дираковской частиц будут подавлены, и описание динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ становится релятивистским. Классическая дираковская частица станет релятивистской, если абсолютный объект f^k заменить динамическими переменными. Например, можно отождествить времениподобный абсолютный 4-вектор f^k с постоянным вектором энергии-импульса p_k, нормировав его надлежащим образом. При такой замене классическая дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ превратится в модифицированную классическую дираковскую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$.

Чтобы осуществить эту замену, введем обозначения

$$y^l = \dot{x}^l, \qquad l = 0, 1, 2, 3 \tag{4.7}$$

и перепишем действие (4.2) в виде

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}: \quad \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x, y, \xi, p] = \int \left\{ L\left(y, \dot{y}, \xi, \dot{\xi}, f\right) - p_l\left(y^l - \dot{x}^l\right)\right\} d\tau_0 \tag{4.8}$$

где

$$L\left(y, \dot{y}, \xi, \dot{\xi}, f\right) = -\kappa_0 \sqrt{y_l y^l} - \hbar \frac{\varepsilon_{iklm} \xi^i \dot{\xi}^k f^l z^m}{2(1 - \xi^s z_s)} + \frac{\hbar}{2} Q \varepsilon_{iklm} y^i \dot{y}^k f^l \xi^m \tag{4.9}$$

$$Q = Q(y, f) = \frac{1}{\sqrt{y^s y_s}(y^l f_l + \sqrt{y^l y_l})}, \tag{4.10}$$

Переменные $p_l = p_l(\tau_0)$, $l = 0,1,2,3$ являются множителями Лагранжа, вводящими обозначения (4.7). Величины f^k and z^k не являются динамическими переменными, и они не варьируются.

Динамические уравнения, порождаемые действием (4.8) имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}}{\delta x^l} = -\dot{p}_l = 0, \qquad p_l = \mathrm{const} \tag{4.11}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}}{\delta y^l} = \frac{\partial L}{\partial y^l} - \frac{d}{d\tau_0}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^l} - p_l = 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}}{\delta \xi^l} = \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^s} - \frac{d}{d\tau_0}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^s}\right)\left(\delta_l^s - f_l f^s + \xi_l \xi^s\right) = 0 \tag{4.13}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}}{\delta p_l} = \dot{x}^l - y^l = 0 \tag{4.14}$$

Второй множитель в (4.13) учитывает то, что псевдовектор ξ^k ограничен условиями $\xi_k \xi^k = -1$, $\xi_k f^k = 0$.

Поскольку p_l =const, $l = 0,1,2,3$ в силу динамических уравнений, то можно выразить постоянный единичный вектор f_l в виде

$$f_l = \frac{\varepsilon p_l}{\sqrt{p_s p^s}} \qquad l = 0,1,2,3, \qquad \varepsilon = \mathrm{sgn} p_0 = \pm 1 \tag{4.15}$$

и подставить f_l из (4.15) в действие (4.8). Получаем

$$\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{mDcl}}[x,y,\xi,p] = \int \left\{ L\left(y,\dot{y},\xi,\dot{\xi},\frac{\varepsilon p_l}{\sqrt{p_s p^s}}\right) + p_l\left(\dot{x}^l - y^l\right)\right\} d\tau_0 \tag{4.16}$$

Действие (4.16) описывает динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$, которая отличается, вообще говоря, от динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$. Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ совместима с принципами теории относительности, тогда как динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ несовместима. В частности, это означает следующее. Пусть $\{x,y,\xi,p\}$ является решением динамических уравнений, порожденных действием (4.16) и $\left\{\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\xi},\tilde{p}\right\}$ получены из $\{x,y,\xi,p\}$ при помощи некоторого преобразования группы Лоренца. Тогда $\left\{\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\xi},\tilde{p}\right\}$ является решением тех же самых динамических уравнений. Решения динамических уравнений (4.11) – (4.14), вообще говоря, этим свойством не обладают.

Все динамические уравнения, порожденные действием (4.16) совпадают с динамическими уравнениями (4.11) – (4.14) за исключением динамического уравнения (4.14), которое теперь имеет вид

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathrm{mDcl}}}{\delta p_l} = -y^l + \dot{x}^l + \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_s p^s}}\left[\frac{\partial L\left(y,\dot{y},\xi,\dot{\xi},f\right)}{\partial f_k}\right]_{f_i = \frac{\varepsilon p_i}{\sqrt{p_s p^s}}}\left(\delta_k^l - \frac{p_k p^l}{p_s p^s}\right) = 0 \tag{4.17}$$

Запишем динамические уравнения для действия (4.16) в системе координат, где 4-вектор f_l и 4-вектор энергии-импульса p_l имеют вид

$$p_l = \{p_0, 0, 0, 0\}, \qquad f_l = \{1, 0, 0, 0\} \tag{4.18}$$

Решения для других значения канонического импульса $p_l = \tilde{p}_l$ могут быть получены из решений для $p_l = \{p_0, 0, 0, 0\}$ с помощью координатного преобразования группы Лоренца, которое преобразует $p_l = \{p_0, 0, 0, 0\}$ в $p_l = \tilde{p}_l$, $l = 0, 1, 2, 3$.

Динамические уравнения (4.11) – (4.13), порожденные действием (4.8) так же как и действием (4.16) не зависят от переменных x^l. Они могут быть решены независимо от решения уравнения (4.14), или (4.17). В работе [9] эти уравнения были решены в системе координат, где дираковская частица покоится, и вектор энергии-импульса p_l имеет вид (4.18). Для удобства читателя это решение представлено в Приложении A.

Решение (A.33) имеет вид

$$p_k = \left\{-\frac{\kappa_0 m}{\gamma}, 0, 0, 0\right\} \tag{4.19}$$

$$\zeta^l = \left\{0, z^1, z^2, z^3\right\}, \qquad \xi^l = \{0, 0, 0, \varepsilon_0\}, \qquad \varepsilon_0 = \pm 1 \tag{4.20}$$

$$y^k = y^k(\tau_0) = \left\{\gamma, \sqrt{\gamma^2 - 1}\cos\Phi, \sqrt{\gamma^2 - 1}\sin\Phi, 0\right\} \tag{4.21}$$

$$\dot{y}^k = \left\{0, -\omega\sqrt{\gamma^2 - 1}\sin\Phi, \omega\sqrt{\gamma^2 - 1}\cos\Phi, 0\right\} \tag{4.22}$$

$$\Phi = -\frac{2\varepsilon_0\kappa_0 m}{\hbar\gamma}\tau_0 + \phi, \qquad \omega = \frac{d\Phi}{d\tau_0} = -\frac{2\varepsilon_0\kappa_0 m}{\hbar\gamma} \tag{4.23}$$

где ϕ и γ ($\gamma^2 \geq 1$) – произвольные постоянные.

Подставляя соотношения (4.19) - (4.22) в уравнение (4.17), можно выразить переменные $\dot{x}^k$ как функции переменной τ_0. Полученные уравнения легко интегрируются.

Из соотношений (4.9), (4.10) получаем следующее выражение

$$\frac{\partial L}{\partial f_l} = -\hbar g^{lp}\frac{\varepsilon_{pikm}\xi^i\dot{\xi}^k z^m}{2(1 - \xi^s z_s)} + \frac{\hbar}{2}g^{lp}\frac{\varepsilon_{pikm}y^i\dot{y}^k\xi^m}{\sqrt{y^s y_s}(y^s f_s + \sqrt{y^l y_l})} - \frac{\hbar}{2}\frac{y^l\varepsilon_{iksm}y^i\dot{y}^k f^s\xi^m}{\sqrt{y^s y_s}(y^s f_s + \sqrt{y^l y_l})^2} \tag{4.24}$$

Действие (4.16) так же как и первоначальное действие (4.8) инвариантно относительно преобразования независимой переменной τ_0

$$\tau_0 \to \tilde{\tau}_0 = F(\tau_0) \qquad y^l \to \tilde{y}^l = y^l\left(\frac{dF(\tau_0)}{d\tau_0}\right)^{-1}, \qquad \xi^l \to \xi^l, \qquad p_l \to p_l, \qquad x^l \to x^l$$

и можно выбрать независимую переменную τ_0 таким образом, чтобы

$$y_s y^s = 1 \tag{4.25}$$

Для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ условие (4.25) эквивалентно условию

$$\dot{x}_s\dot{x}^s = 1, \tag{4.26}$$

потому что в этом случае $\dot{x}^l = y^l$. Однако, для динамической системы $\mathcal{S}_{\rm mDcl}$ условия (4.25) и (4.26) не эквивалентны, потому что в этом случае, вообще говоря, $\dot{x}^l \neq y^l$, как это следует из (4.17).

При ограничениях (4.19), (4.25) дополнительный член модифицированного уравнения (4.17) имеет вид

$$\left[\frac{\partial L\left(y,\dot{y},\xi,\dot{\xi},f\right)}{\partial f_k}\right]_{f_l=\frac{\varepsilon p_l}{\sqrt{p_ip^i}}}\left(\delta_k^l-\frac{p_kp^l}{p_sp^s}\right)=\left\{\begin{array}{ll}0, & \text{если} \quad l=0\\ \frac{\varepsilon}{|p_0|}\frac{\partial L}{\partial f_\mu}, & \text{если} \quad l=\mu=1,2,3\end{array}\right. \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial f_\mu} &= -\frac{\hbar}{2}\frac{\varepsilon_{\mu 0\alpha\beta}y^0\dot{y}^\alpha\xi^\beta}{(y^0+1)}+\frac{\hbar}{2}\frac{\varepsilon_{\mu 0\alpha\beta}\dot{y}^0y^\alpha\xi^\beta}{(y^0+1)}-\frac{\hbar}{2}\frac{y^\mu\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}y^\alpha\dot{y}^\beta\xi^\gamma}{(y^0+1))^2}\\ &= \frac{\hbar}{2(y^0+1)}\left(-\varepsilon_{\mu\alpha\beta}y^0\dot{y}^\alpha\xi^\beta+\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\dot{y}^0y^\alpha\xi^\beta+\frac{y^\mu\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}y^\alpha\dot{y}^\beta\xi^\gamma}{(y^0+1)}\right), \\ \mu &= 1,2,3\end{aligned} \tag{4.28}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть псевдотензор Леви-Чивита для трехмерного пространства. Подставим (4.27), (4.28) в динамическое уравнение (4.17). Получаем после выкладок

$$\dot{x}^0=\gamma,\qquad \dot{x}^1=\gamma\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\cos\Phi,\qquad \dot{x}^2=\gamma\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\sin\Phi,\qquad \dot{x}^3=0 \tag{4.29}$$

где Φ определяется соотношением (4.23).

Вместо (4.26) получаем

$$\dot{x}^l\dot{x}_l=\gamma^2-\left(\gamma^2-1\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^2=2\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \tag{4.30}$$

Пусть теперь $t=x^0$ будет независимой переменной вместо τ_0. Тогда уравнения (4.29) преобразуются в

$$\frac{dx^k}{dt}=\left\{1,\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\cos\Phi,-\varepsilon_0\kappa_0\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\sin\Phi,0\right\} \tag{4.31}$$

где

$$\Phi=\Omega t-\varepsilon_0\kappa_0\phi,\qquad \Omega=\frac{2m}{\hbar\gamma^2} \tag{4.32}$$

Интегрирование уравнений (4.31) приводит к соотношениям

$$x^k=\left\{t,\frac{\hbar\gamma^2}{2m}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\sin\Phi,\frac{\hbar\varepsilon_0\kappa_0\gamma^2}{2m}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\cos\Phi,0\right\} \tag{4.33}$$

которые описывают мировую линию модифицированной классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\rm mDcl}$. Полная масса $M_{\rm mDcl}$ модифицированной частицы $\mathcal{S}_{\rm mDcl}$ описывается соотношением

$$M_{\rm mDcl}=\sqrt{p_0^2-\mathbf{p}^2}=|p_0|=\frac{m}{\gamma},\qquad \gamma\geq 1 \tag{4.34}$$

Мировая линия частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ является спиралью с радиусом

$$a_{\mathrm{mDcl}} = \frac{\hbar\gamma^2}{2m}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tag{4.35}$$

Постоянная $\gamma \geq 1$ описывает интенсивность возбуждения внутренних степеней свободы.

Для классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ с нерелятивистским описанием внутренних степеней свободы соотношения (4.33) - (4.35) имеют другой вид [9]

$$x^k_{\mathrm{Dcl}} = \left\{t, \frac{\hbar\gamma}{2m}\sqrt{\gamma^2-1}\sin\left(\Omega_{\mathrm{Dcl}}t\right), \frac{\hbar\gamma}{2m}\sqrt{\gamma^2-1}\cos\left(\Omega_{\mathrm{Dcl}}t\right), 0\right\} \tag{4.36}$$

$$M = M_{\mathrm{Dcl}} = M_{\mathrm{mDcl}} = \frac{m}{\gamma}, \qquad \Omega = \Omega_{\mathrm{Dcl}} = \Omega_{\mathrm{mDcl}} = \frac{2m}{\hbar\gamma^2}, \qquad a_{\mathrm{Dcl}} = \frac{\hbar\gamma}{2m}\sqrt{\gamma^2-1} \tag{4.37}$$

Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ различаются только радиусом a спирали

$$a_{\mathrm{mDcl}} = \frac{\gamma}{\gamma+1}a_{\mathrm{Dcl}} = \frac{\hbar\gamma^2}{2m}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tag{4.38}$$

Отношение между a_{mDcl} и a_{Dcl} максимально в случае слабого возбуждения, когда $\gamma = 1$, тогда как разность

$$a_{\mathrm{Dcl}} - a_{\mathrm{mDcl}} = \frac{\hbar}{2m}\gamma\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tag{4.39}$$

имеет минимум при $\gamma = 1$ и не имеет максимума.

Интерпретация модифицированной классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ таже самая, что и интерпретация частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ [9]. Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ интерпретируется как релятивистский ротатор (две связанные частицы массы m_0, вращающиеся вокруг общего центра масс). Координаты $x_{(1)}$, $x_{(2)}$ частиц ротатора в системе центра масс описываются соотношениями

$$x^k_{(1)} = \{t, a\sin(\Omega t+\phi), a\sin(\Omega t+\phi), 0\} \tag{4.40}$$

$$x^k_{(2)} = \{t, -a\sin(\Omega t+\phi), -a\sin(\Omega t+\phi), 0\} \tag{4.41}$$

где a , M и Ω суть соответственно радиус спирали ротатора, полная масса и частота, определяемая соотношениями (4.38), (4.37). Величины a, M, Ω связаны соотношением

$$M = \frac{2m_0}{\sqrt{1-a^2\Omega^2}} \tag{4.42}$$

Главной характеристикой релятивистского ротатора является функция жесткости f_{r}, описывающая жесткость связи между частицами ротатора. Она определяется соотношением

$$f_{\mathrm{r}} = f_{\mathrm{r}}(a) = \frac{M-2m_0}{2m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2\Omega^2}} - 1 \tag{4.43}$$

где f_{r} рассматривается как функция радиуса a. Задавая функцию жесткости как функцию a , мы определяем с помощью (4.43) соотношение между Ω и a. В результате получаем величины a, M, Ω как функции массы m_0, и некоторого параметра γ, описывающего состояние ротатора. Соотношения (4.37), (4.38) определяют величины a, M, Ω для модифицированной классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ как функции параметра γ, описывающего состояние частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$, и дираковской массы m, которая является параметром частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$. Отождествление $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ с релятивистским ротатором возможно, при условии, что предполагается связь между параметром m системы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ и параметром ротатора m_0 зависит от состояния γ динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$.

Отождествляя ротатор с $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$, мы вынуждены выбирать, какая из величин m или m_0 является параметром системы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$. С физической точки зрения величина m_0 должна быть реальным параметром системы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$. При таком выборе дираковская масса m, так же как и полная масса M являются функциями состояния вращения, описываемого параметром γ, который является интегралом движения системы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$. Это будет означать, что дираковская масса m так же как и величины Ω, a, M являются интегралами движения ротатора, тогда как m_0 является параметром динамической системы. К сожалению, такое отождествление не согласуется с определением системы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ как динамической системы, описываемой действием (4.16). С другой стороны, если рассматривать дираковскую массу m как параметр системы $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ (а не как интеграл движения), то ситуация, описываемая соотношениями (4.37), такова, что полная масса $M = m/\gamma$ уменьшается, тогда как внутренняя скорость $(\gamma-1)^{1/2}(\gamma+1)^{-1/2}$ увеличивается с увеличением γ. Это означает, что масса m_0 носителя кинетической энергии уменьшается с увеличением γ.

Исключая M, Ω и a из соотношений (4.42), (4.38) и (4.37), получаем соотношение между m и m_0 для $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ и для $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}: \qquad m = \sqrt{2\gamma(\gamma+1)}m_0 \tag{4.44}$$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}: \qquad m = 2m_0\gamma^2 \tag{4.45}$$

Функция жесткости для $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ имеет вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}: \qquad f_{\mathrm{r}}(a) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4am_0}{\hbar}\right)^2}} - 1 \tag{4.46}$$

Функция жесткости $f_{\mathrm{r}}(a)$ для $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ задается неявно соотношением

$$\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}: \qquad a = \frac{\hbar}{4m_0}\frac{\left(2(f_{\mathrm{r}}+1)^2-1\right)^{3/2}}{\sqrt{2}(f_{\mathrm{r}}+1)^3}\sqrt{(f_{\mathrm{r}}+1)^2-1} \tag{4.47}$$

Чтобы сравнить функции жесткости для $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$ запишем соотношение (4.46) в виде разрешенном относительно a. Получаем

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}: \qquad a = \frac{\hbar}{4m_0}\sqrt{1-\frac{1}{(f_{\mathrm{r}}+1)^2}} \tag{4.48}$$

Сравнение (4.47) и (4.48) показывает, что обе функции жесткости близки при малых a $(0 < 4m_0a/\hbar < 0.4)$. Для больших a связь, описываемая функцией жесткости f_{r} является более жесткой для $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$, чем для $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$.

5 Обсуждение

Почти восемьдесят лет с момента своего появления уравнение Дирака служит примером наиболее полезного релятивистского динамического уравнения. С помощью этого уравнения была объяснена сверхтонкая структура атома водорода. На уравнении Дирака основывается квантовая электродинамика. Как может повлиять обнаружение внутренних степеней свободы на эти хорошо установленные результаты?

Только внутренние степени свободы дираковской частицы описываются неправильно (нерелятивистски), тогда как трансляционные степени свободы описываются правильно (релятивистски). Энергетические уровни, связанные с внутренними степенями свободы, очень высоки. Они не возбуждаются при процессах, рассматриваемых в квантовой электродинамике и в теории атомных спектров. При описании этих физических процессов можно игнорировать внутренние степени свободы дираковской частицы. Таким образом, правильное описание внутренних степеней свободы ничего не меняет в квантовой электродинамике и теории атомных спектров. Однако, в теории элементарных частиц, где имеются высоко энергетичные процессы, следует учитывать внутренние степени свободы дираковской частицы. Их следует описывать релятивистски.

Мы произвели минимальную модификацию классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$, однако, описание дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ остается частично нерелятивистским. Этот дефект также следует ликвидировать. Это можно сделать, добавляя отброшенные "квантовые" члены с поперечными производными к действию для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}\right]$ модифицированных классических дираковских частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$. Это процедура неоднозначна. Кроме того нельзя быть уверенным, что полученные динамические уравнения будут линейными в терминах волновой функции.

Начиная с 1925 года, когда было предложено уравнение Дирака, оно рассматривалось как полностью релятивистское уравнение, описывающее частицы со спином 1/2 наилучшим образом. Почему неполнота релятивизма уравнения Дирака не была обнаружена раньше? Этот вопрос очень важен для правильной оценки стратегии исследования микромира. Ответ довольно неожиданный. Нерелятивистские черты уравнения Дирака были обнаружены в 1995 [14, 15], как только дираковская частица стала исследоваться просто как динамическая система (а не как квантовая динамическая система). Квантовая динамическая система отличается от обычной динамической системы своей совместимостью с принципами квантовой механики. Квантовые принципы ограничивают способ описания динамической системы. Они требуют, чтобы динамическая система описывалась в терминах волновой функции, и динамические уравнения были бы линейны в этих терминах. Квантовые принципы допускают только линейные преобразования зависимых переменных (волновой функции).

Принципы квантовой механики накладывают ограничения на описание квантовой динамической системы и затрудняют ее исследование. Они не позволяют исключить γ-матрицы, что является необходимым для обнаружения несовместимости динамического уравнения с принципами теории относительности.

Математические приложения

Приложение A Решение динамических уравнений общих для $\mathcal{S}_{\rm Dcl}$ и $\mathcal{S}_{\rm mDcl}$

Динамические уравнения, порождаемые действием (4.8) имеют вид

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\rm Dcl}}{\delta x^l} = -\dot{p}_l = 0, \qquad p_l = \text{const} \tag{A.1}$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\rm Dcl}}{\delta y^l} = \frac{\partial L}{\partial y^l} - \frac{d}{d\tau_0}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^l} - p_l = 0, \tag{A.2}$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\rm Dcl}}{\delta \xi^l} = \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^s} - \frac{d}{d\tau_0}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^s}\right)\left(\delta_l^s + \frac{\xi_l\xi^s}{\xi_k\xi^k}\right) = 0 \tag{A.3}$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\rm Dcl}}{\delta p_l} = \dot{x}^l - y^l = 0 \tag{A.4}$$

Пусть

$$y^k = \left\{y^0, \mathbf{y}\right\}, \qquad p_k = \{p_0, \mathbf{p}\} = \{p_0, 0\}, \qquad \xi^k = \{0, \boldsymbol{\xi}\}, \qquad \boldsymbol{\xi}^2 = 1$$

Тогда для $l = 1, 2, 3$ динамическое уравнение (A.2) может быть записано в виде

$$-\kappa_0 m\mathbf{y} + \frac{\hbar Q}{2}(\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{y}}) - \frac{\hbar}{2}\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi} + \frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\tau_0}\left(Q(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{y})\right) = \mathbf{p} = 0 \tag{A.5}$$

где

$$Q = Q\left(y\right) = \left(\sqrt{y^s y_s}(\sqrt{y^s y_s} + y^0)\right)^{-1} \tag{A.6}$$

Для $l = 0$ динамические уравнения (A.2) могут быть записаны в виде

$$-\kappa_0 m\frac{y^0}{\sqrt{y^s y_s}} + \frac{\hbar}{2}\frac{\partial Q}{\partial y^0}(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi} = p_0 \tag{A.7}$$

Уравнение (A.3) имеет вид

$$-\hbar\frac{\left(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z}\right)\times\boldsymbol{\xi}}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})} + \hbar\left(-\frac{d}{d\tau_0}\frac{(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{z})}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})} - \frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})^2}\mathbf{z}\right)\times\boldsymbol{\xi} + \hbar\frac{(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\times\boldsymbol{\xi}}{2}Q = 0 \tag{A.8}$$

После преобразований это уравнение приводится к уравнению (смотри Приложение B)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\times\boldsymbol{\xi}Q \tag{A.9}$$

которое не содержит вектора $\mathbf{z}$. Это означает, что вектор $\mathbf{z}$ определяет фиктивное направление в пространстве-времени. Заметим, что переменная $\mathbf{z}$ в действии (2.8) для системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ также фиктивна, потому что член, содержащий $\mathbf{z}$ в действии (2.8) для $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ содержит только продольную производную $j^l\partial_l$. Этот член не изменяется при динамической расквантизации.

Ограничение (4.6) на переменные $\dot{x}^k$ остается в рассматриваемом случае. Оно принимает вид

$$\sqrt{y_s y^s} = 1, \qquad y^0 = \sqrt{1+\mathbf{y}^2} \tag{A.10}$$

Принимая во внимание условие (A.10) получаем из (A.6) для величин Q, $\partial Q/\partial y_0$, $\partial Q/\partial\mathbf{y}$

$$Q = \frac{1}{1+y_0}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y_0} = -1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}\,(2+y_0)}{(1+y_0)^2} \tag{A.11}$$

Динамические уравнения (A.9), (A.7) и (A.5) могут быть записаны в виде

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\times\boldsymbol{\xi}}{1+y_0} \tag{A.12}$$

$$\kappa_0 m y_0 + \frac{\hbar}{2}(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\,\boldsymbol{\xi} = -p_0 \tag{A.13}$$

$$-\kappa_0 m\mathbf{y} + \frac{\hbar(\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{y}})}{2\,(1+y_0)} - \frac{\hbar}{2}\frac{\mathbf{y}\,(2+y_0)}{(1+y_0)^2}(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi} + \frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\tau_0}\left(\frac{(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{y})}{1+y_0}\right) = 0 \tag{A.14}$$

Уравнения (A.12), (A.13), (A.14) допускают тривиальное решение

$$\mathbf{y} = 0, \qquad y^0 = -\frac{\kappa_0 p_0}{m} = \pm 1, \qquad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 = \mathrm{const}, \qquad \boldsymbol{\xi}^2 = 1 \tag{A.15}$$

$$x^k = \left\{-\varepsilon\kappa_0\tau_0, X^1, X^2, X^3\right\}, \qquad X^\alpha = \mathrm{const}, \quad \alpha = 1,2,3, \qquad \varepsilon = \mathrm{sgn}p_0 \tag{A.16}$$

В этом случае внутренние степени свободы не возбуждаются, и мировая линия классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ представляет собой времениподобную прямую в пространстве-времени.

Для решения динамических уравнений важно учесть, что три 3-вектора $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}$ ортогональны друг другу

$$\boldsymbol{\xi}\mathbf{y} = 0, \qquad \boldsymbol{\xi}\dot{\mathbf{y}} = 0, \qquad \mathbf{y}\dot{\mathbf{y}} = 0, \qquad \mathbf{y}^2 = \gamma^2 - 1 = \mathrm{const}, \tag{A.17}$$

Для доказательства соотношений (A.17) преобразуем соотношение (A.14), вычислив последний член.

$$-\kappa_0 m\mathbf{y} + \frac{\hbar(\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{y}})}{(1+y_0)} - \frac{\hbar}{2}\frac{\mathbf{y}\,(2+y_0)}{(1+y_0)^2}(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi} + \frac{\hbar}{2}\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{y})}{1+y_0} = 0 \tag{A.18}$$

Используя (A.12), исключим $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ и получим

$$-\kappa_0 m\mathbf{y}+\frac{\hbar(\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{y}})}{(1+y_0)}-\frac{\hbar}{2}\frac{\mathbf{y}\,(2+y_0)}{(1+y_0)^2}(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi}-\frac{\hbar}{2}\frac{((\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\times\boldsymbol{\xi})\times\mathbf{y}}{(1+y_0)^2}=0 \qquad (A.19)$$

Раскрывая двойное векторное произведение в последнем члене (A.19) и комбинируя его со вторым членом, получаем

$$\frac{\hbar}{(1+y_0)}\left(\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{\xi}\mathbf{y})\,\mathbf{y}}{(1+y_0)}\right)\times\dot{\mathbf{y}}-\left(\frac{\hbar}{2}\frac{(2+y_0)}{(1+y_0)^2}(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi}+\kappa_0 m\right)\mathbf{y}=0 \qquad (A.20)$$

Из (A.20) следует, что вектор $\mathbf{y}$ ортогонален векторам $\dot{\mathbf{y}}$ и $\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{2}(1+y_0)^{-1}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{y})\,\mathbf{y}$, при условии, что

$$\frac{\hbar}{2}\frac{(2+y_0)}{(1+y_0)^2}(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi}+\kappa_0 m\neq 0 \qquad (A.21)$$

Это означает, что выполняются последние два соотношения (A.17). Кроме того

$$\left(1+\frac{\mathbf{y}^2}{2\,(1+y_0)}\right)(\boldsymbol{\xi}\mathbf{y})=0 \qquad (A.22)$$

и выполняется первое соотношение (A.17), поскольку в соответствии с последним соотношением (A.17) $\gamma^2>1$, и

$$1+\frac{\mathbf{y}^2}{2\,(1+y_0)}=\frac{\gamma+1}{2}\neq 0 \qquad (A.23)$$

(В случае $\gamma^2=1$ возникает тривиальное решение $\mathbf{u}=0$). Дифференцируя первое соотношение (A.17) и используя соотношение (A.12) для исключения $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, получаем

$$(\boldsymbol{\xi}\dot{\mathbf{y}})=-\left(\dot{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{y}\right)=\mathbf{y}\frac{(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\times\boldsymbol{\xi}}{1+y_0}=-\frac{\mathbf{y}^2\,(\boldsymbol{\xi}\dot{\mathbf{y}})}{1+y_0}=-\,(\boldsymbol{\xi}\dot{\mathbf{y}})\,(\gamma-1) \qquad (A.24)$$

Поскольку $\gamma^2>1$, второе соотношение (A.17) следует из (A.24). Итак, если условие (A.21) выполнено, то соотношения (A.17) также выполняются.

Пусть теперь условие (A.21) нарушено. Исключая $(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi}$ из соотношения

$$\frac{\hbar}{2}\frac{(2+y_0)}{(1+y_0)^2}(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi}+\kappa_0 m=0 \qquad (A.25)$$

с помощью уравнения (A.13), получаем

$$(2+y_0)\,(-p_0-\kappa_0 m y_0)+\kappa_0 m\,(1+y_0)^2=0 \qquad (A.26)$$

Разрешая (A.26) относительно y_0, получаем

$$y_0=\frac{\kappa_0 m}{p_0}-2=\mathrm{const} \qquad (A.27)$$

В этом случае из (A.20) следует

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha\left(\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{\xi}\mathbf{y})\,\mathbf{y}}{(1+y_0)}\right) \tag{A.28}$$

где α есть некоторое вещественное число. Кроме того из (A.10) следует, что $\mathbf{y}^2$ =const и, следовательно, выполняются два последних соотношения (A.17). Умножая (A.28) на $\mathbf{y}$, получаем

$$\dot{\mathbf{y}}\mathbf{y} = \alpha\left(1 + \frac{\mathbf{y}^2}{2\,(1+y_0)}\right)(\boldsymbol{\xi}\mathbf{y}) = 0 \tag{A.29}$$

Следовательно, или $\alpha = 0$, или $(\boldsymbol{\xi}\mathbf{y}) = 0$. Если $\alpha = 0$, то из (A.28) следует, что $\dot{\mathbf{y}} = 0$. Но условие $\dot{\mathbf{y}} = 0$ совместимо с соотношением (A.25) только если $m = 0$. Следовательно, $\alpha \neq 0$, и из (A.29) следует, что $(\boldsymbol{\xi}\mathbf{y}) = 0$. Тогда получаем из (A.28)

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha\boldsymbol{\xi} \tag{A.30}$$

В случае (A.30) $(\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi} = 0$, и соотношение (A.30) совместно с соотношением (A.25), если только $m = 0$.

Предположим, что $m \neq 0$, тогда соотношение (A.25) никогда не выполняется. В противном случае соотношение (A.21) всегда выполняется так же как и соотношения (A.17).

В соответствии с ограничениями (A.17) динамическое уравнение (A.12) переходит в

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0, \qquad \boldsymbol{\xi} = \text{const}, \qquad \boldsymbol{\xi}^2 = 1 \tag{A.31}$$

Выберем систему координат таким образом, что

$$\boldsymbol{\xi} = \{0, 0, \varepsilon_0\}, \qquad \varepsilon_0 = \pm 1 \tag{A.32}$$

В соответствии с (A.17) в этой системе координат векторы $\mathbf{y}$ и $\dot{\mathbf{y}}$ могут быть записаны следующим образом

$$\mathbf{y} = \left(y^1, y^2, 0\right) = \left\{\sqrt{\gamma^2 - 1}\cos\Phi, \sqrt{\gamma^2 - 1}\sin\Phi, 0\right\}, \qquad \gamma = \text{const}, \tag{A.33}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \left(\dot{y}^1, \dot{y}^2, 0\right) = \left\{-\sqrt{\gamma^2 - 1}\omega\sin\Phi, \sqrt{\gamma^2 - 1}\omega\cos\Phi, 0\right\}, \qquad \omega = \frac{d\Phi}{d\tau_0} \tag{A.34}$$

Из последнего соотношения (A.17) и (A.10) следует, что

$$y^0 = \gamma = \text{const} \tag{A.35}$$

Подставляя (A.32), (A.33) и (A.34) в динамическое уравнение (A.13), получаем

$$(\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}})\,\boldsymbol{\xi} = \varepsilon_0\left(\gamma^2 - 1\right)\omega \qquad \gamma = -\frac{\kappa_0 p_0}{m} - \varepsilon_0\kappa_0\frac{\hbar}{2m}\left(\gamma^2 - 1\right)\omega \tag{A.36}$$

Тогда второе соотношение (A.36) приводит к заключению, что ω =const.

Подставляя (A.32) и (A.36) в динамическое уравнение (A.20), получаем

$$\frac{\hbar}{(1+y_0)}\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{y}}-\left(\frac{\hbar}{2}\frac{(2+y_0)}{(1+y_0)^2}\varepsilon_0\left(\gamma^2-1\right)\omega+\kappa_0 m\right)\mathbf{y}=0 \tag{A.37}$$

Из (A.33), (A.34) и (A.32) следует, что

$$\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{y}}=-\varepsilon_0\omega\mathbf{y} \tag{A.38}$$

Подставляя (A.32) и (A.35) в (A.37), получаем

$$-\varepsilon_0\omega\mathbf{y}-\left(\frac{(2+\gamma)}{2(1+\gamma)}\varepsilon_0\left(\gamma^2-1\right)\omega+\frac{\kappa_0 m}{\hbar}(1+\gamma)\right)\mathbf{y}=0 \tag{A.39}$$

Разрешая (A.39) относительно ω, получаем

$$\omega=-2\kappa_0\varepsilon_0\frac{m}{\gamma\hbar} \tag{A.40}$$

Из второго уравнения (A.36) и (A.40) следует, что

$$p_0=-\frac{\kappa_0 m}{\gamma} \tag{A.41}$$

Решение (A.33) имеет вид

$$y^k=\left\{\gamma,\sqrt{\gamma^2-1}\cos\left(\omega\tau_0+\phi\right),\sqrt{\gamma^2-1}\sin\left(\omega\tau_0+\phi\right),0\right\}, \tag{A.42}$$

где ω определяется соотношением (A.40), а $\gamma^2\geq 1$ и ϕ, являются постоянными.

Если $\gamma=1$, получаем

$$y^k=\{1,0,0,0\}, \tag{A.43}$$

Это решение совпадает с тривиальным решением (A.15), (A.16).

Приложение B Преобразование уравнения для переменной $\boldsymbol{\xi}$

Умножая уравнение(A.8) на $(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})$ и имея в виду, что $\boldsymbol{\xi}^2=1$ and $\mathbf{z}^2=1$, получаем

$$\boldsymbol{\xi}\times\left(-\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z}+\frac{(\mathbf{z}\dot{\boldsymbol{\xi}})}{2(1+\mathbf{z}\,\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{z}-\frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{z})}{2(1+\mathbf{z}\,\boldsymbol{\xi})}\mathbf{z}-\frac{(1+\mathbf{z}\,\boldsymbol{\xi})}{2}\mathbf{b}\right)=0,\qquad \mathbf{b}=-(\mathbf{y}\times\dot{\mathbf{y}})Q \tag{B.1}$$

Два средних члена могут быть представлены как двойное векторное произведение

$$\boldsymbol{\xi}\times\left(-\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z}+\frac{1}{2(1+\mathbf{z}\,\boldsymbol{\xi})}\left(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times((\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{z})\times\mathbf{z})\right)-\frac{(1+\mathbf{z}\,\boldsymbol{\xi})}{2}\mathbf{b}\right)=0 \tag{B.2}$$

Это уравнение может быть переписано в виде

$$\boldsymbol{\xi} \times \left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \left(-\mathbf{z}+\frac{(\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})\,\mathbf{z}-\boldsymbol{\xi}}{2(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}\right) - \frac{(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}{2}\mathbf{b}\right) = 0 \tag{B.3}$$

Теперь, раскрывая двойное векторное произведение и принимая во внимание, что $\boldsymbol{\xi}\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$, получаем

$$\left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \left(-\mathbf{z}\boldsymbol{\xi}+\frac{(\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})^2 - 1}{2(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}\right)\right) - \frac{(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{b}) = 0$$

$$\left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \left(-\mathbf{z}\boldsymbol{\xi}+\frac{(\mathbf{z}\boldsymbol{\xi}) - 1}{2}\right)\right) - \frac{(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{b}) = 0$$

$$-\dot{\boldsymbol{\xi}} - (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{b}) = 0 \tag{B.4}$$

или используя обозначение (B.1)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}}))\,Q \tag{B.5}$$

Список литературы

[1] P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics,* 4th ed. Oxford, 1958.

[2] L. L. Foldy, and S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.,* **78**, 29, (1950).

[3] E. Schrödinger, *Sitzungsber. Preuss. Wiss. Phys. Math. Kl.* **24**, 418, (1930).

[4] A. O. Barut, N. Zanghi, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2009, (1984).

[5] A. O. Barut, A. J. Bracken, *Phys. Rev.* **D23**, 2454, (1981).

[6] J. C. Aron, *Found. Phys.* **11**, 863, (1981).

[7] D. Hestenes, *Found. Phys.* **20**, 45, (1990).

[8] W. A. Rodriges Jr., J. Vaz Jr. *Phys. Lett.* **B318**, 623, (1993).

[9] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle composite? (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0410045).

[10] J. L. Anderson, *Principles of relativity physics.* Academic Press, New-York, 1967, pp 75-88.

[11] F. Sauter, *Zs. Phys.* **63,** 803, (1930), **64**, 295, (1930).

[12] A. Sommerfeld, *Atombau and Spektrallinien.* bd.2, Braunschweig, 1951.

[13] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory.* New York, 1961, chp. 4, sec.3.

[14] Yu. A. Rylov, Dirac equation in terms of hydrodynamic variables , *Advances Appl. Clifford Algebras* **5**, 1-40, (1995).

[15] Yu. A. Rylov, Dynamic disquantization of Dirac equation. (Available at http://arXiv.org/abs/quant-ph/0104060).