Введение в невырожденную геометрию

Ю.А. Рылов

Россия, 117526, Москва, Проспект Вернадского 101-1,
Институт проблем механики РАН
email: rylov@ipmnet.ru

Обновлено 26 апреля 1999

Предисловие

Эта книга по геометрии написана физиком-теоретиком, для которого геометрия есть наука о пространственно-временны́х свойствах окружающего нас мира. В этом смысле геометрия является основой любой физической теории. Предлагаемая монография есть результат осмысления и развития оригинальных формально-математических работ автора, написанных за период 1959–1992гг. Невырожденная геометрия — это метрическая геометрия, изложенная в терминах естественных геометрических объектов (ЕГО), и ее появление связано с преодолением серьзного психологического барьера. Появление самого термина "естественный геометрический объект" и осознание его значения для изложения геометрии, является главным вкладом автора, хотя изложение евклидовой геометрии в терминах точек, прямых и плоскостей (а это — естественные геометрические объекты евклидовой геометрии) известно еще со времени Евклида. В неоднородных геометриях естественные геометрические объекты другие. Например, в римановой геометрии роль прямой играет геодезическая. Аналогом прямой в невырожденных геометриях оказываются не линии, а трубки (т.е. неодномерные геометрические объекты), и это обстоятельство долго являлось психологическим барьером для развития невырожденной геометрии. Автор судит об этом по собственному опыту. После того, как автору в 1959 году стало ясно, что мировая функция (половина квадрата расстояния между точками), заданная на многообразии, полностью описывает геометрию, включая топологию, ему понадобилось около тридцати лет, чтобы осознать возможность существования невырожденных геометрий (где прямые заменены трубками), хотя формально-математические конструкции, ведущие к построению невырожденных геометрий, давались автору без особых усилий. Такие геометрии представляют собой общий (невырожденный) случай, тогда как евклидова (и риманова) геометрия, где эти трубки вырождаются в линии, представляют собой частный (вырожденный) случай. Зная только вырожденные геометрии, очень трудно вообразить существование невырожденных геометрий, хотя аргументы в их пользу очень просты.

Продемонстрируем эти аргументы на примере ЕГО, определяемого двумя точками, который в евклидовой геометрии представляет собой прямую, проходящую через эти две точки. В евклидовой геометрии три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда площадь треугольника с вершинами в этих точках равна нулю. Площадь тругольника с помощью формулы Герона может быть выражена через расстояния между точками (вершинами треугольника). Фиксируя положение двух точек и приравнивая к нулю площадь треугольника, получаем уравнение для определения множества точек, лежащих на прямой, проходящей через две фиксировнные точки. Это определение прямой в евклидовой геометрии содержит только расстояния между парами точек. Оно может быть использовано в метрической геометрии для определения естественного геометрического объекта (ЕГО), являющегося аналогом евклидовой прямой. Поскольку уравнение, определяющее ЕГО, только одно, то размерность ЕГО, вообще говоря, на единицу меньше размерности всего пространства, хотя возможно вырождение в одномерную линию, как это имеет место в евклидовой геометрии, где это обусловлено специфическим видом функции расстояния.

Невырожденная геометрия проста и безыскусственна. Она не содержит каких-либо экзотических предположений типа гипотезы о стохастической или квантовой природе геометрии. Она просто реализует одну из естественных возможностей построения геометрии, почему-то пропущенную в процессе развития математики.

Невырожденная геометрия – исключительно перспективное направление в развитии геометрии. Это связано прежде всего с тем, что геометрия реального пространства-времени является невырожденной, причем характерная "толщина" трубок является микроскопической и не существенна при описании макроскопических явлений. В современных естественных науках вырожденная геометрия экстраполируется в область микроскопических явлений, где она не работает, и это неизбежно приводит к трудностям, поскольку геометрия пространства-времени лежит в основе всех естественных наук. Однако, естествоиспытатели всегда были изобретательны и умели устранять последствия неправильных положений с помощью особых компенсирующих конструкций. Хорошо известным примером такой конструкции является доктрина Птолемея в небесной механике, компенсирующая негативное влияние ошибочной гипотезы о неподвижности Земли и позволяющая правильно предсказывать солнечные затмения и движение планет. Однако, такая компенсация никогда не бывает полной. В рамках доктрины Птолемея было невозможно открыть закон всемирного тяготения и законы механики, известной ныне как механика Ньютона.

В современной физике роль концепции, компенсирующей наши ошибочные представления о геометрии на малых расстояниях, играет квантовая теория. Применение невырожденной геометрии, где "толщина" трубок связана с квантовой постоянной, позволяет объяснить квантовые эффекты без использования квантовых принципов. Это приводит к пониманию того, что область применимости квантовых принципов ограничена, и открывает широкие перспективы для углубления нашего понимания квантовых явлений и других явлений микрофизики.

Сентябрь 1998

Оглавление

Особенности терминологии, используемой в книге

При написании книги автор столкнулся с отсутствием общепринятых терминов для некоторых собирательных понятий. В этой связи была использована терминология, которая, быть может, не является общепринятой, однако автор идет на это, поскольку потребность в терминах для собирательных понятий очень велика.

1. Термин "евклидово пространство" используется как собирательный по отношению к терминам "собственно евклидово пространство" и "псевдевклидово пространство". Собственно евклидово пространство есть евклидово пространство со знакопостоянной метрикой, т.е. собственные значения матрицы метрического тензора имеют один и тот же знак. Псевдоевклидово пространство есть евклидово пространство со знакопеременной метрикой, т.е. собственные значения матрицы метрического тензора имеют разные знаки. Евклидово пространство означает собственно евклидово пространство и (или) псевдоевклидово пространство.

2. Термин "риманова геометрия" используется как собирательный по отношению к терминам "собственно риманова геометрия" и "псевдориманова геометрия". Собственно риманова геометрия есть риманова геометрия со знакопостоянной метрикой (собственные значения матрицы метрического тензора имеют один и тот же знак). Псевдориманова геометрия есть риманова геометрия со знакопеременной метрикой, т.е. собственные значения матрицы метрического тензора имеют разные знаки. Риманова геометрия означает собственно риманову геометрию и (или) псевдориманову геометрию.

3. Термин "динамическая система" используется как собирательный по отношению к терминам "детерминированная динамическая система" и "недетерминированная динамическая система". Для детерминированной динамической системы существуют динамические уравнения. Для недетерминированной (стохастической) динамической системы их не существует. Динамическая система — это детерминированная динамическая система и (или) стохастическая система.

Для понимания связи невырожденной геометрии с римановой геометрией желательно знать риманову геометрию и тензорный анализ [1]-[4].

Глава 1

Введение. Естественные геометрические объекты и различные концепции геометрии

Геометрия возникла как наука о пространственных формах тел и свойствах окружающего нас пространства. Однако, в современной математике термин геометрия означает не только это. Термин геометрия в сочетании с различными прилагательными (евклидова геометрия, проективная геометрия, риманова геометрия, квантовая геометрия) может означать систему аксиом вместе со всеми их следствиями, конструкции на многообразии, а также другие сложные логические построения. Другими словами, имеется несколько различных концепций геометрии, различающихся иерархией своих базовых понятий, таких как точка, прямая, геодезическая, плоскость, расстояние, непрерывность, однородность и т.д.

В настоящее время в физике и механике под геометрией (риманова геометрия) понимают чаще всего некоторую конструкцию на многообразии, причем многообразие рассматривается как носитель и неотъемлемая составная часть геометрии. Такой подход существенно уменьшает количество возможных геометрий, исключая те геометрии, для которых не существует многообразия. Изложение геометрии как таковой без ссылки на многообразие оказывается возможным, если эффективно использовать понятие естественного геометрического объекта (ЕГО). Такое изложение приводит к новым разновидностям геометрий, для которых нельзя ввести понятие многообразия. Оно особенно интересно и важно потому, что реальное пространство-время описывается геометрией, для которой нельзя адекватно ввести понятие многобразия. (Строго говоря, многообразие в реальном пространстве-времени ввести можно, но оно оказывается не адекватным геометрии в том смысле, что такое характерное для многобразия понятие как линия, оказывается не имеющим геометрического смысла). Пространство-время описывается геометрией Минковского лишь приближенно. Последовательное использование геометрии Минковского на малых расстояниях приводит к неправильным результатам. Чтобы получить правильные результаты и на малых расстояниях, используя неприменимую там геометрию Минковского, приходится прибегать к использованию некоторой дополнительной компенсирующей концепции, известной как квантовая механика. Это очень напоминает ситуацию с доктриной Птолемея, когда использование неправильного представления о неподвижной Земле приходилось компенсировать некоторыми дополнительными построениями.

Понятие естественного геометрического объекта (ЕГО) является наиболее важным понятием геометрии. В собственно евклидовой геометрии естественными геометрическими объектами (ЕГО) являются точка, прямая, плоскость. В римановой геометрии ЕГО являются точка и геодезическая (линия). Точка является ЕГО нулевого порядка, прямая является ЕГО первого порядка, плоскость является ЕГО второго порядка и т.д.

По существу геометрия как наука о свойствах окружающего нас пространства становится содержательной, способна служить моделью этого пространства и использоваться в естественных науках лишь после того как введено понятие ЕГО, т.е. сказано, какие геометрические объекты сответствуют объектам реального мира. Например, в механике свободное движение малой (точечной) частицы описывается либо как прямая в однородном пространстве-времени, либо как геодезическая в искривленном пространстве-времени, но в любом случае это естественный геометрический объект (ЕГО). Движение частицы в силовом поле описывается как последовательность различных отрезков прямой (геодезической), т.е. опять осуществляется в терминах ЕГО.

Под естественным геометрическим объектом $\mathcal{T}_{P_0P_1...P_n}$, n-ого порядка ($n = 0, 1, \ldots$) понимается множество точек, определяемое $n+1$ независимыми точками $P_0, P_1, \ldots P_n$, причем порядок точек не является существенным. Например, прямая в собственно евклидовой геометрии определяется двумя различными точками P_0, P_1, причем порядок их не важен. Что касается термина независимые $n+1$ точек, то смысл его ясен из следующего определения.

Определение 1.0.1 *$n+1$ точек $P_0, P_1, \ldots P_n$ называются зависимыми, если по крайней мере одна из них принадлежит ЕГО $(n-1)$-ого порядка, определяемому остальными n точками, или любые n точек из $P_0, P_1, \ldots P_n$ являются зависимыми. В противном случае $n+1$ точек называются независимыми.*

В собственно евклидовой геометрии две любые различные точки являются независимыми и определяют ЕГО первого порядка - прямую. Три точки являются независимыми в том случае, если они не принадлежат одному ЕГО первого порядка, т.е. не лежат на одной прямой. В этом случае они определяют ЕГО второго порядка - двумерную евклидову плоскость.

Следует иметь в виду, что порядок ЕГО совпадает с его размерностью только в случае собственно евклидовой и собственно римановой геометрий. Для геометрии с индефинитной метрикой это уже не так. Например, для четырехмерного пространства Минковского ЕГО нулевого порядка, определяемый точкой P_0, есть световой конус с вершиной в точке P_0 (т.е. трехмерная поверхность). В самом деле, стоит задать точку, как световой конус с вершиной в этой точке определяется самой геометрией Минковского, в том смысле, что никакая дополнительная информация не нужна.

Сюрпризы геометрии Минковского на этом не кончаются. ЕГО первого порядка, определяемый точками P_0, P_1, разделенными времениподобным интервалом, является времениподобной прямой, проходящей через эти точки. Но если интервал P_0, P_1 является пространственноподобным, то соответствующий ЕГО первого порядка не является пространственноподобной прямой, проходящей через эти точки, как можно было ожидать, основываясь на представлениях римановой геометрии. В этом случае ЕГО представляет собой трехмерную огибающую множества световых конусов с вершинами на пространственноподобной прямой, проходящей через точки P_0, P_1. Результат неожиданный для человека, рассматривающего геометрию Минковского как геометрию на четырехмерном многообразии. В то же время результат не выглядит столь неожиданным, если принять во внимание то обстоятельство, что ЕГО первого порядка состоит не из точек, а из ЕГО нулевого порядка, а ЕГО нулевого порядка в геометрии Минковского суть световые конусы.

Этот факт может быть сформулирован в виде утверждения, что пространственноподобная прямая не является ЕГО в геометрии Минковского. Применительно к физике этот результат означает, что не следует искать тахионы (частицы, движущиеся со сверхсветовой скоростью) как частицы, описываемые пространственноподобными линиями (прямыми). Тахионы, если они существуют, описываются трехмерными изотропными поверхностями в пространстве-времени.

В промежуточном случае, когда интервал между точками P_0, P_1 изотропный, точки P_0, P_1 являются зависимыми, так как точка P_1 принадлежит световому конусу с вершиной в точке P_0. В этом случае ЕГО первого порядка не определен.

Приведенные примеры показывают, что даже простейшие ЕГО первого порядка, определяемые двумя точками и геометрией, не являются, вообще говоря, одномерными линиями. Это объясняется тем, что такие понятия как размерность и линия (как, впрочем, и понятие непрерывности) являются обязательными атрибутами многообразия, но не являются непременными атрибутами самой геометрии. Эти понятия появляются, когда геометрия описывается в терминах многообразия, как геометрия на многообразии. Они могут, вообще, не появиться, если геометрия описывается в терминах ЕГО. Дело в том, что ЕГО определяются самой геометрией и точками пространства и не содержат никаких конструкций, отличных от самой геометрии. В этом смысле ЕГО являются визитной карточкой геометрии. С другой стороны, такие понятия как многообразие и его атрибуты (размерность, непрерывность) полезно ввести, когда это оказывается возможным, для того чтобы проследить связь между разными концепциями геометрии.

Среди концепций геометрии, имеющих прямое отношение к свойствам окружающего нас пространства и могущих служить его моделью, можно выделить три:

1. аксиоматическая концепция геометрии.
2. дифференциальная геометрия.
3. метрическая концепция геометрии.

1.1 Аксиоматическая концепция геометрии

Аксиоматическая концепция геометрии наиболее старая и традиционная концепция, восходящая ко времени Евклида. Геометрия излагается в терминах естественных (фундаментальных) геометрических объектов (ЕГО): точки, прямой и плоскости. Любая геометрическая фигура определяется как некоторое множество точек (прямых, плоскостей). Геометрические свойства фигуры извлекаются из определения этой фигуры через ЕГО. ЕГО являются фундаментальными понятиями собственно евклидовой геометрии и их нельзя определить через другие, более фундаментальные объекты. По этой причине ЕГО определяются через их свойства в виде аксиом. Многие аксиомы являются по сути своей определением ЕГО. Если удастся определить ЕГО независимо, то аксиомы собственно евклидовой геометрии превращаются в теоремы, т.е. утверждения, проверяемые на основе этих определений.

Кроме ЕГО вводится понятие расстояния между двумя точками (понятие отрезка прямой и его длины), которое необходимо для определения (и построения) таких геометрических фигур как сфера или эллипсоид. Для определения длины отрезка в качестве циркуля используется эталонный отрезок, который может перемещаться в пространстве и укладываться вдоль измеряемого отрезка. Возможность перемещения эталонного отрезка (и других геометрических фигур) предполагает однородность и изотропность пространства, т.е. одинаковые свойства всех областей и направлений в пространстве. В свою очередь однородность и изотропность пространства предполагает его непрерывность, т.к. дискретное пространство не может быть однородным или изотропным. Свойства однородности, изотропности и непрерывности описываются соответствующими аксиомами, сформулированными в терминах ЕГО.

Таким образом, аксиоматическая концепция геометрии формулируется в терминах ЕГО в виде системы аксиом, и является жесткой конструкцией, не содержащей каких-либо численных параметров, изменение которых могло бы привести к изменению геометрии. Единственной изменяемой величиной в аксиоматической концепции геометрии является длина эталонного отрезка (т.е. масштаб).

Геометрия Лобачевского является обобщением геометрии Евклида. Она представляет собой класс однородных геометрий, которые тоже могут быть сформулированы в виде системы аксиом. В этом случае система аксиом несколько отличается от аксиом собственно евклидовой геометрии и содержит численный параметр (кривизну). Евклидова геометрия является частным случаем геометрии Лобачевского с равной нулю кривизной.

Евклидова геометрия является хорошей моделью окружающего нас пространства и успешно используется в нерелятивистской физике и механике. Однако, аксиоматическая концепция геометрии является очень жесткой конструкцией, которая не допускает обобщения на случай неоднородного пространства. Дело в том, что однородность и изотропность пространства формулируется жестко в виде аксиом, а не в виде численных соотношений, которые можно было бы рассматривать как приближенные и варьировать.

1.2 Концепция дифференциальной геометрии

Использование методов аналитической геометрии, когда в пространстве вводится система координат, и пространство отображается на некоторое непрерывное множество чисел, называемое непрерывным многообразием, создает возможность обобщения геометрии на случай неоднородного пространства [1]-[5]. В этой концепции геометрии базовыми понятиями являются понятие многообразия и понятие расстояния, (а не понятие естественного геометрического объекта). Понятие многообразия описывает аффинные свойства геометрии (непрерывность, линейная зависимость, размерность). Понятие расстояния описывает метрические свойства геометрии. В дифференциальной геометрии расстояние задается всегда только в виде бесконечно малого расстояния dS между двумя бесконечно близкими точками с координатами x и $x + dx$

$$dS^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k \tag{1.2.1}$$

где $g_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots)$ есть величина, называемая метрическим тензором, n есть размерность многообразия (пространства). $n(n+1)/2$ независимых вещественных функций $g_{ik}, \quad i, k = 1, 2$ задаются произвольно с единственным ограничением

$$\det \parallel g_{ik} \parallel \not\equiv 0 \tag{1.2.2}$$

По повторяющимся латинским индексам производится суммирование $(1 - n)$. Вид функций g_{ik} определяет геометрию, называемую римановой геометрией.

Естественный геометрический объект, определяемый двумя различными точками P', P'' и геометрией (в собственно евклидовой геометрии это прямая) может быть определен и в римановой геометрии. Он определяется как линия

$$\mathcal{L}_{P'P''}: \qquad x^i = x^i(\tau), \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{1.2.3}$$

проходящая через точки P' и P'' с координатами x' и x'' соответственно, для которой интеграл

$$S(x', x'') = \int\limits_{\tau'}^{\tau''} \sqrt{g_{ik}(x)\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}}d\tau, \qquad x' = x(\tau'), \qquad x'' = x(\tau'') \tag{1.2.4}$$

взятый вдоль линии $\mathcal{L}_{P'P''}$, является экстремальным (минимальным). Такая линия называется геодезической, а интеграл (1.2.4), взятый вдоль нее, интерпретируется как расстояние между точками P' и P'', или как длина отрезка геодезической $\mathcal{L}_{[P'P'']}$ между точками P',P''. Геодезическая $\mathcal{L}_{P'P''}$ является естественным геометрическим объектом (ЕГО), определяемым точками P',P'' и геометрией. Геодезическая $\mathcal{L}_{P'P''}$ является обобщением понятия евклидовой прямой на случай неоднородной (римановой) геометрии.

Иногда вместо расстояния (1.2.4) употребляется величина

$$\sigma(x', x'') = \frac{1}{2} S^2(x', x'') \qquad (1.2.5)$$

$$\sigma(x', x'') = \sigma(x'', x'), \qquad \sigma(x, x) = 0 \qquad (1.2.6)$$

называемая мировой функцией [6]. Употребление мировой функции σ вместо расстояния удобнее, так как мировая функции σ всегда вещественна, тогда как для индефинитной метрики расстояние S может быть не только вещественным, но и чисто мнимым.

Итак, дифференциальная геометрия отличается от аксиоматической концепции геометрии в том отношении, что фундаментальными здесь являются понятия многообразия и бесконечно малого расстояния. Понятия естественных геометрических объектов (ЕГО), фундаментальные (первичные) для аксиоматической концепции геометрии, оказываются в дифференциальной геометрии производными и вторичными. Это позволяет конструировать неоднородные геометрии и создать более совершенную модель пространства-времени, способную учитывать его неоднородность, связанную с гравитационным полем. Кроме того дифференциальная геометрия хорошо согласуется с современным математическим аппаратом теоретической физики и механики.

Следует, однако, заметить, что свойства, описываемые понятием многообразия, и метрические свойства, ассоциирующиеся с понятием расстояния, не являются полностью независимыми. Как это следует из (1.2.4) [6], в римановой геометрии мировая функция (1.2.5) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}(x, x') g^{ik}(x) \frac{\partial \sigma}{\partial x^k}(x, x') = 2\sigma(x, x') \qquad (1.2.7)$$

и не может быть задана произвольно. Именно этим объясняется то обстоятельство, что в римановой геометрии расстояние всегда задается в виде бесконечно малой величины, что предполагает существование непрерывного многообразия. Другими словами, в римановой геометрии имеются две структуры: многообразие и метрика (расстояние). Эти структуры зависимы, причем главной стуктурой является многообразие, несущее информацию о размерности и непрерывности пространства. Метрика является дополнительной структурой, задаваемой на основе многообразия. Попытка сделать метрику фундаментальным понятием, а многообразие производной конструкцией приводит к метрической концепции геометрии.

Итак, иерархия понятий в дифференциальной геометрии (римановой геометрии) выглядит следующим образом: многообразие (включая непрерывность и размерность), бесконечно малое расстояние, естественные геометрические объекты (геодезическая), конечное расстояние. Возникающие при этом геометрии достаточно содержательны, чтобы служить моделями пространства–времени в релятивитской теоретической физике и механике.

1.3 Метрическая концепция геометрии

Интуитивно кажется естественным, что для задания геометрии достаточно задать расстояние между любыми двумя точками пространства. Это действительно так. Такой подход мы будем называть метрическим подходом к геометрии, или метрической концепцией геометрии.

Обычно для задания метрической геометрии задают неотрицательную функцию расстояния $\rho: \quad \Omega\times\Omega \to [0,\infty) \subset \mathbb{R}$, называемую метрикой и обладающую свойствами

$$1. \qquad \rho(P',P'') = \rho(P'',P'), \qquad P',P'' \in \Omega \tag{1.3.1}$$

$$2. \qquad \rho(P',P'') = 0, \quad \text{если и только если } P'' = P' \tag{1.3.2}$$

$$3. \qquad \rho(P,P'') + \rho(P'',P') \geq \rho(P,P'), \qquad \forall P,P',P'' \in \Omega \tag{1.3.3}$$

где Ω есть множество точек пространства. Совокупность $M = \{\rho, \Omega\}$ называют метрическим пространством. Совокупность метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$, множества геометрических объектов, которые можно построить на его основе, и взаимоотношений между этими геометрическими объектами, будем называть метрической геометрией.

На основе условия (1.3.3) удается ввести понятие окрестности точки, построить соответствующую топологию, ввести понятие кратчайшей (линии) и построить многообразие с внутренней метрикой [7]. Для выпуклых поверхностей трехмерного пространства удается построить содержательную геометрию [7], основным понятием которой является понятие кратчайшей, играющей в геометрии роль ЕГО первого порядка. Построение ЕГО более высоких порядков в рамках развития этого направления представляется проблематичным. Впрочем, при рассмотрении поверхностей в трехмерном пространстве в этом нет особой необходимости. Возможность введения топологии и построения кратчайшей в такой метрической геометрии обусловлена использованием ограничения (1.3.3), налагаемого на метрику и называемого обычно аксиомой (условием) треугольника. При отказе от аксиомы треугольника (1.3.3) введение топологии и построение кратчайшей на основе одной только метрики становится невозможным.

К сожалению, необходимость аксиомы треугольника (1.3.3) при построении традиционной метрической геометрии не позволяет использовать ее в качестве модели окружающего нас мира (пространства-времени). Это обусловлено тем, что аксиома треугольника (1.3.3) несовместима с мнимыми расстояниями, появляющимися в геометрии Минковского.

Развитие метрической геометрии в традиционном направлении ее обобщения на случай неримановых геометрий [8]-[12] базируется на представлении о линии как о некотором естественном геометрическом объекте. В евклидовой геометрии ЕГО высшего порядка может быть составлен из непересекающихся ЕГО более низкого порядка. Например, прямая может рассматриваться как составленная из точек, а плоскость можно считать составленной из параллельных прямых. Риманова геометрия тоже обладает этим свойством. Считается, что это свойство сохраняется в метрической геометрии. При построении обобщения римановой геометрии на базе метрической геометрии необходим естественный геометрический объект $\mathcal{T}_{PP'}$, порожденный двумя различными точками P и P', и являющийся аналогом прямой $\mathcal{L}_{PP'}$ в собственно евклидовой геометрии (геодезической в римановой геометрии). При надлежащем выборе метрики ρ метрическая геометрия должна превращаться в собственно евклидову, а геометрический объект $\mathcal{T}_{PP'}$ должен совпадать с $\mathcal{L}_{PP'}$.

Традиционно в непрерывной метрической геометрии в качестве ЕГО, определяемого двумя точками P, P', рассматривают кратчайшую линию, соединяющую эти точки. Другими словами, в качестве $\mathcal{T}_{PP'}$ рассматривают последовательность точек $\{P_i\}$, $(i = 0, 1, \ldots N)$, $P_0 = P$, $P_N = P'$, $N \to \infty$, $\rho(P_i, P_{i+1}) \to 0$, доставляющую минимум сумме

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{i=N} \rho(P_{i-1}, P_i), \qquad P_0 = P, \qquad P_N = P' \tag{1.3.4}$$

Если такая последовательность точек, доставляющая минимум сумме (1.3.4) существует, то ее называют кратчайшей, соединяющей точки P и P'. Если метрика $\rho(P, P')$ выбрана так, что она совместима с (1.2.1), (1.2.4), то кратчайшая совпадает с геодезической в собственно римановой геометрии. Если метрика выбрана так, что условия (1.2.1), (1.2.4) не выполнены, то возникает нериманова (или обобщенная риманова) геометрия. Этот путь построения неримановой геометрии развивался в работах А.Д. Александрова и его сотрудников [8]-[11]. Эти работы связаны с такими основанными на понятии кратчайшей понятиями как угол, треугольник, кривизна.

Существует другой способ определения естественного геометрического объекта $\mathcal{T}_{PP'}$, определяемого двумя точками P, P'. Он эффективен и в том случае, когда аксиома тругольника (1.3.3) не выполняется. Этот способ определения ЕГО $\mathcal{T}_{PP'}$ обладает следующими свойствами.

1. Всегда приводит к единственному $\mathcal{T}_{PP'}$, содержащему по крайней мере базисные точки P и P'.

2. Пригоден для непрерывных и дискретных пространств, так как он не содержит процедуры предельного перехода

3. Для собственно евклидова пространства дает в качестве $\mathcal{T}_{PP'}$ прямую $\mathcal{L}_{PP'}$, а для собственно риманова пространства - геодезическую $\mathcal{L}_{PP'}$.

4. Легко обобщается на случай ЕГО, определяемого несколькими точками, где приводит к результатам, согласующимися с собственно евклидовой геометрией.

5. Пригоден для метрических пространств с индефинитной метрикой, где вместо метрики ρ вводится вещественная мировая функция $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$, обладающая свойствами

$$\sigma(P,P) = 0, \qquad \sigma(P,P') = \sigma(P',P), \qquad \forall P,P' \in \Omega \tag{1.3.5}$$

Возникающую при этом совокупность $\{\sigma, \Omega\}$ множества Ω и функции σ на $\Omega \times \Omega$ мы будем называть σ-пространством. Совокупность σ-пространства $\{\sigma, \Omega\}$, ЕГО-формализма (т.е. математического аппарата для построения ЕГО), геометрических объектов, построенных на основе ЕГО-формализма, и их взаимоотношений будем называть Т-геометрией[1].

Способ определения ЕГО основан на коллиметрическом свойстве евклидовой прямой. Термин "коллиметрический" образован из двух "коллинеарный" и "метрический". Коллиметрическое свойство есть условие коллинеарности векторов $\mathbf{RP}$ и $\mathbf{RQ}$ собственно евклидова пространства, выраженное через расстояния между точками P, Q, R.

Определение 1.3.1 *Коллиметрическим свойством прямой называется следующее утверждение. Векторы* $\mathbf{RP}$, $\mathbf{RQ}$ *собственно евклидова пространства коллинеарны, и три точки* P, Q, R *лежат на одной прямой, если и только если выполнено соотношение*

$$\frac{1}{4}\left(|\mathbf{RP}|^2 + |\mathbf{RQ}|^2 - |\mathbf{PQ}|^2\right)^2 - |\mathbf{RP}|^2|\mathbf{RQ}|^2 = 0 \tag{1.3.6}$$

Соотношение (1.3.6) является следствием двух соотношений

$$(\mathbf{RP}.\mathbf{RQ})^2 \equiv |\mathbf{RP}|^2|\mathbf{RQ}|^2 \cos^2\theta = |\mathbf{RP}|^2|\mathbf{RQ}|^2,$$

$$2(\mathbf{RP}.\mathbf{RQ}) = |\mathbf{RP}|^2 + |\mathbf{RQ}|^2 - |\mathbf{PQ}|^2,$$

первое из которых представляет собой утверждение, что если векторы $\mathbf{RP}$ и $\mathbf{RQ}$ коллинеарны, то квадрат косинуса угла θ между ними равен единице. Второе представляет собой теорему косинусов для треугольника с вершинами

[1]Можно было бы называть Т-геометрией σ-пространство $\{\sigma, \Omega\}$, не включая ЕГО-формализм в понятие геометрии на том основании, что вся информация о геометрии определяется полностью заданием σ и Ω. Однако, в этом случае придется признать, что содержательность геометрии зависит не только от самой геометрии, но и от степени разработанности формализма, описывающего эту геометрию, т.е. что содержательность геометрии есть атрибут математического аппарата, описывающего эту геометрию. Кроме того возможна ситуация, когда вместо ЕГО-формализма используется другой математический аппарат не вполне адекватный σ-пространству и накладывающий на геометрию некоторые дополнительные ограничения. В этом случае возникает другая геометрия, отличная от Т-геометрии, и информация о ней будет заключена не только в $\{\sigma, \Omega\}$, но и в свойствах математического аппарата.

в точках P, Q, R. Коллиметрическое свойство определяет прямую с помощью одного соотношения, содержащего только расстояния между точками и не зависящего от размерности евклидова пространства.

Поясним способ определения $\mathcal{T}_{AB}$ на примере собственно евклидова пространства. Пусть $\mathcal{L}_{AB}$ есть прямая в собственно евклидовом пространстве, проходящая через две различные точки A и B. Рассмотрим треугольник ΔABR, образованный точками A, B, R. Согласно формуле Герона его площадь V_{ABR} равна

$$V_{\mathrm{ABR}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-r)}, \qquad p = \frac{1}{2}(a+b+r) \tag{1.3.7}$$

где a, b, r суть длины сторон, лежащих против вершин A, B, R соответственно. V_{ABR} обращается в нуль тогда и только тогда, когда точки A, B, R лежат на одной прямой. Таким образом, условие

$$V_{\mathrm{ABR}}^2 = p(p-a)(p-b)(p-r) = 0 \tag{1.3.8}$$

может служить в качестве определения прямой $\mathcal{L}_{AB}$ в терминах взаимных расстояний между точками A, B, R. Соотношение (1.3.8) эквивалентно соотношению (1.3.6), определяющему коллиметрическое свойство евклидовой прямой. После того как прямая в собственно евклидовой геометрии определена с помощью соотношения (1.3.8), аксиомы Евклида, трактующие о свойствах прямой, превращаются в теоремы.

Итак, естественный геометрический объект $\mathcal{T}_{AB}$ в Т-геометрии может быть определен как множество точек R, удовлетворяющих условию (1.3.8)

$$\mathcal{T}_{AB} = \{R \mid V_{\mathrm{ABR}}^2 = 0\} \tag{1.3.9}$$

Двумерная плоскость $\mathcal{T}_{ABC}$, определяемая тремя точками A, B, C, не лежащими на одной прямой, определяется аналогичным соотношением

$$\mathcal{T}_{ABC} = \{R \mid V_{\mathrm{ABCR}}^2 = 0\} \tag{1.3.10}$$

где V_{ABCR} есть объем тетраэдра, образованного точками A, B, C, R. Этот объем также может быть выражен через расстояния между точками A, B, C, R с помощью соотношения

$$V_{ABCR}^2 = \frac{1}{(3!)^2}\left[\mathbf{abc}\right]^2 = \frac{1}{(3!)^2}\left|\begin{array}{ccc} (\mathbf{a}.\mathbf{a}) & (\mathbf{a}.\mathbf{b}) & (\mathbf{a}.\mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}.\mathbf{a}) & (\mathbf{b}.\mathbf{b}) & (\mathbf{b}.\mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}.\mathbf{a}) & (\mathbf{c}.\mathbf{b}) & (\mathbf{c}.\mathbf{c}) \end{array}\right|, \tag{1.3.11}$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{RA},\ \mathbf{b} = \mathbf{RB},\ \mathbf{c} = \mathbf{RC}$ суть векторы, имеющие соответственно длины a, b, c. Скалярные произведения в определителе Грама (1.3.11) выражаются через расстояния между точками A, B, C, R с помощью сотношения

$$(\mathbf{a}.\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2) = \frac{1}{2}(|\mathbf{RA}|^2 + |\mathbf{RB}|^2 - |\mathbf{AB}|^2) \tag{1.3.12}$$

и других аналогичных соотношений.

После определения прямой и плоскости в форме (1.3.9), (1.3.10) аксиомы трехмерной собственно евклидовой геометрии выполняются, и евклидову геометрию можно формулировать в традиционной "аксиоматической форме", которая содержит теперь только определения и теоремы, в том числе теоремы, возникшие из аксиом. Сама по себе евклидова геометрия задается тогда и только тогда, когда задаются расстояния между точками. Роль определений (1.3.9), (1.3.10) не сводится только к тому, что они приводят метрическую геометрию (Т-геометрию) к "аксиоматической" форме. Определения (1.3.9), (1.3.10) еще осуществляют связь геометрии с реальным миром в том смысле, что если рассматриваемая геометрия есть геометрия реального мира, то элементы этого реального мира следует отождествлять с ЕГО и их частями. (Например, рассматривая геометрию пространства-времени, мировые трубки реальных частиц следует отождествлять с ЕГО или их частями). Другими словами, ЕГО представляют собой "элементы реальности". Определение (1.3.9) не использует экстремальное свойство расстояния, (т.е. то обстоятельство, что расстояние, измеряемое вдоль прямой является кратчайшим) и может быть применено в метрической геометрии с индефинитной метрикой, в частности, в геометрии Минковского.

Другим важным следствием определения (1.3.9) является то, что естественный геометрический объект $\mathcal{T}_{PP'}$ определяется как *множество точек*. Понятие линии и необходимое для его введения понятие топологической структуры, не фигурируют в определении. Это означает, что можно строить геометрию на *основе одной только метрики*, не вводя топологии дополнительно к метрике. $\mathcal{T}_{PP'}$ не является, вообще говоря, какой бы то ни было (одномерной) линией, к чему мы првыкли в собственно евклидовой и собственно римановой геометрии. Действительно, в трехмерном пространстве координат одно уравнение (1.3.8) описывает, вообще говоря, двумерную поверхность, а не линию.

В том случае, когда метрическая геометрия получена из евклидовой в результате малой деформации, т.е. мировая функция

$$\sigma(P,P') = \sigma_E(P,P') + D(P,P'), \qquad P,P' \in \Omega \tag{1.3.13}$$

получается из мировой функции $\sigma_E(P,P')$ евклидова пространства с помощью малой добавки $D(P,P')$, естественный геометрический объект $\mathcal{T}_{PP'}$ представляет собой поверхность мало отличающуюся от прямой $\mathcal{L}_{PP'}$. $\mathcal{T}_{PP'}$ представляет собой полую трубку, охватывающую прямую $\mathcal{L}_{PP'}$. Форма этой полой трубки определяется функцией дисторсии $D(P,P')$. Если дисторсия $D(P,P')$ обращается в нуль, $\mathcal{T}_{PP'}$ превращается в прямую $\mathcal{L}_{PP'}$.

В дальнейшем для краткости любой ЕГО будет называться трубкой, а трубки будут различаться числом базисных точек, определяющих трубку. Неожиданным является то обстоятельство, что обобщением прямой может быть не только геодезическая (искривленная линия), но и, вообще, не линия, а поверхность.

Для случая собственно риманова (или собственно евклидова) пространства эта поверхность вырождается в линию. Это обусловлено особым (экстремальным) свойством римановой геометрии. Это экстремальное свойство описывается неравенством треугольника (1.3.3).

Действительно, согласно (1.3.8), (1.3.9) различные части трубки описываются различными множителями в (1.3.8). В частности, форма трубки $\mathcal{T}_{PP'}$ между базисными точками P и P' описывается как множество точек R, удовлетворяющих уравнению

$$S_2(P,R,P') \equiv \rho(P,R) + \rho(R,P') - \rho(P,P') = 0, \qquad \forall P,P',R \in \Omega \qquad (1.3.14)$$

причем случаю $S_2(P,R,P') = 0$ соответствует превращение неравенства треугольника (1.3.3) в равенство. Вне трубки $\mathcal{T}_{PP'}$ и на ее поверхности выполнено условие $S_2(P,R,P') \geq 0$, соответствующее выполнению неравенства треугольника (1.3.3). Внутри трубки $S_2(P,R,P') < 0$, и неравенство треугольника нарушается. Это означает, что в метрической геометрии, где неравенство треугольника (1.3.3) выполнено для всех точек пространства, трубки $\mathcal{T}_{PP'}$ вырождаются в линии (поверхности), не имеющие внутренних точек. Это могут быть поверхности, линии, или даже базисные точки P, P'. Таким образом, неравенство треугольника (1.3.3) может интерпретироваться как условие вырождения трубок первого порядка.

В том случае, когда все трубки $\mathcal{T}_{PP'}$ вырождаются в соответствующие базисные точки P, P', неравенство треугольника (1.3.3) принимает вид строгого неравенства

$$\rho(P,P'') + \rho(P'',P') > \rho(P,P'), \qquad P \neq P'' \neq P' \neq P, \qquad \forall P,P',P'' \in \Omega. \qquad (1.3.15)$$

В этом случае естественно назвать метрическую геометрию (Т-геометрию) ультравырожденной.

Обе концепции (1.3.1) - (1.3.3) и (1.3.5) основаны на метрике и только метрике $\rho = \sqrt{2\sigma}$ и по существу дела являются метрическими геометриями, различающимися видом ограничений, налагаемых на метрику. Будем называть концепцию (1.3.1) - (1.3.3), использующую в качестве ЕГО кратчайшую, метрической геометрией (или традиционной метрической геометрией). Концепцию метрической геометрии, основанную на использовании в качестве ЕГО трубок будем называть Т-геометрией (геометрией трубок), или невырожденной геометрией[2]. Т-геометрия является более общей геометрической концепцией, поскольку не содержит ограничений (1.3.2), (1.3.3) и включает в себя традиционную метрическую геометрию (1.3.1) - (1.3.3) как частный случай.

Т-геометрия существенно отличается от метрической геометрии (1.3.1) - (1.3.3) тем, что она снабжена математическим аппаратом (ЕГО-формализмом),

[2]Более правильным было бы назвать концепцию (1.3.5) метрической геометрией, а концепцию (1.3.1) - (1.3.3) являющуюся частным случаем (1.3.5) – вырожденной метрической геометрией. Мы не делаем этого из опасения внести путаницу, т.к. за концепцией (1.3.1) - (1.3.3) уже давно закрепилось название метрической геометрии (метрического пространства).

позволяющим строить ЕГО и другие геометрические объекты. В традиционной метрической геометрии этот формализм отсутствует, что делает ее менее содержательной. Построение кратчайшей (основного геометрического объекта метрической геометрии) требует обязательного использования ограничений (1.3.2), (1.3.3). Т-геометрия, используя более развитый математический аппарат, может без всяких проблем отказаться от ограничений (1.3.2), (1.3.3). Это приводит к существенным различиям в двух пунктах:

(1) Т-геометрия есть невырожденная геометрия, допускающая существование трубок, что невозможно в традиционной метрической геометрии.

(2) Т-геометрия нечувствительна к непрерывности и одинаково применима как в непрерывном так и в дискретном случае.

Формально метрическая геометрия (1.3.1) - (1.3.3) тоже не содержит ссылки на непрерывность. Однако способ построения кратчайшей – основного геометрического объекта метрической геометрии – содержит ссылку на линию и многообразие, которые предполагают существование непрерывности. То обстоятельство, что понятия многообразия и линии вводятся [7] на основе метрических соотношений (1.3.1) - (1.3.3) не меняет существа дела, так как хотя введение понятия кратчайшей в дискретной метрической геометрии, повидимому, возможно, но уже введение понятий угла, многоугольника и кривизны представляется проблематичным, поскольку введение этих понятий использует предельные переходы и, следовательно, понятие непрерывности.

Анализируя способ изложения метрической геометрии на примере замечательной книги А.Д. Александрова [7] можно заметить, что введение основных понятий (кратчайшая, многоугольник, угол, кривизна) требует много искусства и изобретательности, поскольку все эти объекты являются сложными многоточечными структурами. Работа с этими объектами вряд ли может быть формализована, и этим она напоминает аксиоматическое изложение евклидовой геометрии. В книге [7] показано, что появление основных геометрических понятий (кратчайшая, многоугольник, угол, кривизна) было получено из из анализа особенностей, возникающих в вершинах выпуклых многогранников трехмерного евклидова пространства, и последующего перехода к пределу, в результате которого выпуклые многогранники переходили в выпуклые тела. При построении внутренней геометрии на поверхности выпуклых многогранников упрощающим было то обстоятельство, что геометрия является евклидовой с особыми точками только одного типа (типа вершины конуса), каждая из которых могла быть описана одним числом. Достаточно себе представить, что рассматривается геометрия поверхностей многогранников в четырехмерном пространстве, где особенности в вершинах не могут быть описаны одним числом или допустить, что геометрия является дискретной, как проблемы, порожденные отсутствием формального подхода возрастут многократно. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве может быть описана в терминах кратчайшей (т.е. ЕГО первого порядка). Однако, уже для построения внутренней геометрии выпуклых поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве одних кратчайших недостаточно и потребуется введение ЕГО второго порядка. Введение их на основе аксиомы треугольника (1.3.3) представляется проблематичным.

В отличие от метрической геометрии введение ЕГО в Т-геометрии представляется достаточно формальным и не требующим проявления особой изобретательности. ЕГО первого порядка в Т-геометрии вводится на базе рассмотрения сравнительно простых трехточечных структур. Для введения ЕГО второго порядка достаточно рассмотреть четырехточечные структуры и т.д.

При подходе, основанном на понятии кратчайшей, было получено много интересных результатов, но их сравнение с результатами Т-геометрии крайне сложно, поскольку они относятся к двум различным случаям. В традиционной метрической геометрии неравенство треугольника (1.3.3) выполнено для всех точек, а в Т-геометрии не для всех точек пространства.

Развитие Т-геометрии приводит к ряду общих и полезных результатов, которые оправдывают введение ЕГО с помощью соотношений типа (1.3.9). После введения ЕГО-формализма, когда использование аксиомы треугольника перестает быть необходимым, метрическая геометрия (Т-геометрия) становится достаточно содержательной, чтобы использоваться в качестве модели пространства-времени. Однородные и изотропные модели пространства-времени могут различаться теперь не только кривизной (один параметр), но и функцией дисторсии (функция одного аргумента). Для однородного и изотропного пространства-времени дисторсия D есть функция только мировой функции σ. Возникает проблема выбора оптимальной модели для реального пространства-времени, т.е. геометрию пространства-времени нужно выбрать так, чтобы она оптимальным образом объясняла наиболее общие черты наблюдаемых физических явлений. Этой проблемы не было, пока существовала только одна плоская однородная и изотропная модель пространства-времени (модель Минковского). В пространстве-времени с ненулевой дисторсией мировые трубки частиц оказываются случайными. Функция дисторсии D может быть выбрана таким образом, что статистическое описание этих случайных мировых трубок совпадет с квантовым описанием. В этом случае дисторсия D зависит от квантовой постоянной $\hbar$, причем квантовая постоянная $\hbar$ является величиной, описывающей свойства пространства-времени, а необходимость в использовании специальных квантовых принципов отпадает.

Содержательность метрической геометрии после введения ЕГО-формализма проявляется в том, что евклидова и риманова геометрия могут быть построены на основе только мировой функции. Можно сформулировать в терминах мировой функции условия, которым должна удовлетворять мировая функция для того, чтобы геометрия была евклидовой (или римановой). Так что в случае, когда мировая функция σ соответствует собственно евклидовой геометрии, оказывается возможным проверить выполнение аксиом собственно евклидовой геометрии и построить ее в обычной аксиоматической форме. В случае, когда мировая функция σ соответствует римановой геометрии, оказывается возможным, опираясь на определение ЕГО, построить многообразие и сформулировать геометрию в терминах дифференциальной геометрии.

Иерархия понятий в метрической концепции геометрии выглядит следующим образом. Мировая функция (или расстояние), естественные геометрические объекты, непрерывность (или дискретность), многообразие (или его отсутствие), размерность. Мировая функция является величиной, содержащей всю информацию о геометрии. Все остальные величины (включая ЕГО-формализм) являются производными (вторичными), что хорошо согласуется с интуитивным представлением, что расстояние между парами точек полностью определяет геометрию.

Проведем сравнение иерархий понятий в различных концепциях геометрии.

1. Аксиоматическая концепция геометрии базируется на понятии ЕГО, которые рассматриваются как фундаментальные понятия геометрии и определяются через их свойства с помощью системы аксиом. С одной стороны такая концепция не содержит дополнительных вспомогательных конструкций (типа многообразия), но с другой стороны такая концепция является очень жесткой и не позволяет описывать различные варианты геометрий, так как для этого пришлось бы модифицировать аксиомы, которые мало приспособлены для модификаций.

Иерархия базисных понятий: ЕГО, расстояние.

2. Дифференциальная геометрия базируется на понятии многообразия, которое является одновременно носителем геометрии и математическим аппаратом для построения геометрических объектов. Многообразие не адекватно самой геометрии. Оно привносит ряд понятий и свойств характерных для понятия многообразия, но не для самой геометрии. Рассматривая преобразования координат на многообразии и их инварианты, удается отделить от геометрии часть свойств многообразия, но не все. Такие понятия как размерность и непрерывность отделить не удается, и они воспринимаются как свойства самой геометрии, (а не свойства многообразия, являющегося носителем геометрии). В дифференциальной геометрии ЕГО являются производными понятиями, зависящими от выбора метрики (расстояния между бесконечно близкими точками). С одной стороны метрику можно варьировать и рассматривать различные варианты римановой геометрии. С другой стороны, возможности описания геометрии ограничены свойствами ее носителя – многообразия.

Иерархия базисных понятий: многообразие (размерность, непрерывность), расстояние, ЕГО.

3. Метрическая концепция геометрии базируется на утверждении, что расстояние между парами точек полностью определяет геометрию. В результате основным понятием концепции является метрика (функция расстояния или мировая функция). Для определения ЕГО существует определенный алгоритм, позволяющий определить ЕГО и все их свойства через мировую функцию. При этом метрическая концепция геометрии обладает характерной для аксиоматической концепции независимостью от вспомогательных построений и характерной для дифференциальной геометрии возможностью модификации геометрии. Возможности модификации геометрии в метрической концепции значительно превосходят возможности модификации дифференциальной геометрии,

поскольку они не ограничены возможностями носителя геометрии (многообразия). В результате в метрической концепции геометрии возможны такие варианты геометрии, которые в дифференциальной геометрии трудно даже вообразить.

Иерархия базисных понятий: расстояние, ЕГО, а так же непрерывность, размерность, если они существуют.

Резюмируя, можно сказать, что метрическая концепция геометрии представляет собой, по существу, просто концепцию геометрии, как конструкции, определяемой заданием расстояния между любыми парами точек. При этом многообразие и ЕГО представляют собой просто два разных инструмента для изучения геометрии. Многообразие, рассматриваемое как отображение пространства на непрерывное числовое множество, представляет собой конструкцию, удобную для использования математичесого аппарата современной физики и механики, которая, однако, адекватна самой геометрии только частично. Такие понятия как размерность, непрерывность и линия, сопровождающие всегда понятие многообразия, не всегда адекватны геометрии, так как вполне возможна геометрия, где нельзя ввести размерность и нет непрерывности. Что касается линии, то она определяется в терминах многообразия, а не геометрии. Наоборот, ЕГО представляют собой инструмент, полностью адекватный геометрии, в то время как связь его с математическим аппаратом современной физики и механики разработана очень слабо.

1.4 Математическая формулировка различий в концепциях

Математическая формулировка дифференциальной геометрии выглядит следующим образом. Геометрия на множестве точек Ω задается с помощью двух отображений

$$M_n: \qquad \Omega \leftrightarrow M_n \subset \mathbb{R}^n, \qquad \mathbb{R}^n \equiv \bigotimes_{i=1}^{i=n} \mathbb{R}, \tag{1.4.1}$$

$$g: \qquad M_n \rightarrow G_n, \tag{1.4.2}$$

где $\mathbb{R}^n$ есть множество всех упорядоченных множеств из n вещественных чисел $(x^1, x^2, ...x^n)$, а M_n есть его подмножество (область). G_n есть множество всех симметричных вещественных неособенных матриц $\mathbf{g}$ порядка n. Предполагается, что отображения (1.4.1), (1.4.2) обладают рядом специальных свойств таких, что (1.4.1) задает n-мерное многообразие, а отображение (1.4.2) – метрический тензор на нем. Это можно было бы интерпретировать в том смысле, что отображение (1.4.2) задает геометрию, а отображение (1.4.1) описывает способ нумерации точек пространства, т.е. есть математический инструмент для описания геометрии. Трудность, однако, в том, что преобразование (1.4.2), описывающее геометрию, задается всегда после преобразования (1.4.1), описывающего многообразие и вводящего в геометрию размерность. При таком введении размерности она возникает как атрибут многообразия и становится принадлежностью геометрии, если признать, что многообразие есть составная часть геометрии.

Примем во внимание, что матрица $\mathbf{g}$ определяет квадратичную форму,

$$dS^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k, \tag{1.4.3}$$

задающую расстояние между двумя бесконечно близкими точками. При задании расстояния порядок матрицы $\mathbf{g}$ (т.е. размерность многообразия) не имеет значения.

На базе отображений (1.4.1), (1.4.2) можно ввести конечное расстояние, определив мировую функцию σ как половину квадрата расстояния между двумя точками P_0 и P_1, измеренного вдоль геодезической (ЕГО первого порядка), порожденной этими двумя точками. Мировая функция определяется как отображение

$$\sigma : \qquad \Omega^2 \to \mathbb{R}, \qquad \Omega^2 \equiv \Omega \otimes \Omega, \tag{1.4.4}$$

не содержащее параметра n, описывающего размерность геометрии.

Геометрия на множестве Ω полностью определяется заданием отображения (1.4.4). Отображения (1.4.1), (1.4.2) могут быть получены из отображения (1.4.4) в тех случаях когда отображение (1.4.1) существует и обладает необходимыми свойствами. В том случае, когда отображение (1.4.1), обладающее необходимыми свойствами, не существует, отображение (1.4.4) определяет геометрию, которая не может быть описана в рамках дифференциальной геометрии.

Представление геометрии в виде отображений (1.4.1), (1.4.2) содержит целочисленный параметр n (размерность), отсутствующий в отображении (1.4.4). Этот параметр n может быть получен из отображения (1.4.4) следующим образом. Рассмотрим множество отображений, зависящих от натурального числа n

$$F_n : \qquad \Omega^{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad \Omega^{n+1} \equiv \bigotimes_{i=1}^{i=n+1} \Omega, \qquad n = 1, 2, ... \tag{1.4.5}$$

причем отображение F_n определяется отображением σ следующим образом.

$$F_n (\mathcal{P}^n) = \det ||\Gamma (P_0, P_i, P_k)||, \qquad P_0, P_i, P_k \in \Omega, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{1.4.6}$$

$$\Gamma (P_0, P_i, P_k) \equiv \sigma (P_0, P_i) + \sigma (P_0, P_k) - \sigma (P_i, P_k), \qquad i, k = 1, 2, ...n$$

где $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \in \Omega^{n+1}, \quad P_i \in \Omega, \quad i = 0, 1, ...n.$

Смысл функции F_n легко понять, рассмотрев D-мерное собственно евклидово пространство $E_D = \{\sigma, \mathbb{R}^D\}$, где $\sigma(P, Q), \quad P, Q \in \mathbb{R}^D$ есть половина квадрата евклидова расстояния между точками $P, Q \in \mathbb{R}^D$ в E_D. Тогда $(n!)^{-2} F_n(\mathcal{P}^n)$ есть выраженный через длины ребер $(n+1)$-эдра, квадрат евклидова объема $(n+1)$-эдра с вершинами $P_0, P_1, ...P_n$ в собственно евклидовом пространстве E_D. В частности, $F_1(P_0, P_1) = 2\sigma(P_0, P_1)$. Если геометрия, описываемая отображением (1.4.4) есть D-мерная евклидова геометрия, то необходимым условием этого является выполнение соотношений $F_n(\mathcal{P}^n) = 0$, $\forall \mathcal{P}^n \in \Omega^{n+1}$ для $n > D$, т.е.

$$F_n(\Omega^{n+1}) = 0, \qquad n = D+1, D+2, ... \tag{1.4.7}$$

Для каждого значения n отображение (1.4.5) определяет естественный геометрический объект $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \subset \Omega$, зависящий от таких параметров $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \in \Omega^{n+1}$, для которых $F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0$.

$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \subset \Omega$ есть такое множество точек $P \in \Omega$, что

$$F_{n+1}(\mathcal{P}^n, P) = 0, \qquad \{\mathcal{P}^n, P\} \equiv \{P_0, P_1, ...P_n, P\} \in \Omega^{n+2} \tag{1.4.8}$$

т.е.

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = \{P \mid F_{n+1}(\mathcal{P}^n, P) = 0\}, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0 \tag{1.4.9}$$

$$P \in \Omega, \qquad \{\mathcal{P}^n, P\} \equiv \{P_0, P_1, ...P_n, P\} \in \Omega^{n+2}.$$

С точки зрения дифференциальной геометрии отображение (1.4.1), есть составная часть геометрии в том смысле, что риманова геометрия не может быть определена без использования отображения (1.4.1). С точки зрения метрической концепции геометрии отображение (1.4.4) полностью описывает геометрию на Ω, а отображение (1.4.1) представляет собой не более, чем инструмент для исследования геометрии, причем этот математический инструмент очень специализирован и пригоден для исследования специальных (вырожденных) геометрий. Набор отображений (1.4.5) тоже является инструментом для исследования геометрии (1.4.4), но этот математический инструмент согласован с геометрией (1.4.4) и пригоден для исследования любой геометрии (1.4.4).

Пример 1.4.1. Пусть Т-геометрия $\{\sigma, \Omega\}$ (1.4.4) задана на некотором множестве Ω. Предположим , что эта Т-геометрия описывает трехмерный единичный куб с собственно евклидовой геометрией на нем. Это по определению означает существование биекции

$$f: \quad \Omega \to (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{x} = f(P), \qquad P = f^{-1}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = \left\{x^1, x^2, x^3\right\} \in (0,1)^3, \qquad P \in \Omega$$

$$\sigma_E: \quad (0,1)^3 \times (0,1)^3 \to \mathbb{R}, \qquad \sigma_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(P, P') = \sigma_E(f(P), f(P')), \qquad P, P' \in \Omega, \qquad f(P), f(P') \in (0,1)^3,$$

где σ_E есть мировая функция евклидова пространства.

Пусть вид биекции f неизвестен, хотя известно, что она существует. Зададимся следующим вопросом. Возможно ли проверить, что геометрия, заданная на множестве Ω действительно трехмерная евклидова геометрия, если известен только вид мировой функции $\sigma(P, P')$? Возможно ли построение трехмерного многообразия на Ω? Ответ на эти вопросы утвердительный. Используя отображения (1.4.5) для различных значений n, можно определить размерность и построить многообразие, даже если вид биекции f неизвестен. Следует действовать следующим образом.

1. Выбираем две различные точки $P_0, P_1 \in \Omega$, $\sigma(P_0,P_1) \neq 0$, образуем ЕГО первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1} \subset \Omega$, и проверяем, что $\Omega\backslash\mathcal{T}_{P_0P_1} \neq \emptyset$. Последнее неравенство есть результат того, что $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ есть прообраз прямой $\mathcal{L}_{P_0P_1} = f\left(\mathcal{T}_{P_0P_1}\right) \subset (0,1)^3$ в кубе $(0,1)^3$, и эта прямая не исчерпывает всего куба, т.е. $(0,1)^3\backslash\mathcal{L}_{P_0P_1} \neq \emptyset$.

2. Выбираем любую точку $P_2 \in \Omega\backslash\mathcal{T}_{P_0P_1}$, образуем ЕГО второго порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1P_2} \subset \Omega$ и проверяем, что $\Omega\backslash\mathcal{T}_{P_0P_1P_2} \neq \emptyset$. Это должно быть выполнено так как $(0,1)^3\backslash\mathcal{L}_{P_0P_1P_2} \neq \emptyset$, и плоскость $\mathcal{L}_{P_0P_1P_2} = f\left(\mathcal{T}_{P_0P_1P_2}\right) \subset (0,1)^3$ не содержит все множество точек куба $(0,1)^3$.

3. Выбираем любую точку $P_3 \in \Omega\backslash\mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$, образуем ЕГО третьего порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1P_2P_3}$, и убеждаемся, что теперь $\Omega\backslash\mathcal{T}_{P_0P_1P_2P_3} = \emptyset$, так как $(0,1)^3\backslash\mathcal{L}_{P_0P_1P_2P_3} = \emptyset$, и не существует точек в кубе, не принадлежащих трехмерной плоскости $\mathcal{L}_{P_0P_1P_2P_3}$, проходящей через четыре точки P_0, P_1, P_2, P_3. В этом случае $P_3 \notin \mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$ и, следовательно,

$$F_3\left(\mathcal{P}^3\right) \neq 0 \tag{1.4.10}$$

потому что если $F_3\left(\mathcal{P}^3\right) = 0$, то в соответствии с (1.4.9) имеем $P_3 \in \mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$.

4. Теперь можно определить ковариантные координаты $y_i(P)$ любой точки P и контравариантные компоненты g^{ik} метрического тензора в базисе, образованном тремя векторами $\overrightarrow{\mathbf{PP}}_i$ $(i = 1,2,3)$. Они определяются соотношениями

$$y_i(P) = \left(\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}}_i.\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}}\right), \qquad i = 1,2,3 \tag{1.4.11}$$

$$g_{ik} = \left(\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}}_i.\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}}_k\right), \qquad i,k = 1,2,3, \qquad \det||g_{ik}|| \neq 0 \tag{1.4.12}$$

$$\sum_{l=1}^{3} g^{il}g_{kl} = \delta_i^k, \qquad i,k = 1,2,3$$

Здесь скалярное произведение $\left(\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}}.\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}'}\right)$ определяется с помощью соотношения

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}}.\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}'}\right) \equiv \sigma\left(P_0,P\right) + \sigma\left(P_0,P'\right) - \sigma\left(P,P'\right), \qquad P,P' \in \Omega \tag{1.4.13}$$

Матрица g^{ik}, обратная к матрице g_{ik} может быть определена, поскольку $\det||g_{ik}|| \neq 0$. Это неравенство есть следствие (1.4.10), второго соотношения (1.4.12), (1.4.13) и (1.4.6). Соотношения (1.4.11) - (1.4.13) справедливы для образов $\mathbf{x} = f\left(P\right) \in (0,1)^3$ точек $P \in \Omega$. Эти соотношения верны также для прообразов $P \in \Omega$.

Определив координаты $y_i(P)$ произвольной точки P, можно проверить справедливость соотношения

$$\sigma\left(P,P'\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} g^{ik}\left(y_i(P) - y_i(P')\right)\left(y_k(P) - y_k(P')\right), \qquad \forall P,P' \in \Omega \tag{1.4.14}$$

которое верно для мировой функции σ евклидова пространства. Это означает, что многообразие можно построить, если известна мировая функция и что именно мировая функция (а не многообразие) содержит информацию о геометрии.

Пример 1.4.2. Рассмотрим две разные Т-геометрии на единичной сфере

$$V = \left\{ \mathbf{x} \left| |\mathbf{x}|^2 \leq 1 \right. \right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{x} = \left\{ x^1, x^2, x^3 \right\} \in \mathbb{R}^3, \qquad |\mathbf{x}|^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \left(x^i \right)^2 \quad (1.4.15)$$

Одна из Т-геометрий есть собственно евклидова геометрия $T_E = \{\sigma_E, V\}$

$$\sigma_E : \quad V \times V \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}, \qquad \sigma_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V, \quad (1.4.16)$$

Другая Т-геометрия $T = \{\sigma, V\}$ определяется а том же самом множестве V с помощью соотношений

$$\sigma : \quad V \times V \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}, \qquad \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \left(\arcsin \sqrt{\frac{\sigma_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{2}} \right)^2, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V \quad (1.4.17)$$

Одновременно с этими двумя Т-геометриями внутри сферы V, рассматриваются Т-геометрии на поверхности сферы $\Omega = \partial V = \{\mathbf{x} \,||\mathbf{x}|^2 = 1\} \subset V$. Поскольку Ω есть подмножество множества V, то Т-геометрии $T_{Es} = \{\sigma_E, \Omega\}$ и $T_s = \{\sigma, \Omega\}$ порождаются Т-геометриями T_E и T.

Обозначим трубки Т-геометрии T_E с помощью символа $\mathcal{L}$, а трубки Т-геометрии T посредством $\mathcal{T}$. Трубки первого порядка $\mathcal{L}_{AB} \subset V, \quad (A, B \in \Omega)$ суть прямые линии в V и – две точки A, B в Ω. Другими словами, Т-геометрия T_E вырождена в первом порядке в V и ультравырождена в первом порядке в Ω. Трубки первого порядка $\mathcal{T}_{AB} \subset V, \quad (A, B \in \Omega)$ суть невырожденные трубки в V. Они представляют собой поверхности, полученные в результате вращения окружности единичного радиуса, проходящей через точки $A, B \in \Omega$, вокруг оси $\mathcal{L}_{AB}$. (см. Рис. 1.4.1) Эти трубки касаются поверхности сферы Ω вдоль окружностей максимального радиуса. Сегмент $\mathcal{T}_{[AB]}$ трубки между точками $A, B \in \Omega$ находится внутри сферы V, тогда как остальная часть трубки $\mathcal{T}_{AB}$ находится вне внутренней части $V \backslash \Omega$ сферы V. В результате в Т-геометрии $T_s = \{\sigma, \Omega\}$ сегмент $\mathcal{T}_{[AB]}$ трубки $\mathcal{T}_{AB} \subset \Omega, \quad (A, B \in \Omega)$ есть кратчайшая линия на поверхности сферы Ω, соединяющая точки $A, B \in \Omega$. Остальная часть трубки $\mathcal{T}_{AB} \subset \Omega$ есть продолжение сегмента $\mathcal{T}_{[AB]} \subset \Omega$. Иначе говоря, Т-геометрия $T_s = \{\sigma, \Omega\}$ есть вырожденная в первом порядке Т-геометрия на Ω. Таким образом, Т-геометрия $T = \{\sigma, V\}$ невырождена в V и вырождена в Ω. Трубка второго порядка $\mathcal{T}_{ABC} \subset \Omega$ состоит из трех точек $A, B, C \subset \Omega$, и Т-геометрия $T_s = \{\sigma, \Omega\}$ есть ультравырожденная во втором порядке геометрия на Ω.

С другой стороны, Т-геометрия $T_s = \{\sigma, \Omega\}$ на поверхности сферы Ω может быть построена на основе евклидовой геометрии $T_E = \{\sigma_E, V\}$ внутри сферы

V. Чтобы построить $T_s = \{\sigma, \Omega\}$ на основе $T_E = \{\sigma_E, V\}$, нужно использовать экстремальные свойства геодезических. Рассмотрим трубку второго порядка $\mathcal{L}_{ABC} \subset V$, $(A, B, C \in \Omega)$. Эта трубка есть двумерная плоскость, проходящая через точки $A, B, C \in \Omega$. В Т-геометрии $T_{Es} = \{\sigma_E, \Omega\}$ трубка второго порядка $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$ имеет форму окружности, проходящей через точки $A, B, C \in \Omega$.

Чтобы построить Т-геометрию $T_s = \{\sigma, \Omega\}$, нужно определить метрику $S(A,B) = \sqrt{2\sigma(A,B)}$, $A, B \in \Omega$ на $\Omega \times \Omega$, следующим образом

$$S(A,B) = \inf_{C\in\Omega, C\neq A, C\neq B} l_C(A,B), \qquad A, B \in \Omega, \tag{1.4.18}$$

где $l_C(A,B) \subset [0,\infty)$ есть длина кривой $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$ между точками A, B. Упорядочим точки $R \in \mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$ кривой $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$, решая уравнение

$$S_E(A,R)(1-\tau) = S_E(B,R)\tau, \qquad R \in \mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega, \qquad \tau \in \mathbb{R} \tag{1.4.19}$$

Решение этого уравнения определяет $R = R_{AB}(\tau, C) \in \mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$ как функцию параметра $\tau \in [0,1]$ и точки $C \in \Omega$. При этом $A = R_{AB}(0,C)$, $B = R_{AB}(1,C)$. Функция $R = R_{AB}(\tau, C)$ имеет две ветви $R = R_1(\tau, C)$ и $R = R_2(\tau, C)$. Нужно выбрать ветвь с меньшими значениями $S_E(A, R_{AB}(\tau, C))$ и определить $l_C(A,B)$ с помощью соотношения

$$l_C(A,B) = \int_0^1 \left[\frac{dS_E(R_{AB}(\tau,C), R_{AB}(\tau',C))}{d\tau'}\right]_{\tau'=\tau} d\tau \tag{1.4.20}$$

Подставляя (1.4.20) в (1.4.18), получаем

$$S(A,B) = 2\arcsin\frac{S_E(A,B)}{2}, \qquad A, B \in \Omega \tag{1.4.21}$$

что соответствует (1.4.17).

Этот пример показывает, что используя евклидову Т-геометрию внутри V, можно построить внутреннюю метрику (и Т-геометрию) на поверхности Ω сферы V. Для построения геометрии на Ω, существенно используются экстремальные свойства геодезических (кратчайших) и трубки второго порядка $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$, которые вводят систему кривых на поверхности сферы Ω.

Эти примеры показывает, что многообразие не является необходимой принадлежностью или составной частью евклидовой геометрии. Оно является инструментом, используемым для изучения геометрии. С другой стороны содержательность и богатство геометрии (т.е. количество сортов рассматриваемых геометрических объектов) зависит не столько от самой геометрии, сколько от степени разрботанности математического аппарата, используемого геометрией. Т-геометрия использует существенно более развитый математический аппарат (ЕГО-формализм) и является более содержательной геометрией, чем традиционная метрическая геометрия, хотя обе они используют одно и то же определение геометрии (1.4.4).

В традиционной метрической геометрии геометрия на множестве Ω также определяется отображением (1.4.4) с некоторыми дополнительными ограничениями на σ. Однако, в традиционной метрической геометрии используется только понятие естественного геометрического объекта (ЕГО) первого порядка (кратчайшая), набор отображений (1.4.5) не используется, и по существу отсутствует эффективный математический инструмент для исследования геометрии. В результате метрическая геометрия оказывается мало содержательной геометрией. Связь ее с собственно римановой геометрией является очень слабой и односторонней. Практически эта связь исчерпывается утверждением, что собственно риманова геометрия является одновременно метрической геометрией. Такой важный вопрос, при каких условиях (формулируемых в терминах метрической геометрии) метрическая геометрия является одновременно собственно римановой, обычно даже не ставится.

Математический инструмент (1.4.5), пригодный для исследования любой геометрии, может быть применен для исследования евклидовой и римановой геометрий. Сравнение полученного результата с результатами традионнго изложения (1.4.1), (1.4.2) римановой геометрии позволяет определить, что именно в отображениях (1.4.1), (1.4.2) обусловлено геометрией, а что связано с введением понятия многообразия (1.4.1). Оказывается, что линия является атрибутом многообразия, а не геометрии самой по себе. Иначе говоря, существуют такие (невырожденные) геометрии, для которых нельзя ввести понятие линии сколько-нибудь разумным способом. Важным является также то обстоятельство, что геометрия реального пространства-времени является невырожденной, и понятие линии можно ввести лишь приближенно, как трубку, толщина которой мала по сравнению с ее длиной.

1.5 Обобщения евклидовой геометрии

С формальной точки зрения риманова геометрия и Т-геометрия представляют собой два различных обобщения собственно евклидовой геометрии, основанные на различных свойствах евклидовой прямой. Риманова геометрия основана на экстремальном свойстве евклидовой прямой, т.е. свойстве прямой описывать кратчайшее расстояние между двумя точками. Т-геометрия основана на коллиметрическом свойстве евклидовой прямой (определение 1.3.1), т.е. на выраженном в терминах расстояния свойстве сегментов евклидовой прямой быть параллельными друг другу. Вообще говоря, экстремальность есть глобальное свойство геометрии, т.е. свойство, связанное с рассмотрением многоточечных структур, тогда как коллиметрическое свойство есть свойство, связанное с рассмотрением трехточечных структур. Использование коллиметрического свойства налагает ограничение на множество точек, образующих ЕГО первого порядка, тогда как условие экстремальности налагает ограничения не только на множество точек, образующих ЕГО первого порядка, но и на вид мировой функции.

n-мерная собственно евклидова геометрия может рассматриваться как задание на многообразии $\mathbb{R}^n$ квадратичной формы

$$dS^2 = g_{ik}dx^i dx^k, \qquad g_{ik} = \mathrm{diag}\{1, 1..., 1\}, \qquad i, k = 1, 2, ...n, \tag{1.5.1}$$

где $x = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\} \in \mathbb{R}^n$, а по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n. Прямые линии $\mathcal{L}$ определяются как экстремали функционала

$$S[x, x', \mathcal{L}] = \int\limits_x^{x'} \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}, \qquad \mathcal{L}: \ x^i = x^i(\tau), \qquad i = 1, 2, ...n \tag{1.5.2}$$

где интегрирование производится вдоль линии $\mathcal{L}$, соединяющей точки x и x'. $\tau \in \mathbb{R}$ есть параметр вдоль линии $\mathcal{L}$.

Риманова геометрия возникает в результате замены множества $\mathbb{R}^n$ на многообразие $M_n \subset \mathbb{R}^n$ и обобщения вида квадратичной формы (1.5.1), коэффициенты которой g_{ik} рассматриваются как произвольные функции координат $x \in \mathbb{R}^n$, ограниченные тем условием, что матрица $g_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$ симметричная и неособенная. Экстремали $\mathcal{L}$ функционала (1.5.2), называемые геодезическими, играют в римановой геометрии ту же роль, какую прямые играют в собственно евклидовой геометрии. Возможность построения римановой геометрии ограничена возможностями определения ее базовых построений (1.5.1), (1.5.2). Построения (1.5.1), (1.5.2) требуют достаточной гладкости многообразия $M_n \subset \mathbb{R}^n$, на котором строится риманова геометрия. Поэтому понятие непрерывности является ключевым понятием римановой геометрии. Например, если изъять из многообразия M_n достаточно большое число точек, нарушив его непрерывность, то построение римановой геометрии может стать невозможным. Множество различных n-мерных римановых геометрий определяется $n(n+1)/2$ функциями g_{ik} от точек многообразия M_n.

В качестве основы для построения Т-геометрии используются конечные соотношения собственно евклидовой геометрии. Соотношение

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2}S^2(x, x') = \frac{1}{2}g_{ik}(x^i - x'^i)(x^k - x'^k), \qquad g_{ik} = \mathrm{diag}\{1, 1, ..., 1\} \tag{1.5.3}$$

задает конечное расстояние $S(x, x')$ между точками $x \in \mathbb{R}^n$ и $x' \in \mathbb{R}^n$ собственно евклидова пространства. Соотношение

$$\mathcal{L}_{xx'} = \left\{ y \left| \overrightarrow{xx'} || \overrightarrow{xy} \right. \right\} \tag{1.5.4}$$

определяет прямую, проходящую через точки x и x', как множество таких точек y, что векторы $\overrightarrow{xx'}$ и $\overrightarrow{xy}$ коллинеарны. Коллинеарность $\overrightarrow{xx'} || \overrightarrow{xy}$ векторов $\overrightarrow{xx'}$, $\overrightarrow{xy}$ определяется через скалярное произведение

$$\left(\overrightarrow{xx'}.\overrightarrow{xy}\right) = \sigma(x, x') + \sigma(x, y) - \sigma(y, x'), \tag{1.5.5}$$

выражаемое только через мировую функцию (1.5.3). Вектор $\overrightarrow{xx'}$ и вектор $\overrightarrow{xy}$ коллинеарны, если они удовлетворяют соотношению

$$\left(\overrightarrow{xx'}.\overrightarrow{xy}\right)^2 = \left(\overrightarrow{xx'}.\overrightarrow{xx'}\right)\left(\overrightarrow{xy}.\overrightarrow{xy}\right), \tag{1.5.6}$$

содержащему в силу (1.5.5) только расстояния между точками x, x' и y.

Т-геометрия возникает в результате замены множества вещественных чисел $\mathbb{R}^n$ на произвольное множество Ω точек $x \in \Omega$ и обобщения соотношения (1.5.3), определяющего метрику, и соотношения (1.5.4), определяющего прямую на случай произвольной функции $\sigma : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей лишь условиям

$$\sigma(x, x') = \sigma(x', x), \qquad \sigma(x, x) = 0, \qquad x, x' \in \Omega. \tag{1.5.7}$$

Поскольку все соотношения, определяющие Т-геометрию, являются алгебраическими, то не возникает каких-либо требований к непрерывности и гладкости множества Ω точек, на котором задается Т-геометрия. Например, изъятие точек из множества Ω, на котором задается Т-геометрия практически не сказывается на геометрии, если оставшихся точек достаточно много и расположены они достаточно плотно. Т-геометрия нечувствительна к топологическим свойствам (дискретности или нерпрерывности) множества точек, на котором она задается.

В принципе идеи построения римановой геометрии и Т-геометрии очень близки (в том и в другом случае определяются фундаментальные объекты: расстояние и прямая). Соотношения (1.5.1), (1.5.2) эквивалентны соотношениям (1.5.3) - (1.5.6) в том смысле, что те и другие задают собственно евклидову геометрию. Однако, способы определения прямой концептуально различны.

Функционал (1.5.2) определяет прямую как *линию*, обладающую экстремальным свойством, т.е. свойством быть кратчайшей линией. Этот способ определения евклидовой прямой содержит ссылку на понятие линии, которая является достаточно сложной структурой и нуждается для своего обоснования во введении таких дополнительных структур как многообразие и его топологическая структура. Формальное использование экстремального свойства прямой содержит ссылку на экстремали функционала (1.5.2), которые зависят от того, какова топологическая структура многообразия и на каком классе кривых ищется экстремум.

Соотношения (1.5.4) - (1.5.6) определяют прямую как *множество точек*, каждая точка R которого обладает коллиметрическим свойством, т.е. выраженным в терминах метрики свойством, что отрезки прямой от точки R до базисных точек, определяющих прямую, параллельны друг другу. Это – более простой, более общий и непосредственный способ определения евклидовой прямой, так как он не содержит ссылок на структуры, отличные от расстояния между точками. Сама возможность определения евклидовой прямой и обобщения евклидовой геометрии на базе одной только мировой функции ставит вопрос об отношении к геометрии таких структур как многообразие и его топологическая структура. В какой мере эти структуры являются дополнительными структурами, обогащающими геометрию, а в какой мере они являются производными структурами, порожденными основной структурой (мировой функцией)? Кроме того, то обстоятельство, что свойство экстремальности прямой не используется при определении евклидовой прямой, позволяет получить после обобщения собственно евклидовой геометрии нарушение экстремальности. По существу трубки – это неэкстремальные прямые. Их появление в Т-геометрии означает нарушение экстремального свойства "обобщенной прямой".

Если рассматривать обобщения собственно евклидовой геометрии как возможные модели реального пространства-времени, то возникает вопрос, какой способ обобщения является более предпочтительным. Тот, где прямая определяется ее экстремальным свойством (риманова геометрия), или тот, где прямая определяется ее коллиметрическим свойством (Т-геометрия)?

Заметим сразу, что вопрос о предпочтительности того или иного обобщения собственно евклидовой геометрии сам по себе бессодержателен, и его можно ставить только по отношению к геометрии реального мира, руководствуясь при этом некоторым критерием. В качестве такого критерия мы будем использовать тот принцип, что реальные явления и процессы должны описываться в терминах естественных геометрических объектов (ЕГО). Это означает, что геометрия должна лежать в основе физических и других природных процессов. Например, мировая линия свободной частицы малого размера описывается времениподобной прямой, которая является ЕГО в псевдоримановой геометрии (Минковского) и в Т-геометрии, а мировая линия частицы, движущейся в некотором поле, может рассматриваться как состоящая из сегментов времениподобной прямой.

Рассмотрим геометрию Минковского как простейшую однородную и изотропную модель пространства-времени. Она получается в результате замены метрического тензора $g_{ik} = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, 1\}$, $i, k = 0, 1, 2, 3$ собственно евклидова пространства E_4 на метрический тензор

$$g_{ik} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3 \tag{1.5.8}$$

пространства Минковского E_{1+3}. Замена $g_{ik} = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, 1\}$, $i, k = 0, 1, 2, 3$ на выражение (1.5.8) в (1.5.3) порождает соответствующий вариант T_{1+3} Т-геометрии. При этом времениподобные прямые являются ЕГО как в E_{1+3} так и в T_{1+3}. Однако, пространственноподобные прямые являются ЕГО в E_{1+3}, но не являются ЕГО в T_{1+3}. Другими словами, с точки зрения модели T_{1+3} пространственноподобные прямые представляют собой конструкции не имеющие отношения к реальным объектам.

Действительно, до сих пор не обнаружены частицы, мировые линии (или сегменты мировых линий) которых описывались бы пространственноподобными прямыми. Это обстоятельство свидетельствует в пользу модели T_{1+3}, так как с точки зрения модели E_{1+3} объяснить его очень трудно. Иначе говоря, применительно к геометрии пространства-времени обобщение (1.5.3), (1.5.4) собственно евклидовой геометрии, основанное на коллиметрическом свойстве прямой является более предпочтительным, чем обобщение (1.5.1), (1.5.2), основаное на экстремальных свойствах прямой.

Хорошо известно, что мировые линии свободных микрочастиц (электронов, протонов и т.д.), если их описывать в терминах интегралов по путям [13, 14, 15], только приближенно являются экстремалями функционала (1.5.2). Это – другой аргумент в пользу Т-геометрии. Далее мы увидим, что исследование Т-геометрии подтверждает бо́льшую по сравнению с римановой геометрией адекватность ее свойствам реального пространства-времени.

Различие способов задания римановой геометрии и Т-геометрии сказывается на степени возможного обобщения собственно евклидовой геометрии. Возможности обобщения собственно евклидовой геометрии много богаче в Т - геометрии даже в том случае, когда геометрия задается на многообразии. В Т - геометрии эти возможности определяются одной функцией $\sigma : M_n \times M_n \to \mathbb{R}$ от двух точек x и x' пространства. Метрический тензор

$$g_{ik}(x) = \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^k}(x, x')\right]_{x'=x} \tag{1.5.9}$$

на многообразии определяется двумя первыми производными мировой функции в совпадающих точках x и x'. Однако, задания только метрического тензора в совпадающих точках x и x' не достаточно для определения функции σ, поэтому варьируя, мировую функцию σ при фиксированном метрическом тензоре (1.5.9), мы получаем различные Т-геометрии при одном и том же значении величин (1.5.9). Кроме того Т-геометрия может быть построена на таких множествах точек, на которых построить риманову геометрию не представляется возможным из-за ограничений, налагаемых способом построения (1.5.1), (1.5.2) римановой геометрии. Однако, как уже упоминалось, математический аппарат современной геометрии и физики основан на использовании многообразия, поэтому, определяя ЕГО на основе Т-геометрии, практически приходится использовать многообразие и аппарат римановой геометрии даже тогда, когда риманова геометрия не вполне адекватна геометрии пространства-времени.

1.6 О содержании книги

В практическом плане существование двух различных математических инструментов (многообразие и ЕГО) для описания геометрии ставит вопрос об их взаимодействии и возможности описания одного инструмента в терминах другого. Важно уметь описывать свойства мировой функции и порождаемых ей ЕГО в терминах многообразия и наоборот уметь построить многообразие (когда это возможно) в терминах мировой функции.

Вторая глава посвящена изучению свойств мировой функции в римановой геометрии. При этом выясняется, что мировая функция риманова пространства естественным образом порождает геодезическое отображение риманова пространства на множество евклидовых пространств, касательных к риманову пространству в каждой точке. Риманово пространство может быть восстановлено по этому геодезическому отображению. Выясняется также, что мировая функция любого риманова пространства удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, не содержащей никаких величин кроме мировой функции и ее производных по координатам. Геодезическое отображение порождается мировой функцией и тогда, когда она не удовлетворяет этим уравнениям, однако, в этом случае она не может быть мировой функцией для какой-либо римановой геометрии.

Третья глава посвящена введению основных понятий Т-геометрии. Вводятся понятия мировой функции и естественных геометрических объектов (ЕГО), и изучаются их свойства. Изложение ведется в Т-геометрии, т.е. без ссылок на многообразие.

В четвертой главе геодезическое отображение и условия, при которых оно возможно, изучаются в рамках метрической концепции геометрии (Т-геометрии). Это важно, поскольку геодезическое отображение является основным инструментом для построения многообразия на основе Т-геометрии. Далее геодезическое отображение используется для построения римановой геометрии в тех случаях, когда это возможно. Проще говоря, если во второй главе свойства мировой функции излагаются в терминах многообразия, то в четвертой главе свойства многообразия излагаются в терминах мировой функции и тем самым удается описать взаимодействие двух основных математических инструментов, используемых для изложения геометрии.

Пятая глава посвящена изучению невырожденных геометрий, заданных на многообразии. Эти специальные виды геометрии поддаются изучению как с помощью многобразия, так и с помощью мировой функции. Геометрия реального пространства-времени рассматривается как однородная и изотропная геометрия такого вида. Показано, что дисторсия (толщина трубок) как основная характеристика невырожденности геометрии приводит к, вообще говоря, недетерминированному движению микрочастиц при любом виде ненулевой дисторсии. Дисторсия пространства-времени может быть выбрана таким образом, чтобы статистическое описание стохастического движения микрочастиц совпало с квантовым описанием с помощью уравнения Шредингера. При этом квантовая постоянная $\hbar$ оказывается характеристикой дисторсии, т.е. принадлежностью пространства-времени.

Читатель, не интересующийся тонкостями взаимоотношений между Т-геометрией и римановой геометрией, может пропустить при чтении вторую и четвертую главы без ущерба для понимания третьей и пятой глав.

Глава 2

Мировая функция риманова пространства.

В этой главе излагаются основные свойства мировой функции риманова пространства. Для риманова пространства с дефинитной и индефинитной метрикой используются соответственно термины собственно риманово и псевдориманово. Термин риманово пространство является обобщенным и употребляется в тех случаях, когда дефинитность или индефинитность метрики не существенна.

Аналогично термины собственно евклидово и псевдо-евклидово пространства означают евклидово пространство с дефинитной и индефинитной метрикой соответственно. Термин евклидово пространство употребляется в тех случаях, когда не существенна дефинитность метрики.

Мировая функция для риманова пространства впервые была введена в работах [16]-[19]. В настоящее время мировая функция используется для описания искривленного пространства-времени в общей теории относительности [6], [20]-[25]. При изложении свойств мировой функции основное внимание будет уделено изложению геометрических свойств. Свойства, связанные с разложением мировой функции $\sigma(x, x')$ по степеням $x^i - x'^i$, будут лишь слегка затронуты. Эти свойства и свойства мировой функции в разных системах координат хорошо изложены во II главе книги Синга [6].

Основные геометрические свойства мировой функции можно сформулировать следующим образом.

(1) Знание мировой функции позволяет написать уравнение геодезической в алгебраической форме (а не в виде дифференциального уравнения)[6]

(2) Мировая функция риманова пространства удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, содержащих только мировую функцию и ее производные по координатам, причем имеется несколько различных форм этих уравнений [20].

(3) Мировая функция $\sigma(P, P')$ осуществляет геодезическое отображение риманова пространства V на множество евклидовых пространств $E_{P'}$, зависящих от точки P' риманова пространства. В результате возникает некий естествен-

ный двухметрический формализм, зависящий от параметров (координат произвольной точки P'). Он может быть использован для различных целей [20, 26].

2.1 Описание риманова пространства в терминах мировой функции

Пусть на D-мерном многообразии M задана система координат K, так что каждой точке P многообразия M соответствуют контравариантные координаты $x = \{x^1, x^2, \dots x^D\}$. Пусть расстояние (интервал) между любыми двумя бесконечно близкими точками определяется соотношением (1.2.1)

$$dS^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k \tag{2.1.1}$$

где $g_{ik}, \quad i,k = 1,2,\dots D$ есть величина, называемая метрическим тензором. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до D. В этом случае на многообразии M задана D-мерная риманова геометрия, а многообразие с заданной на нем квадратичной формой (2.1.1) называют римановым пространством.

Подробное изложение римановой геометрии можно найти в руководствах [1]-[4]. Мы ограничимся лишь изучением свойств мировой функции заданной в римановом пространстве. В римановой геометрии геодезическая является естественным геометрическим объектом (ЕГО). Она описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \gamma^i_{kl}(x)\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = 0 \tag{2.1.2}$$

$$g_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = b = \text{ const}, \tag{2.1.3}$$

где $\gamma^i_{kl}(x)$ есть символ Кристоффеля

$$\gamma^i_{kl}(x) = \frac{1}{2}g^{ij}(g_{lj,k} + g_{jk,l} - g_{kl,j}) \qquad g_{lj,k} \equiv \frac{\partial g_{lj}(x)}{\partial x^k} \tag{2.1.4}$$

Всюду метрика предполагается невырожденной

$$\det \parallel g_{ik} \parallel \neq 0 \tag{2.1.5}$$

и поэтому возможно определение контравариантного метрического тензора g^{ij} с помощью соотношения

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k. \tag{2.1.6}$$

вектор $dx^i/d\tau$ является соответственно времениподобным, изотропным или пространственноподобным, если в соотношении (2.1.3) $b > 0$, $b = 0$ или $b < 0$. Уравнение геодезической является уравнением для экстремалей функционала

$$\sigma[x(\tau)] = \frac{1}{2}S^2[x(\tau)] = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{\tau'}^{\tau''}\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}}d\tau\right]^2 \qquad (2.1.7)$$

Обычно для получения геодезических используют функционал

$$S[x(\tau)] = \int\limits_{\tau'}^{\tau''}\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}}d\tau \qquad (2.1.8)$$

Однако в этом случае возникают проблемы с изотропными геодезическими, для которых интервал (2.1.8) обращается в нуль, и в соотношении (2.1.3) $b = 0$. В этом случае при варьировании (2.1.8) возникает особенность типа $(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{-1/2} = b^{-1/2}$, $(\dot{x}^i \equiv dx^i/d\tau)$, и наложение условия (2.1.3) с $b = 0$ невозможно. Если при варьировании используется функционал (2.1.7), то эта особенность компенсируется сомножителем $S[x(\tau)]$ после подстановки в него соотношения (2.1.3). При этом постоянная b выпадает из уравнения и может принимать значение равное нулю. Иными словами, при использовании функционала (2.1.7) не возникает никаких проблем с изотропными геодезическими.

Как известно из вариационного исчисления (в приложении к геодезическим см. [6]), функционал (2.1.8), вычисленный вдоль экстремали и рассматриваемый как функция начальной точки $x' = x(\tau')$ и конечной точки $x' = x(\tau'')$,

$$S(x, x') = S(x(\tau''), x(\tau')), \qquad x = x(\tau'), \qquad x'' = x(\tau') \qquad (2.1.9)$$

удовлетворяет уравнению Якоби-Гамильтона

$$\frac{dS}{\partial x^i}g^{ik}\frac{dS}{\partial x^k} = \begin{cases} 1, & S(x, x') \neq 0 \\ 0, & S(x, x') = 0 \end{cases} \qquad (2.1.10)$$

Используя обозначение (1.2.5), получаем из (2.1.10) уравнение для мировой функции σ

$$\sigma_i g^{ik}\sigma_k = 2\sigma, \qquad \sigma_i \equiv \partial_i\sigma = \sigma_{,i} \qquad (2.1.11)$$

При этом выражение (2.1.9) является полным интегралом уравнения (2.1.10), причем координаты x' представляют собой его параметры. Тогда, как известно, D уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial x'^{i'}}(x, x') = b_{i'} \qquad i = 1, 2, \ldots D; \qquad (2.1.12)$$

описывают решение системы уравнений (2.1.2), причем $b_{i'}$ есть произвольный единичный (или изотропный) вектор, описывающий направление геодезической в точке x'.

Для неизотропной геодезической уравнение (2.1.12) можно переписать в виде

$$\sigma_{i'}(x,x') = b_{i'}\tau \tag{2.1.13}$$

где

$$\tau = S(x,x') = \sqrt{2\sigma(x,x')} \tag{2.1.14}$$

Для изотропной геодезической соотношение (2.1.13) тоже справедливо, но соотношение (2.1.14) уже не имеет места.

Условие разрешимости уравнения (2.1.13) относительно x^i имеет вид

$$\det \parallel \sigma_{ik'} \parallel \neq 0, \qquad \sigma_{ik'} = \sigma_{k'i} \equiv \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^i \partial x'^k} \tag{2.1.15}$$

Если оно выполнено, то уравнения (2.1.13) можно разрешить в виде

$$\mathcal{L}_{x'b}: \qquad x^i = x^i(\tau), \qquad i = 1,2,\dots D. \tag{2.1.16}$$

Уравнение (2.1.16) описывает геодезическую $\mathcal{L}_{x'b}$, проходящую через точку x' в направлении вектора $b_{i'}$.

Пусть $x'' \in \mathcal{L}_{x'b}$ есть точка этой геодезической. Тогда из (2.1.13) следует

$$\sigma_{i'}(x,x') = \frac{\tau}{\tau''}\sigma_{i'}(x'',x'), \qquad i = 1,2,\dots D \tag{2.1.17}$$

Пусть $x'' \neq x'$, тогда система уравнений (2.1.17) описывает геодезическую $\mathcal{L}_{x',x''}$, проходящую через точки x' и x''. $\sigma_{i'}(x,x')$ и $\sigma_{i'}(x'',x')$ суть два вектора в точке x'. Согласно (2.1.17) эти два вектора коллинеарны. Таким образом, условие того, что точка $x \in \mathcal{L}_{x'x''}$ (лежит на геодезической) есть просто условие коллинеарности двух векторов $\sigma_{i'}(x,x')$ и $\sigma_{i'}(x'',x')$ в точке x'. Легко видеть, что уравнение (2.1.17) означает также, что $x'' \in \mathcal{L}_{x'x}$.

Из определения интервала в виде интеграла вдоль геодезической следует, что для трех точек P, P', P'', лежащих на одной геодезической, выполнено по крайней мере одно из соотношений

$$S_2(P,P',P'') \equiv S(P,P') + S(P',P'') - S(P,P'') = 0,$$
$$S_2(P',P'',P) = 0, \qquad S_2(P'',P,P') = 0, \tag{2.1.18}$$

т.е. либо $P' \in \mathcal{L}_{[P'P'']}$, либо $P'' \in \mathcal{L}_{[P'P]}$, либо $P \in \mathcal{L}_{[P'P'']}$, где $\mathcal{L}_{[PQ]}$ означает сегмент геодезической между точками P и Q. Перемножим все три соотношения (2.1.18) и умножим их на множитель

$$S_+(P,P',P'') \equiv S(P,P') + S(P',P'') + S(P,P'') \tag{2.1.19}$$

который обращается в нуль лишь в том случае, когда каждое из слагаемых равно нулю, и геодезическая изотропна. В этом случае все три уравнения (2.1.18) удовлетворяются одновременно. Перемножение приводит к уравнению.

$$F_2(P, P'P'') \equiv \begin{vmatrix} \Gamma(P, P', P') & \Gamma(P, P', P'') \\ \Gamma(P, P'', P') & \Gamma(P, P'', P'') \end{vmatrix} = 0 \tag{2.1.20}$$

где

$$\Gamma(P, P', P'') \equiv \sigma(P, P') + \sigma(P, P'') - \sigma(P', P''). \tag{2.1.21}$$

Рассмотрим евклидово пространство и декартову систему координат K в нем. В этой системе координат вектор $\mathbf{PP}'$ с началом в точке P и концом в точке P' имеет контравариантные координаты $x'^i - x^i = -g^{ik}(x)\sigma_k(x, x')$, а вектор $\mathbf{PP}''$ имеет контравариантные координаты $x''^i - x^i = -g^{ik}(x)\sigma_k(x, x'')$. Скалярное произведение векторов $\mathbf{PP}'$, $\mathbf{PP}''$ записывается в виде

$$(\mathbf{PP}'.\mathbf{PP}'') \equiv \sigma_i(x, x')g^{ik}(x)\sigma_k(x, x''), \tag{2.1.22}$$

В силу тензорного характера соотношения (2.1.22) оно верно в любой системе координат.

В этом случае в силу теоремы косинусов для треугольника с вершинами в точках P, P', P'' и соотношений типа $|\mathbf{PP}'|^2 = 2\sigma(P, P')$, выражение (2.1.22) может быть записано в виде

$$(\mathbf{PP}'.\mathbf{PP}'') \equiv \sigma_i(x, x')\sigma^i(x, x'') = \Gamma(P, P', P''), \tag{2.1.23}$$

где круглыми скобками обозначано скалярное произведение. Положим

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{PP}', \qquad \mathbf{x} = \mathbf{PP}'', \tag{2.1.24}$$

тогда уравнение (2.1.20) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1.\mathbf{x}) \\ (\mathbf{x}.\mathbf{e}_1) & (\mathbf{x}.\mathbf{x}) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.1.25}$$

Если $\mathbf{e}_1$ неизотропный вектор $(\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_1) \neq 0$, то решение уравнения (2.1.25) может быть представлено в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1\tau + \mathbf{q}, \qquad (\mathbf{q}.\mathbf{e}_1) = 0, \qquad (\mathbf{q}.\mathbf{q}) = 0. \tag{2.1.26}$$

где τ - произвольный параметр, а $\mathbf{q}$ - некоторый изотропный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{e}_1$. Уравнение (2.1.26) описывает прямую линию, если существуют только решения с $\mathbf{q} = 0$. В случае собственно евклидова пространства изотропных векторов нет, и $\mathbf{q} = 0$. В случае псевдоевклидова пространства индекса 1 для времениподобного вектора $\mathbf{e}_1$ также $\mathbf{q} = 0$.

В этих интересных с физической точки зрения случаях одно уравнение (2.1.20) эквивалентно D уравнениям (2.1.17). Хотя в случае риманова пространства второе соотношение (2.1.23), вообще говоря, не справедливо, тем не менее вывод об эквивалентности уравнения (2.1.20) и системы уравнений (2.1.17) справедлив как в случае собственно риманова пространства так и в случае псевдо-риманова пространства индекса 1 с времениподобными векторами $\sigma_i(x, x')$.

Особо следует отметить, что уравнение (2.1.20) для геодезических содержит только мировую функцию σ и не содержит производных σ. Иными словами, в этом случае несущественно, что мировая функция определена на многообразии. Она могла бы быть определена на любом множестве точек, в том числе дискретном. Возможность описывать одномерную геодезическую в D-мерном пространстве с помощью одного уравнения связана с особыми свойствами мировой функции риманова пространств. Это свойство ассоциируется с представлением интервала S в виде интеграла, взятого вдоль экстремали. Условимся называть его экстремальным свойством мировой функции. Осознание важности экстремального свойства мировой функции было исходным пунктом Т-геометрии.

2.2 Двухметрический формализм, порожденный мировой функцией.

Совокупность величин $T^{l\dots m'\dots}_{i\dots k'\dots}$ $(i, \dots k, \dots l, \dots m, \dots = 1, 2, \dots D)$, будем называть двухточечным тензором, если при преобразовании координат

$$x^i \to \tilde{x}^i = f^i(x) = \tilde{x}^i(x), \qquad x'^i \to \tilde{x}'^i = f^i(x') = \tilde{x}^i(x') \tag{2.2.1}$$

эти величины преобразуются по закону

$$\tilde{T}^{l\dots m'\dots}_{i\dots k'\dots}(\tilde{x}, \tilde{x}') = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \dots \frac{\partial x'^{b'}}{\partial \tilde{x}'^{k'}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^c} \dots \frac{\partial \tilde{x}'^{m'}}{\partial x'^{d'}} \dots T^{c\dots d'\dots}_{a\dots b'\dots}(x, x') \tag{2.2.2}$$

Индексы без штриха образуют тензор в точке x, индексы со штрихом - в точке x'. Обычный тензор является частным случаем двухточечного тензора. В виде общего правила двухточечные величины будем обозначать прописными буквами, а величины, зависящие от одной точки, строчными буквами, например, $g_{ik}(x), \gamma^i_{kl}$. При этом для краткости будем опускать аргумент, имея в виду, что наличие или отсутствие штрихов у индексов указывает соответственно на аргументы x' и x.

Условимся обозначать производные с помощью индекса, отделенного запятой. Например

$$\frac{\partial}{\partial x^i} A_{kl'} \equiv \partial_i A_{kl'} \equiv A_{kl',i},$$

Пусть $G = G(x, x')$ есть двухточечный скаляр, удовлетворяющий соотношениям (1.2.6) и (2.1.15)

$$G(x, x) = 0, \qquad G(x, x') = G(x', x) \tag{2.2.3}$$

и соотношению

$$\det||\frac{\partial^2 G}{\partial x'^i \partial x^k}|| \equiv \det||\partial_{i'}\partial_k G|| \equiv \det||G_{,i',k}|| \neq 0 \tag{2.2.4}$$

Используем обозначения

$$G_{,i} \equiv G_i, \qquad G_{,i'} \equiv G_{i'}, \qquad G_{,i,k'} \equiv G_{ik'} = G_{k'i},$$

$$G_{il',k} \equiv G_{ikl'} = G_{kil'} = G_{il'k} = G_{l'ik} \tag{2.2.5}$$

$$G_{ik',l'} \equiv G_{ik'l'} = G_{k'il'} = G_{il'k'} = G_{l'ik'} = G_{l'k'i} \tag{2.2.6}$$

Так как G - скаляр, то G_i, $G_{i'}$, $G_{ik\prime}$ - двухточечные тензоры. $G_{ik'}$ будем называть фундаментальным двухточечным тензором. В области, где выполнено условие (2.2.4), можно определить контравариантный фундаментальный тензор $G^{ik'}$ с помощью соотношения

$$G_{ik'}G^{lk'} = \delta_i^l \tag{2.2.7}$$

Предположим, что G имеет непрерывные производные по всем аргументам. Тогда в пределе совпадения точек x и x', обозначаемом с помощью квадратных скобок, получаем из соотношений симметрии (2.2.3) и неравенства (2.2.4)

$$[G_i] = 0, \qquad [G_{i'}] = 0, \tag{2.2.8}$$

$$[G_{i,k}] = -[G_{ik'}] = \tilde{g}_{ik}(x), \qquad [G^{ik'}] = -\tilde{g}^{ik}(x), \qquad \tilde{g}^{ik}\tilde{g}_{kl} = \delta_l^i \tag{2.2.9}$$

$$[G^{is'}G_{kls'}] = \tilde{\gamma}_{kl}^i(x) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}(\tilde{g}_{kj,l} + \tilde{g}_{lj,k} - \tilde{g}_{kl,j}) \tag{2.2.10}$$

где $\tilde{g}_{ik}$ есть некоторый тензор, вообще говоря, отличный от g_{ik}, а $\tilde{\gamma}_{kl}^i$ есть символ Кристоффеля, построенный из $\tilde{g}_{ik}$. Соотношения (2.2.9) служат определением $\tilde{g}_{ik}$. Здесь и в дальнейшем квадратные скобки означают, что двухточечные величины берутся в совпадающих точках, т.е. $x' = x$.

Покажем справедливость соотношений (2.2.8)-(2.2.10). Дифференцируя соотношения (2.2.3) по x^i и полагая $x' = x$, получаем

$$[G_i] + [G_{i'}] = 0, \qquad [G_i] = [G_{i'}]$$

Отсюда следует соотношение (2.2.8). Используя полученное соотношение, разложим G по степеням $x - x'$. Тогда

$$G(x, x') = \frac{1}{2}\tilde{g}_{ik}(x')(x^i - x'^i)(x^k - x'^k) + \frac{1}{6}\tilde{g}_{ikl}(x')(x^i - x'^i)(x^k - x'^k)(x^l - x'^l) + ... \tag{2.2.11}$$

где $\tilde{g}_{ik}$ и $\tilde{g}_{ikl}$ суть некоторые коэффициенты, каждый из которых симметричен относительно перестановки любых двух индексов. Дифференцируя (2.2.11) по x^i, x^k и по x^i, x'^k и полагая затем $x = x'$, получим

$$[G_{i,k}] = \tilde{g}_{ik}, \qquad [G_{i,k'}] = -\tilde{g}_{ik} \tag{2.2.12}$$

Отсюда следуют соотношения (2.2.9).

Продифференцируем теперь (2.2.11) по x^i, x^k, x^l, по x'^i, x'^k, x'^l и по x^i, x^k, x'^l. В результате получаем

$$[G_{i,k,l}] = \tilde{g}_{ikl}, \qquad [G_{i',k',l'}] = (\tilde{g}_{ik,l} + \tilde{g}_{kl,i} + \tilde{g}_{li,k}) - \tilde{g}_{ikl} \tag{2.2.13}$$

$$[G_{i,k,l'}] = \tilde{g}_{ik,l} - \tilde{g}_{ikl} \tag{2.2.14}$$

Комбинируя (2.2.13) и (2.2.14) и используя, что $[G_{i,k,l}] = [G_{i',k',l'}]$, получаем

$$[G_{i,k,l}] = [G_{i',k',l'}] = \tilde{g}_{ikl} = \frac{1}{2}(\tilde{g}_{ik,l} + \tilde{g}_{kl,i} + \tilde{g}_{li,k})$$

$$[G_{i,k,l'}] = -\frac{1}{2}(\tilde{g}_{kl,i} + \tilde{g}_{li,k} - \tilde{g}_{ik,l}) \tag{2.2.15}$$

Соотношение (2.2.10) следует из (2.2.15) и определения

$$[G_{i,k'}][G^{l,k'}] = \tilde{g}_{ik}\tilde{g}^{lk} = \delta_i^l$$

Введем ковариантную производную по x^i по с помощью формулы

$$\nabla_i T^{j\dots m'\dots}_{k\dots l'\dots} \equiv T^{j\dots m'\dots}_{k\dots l'\dots\ |i} = T^{j\dots m'\dots}_{k\dots l'\dots\ ,i} - \gamma^s_{ik} T^{j\dots m'\dots}_{s\dots l'\dots} - \dots$$
$$+\gamma^j_{is} T^{s\dots m'\dots}_{k\dots l'\dots} + \dots \tag{2.2.16}$$

Кроме того введем другую ковариантную производную с символом Кристоффеля

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{kl}(x, x') = G_{kls'}G^{is'} \tag{2.2.17}$$

Легко проверить, что Γ^i_{kl} преобразуется при преобразовании координат x как символ Кристоффеля, если G является двухточечным скаляром. Назовем эту ковариантную производную касательной производной по x^i с параметром x' и будем обозначать символом $\tilde{\nabla}^{x'}_i$ или индексом i, отделенным двумя вертикальными чертами

$$\tilde{\nabla}^{x'}_i T^{j\dots m'\dots}_{k\dots l'\dots} \equiv T^{j\dots m'\dots}_{k\dots l'\dots\ ||i} = T^{j\dots m'\dots}_{k\dots l'\dots\ ,i} - \Gamma^s_{ik} T^{j\dots m'\dots}_{s\dots l'\dots} - \dots$$
$$+\Gamma^j_{is} T^{s\dots m'\dots}_{k\dots l'\dots} + \dots \tag{2.2.18}$$

Касательная производная по x' с параметром x определяется аналогично. Она действует только на штрихованные индексы (x'-индексы) и получается из касательной производной по x заменой $x \leftrightarrow x'$ и штрихованных индексов на нештрихованные и наоборот. Будем опускать упоминание о параметре в том случае, если дифференцировние проводится по x^i, а параметром является x' или, наоборот, дифференцирование проводится по x'^i, а параметром является x.

Легко проверить, что касательные производные $\tilde{\nabla}_i$, $\tilde{\nabla}_k$ коммутируют, если у них один и тот же параметр x'

$$[\tilde{\nabla}_i^{x'}, \tilde{\nabla}_k^{x'}]_- T^{j\ldots m'\ldots}_{s\ldots l'\ldots} \equiv (\tilde{\nabla}_i^{x'}\tilde{\nabla}_k^{x'} - \tilde{\nabla}_k^{x'}\tilde{\nabla}_i^{x'}) T^{j\ldots m'\ldots}_{s\ldots l'\ldots} = 0 \qquad (2.2.19)$$

Это означает, что любая касательная производная есть ковариантная производная в некотором плоском (евклидовом) пространстве $E_{x'}$. Важно подчеркнуть, что это свойство не зависит от того, удовлетворяет ли G уравнению (2.1.11). Результат справедлив для любой двухточечной функции G, для которой выполнено (2.2.3) и неравенство (2.1.15) и, следовательно, можно построить символ Кристоффеля (2.2.17).

Для производных $\tilde{\nabla}_i$ и $\tilde{\nabla}_{i'}$ выполняется обычное правило дифференцирования произведения двух величин. Например,

$$(A_l B_k)_{||i} = A_{l||i} B_k + A_l B_{k||i} \qquad (2.2.20)$$

Касательная производная имеет следующие свойства

$$\tilde{g}_{k'l'||i} = 0, \qquad \tilde{g^{k'l'}}_{||i} = 0, \qquad \delta^k_{l||i} = 0, \qquad (2.2.21)$$

$$G_{kl'||i} \equiv G_{kl',i} - G_{kis'} G^{js'} G_{jl'} \equiv 0, \qquad G^{kl'}{}_{||i} \equiv 0. \qquad (2.2.22)$$

где $\tilde{g}^{k'l'}$ любой одноточечный тензор, зависящий только от x'. Двухточечные тензоры

$$P_{i.}^{.k'}(x, x') = -G_{il'} \tilde{g}^{l'k'}(x'), \qquad (2.2.23)$$

$$P^{i}_{.k'}(x, x') = -G^{il'} \tilde{g}_{l'k'}(x'), \qquad (2.2.24)$$

удовлетворяют условиям

$$P_{i.}^{.k'}{}_{||l} = 0, \qquad P^{i}_{.k'||l} = 0, \qquad [P_{i.}^{.k'}] = [P^{k}_{.i'}] = \delta^k_i, \qquad (2.2.25)$$

и поэтому могут быть использованы как тензоры переноса в евклидовом пространстве $E_{x'}$, в котором $\tilde{\nabla}_i^{x'}$ является ковариантной производной. Иначе говоря, векторное поле

$$A_i(x) = P_{i.}^{.k'}(x, x') A_{k'}(x'), \qquad A^i(x) = P^{i}_{.k'} A^{k'}(x') \qquad (2.2.26)$$

удовлетворяет условию

$$A_{i||l} = 0, \qquad A^{i}_{.||l} = 0 \qquad (2.2.27)$$

и представляет собой поле, образованное вектором $A_{k'}$, параллельно перенесенным из точки x' во все точки x евклидова пространства $E_{x'}$.

В качестве метрического тензора в пространстве $E_{x'}$ может служить тензор вида

$$G_{ik} = G_{ik}(x, x') = G_{il'} \tilde{g}^{l'j'} G_{kj'}, \qquad G^{ik} = G^{il'} \tilde{g}_{l'j'} G^{kj'}, \qquad \tilde{g}^{l'j'} \tilde{g}_{j'k'} = \delta^{l'}_{k'}, \quad (2.2.28)$$

где $\tilde{g}_{i'k'}$ определяется соотношениями (2.2.11), (2.2.12). Тогда

$$[G_{ik}] = [G_{i,k}] = -[G_{ik'}] = \tilde{g}_{ik}. \qquad (2.2.29)$$

Пусть теперь G есть мировая функция удовлетворяющая уравнению (2.1.11), (т.е. положим $G = \sigma$)

Переписав уравнение (2.1.11) в виде

$$\sigma_{l'} g^{l'j'} \sigma_{j'} = 2\sigma, \tag{2.2.30}$$

и касательно дифференцируя его по x^i, получаем

$$\sigma_i = \sigma_{il'} g^{l'j'} \sigma_{j'}. \tag{2.2.31}$$

Дифференцируя его еще раз касательно по x^k, придем к соотношению

$$\sigma_{i||k} = \sigma_{il'} g^{l'j'} \sigma_{j'k}. \tag{2.2.32}$$

В силу (2.2.12) и $\sigma = G$ это дает в пределе совпадения $x = x'$

$$g_{ik} = \tilde{g}_{ik}, \qquad [\sigma_{ik'}] = -g_{ik} \tag{2.2.33}$$

т.е. метрический тензор g_{ik} в пространстве V совпадает с тензором $\tilde{g}_{ik}$, определенным соотношением (2.2.9). Из сравнения (2.2.28) и (2.2.32) следует, что

$$G_{ik} \equiv \sigma_{i||k} = \sigma_{i,k} - \sigma_{ikl'} \sigma^{sl'} \sigma_s = \sigma_{il'} g^{l'j'} \sigma_{kj'}, \qquad G^{ik} = \sigma^{il'} g_{l'j'} \sigma^{kj'} \tag{2.2.34}$$

и тензор $\sigma_{i||k} \equiv G_{ik}$ может рассматриваться как метрический тензор в $E_{x'}$. Для него выполнены соотношения

$$G_{ik|||l} = 0, \qquad G^{ik}{}_{||l} = 0. \tag{2.2.35}$$

что следует из (2.2.34), (2.2.32), (2.2.21) и (2.2.22).

Таким образом, произвольный двухточечный скаляр $G(x, x')$, удовлетворяющий условию (2.2.4), порождает множество евклидовых пространств $E_{x'}$ с метрическим тензором (2.2.28), который определяется этим двухточечным скаляром $G(x, x')$ с помощью (2.2.9). Однако связь скаляра $G(x, x')$ с метрическим тензором g_{ik} в виде соотношения (2.2.34) возникает лишь в том случае, когда двухточечный скаляр $G(x, x')$ является мировой функцией σ риманова пространства и удовлетворяет уравнению (2.1.11) или (2.2.30).

Из соотношения (2.2.32) следует

$$\sigma^{ik'} \sigma_{k'||l'} = g^{ik} \sigma_{kl'}. \tag{2.2.36}$$

Используя соотношения (2.2.34), (2.2.31), получаем

$$G^{ik} \sigma_k = \sigma^{il'} g_{l'j'} \sigma^{kj'} \sigma_k = \sigma^{il'} g_{l'j'} g^{k'j'} \sigma_{k'} = \sigma^{il'} \sigma_{l'} \tag{2.2.37}$$

Таким образом

$$\sigma^i = \sigma^{ik'} \sigma_{k'} = G^{ik} \sigma_k = g^{ik} \sigma_k \tag{2.2.38}$$

С помощью (2.2.38) уравнение (2.1.11) можно записать в двух других видах, не содержащих явно метрического тензора g_{ik}.

$$\sigma_i \sigma^{ik'} \sigma_{k'} = 2\sigma \tag{2.2.39}$$

$$\sigma_i G^{ik} \sigma_k = 2\sigma \tag{2.2.40}$$

Рассмотрим две системы уравнений

$$\begin{array}{llll} (1) & \sigma_l g^{lj} \sigma_j = 2\sigma & (4) & \det \parallel g_{ik} \parallel \neq 0 \\ (2) & \sigma(x,x') = \sigma(x',x) & & \\ (3) & \sigma(x,x) = 0 & & \end{array} \tag{2.2.41}$$

$$\begin{array}{llll} (1) & \sigma_l \sigma^{lj'} \sigma_{j'} = 2\sigma & (4) & \det \parallel G_{ik} \parallel \neq 0 \\ (2) & \sigma(x,x') = \sigma(x',x) & (5) & \det \parallel \sigma_{ik'} \parallel \neq 0 \\ (3) & \sigma(x,x) = 0 & (6) & G_{i'k'||l'} = 0 \\ & & (7) & [\sigma_{ik'}] = -g_{ik} \end{array} \tag{2.2.42}$$

Здесь G_{ik} определен соотношением (2.2.34) $G_{ik} = \sigma_{i||k}$.

Система уравнений (2.2.41) определяет σ-функцию по заданному метрическому тензору g_{ik}.

Как мы видели все уравнения системы (2.2.42) являются следствиями уравнений (2.2.41). Покажем теперь, что система (2.2.41) является следствием системы уравнений (2.2.42). Из шестого уравнения (2.2.42) и тождеств (2.2.22) следует

$$(\sigma^{il'} G_{l'j'} \sigma^{kj'})_{,s'} = (\sigma^{il'} G_{l'j'} \sigma^{kj'})_{||s'} = 0 \tag{2.2.43}$$

т.е. $\sigma^{il'} G_{l'j'} \sigma^{kj'}$ не зависит от x' и является тензором. Из (2.2.9) с $G = \sigma$ и седьмого уравнения (2.2.42) следует

$$[\sigma_{ik'}] = -\tilde{g}_{ik} = -g_{ik} \tag{2.2.44}$$

Кроме того из (2.2.9), (2.2.28) с $G = \sigma$ и (2.2.44) следует

$$[G_{ik}] = \tilde{g}_{ik} = g_{ik} \tag{2.2.45}$$

Тогда следующая из (2.2.43) независимость $\sigma^{il'} G_{l'j'} \sigma^{kj'}$ от x' приводит к соотношению

$$\sigma^{il'} G_{l'j'} \sigma^{kj'} = [\sigma^{il'} G_{l'j'} \sigma^{kj'}] = g^{ik} \tag{2.2.46}$$

Из (2.2.46), четвертого и пятого уравнений (2.2.42) следует четвертое уравнение (2.2.41). Из (2.2.46) получаются последовательно соотношения (2.2.36), (2.2.31), (2.2.37) и (2.2.38). Тогда из первого уравнения (2.2.42) следует первое уравнение (2.2.41). Таким образом, системы уравнений (2.2.41) и (2.2.42) эквивалентны.

Аналогично можно показать, что система уравнений

$$\begin{array}{llll} (1) & \sigma_l G^{lj}\sigma_j = 2\sigma & (4) & \det \parallel G_{ik} \parallel \neq 0 \\ (2) & \sigma(x,x') = \sigma(x',x) & (5) & \det \parallel \sigma_{ik'} \parallel \neq 0 \\ (3) & \sigma(x,x) = 0 & (6) & G_{i'k'\|l'} = 0 \\ & & (7) & [\sigma_{ik'}] = -g_{ik} \end{array} \tag{2.2.47}$$

эквивалентна системам уравнений (2.2.41), (2.2.42).

Системы уравнений (2.2.42) и (2.2.47) содержат метрический тензор g_{ik} только в виде граничного условия

$$[\sigma_{ik'}] = -g_{ik} \tag{2.2.48}$$

Если отбросить седьмое уравнение у систем уравнений (2.2.42) и (2.2.47), то оставшиеся уравнения системы не будут содержать метрического тензора. Поэтому мировая функция любого риманова пространства должна им удовлетворять.

Замечание. Если мировая функция не удовлетворяет системе (2.2.42) без последнего уравнения, то она будет описывать, вообще говоря, нериманову (или обобщенную риманову) геометрию. По-видимому, она тоже поддается изучению, хотя способ ее описания будет нетрадиционным. Метод дифференциальной геометрии изучает квадратичную форму (1.2.1), которая может рассматриваться как способ отображения бесконечно малой окрестности точки x риманова пространства на бесконечно малую окрестность евклидова пространства, причем множество этих эвклидовых пространств нумеруется параметром $x = \{x^1, x^2, \dots x^D\}$. Мировая функция σ осуществляет отображение конечных областей риманова пространства на множество евклидовых пространств $E_{x'}$, также нумеруемых параметрами x'. В этом случае уравнение (2.1.11) может быть записано в виде аналогичном (1.2.1)

$$S^2(x,x') = g_{ik}(x)\Delta^i\Delta^k, \qquad \Delta^i = \sigma^i, \tag{2.2.49}$$

где S - конечный интервал, а Δ^i - конечное смещение. В обоих случаях изучение свойств риманова пространства осуществляется через свойства отображения на более просто устроенные евклидовы пространства.

Если функция σ не является мировой функцией риманова пространства, но задана на многообразии, то возможность отображения этого пространства на множества евклидовых пространств $E_{x'}$ сохраняется. Характер этого отображения определяется функцией σ. По-видимому, приняв, что мировая функция является основной характеристикой пространства, и изучая свойства отображения, порожденного мировой функцией, можно уяснить свойства этого нериманова пространства и то, чем оно отличается от риманова.

2.3 Кривизна риманова пространства и ее описание в терминах мировой функции

Вернемся к рассмотрению свойств ковариантных и касательных производных. Если учесть (2.2.10), (2.2.33), то легко получить

$$[(\tilde{\nabla}_i^{x'} + \tilde{\nabla}_{i'}^{x})T^{j...m'...}_{k...l'...}] = \nabla_i[T^{j...m'...}_{k...l'...}] \tag{2.3.1}$$

Кроме того справедливы следующие выажения для коммутаторов

$$[\nabla_i, \nabla_{s'}]_-\, T^{j...m'...}_{k...l'...} = 0,$$

$$[\nabla_i, \nabla_s]_-\, T^{j...m'...}_{k...l'...} = r_{kais}g^{ab}T^{j...m'...}_{b...l'...} + \ldots$$
$$-r_{bais}g^{ja}T^{b...m'...}_{k...l'...} - \ldots \tag{2.3.2}$$

где $[\ldots]_-$ означает коммутатор, а r_{iklm} есть тензор кривизны Римана

$$r_{iklm} = g_{ks}(\gamma^s_{il,m} - \gamma^s_{im,l} + \gamma^j_{il}\gamma^s_{jm} - \gamma^j_{im}\gamma^s_{jl}), \tag{2.3.3}$$

а $T^{j...m'...}_{k...l'...}$ произвольный двухточечный тензор. Согласно (2.2.19) касательные производные по x коммутируют, а для касательных производных по x и x' справедливо соотношение

$$\left[\tilde{\nabla}_i^{x'}, \tilde{\nabla}_{s'}^{x}\right]_-\, T^{j...m'...}_{k...l'...} = F_{ika's'}\sigma^{ba'}T^{j...m'...}_{b...l'...} + \ldots - \sigma^{ja'}F_{iba's'}T^{b...m'...}_{k...l'...} - \ldots$$

$$+\sigma^{am'}F_{iab's'}T^{j...b'...}_{k...l'...} + \ldots - F_{ial's'}\sigma^{ab'}T^{j...m'...}_{k...b'...} - \ldots \tag{2.3.4}$$

где

$$F_{ilk'j'} = \sigma_{ilj'||k'} = \sigma_{ilj',k'} - \sigma_{sj'k'}\sigma^{sm'}\sigma_{ilm'} \tag{2.3.5}$$

Величина F является двухточечным тензором, что следует из (2.3.4) и произвольности $T^{j...m'...}_{k...l'...}$. Тензорный характер величины F можно продемонстрировать в явном виде, если ввести двухточечный тензор

$$Q^i_{kl} = \gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{kl} \tag{2.3.6}$$

как разность двух символов Кристоффеля. Тогда в силу (2.3.6) для $G = \sigma$ и (2.2.17)

$$-\sigma_{sj'}Q^s_{il||k'} = \sigma_{sj'}\Gamma^s_{il||k'} = \sigma_{ilj'||k'} = F_{ilk'j'} \tag{2.3.7}$$

что совпадает с (2.3.5).

Тензор Q^i_{kl} может быть представлен в виде

$$Q^s_{il} = -\sigma^{sj'}(\sigma_{ilj'} - \gamma^m_{il}\sigma_{mj'}) = -\sigma^{sj'}\sigma_{ij'|l} = -\sigma^{sj'}\sigma_{i|j'|l} =$$

$$-\sigma^{sj'}\sigma_{i|l|j'} = -\sigma^{sj'}\sigma_{i|l||j'} \tag{2.3.8}$$

Из (2.3.7) и (2.3.8) следует

$$F_{ilk'j'} = \sigma_{i|l||k'||j'} \tag{2.3.9}$$

Из (2.3.5) очевидны следующие свойства симметрии двухточечного тензора F.

$$F_{ilk'j'} = F_{lik'j'} = F_{ilj'k'} \tag{2.3.10}$$

$$F_{ilk'j'}(x,x') = F_{k'j'il}(x',x) \tag{2.3.11}$$

Чтобы найти значения тензора F в пределе совпадения $x' = x$, заметим, что в силу (2.3.3) для произвольного двухточечного тензора A_l справедливо равенство

$$[\nabla_k, \nabla_j]_-[A_i] = r_{iakj}g^{ab}[A_b] \tag{2.3.12}$$

Преобразуем левую часть равенства (2.3.12) с помощью (2.3.1), используя при этом (2.2.19) и (2.3.4). Получим

$$[\nabla_k, \nabla_j]_-\,[A_i] = \left[\left[(\tilde\nabla^{x'}_k + \tilde\nabla^{x}_{k'}), (\tilde\nabla^{x'}_j + \tilde\nabla^{x}_{j'})\right]_- A_i\right] =$$

$$\left[\left[\tilde\nabla^{x'}_k, \tilde\nabla^{x}_{j'}\right]_- A_i\right] + \left[\left[\tilde\nabla^{x}_{k'}, \tilde\nabla^{x'}_j\right]_- A_i\right] = [F_{kij'a'}\sigma^{ba'}A_b] - [F_{jik'a'}\sigma^{ba'}A_b] \tag{2.3.13}$$

Сравнивая (2.3.12) и (2.3.13), получим с учетом (2.2.33) и (2.3.10)

$$r_{iljk} = [F_{ikjl} - F_{ijkl}] = f_{ikjl} - f_{ijkl} \tag{2.3.14}$$

где

$$f_{iklj} = [F_{ikj'l'}] \tag{2.3.15}$$

Квадратные скобки означают, что величина берется в пределе совпадения $x = x'$.

Таким образом, риманов тензор кривизны выражается через двухточечный тензор F, взятый в совпадающих точках.

Теорема 2.3.1 . *Обращение в нуль двухточечного тензора F есть необходимое и достаточное условие того, что пространство плоское.*

.

Доказательство. Пусть

$$F_{kij'k'} = 0 \tag{2.3.16}$$

Тогда в силу (2.3.14) тензор Римана обращается в нуль, и пространство плоское.

Пусть теперь пространство плоское. Выберем систему координат, в которой $g_{ik} = \mathrm{const}$. Тогда

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} g_{ik} (x^i - x'^i)(x^k - x'^k) \tag{2.3.17}$$

(Предполагается, что пространство имеет евклидову топологию). Из (2.3.5) следует, что в этой системе координат выполнено (2.3.16). Из-за тензорного характера уравнения (2.3.16) оно выполнено в любой системе координат. Теорема доказана.

Кроме тензора F имеются другие двухточечные тензоры, описывающие отклонения риманова пространства V от евклидова. Это двухточечный тензор Q^i_{kl}, определенный соотношением (2.3.6), и двухточечный тензор

$$B_{ik} = g_{ik} - G_{ik} \tag{2.3.18}$$

В пределе совпадения $x' = x$

$$[Q^i_{kl}] = 0, \qquad [B_{ik}] = 0. \tag{2.3.19}$$

Тензор Q^i_{kl} может быть представлен в виде интеграла от тензора F. Это можно увидеть, если записать (2.3.7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x'^{k'}} Q^s_{il} = -F_{ilk'j'} \sigma^{sj'} \tag{2.3.20}$$

Интегрируя (2.3.20), получаем

$$Q^s_{il}(x, x') = -\int_x^{x'} F_{ilk''j''}(x, x'') \sigma^{sj''}(x, x'') dx''^k \tag{2.3.21}$$

причем результат интегрирования в (2.3.21) не зависит от пути интегрирования, а только от начальной и конечной точек интегрирования.

Аналогично дифференцируя (2.3.18) по x'^s и используя (2.3.4), (2.2.38), получаем

$$G_{ik||s'} = \sigma_{i||k||s'} = \sigma_{is'||k} + \left[(\tilde{\nabla}^{x'}_k, \tilde{\nabla}^x_{s'}\right]_- \sigma_i = F_{kij's'} \sigma^{j'} \tag{2.3.22}$$

Интегрирование приводит к следующему результату.

$$G_{ik}(x, x') = g_{ik}(x) + \int_x^{x'} F_{ikj''s''}(x, x'') \sigma^{j''}(x, x'') dx''^{s''} \tag{2.3.23}$$

где результат интегрирования не зависит от пути интегрирования.

Выберем в качестве пути интегрирования геодезическую $\mathcal{L}_{xx'}$, вдоль которой x'' есть функция параметра τ, определяемая из уравнения (2.1.17), которое запишем в виде

$$\sigma_i(x,x'') = \tau\sigma_i(x,x') \qquad (2.3.24)$$

Дифференцируя по τ, получаем

$$\sigma_{ik''}(x,x'')dx''^k = \sigma_i(x,x')d\tau \qquad (2.3.25)$$

Определим dx'' из (2.3.25) и подставим в (2.3.21) и (2.3.23). В результате получим

$$Q^s_{il}(x,x') = -\int\limits_0^1 F_{ilk''j''}(x,x'')\sigma^{k''}(x,x'')\sigma^{sj''}(x,x'')\frac{d\tau}{\tau} \qquad (2.3.26)$$

$$G_{ik}(x,x') = g_{ik}(x) + \int\limits_0^1 F_{ikj''s''}(x,x'')\sigma^{j''}(x,x'')\sigma^{s''}(x,x'')\frac{d\tau}{\tau} \qquad (2.3.27)$$

В этих интегралах координаты x'' суть функции параметра τ, вид которых определяется из уравнения (2.3.24).

Из (2.3.18) и (2.3.21) заключаем

$$Q^i_{il}(x,x') = O(x-x') \qquad (2.3.28)$$

$$B_{ik}(x,x') = g_{ik}(x,x') - G_{ik}(x,x') = O((x-x')^2) \qquad (2.3.29)$$

Рассмотрим теперь вопрос об отображении D-мерного риманова пространства V_D на соприкасающееся евклидово пространство. Представим себе, что риманово пространство V_D , описываемое метрическим тензором g_{ik} и мировой функцией вложено в некоторое евклидово пространство E_m большей размерности. Выделим в E_m D-мерное евклидово пространство $E_{x'}$, касательное к V_D в точке P' с координатами x'^i. Пусть V_D отображается на $E_{x'}$. Пусть точке касания x' пространства V_D сопоставлена эта же точка пространства $E_{x'}$. Пусть P есть точка в V_D с координатами x, причем интервал $S(P',P)$, измеренный в V_D отличен от нуля. Проведем в V_D геодезическую $\mathcal{L}_{P'P}$ из точки P' в точку P. В $E_{x'}$ проведем прямую, касательную к геодезической $\mathcal{L}_{P'P}$ в точке P'. Найдем на этой прямой точку P^* такую, чтобы интервал $S(P',P^*)$, измеренный в $E_{x'}$, равнялся интервалу $S(P',P)$, измеренному в V_D и векторы $\mathbf{P'P}$, $\mathbf{P'P}^*$ были бы направлены в одну сторону. Будем считать, что точка P^* в $E_{x'}$, найденная таким способом, сопоставляется точке P в V_D. Таким образом, установлено соответствие между точками, для которых интервал до точки касания отличен от нуля. Соответствие между точками для которых интервал до точки касания равен нулю устанавливается, исходя из непрерывности отображения, т.е. бесконечно близкие точки в V_D отобажаются в бесконечно близкие точки в $E_{x'}$. При отображении V_D на $E_{x'}$ система координат K в V_D отображается в систему координат $K^*_{x'}$ в $E_{x'}$.

Полученное с помощью описанной процедуры пространство $E_{x'}$ с системой координат $K^*_{x\prime}$ в нем будем называть соприкасающимся пространством. Обозначим через $\sigma^*(x,x'',x')$ мировую функцию между точками x и x'' в $E_{x'}$. x и x'' - координаты соответственно точек P^* и $P^{*\prime\prime}$ в $E_{x'}$ в системе координат $K^*_{x'}$. Координаты x' точки касания являются параметрами. Будем отмечать звездочкой величины, относящиеся к $E_{x'}$.

Из описания геодезической в виде (2.1.13) следует, что $-\sigma_{i'}(x,x')$ есть ковариантные координаты вектора $\mathbf{P'P}\in V_D$, а $-\sigma^*_{i'}(x,x',x')$ есть ковариантные координаты вектора $\mathbf{P'P}^*=\mathbf{P}^{*\prime}\mathbf{P}^*\in E_{x'}$ в системе координат $K^*_{x'}$. Из свойств отображения следует

$$\sigma_{i'}(x,x')=\sigma^*_{i'}(x,x',x') \tag{2.3.30}$$

где

$$\sigma^*_{i'}(x,x',x')\equiv\left[\frac{\partial}{\partial x''^{i}}\sigma^*_{i'}(x,x'',x')\right]_{x''=x'} \tag{2.3.31}$$

Вообще, индексы относящиеся к третьему аргументу, вводиться не будут, так что индексы относятся либо к первому, либо ко второму аргументам. Учитывая симметрию σ^* по первому и второму аргументам, получаем из (2.3.30)

$$\sigma_i(x,x')=\sigma^*_i(x,x',x') \tag{2.3.32}$$

Дифференцируя (2.3.30) по x^k и x^l, получаем

$$\sigma_{ki'}(x,x')=\sigma^*_{ki'}(x,x',x') \tag{2.3.33}$$

$$\sigma_{kli'}(x,x')=\sigma^*_{kli'}(x,x',x') \tag{2.3.34}$$

$$\Gamma^i_{kl}(x,x')\equiv\sigma^{is'}\sigma_{kls'}(x,x')=$$

$$\sigma^{*is'}(x,x',x')\sigma^*_{kls'}(x,x',x')\equiv\Gamma^{*i}_{kl}(x,x',x') \tag{2.3.35}$$

где $\Gamma^{*i}_{kl}(x,x',x')$ есть двухточечный символ Кристоффеля (2.2.17) (с $G=\sigma$) в евклидовом пространстве $E_{x'}$. Из (2.3.35) следует, что касательная производная $\tilde\nabla^{x'}$ в V_D совпадает с касательной производной $\tilde\nabla^{*x''}$ в $E_{x'}$, если значение параметра $x''=x'$, т.е.

$$\tilde\nabla^{x'}_k=\tilde\nabla^{*x'}_k \tag{2.3.36}$$

Действуя соотношением (2.3.36) на (2.3.32), получаем

$$G_{ik}(x,x')\equiv\tilde\nabla^{x'}_k\sigma_i(x,x')=\tilde\nabla^{x'}_k\sigma^*_i(x,x',x')\equiv G^*_{ik}(x,x',x') \tag{2.3.37}$$

Для евклидова пространства выполнено условие (2.3.16), и согласно (2.3.23) метрический тензор g_{ik} совпадает с касательным метрическим тензором $G_{ik}(x,x')$, причем последний не зависит от x'.

Применяя этот результат к пространству $E_{x'}$, заключаем

$$g^*_{ik}(x,x') = G^*_{ik}(x,x',x') \tag{2.3.38}$$

где $g^*_{ik}(x,x')$ есть метрический тензор в пространстве $E_{x'}$ в точке x в системе коодинат $K^*_{x'}$.

Тогда из (2.3.37) и (2.3.38) следует

$$G_{ik}(x,x') = g^*_{ik}(x,x') \tag{2.3.39}$$

т..е. касательный метрический тензор G_{ik} совпадает с метрическим тензором g^*_{ik} в касательном пространстве $E_{x'}$, что оправдывает название тензора G_{ik}.

Вычислим теперь мировую функцию $\sigma^*(x,x'',x')$ в $E_{x'}$. Выберем систему координат так, чтобы G_{ik} не зависел от x и $G_{ik} = g_{i'k'}$. Тогда

$$\sigma^*(x,x'',x') = \frac{1}{2} g_{i'k'}(\xi^i - \eta^i)(\xi^k - \eta^k) \tag{2.3.40}$$

$$\xi^i = x^i - x'^i, \qquad \eta^i = x''^i - x'^i, \tag{2.3.41}$$

Дифференцируя (2.3.40) по x''^i и полагая $x'' = x'$, получим в силу (2.3.30)

$$\xi^i = -g^{i'k'}\sigma^*_{k'}(x,x',x') = -g^{i'k'}\sigma_{k'}(x,x') \tag{2.3.42}$$

Аналогично

$$\eta^i = -g^{i'k'}\sigma^*_{k'}(x'',x',x') = -g^{i'k'}\sigma_{k'}(x'',x') \tag{2.3.43}$$

Подставляя (2.3.42) (2.3.43) в (2.3.40), получаем

$$\sigma^*(x,x'',x') = \frac{1}{2}\{\sigma_{i'}(x,x') - \sigma_{i'}(x'',x')\}g^{i'k'}\{\sigma_{i'}(x,x') - \sigma_{i'}(x'',x')\} \tag{2.3.44}$$

Из-за тензорного характера равенства (2.3.44) оно справедливо в любой системе координат.

С помощью соотношения (2.2.30) можно представить равенство (2.3.44) в виде

$$\sigma^*(x,x'',x') = \sigma(x,x') + \sigma(x'',x') - \sigma_{i'}(x,x')g^{i'k'}\sigma_{k'}(x'',x') \tag{2.3.45}$$

Отсюда, в частности, следует

$$\sigma^*(x,x',x') = \sigma(x,x'), \qquad \sigma^*(x,x,x') = 0. \tag{2.3.46}$$

Таким образом, зависящий от точки x' двухметрический формализм, порождаемый мировой функцией, связан с геодезическим отображением риманова пространства V_D на соприкасающееся евклидово пространство $E_{x'}$. Геодезическое отображение сохраняет углы в точке x' между геодезическими $\mathcal{L}_{x'x}$ и $\mathcal{L}_{x'x''}$, а также длину любого отрезка геодезической $\mathcal{L}_{x'x}$, проходящей через точку касания x'. При этом длины отрезков других геодезических $\mathcal{L}_{xx''}$, не проходящих через точку касания x', вообще говоря, искажаются, поэтому по отображению на одно из пространств $E_{x'}$ нельзя восстановить геометрию риманова пространства V_D. Однако, по отображениям V_D на все пространства $E_{x'}$ геометрия риманова пространства V_D может быть восстановлена.

При использовании традиционного подхода дифференциальной геометрии основным критерием отклонения риманова пространства от евклидова служит тензор кривизны Римана. При использовании двухметрического формализма таких критериев несколько. Кроме тензора кривизны (2.3.14) и соответствующего ему тензора (2.3.9) в качестве критерия можно использовать тензоры (2.3.6) и (2.3.18), описывающие соответственно отклонения метрического тензора и символа Кристоффеля от их евклидовых значений. При переходе к одноточечному описанию, т.е. в пределе совпадения $x \to x'$ эти тензоры обращаются в нуль и не могут служить в качестве такого критерия.

Глава 3

Т-геометрия.

В этой главе излагается последовательный метрический подход к геометрии. Он приводит к Т-геометрии, т.е. геометрии, где основным геометрическим объектом является трубка. Насколько нам известно, этот класс объектов, не рассматривался ранее. Трубка - это множество точек, расстояния между которыми удовлетворяют некоторым алгебраическим соотношениям. Трубка - это простейший геометрический объект, т.к. для его определения не требуется ничего, кроме задания метрики (расстояния между парами точек). В некоторых частных случаях трубку можно рассматривать, как множество, состоящее из линий, и поэтому с точки зрения дифференциальной геометрии такая трубка является более сложным объектом, чем линия. Вместе с тем для определения линии нужно вводить такие понятия как непрерывность, размерность, многообразие и т.д., т.е. понятие линии имеет достаточно сложную структуру и не всегда может быть введено.

Для введения понятия трубки такие понятия как непрерывность, размерность, многообразие не нужны. С точки зрения Т-геометрии линия есть вырожденная трубка, т.е. трубка нулевой толщины. Другими словами, линия есть производное и, следовательно, более сложное понятие, чем трубка.

Объекты и понятия Т-геометрии в некоторой степени основываются на объектах и понятиях евклидовой геометрии. В частности, они содержат ссылку на объем n-эдра в евклидовой геометрии. При этом одни понятия евклидовой геометрии сохраняют свою содержательность в Т-геометрии, а другие ее утрачивают частично или полностью. Иерархия понятий в Т-геометрии иная, чем в дифференциальной геометрии. В частности, роль понятия непрерывности очень незначительна. В иерархии понятий Т-геометрии непрерывность стоит на одном из последних мест, тогда как в дифференциальной геометрии понятие непрерывности едва ли не основное понятие. Во всяком случае без него нет дифференциальной геометрии.

3.1 σ-пространство и его свойства.

Определение 3.1.1 *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть множество Ω точек P с заданной на нем вещественной функцией σ от любой пары точек $P, Q \in \Omega$. Функция σ называется мировой функцией и обладает свойствами*

$$\sigma(P, P) = 0, \qquad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P) \qquad P, Q \in \Omega. \tag{3.1.1}$$

Определение 3.1.2 . *Любое подмножество $\Omega' \subset \Omega$ точек σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ с мировой функцией σ, определяемой V называется σ-подпространством $V' = \{\sigma, \Omega'\}$ σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$, $V' \subset V$. σ-подпространство является σ-пространством.*

Определение 3.1.3 . *Два σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ и $V' = \{\sigma', \Omega'\}$ называются изометричными (эквивалентными), если существует взаимно-однозначное изометрическое отображение $\Omega' \leftrightarrow \Omega$ одного пространства в другое, т.е. если $P \leftrightarrow P'$, $Q \leftrightarrow Q'$, то $\sigma(P, Q) = \sigma'(P', Q')$, $\forall P, \forall Q \in \Omega$, и $\forall P', \forall Q' \in \Omega'$*

Интервал S между точками P и Q σ-пространства V определяется следующим образом

$$S(P, Q) = \sqrt{2\sigma(P, Q)} = \left\{ \begin{array}{ll} \mid \sqrt{2\sigma(P, Q)} \mid, & \sigma(P, Q) \geq 0 \\ i \mid \sqrt{2\sigma(P, Q)} \mid, & \sigma(P, Q) < 0 \end{array} \right. \qquad P, Q \in \Omega \tag{3.1.2}$$

Определение 3.1.4 . *Вектором* $\mathbf{PQ}$ *в σ-пространстве V называется упорядоченное множество $\{P, Q\}$ из двух точек P, Q. Точка P есть начало, а Q - конец вектора.*

Определение 3.1.5 . *Мультивектором $\overrightarrow{P_0 P_1 ... P_n}$ порядка n в σ-пространстве V называется упорядоченное множество $\{P_l\}$, $l = 0, 1, \dots n$ из $n+1$ точек $P_0 P_1 ... P_n$. Точка P_0 есть начало мультивектора $\overrightarrow{P_0 P_1 ... P_n}$*

Введем обозначения

$$^k\mathcal{P}^n \equiv \{P_k, P_{k+1}, \dots P_n\}, \qquad ^k\mathcal{P}_l^n \equiv ^k\mathcal{P}^n \backslash \{P_l\} \tag{3.1.3}$$

$$\mathcal{P}^n \equiv ^0\mathcal{P}^n, \qquad \mathcal{P}_l^n \equiv \mathcal{P}^n \backslash \{P_l\} \tag{3.1.4}$$

и будем использовать для мультивектора $\overrightarrow{P_0 P_1 ... P_n}$ обозначение

$$\overrightarrow{P_0 P_1 ... P_n} \equiv \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_n \equiv \overrightarrow{\mathcal{P}^n} \tag{3.1.5}$$

Вектор $\overrightarrow{P_0 P_1} \equiv \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ представляет собой мультивектор первого порядка

Определение 3.1.6 . *Скалярным σ-произведением* $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)$ *двух векторов* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ *и* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, *имеющих общее начало, называется вещественное число*

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \equiv \Gamma(P_0, P_1, P_2) \equiv \sigma(P_0, P_1) + \sigma(P_0, P_2) - \sigma(P_1, P_2), \tag{3.1.6}$$

$$P_0, P_1, P_2 \in \Omega$$

В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, вместо термина "скалярное σ-произведение" будет использоваться термин "скалярное произведение".

Определение 3.1.7 . *Длиной* $\mid \mathbf{PQ} \mid$ *вектора* $\mathbf{PQ}$ *называется число*

$$\mid \mathbf{PQ} \mid = \sqrt{2\sigma(P,Q)} = \left\{ \begin{array}{ll} \mid \sqrt{(\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ})} \mid, & (\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ}) \geq 0 \\ i \mid \sqrt{(\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ})} \mid, & (\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ}) < 0 \end{array} \right. \qquad P, Q \in \Omega \tag{3.1.7}$$

Определение 3.1.8 . *Векторы* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ *параллельны или антипараллельны, если выполнены соответственно соотношения*

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid \cdot \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 \mid \tag{3.1.8}$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = - \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid \cdot \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 \mid \tag{3.1.9}$$

Определение 3.1.9 . *Векторы* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ *коллинеарны, если они параллельны или антипараллельны, т.е.*

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)^2 = \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid^2 \cdot \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 \mid^2 \tag{3.1.10}$$

Определение 3.1.10 . *Скалярным произведением* $(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})$ *двух мультивекторов* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ *и* $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ *порядка* n, *имеющих общее начало* $P_0 = Q_0$ *называется число*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = \det \|\Gamma(P_0, P_i, Q_k)\|, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{3.1.11}$$

Определение 3.1.11 . *Длиной* $|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|$ *мультивектора* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ *называется число*

$$|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| = \left\{ \begin{array}{ll} \mid \sqrt{(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n})} \mid, & (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) \geq 0 \\ i \mid \sqrt{(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n})} \mid, & (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) < 0 \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{\mathcal{P}^n} \subset \Omega \tag{3.1.12}$$

Определение 3.1.12 . *Два мультивектора n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ *и* $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, *имеющие общее начало, коллинеарны* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, *если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})^2 = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}|^2 \tag{3.1.13}$$

Определение 3.1.13 . *Два коллинеарных мультивектора n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ *и* $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ *имеют одинаковую ориентацию* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ *(параллельны), если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}| \tag{3.1.14}$$

Они имеют противоположную ориентацию $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ *(антипараллельны), если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}| \tag{3.1.15}$$

Важными частными случаями σ-пространства являются евклидово пространство, риманово пространство и метрическое пространство. В случае D-мерного евклидова пространства, рассматриваемого как σ-пространство, мировая функция имеет вид

$$\sigma(P,Q) = \sigma(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{D} g_{ik}(x^i - y^i)(x^k - y^k), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1.16}$$

где $x = \{x^i\}$ и $y = \{y^i\}$, $(i = 1, 2, \dots D)$ - контравариантные координаты точек P и Q соответственно в некоторой прямолинейной системе координат K. Здесь $g_{ik} = \mathrm{const}$, $i, k = 1, 2, \dots D$ - метрический тензор, $\det ||g_{ik}|| \neq 0$.

Данные выше определения вектора, его длины, скалярного произведения двух векторов и соотношений коллинеарности согласуются с употреблением этих понятий для евклидова пространства. В самом деле, длина вектора $\mathbf{PQ}$ в евклидовом пространстве есть

$$|\ \mathbf{PQ}\ | = \sqrt{g_{ik}(x^i - y^i)(x^k - y^k)} = \sqrt{2\sigma(P,Q)} \tag{3.1.17}$$

что согласуется с (3.1.7).

В собственно евклидовом пространстве по теореме косинусов для двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$

$$|\ \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ |^2 = |\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ |^2 = |\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\ |^2 + |\ \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1\ |^2 - 2(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \tag{3.1.18}$$

Отсюда следует

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = \frac{1}{2}\{|\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\ |^2 + |\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ |^2 - |\ \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ |^2\} \tag{3.1.19}$$

что согласуется с (3.1.6), если учесть (3.1.7).

В собственно евклидовом пространстве векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ паралллельны или антипараллельны, если косинус угла ϑ между ними равен соответственно 1 или -1. В собственно евклидовом пространстве

$$\cos\vartheta = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)\ |\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\ |^{-1} \cdot |\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\ |^{-1} \tag{3.1.20}$$

что согласуется с определениями (3.1.8), (3.1.9).

В собственно евклидовом пространстве мультивектор $\mathbf{m}$ n-ого порядка определяется как внешнее (косое) произведение векторов

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_n \qquad \mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{3.1.21}$$

Скалярное произведение двух мультивекторов n-ого порядка $\mathbf{m}$ и $\mathbf{q}$

$$\mathbf{q} = \bigwedge_{i=1}^{i=n} \mathbf{k}_i, \qquad \mathbf{k}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_i \qquad i = 1, 2, ...n \tag{3.1.22}$$

определяется с помощью соотношения

$$(\mathbf{m}.\mathbf{q}) = \det \|(\mathbf{e}_i.\mathbf{k}_l)\| = \det \|(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_l)\| = \det \|\Gamma(P_0, P_i, Q_l)\|, \qquad i, l = 1, 2, ...n \tag{3.1.23}$$

что согласуется с соотношением (3.1.11)

Различие между определением 3.1.5 мультивектора и его традиционным определением (3.1.21) в том, что первое не использует операций сложения и умножения векторов, которые не определены в σ-пространстве, тогда как традиционное определение (3.1.21) апеллирует к понятию многообразия и линейного пространства, где эти операции определены.

В принципе сложение векторов и умножение вектора на число можно определить в σ-пространстве $V = \{\sigma, \Omega\}$ следующим образом. Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ есть сумма векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, если найдется такая точка $\exists R \in \Omega$, что

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) + (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}), \qquad \forall Q \in \Omega. \tag{3.1.24}$$

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ есть результат умножения $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ на вещественное число a

$$\mathbf{P}_0\mathbf{R} = a\mathbf{P}_0\mathbf{P}, \tag{3.1.25}$$

если найдется такая точка $\exists R \in \Omega$, что

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = a(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}), \qquad \forall Q \in \Omega. \tag{3.1.26}$$

Однако, такие определения не эффективны, поскольку в общем случае не существует точки R, удовлетворяющей соотношениям (3.1.24), (3.1.26). В случае собственно евклидова пространства, когда точка R, удовлетворяющая (3.1.24), (3.1.26), существует, операции сложения векторов (3.1.24) и умножения вектора на число (3.1.25) совпадают с традиционным определением этих операций в евклидовом пространстве.

Операция перестановки точек мультивектора может быть эффективно определена в σ-пространстве. Рассмотрим два мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = \overrightarrow{P_0P_1P_2...P_n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(1\leftrightarrow 2)}} = \overrightarrow{P_0P_2P_1...P_n}$ n-ого порядка ($n \geq 2$), отличающиеся порядком точек P_1 и P_2. Тогда

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = \det \| \Gamma(P_0, P_i, Q_k) \|, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{3.1.27}$$

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(1\leftrightarrow 2)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = \det \parallel \Gamma(P_0, P'_i, Q_k) \parallel, \qquad i,k = 1,2,...n, \qquad n \geq 2. \qquad (3.1.28)$$

Здесь упорядоченное множество точек $\{P'_i\}$ $\quad i = 1,2,...n$ получается из упорядоченного множества точек $\{P_i\}$ $\quad i = 1,2,...n$ перестановкой точек P_1 и P_2. Это означает, что определитель (3.1.28) получается из определителя (3.1.27) перестановкой первой и второй строк. Отсюда следует, что

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(1\leftrightarrow 2)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}), \qquad n \geq 2. \qquad (3.1.29)$$

Поскольку $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ есть произвольный мультивектор, то соотношение (3.1.29) можно записать в виде

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = -\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(1\leftrightarrow 2)}}, \qquad n \geq 2. \qquad (3.1.30)$$

Оно может интерпретироваться в том смысле, что перестановка любых двух точек P_i и P_k $\quad i,k = 1,2,...n$, $(n \geq 2)$ (кроме начала P_0) в мультивекторе $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ приводит к изменению его знака. При этом отрицательный знак мультивектора означает, по определению, что

$$(-\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}). \qquad (3.1.31)$$

Перестановка точек P_0 и P_1 в мультивекторе $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$, $(n \geq 2)$ превращает его в мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}}$, имеющий начало в точке P_1. Строго говоря, мультивекторы $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}}$ нельзя сравнивать в точке P_0. Однако, они имеют общие точки $P_2, P_3, ...P_n$ и можно сравнивать их в этих точках, образуя скалярное произведение с мультивектором $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, имеющим начало, например, в точке P_2 $(Q_2 = P_2)$

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})_{P_2} = \det \|\Gamma\,(P_2, P_i, Q_k)\|\,, \qquad i,k = 0,1,3,4,...n, \qquad n \geq 2, \qquad (3.1.32)$$

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})_{P_2} = \det \parallel \Gamma(P_2, P'_i, Q_k) \parallel, \qquad i,k = 0,1,3,4,...n, \qquad n \geq 2, \quad (3.1.33)$$

где $P'_0 = P_1$, $P'_1 = P_0$, $P'_i = P_i$, $\quad i = 3,4,...n$, а индекс P_2 показывает, что точка P_2 рассматривается как начало мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$. Сравнение правых частей равенств (3.1.32) и (3.1.33) показывает, что

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})_{P_2} = -(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})_{P_2}, \qquad n \geq 2.$$

Тот же результат будет получен, если в качестве начала выбрать любую из точек P_i $\quad i = 3,4,...n$. Это означает, что соотношение (3.1.30) верно для перестановки любых двух точек мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$, и можно записать

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(i\leftrightarrow k)}} = -\overrightarrow{\mathcal{P}^n}, \qquad i,k = 0,1,...n, \qquad i \neq k, \qquad n \geq 2. \qquad (3.1.34)$$

Таким образом, изменение знака мультивектора порядка $n \geq 2$ (умножение на число $a = -1$) всегда может быть определено нечетная перестановка точек.

Для вектора (мультивектора первого порядка) умножение (3.1.25), (3.1.26) на число $a = -1$ определяется прямо как перестановка начала и конца вектора с помощью соотношений

$$-\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_0, \qquad (3.1.35)$$

что по определению означает, что

$$(-\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = -(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = -\sigma(P_0,P_1) - \sigma(P_0,Q) + \sigma(P_1,Q),$$

$$\forall P_0, P_1, Q \in \Omega,$$

$$(-\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}) = (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}) = \sigma(P_1,P_0) + \sigma(P_1,Q) - \sigma(P_0,Q), \qquad \forall P_0, P_1, Q \in \Omega.$$

Таким образом, умножение любого мультивектора на число $a = \pm 1$ всегда можно определить в σ-пространстве как результат перестановки точек, образующих мультивектор.

В собственно евклидовом пространстве, где мультивектор определяется в виде

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = \bigwedge_{i=1}^{i=n} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \tag{3.1.36}$$

он антисимметричен относительно перестановки любых двух индексов $i, k = 0, 1, ...n, \quad i \neq k$. Для индексов $i, k = 1, 2, ...n$, это следует из свойств операции внешнего умножения.

Для перестановки точек $P_0 \leftrightarrow P_1$ имеем

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_0 \bigwedge_{i=2}^{i=n} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = -\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \bigwedge_{i=2}^{i=n} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) =$$

$$-\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \bigwedge_{i=2}^{i=n} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i = -\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \tag{3.1.37}$$

Аналогичный результат получается для перестановки точек $P_0 \leftrightarrow P_i, \quad i = 1, 2, ...n$. Итак, мультивектор в σ-пространстве есть геометрический объект антисимметричный относительно перестановки любой пары точек.

Определим вещественную функцию F_n от $n+1$ точек $\mathcal{P}^n \subset \Omega$

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det \parallel \Gamma(P_0, P_i, P_k) \parallel \equiv \det \parallel (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) \parallel \tag{3.1.38}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots n$$

Используя (3.1.6) и свойства определителя, можно показать, что $F_n(\mathcal{P}^n)$ симметрична по отношению к перестановке любой пары точек $P_i, P_k, \quad (i, k = 0, 1, \ldots n)$.

Симметричность относительно перестановки $P_i \leftrightarrow P_k$, $i, k = 1, 2, \ldots n$ следует из инвариантности определителя (3.1.38) при одновременной перестановке i-ого столбца с k-ым и i-ой строки с k-ой строкой. Симметричность относительно перестановки $P_0 \leftrightarrow P_j$, $(j = 1, 2, \ldots n)$ доказывается путем образования линейных комбинаций строк и столбцов определителя (3.1.38), не изменяющих определителя, Фиксируем l $(l \neq 0,\ l \neq j)$ и осуществим следующие преобразования

$$a_{ik} \to b_{ik} = a_{ik} - a_{il}(1 - \delta_{kl}), \qquad i, k = 1, 2, \ldots n, \qquad l \neq 0. \tag{3.1.39}$$

вычитание l-того столбца из всех остальных столбцов,

$$b_{ik} \to c_{ik} = b_{ik} - b_{lk}(1 - \delta_{il}), \qquad i,k = 1,2,\dots n, \qquad l \neq 0. \tag{3.1.40}$$

вычитание l-той строки из всех остальных строк,

$$c_{ik} \to d_{ik} = c_{ik}(-1)^{\delta_{il}+\delta_{kl}}, \qquad i,k = 1,2,\dots n, \qquad l \neq 0. \tag{3.1.41}$$

изменение знака у l-того столбца и l-той строки. Все эти преобразования не меняют определителя $\det \parallel a_{ik} \parallel \quad i,k = 1,2,\dots,n$. Можно убедиться, что при

$$a_{ik} = \Gamma(P_0, P_i, P_k), \qquad i,k = 1,2,\dots n \tag{3.1.42}$$

для d_{ik} в силу (3.1.6) получаются выражения

$$d_{ik} = \Gamma(P_l, P_i, P_k), \qquad i,k = 1,2,\dots,l-1,l+1,\dots n \tag{3.1.43}$$

$$d_{lk} = d_{kl} = \Gamma(P_l, P_0, P_k), \qquad k = 1,2,\dots,l-1,l+1,\dots n \tag{3.1.44}$$

$$d_{ll} = \Gamma(P_l, P_0, P_0), \tag{3.1.45}$$

$\det \parallel d_{ik} \parallel$ инвариантен относительно перестановки точек $P_0 \leftrightarrow P_j$, $j \neq l$. Так как $\det \parallel d_{ik} \parallel = \det \parallel a_{ik} \parallel$, то инвариантность $\det \parallel d_{ik} \parallel$ относительно перестановки $P_0 \leftrightarrow P_j$ влечет за собой инвариантность выражения (3.1.38). Таким образом, определитель (3.1.38) инвариантен относительно перестановок $P_i \leftrightarrow P_k$, $i \neq k$, $\quad (i,k = 0,1,\dots,n)$

Определение 3.1.14 . *$n+1$ точек $\mathcal{P}^n$, $P_i \in \Omega \quad (i = 0,1,..n)$ образуют в σ-пространстве $(n+1)$-точечный базис трубки, если мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ имеет ненулевую длину*

$$|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \equiv F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0. \tag{3.1.46}$$

Проиллюстрируем это определение базиса трубки на примере D-мерного собственно евклидова пространства. Пусть задано n векторов $\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1,2,\dots n$ в D-мерном собственно евклидовом пространстве $(n \leq D)$. В этом случае (3.1.38) есть определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det \parallel (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) \parallel = (n! S_n(\mathcal{P}^n))^2, \qquad i,k = 1,2,\dots n \tag{3.1.47}$$

а S_n есть объем $(n+1)$-эдра с вершинами в точках $\mathcal{P}^n$. Обращение в нуль этого определителя есть необходимое и достаточное условие линейной независимости векторов $\mathbf{e}_i, \quad i = 1,2,\dots n$ в собственно евклидовом пространстве.

Если условие (3.1.46) выполнено, то n векторов $\mathbf{e}_i$ линейно независимы и могут служить в качестве базиса в n-мерной плоскости $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, проходящей через точки $\mathcal{P}^n$. В частности, если в качестве системы координатных векторов для выражения (3.1.16) использованы векторы $\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \quad i = 1,2,\dots D \quad (D+1)$-точечного базиса трубки $\mathcal{P}^D$, то, как легко проверить с помощью (3.1.6) и (3.1.16)

$$(\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) = g_{ik}(\mathcal{P}^D) = \Gamma(P_0, P_i, P_k), \qquad i,k = 1,2,\dots D \tag{3.1.48}$$

Определение 3.1.15 . *n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$, $n = 1, 2, ...$, имеющих общее начало называются базис-образующими, если составленный из них мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ имеет ненулевую длину $|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \neq 0$.*

Замечание. В собственно евклидовом пространстве n базис-образующих векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$, являются линейно независимыми и образуют базис в некоторой n-мерной плоскости евклидова пространства, и наоборот n линейно независимых векторов собственно евклидова пространства являются базис-образующими. В псевдо-евклидовом пространстве (например, пространстве Минковского) нет полной тождественности между линейно независимыми и базис-образующими векторами. Например, один изотропный вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = 0$ является линейно независимым и может использоваться в качестве базисного вектора на изотропной прямой. В Т-геометрии вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = 0$ не является базис-образующим и не может использоваться в качестве базисного вектора. В том случае, когда число векторов $n \geq 2$, базис-образующие векторы в пространстве Минковского являются линейно независимыми и наоборот.

Определение 3.1.16 . *Трубкой $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ n-ого порядка (n=0,1,...), образованной $(n+1)$-точечным базисом трубки $\mathcal{P}^n \subset \Omega$ (или мультивектором n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \subset \Omega$), называется множество точек $P \in \Omega$*

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \equiv \mathcal{T}_{\mathcal{P}^n} = \{P \mid F_{n+1}(P, \mathcal{P}^n) = 0\}, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0. \tag{3.1.49}$$

Соотношение (3.1.49) может быть записано также в терминах мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = \left\{P_{n+1} \left| |\overrightarrow{\mathcal{P}^{n+1}}| = 0 \right.\right\}, \qquad |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \neq 0. \tag{3.1.50}$$

Трубка $\mathcal{T}_P$ нулевого порядка, образованная точкой P, определяется как множество точек

$$\mathcal{T}_P = \{P' \mid \sigma(P, P') = 0\}, \tag{3.1.51}$$

что согласуется с определением 3.1.16. Для собственно евклидова пространства трубка нулевого порядка $\mathcal{T}_P = \{P\}$ совпадает с образующей ее точкой P. Для пространства Минковского трубка нулевого порядка $\mathcal{T}_P$ представляет собой световой конус с вершиной в точке P.

Определение 3.1.17 . *Сечением $\mathcal{S}_{n;P}$ трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ в точке $P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ называется множество $\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n))$ точек, принадлежащих трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$*

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P' \mid F_{n+1}(P', \mathcal{P}^n) = 0 \bigwedge_{l=0}^{l=n} \sigma(P_l, P') = \sigma(P_l, P)\}, \tag{3.1.52}$$

Другое (эквивалентное) определение сечения записывается так

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \left\{P_{n+1} \left| |\overrightarrow{\mathcal{P}^{n+1}}| = 0 \bigwedge_{l=0}^{l=n} \sigma(P_l, P_{n+1}) = \sigma(P_l, P) \right.\right\} \tag{3.1.53}$$

Первое уравнение в (3.1.52) и (3.1.53) является следствием остальных n уравнений и может быть опущено.

В собственно евклидовом пространстве трубка n-ого порядка есть n-мерная плоскость, содержащая точки $\mathcal{P}^n$, а ее сечение $\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n))$ в точке P состоит из одной этой точки P.

Наиболее интересны и важны трубки нулевого и первого порядка. Для F_1 получаем из (3.1.38) и (3.1.6)

$$F_1(P_0, P_1) = 2\sigma(P_0, P_1) \tag{3.1.54}$$

Тогда

$$\mathcal{T}(P_0) \equiv \mathcal{T}_{P_0} = \{P \mid \sigma(P_0, P) = 0\}, \tag{3.1.55}$$

В собственно евклидовом пространстве трубка нулевого порядка $\mathcal{T}_{P_0} = \{P_0\}$ состоит из одной точки P_0, и ее сечение $\mathcal{S}_{0;P_0}(\mathcal{T}_{p_0}) = \{P_0\}$ тоже состоит из одной точки P_0. Однако в псевдо-евклидовом пространстве, каким является пространство-время в специальной теории относительности, $\mathcal{T}_{P_0}$ есть световой конус с вершиной в точке P_0, и его сечение

$$\mathcal{S}_{0;P}(\mathcal{T}(P_0)) = \{P' \mid \sigma(P_0, P') = 0 \wedge \sigma(P_0, P') = \sigma(P_0, P)\} = \mathcal{T}_{P_0} \tag{3.1.56}$$

совпадает со световым конусом.

В описании трубок первого порядка удобно использовать то обстоятельство, что функция $F_2(\mathcal{P}^2)$ может быть представлена в виде произведения

$$F_2(P_0, P_1, P_2) = S_+(P_0, P_1, P_2)S_2(P_0, P_1, P_2)S_2(P_1, P_2, P_0)S_2(P_2, P_0, P_1) \tag{3.1.57}$$

где

$$S_+(P_0, P_1, P_2) = S(P_0, P_1) + S(P_1, P_2) + S(P_0, P_2) \tag{3.1.58}$$

$$S_2(P_0, P_1, P_2) = S(P_0, P_1) + S(P_1, P_2) - S(P_0, P_2) \tag{3.1.59}$$

а интервал S определяется соотношением (3.1.2).

Из (3.1.2) следует, что S_+ обращается в нуль лишь в том случае, если обращается в нуль каждое слагаемое в (3.1.58). Тогда никакие две точки не образуют базиса, и трубка не определена. Трубку $\mathcal{T}(\mathcal{P}^2)$ можно представить как состоящую из частей, и каждый из сомножителей в (3.1.57) (кроме S_+) ответственен за одну из частей.

Положим

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \mathcal{T}_{[P_1P_0]} = \{P \mid S_2(P_0, P, P_1) = 0\} \tag{3.1.60}$$

$$\mathcal{T}_{P_0[P_1} = \mathcal{T}_{P_1]P_0} = \{P \mid S_2(P_0, P_1, P) = 0\} \tag{3.1.61}$$

Будем называть $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ сегментом трубки между точками P_0, P_1, а $\mathcal{T}_{P_0[P_1}$ лучом трубки, выходящим из P_1 в направлении от точки P_0.

Множество

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1} = \mathcal{T}_{[P_1P_0]} \bigcup \mathcal{T}_{P_0[P_1} \tag{3.1.62}$$

будем называть лучом трубки, выходящим из точки P_0 в направлении к точке P_1. Для краткости будут использоваться также термины T-луч и T-сегмент вместо терминов луч трубки и сегмент трубки.

Из (3.1.57), (3.1.60), (3.1.61) очевидно, что

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \mathcal{T}_{P_0]P_1} \bigcup \mathcal{T}_{[P_0P_1]} \bigcup \mathcal{T}_{P_0[P_1} \tag{3.1.63}$$

Поскольку соотношение (3.1.10) эквивалентно уравнению $F_2(\mathcal{P}^2) = F_2(P_2, \mathcal{P}^1) = 0$, то трубка первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ может быть также определена как множество точек P таких, что $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \{P \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}\} \tag{3.1.64}$$

а для лучей трубки могут быть использованы определения

$$\mathcal{T}_{P_0[P_1} = \{P \mid \mathbf{P}_1\mathbf{P} \uparrow\downarrow \mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\} \tag{3.1.65}$$

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1} = \{P \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\} \tag{3.1.66}$$

Наконец, будут использоваться обозначения

$$\mathcal{T}_{(P_0P_1)} = \mathcal{T}_{[P_0P_1]} \backslash [\bigcup_{l=0}^{l=1} \mathcal{S}_{1;P_l}(\mathcal{T}_{P_0P_1})] \tag{3.1.67}$$

$$\mathcal{T}_{(P_0P_1]} = \mathcal{T}_{[P_0P_1]} \backslash \mathcal{S}_{1;P_0}(\mathcal{T}_{P_0P_1}) \tag{3.1.68}$$

$$\mathcal{T}_{P_0)P_1} = \mathcal{T}_{P_0]P_1} \backslash \mathcal{S}_{1;P_0}(\mathcal{T}_{P_0P_1}) \tag{3.1.69}$$

Будем называть $\mathcal{T}_{(P_0P_1)}$ и $\mathcal{T}_{(P_0P_1]}$ соответственно открытым и полуоткрытым отрезками трубки между точками P_0 и P_1, а $\mathcal{T}_{P_0)P_1}$ будем называть открытым лучом трубки, выходящим из точки P_0 в направлении от точки P_1. По определению точка P расположена между точками P_0 и P_1, если $P \in \mathcal{T}_{(P_0P_1)}$.

Определение 3.1.18 . *Ориентированным сегментом* $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ *трубки первого порядка, образованной вектором* $\overrightarrow{P_0P_1} \subset \Omega$ *ненулевой длины, называется совокупность* $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \mathcal{T}_{[P_0P_1]}\}$ *вектора* $\overrightarrow{P_0P_1}$ *и сегмента* $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. *Длиной ориентированного сегмента* $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ *называется величина*

$$|\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}| = |\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)}. \tag{3.1.70}$$

Скалярным σ-произведением $(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{P_0Q})$ *ориентированного сегмента* $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ *и вектора* $\overrightarrow{P_0Q}$ *называется число*

$$(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{P_0Q}) = (\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0Q}) = \sigma(P_0, P_1) + \sigma(P_0, Q) - \sigma(P_1, Q), \qquad P_0, P_1, P, Q \in \Omega \tag{3.1.71}$$

Скалярным σ-произведением $(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{P_1Q})$ *ориентированного сегмента* $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ *и вектора* $\overrightarrow{P_1Q}$ *называется число*

$$(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{P_1Q}) = -(\overrightarrow{P_1P_0}.\overrightarrow{P_1Q}) = -\sigma(P_0, P_1) - \sigma(P_1, Q) + \sigma(P_0, Q), \qquad P_0, P_1, P, Q \in \Omega. \tag{3.1.72}$$

Другими словами, $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}} = -\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_1P_0]}}$.

При описании в терминах дифференциальной геометрии геодезическая в D-мерном римановом пространстве рассматривается как *особый вид кривой, обладающей следующими свойствами.*

(i) *Экстремальность.* Расстояние $(2\sigma)^{1/2}$, измеренное между двумя точками вдоль геодезической, является кратчайшим (экстремальным) по сравнению с расстоянием, измеренным вдоль других кривых.

(ii) *Определенность.* Любые две различные точки геодезической однозначно определяют геодезическую, проходящую через эти точки.

(iii) *Минимальность сечения* (одномерность). Всякое сечение геодезической состоит из одной точки.

При традиционном подходе свойство (ii) есть следствие свойства (i) (для достаточно малых областей пространства), однако, свойство (iii) есть свойство любой кривой (а не только геодезической).

При метрическом подходе геодезическая рассматривается как особый вид трубки, вырождающейся в линию. Тогда предполагается, что свойства (ii) и (iii) выполнены. Свойство (i) не определено, так как не определено понятие линии.

Попытаемся определить геодезическую как трубку, обладающую одновременно свойством определенности и минимальности сечения.

Определение 3.1.19 . *Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ обладает свойством определенности, если для любого $(n+1)$-точечного базиса трубки $\mathcal{Q}^n \subset \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ (или для любого мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \subset \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ ненулевой длины) выполнено условие*

$$\mathcal{T}(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \qquad (3.1.73)$$

Определение 3.1.20 . *Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ обладает свойством минимальности сечения, если $\forall P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$*

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P\} \qquad (3.1.74)$$

Определение 3.1.21 . *σ-пространство экстремально на трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, если для $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ выполнены условия определенности и минимальности сечения.*

Определение 3.1.22 . *σ-пространство экстремально на множестве $\mathcal{T}$ трубок $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, если оно экстремально на каждой из трубок множества $\mathcal{T}$.*

Определение 3.1.23 . *σ-пространство экстремально в n-ом порядке, если оно экстремально на всех трубках $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, n-ого порядка.*

Определение 3.1.24 . *Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ называется геодезической трубкой $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, если σ-пространство экстремально на трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$.*

Рассмотрим примеры σ-пространств.

Пример 3.1.1. Пусть точки P σ-пространства $V = \{\sigma, \mathbb{Z}^3\}$ нумеруются тремя числами $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел. Пусть мировая функция σ между точками $P = (n_1, n_2, n_3)$, $P' = (n'_1, n'_2, n'_3)$, $\quad n_1, n_2, n_3$, $n'_1, n'_2, n'_3 \in \mathbb{Z}$ определена соотношением

$$\sigma(P, P') = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{i=3}(n_i - n'_i)^2, \qquad a = \text{const}, \qquad a > 0. \tag{3.1.75}$$

σ-функция зависит только от разности $n_i - n'_i$, $\quad (i = 1, 2, 3)$, и свойства трубок могут быть исследованы без потери общности на примере $\mathcal{T}_{P_0 P'}$, $P_0 = (0, 0, 0)$.

Решая уравнение

$$F_2(P_0, P', P) = 0 \tag{3.1.76}$$

с мировой функцией (3.1.75), получаем

$$\mathcal{T}_{P_0 P'}: \quad n_i = \tau n'_i, \qquad i = 1, 2, 3; \tag{3.1.77}$$

$$\tau = k/N_1, \qquad N_1, k \in \mathbb{Z}, \qquad N_1 = \max_{P'' \in \mathcal{T}_{P_0 P'}} \{\sqrt{\sigma(P, P')/\sigma(P, P'')}\} \tag{3.1.78}$$

где n_i, $\quad i = 1, 2, 3$ - координаты текущей точки трубки $\mathcal{T}_{P_0 P'}$, k - произвольное целое число, нумерующее точки трубки $\mathcal{T}_{P_0 P'}$.

Итак, точки трубки $\mathcal{T}_{P_0 P'}$ суть точки прямой линии $\mathbf{x} = \mathbf{n}'\tau$, $\quad \mathbf{n}' = (n'_1, n'_2, n'_3)$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ с целочисленными коодинатами. Легко проверить, что σ-пространство экстремально в первом порядке, т.е. трубки $\mathcal{T}_{P_0 P'}$ суть геодезические трубки $\mathcal{L}_{P_0 P'}$.

Определение прямых линий позволяет нам ввести линейное векторное пространство над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Назовем вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ упорядоченную пару точек P_0, P_1. Модуль вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ есть число

$$\mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \tag{3.1.79}$$

Определим операцию умножения вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ на $\alpha \in \mathbb{Z}$ как вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}' = \alpha\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, причем точка P' определяется соотношениями

$$\sigma(P_0, P') = \alpha^2\sigma(P_0, P) \tag{3.1.80}$$

с $P' \in \mathcal{L}_{[P_0 P}$, если $\alpha \geq 0$ и $P' \in \mathcal{L}_{P_0]P}$, если $\alpha < 0$.

По определению сумма двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}'$ есть вектор

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}'' = \mathbf{P}_0\mathbf{P} + \mathbf{P}_0\mathbf{P}' \tag{3.1.81}$$

где точка P'' определяется соотношениями

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = 2\mathbf{P}_0\mathbf{P}, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = 2\mathbf{P}_0\mathbf{P}' \tag{3.1.82}$$

$$P'' \in \mathcal{L}_{[P_1 P_2]}, \qquad S(P'', P_1) = S(P'', P_2) \tag{3.1.83}$$

Так определенные операции сложения векторов и умножения их на число удовлетворяют всем аксиомам линейного векторного пространства.

Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ по определению линейно независимы, если соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_0 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{Z} \tag{3.1.84}$$

выполняется только при $\alpha_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$. Максисмально возможное число линейно-независимых векторов называется размерностью D пространства. В данном случае $D = 3$.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}'$ есть число $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}') \in \mathbb{R}$, определяемое соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}') \equiv \Gamma(P_0, P, P') \equiv \sigma(P_0, P) + \sigma(P_0, P') - \sigma(P, P'), \tag{3.1.85}$$

Таким образом, все операции в векторном пространстве определяются через мировую функцию σ. σ-пространство V есть подмножество точек трехмерного собственно евклидова пространства. В самом деле, представим себе, что координаты (n_1, n_2, n_3), (n_1', n_2', n_3') в выражении (3.1.75) суть вещественные числа. Тогда соотношения (3.1.75) - (3.1.85) определяют трехмерное собственно евклидово пространство, где τ в уравнении (3.1.77) и α - в (3.1.80) - произвольные вещественные числа, а ограничение (3.1.78) опускается.

Пример 3.1.2. Пусть точки σ-пространства V_c нумеруются тремя числами n_1, n_2, n_3, $(n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z},\ 0 \leq n_3 < N)$, где N - некоторое натуральное число, а $\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел. Определим мировую функцию соотношением

$$\sigma(P, P') = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{i=3}(n_i - n_i')^2, \qquad n_1, n_2, n_3, n_1', n_2', n_3' \in \mathbb{Z}, \qquad a > 0, \tag{3.1.86}$$
$$P = (n_1, n_2, \mathrm{mod}_N n_3), \qquad P' = (n_1', n_2', \mathrm{mod}_N n_3')$$

σ-пространство V_c получается из σ-пространства V примера 3.1.1 с помощью отождествления тех точек P, чьи координаты n_3 отличаются на sN, где s - целое. Поэтому σ – многозначная функция точек P, P', т.к. одно и то же положение точек $\mathrm{mod}_N(n_3 - n_3')$ соответствует разным значениям $(n_3 - n_3')$. При таком отображении $P = P_1 = P_2 = \ldots$, мировая функция $\sigma(P', P_i), \quad i = 1, 2, \ldots$ превращается в $\sigma(P', P)$ и становится многозначной, т.е. мировая функция содержит информацию об этом отождествлении σ-пространства. σ-пространство V_c является дискретным аналогом цилиндра, в то время как V из примера 3.1.1 является дискретным аналогом трехмерной плоскости.

σ-пространство V_c с мировой функцией (3.1.86) не экстремально в первом порядке. В частности, трубка $\mathcal{T}_{P_0P''}$, $P_0 = (0, 0, 0)$, $P'' = (n_1'', n_2'', \mathrm{mod}_N n_3'')$ состоит из геодезических $\mathcal{L}_{P_0P'}$ типа (3.1.77) с $P' = (n_1', n_2', n_3')$

$$\mathcal{T}_{P_0P''} = \bigcup_{s\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{P_0P'}, \qquad n_1' = n_1'' \qquad n_2' = n_2'' \qquad n_3' = \mathrm{mod}_N n_3'' + sN \tag{3.1.87}$$

Для такой трубки не выполнено условие определенности. Обычно различие между цилиндром и плоскостью формулируется как различие в топологии этих поверхностей. При обсуждении различия между V и V_c вряд ли уместно говорить о топологии, так как топология связана с понятием непрерывности, которое здесь не используется. Формально цилиндричность σ-пространства V_c проявляется в существовании "замкнутых геодезических", состоящих из N точек. В σ-пространстве V из примера 3.1.1 любая геодезическая содержит бесконечно большое число точек.

Неэкстремальность V_c в первом порядке не связана с многозначностью мировой функции. Можно переопределить мировую функцию (3.1.86), определив ее соотношением

$$\sigma(P,P') = \frac{a^2}{2}\{(n_1-n_1')^2 + (n_2-n_2')^2 + [\mathrm{mod}_N(n_3-n_3'+q)-q]_E^2\} \qquad (3.1.88)$$

$$q = [N/2]_E \qquad (3.1.89)$$

где $[\ldots]_E$ означает целую часть числа. Определение (3.1.88) соответствует выбору единственного (минимального) значения мировой функции (3.1.86) среди других значений. В этом случае σ-пространство не экстремально в первом порядке. Неэкстремальность связана с конечной длиной трубки. Например, трубка $\mathcal{T}_{P_0P'}$, определяемая точками $P_0 = (0,0,0)$ и $P' = (n_1', n_2', n_3')$, $0 < n_3' < q$, описывается уравнением (3.1.77), где n_3 лежит внутри полосы $n_3' - q \leq n_3 < q$ и имеет конечную длину. Если теперь выбрать на трубке новый базис трубки, например $P_0', P'' \in \mathcal{T}_{P_0P'}$, $P_0' = P_0 = (0,0,0)$, $P'' = (n_1'', n_2'', n_3'')$, $0 < n_3'' < n_3'$. Новая трубка $\mathcal{T}_{P_0''P''}$ будет описываться уравнением (3.1.77) где n_3 лежит внутри полосы $n_3'' - q \leq n_3 < q$. Внутри полосы $n_3' - q \leq n_3 < q$ трубки будут совпадать, но в полосе $n_3'' - q \leq n_3 < n_3' - q$ будут лежать только точки трубки $\mathcal{T}_{P_0P''}$, но не будет точек трубки $\mathcal{T}_{P_0P'}$. В результате условие определенности (3.1.73) будет нарушено, и σ-пространство не будет экстремальным в первом порядке.

Итак, почти все свойства евклидова пространства можно сформулировать в терминах экстремального σ-пространства, не используя понятия непрерывности. Дискретный аналог евклидова пространства можно сконструировать, удаляя почти все точки за исключением счетного множества их и сохраняя значения мировой функции для оставшихся точек.

Для такого евклидова пространства с выброшенными точками (в частном случае точки можно и не выбрасывать) будет использоваться термин евклидово σ-пространство. n-мерное евклидово σ-пространство – это такое σ-пространство, которое может быть изометрически вложено в n-мерное евклидово пространство, но не может быть вложено в евклидово пространство меньшей размерности.

3.2 Евклидово σ-пространство.

Определение 3.2.1 . *n-мерное евклидово пространство E_n есть множество $\mathbb{R}^n$ всех упорядоченных множеств $x = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ из n вещественных чисел,* *на котором для $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$ задана вещественная функция σ, обладающая свойствами*

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(x_i - y_i)(x_k - y_k), \qquad g^{ik} = const, \qquad i,k = 1,2,\ldots n \quad (3.2.1)$$

$$\det \parallel g_{ik} \parallel = (\det \parallel g^{ik} \parallel)^{-1} \neq 0 \quad (3.2.2)$$

Функция σ называется мировой функцией или просто σ-функцией. n-мерное евклидово пространство E_n является одновременно σ-пространством $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Определение 3.2.2 . *Евклидовым σ-пространством $E' = \{\sigma, \Omega'\}$ называется любое σ-подпространство $E' \subset E_n$, $(\Omega' \subset \mathbb{R}^n)$ n-мерного евклидова пространства E_n, где n - некоторое натуральное число.*

Замечание. Евклидовым σ-пространством будем называть также любое σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ эквивалентное $(V = E')$ евклидову σ-пространству $E' = \{\sigma', \Omega'\}$ в смысле определения 3.1.3.

Определение 3.2.3 . *Евклидово σ-пространство $E' = \{\sigma, \Omega'\}$ есть n-мерное σ-пространство, если оно является σ-подпространством n-мерного евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$, но не является σ-подпространством $(n-1)$-мерного евклидова пространства $E_{n-1} = \{\sigma, \mathbb{R}^{n-1}\}$.*

Рассмотрим произвольное σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$. Предположим, что в V существует $(n+1)$-точечный базис трубки $\mathcal{P}^n = \{P_i\}$, $i = 0,1,\ldots n$, т.е. выполнено условие (3.1.46). В этом случае каждой точке $P \in \Omega$ можно поставить в соответствие упорядоченное множество $x(P) = \{x_i(P)\}$, $i = 1,2,\ldots n$ из n вещественных чисел, называемых ковариантными координатами $x(P)$ точки P в базисе $\mathcal{P}^n$. Они определяются соотношениями

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \qquad P_i \in \mathcal{P}^n, \qquad i = 1,2,\ldots n \quad (3.2.3)$$

$$x_i = x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{e}_i) = \Gamma(P_0, P, P_i), \qquad i = 1,2,\ldots n, \qquad \forall P \in \Omega \quad (3.2.4)$$

где функция $\Gamma(P_0, P, P_i)$ определяется соотношением (3.1.6). Величины

$$g_{ik} = g_{ik}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) = \Gamma(P_0, P_i, P_k), \qquad i,k = 1,2,\ldots n \quad (3.2.5)$$

называются ковариантными компонентами метрического тензора в базисе трубки $\mathcal{P}^n$. При этом так как $\mathcal{P}^n$ есть базис трубки, то в силу (3.1.46), (3.1.47) выполнено условие

$$\det \parallel g_{ik}(\mathcal{P}^n) \parallel \neq 0, \qquad i,k = 1,2,\ldots n \quad (3.2.6)$$

и можно однозначно определить контравариантные компоненты $g^{ik} = g^{ik}(\mathcal{P}^n)$ метрического тензора с помощью соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(\mathcal{P}^n) g^{kl}(\mathcal{P}^n) = \delta_i^l, \qquad i,l = 1,2,\ldots n \quad (3.2.7)$$

Из (3.2.7) следует, что

$$g^{ik}(\mathcal{P}^n) = \frac{1}{F_n(\mathcal{P}^n)} \frac{\partial F_n(\mathcal{P}^n)}{\partial \Gamma(P_0, P_i, P_k)}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{3.2.8}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n) = \det \parallel \Gamma(P_0, P_i, P_k) \parallel$ определяется соотношением (3.1.38) и рассматривается как n-линейная функция от аргументов $\Gamma(P_0, P_i, P_k)$, $i, k = 1, 2, \ldots n$, причем при дифференцировании $\Gamma(P_0, P_i, P_k)$ и $\Gamma(P_0, P_k, P_i)$ рассматриваются как независимые переменные, если $i \neq k$. Контравариантные компоненты $x^i(P)$ точки $P \in \Omega$ в этом базисе определяются соотношениями

$$x^i = x^i(P) = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) x_k(P), \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{3.2.9}$$

При этом в силу свойств определителя (3.1.38) контравариантные координаты точек базиса трубки $\mathcal{P}^n$ имеют простой вид

$$x^i_{(k)} = x^i(P_k) = \delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{3.2.10}$$

$$x^i_{(0)} = x^i(P_0) = 0.$$

Пусть E_n есть n-мерное евклидово пространство $E_n = \{\sigma, \mathbf{R}^n\}$, с мировой функцией (3.2.1). Рассмотрим $n + 1$ точек $\mathcal{P}^n = \{P_i\} = \{x_{(i)}\}$, $i = 0, 1, \ldots n$ с ковариантными координатами

$$x_k(P_i) = x_{(i)k} = g_{ik}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{3.2.11}$$

$$x_k(P_0) = x_{(0)k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

Вычисляя $\Gamma(P_0, P_i, P_k)$, $i, k = 1, 2, \ldots n$ с помощью (3.1.6), (3.2.1) и (3.2.11), получаем

$$\Gamma(P_0, P_i, P_k) = g_{ik}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{3.2.12}$$

Тогда в силу (3.1.38) $F_n(\mathcal{P}^n) = \det \parallel g_{ik} \parallel$, $\quad i, k = 1, 2, \ldots n$. В соответствии с (3.2.2) выполнено условие (3.1.46) и $n + 1$ точек $\mathcal{P}^n$ образуют базис трубки.

Пусть $P = x \in \mathbf{R}^n$, $Q = y \in \mathbb{R}^n$ суть произвольные точки E_n, тогда n чисел $x = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ являются ковариантными координатами соответственно точек P и Q.

$$x_i = x_i(P) = \Gamma(P_0, P_i, P), \qquad y_i = \Gamma(P_0, P_i, Q), \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{3.2.13}$$

в чем можно убедиться, используя для подсчета $\Gamma(P_0, P_i, P)$ следующее из (3.1.6) и (3.2.1) соотношение

$$\Gamma(P_0, P, Q) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} x_i y_k \tag{3.2.14}$$

которое для $Q = P_i$, $i = 1, 2, \dots n$ с координатами (3.2.11) приводит к соотношению (3.2.13).

Используя (3.2.13) и то, что g^{ik} определяется соотношением (3.2.8), можно для $\forall P, Q \in \mathbb{R}^n$ переписать соотношения (3.2.1) и (3.2.14) в виде

$$\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)[\Gamma(P_0,P_i,P) - \Gamma(P_0,P_i,Q)]$$

$$\times[\Gamma(P_0,P_k,P) - \Gamma(P_0,P_k,Q)] \qquad (3.2.15)$$

$$\Gamma(P_0,P,Q) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\Gamma(P_0,P_i,P)\Gamma(P_0,P_k,Q) \qquad (3.2.16)$$

где P_0 есть начальная точка базиса $\mathcal{P}^n$. Соотношения (3.2.15), (3.2.16) содержат мировую функцию от точек базиса трубки $\mathcal{P}^n \subset \mathbb{R}^n$ и любых двух точек $P, Q \in \mathbf{R}^n$. Они эквивалентны и могут быть получены одно из другого с помощью соотношения (3.1.6). Соотношение (3.2.15) представляет собой ограничение, налагаемое на мировую функцию евклидова пространства E_n.

Соотношение (3.2.15) получено для определенного базиса $\mathcal{P}^n$, определяемого соотношением (3.2.11). На самом деле, соотношение (3.2.15) верно для любого базиса трубки $\mathcal{Q}^n = \{Q_i\}$, $i = 0, 1, \dots n$ в E_n. Действительно неособенное линейное преобразование координат

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_i^{\cdot k}\tilde{x}_k + b_i, \qquad i = 1, 2, \dots n, \qquad \det \parallel a_i^{\cdot k} \parallel \neq 0, \qquad (3.2.17)$$

$$a_i^{\cdot k} = \text{const}, \qquad b_i = \text{const} \qquad (3.2.18)$$

переводит мировую функцию (3.2.1) в мировую функцию того же вида

$$\sigma(x,y) = \tilde{\sigma}(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \tilde{g}^{ik}(\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)(\tilde{x}_k - \tilde{y}_k) \qquad (3.2.19)$$

$$\tilde{g}^{ik} = \sum_{l,s=1}^{n} a_l^{\cdot i} a_s^{\cdot k} g^{ls} = \text{const}, \qquad i,k = 1, 2, \dots n, \qquad \det \parallel \tilde{g}^{ik} \parallel \neq 0 \qquad (3.2.20)$$

С помощью надлежащим образом выбранного преобразования (3.2.17) новым координатам $\tilde{x}$ точек любого базиса трубки $\mathcal{Q}^n$ можно придать вид (3.2.11) и получить в базисе $\mathcal{Q}^n$ соотношения (3.2.15), (3.2.16). Итак, соотношения (3.2.15), (3.2.16) верны для любого $(n+1)$-точечного базиса трубки $\tilde{\mathcal{P}}^n$, если они верны для какого-нибудь $(n+1)$-точечного базиса трубки $\mathcal{P}^n$.

Поскольку соотношение (3.2.15) содержит $n+3$ точки n-мерного евклидова пространства E_n, то оно не будет нарушено, если часть точек E_n будет удалена, но оставшихся точек достаточно для того, чтобы из них можно было выбрать базис трубки $\mathcal{P}^n$. Это означает, что соотношения (3.2.15), (3.2.16) справедливы для любого σ-пространства $v = \{\sigma, \Omega\}$, которое может быть изометрически вложено в E_n и в котором существует $(n+1)$-точечный базис трубки $\mathcal{P}^n$.

Любые ограничения, налагаемые на мировую функцию σ-пространства специализируют его и создают в нем некоторую структуру. Примером может служить соотношение (3.2.16). Оно не является тождеством относительно аргументов P, Q, а выполняется лишь в том случае, если σ-пространство имеет евклидову структуру. Однако, оно выполняется тождественно для $P, Q \in \mathcal{P}^{n+1} = \{\mathcal{P}^n, P_{n+1}\}$, где $P_{n+1} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$. в этом можно убедиться, используя соотношения

$$F_{n+1}(P, \mathcal{P}^n) = 0, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0. \tag{3.2.21}$$

Определение 3.2.4 . *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ имеет структуру n-мерного евклидова пространства на Ω, если существует такой $(n+1)$-точечный базис трубки $\mathcal{P}^n \subset \Omega$, что для $\forall P$, $\forall Q \in \Omega$ выполнено условие (3.2.16)*

$$\Gamma(P_0, P, Q) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) x_i(P) x_k(Q), \tag{3.2.22}$$

где $x(P), x(Q)$ суть координаты точек P и Q в базисе $\mathcal{P}^n$, определенные соотношением (3.2.4), а метрический тензор $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$ определяется соотношениями (3.2.5), (3.2.7).

σ-пространство V, имеющее структуру n-мерного евклидова пространства, не обязательно евклидово, т.к. взаимно однозначного соответствия между точками $P \in \Omega$ и их координатами $x \in \mathbb{R}^n$ может не быть. Например, две точки P и P' могут иметь одинаковые координаты и отображаться в одну точку x евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Лемма 3.2.1 *Пусть $\mathcal{P}^m$ есть $m+1$ произвольные точки n-мерного евлидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$. Тогда ранг матрицы*

$$\mathcal{A}_m(\mathcal{P}^m) = \| \Gamma(P_0, P_i, P_k) \|, \qquad i, k = 1, 2, \ldots m; \qquad m \in \mathbb{N} \tag{3.2.23}$$

не более размерности n евклидова пространства E_n, причем максимальный ранг n достигается при $m = n$.

Доказательство. Пусть среди векторов $\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots m$ имеется r линейно независимых. Пусть это будут первые r векторов. Остальные векторы могут быть представлены в виде линейной комбинации первых r векторов.

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{r} a_k^{\cdot i} \mathbf{e}_i, \qquad k = r+1, r+2, \ldots m \tag{3.2.24}$$

В силу линейности скалярного произведения в евклидовом пространстве

$$(\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) = \sum_{l=1}^{r} a_i^{\cdot l} (\mathbf{e}_l.\mathbf{e}_k), \qquad i = r+1, r+2, \ldots m, \qquad k = 1, 2, \ldots r, \tag{3.2.25}$$

$$(\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) = \sum_{l,s=1}^{r} a_i^{.l} a_k^{.s} (\mathbf{e}_l.\mathbf{e}_s), \qquad i,k = r+1, r+2, \ldots m, \tag{3.2.26}$$

столбцы и строки матрицы $\mathcal{A}_m(\mathcal{P}^m)$ с $i > r$ или $k > r$ будут линейными комбинациями строк и столбцов с $i \leq r$ и $k \leq r$. В результате ранг матрицы $\mathcal{A}_m(\mathcal{P}^m)$ оказывается равным r, т.е. числу линейно независимых векторов среди всех векторов $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots m$.

Так как число линейно независимых векторов в n-мерном евклидовом пространстве не более n, то ранг матрицы $\mathcal{A}_m(\mathcal{P}^m)$ не более n. Если $m = n$ и все векторы $\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ линейно независимы, то $\mathrm{rank}\mathcal{A}_n(\mathcal{P}^n) = n$ и $\mathcal{P}^n$ является базисом трубки.

Лемма 3.2.2 . *Чтобы σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ имело структуру n-мерного евклидова пространства, т.е. выполнялось соотношение (3.2.22), необходимо и достаточно, чтобы для любых $m+1$ точек $\mathcal{P}^m$ с $m \leq n+2$ ранг квадратных $m \times m$ матриц $\mathcal{A}_m(\mathcal{P}^m) = ||\Gamma(P_0, P_i, P_k)||$ был не более n*

$$rank\ \mathcal{A}_m \leq n \tag{3.2.27}$$

и максимальное значение n достигалось для матрицы $\mathcal{A}_n(\mathcal{P}^n)$ того же порядка n

$$\det \mathcal{A}_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0 \tag{3.2.28}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $V = \{\sigma, \Omega\}$ имеет структуру n-мерного евклидова σ-пространства, т.е. существует $(n+1)$-точечный базис трубки $\mathcal{P}^n \subset \Omega$ и выполнены условия (3.2.22). Отобразим V на σ-подпространство $E'_n = \{\sigma, \Omega'\}$ n-мерного евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$, $V \to E'_n \subset E_n$, причем соответствие $P \to x \equiv \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ между $P \in \Omega$ и $x \in \Omega'$ определяются соотношением (3.2.4). В силу (3.2.22) и эквивалентного ему соотношения (3.2.15) такое отображение будет изометрическим. Точки $Q \in \Omega$ и $Q' \in \Omega'$, имеющие одинаковые координаты $x(Q) = x(Q')$ отобразятся в одну и ту же точку $x \in \Omega' \subset \mathbb{R}^n$. Так как $x(P_0) = 0$, то базис трубки $\mathcal{P}^n$ отобразится в базис трубки $\{x_{(0)}, x_{(1)}, \ldots x_{(n)}\} \subset \mathbb{R}^n$, $x_{(0)} = 0$.

Согласно (3.2.22) матрица (3.2.23) представляет собой матрицу скалярных произведений $\parallel (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) \parallel$, $i, k = 1, 2, \ldots m$, где вектор n-мерного евклидова пространства $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{x_{(0)}x_{(i)}}$ имеет ковариантные координаты $x_{(i)k} = g_{ik}$ в базисе $\{x_{(0)}, x_{(1)}, \ldots x_{(n)}\}$. Согласно лемме 3.2.1 ранг такой матрицы для векторов n-мерного евклидова пространства не может быть более размерности n евклидова пространства, причем ранг n достигается для $n \times n$ матрицы, если все векторы евклидова пространства, образующие матрицу, линейно независимы. Необходимость условий (3.2.27), (3.2.28) доказана.

Достаточность. Пусть теперь выполнены условия (3.2.27) (3.2.28). Пусть $m = n+2$, $\mathcal{P}^{n+2} = \{\mathcal{P}^n, P, Q\}$, $P_{n+1} = P \in \Omega$, $P_{n+2} = Q \in \Omega$. Так как

$\det \mathcal{A}_n(\mathcal{P}^n) \neq 0$, то, используя определение (3.1.6) для $\Gamma(P_0, P, Q)$, получаем

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} g_{ik}(\mathcal{P}^n) & x_i(P) & x_i(Q) \\ x_k(P) & \Gamma(P_0, P, P) & \Gamma(P_0, P, Q) \\ x_k(Q) & \Gamma(P_0, Q, P) & \Gamma(P_0, Q, Q) \end{Vmatrix} = n \qquad (3.2.29)$$

Поскольку два последних столбца должны быть линейными комбинациями первых n столбцов, то получаем, в частности

$$\Gamma(P_0, P, Q) = \sum_{i=1}^{n} x_i(P) x^i(Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} x_i(P) x_k(Q), , \qquad P, Q \in \Omega, \qquad (3.2.30)$$

$$\sigma(P_0, P) = \frac{1}{2} \Gamma(P_0, P, P) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} x_i(P) x_k(P), \qquad \forall P \in \Omega \qquad (3.2.31)$$

Соотношение (3.2.30) совпадает с (3.2.22). Таким образом, достаточность условий (3.2.27), (3.2.28) доказана.

Теорема 3.2.1 . *Пусть $\mathcal{P}^n$ есть $(n+1)$-точечный базис трубки в σ-пространстве $V = \{\sigma, \Omega\}$, т.е. выполнено условие (3.1.46). Тогда для того, чтобы трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ была n-мерным евклидовым σ-пространством, необходимо и достаточно:*

(i) $\operatorname{rank} \mathcal{A}_{n+2}(\mathcal{P}^{n+2}) = n, \qquad \forall P_{n+1} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n), \qquad \forall P_{n+2} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n).$

(ii) сечение $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ минимально в любой точке:

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P\}, \qquad \forall P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \subset E_n$ есть σ-подпространство n-мерного евклидова пространства E_n и $P_{n+1} = P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, $P_{n+2} = Q \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$. Согласно лемме 3.2.1 ранг $\mathcal{A}_{n+2}(\mathcal{P}^{n+2})$ не более n. Так как матрица $\mathcal{A}_n(\mathcal{P}^n)$ есть минор матрицы $\mathcal{A}_{n+2}(\mathcal{P}^{n+2})$, то в силу второго соотношения (3.2.21) $\operatorname{rank} \mathcal{A}_{n+2}(\mathcal{P}^{n+2}) = n$.

Легко проверить, что сечение плоскости $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ n-мерного евклидова пространства минимально в смысле соотношения (3.1.74).

Достаточность. Пусть теперь выполнено (3.2.21). Пусть $P = P_{n+1} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, $Q = P_{n+2} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, ранг матрицы $\mathcal{A}_{n+2}(\mathcal{P}^{n+2})$ равен n и сечение трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ минимально, т.е. (3.1.74) выполнено для $\forall P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$. Тогда матрица $\mathcal{A}_{n+2}(\mathcal{P}^{n+2})$ записывается в виде

$$\mathcal{A}_{n+2}(\mathcal{P}^{n+2}) = \begin{Vmatrix} g_{ik}(\mathcal{P}^n) & x_i & y_i \\ x_k & \sum\limits_{l=1}^{n} x_l x^l & \sum\limits_{l=1}^{n} y_l x^l \\ y_k & \sum\limits_{l=1}^{n} x_l y^l & \sum\limits_{l=1}^{n} y_l y^l \end{Vmatrix} \qquad (3.2.32)$$

где $x_i = x_i(P)$, $y_i = x_i(Q)$.

Из сравнения (3.2.32) и (3.2.23), (3.2.29) следует

$$\Gamma(P_0, P, Q) = \sum_{j=1}^{n} x_j y^j \tag{3.2.33}$$

что совпадает с (3.2.22), т.е. $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ имеет структуру n-мерного евклидова пространства.

Теперь отобразим $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \to \Omega_n \subset \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ множество всех элементов, состоящих из n упорядоченных чисел $x = \{x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots n$. Пусть каждой точке P ставятся в соответствие ее ковариантные координаты в базисе трубки $\mathcal{P}^n$. Такое отображение является одно-однозначным, как это следует из условия (3.1.74) минимальности сечения, т.е. каждой точке $P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ соответствует одна точка $x \in \Omega_n \subset \mathbb{R}^n$, и каждой точке $x \in \Omega_n$ соответствует только одна точка $P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$.

В самом деле, если точки $P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ и $Q \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ имеют одни и те же координаты

$$x_i = \Gamma(P_0, P_i, P) = \Gamma(P_0, P_i, Q) = y_i \tag{3.2.34}$$

то из (3.2.31) следует

$$\sigma(P_0, P) = \sigma(P_0, Q) \tag{3.2.35}$$

Как следствие уравнений (3.1.6) и (3.2.34) получаем

$$\sigma(P_i, P) = \sigma(P_i, Q), \qquad i = 1, 2, \dots n \tag{3.2.36}$$

Наоборот, уравнение (3.2.34) следует из (3.2.35), (3.2.36) и (3.1.6). Тогда определение (3.1.52) сечения трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ можно также представить в виде

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P' \mid F_{n+1}(P', \mathcal{P}^n) = 0 \bigwedge_{l=0}^{l=n} \Gamma(P_0, P_l, P') = \Gamma(P_0, P_l, P)\} \tag{3.2.37}$$

$$F_{n+1}(P, \mathcal{P}^n) = 0$$

Из (3.2.37) следует, что если $Q \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ и имеет координаты (3.2.34), то $Q \in \mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n))$. Из-за минимальности сечения оно состоит из одной точки и поэтому $Q = P$. Иначе говоря, координаты x соответствуют только одной точке P, и отображение $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \to \Omega_n$ одно-однозначно.

Итак, для $x \in \Omega_n \subset \mathbb{R}^n, \quad y \in \Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ мировая функция имеет вид (3.2.15). Распространим (3.2.15) на все точки множества $\mathbb{R}^n$. Тогда $E'_n = \{\sigma, \Omega_n\}$ есть σ-подпространство евклидова пространства E_n Следовательно, $\{\sigma, \Omega_n\}$ есть евклидово σ-простанство. Из-за взаимной однозначности отображения $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \leftrightarrow \Omega_n$ заключаем, что $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ есть евклидово σ-пространство. Теорема доказана.

Другая форма теоремы 3.2.1 формулируется следующим образом.

Теорема 3.2.2 . *Пусть $\mathcal{P}^n$ есть $(n+1)$-точечный базис трубки в σ-пространстве $V\{\sigma,\Omega\}$. Тогда для того, чтобы трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ была n-мерным евклидовым σ-пространством, необходимо и достаточно, чтобы:*
(i) σ-пространство $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ имело структуру n-мерного евклидова пространства

$$\Gamma(P_0,P,Q)=\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\Gamma(P_0,P_i,P)\Gamma(P_0,P_k,Q), \qquad \forall P,Q\in\mathcal{T}(\mathcal{P}^n). \quad (3.2.38)$$

где $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$ определяется соотношениями (3.2.5), (3.2.7)
(ii) сечение $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ было минимально в любой точке:

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n))=\{P\}, \qquad \forall P\in\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$$

3.3 Разбиение трубки на части и понятие "внутри"

Как мы видели, в силу соотношений (3.1.58) - (3.1.61), (3.1.63) трубку первого порядка можно разделить на части. Аналогично трубку n-ого порядка тоже можно разделить на части, используя для этого функции

$$S_n(\mathcal{P}^n)=\frac{1}{n!}|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|=\begin{cases}\frac{1}{n!}\mid\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}\mid, & F_n(\mathcal{P}^n)\geq 0\\ \frac{i}{n!}\mid\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}\mid, & F_n(\mathcal{P}^n)<0\end{cases} \quad (3.3.1)$$

Интервал (3.1.2) является частным случаем ($n=1$) соотношения (3.3.1). Смысл функции $S_n(\mathcal{P}^n)$ следующий. Пусть $\mathcal{P}^n$ представляет собой $(n+1)$-точечный базис, т.е. $F_n(\mathcal{P}^n)\neq 0$. Будем рассматривать $n+2$ точки $\mathcal{P}^{n+1}$ как σ-подпространство $V_d=(\sigma,\mathcal{P}^{n+1})$. Так как $P_{n+1}\in\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, то выполнены соотношения (3.2.22) и как их следствие условия (3.2.15), (3.2.16) для любых точек $P,Q\in\mathcal{P}^{n+1}$. Это означает, что V_d может быть изометрически вложено в евклидово пространство E_n. Представим себе, что это сделано. Тогда $S_n(\mathcal{P}^n)$ есть измеренный в E_n объем $(n+1)$-эдра с вершинами в $\mathcal{P}^n$. В частном случае $n=1$ $S_1(\mathcal{P}^1)=S(P_0,P_1)$ есть длина отрезка $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Разделение трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ на части связано со следующим предложением.

Лемма 3.3.1 . *Если $\mathcal{P}^n$ — $(n+1)$-точечный базис в σ-простанстве $V=\{\sigma,\Omega\}$ и $P_{n+1}\in\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, т.е.*

$$F_{n+1}(\mathcal{P}^n,P_{n+1})=F_{n+1}(\mathcal{P}^{n+1})=0, \quad (3.3.2)$$

то найдется такой набор $\{\alpha_l\}$, $\alpha_l=\pm 1$, $l=0,1,\ldots n$, что

$$\sum_{l=0}^{n}\alpha_l S_n(\mathcal{P}_l^{n+1})=0, \qquad \mathcal{P}_l^{n+1}\equiv\mathcal{P}^{n+1}\backslash\{P_l\}, \qquad l=0,1,\ldots,n+1 \quad (3.3.3)$$

Каждому набору $\{\alpha_l\}$ соответствует определенная часть трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ и попадание точки P_{n+1} в эту часть трубки. Иначе говоря, если зафиксировать некоторый набор $\alpha_l = \pm 1, \quad l = 0, 1, \ldots n$ и рассматривать соотношение (3.3.3) как уравнение для определения точки $P = P_{n+1}$, то множество решений $P = P_{n+1}$ образует часть трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, соответствующую набору величин $\{\alpha_l\}$. Другому набору будет соответствовать другая часть трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$. Все наборы величин $\{\alpha_l\}$ описывают всю трубку $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$.

Смысл утверждения леммы для случая $n = 2$ пояснен на рис.3.3.1. Если P_3 удовлетворяет (3.3.2), то четыре точки $\mathcal{P}^3$ могут быть изометрически вложены в двумерную евклидову плоскость. Тогда утверждение (3.3.3) означает, что некоторая линейная комбинация площадей треугольников с коэффициентами ± 1 обращается в нуль. Для расположения точки P_3 внутри треугольника $P_0P_1P_2$, как это видно прямо из чертежа, получаем

$$S_{P_0P_1P_2} = S_{P_0P_2P_3} + S_{P_2P_1P_3} + S_{P_3P_1P_0},$$

где $S_{P_0P_1P_2} = S_2(\mathcal{P}^2)$ есть площадь треугольника $P_0P_1P_2$.

Доказательство. В евклидовом пространстве E_n, где определено сложение векторов и умножение вектора на число, соотношения (3.2.5), (3.2.9), представленные в форме

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{e}_i) = \sum_{k=1}^{n} x^k(P)(\mathbf{e}_k.\mathbf{e}_i) \tag{3.3.4}$$

можно переписать в виде

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{P}_0\mathbf{P} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x^k(P)\mathbf{e}_k \tag{3.3.5}$$

Такая возможность связана с тем, что точки $\mathcal{P}^{n+1} = \{\mathcal{P}^n, P_{n+1}\}$ можно рассматривать как точки n-мерного евклидова пространства E_n , в котором векторы $\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \ldots n$ образуют базис.

Рассмотрим мультивектор в E_n

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = \mathbf{q} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n = \bigwedge_{l=1}^{l=n} \mathbf{e}_l \tag{3.3.6}$$

и используем соотношения, верные для евклидова пространства E_n. В силу соотношения (3.3.5), имеем

$$\bigwedge_{l=1}^{l=n}(\mathbf{e}_l - \mathbf{e}_{n+1}) = \mathbf{q} - \sum_{l=1}^{l=n} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{l-1} \wedge \mathbf{e}_{n+1} \wedge \mathbf{e}_{l+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n =$$

$$\mathbf{q} - \sum_{l=1}^{l=n} x^l \mathbf{q} \tag{3.3.7}$$

Мультивектор (3.3.7) может быть записан в виде

$$\bigwedge_{l=1}^{l=n}(\mathbf{e}_l-\mathbf{e}_{n+1})=x^0\mathbf{q} \tag{3.3.8}$$

где

$$\mid x^0 \mid=\sqrt{\left|\frac{\det \parallel (\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_{n+1}.\mathbf{e}_k-\mathbf{e}_{n+1})\parallel}{\det \parallel (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k)\parallel}\right|}=\sqrt{\left|\frac{\det \parallel (\mathbf{P}_{n+1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_{n+1}\mathbf{P}_k)\parallel}{\det \parallel (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)\parallel}\right|}= \tag{3.3.9}$$
$$\mid F_n({}^1\mathcal{P}^{n+1})/F_n(\mathcal{P}^n)\mid^{1/2}=\mid S_n({}^1\mathcal{P}^{n+1})/S_n(\mathcal{P}^n)\mid$$
$$i,k=1,2,\dots n$$

Второе из равенств получается, поскольку в E_n $\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_{n+1}=\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_0\mathbf{P}_{n+1}=\mathbf{P}_{n+1}\mathbf{P}_i\quad i=1,2,\dots n$. Из равенств

$$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\dots\wedge\mathbf{e}_{l-1}\wedge\mathbf{e}_{n+1}\wedge\mathbf{e}_{l+1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}_n=x^l\mathbf{q},\qquad l=1,2,\dots n \tag{3.3.10}$$

следует

$$\mid x^l \mid=\mid F_n(\mathcal{P}_l^{n+1})/F_n(\mathcal{P}^n)\mid^{1/2}=\mid S_n(\mathcal{P}_l^{n+1})/S_n(\mathcal{P}^n)\mid \tag{3.3.11}$$
$$l=1,2,\dots n$$

Из соотношений (3.3.7), (3.3.8) следует

$$\sum_{l=0}^{n}x^l=1 \tag{3.3.12}$$

что вместе с (3.3.9) и (3.3.11) приводит к (3.3.3), причем коэффициенты $\alpha_l=\pm1$ появляются из-за того, что соотношения (3.3.9), (3.3.11) содержат только модули величин. Лемма доказана

Если $P=P_{n+1}\in\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, то можно говорить о взаимном расположении точки $P=P_{n+1}$ и $(n+1)$-эдра с вершинами в точках $\mathcal{P}^n$. Оно определяется комбинацией знаков контравариантных координат $x^l=x^l(P),\quad l=1,2...n$, в базисе $\mathcal{P}^n$ с началом в точке P_0 и знаком координаты $x^0(P)$ в том же базисе $\mathcal{P}^n$, но с началом в любой из точек $P_i\quad i=1,2,...n$. Знак координаты $x^0(P)$ один и тот же при любом выборе начала базиса.

Знак координаты x^l, $l=1,2,\dots,n$ точки P показывает относительное расположение точки P и $(n+1)$-эдра относительно плоскости грани $(n+1)$-едра, определяемой мультивектором $\overrightarrow{\mathcal{P}_l^n}$. Если $x^l>0$, то точка P и $(n+1)$-эдр находятся с одной и той же стороны от плоскости этой грани. Если $x^l<0$, то – по разные стороны плоскости этой грани. Если $x^l=0$, то точка P находится на плоскости этой грани. Аналогично координата x^0 показывает относительное расположение точки P и $(n+1)$-эдра относительно плоскости грани $(n+1)$-эдра, определяемой мультивектором $\overrightarrow{{}^1\mathcal{P}^n}=\overrightarrow{\mathcal{P}_0^n}$.

Если $x^l(P) \geq 0, \quad l = 0,1,\dots n$, то в евклидовом пространстве E_n точка P находится внутри $(n+1)$-эдра $\mathcal{P}^n$.

Если $x^l(P) > 0, \quad l = 0,1,\dots k-1, k+1,\dots n$, а $x^k(P) = 0$, то точка P находится на грани $(n+1)$-эдра, представляющей собой n-эдр с вершинами в точках $\mathcal{P}^n_k$.

Найдем выражения для контравариантных координат. В соответствии с (3.2.4), (3.2.8), (3.2.9) контравариантные координты $x^l(P)$ представляются в виде

$$x^l(P) = \sum_{k=1}^{n} g^{lk}(\mathcal{P}^n)(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) \left|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right|^{-2} = \left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(l)}\right) \left|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right|^{-2}, \qquad l = 1,2,...,n \tag{3.3.13}$$

где

$$\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(l)} = \overrightarrow{\mathbf{Q}_0(l)\mathbf{Q}_1(l)...\mathbf{Q}_n(l)}, \qquad Q_k(l) = \begin{cases} P_k, & k \neq l \\ P, & k = l \end{cases}, \qquad \begin{matrix} k = 0,1,...n \\ l = 1,2,...n \end{matrix} \tag{3.3.14}$$

Для координаты $x^0(P)$ получаем выражение

$$x^0(P) = \sum_{k=0}^{n-1} g^{0k}(P_n, \mathcal{P}^{n-1})(\mathbf{P}_n\mathbf{P}_k.\mathbf{P}_n\mathbf{P}) \left|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right|^{-2} = \left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(0)}\right) \left|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right|^{-2}, \tag{3.3.15}$$

где

$$\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(0)} = \overrightarrow{\mathbf{Q}_n(0)\mathbf{Q}_0(0)\mathbf{Q}_1(0)...\mathbf{Q}_{n-1}(0)}, \tag{3.3.16}$$

$$Q_k(0) = \begin{cases} P_k, & k \neq 0 \\ P, & k = 0 \end{cases}, \qquad k = 0,1,...n \tag{3.3.17}$$

Формулы (3.3.13), (3.3.15) можно объединить в виде

$$x^l(P) = \left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(l)}\right) \left|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right|^{-2}, \qquad l = 0,1,...,n \tag{3.3.18}$$

где

$$\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(l)} = \overrightarrow{\mathbf{Q}_0(l)\mathbf{Q}_1(l)...\mathbf{Q}_n(l)}, \qquad Q_k(l) = \begin{cases} P_k, & k \neq l \\ P, & k = l \end{cases}, \qquad k,l = 0,1,...n \tag{3.3.19}$$

Определение 3.3.1 . *Сегментом $\mathcal{T}_{[\mathcal{P}^n]}$ трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ n-ого порядка называется множество точек P*

$$\mathcal{T}([\mathcal{P}^n]) = \mathcal{T}_{[\mathcal{P}^n]} = \left\{ P \left| F_{n+1}(P,\mathcal{P}^n) = 0 \bigwedge_{l=0}^{l=n} \left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(l)}\right) \left|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right|^{-2} \geq 0 \right. \right\} \tag{3.3.20}$$

где мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(l)}$ определяется соотношением (3.3.19).

Определение 3.3.2 . *Открытой внутренностью $\mathcal{T}_{(\mathcal{P}^n)}$ трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ n-ого порядка называется множество точек P*

$$\mathcal{T}\left((\mathcal{P}^n)\right) = \mathcal{T}_{(\mathcal{P}^n)} = \left\{ P \left| F_{n+1}(P, \mathcal{P}^n) = 0 \bigwedge_{l=0}^{l=n} \left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(l)}\right) \left|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right|^{-2} > 0 \right.\right\} \qquad (3.3.21)$$

где мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n(l)}$ определяется соотношением (3.3.19).

Пусть $\mathcal{P}^n$ - $(n+1)$-точечный базис. Если $Q \in \mathcal{T}_{[\mathcal{P}^n]}$, то по определению точка Q находится внутри $\mathcal{P}^n$ (внутри $(n+1)$-эдра с вершинами в $\mathcal{P}^n$).

$$Q \leq \mathcal{P}^n$$

Пусть $\mathcal{Q}^n$ - такой $(n+1)$-точечный базис, что

$$Q_k \leq \mathcal{P}^n, \qquad k = 0, 1, \dots n$$

Это по определению означает, что $\mathcal{Q}^n$ внутри $\mathcal{P}^n$ (внутри $(n+1)$-эдра с вершинами в $\mathcal{P}^n$).

$$\mathcal{Q}^n \leq \mathcal{P}^n \qquad (3.3.22)$$

В собственно евклидовом пространстве из $\mathcal{R}^n \leq \mathcal{Q}^n$ и $\mathcal{Q}^n \leq \mathcal{P}^n$ следует $\mathcal{R}^n \leq \mathcal{P}^n$. В σ-пространстве это, вообще говоря, не так и связано с отсутствием свойства определенности, т.е. с тем, что при $\mathcal{Q}^n \leq \mathcal{P}^n$, вообще говоря, $\mathcal{T}(\mathcal{Q}^n) \neq \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$.

Пример 3.3.1. Рассмотрим случай, когда σ-пространство есть 4-мерное пространство Минковского с галилеевыми координатами x^0, x^1, x^2, x^3 и метрическим тензором $\mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}$. Пусть $P_0 = (0,0,0,0)$, $P_1 = (0,1,0,0)$. Тогда

$$\mathcal{T}_{P_0P_1}: \quad x^0 = a, \qquad x^1 = \tau, \qquad x^2 = a\cos\varphi, \qquad x^3 = a\sin\varphi$$

где $a, \tau \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi]$

Таким образом, в пространстве Минковского трубка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, образованная пространственноподобным вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, состоит из множества двумерных конусов в трехмерном пространстве x^0, x^2, x^3 с вершинами на пространственноподобной прямой $\mathcal{L}_{P_0P_1}$, параллельной оси x^1 и проходящей через точки P_0, P_1.

Пусть $P_0' = (a, 1/2, 0, a)$, $P_1' = (a, 1/2, 0, -a)$. Тогда P_0', $P_1' \in \mathcal{T}_{P_0P_1}$. В соответствии с (3.3.18), (3.3.19) контравариантные координаты точек P_0', P_1' в базисе P_0, P_1 суть $x^0(P_0') = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0'\mathbf{P}_1)|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^{-1} = 1/2 > 0$, $x^1(P_0') = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_0')|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^{-1} = 1/2 > 0$, $x^0(P_1') = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1'\mathbf{P}_1)|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^{-1} = 1/2 > 0$, $x^1(P_1') = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1')|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^{-1} = 1/2 > 0$

Следовательно, P_0', $P_1' \in \mathcal{T}_{(P_0P_1)}$ и $\mathcal{P}'^1 \leq \mathcal{P}^1$. Точки $\mathcal{P}'^1$ образуют базис, и трубка $\mathcal{T}_{P_0'P_1'}$ описывается уравнениями

$$\mathcal{T}_{P_0'P'}: \qquad x^0 = a + b, \qquad x^1 = \frac{1}{2} + b\cos\psi, \qquad x^2 = b\sin\psi, \qquad x^3 = \tau,$$

$$b, \psi \in \mathbb{R}, \qquad -a < \tau < a$$

и $\mathcal{T}_{P_0'P_1'} \neq \mathcal{T}_{P_0P_1}$. Трубку $\mathcal{T}_{P_0'P_1'}$ можно рассматривать как состоящую из двумерных конусов с вершинами на прямой $\mathcal{L}_{P_0'P_1'}$, параллельной оси x^3. Хотя вершины конусов, составляющих трубку $\mathcal{T}_{P_0'P_1'}$ принадлежат сегменту $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, трубки $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, но другие точки конусов не принадлежат ему.

Точки $P_0'' = (0, a+1/2, 0, 0)$, $\quad P_1'' = (0, -a+1/2, 0, 0)$ лежат внутри $\mathcal{T}_{(P_0'P_1')}$, $P_0'', P_1'' \in \mathcal{T}_{(P_0'P_1')}$. Действительно их контравариантные координаты в базисе P_0', P_1' суть $x^0(P_0'') = (\mathbf{P}_0'\mathbf{P}_1'.\mathbf{P}_0''\mathbf{P}_1')|\mathbf{P}_0'\mathbf{P}_1'|^{-1} = 1/2 > 0$. Аналогично

$$x^1(P_0'') = x^1(P_1'') = x^0(P_1'') = 1/2 > 0$$

Тогда при $a = 2$, $P_0'' = (0, 5/2, 0, 0)$, $\quad P_1'' = (0, -3/2, 0, 0)$ и $P_0'' \notin \mathcal{T}_{P_0P_1}$, $\quad P_1'' \notin \mathcal{T}_{P_0P_1}$, т.е. точки P_0'' P_1'' не лежат внутри $\mathcal{T}_{(P_0P_1)}$. Рассмотренный пример показывает, что понятие "внутри" имеет в Т-геометрии ограниченное применение. Оно пригодно только для собственно евклидова (и собственно риманова) σ-пространства.

3.4 Евклидовость и экстремальность

Определение 3.4.1 . *n-мерное евклидово пространство, в котором при любом фиксированном $y \in \mathbb{R}^n$ уравнение $\sigma(x, y) = 0$, имеет единственное решение $x = y$, называется собственно евклидовым пространством.*

Определение 3.4.2 . *Если евклидово пространство не является собственно евклидовым, то оно называется псевдоевклидовым.*

Собственно евклидово пространство экстремально во всех порядках. Исследуем справедливость обратного утверждения: σ-пространство экстремальное во всех порядках есть собственно евклидово пространство. Вообще говоря, это утверждение не верно, хотя его нарушения очень редки. Они скорее исключение, чем правило. Собственно риманово пространство экстремально только в первом порядке, т.е. на трубках первого порядка.

Пусть $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть σ-пространство, экстремальное во всех порядках, т.е. все трубки являются геодезическими трубками. Рассмотрим геодезическую трубку $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, порожденную базисом $\mathcal{P}^n$. Пусть $P \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, т.е.

$$F_{n+1}(P, \mathcal{P}^n) = 0, \qquad F_{n+1}(Q, \mathcal{P}^n) = 0, \tag{3.4.1}$$

Пусть точка Q такова, что $n+1$ точек $Q, \mathcal{P}_l^n$ образуют базис, т.е.

$$F_n(Q, \mathcal{P}_l^n) \neq 0, \qquad l = 0, 1, \ldots n \tag{3.4.2}$$

Здесь использовано обозначение (3.1.4) $\mathcal{P}_l^n = \mathcal{P}^n \backslash \{P_l\}$. Согласно свойству определенности трубки, порожденные базисами $Q, \mathcal{P}_l^n$ и $\mathcal{P}^n$, должны совпадать, и точка P должна принадлежать этой трубке, т.е. если выполнено (3.4.1), (3.4.2), то должны быть выполнены уравнения

$$F_{n+1}(P, Q, \mathcal{P}_l^n) = 0, \qquad l = 0, 1, \ldots n \tag{3.4.3}$$

Рассмотрим систему (3.4.1) - (3.4.3) из $n+3$ уравнений. Соотношения (3.4.1), (3.4.3) (кроме случая $l = 0$) представляют собой условия обращения в нуль $n+2$ главных миноров матрицы

$$\mathcal{A}_{n+1}(\mathcal{P}^{n+2}) = \| \Gamma(P_0, P_i, P_k) \|, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n+2; \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3.4.4}$$

где $P = P_{n+1}, Q = P_{n+2}$. Используя обозначения типа (3.2.4), (3.2.9),

$$x_i = x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{e}_i) = \Gamma(P_0, P, P_i), \qquad i = 1, 2, \ldots n, \qquad \forall P \in \Omega \tag{3.4.5}$$

$$y_i = x_i(Q) = (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{e}_i) = \Gamma(P_0, Q, P_i), \qquad i = 1, 2, \ldots n, \qquad \forall Q \in \Omega \tag{3.4.6}$$

$$x^i = x^i(P) = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) x_k(P), \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{3.4.7}$$

$$y^i = x^i(Q) = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) x_k(Q), \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{3.4.8}$$

получим из (3.4.1) соотношение (3.2.31) и аналогичное соотношение с заменой $P \to Q$, $x \to y$.

Уравнения (3.4.3) могут быть представлены в виде

$$F_n(P, Q, \mathcal{P}_l^n) = \det \left\| \begin{array}{ccc} g_{ik}(\mathcal{P}^n) & x_i & y_i \\ x_k & \sum\limits_{j=1}^{n} x_j x^j & \Gamma(P_0, Q, P) \\ y_k & \Gamma(P_0, Q, P) & \sum\limits_{j=1}^{n} y_j y^j \end{array} \right\| = 0 \tag{3.4.9}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots l-1, l+1, \ldots n; \quad l = 1, 2, \ldots n.$$

Введем переменную

$$z = \Gamma(P_0, Q, P) - \sum_{j=1}^{n} x_j y^j. \tag{3.4.10}$$

Тогда уравнение (3.4.9) переписывается в виде

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} g_{ik} & g_{ij} x^j & g_{ij} y^j \\ g_{kj} x^j & \sum\limits_{s,j=1}^{n} g_{sj} x^s x^j & z + \sum\limits_{s,j=1}^{n} g_{sj} x^s y^j \\ g_{kj} y^j & z + \sum\limits_{s,j=1}^{n} g_{sj} x^s y^j & \sum\limits_{s,j=1}^{n} g_{sj} y^s y^j \end{array} \right\| = 0, \tag{3.4.11}$$

$$i,k = 1,2,\dots l-1, l+1,\dots n; \qquad l = 1,2,\dots n.$$

Умножим первые $n-1$ строк на $-x^k$ и на $-y^k$ и прибавим соответственно к n-ной и $(n+1)$-ой строке. Получаем

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} g_{ik} & g_{ij}x^j & g_{ij}y^j \\ g_{kl}x^l & \sum\limits_{j=1}^{n} g_{lj}x^l x^j & z+\sum\limits_{j=1}^{n} g_{lj}x^l y^j \\ g_{kl}y^l & z+\sum\limits_{j=1}^{n} g_{lj}x^j y^l & \sum\limits_{j=1}^{n} g_{lj}y^l y^j \end{array} \right\| = 0,$$

$$i,k = 1,2,\dots l-1, l+1,\dots n; \quad l = 1,2,\dots n.$$

Проделав ту же процедуру со столбцами, получим

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} g_{ik} & g_{il}x^l & g_{il}y^l \\ g_{kl}x^l & g_{ll}x^l x^l & z+g_{ll}x^l y^l \\ g_{kl}y^l & z+g_{ll}x^l y^l & g_{ll}y^l y^l \end{array} \right\| = 0,$$

$$i,k = 1,2,\dots l-1, l+1,\dots n; \quad l = 1,2,\dots n.$$

Теперь умножим n-ую строку на $-y^l/x^l$ и прибавим к $(n+1)$-ой строке

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} g_{ik} & g_{il}x^l & g_{il}y^l \\ g_{kl}x^l & g_{ll}x^l x^l & z+g_{ll}x^l y^l \\ 0 & z & -\frac{y^l}{x^l}z \end{array} \right\| = 0,$$

$$i,k = 1,2,\dots l-1, l+1,\dots n; \quad l = 1,2,\dots n.$$

Здесь и далее l фиксировано и суммирование по l не прозводится. Умножим n-ый столбец на y^l/x^l и прибавим к $(n+1)$-ому столбцу. Получаем

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} g_{ik} & g_{il}x^l & 2g_{il}y^l \\ g_{kl}x^l & g_{ll}x^l x^l & z+2g_{ll}x^l y^l \\ 0 & z & 0 \end{array} \right\| = 0,$$

$$i,k = 1,2,\dots l-1, l+1,\dots n; \qquad l = 1,2,\dots n.$$

В результате получается соотношение

$$z \det \left\| \begin{array}{cc} g_{ik} & 2g_{il}y^l \\ g_{kl}x^l & z+2g_{ll}x^l y^l \end{array} \right\| = 0$$

$$i,k = 1,2,\dots l-1, l+1,\dots n; \qquad l = 1,2,\dots n.$$

Разлагая определитель по степеням z, получаем

$$z \left[\left| \begin{array}{cc} g_{ik} & 2g_{il}y^l \\ 0 & z \end{array} \right| + 2x^l y^l \left| \begin{array}{cc} g_{ik} & g_{il} \\ g_{kl} & g_{ll} \end{array} \right| \right] = 0$$

$$i,k = 1,2,\dots l-1, l+1,\dots n; \qquad l = 1,2,\dots n.$$

или

$$z[z\frac{\partial g}{\partial g_{ll}}+2x^ly^lg]=0, \qquad g=\det\|g_{ik}\|$$

$$z(zg^{ll}+2x^ly^l)=0, \qquad l=1,2,\ldots n \tag{3.4.12}$$

Уравнения (3.4.12) имеют тривиальное решение

$$z=0 \tag{3.4.13}$$

Оно соответствует соотношению (3.2.22) и приводит к выражению (3.2.15) для мировой функции $\sigma(P,Q)$, т.е. к евклидову σ-пространству $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$.

Нас интересует существование нетривиальных решений уравнений (3.4.12). Отбросим тривиальное решение (3.4.13), понизив тем самым порядок уравнений (3.4.12). Получаем n уравнений для определения одной величины z.

$$g^{ll}z+2x^ly^l=0, \qquad l=1,2,\ldots n \tag{3.4.14}$$

суммирования по l нет.

Решение существует , если только x^l и y^l, $l=1,2,\ldots n$ связаны некоторыми условиями. Определим их.

Учтем, что в силу (3.1.47), (3.2.5) и (3.3.11)

$$g^{ll}=F_{n-1}(\mathcal{P}_l^n)/F_n(\mathcal{P}^n), \qquad l=1,2,\ldots n \tag{3.4.15}$$

$$(x^l)^2=F_n(P,\mathcal{P}_l^n)/F_n(\mathcal{P}^n), \qquad (y^l)^2=F_n(Q,\mathcal{P}_l^n)/F_n(\mathcal{P}^n), \tag{3.4.16}$$
$$l=1,2\ldots n$$

Подставим (3.4.15) и (3.4.16) в (3.4.14) и примем во внимание, что первое ($l=0$) из уравнений (3.4.3) получается из уравнения с номером $l=k$ в результате замены $P_0\rightarrow P_k$. Тогда возникает система из $n+1$ линейных уравнений для z.

$$F_{n-1}(\mathcal{P}_l^n)z+2\sqrt{F_n(P,\mathcal{P}_l^n)F_n(Q,\mathcal{P}_l^n)}=0, \qquad l=0,1,\ldots n \tag{3.4.17}$$

Коэффициенты уравнений (3.4.17) не зависят от $\sigma(P,Q)$, а только от $\sigma(P,P_k)$ и $\sigma(Q,P_k)$ $k=0,1,\ldots n$. Условие того, что z есть общее решение всех $n+1$ уравнений (3.4.17) накладывает ограничения на координаты точек P и Q.

Представляет интерес только нетривиальное решение системы (3.4.17). Пусть точки $\mathcal{P}^n$=$\{P_0,P_1,\ldots P_n\}$ таковы, что никакая из них не лежат на трубке порядка $n-2$, т.е.

$$F_{n-1}(\mathcal{P}_l^n)\neq 0, \qquad l=0,1,\ldots n, \tag{3.4.18}$$

и в соответствии с (3.4.15)

$$g^{ll}\neq 0, \qquad l=1,2,\ldots n \tag{3.4.19}$$

Тогда в силу (3.4.16) уравнения (3.4.17) можно записать в виде

$$x^l y^l = g^{ll}\tau, \qquad l = 1,,2...n \tag{3.4.20}$$

$$\tau = \frac{z}{2} = \frac{\sqrt{F_n\left(P, {}^1\mathcal{P}^n\right) F_n\left(Q, {}^1\mathcal{P}^n\right)}}{2F_{n-1}\left({}^1\mathcal{P}^n\right)} \tag{3.4.21}$$

Зафиксируем $x^l \neq 0, \quad l = 1, 2, ...n$. Тогда решение уравнения (3.4.20) $y^l = y^l(\tau) = (g^{ll}/x^l)\tau, \quad l = 1, 2, ...n$ описывает прямую в пространстве координат $y^l, \quad l = 1, 2, ...n$. Эта прямая должна проходить через точки, где $\tau = 0$. Согласно (3.4.21) $\tau = 0$ в n точках $Q = P_i, \quad i = 1, 2, ...n$, и следовательно, если решение системы (3.4.20), (3.4.21) существует, то соответствующая точка лежит на пересечении прямых, проходящих через точки $P_1, P_2, ...P_n$. Поскольку эти точки образуют базис и не лежат на одной прямой, то система (3.4.20), (3.4.21) имеет не более одного решения.

Определение 3.4.3 . *$(n+1)$-точечный базис $\mathcal{P}^n$ в σ-пространстве V называется невырожденным базисом, если любые n точек $\mathcal{P}^n$ образуют базис, т.е. выполнено условие (3.4.18).*

В собственно евклидовом σ-пространстве E_n любой базис $\mathcal{P}^k$, $k = 1, 2, \ldots n$ является невырожденным. В псевдо-евклидовом σ-пространстве E_n существуют вырожденные базисы. Например, в пространстве Минковского с метрикой $g_{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ трехточечный базис P_0, P_1, P_2 с $P_0 = (0, 0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 1, 0, 0)$ не является невырожденным, так как две точки P_0, P_2 не образуют базиса, поскольку $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = 0$.

Определение 3.4.4 . *Точки P и Q σ-пространства V называются взаимно сопряженными относительно невырожденного $(n+1)$-точечного базиса $\mathcal{P}^n \subset V$, если $P \notin \mathcal{T}(\mathcal{P}^n_l)$, $Q \notin \mathcal{T}(\mathcal{P}^n_l)$ $(l = 0, 1, \ldots n)$ и их контравариантные координаты x и y в базисе $\mathcal{P}^n_l$ удовлетворяют уравнению (3.4.14).*

Если одна из координат $x^l = 0$ (что эквивалентно $P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n_l)$ или $F_n(P, \mathcal{P}^n_l) = 0$), то в соответствии с (3.4.19), (3.4.16) и (3.4.14) $z = 0$, и σ-пространство $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ будет евклидовым σ-пространством. Как мы видели, система уравнений (3.4.20), (3.4.21), или, что одно и тоже система уравнений (3.4.14), имеет не более одного решения. Это означает, что в любом случае не может быть больше одной точки Q сопряженной с P относительно базиса $\mathcal{P}^n$.

Сформулируем следующие предложения.

Лемма 3.4.1 . *Пусть σ-пространство V экстремально на трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$= $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, образованной невырожденным $(n+1)$-точечным базисом $\mathcal{P}^n$. Если $P \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, $P \notin \mathcal{T}(\mathcal{P}^n_l)$, $l = 0, 1, \ldots n$, то существует не более одной точки $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, сопряженной с P относительно $\mathcal{P}^n$.*

Лемма 3.4.2 . *Пусть σ-пространство V экстремально на трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$= $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, образованной невырожденным $(n+1)$-точечным базисом $\mathcal{P}^n$. Если $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, $P, Q \notin \mathcal{T}(\mathcal{P}^n_l)$ $(l = 0, 1, \ldots n)$, то либо $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$ евклидово, либо точки P и Q взаимно сопряжены относительно базиса $\mathcal{P}^n$.*

Теорема 3.4.1 . *Пусть σ-пространство V экстремально на трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)=\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, образованной невырожденным $(n+1)$-точечным базисом $\mathcal{P}^n$. Тогда $\sigma-$пространство $V_1=\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$ евклидово, если число N точек в $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$ отлично от $n+3$.*

Доказательство. Условие $P,Q\notin\mathcal{T}(\mathcal{P}_l^n)$ выполняется лишь в том случае, если $N\geq n+2$. Пусть $N=n+2$, тогда $V_1=\{\mathcal{P}^n,P\}$. Так как $P\in\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, то справедливо первое уравнение (3.2.21) и, следовательно, ранг матрицы (3.2.23) равен n для любых $n+2$ точек из V_1. Условия теоремы 3.2.1 выполнены и V_1 есть евклидово σ-пространство.

Теперь пусть $N=n+4$. Тогда $V_1=\{\mathcal{P}^n,P,Q,R\}$. Пусть σ-пространство V_1 неевклидово, тогда в соответствии с леммой 3.4.2 точка P сопряжена с Q, и точка P сопряжена с R относительно $\mathcal{P}^n$. Согласно лемме 3.4.1, сопряженная точка единственна, и поэтому $R\not\equiv Q$ не возможно. Тогда остается лишь одна возможность: V_1 есть евклидово σ-простанство. То же самое рассмотение можно провести в случае $N>n+4$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим иллюстрацию к теореме 3.4.1, когда $N=n+3$, σ-пространство экстремально на $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, однако $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ не является евклидовым σ-пространством.

Пример 3.4.1. Пусть σ-пространство Ω_4 состоит из четырех точек: $0,1,P,Q$.

$$\begin{gathered} S(0,1)=S(P,Q)=a \\ S(0,P)=S(Q,1)=b, \qquad 0<b<a \\ S(1,P)=S(Q,0)=a-b \end{gathered} \tag{3.4.22}$$

Легко проверить, что

$$\mathcal{T}_{01}=\mathcal{T}_{0P}=\mathcal{T}_{0Q}=\mathcal{T}_{1P}=\mathcal{T}_{1Q}=\mathcal{T}_{PQ}=\Omega_4$$

т.е. трубка $\mathcal{T}_{01}$ содержит все точки σ-пространства Ω_4, и Ω_4 одномерно. Трубка $\mathcal{T}_{01}$ обладает свойством определенности. Кроме того, если $a-b\neq b$, то сечение трубки минимально. Таким образом, при $a\neq 2b$ σ-пространство Ω_4 экстремально в первом порядке.

Возникает ситуация, необычная для собственно евклидова пространства

$$P\in\mathcal{L}_{(01)}, \qquad Q\in\mathcal{L}_{(01)}, \qquad 0\in\mathcal{L}_{(PQ)}, \qquad 1\in\mathcal{L}_{(PQ)},$$

т.е. точки P и Q находятся между точками 0 и 1, одновременно точки 0 и 1 находятся между точками P и Q. Таким образом, Ω_4 - неевклидово σ-пространство. Соотношения (3.4.22) можно интерпретировать с евклидовой точки зрения, если вообразить, что точки расположены на замкнутой геодезической в следующем порядке $0,P,1,Q,0\ldots$ Для перехода к незамкнутой геодезической достаточно заменить $S(P,Q)=a$ на $S(P,Q)=a-2$b.

Другой вариант интерпретации показан на Рис. 3.4.1. Одномерное собственно евклидово σ-пространство состоит из 5 точек $Q_1',0,P,1,Q_0'$. Точки Q_0'

и Q'_1 являются зеркальным отражением точки Q соответственно по отношению к точкам 1 и 0. Точка Q сопряжена с точкой P относительно базиса (0,1) при условии, что $S(P,Q'_1) = S(P,Q'_0)$. Пусть точки P и Q сопряжены друг другу относительно базиса (0,1). Тогда можно отождествить Q'_1 и Q'_0 обозначив их посредством Q и сохраняя все расстояния кроме $S(Q'_0,Q'_1), S(0,Q'_0)$ и $S(1,Q'_1)$. В результате возникает σ-пространство (3.4.22). Оно плоское, но неевклидово.

Пример 3.4.2. Пусть σ-пространство состоит из 5 точек $0,1,2,P,Q$.

$$\begin{gathered} S(0,1) = S(0,2) = S(1,2) = a, \\ S(0,P) = a/\sqrt{3} + \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ S(1,P) = S(2,P) = a/\sqrt{3} - \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2), \\ S(1,Q) = S(2,Q) = a/\sqrt{3} + \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2), \\ S(0,Q) = a/\sqrt{3} - \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ S(P,Q) = a/\sqrt{3} + O(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon \ll 1 \end{gathered} \tag{3.4.23}$$

Можно проверить, что $\mathcal{T}_{012} = \Omega_5$, и Ω_5 есть двумерное σ-пространство экстремальное во втором порядке.

Расположение точек на собственно евклидовой плоскости показано на Рис. 3.4.2 Все расстояния (3.4.23) кроме $S(P,Q)$ соответствуют эвклидовым расстояниям на рис. 3.4.2. Если бы расстояние $S(P,Q)$ было евклидовым, то оно было бы $S(P,Q)$=2ε+$O(\varepsilon^2)$. Свойства σ-пространства Ω_5 можно понять, если рассмотреть σ-пространства $\Omega_5\backslash\{0\}$, $\Omega_5\backslash\{1\}$, $\Omega_5\backslash\{2\}$, $\Omega_5\backslash\{P\}$, $\Omega_5\backslash\{Q\}$, состоящие из четырех точек. Расположение точек в этих пространствах показано на рис. 3.4.2. Точка Q в первых трех σ-пространствах заменена соответственно точками Q'_0, Q'_1, Q'_2 в изображении на собственно евклидовой плоскости.

Итак, мы имеем $\Omega_5\backslash\{0\}$=$\{1,2,P,Q'_0\}$, $\Omega_5\backslash\{1\} = \{0,2,P,Q'_1\}$, $\Omega_5\backslash\{2\} = \{0,1,P,Q'_2\}$, $\Omega_5\backslash\{P\} = \{0,1,2,Q\}$, $\Omega_5\backslash\{Q\} = \{0,1,2,P,\}$. Тогда все расстояния, показанные на рис. 3.4.2 совпадают с расстояниями в соотношениях (3.4.23). Приведенные примеры иллюстрируют теорему 3.4.1 в случае , когда $N = n+3$, и σ-пространство неевклидово.

3.5 Экстремальность и усеченные трубки.

Как мы видели в примере 3.3.1 , псевдоевклидово пространство не экстремально на пространственноподобной трубке $\mathcal{T}_{P_0P}$. Эта неэкстремальность трубок первого порядка обусловлена неэкстремальностью псевдоевклидова пространства в нулевом порядке, когда трубка нулевого порядка $\mathcal{T}_{P_0}$ не является точкой. Неэкстремальность трубки первого порядка, обусловленная неэкстремальностью в нулевом порядке, может быть устранена с помощью специальной операции $\mathcal{C}$ усечения, которая превращает трубку $\mathcal{T}_{P_0P}$ в усеченную трубку

$$\mathcal{T}^c_{P_0P} = \mathcal{C}\mathcal{T}_{P_0P} \subset \mathcal{T}_{P_0P} \tag{3.5.1}$$

на которой σ-пространство экстремально. Индекс "c" показывает проведение операции усечения.

Есть разные способы определения операции усечения. Один из способов есть операция усиленной определенности

$$\mathcal{T}^c_{P_0P} = \mathcal{I}\mathcal{T}_{P_0P} = \{P_0\}\bigcup\{P' \mid \mathcal{T}_{P_0P'} = \mathcal{T}_{P_0P} \wedge P \neq P'\}, \tag{3.5.2}$$

когда множество $\mathcal{T}^c_{P_0P}$ содержит только точки P' трубки $\mathcal{T}_{P_0P}$, для которых $\mathcal{T}_{P_0P'}$ совпадает с $\mathcal{T}_{P_0P}$. По определению σ-пространство экстремально на $\mathcal{T}^c_{P_0P_1}$, если

$$\mathcal{T}^c_{P_0P'} = \mathcal{T}^c_{P_0P_1}, \qquad \forall P' \in \mathcal{T}^c_{P_0P_1}, \qquad P' \neq P_0 \tag{3.5.3}$$

$$\mathcal{S}_{1;Q}(\mathcal{T}^c_{P_0P_1}) = \{P' \mid P' \in \mathcal{T}^c_{P_0P_1} \bigwedge_{l=0}^{l=1} \sigma(P_l, Q) = \sigma(P_l, P')\} = \{Q\}, \tag{3.5.4}$$

$$\forall Q \in \mathcal{T}^c_{P_0P_1}$$

Пример 3.5.1. Рассмотрим псевдоевклидово пространство E_4 индекса 2. В декартовых координатах $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ мировая функция имеет вид (3.2.1) с метрическим тензором g_{ik}=diag$(1, 1, -1, -1)$. Пусть $P_0 = (0, 0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, 0, 0)$, $P_3 = (0, 0, 1, 0)$, а $P = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ - текущая точка множества. Расчет дает

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{P_0P_1}: &\qquad (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0 \\
\mathcal{T}^c_{P_0P_1} = \mathcal{I}\mathcal{T}_{P_0P_1}: &\qquad x^2 = x^3 = x^4 = 0 \\
\mathcal{T}_{P_0P_3}: &\qquad (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^4)^2 = 0 \\
\mathcal{T}^c_{P_0P_3} = \mathcal{I}\mathcal{T}_{P_0P_3}: &\qquad x^1 = x^2 = x^4 = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае операция усечения преобразует трехмерную трубку $\mathcal{T}_{P_0P}$ в одномерную усеченную трубку $\mathcal{T}^c_{P_0P}$, которая является геодезической в обычном смысле. σ-пространство экстремально на $\mathcal{T}^c_{P_0P}$ в смысле соотношений (3.5.3), (3.5.4), причем (3.5.3) выполняется в силу (3.5.2).

Операция усечения успешно устраняет неэкстремальность в первом порядке, обусловленную неэкстремальностью в нулевом порядке. Однако, нельзя быть уверенным, что применение операции усечения будет столь же успешным и в том случае, когда имеется неэкстремальность в первом порядке, но отсутствует в нулевом.

Определение 3.5.1 *Сечением трубки первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P}$, определяемым вещественным параметром τ, называется множество точек $\mathcal{S}_{1;\tau}(\mathcal{T}_{P_0P}) \subset \mathcal{T}_{P_0P}$*

$$\mathcal{S}_{1;\tau}(\mathcal{T}_{P_0P}) = \{Q \mid F_2(Q, P_0, P) = 0 \wedge \sigma(P_0, Q) = \tau^2\sigma(P_0, P) \wedge$$

$$\sigma(Q, P) = (1-\tau)^2\sigma(P_0, P)\}, \qquad \tau \in \mathbb{R} \tag{3.5.5}$$

Каждому значению τ соответствует интервал $|\tau|S(P_0,P)$ от точки P_0 до точки Q и интервал $|1-\tau|S(P_0,P)$ от точки P до точки Q. Сечение (3.5.5) отличается от сечения (3.1.52) лишь в том отношении, что сечение (3.5.5) может быть пустым, а сечение (3.1.52) содержит о крайней мере, одну точку.

Если точка $P(\tau)\in\mathcal{S}_{1;\tau}(\mathcal{T}_{P_0P})$, то справедливы следующие соотношения

$$\begin{gathered}\sigma(P_0,P(\tau))=\tau^2\sigma(P_0,P)\\ \sigma(P,P(\tau))=(1-\tau)^2\sigma(P_0,P)\\ \Gamma(P_0,P,P(\tau))=2\tau\sigma(P_0,P)\end{gathered}\tag{3.5.6}$$

Параметр τ нумерует все сечения трубки $\mathcal{T}_{P_0P}$, при этом каждому значению $\tau\in\mathbb{R}$ соответствует некоторое сечение (быть может, пустое), и наоборот, каждому сечению соответствует некоторое значение τ. Разным сечениям соответствуют разные значения τ. Такая параметризация трубки $\mathcal{T}_{P_0P}$ означает, что

$$\begin{gathered}P(\tau)\in\mathcal{T}_{P_0]P},\qquad \tau<0,\qquad P_0\in\mathcal{S}_{1;0}(\mathcal{T}_{P_0P}),\qquad P\in\mathcal{S}_{1;1}(\mathcal{T}_{P_0P})\\ P(\tau)\in\mathcal{T}_{[P_0P)},\qquad 0\le\tau<1\\ P(\tau)\in\mathcal{T}_{P_0[P},\qquad 1\le\tau\end{gathered}\tag{3.5.7}$$

Параметризация позволяет частично упорядочить точки трубки $\mathcal{T}_{P_0P}$, отобразив их на числовую ось $\mathbb{R}$. ($\mathcal{T}_{P_0P}\to\mathbb{R}$). При этом, вообще говоря, такое упорядочение не является полным, т.к. одному значению τ может соответствовать несколько точек $P(\tau)$. Последнее из соотношений (3.5.6) есть следствие первых двух соотношений (3.5.6) и определения (3.1.6). Уравнение для трубки $\mathcal{T}_{P_0P}$

$$F_2(P_0,P,P(\tau))=\det\left\|\begin{array}{cc}2\sigma(P_0,P)&\Gamma(P_0,P,P(\tau))\\ \Gamma(P_0,P,P(\tau))&2\sigma(P_0,P(\tau))\end{array}\right\|=0\tag{3.5.8}$$

выполняется в силу (3.5.6).

Пусть $\mathcal{P}^n$ есть $(n+1)$-точечный базис в σ-пространстве $V=\{\sigma,\Omega\}$. Пусть V таково, что

$$\mathcal{T}_{P_0P}\subset V_n=\mathcal{T}(\mathcal{P}^n),\qquad \forall P\in\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)\subset\Omega$$

и V_n имеет структуру n-мерного евклидова пространства, т.е. для $\forall P$, $\forall Q\in\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ выполнено условие (3.2.15). Используем обозначения (3.2.4), (3.2.9) и учтем, что $x(P_0)=0$. Тогда из (3.2.15), (3.2.16) и (3.1.6) следует

$$\begin{gathered}\sigma(P_0,P)=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i(P)x^i(P)\\ \Gamma(P_0P,Q)=\sum_{i=1}^{n}x_i(P)x^i(Q)=\sum_{i=1}^{n}x_iy^i\end{gathered}\tag{3.5.9}$$

Подставляя (3.5.9) в (3.5.8), получаем, что координаты любой точки $Q \in \mathcal{T}_{P_0P} \subset V_n$ удовлетворяют уравнению

$$[\sum_{i=1}^{n} x_i(P)x^i(Q)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i(Q)x^i(Q) \sum_{k=1}^{n} x_k(P)x^k(P) \tag{3.5.10}$$

Решение уравнения (3.5.10) имеет вид

$$x(Q) = x(P)\tau + q, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \qquad q \in \mathbb{R} \tag{3.5.11}$$

где величины $q = \{q_i\}$, $i = 1, 2, \dots n$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)q_iq_k = \sum_{i=1}^{n} q_iq^i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i(P)q^i = 0, \tag{3.5.12}$$

Тогда трубка $\mathcal{T}_{P_0P} \subset V_n$ определяется следующим образом

$$\mathcal{T}_{P_0P} = \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \bigcup_{q\in\mathbb{R}^n} \{Q \mid x(Q) = \tau x(P) + q \wedge \sum_{i=1}^{n} q_iq^i = 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} x_i(P)q^i = 0\} \tag{3.5.13}$$

Сечение трубки $\mathcal{T}_{P_0P}$ при значении параметра τ, определяемое как множество точек (3.5.5), может быть представлено в виде

$$P(\tau) = \bigcup_{q\in\mathbb{R}^n} \{Q \mid x(Q) = \tau x(P) + q \wedge \sum_{i=1}^{n} q_iq^i = 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} x_i(P)q^i = 0\} \tag{3.5.14}$$

Заметим, что сечение при данном параметре τ может быть пустым и вовсе не содержать точек, принадлежащих трубке $\mathcal{T}_{P_0P}$, в то время как сечение трубки в точке $Q \in \mathcal{T}_{P_0P}$ содержит, по крайней мере, точку Q и пустым быть не может.

Пусть теперь $P' \in P(\tau) \subset \mathcal{T}_{P_0P}$, тогда

$$x(P') = x(P)\tau_1 + q_{(1)}, \tag{3.5.15}$$

где $q_{(1)}$ есть одно из значений q, удовлетворяющее (3.5.12). Тогда

$$\mathcal{T}_{P_0P'} = \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \bigcup_{q\in\mathbb{R}^n} \{Q \mid x(Q) = \tau_1\tau x(P) + q_{(1)}\tau + q \wedge \sum_{i=1}^{n} q_iq^i = 0$$
$$\wedge \sum_{i=1}^{n} (\tau_1 x_i(P) + q_{(1)i})q^i = 0\} \tag{3.5.16}$$

Трубки (3.5.13) и (3.5.16) совпадают, если q удовлетворяет (3.5.12) и кроме того условию

$$\sum_{i=1}^{n} q_{(1)i}q^i = 0. \tag{3.5.17}$$

В том случае, когда q=0 есть единственное решение уравнений (3.5.12), условие (3.5.17) выполнено, и операция усиленной определенности (3.5.2) не изменяет трубки.

В том случае, когда имеется нетривиальное решение системы (3.5.12), условие (3.5.17) не накладывает дополнительных ограничений на множество решений системы (3.5.12) лишь в том случае, если $q_{(1)} = 0$. Тогда из (3.5.15) следует, что множество точек $P' \in \mathcal{T}^c_{P_0P_1}$ должно удовлетворять уравнению

$$x(P') = x(P)\tau, \qquad \tau \in \mathbb{R} \tag{3.5.18}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{T}^c_{P_0P} = \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} \{Q \mid x(Q) = \tau x(P) \wedge F_2(Q, P_0, P) = 0\} \tag{3.5.19}$$

$$\mathcal{S}_{1;Q}(\mathcal{T}^c_{P_0P}) = \{Q' \mid x(Q') = x(Q) \wedge F_2(Q, P_0, P) = 0\} \tag{3.5.20}$$

Заметим, что для σ-пространства V_n, имеющего евклидову структуру, второе из условий в (3.5.19) является следствием первого и может быть опущено.

Возможен еще один способ определения луча усеченной трубки $\mathcal{T}^c_{[P_0P}$

$$\mathcal{T}^c_{[P_0P} = \left\{ P' \mid \bigwedge_{Q\in\Omega} \frac{(\mathbf{P_0P'}.\mathbf{P_0Q})}{\mid 2\sigma(P_0, P') \mid^{1/2}} = \frac{(\mathbf{P_0P}.\mathbf{P_0Q})}{\mid 2\sigma(P_0, P) \mid^{1/2}} \right\} \tag{3.5.21}$$

Он определяет $\mathcal{T}^c_{[P_0P}$ как множество таких точек $P' \in \Omega$, для которых вектор $\mathbf{P_0P'}$ образует с каждым из векторов $\mathbf{P_0Q}$, $Q \in \Omega$ тот же угол, что и вектор $\mathbf{P_0P}$. Здесь для определения усеченной трубки $\mathcal{T}^c_{[P_0P}$ используется столько уравнений, сколько точек в σ-пространстве. Вообще говоря, это переопределенная задача, решением которой в общем случае является вырожденный луч трубки, состоящий из двух точек P_0 и P. Однако, в случае, когда σ-пространство имеет евклидову структуру, определение (3.5.21) приводит к тому же результату (3.5.19), что и определение (3.5.2).

Из (3.5.21) следует, что луч усеченной трубки обладает свойством определенности

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1} = \mathcal{T}_{[P_0P}, \quad \text{если } P_1 \in \mathcal{T}_{[P_0P}, \qquad P_1 \neq P_0 \tag{3.5.22}$$

Далее, $\mathcal{T}^c_{[P_0P_1} \subset \mathcal{T}_{[P_0P}$, так как из (3.5.21) следует для $Q = P$

$$(\mathbf{P_0P'}.\mathbf{P_0P}) = 2 \mid \sigma(P_0, P')\sigma(P_0, P) \mid^{1/2}, \qquad P' \in \Omega \tag{3.5.23}$$

В дальнейшем усеченные трубки будут использоваться только в евклидовом пространстве с целью подавления неэкстремальности, порожденной трубками нулевого порядка. Они будут использоваться в форме определения (3.5.21).

Глава 4

Геодезическое отображение. Построение риманова пространства в терминах Т-геометрии

Цель настоящей главы показать, как можно построить многообразие и риманово пространство в терминах σ-пространства. Для этого необходимио уметь построить в каждой точке σ-пространства V соприкасающееся евклидово σ-пространство и отобразить на него σ-пространство V. Возможность создания такой конструкции в терминах σ-пространства V означает по существу, что σ-пространство V есть риманово σ-пространство (т.е. σ-пространство V может быть изометрически вложено в риманово пространство). Мы видели во второй главе, что дифференцирование мировой функции риманова пространства V автоматически приводит к построению соприкасающегося евклидова пространства $E_{x'}$ в каждой точке x' риманова пространства V и геодезическому отображению $V \to E_{x'}$. Есть основания думать, что это свойство мировой функции сохраняется для достаточно широкого класса плотных σ-пространств, в которых можно ввести понятие дифференцирования вдоль экстремальных трубок, представляющих собой линии. Это свойство может быть использовано для построения множества соприкасающихся евклидовых пространств. Однако, при описании в терминах σ-пространства возникает ряд проблем, которых нет в традиционном построении римановой геометрии, так как они автоматически снимаются введением многообразия.

Перечислим некоторые наиболее важные из этих проблем:
1. σ-пространство V и соприкасающееся с ним в точке P_0 евклидово σ-пространство $V^*_{P^*_0}$ суть два разных σ-пространства так же как ассоциированные с ними векторные σ-пространства W_{P_0} и $W^*_{P^*_0}$ соответственно векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $P \in V$ и $\mathbf{P}^*_0\mathbf{P}^*$, $P^* \in V^*_{P^*_0}$. Для эффективной работы с ними необходимо объединить их в единое σ-пространство, например, вложив их изометрически в одно евклидово σ-пространство. Однако, не ясно, как это можно сделать в общем случае, и мы

используем процедуру определения скалярных произведений между векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*$, принадлежащими различным векторным σ-пространствам W_{P_0} и $W_{P_0^*}^*$. По существу это есть задание взаимного расположения двух векторных σ-пространств и построение векторного σ-пространства, являющегося объединением W_{P_0} и $W_{P_0^*}^*$, а практически это означает введение понятия вектора, определенного в векторном σ-пространстве, но не принадлежащем ему. Только после введения этого понятия удается сформулировать понятие касания двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*$, принадлежащих различным векторным σ-пространствам. В римановой геометрии этой проблемы не существует, так как многообразие является носителем векторов обоих векторных σ-пространств W_{P_0} и $W_{P_0^*}^*$ одновременно.
2. Вообще говоря, множество векторов $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^* \in W_{P_0^*}^*$, касательных к векторам $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \in W_{P_0}$, не образует евклидова σ-пространства. Случай, когда множество касательных векторов $W_{P_0^*}^*$ является евклидовым векторным σ-пространством является скорее исключением, чем правилом, и нужно сформулировать необходимые условия того, что $W_{P_0^*}^*$ евклидово. В римановом пространстве случай, когда $W_{P_0^*}^*$ евклидово, является правилом. Если $W_{P_0^*}^*$ не является евклидовым пространством, то точка P_0 является особой точкой риманова пространства, т.к. геометрия не является римановой в этой точке. Изложению этих проблем посвящен первый раздел главы.
3. Понятие касательного вектора требует введения дифференцирования, что возможно лишь при условии рассмотрения плотного σ-пространства, где точки расположены достаточно густо. Понятие плотного σ-пространства рассматривается во втором разделе главы.

Построение римановой геометрии в терминах σ-пространства по необходимости громоздко, и читатель, не интересующийся этим вопросом, может опустить эту главу без особого ущерба для понимания дальнейшего.

4.1 Векторное σ-пространство. Геодезическое отображение.

В евклидовом пространстве E, состоящем из точек P, основной характеристикой является мировая функция, описывающая расстояние между точками. Хорошо известно, что евклидово пространство можно рассматривать как векторное пространство, элементами которого являются векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ (точка P_0 фиксирована), а основной характеристикой является скалярное произведение p любых двух векторов.

В случае σ-пространства тоже можно ввести аналог обычного векторного пространства, который мы будем называть векторным σ-пространством. В некоторых случаях описание в терминах векторов оказывается более простым и эффективным, чем описание в терминах точек, хотя они эквивалентны.

Пусть $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть σ-пространство, и $P_0 \in \Omega$ - произвольная точка. Пусть ω_{P_0} есть множество векторов $\mathbf{u} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $P \in \Omega$

$$\omega_{P_0}=\{\mathbf{P}_0\mathbf{P}\ |P\in\Omega\}. \tag{4.1.1}$$

Вещественное число

$$p(\mathbf{u},\mathbf{v})=p(\mathbf{P}_0\mathbf{P},\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\equiv(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})=(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})=$$
$$\sigma(P_0,P)+\sigma(P_0,Q)-\sigma(P,Q),\qquad P,Q\in\Omega \tag{4.1.2}$$

есть скалярное произведение векторов $\mathbf{u}=\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{v}=\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, $\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in\omega_{P_0}$

Определение 4.1.1 . *Векторным σ-пространством $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$ называется множество ω_{P_0} векторов $\mathbf{u}=\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ с определенным на нем скалярным произведением $p(\mathbf{u},\mathbf{v})$ любой пары векторов $\mathbf{u}=\mathbf{P}_0\mathbf{P}\in\omega_{P_0}$, $\mathbf{v}=\mathbf{P}_0\mathbf{Q}\in\omega_{P_0}$.*

Скалярное произведение обладает свойствами:

$$\begin{array}{ll}(1) & p(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{u}.\mathbf{v})=(\mathbf{v}.\mathbf{u})=p(\mathbf{v},\mathbf{u}),\qquad \forall\mathbf{u}\in\omega_{P_0},\qquad \forall\mathbf{v}\in\omega_{P_0}\\ (2) & \exists\boldsymbol{\theta},\quad p(\mathbf{u},\boldsymbol{\theta})=(\mathbf{u}.\boldsymbol{\theta})=(\boldsymbol{\theta}.\mathbf{u})=0,\qquad \forall\mathbf{u}\in\omega_{P_0},\end{array} \tag{4.1.3}$$

где $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{P}_0\mathbf{P}_0\in\omega_{P_0}$ - нулевой вектор.

Существует взаимно однозначное соответствие между σ-пространством $V=\{\sigma,\Omega\}$ и векторным σ-пространством $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$. Исходя из σ-пространства V, можно построить векторное σ-пространство W_{P_0}, причем свойства скалярного произведения (4.1.3) следуют из его определения (4.1.2) и свойств мировой функции (3.1.1).

Наоборот, исходя из векторного σ-пространства $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$ можно построить σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$, определив мировую функцию σ посредством

$$\sigma(P,Q)=\frac{1}{2}[(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})+(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})]-(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \tag{4.1.4}$$

При этом свойства мировой функции (3.1.1) следуют из (4.1.4) и свойств скалярного произведения (4.1.3).

Определение 4.1.2 *Любое подмножество подмножество $\omega'_{P_0}\in\omega_{P_0}$ векторов векторного σ-пространства $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$, содержащее нулевой вектор $\theta=\mathbf{P}_0\mathbf{P}_0$ назывется векторным σ-подпространством $W'_{P_0}=\{p,\omega'_{P_0}\}$ векторного σ-пространства $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$*

Векторное σ-подпространство является векторным σ-пространством.

Определение 4.1.3 *Векторное σ-пространство $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$ и σ-простран-ство $V=\{\sigma,\Omega\}$, связанные соотношениями (4.1.1), (4.1.2) и (4.1.4) называются ассоциированными в точке $P_0\in\Omega$.*

Следует отметить, что σ-пространству V соответствует много векторных σ-пространств W_{P_0}, W_{P_1},..., но каждому векторному σ-пространству W_{P_0} соответствует, вообще говоря, только одно ассоциированное σ-пространство V. В этом смысле σ-пространство V является более фундаментальной конструкцией, чем W_{P_0}.

Определение 4.1.4 . *Вектор* $\mathbf{u}$ *определен в векторном* σ*-пространстве* $W_{P_0} = \{p, \omega_{P_0}\}$*, если заданы все скалярные произведения*

$$(\mathbf{u}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{u}), \qquad \forall \mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0} \tag{4.1.5}$$

и длина $|\mathbf{u}| = |(\mathbf{u}.\mathbf{u})|^{1/2}$ *вектора* $\mathbf{u}$*, причем*

$$(\mathbf{u}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_0) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_0.\mathbf{u}) = 0, \tag{4.1.6}$$

Вектор $\mathbf{u}$ может не принадлежать W_{P_0}, но быть определенным в нем. Всякий вектор $\mathbf{u} \in W_{P_0}$ определен в W_{P_0}.

Вектор $\mathbf{u}$, определенный в W_{P_0}, но не принадлежащий $W_{P_0} = \{p, \omega_{P_0}\}$, может быть добавлен к множеству ω_{P_0} векторов векторного σ-пространства W_{P_0}. В результате возникает новое векторное σ-пространство $W'_{P_0} = \{p, \omega'_{P_0}\}$, $\omega'_{P_0} = \omega_{P_0} \cup \{\mathbf{u}\}$. Будем называть W'_{P_0} расширением векторного σ-пространства W_{P_0}.

Определение 4.1.5 . *Множество* $\mathbb{A} = \{\mathbf{u}_i\}$*,* $i = 1, 2, \ldots$ *векторов* $\mathbf{u}_i$*, определено в векторном* σ*-пространстве* W_{P_0}*, если каждый из векторов* $\mathbf{u}_i$*,* $i = 1, 2, \ldots$ *определен в нем.*

Понятие вектора $\mathbf{u}$, определенного в векторном σ-пространстве $W = \{p, \omega\}$, которому он не принадлежит, описывает расположение вектора $\mathbf{u}$ относительно векторов $\mathbf{v} \in W$. Это существенно при определении взаимного расположения двух векторных σ-пространств. Пусть $W = \{p, \omega\}$ есть векторное σ-пространство векторов $\mathbf{u} \in \omega$. Пусть $\omega_1 \subset \omega$ и $\omega_2 \subset \omega$ суть два подмножества множества ω векторов $\mathbf{u}$, пересечение которых содержит только нулевой вектор $\theta = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_0$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \theta \tag{4.1.7}$$

Рассмотрим два векторных σ-пространства $W_1 = \{p, \omega_1\}$ и $W_2 = \{p, \omega_2\}$, являющиеся векторными σ-подпространствами векторного σ-пространства W: $W_1 \subset W$, $W_2 \subset W$. Пусть вектор $\mathbf{u}_1 \in W_1$ и вектор $\mathbf{u}_2 \in W_2$. Тогда заданы скалярные произведения $(\mathbf{u}_1.\mathbf{v})$, $\forall \mathbf{v} \in \omega_1$ и $(\mathbf{u}_2.\mathbf{w})$, $\forall \mathbf{w} \in \omega_2$. Однако, поскольку одновременно $\mathbf{u}_1 \in \omega$ и $\mathbf{u}_2 \in \omega$, то заданы также такие скалярные произведения $(\mathbf{u}_1.\mathbf{w})$, $\mathbf{u}_1 \in \omega_1$, $\forall \mathbf{w} \in \omega_2$; $(\mathbf{u}_2.\mathbf{v})$, $\mathbf{u}_2 \in \omega_2$, $\forall \mathbf{v} \in \omega_1$. Таким образом в W_1 оказываются заданными скалярные произведения векторов, принадлежащих W_2 и не принадлежащих W_1. То обстоятельство, что W_1 и W_2 являются σ-подпространствами W, позволяет говорить о взаимном расположении W_1 и W_2. Это взаимное расположение W_1 и W_2 описывается заданием скалярных произведений векторов $\mathbf{u}_1 \in W_1$ с векторами $\mathbf{u}_2 \in W_2$. Если все такие скалярные произведения заданы, и существует общий нулевой вектор θ, то векторные σ-пространства $W_1 = \{p, \omega_1\}$, $W_2 = \{p, \omega_2\}$ могут быть объединены в единое векторное σ-пространство $W' = \{p, \omega_1 \cup \omega_2\}$. Таким образом, определение векторов $\mathbf{u}_1 \in \omega_1$ в векторном σ-пространстве W_2, которому они не принадлежат, есть процедура, необходимая для объединения W_1 и W_2 в единое векторное σ-пространство.

Определение 4.1.6 . *Геодезический V-луч $\mathcal{R}_{(P_0P}\subset\omega_{P_0}$ в векторном σ-пространстве $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$ есть множество векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}'\in\omega_{P_0}$*

$$\mathcal{R}_{(P_0P}=\bigcup_{\tau>0}\bigcap_{\mathbf{P}_0\mathbf{Q}\in\omega_{P_0}}\{\mathrm{P_0P'}\mid(\mathbf{P}_0\mathbf{P}'.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})=\tau(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\},\qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}'\in\omega_{P_0}\quad(4.1.8)$$

где $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ есть вектор, определенный в $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$, но не обязательно принадлежащий ω_{P_0}.

Если $\mathbf{P}_0\mathbf{P}\in\omega_{P_0}$, то геодезический луч содержит, по крайней мере, вектор $\mathbf{u}=\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ при $\tau=1$.

Определение 4.1.7 *Геодезическим P-лучом $\mathcal{G}_{(P_0P}\subset\Omega$ в σ-пространстве $V=\{\sigma,\Omega\}$ называется множество точек*

$$\mathcal{G}_{(P_0P}=\bigcup_{\tau>0}\bigcap_{Q\in\Omega}\{P'\mid(\mathbf{P}_0\mathbf{P}'.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})=\tau(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\},\qquad P_0,P'\in\Omega\qquad(4.1.9)$$

Имеется одно-однозначное соответствие между точками геодезического луча $\mathcal{G}_{(P_0P}\subset\Omega$ и векторами геодезического луча $\mathcal{R}_{(P_0P}\subset\omega_{P_0}$ в векторном σ-пространстве $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$, ассоциированном с V в точке P_0

$$\mathcal{G}_{(P_0P}=\{P'\mid\mathbf{P}_0\mathbf{P}'\in\mathcal{R}_{(P_0P}\},\qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}'\in\omega_{P_0},\qquad P'\in\Omega,$$

поэтому можно надеяться, что использование одного термина для двух разных объектов не приведет к недоразумениям. В тех случаях, когда это различие важно, будет использоваться термин P-луч для $\mathcal{G}_{(P_0P}$ и V-луч - для $\mathcal{R}_{(P_0P}$.

Определение 4.1.8 . *Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, определенные в векторном σ-пространстве W_{P_0} равны в W_{P_0}*

$$\mathbf{u}\overset{W_{P_0}}{=}\mathbf{v}$$

если

$$(\mathbf{u}.\mathbf{u})=(\mathbf{v}.\mathbf{v}),\qquad(\mathbf{u}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})=(\mathbf{v}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}),\qquad\forall\mathbf{P}_0\mathbf{P}\in\omega_{P_0},\qquad(4.1.10)$$

Определение 4.1.9 . *Векторное σ-пространство $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$ называется евклидовым, если ассоциированное σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ есть евклидово σ-пространство.*

Определение 4.1.10 . *Векторное σ-пространство $W_{P_0}=\{p,\omega_{P_0}\}$ имеет структуру n-мерного евклидова σ-пространства, если ассоциированное σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ имеет структуру n-мерного евклидова σ-пространства.*

Пусть n – размерность евклидова σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ и $W_{P_0} = \{p, \omega_{P_0}\}$ есть векторное σ-пространство, ассоциированное с V. В этом случае существует такой $(n+1)$-точечный базис $\mathcal{P}^n \subset \Omega$, что мировая функция имеет вид (3.2.15), (3.2.5), (3.2.7), а скалярное произведение двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, $Q, P \in \Omega$ принимает вид (3.2.22) или (3.2.30)

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(P)x^i(Q), \qquad P, Q \in \Omega \tag{4.1.11}$$

где $x_i(P)$ и $x^i(P)$ суть соответственно ковариантные и контравариантные координаты вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ в некотором $(n+1)$-точечном базисе $\mathcal{P}^n \subset \Omega$, определяемые соотношениями (3.2.4), (3.2.9). Одновременно $x_i(P)$ и $x^i(P)$ являются соответственно ковариантными и контравариантными координатами вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0}$ в базисе $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \in \omega_{P_0}$, $i = 1, 2, \dots n$, $\quad P_i \in \mathcal{P}^n$, $i = 0, 1, ...n$, .

Пусть вектор $\mathbf{u}$=$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_{n+1}$ не принадлежит n-мерному евклидовому векторному σ-пространству $W_{P_0} = \{p, \omega_{P_0}\}$, но определен в нем так, что заданы все скалярные произведения $(\mathbf{u}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})$ для всех $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0}$ и длина $(\mathbf{u}.\mathbf{u})$ вектора $\mathbf{u}$. При этом ковариантные u_i и контравариантные компоненты u^i вектора $\mathbf{u}$ в базисе $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \in \omega_{P_0}$, $i = 1, 2, \dots n$ связаны соотношениями

$$(\mathbf{u}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \sum_i u^i x_i(P), \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0}, \tag{4.1.12}$$

$$\begin{gathered} u^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)u_k, \qquad u_i = x_i(P_{n+1}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{u}), \qquad\qquad i = 1, 2, \dots n, \\ x_i(P) = \Gamma(P_0, P, P_i), \qquad i = 1, 2, \dots n, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0} \end{gathered} \tag{4.1.13}$$

где P_{n+1} есть некоторая не принадлежащая Ω точка, координаты $x_i(P_{n+1})$ в $(n+1)$-точечном базисе $\mathcal{P}^n \subset \Omega$ определяются вторым соотношением (4.1.13). Расширим W_{P_0}, присоединив к нему вектор $\mathbf{u}$ (при этом одновременно расширится σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ в результате присоединения к нему точки P_{n+1}). В результате возникнет векторное σ-пространство $W'_{P_0} = \{p, \omega'_{P_0}\}$, $\omega'_{P_0} = \omega_{P_0} \cup \{\mathbf{u}\}$. Соотношения (4.1.11) - (4.1.13) могут быть переписаны в форме

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)x_i(P)x_k(Q), \tag{4.1.14}$$

$$P \in \Omega, \quad Q \in \Omega', \qquad \text{или} \qquad Q \in \Omega, \quad P \in \Omega', \qquad \Omega' = \Omega \cup \{P_{n+1}\},$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_{n+1}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_{n+1}) = (\mathbf{u}.\mathbf{u}), \qquad P_0 \in \Omega, \qquad P_{n+1} \in \Omega'. \tag{4.1.15}$$

Если выполнено условие

$$\Delta \equiv (\mathbf{u}.\mathbf{u}) - \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)u_i u_k = 0, \tag{4.1.16}$$

то σ-пространство $V' = \{\sigma, \Omega'\} = \{\sigma, \Omega \cup \{P_{n+1}\}\}$ и ассоциированное с ним векторное σ-пространство $W'_{P_0} = \{p, \omega'_{P_0}\}$ имеют структуру n-мерного евклидова пространства, поскольку в силу (4.1.13) можно переписать (4.1.14), (4.1.12) и (4.1.16) в виде

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) x_i(P) x_k(Q), \qquad P, Q \in \Omega' \tag{4.1.17}$$

В случае невыполнения условия (4.1.16) $n+2$ точки $\mathcal{P}^{n+1}$ образуют базис

$$F_{n+1}\left(\mathcal{P}^{n+1}\right) = g\Delta \neq 0 \qquad g = \det ||g_{ik}||, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{4.1.18}$$

и соотношения (4.1.12), (4.1.14), (4.1.16) можно записать в виде

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = \sum_{i,k=1}^{n+1} g^{ik}(\mathcal{P}^{n+1}) x_i(P) x_k(Q), \qquad P, Q \in \Omega' \tag{4.1.19}$$

где

$$\begin{gathered} g^{ik}(\mathcal{P}^{n+1}) = g^{ik}(\mathcal{P}^n) + \Delta^{-1} u^i u^k, \qquad i,k = 1,2,...n \\ g^{i\;n+1}(\mathcal{P}^{n+1}) = \Delta^{-1} \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) u_k, \qquad i = 1,2,...n \\ g^{n+1\,n+1}(\mathcal{P}^{n+1}) = \Delta^{-1} \end{gathered} \tag{4.1.20}$$

и

$$\begin{gathered} x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i), \qquad P, P_i \in \Omega', \qquad i = 1,2,...n+1 \\ u^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) u_k, \qquad u_i = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_{n+1}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i), \qquad i = 1,2,...n \end{gathered} \tag{4.1.21}$$

Соотношения (4.1.19) означают, что векторное σ-пространство $W'_{P_0} = \{p, \omega'_{P_0}\}$ и σ-пространство $V' = \{\sigma, \Omega'\}$ имеют структуру $(n+1)$-мерного евклидова пространства.

Пусть вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ определен в n-мерном евклидовом векторном σ-пространстве W_{P_0} в соответствии с (4.1.12). Пусть $\mathcal{R}_{(P_0P}$ есть геодезический V-луч, порожденный вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ в W_{P_0}. Присоединим вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ к W_{P_0}, если он не принадлежит к W_{P_0}. В результате получим евклидово векторное σ-пространство $W'_{P_0} = \{p_{P_0}, \omega'_{P_0}\}$, $\omega'_{P_0} = \omega_{P_0} \cup \{\mathbf{P}_0\mathbf{P}\}$. Пусть $\mathcal{R}'_{(P_0P}$ есть геодезический V-луч, порожденный вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ в W'_{P_0}. Сравним $\mathcal{R}_{(P_0P} \subset \omega_{P_0}$ и $\mathcal{R}'_{(P_0P} \subset \omega'_{P_0}$ между собой. Положим $P = P_{n+1}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_{n+1}$. Получаем

$$\mathcal{R}_{(P_0P} = \bigcup_{\tau>0} \{\mathbf{P}_0\mathbf{P}' \mid \bigwedge_{i=1}^{i=n} x_i(P') = \tau x_i(P)\}, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}' \in \omega_{P_0}, \qquad \mathcal{R}_{(P_0P} \subset \omega_{P_0} \tag{4.1.22}$$

$$\mathcal{R}'_{(P_0P} = \bigcup_{\tau>0}\{\mathbf{P}_0\mathbf{P}' \mid \bigwedge_{i=1}^{i=D} x_i(P') = \tau x_i(P)\}, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}' \in \omega'_{P_0}, \qquad \mathcal{R}'_{(P_0P} \subset \omega'_{P_0} \tag{4.1.23}$$

где $D = n$ при выполнении условия (4.1.16), и $D = n+1$, если (4.1.16) не выполнено.

Очевидно, что уравнения (4.1.22), (4.1.23) могут быть записаны в другой форме, где ковариантные координаты $x_i(P)$, $i = 1, 2, \dots D$ заменены на контравариантные координаты $x^i(P) = g^{ik}(\mathcal{P}^D)x_k(P)$, $i = 1, 2, \dots D$. Если $D = n$, то $\mathcal{R}'_{(P_0P} = \mathcal{R}_{(P_0P} \cup \{\mathbf{P}_0\mathbf{P}\}$. Если $D = n+1$, то $\mathcal{R}'_{(P_0P} = \{\mathbf{P}_0\mathbf{P}\}$, так как для любого вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{Q} \in \omega_{P_0}$ кроме $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_{n+1}$, $x^{n+1}(Q) = 0$, и условие $x^{n+1}(P') = \tau x^{n+1}(P)$ может быть выполнено только для $\tau = 1$, когда $\mathbf{P}_0\mathbf{P}' = \mathbf{P}_0\mathbf{P} \notin \omega_{P_0}$. Таким образом, если присоединение вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ к ω_{P_0} не меняет его размерности, то к геодезическому лучу $\mathcal{R}_{(P_0P} \subset \omega_{P_0}$ добавляется новый вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$. Если же при таком присоединении размерность ω_{P_0} увеличивается, то луч $\mathcal{R}'_{(P_0P} \subset \omega'_{P_0}$ представляет собой по существу новый луч, состоящий из вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$.

Пусть имеются два векторных σ-пространства $W_{P_0} = \{p_{P_0}, \omega_{P_0}\}$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0}$ и $W^*_{P_0^*} = \{p^*_{P_0^*}, \omega^*_{P_0^*}\}$ векторов $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^* \in \omega^*_{P_0^*}$, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0}$, $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^* \in \omega^*_{P_0^*}$. Пусть векторное σ-пространство $W^*_{P_0^*}$ евклидово, и размерность его D.

Определение 4.1.11 . *Отображение $\mathcal{F}$ σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ в евклидово σ-пространство $V_{P_0^*}^* = \{\sigma^*_{P_0^*}, \Omega^*\}$ $(V \to V^*_{P_0^*})$ называется геодезическим в точке P_0, если выполнены следующие условия:*
(i) Отображение одно-однозначно $P \leftrightarrow P^*$, $P \in \Omega$, $P^* \in \Omega^*$, $P_0 \leftrightarrow P_0^*$.
(ii) Любой вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0}$ векторного σ-пространства $W_{P_0} = \{p, \omega_{P_0}\}$, ассоциированного с V, определен с помощью соотношений (4.1.12) в векторном σ-пространстве $W^*_{P_0^*} = \{p^*_{P_0^*}, \omega^*_{P_0^*}\}$, ассоциированном с $V^*_{P_0^*}$, и присоединение вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ к $W^*_{P_0^*}$ не меняет размерности $W^*_{P_0^*}$.
(iii) Геодезические лучи $\mathcal{R}^*_{(P_0P} \subset W^*_{P_0^*}$ и $\mathcal{R}^*_{(P_0^*P^*} \subset W^*_{P_0^*}$, порожденные в $W^*_{P_0^*}$ соответственно векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*$ совпадают.
(iv) Длины векторов $\mid \mathbf{P}_0\mathbf{P} \mid$ и $\mid \mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^* \mid$ совпадают

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = (\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*), \qquad P \in \Omega, \qquad P^* \in \Omega^*, \tag{4.1.24}$$

(v) Луч трубки $\mathcal{T}_{(P_0P} \subset \Omega$ в V отображается в множество $\tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P} \subset \Omega^*$ $(\mathcal{T}_{(P_0P} \to \tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P})$, которое содержит геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P} \subset \Omega^*$.

Геодезическое отображение σ-пространства $V \to V^*_{P_0^*}$ порождает геодезическое отображение $W_{P_0} \to W^*_{P_0^*}$ соответствующих ассоциированных векторных σ-пространств W_{P_0}, $W^*_{P_0^*}$

Рассмотрим σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$. Пусть имеется геодезическое отображение векторного σ-пространства $W_{P_0} \to W^*_{P_0^*}$ на векторное евклидово σ-пространство $W^*_{P_0^*} = \{p^*, \omega^*_{P_0^*}\}$. $W^*_{P_0^*}$ ассоциируется с D-мерным евклидовым

σ-пространством $V_{P_0^*}^* = \{\sigma_{P_0^*}^*, \Omega^*\}$. Выясним, каким условиям должно удовлетворять σ-пространство V для того, чтобы такое геодезическое отображение было возможно.

В $W_{P_0^*}^*$ имеется базис из D векторов $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}_i^*$, $i = 1, 2, \dots D$. При этом координаты любого вектора $\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^* \in \omega_{P_0^*}^*$ записываются в виде

$$x_i(Q^*) \equiv (\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}_i^*), \qquad i = 1, 2, \dots D, \qquad Q^* \in \Omega^*, \tag{4.1.25}$$

а координаты вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{Q} \in \omega_{P_0}$, определенного в $W_{P_0^*}^*$, могут быть представлены в виде

$$x_i(Q) \equiv (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}_i^*), \qquad i = 1, 2, \dots D, \qquad Q \in \Omega \tag{4.1.26}$$

В соответствии с определением геодезического преобразования присоединение любого вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0}$ к $W_{P_0^*}^*$ не увеличивает его размерность D. Согласно (4.1.17) это означает

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(P)x^i(P), \qquad \forall P \in \Omega \tag{4.1.27}$$

Скалярное произведение вектора $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^* \in \omega_{P_0^*}^*$ и векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \in \omega_{P_0}$ и $\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^* \in \omega_{P_0^*}^*$, определенных в W_{P_0} и $W_{P_0^*}^*$, выражается через их координаты

$$(\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i(Q^*)x^i(P^*), \qquad P^*, Q^* \in \Omega^* \tag{4.1.28}$$

$$(\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(P)x^i(Q^*), \qquad Q^* \in \Omega^*, \qquad P \in \Omega \tag{4.1.29}$$

однако, скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})$, $\quad P, Q \in \Omega$, $P \neq Q$ через их координаты, вообще говоря, не выражается.

В σ-пространстве $V_{P_0}^*$ имеется два вида геодезических лучей

$$\mathcal{G}_{(P_0^*P^*}^* = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{Q^*\in\Omega^*} \{\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^* \mid (\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*) = \tau(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*)\}, \qquad \mathcal{G}_{(P_0^*P^*}^* \subset \Omega^* \tag{4.1.30}$$

$$\mathcal{G}_{(P_0P}^* = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{Q^*\in\Omega^*} \{\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^* \mid (\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*) = \tau(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*)\}, \qquad \mathcal{G}_{(P_0P}^* \subset \Omega^*$$

В векторном σ-пространстве $W_{P_0^*}^*$ тоже имеется два вида геодезических лучей

$$\mathcal{R}_{(P_0^*P^*}^* = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{\mathrm{P}_0^*\mathrm{Q}^*\in\omega_{P_0^*}^*} \{\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^* \mid (\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*) = \tau(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*)\}, \qquad \mathcal{R}_{(P_0^*P^*}^* \subset \omega_{P_0^*}^* \tag{4.1.31}$$

$$\mathcal{R}^*_{(P_0P} = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{\mathrm{P}_0^*\mathrm{Q}^*\in\omega^*_{P_0^*}} \{\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^* \mid (\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*) = \tau(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*)\}, \qquad \mathcal{R}^*_{(P_0P} \subset \omega^*_{P_0^*}$$

В σ-пространстве V имеется два вида геодезических лучей

$$\mathcal{G}_{(P_0^*P^*} = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{Q\in\Omega} \{P' \mid (\mathbf{P}_0\mathbf{P}'.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = \tau(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\}, \qquad \mathcal{G}_{(P_0^*P^*} \subset \Omega \qquad (4.1.32)$$

$$\mathcal{G}_{(P_0P} = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{Q\in\Omega} \{P' \mid (\mathbf{P}_0\mathbf{P}'.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = \tau(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\}, \qquad \mathcal{G}_{(P_0P} \subset \Omega$$

В векторном σ-пространстве W_{P_0} тоже имеется два вида геодезических лучей

$$\mathcal{R}_{(P_0^*P^*} = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}\in\omega_{P_0}} \{\mathbf{P}_0\mathbf{P}' \mid (\mathbf{P}_0\mathbf{P}'.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = \tau(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\}, \qquad \mathcal{R}_{(P_0^*P^*} \subset \omega_{P_0}$$

$$(4.1.33)$$

$$\mathcal{R}_{(P_0P} = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}\in\omega_{P_0}} \{\mathbf{P}_0\mathbf{P}' \mid (\mathbf{P}_0\mathbf{P}'.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = \tau(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\}, \qquad \mathcal{R}_{(P_0P} \subset \omega_{P_0}$$

Так как $W^*_{P_0^*}$ есть евклидово векторное σ-пространство, то в соответствии с определением геодезических лучей (4.1.30) получаем в силу соотношений (4.1.22), справедливых для евклидова σ-пространства и евклидова векторного σ-пространства

$$\mathcal{G}^*_{(P_0P} = \bigcup_{\tau>0} \{P^{*\prime} \mid \bigwedge_{i=1}^{i=D} x_i(P^{*\prime}) = \tau x_i(P)\}, \qquad \mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \Omega^* \qquad (4.1.34)$$

$$P\in\Omega, \quad P'^*\in\Omega^*, \qquad \tau>0,$$

$$\mathcal{G}^*_{(P_0^*P^*} = \bigcup_{\tau>0} \{P^{*\prime} \mid \bigwedge_{i=1}^{i=D} x_i(P^{*\prime}) = \tau x_i(P^*)\}, \qquad \mathcal{G}^*_{(P_0^*P^*} \subset \Omega^* \qquad (4.1.35)$$

$$P^*, P'^*\in\Omega^* \qquad \tau>0,$$

$$\mathcal{R}^*_{(P_0P} = \bigcup_{\tau>0} \{\mathbf{P}^*{}_0\mathbf{P}^{*\prime} \mid \bigwedge_{i=1}^{i=D} x_i(P^{*\prime}) = \tau x_i(P)\}, \qquad \mathcal{R}^*_{(P_0P} \subset \omega^*_{P_0^*} \qquad (4.1.36)$$

$$P\in\Omega, \quad P'^*\in\Omega^*, \qquad \tau>0,$$

$$\mathcal{R}^*_{(P_0^*P^*} = \bigcup_{\tau>0} \{\mathbf{P}^*{}_0\mathbf{P}^{*\prime} \mid \bigwedge_{i=1}^{i=D} x_i(P^{*\prime}) = \tau x_i(P^*)\}, \qquad \mathcal{R}^*_{(P_0^*P^*} \subset \omega^*_{P_0^*} \qquad (4.1.37)$$

$$P^*, P'^*\in\Omega^* \qquad \tau>0,$$

где P'^* текущая точка в Ω^*, описывающая геодезический луч. В соответствии с пунктом (iii) определения 4.1.11 геодезического отображения $\mathcal{F}$ уравнения

(4.1.34), (4.1.35) должны описывать одно и то же множество для $\forall P \in \Omega$ и $\forall P^* \in \Omega^*$. Это возможно только, если

$$x_i(P^*) = \alpha x_i(P), \qquad i = 1, 2, \dots D, \qquad P \in \Omega, \qquad P^* \in \Omega^*, \qquad \alpha \geq 0, \tag{4.1.38}$$

Из условия (4.1.24), (4.1.27) и (4.1.28) следует, что $\alpha = 1$, и координаты векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*$ совпадают

$$x_i(P^*) = x_i(P), \qquad i = 1, 2, \dots D, \qquad P \in \Omega, \qquad P^* \in \Omega^*, \tag{4.1.39}$$

Далее из (4.1.39), (4.1.28) и (4.1.29) следует

$$(\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*) = (\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad P \in \Omega, \qquad P^*, Q^* \in \Omega^*, \tag{4.1.40}$$

Хотя векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*$ имеют одинаковые координаты (4.1.39), одинаковые длины (4.1.27), (4.1.28) и образуют одинаковые углы (4.1.40) с любым вектором $\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^* \in \omega_{P_0}^*$, тождественности между ними все же нет, т.к. они образуют, вообще говоря, разные углы с векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{Q} \in \omega_{P_0}$, т.е. вообще говоря,

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) \neq (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*), \qquad P, Q \in \Omega, \qquad P^* \in \Omega^*, \tag{4.1.41}$$

Иначе говоря, внутри D-мерного векторного σ-пространства $W_{P_0^*}^*$ векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*$ тождественны, но при выходе за его пределы они становятся различными, т.е. образуют, вообще говоря, разные углы с векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, не принадлежащими $W_{P_0^*}^*$.

Пусть луч трубки $\mathcal{T}_{(P_0P}$ в V параметризован в соответствии с (3.5.6), так что точке $P' = P(\tau)$ соответствует параметр τ. Тогда последнее уравнение (3.5.6) для бегущей точки P' записывется в виде

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}') = 2\tau(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad P' \in \mathcal{T}_{(P_0P} \subset \Omega. \tag{4.1.42}$$

Использование уравнений (4.1.35) для геодезического луча позволяет записать (4.1.28) в виде

$$(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*) = 2\tau(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*), \qquad \mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^* \in \mathcal{R}_{(P_0^*P^*}^* \subset \omega_{P_0^*}^* \tag{4.1.43}$$

Из (4.1.24) следует, что правые части уравнений (4.1.42), (4.1.43) совпадают. Тогда

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}') = (\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*), \qquad \mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^* \in \mathcal{R}_{(P_0^*P^*}^* \subset \omega_{P_0^*}^* \tag{4.1.44}$$

Уравнение (4.1.24) является частным случаем (4.1.44), т.к. всегда $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^* \in \mathcal{R}_{(P_0^*P^*}$.

Итак, выполнение условий (4.1.40), (4.1.44) и более слабого (4.1.24) является необходимым для осуществления геодезического отображения V на евклидово σ-пространство $V_{P_0^*}^*$.

Геодезическое отображение σ-пространства V на евклидово σ-пространство $V^*_{P_0^*}$, связанное с точкой $P_0 \in \Omega$, представляет собой некий инструмент для изучения свойств σ-пространства V. Свойства евклидова σ-пространства относительно просты и изучены. Отображение σ-пространства V позволяет сделать определенные заключения о свойствах V. Однако, $V^*_{P_0^*}$ очень слабо связано с V. В частности, скалярные произведения $(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*)$, определяющие $W^*_{P_0^*}$, почти никак не связаны с соответствующими скалярными произведениями $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})$ векторов в W_{P_0} (соотношения (4.1.44) представляют собой исключение). Желательно было бы избежать произвола в выборе евклидова σ-пространства $V^*_{P_0^*}$ и строить его, основываясь полностью на σ-пространстве V.

Далее будем предполагать, что σ-пространство $V^*_{P_0^*}$ является либо собственно евклидовым, либо псевдоевклидовым индекса 1, так что $V^*_{P_0^*}$ всегда содержит экстремальные трубки, которые мы будем считать времениподобными. Предположим, что σ-пространство V экстремально на любом времениподобном луче трубки $\mathcal{T}_{(P_0P}$, $\quad \sigma(P_0,P)>0$. Это означает, что при параметризации (3.5.6) каждому значению параметра τ соответствует не более одной точки $P' = P'(\tau) \in \mathcal{T}_{(P_0P}$. Пусть далее возможно геодезическое отображение σ-пространства V на евклидово σ-пространство $V^*_{P_0^*}$. Тогда точке $P'(\tau) \in \mathcal{T}_{(P_0P}$. соответствует точка $P'^* = P'^*(\tau) \in \tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P}$ в σ-пространстве $V^*_{P_0^*}$. Так как на $\tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P}$ нет других точек с тем же значением параметра τ, а $\mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P}$ по условию (v) определения 4.1.11 эта точка должна принадлежать геодезическому лучу $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$. Отсюда заключаем, что любая точка $P'^* \in \tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P}$ принадлежит к $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$. Следовательно

$$\mathcal{G}^*_{(P_0P} = \mathcal{G}^*_{(P_0^*P^*} = \tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P} \subset \Omega^*, \qquad \sigma(P_0,P)>0. \tag{4.1.45}$$

Таким образом, можно построить прообраз $\tilde{\mathcal{G}}_{(P_0P} \subset \Omega$ времениподобного геодезического луча $\mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \Omega^*_{P_0^*}$ на V, не пользуясь σ-пространством $V^*_{P_0^*}$, но предполагая возможность геодезического отображения $V \to V^*_{P_0^*}$. Для этого достаточно использовать экстремальный времениподобный луч трубки $\mathcal{T}_{(P_0P}$.

С другой стороны в евклидовом σ-пространстве $V^*_{P_0^*}$ геодезические лучи $\mathcal{G}^*_{(P_0^*P^*} \subset \Omega^*$, $\mathcal{R}^*_{(P_0^*P^*} \subset \omega^*_{P_0^*}$ определяются любым вектором $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^* = \mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*(\tau) \in \mathcal{R}^*_{(P_0^*P^*}$, как это следует из (4.1.35), т.е.

$$\mathcal{R}^*_{(P_0^*P'^*} = \mathcal{R}^*_{(P_0^*P^*}, \qquad \mathcal{G}^*_{(P_0^*P'^*} = \mathcal{G}^*_{(P_0^*P^*}, \qquad P'^* \in \mathcal{G}^*_{(P_0^*P^*}. \tag{4.1.46}$$

В частности, (4.1.46) справедливо и в том случае, когда можно определить предел при $\tau \to 0$, и вектор $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*(\tau)$ является бесконечно малым вектором. Пользуясь (4.1.35), можно написать в этом случае для времениподобного вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\sigma(P_0,P)>0$

$$\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^* = \left[\frac{\partial}{\partial\tau_P}\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*(\tau_P)\right]_{\tau_P=0} \equiv \lim_{\tau_P\to 0}\frac{\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*(\tau_P)}{\tau_P} \equiv$$

$$\lim_{\substack{P'\to P_0\\ P'\in\mathcal{T}_{(P_0P}}} \left|\frac{\sigma(P_0,P)}{\sigma(P_0,P')}\right|^{1/2}\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*,\qquad P'^*(\tau_P)\in\mathcal{G}^*_{(P_0P}=\tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P} \tag{4.1.47}$$

Здесь параметризация (4.1.34) луча $\mathcal{G}^*_{(P_0P}=\tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P}$ осуществляется с помощью параметра

$$\tau_P=\left|\frac{\sigma(P_0,P')}{\sigma(P_0,P)}\right|^{1/2}=\left|\frac{\sigma^*_{P_0}(P_0^*,P'^*)}{\sigma^*_{P_0}(P_0^*,P^*)}\right|^{1/2}. \tag{4.1.48}$$

Индекс P у параметра τ_P указывает ту точку P, для которой $\tau_P=1$. Использование индекса необходимо, потому что сам по себе луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$, рассматриваемый как множество точек, не определяет способа параметризации, как это видно из (4.1.46).

Запись (4.1.47) является символической. Ее смысл раскрывается через выражения для следующих скалярных произведений, определяющих вектор $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*\in\omega^*_{P_0^*}$

$$(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*)=\left[\frac{\partial}{\partial\tau_P}\frac{\partial}{\partial\tau_Q}(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*(\tau_P).\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}'^*(\tau_Q))\right]_{\tau_P=\tau_Q=0}, \tag{4.1.49}$$

$$P'^*(\tau_P)\in\tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P},\qquad Q'^*(\tau_Q)\in\tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0Q},$$

$$(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})=\left[\frac{\partial}{\partial\tau_P}(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*(\tau_P).\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\right]_{\tau_P=0}, \tag{4.1.50}$$

$$P'^*(\tau_P)\in\tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P},\qquad \forall\mathbf{P}_0\mathbf{Q}\in\omega_{P_0}$$

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}\in\omega_{P_0}$ произвольный, а векторы $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*,\mathbf{P}_0^*\mathbf{Q}^*\in\omega^*_{P_0^*}$ – времениподобные $\sigma(P_0^*,P^*)>0$, $\sigma(P_0^*,Q^*)>0$, так как предполагается, что производные существуют в этом случае.

Для двух времениподобных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}'$, $P'\in\mathcal{T}_{(P_0P}$ условие (4.1.44) записывается в виде

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}')=\left[\frac{\partial}{\partial\tau_P}\frac{\partial}{\partial\tau_{P'}}(\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}'^*(\tau_P).\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}''^*(\tau_{P'}))\right]_{\tau_P=\tau_{P'}=0}, \tag{4.1.51}$$

$$P'^*(\tau_P)\in\tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P},\qquad P''^*(\tau_{P'})\in\tilde{\mathcal{T}}^*_{(P_0P'},\qquad P'\in\mathcal{T}_{[P_0P},\qquad \sigma(P_0,P)>0.$$

Правые части равенств (4.1.47), (4.1.49)-(4.1.51) содержат дифференцирование по τ_P вдоль геодезического луча $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$. в евклидовом σ-пространстве $V^*_{P_0^*}$. Вообще говоря, операция дифференцирования и предельного перехода в (4.1.47) не определена, так как никаких предположений о непрерывности σ-пространств до сих пор не делалось. Необходимо специально позаботиться о возможности осуществления в нем предельного перехода, введя понятие плотного σ-пространства.

Определение 4.1.12 . *Неизотропный луч трубки* $\mathcal{T}_{(P_0P}$, $\sigma(P_0,P)\neq 0$ *называется плотным в точке* P_0, *если на луче трубки* $\mathcal{T}_{(P_0P}$ *существует последовательность* $P_1', P_2', \ldots$ *попарно различных точек, сходящаяся к* P_0.

Это означает, что для $\forall\epsilon>0$ существует такое $N_\epsilon>0$, что $\mid 2\sigma(P_0,P_n')\mid^{1/2}<\epsilon$, если $n>N_\epsilon$.

Определение 4.1.13 . σ*-пространство* V *плотно в точке* P_0, *если любой неизотропный луч трубки* $\mathcal{T}_{(P_0P}$ *плотен в* P_0.

Определение 4.1.14 . *Неизотропный луч трубки* $\mathcal{T}_{(P_0P}$, $\sigma(P_0,P)\neq 0$ *называется непрерывным в точке* P_0, *если существует такое значение* $\varepsilon>0$, *что для любого* $\tau\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ *сечение трубки на* $\mathcal{T}_{P_0P}$, *определяемое параметром* τ *не пусто.*

$$\mathcal{S}_{1;\tau}(\mathcal{T}_{P_0P})=\{Q\mid F_2(Q,P_0,P)=0\wedge\sigma(P_0,Q)=\tau^2\sigma(P_0,P)\wedge$$

$$\sigma(Q,P)=(1-\tau)^2\sigma(P_0,P)\}\neq\emptyset,\qquad -\varepsilon<\tau<\varepsilon$$

Определение 4.1.15 . σ*-пространство* $V=\{\sigma,\Omega\}$ *непрерывно в точке* $P_0\in\Omega$ *в направлении неизотропного вектора* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, *если неизотропный луч трубки* $\mathcal{T}_{(P_0P}$ *непрерывен в* P_0.

Определение 4.1.16 . σ*-пространство* $V=\{\sigma,\Omega\}$ *непрерывно в точке* $P_0\in\Omega$, *если любой неизотропный луч трубки* $\mathcal{T}_{(P_0P}$ *непрерывен в* P_0.

Из приведенных определений следует, что σ-пространство, непрерывное в точке P_0, является плотным в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пусть любой времениподобный луч $\mathcal{T}_{(P_0P}\subset V$ плотен в точке P_0, а σ-пространство V экстремально на любом времениподобном луче $\mathcal{T}_{(P_0P}$. Осуществим связь между σ-пространствами V и $V_{P_0^*}^*$ следующим образом. Заменим $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*$ на $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ в правых частях равенств (4.1.47), (4.1.49)-(4.1.51) В этом случае предел (4.1.47) может быть вычислен. После этого все векторы $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*\in\omega_{P_0^*}^*$ будут определяться через векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}\in\omega_{P_0}$ (точнее через бесконечно малые векторы), а геодезическое отображение $V\rightarrow V_{P_0^*}^*$ будет отображением σ-пространства V на евклидово σ-пространство $V_{P_0^*}^*$, определяемое бесконечно малой окрестностью точки P_0 σ-пространства V. Результатом такой процедуры является построение σ-пространства $V_{P_0^*}^*$ *на базе* V *и геодезического отображения* $V\rightarrow V_{P_0^*}^*$.

Несколько изменим систему обозначений. Поскольку имеется одно-однозначное соответствие $P\leftrightarrow P^*$ между V и $V_{P_0^*}^*$, то нет необходимости различать точки P и P^*. Будем обозначать те и другие через P. Однако, векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0^*\mathbf{P}^*$ различны по своим свойствам. Для вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}\in\omega_{P_0}$ сохраним прежнее обозначение, а векторы векторного σ-пространства $W_{P_0^*}^*$ будем обозначать посредством $\mathbf{u}_{P_0P}$.

Итак, на множестве Ω заданы σ-пространства $V=\{\sigma,\Omega\}$ и $V^*_{P_0}=\{\sigma^*_{P_0},\Omega\}$ и два ассоциированных с ними в точке P_0 векторных σ-пространства

$$W_{P_0}=\{p_{P_0},\omega_{P_0}\},\qquad \omega_{P_0}=\{\mathbf{P}_0\mathbf{P}\ |P\in\Omega\}$$
$$W^*_{P_0}=\{p^*_{P_0},\omega^*_{P_0}\},\qquad \omega^*_{P_0}=\{\mathbf{u}_{P_0P}\mid P\in\Omega\} \tag{4.1.52}$$

σ-пространство V является основным. Свойства всех остальных σ-пространств являются производными и определяются σ-пространством V.

Будем кроме того использовать разбиение множества Ω на два $\Omega^+_{P_0}$ и $\Omega^-_{P_0}$

$$\Omega^+_{P_0}=\{P\mid\sigma(P_0,P)>0\}\bigcup\{P_0\},\qquad \Omega^-_{P_0}=\Omega\backslash\Omega^+_{P_0}, \tag{4.1.53}$$

$$\omega^+_{P_0}=\{\mathbf{P}_0\mathbf{P}\mid\sigma(P_0,P)>0\}\bigcup\{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_0\},\qquad \omega^-_{P_0}=\omega_{P_0}\backslash\omega^+_{P_0} \tag{4.1.54}$$

$\omega^+_{P_0}$ есть множество времениподобных векторов, включая нулевой вектор, а $\omega^-_{P_0}$ содержит остальные векторы множества ω_{P_0}.

Пусть V экстремально на любом времениподобном луче $\mathcal{T}_{(P_0P}\subset\Omega^+_{P_0}$ и плотно в точке P_0. Тогда положим

$$\mathbf{u}_{P_0P}=\left[\frac{\partial}{\partial\tau_P}\mathbf{P}_0\mathbf{P}'(\tau_P)\right]_{\tau_P=0}=\lim_{\substack{P'\to P_0\\ P'\in\mathcal{T}_{(P_0P}}}\left|\frac{\sigma(P_0,P)}{\sigma(P_0,P')}\right|^{1/2}\mathbf{P}_0\mathbf{P}', \tag{4.1.55}$$

$$P'(\tau_P)\in\mathcal{T}_{(P_0P},\qquad P\in\Omega^+_{P_0}$$

где параметр τ_P определен соотношением (4.1.48). Эта символическая запись означает по определению

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q})=\left[\frac{\partial}{\partial\tau_P}\frac{\partial}{\partial\tau_Q}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}'(\tau_P).\mathbf{P}_0\mathbf{Q}'(\tau_Q))\right]_{\tau_P=\tau_Q=0}, \tag{4.1.56}$$

$$P'(\tau_P)\in\mathcal{T}_{(P_0P},\qquad Q'(\tau_Q)\in\mathcal{T}_{[P_0Q},\qquad P\in\Omega^+_{P_0},\qquad \forall Q\in\Omega^+_{P_0}$$

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})=\left[\frac{\partial}{\partial\tau_P}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}'(\tau_P).\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\right]_{\tau_P=0},\qquad P\in\Omega^+_{P_0},\quad Q\in\Omega \tag{4.1.57}$$

Вектор $\mathbf{u}_{P_0P}$ будем называть вектором направления, так как он пропорционален бесконечно малому вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}'$, $P'\in\mathcal{T}_{(P_0P}$, $P'\to P_0$, определяющему направление луча трубки $\mathcal{T}_{(P_0P}$ в точке P_0.

Требование экстремальности луча трубки $\mathcal{T}_{(P_0P}$ важно для существования предела (4.1.55). Если луч трубки $\mathcal{T}_{(P_0P}$ не экстремален, то предел (4.1.55), вообще говоря, не существует. Например, для пространственноподобных трубок $\mathcal{T}_{P_0P}$ предел (4.1.55) не существует, если даже V есть евклидово σ-пространство.

Далее будет рассматриваться случай, когда σ-пространство V экстремально на времениподобных трубках $\mathcal{T}_{P_0P}$, $\sigma(P_0,P)>0$ и не экстремально на пространственноподобных трубках $\mathcal{T}_{P_0P}$, $\sigma(P_0,P)<0$. Такая ситуация возникает для псевдориманова пространства индекса 1 и для собственно риманова пространства, когда пространственноподобных трубок просто нет.

Соотношения (4.1.56) определяют векторное σ-пространство $W_{P_0}^{+*}=\{p_{P_0}^*,\omega_{P_0}^{+*}\}$ через мировую функцию σ, а соотношения (4.1.57) определяют любой вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ векторного σ-пространства W_{P_0} в векторном σ-пространстве $W_{P_0}^{+*}=\{p_{P_0}^*,\omega_{P_0}^{+*}\}$. Одновременно соотношения (4.1.57) определяют любой вектор направления $\mathbf{u}_{P_0P}\in\omega_{P_0}^{+*}$ в векторном σ-пространстве $W_{P_0}=\{p_{P_0},\omega_{P_0}\}$.

Предполагается, что $W_{P_0}^{+*}$ есть D-мерное евклидово векторное σ-пространство. Тогда должны быть выполнены условия того, что ассоциированное с $W_{P_0}^{+*}$ σ-пространство $V_{P_0}^{+*}=\{\sigma,\Omega\}$ имеет структуру D-мерного евклидова пространства

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P})=\sum_{i,k=1}^{D}g^{*ik}(\mathcal{P}^D)x_i^*(P)x_k^*(Q),\qquad P,Q\in\Omega_{P_0}^{+}\tag{4.1.58}$$

где $\mathcal{P}^D$ есть $(D+1)$-точечный базис в $V_{P_0}^{+}=\{\sigma,\Omega_{P_0}^{+}\}$ с началом в точке P_0,

$$x_i^*(P)=(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{u}_{P_0P}),\qquad P,P_i\in\Omega_{P_0}^{+},\qquad i=1,2,\dots D\tag{4.1.59}$$

суть координаты вектора направления $\mathbf{u}_{P_0P}$ в базисе $\mathbf{u}_{P_0P_i}$, $i=1,2,\dots D$, векторного σ-пространства $W_{P_0}^{+*}$

$$g_{ik}^*(\mathcal{P}^D)=(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{u}_{P_0P_k}),\qquad P_i,P_k\in\Omega_{P_0}^{+},\qquad i,k=1,2,\dots D\tag{4.1.60}$$

$$\sum_{i=1}^{D}g^{*ik}(\mathcal{P}^D)g_{kl}^*(\mathcal{P}^D)=\delta_l^i,\qquad i,l=1,2\dots D\tag{4.1.61}$$

Кроме того, чтобы было возможно геодезическое отображение $W_{P_0}^{+}\to W_{P_0}^{+*}$ необходимо выполнение условий (4.1.49)–(4.1.51), которые с помощью соотношений (4.1.56), (4.1.57) записываются в виде

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P})=(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}),\qquad P,Q\in\Omega_{P_0}^{+}\tag{4.1.62}$$

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q})=(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}),\qquad P\in\Omega_{P_0}^{+}\qquad Q\in\mathcal{T}_{(P_0P}\subset\Omega_{P_0}^{+},\tag{4.1.63}$$

Всюду в соотношениях (4.1.58)-(4.1.63) скалярные произведения, содержащие вектор $\mathbf{u}_{P_0P}$, вычисляются по правилам (4.1.56), (4.1.57). Условия (4.1.58), (4.1.62), (4.1.63) записываются в терминах мировой функции σ для точек $P,Q\in\Omega_{P_0}^{+}$ и не содержат ничего кроме этой функции и ее производных по τ вдоль экстремальных времениподобных трубок.

Координаты $x_i(P)$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ в базисе $\mathbf{u}_i$, $i=1,2,...D$ евклидова векторного σ-пространства $W_{P_0}^*$ задаются соотношениями

$$x_i(P)=(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}),\qquad i=1,2,...D,\qquad P\in\Omega\tag{4.1.64}$$

В силу (4.1.62)

$$x_i(P) = x_i^*(P), \qquad i = 1, 2, ...D, \qquad \forall P \in \Omega_{P_0}^+ \tag{4.1.65}$$

В соответствии с (4.1.57) координаты $x(P) \in \mathbb{R}^D$ определяются для $P \in \Omega$, и соотношения (4.1.65) можно использовать для определения координат $x^*(P) \in \mathbb{R}^D$, $\quad P \in \Omega_{P_0}^-$ любого вектора направления $\mathbf{u}_{P_0P}$. Тогда $x^*(P)$ определяется для $P \in \Omega$ и используя (4.1.58), можно определить $(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q})$, $\quad \forall P, Q \in \Omega_{P_0}$.

После этого можно расширить $W_{P_0}^{+*}$, добавив к нему векторы множества $\omega_{P_0}^-$. В результате возникает евклидово векторное σ-пространство $W_{P_0}^* = \{p_{P_0}^*, \omega_{P_0}^*\}$ и ассоциированное с ним σ-пространство $V_{P_0}^* = \{\sigma_{P_0}^*, \Omega\}$.

Необходимыми условиями возможности геодезического отображения $V \to V_{P_0}^*$ на евклидово σ-пространство $V_{P_0}^*$ являются соотношения (4.1.58), (4.1.62), записанные для $P, Q \in \Omega$, а условие (4.1.63) можно заменить на более слабое условие (4.1.24)

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = (\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P}), \qquad P \in \Omega \tag{4.1.66}$$

Получаем следующие соотношения, являющиеся необходимыми условиями существования геодезического отображения

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{4.1.67}$$

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P}) = (\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{4.1.68}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = (\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad \forall P \in \Omega \tag{4.1.69}$$

Однако не все они являются независимыми. Только следующие условия являются независимыми и проверяемыми с помощью соотношений (4.1.56) и (4.1.57)

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P}) = (\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad \forall P, Q \in \Omega_{P_0}^+ \tag{4.1.70}$$

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad \forall P, Q \in \Omega_{P_0}^+ \tag{4.1.71}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad \forall P \in \Omega \tag{4.1.72}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{u}_{P_0P}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad Q \in \Omega_{P_0}^- \wedge P \in \Omega_{P_0}^+ \tag{4.1.73}$$

В самом деле, для $\left(Q \in \Omega_{P_0}^- \wedge P \in \Omega_{P_0}^+\right) \vee \left(Q \in \Omega_{P_0}^+ \wedge P \in \Omega_{P_0}^-\right)$ соотношения (4.1.68) суть определения $(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P})$ через $(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})$, что совпадает с (4.1.73)

Наконец, для случая $P,Q\in\Omega^-_{P_0}$ соотношение (4.1.67) есть определение $(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P})$

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P})=\sum_{i,k=1}^{D}g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}),\qquad\forall P,Q\in\Omega^-_{P_0}\qquad(4.1.74)$$

и уравнения (4.1.74), (4.1.68) используются для определения $(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})$ для $P,Q\in\Omega^-_{P_0}$ с помощью соотношения

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})=(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P})=\sum_{i,k=1}^{D}g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}),\qquad(4.1.75)$$

$$\forall P,Q\in\Omega^-_{P_0}$$

Итак, мы имеем ограничения (4.1.70)–(4.1.73), которые следует проверить с помощью вычисления производных (4.1.56), (4.1.57)

В то же время справедливость соотношений (4.1.58) для $P,Q\in\Omega^-_{P_0}$ проверить нельзя, так как векторы $\mathbf{u}_{P_0P}\in\omega^{-*}_{P_0}$ нельзя определить независимо от (4.1.58) с помощью производных (4.1.56), (4.1.57). Векторы $\mathbf{u}_{P_0P}\in\omega^{-*}_{P_0}$ определяются неявно на основе предположения что $V^*_{P_0}$ есть евклидово σ-пространство, и геодезическое отображение $V\to V^*_{P_0}$ существует. Это означает, что только времениподобные трубки $\mathcal{T}_{P_0P}$, $\sigma(P_0,P)>0$ важны при построении геодезического отображения. Пространственноподобные трубки $\mathcal{T}_{P_0P}$, $\sigma(P_0,P)<0$ никакой роли при этом не играют. Вообще говоря, можно ввести усеченные пространственноподобные трубки $\mathcal{T}^c_{P_0P}$ и определить пределы (4.1.56), (4.1.57) вдоль $\mathcal{T}^c_{P_0P}$, как это сделано в [27]. Однако, и в этом случае использование пространственноподобных $\mathcal{T}_{P_0P}$ в значительной степени фиктивно.

Результаты можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 4.1.1 . *Пусть σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ экстремально на любой времениподобной трубке $\mathcal{T}_{P_0P}\ni P_0$ и плотно в P_0. Пусть $W_{P_0}=\{p_{P_0},\omega_{P_0}\}$ есть векторное σ-пространство, ассоциированное с V в точке P_0, а $W^*_{P_0}=\{p^*_{P_0},\omega^*_{P_0}\}$ есть векторное σ-пространство, времениподобные векторы направления которого $\mathbf{u}_{P_0P}\in\omega^{+*}_{P_0}$ получаются из времениподобных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}\in\omega^+_{P_0}$ с помощью предельного перехода (4.1.55). Скалярные произведения, содержащие пространственноподобные и изотропные векторы направления $\mathbf{u}_{P_0P}$, получаются с помощью соотношений (4.1.58), (4.1.59). Для того, чтобы $W^*_{P_0}$ было D-мерным евклидовым векторным σ-пространством, а отображение $W_{P_0}\to W^*_{P_0}$ $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}\to\mathbf{u}_{P_0P},\quad\mathbf{P}_0\mathbf{P}\in W_{P_0},\quad\mathbf{u}_{P_0P}\in W^*_{P_0})$ было геодезическим отображением, необходимо выполнение следующих условий:*

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P})=(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}),\qquad\forall P,Q\in\Omega^+_{P_0}$$

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{u}_{P_0P})=\sum_{i,k=1}^{D}g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}),\qquad\forall P,Q\in\Omega^+_{P_0}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad \forall P \in \Omega$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{u}_{P_0P}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})(\mathbf{u}_{P_0P_k}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad Q \in \Omega^-_{P_0} \wedge P \in \Omega^+_{P_0}$$

4.2 Плотное σ-пространство.

В этом разделе изучается при каких условиях в σ-пространстве можно ввести многообразие. В терминах мировой функции вводятся такие понятия как плотное σ-пространство, вектор направления трубки первого порядка, касательный вектор $\mathbf{u}_{PQ}$. Изучается связь между этими понятиями и формулируются достаточные условия введения многообразия.

Рассмотрим плотное σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ и представим себе, что в некоторой точке $P_0 \in \Omega$ для каждого вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $P \in \Omega$ построен вектор $\mathbf{u}_{P_0P}$, $P \in \Omega$, который мы будем называть вектором направления. Интуитивно будем представлять себе вектор $\mathbf{u}_{P_0P}$ как вектор, касательный к вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, а все множество векторов направления $\mathbf{u}_{P_0P}$, $P \in \Omega$ будем представлять себе как множество векторов, касательных в точке P_0 к σ-пространству V. Множество концов векторов направления образует некоторое σ-пространство $V^*_{P_0} = \{\sigma^*_{P_0}, \Omega\}$ на множестве Ω. Предположим, что σ-пространство $V^*_{P_0}$ является евклидовым σ-пространством. Иначе говоря, используя некоторые операции в σ-пространстве V, можно получить в результате евклидово σ-пространство $V^*_{P_0} = \{\sigma^*_{P_0}, \Omega\}$. Построение евклидова σ-пространства $V^*_{P_0}$ на Ω означает построение отображения σ-пространства V на евклидово σ-пространство $V^*_{P_0}$.

Определение 4.2.1 . *Если неизотропный луч трубки $\mathcal{T}_{(P_0Q} \subset \Omega$ плотен в точке P_0 и предел*

$$\Pi(P_0, \mathcal{T}_{(P_0Q}, P) = \lim_{\substack{Q' \to P_0 \\ Q' \in \mathcal{T}_{(P_0Q}}} \frac{\Gamma(P_0, Q', P)}{|2\sigma(P_0, Q')|^{1/2}}, \qquad P, Q \in \Omega \tag{4.2.1}$$

существует для $\forall P \in \Omega$ и для любого способа стремления Q' к P_0, то вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ определяет неизотропный вектор направления $\mathbf{u}_{P_0Q}$,

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \mid \sqrt{2\sigma(P_0, Q)} \mid \Pi(P_0, \mathcal{T}_{(P_0Q}, P), \qquad P, Q \in \Omega \tag{4.2.2}$$

в векторном σ-пространстве $W_{P_0} = \{p_{P_0}, \omega_{P_0}\}$, где ω_{P_0} задается соотношением (4.1.52), а луч трубки $\mathcal{T}_{(P_0Q}$ определяет нормированный вектор направления

$$(\mathbf{d}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \Pi(P_0, \mathcal{T}_{(P_0Q}, P), \qquad \mathbf{d}_{P_0Q} = \mathbf{u}_{P_0Q} \mid 2\sigma(P_0, Q) \mid^{-1/2}, \qquad P, Q \in \Omega \tag{4.2.3}$$

в векторном σ-пространстве $W_{P_0} = \{p_{P_0}, \omega_{P_0}\}$.

Векторы $\mathbf{u}_{P_0Q}$, $\mathbf{d}_{P_0Q}$, вообще говоря, не принадлежат к векторному σ-пространству W_{P_0}, а только определены в нем в смысле определения 4.1.4.

Здесь $\Pi(P_0, \mathcal{T}_{(P_0Q}, P)$ есть нормированная на единицу проекция вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ на направление вектора $\mathbf{u}_{P_0Q}$. Предел (4.2.1) определяется традиционным способом. Для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta_\epsilon > 0$, что неравенство

$$\left|\Pi(P_0, \mathcal{T}_{(P_0Q}, P) - \Gamma(P, Q', P)|2\sigma(P, Q')|^{-1/2}\right| < \epsilon \tag{4.2.4}$$

есть следствие условий

$$|\ 2\sigma(P_0, Q')\ |^{1/2} < \delta, \qquad Q' \in \mathcal{T}_{(P_0Q}$$

В соответствии с (4.2.3) $(\mathbf{d}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \Pi(P_0, \mathcal{T}_{(P_0Q}, P)$ зависит только от луча трубки $\mathcal{T}_{(P_0Q}$, но не от выбора точки Q, порождающей T-луч $\mathcal{T}_{(P_0Q}$, в том смысле, что если $Q_1 \neq Q_2$, но $\mathcal{T}_{(P_0Q_1} = \mathcal{T}_{(P_0Q_2}$, то $\mathbf{d}_{P_0Q_1} = \mathbf{d}_{P_0Q_2}$. Этот результат можно кратко записать в виде $\mathbf{d}_{P_0Q}=\mathrm{gen}(\mathcal{T}_{(P_0Q})$ (вектор $\mathbf{d}_{P_0Q}$ генерируется лучом трубки $\mathcal{T}_{(P_0Q}$).

Определение 4.2.2 . *Скалярное произведение* $(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q})$ *двух неизотропных векторов направления* $\mathbf{u}_{P_0P}$ *и* $\mathbf{u}_{P_0Q}$ *определено, если существует двойной предел, не зависящий от способа его вычисления и, в частности, от порядка вычисления пределов*

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) \equiv \Gamma^*_{P_0}(P_0, P, Q) =|\ 4\sigma(P_0, P)\sigma(P_0, Q)\ |^{1/2}\ \Pi(P_0, \mathcal{T}_{(P_0P}, \mathcal{T}_{(P_0Q}) =$$

$$= \lim_{\substack{Q'\to P_0 \\ Q'\in\mathcal{T}_{(P_0Q}}} \ \lim_{\substack{P'\to P_0 \\ P'\in\mathcal{T}_{(P_0P}}} \left|\frac{\sigma(P_0, P)}{\sigma(P_0, P')}\frac{\sigma(P_0, Q)}{\sigma(P_0, Q')}\right|^{1/2} \Gamma(P_0, Q', P'), \qquad P, Q \in \Omega \tag{4.2.5}$$

Используя параметризацию (3.5.5) трубок с помощью параметра τ и соотношения (3.5.6), можно записать пределы (4.2.2) и (4.2.5) соответственно в виде

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \lim_{\tau_Q\to+0} \frac{\Gamma(P_0, Q(\tau_Q), P)}{\tau_Q}, \tag{4.2.6}$$

$$P, Q \in \Omega, \qquad Q(\tau_Q) \in \mathcal{S}_{1;\tau_Q}(\mathcal{T}_{P_0Q})$$

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \Gamma^*_{P_0}(P_0, Q, P) =$$

$$\lim_{\tau_Q\to+0}\lim_{\tau_P\to+0} \frac{\Gamma(P_0, Q(\tau_Q), P(\tau_P))}{\tau_Q\tau_P}, \qquad P, Q \in \Omega \tag{4.2.7}$$

$$P(\tau_P) \in \mathcal{S}_{1;\tau_P}(\mathcal{T}_{P_0P}), \qquad Q(\tau_Q) \in \mathcal{S}_{1;\tau_Q}(\mathcal{T}_{P_0Q})$$

где $Q(\tau) \in \mathcal{T}_{P_0Q}$ и $P(\tau) \in \mathcal{T}_{P_0P}$ точки, принадлежащие сечениям (3.5.5) соответственно трубок $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{P_0P}$ при значении параметра τ. В отличие от (4.2.1), (4.2.5) соотношения (4.2.6), (4.2.7) не содержат $\sigma(P_0, Q)$ и $\sigma(P_0, P)$ в знаменателе и являются хорошо определенными и в случае изотропных векторов $\mathbf{u}_{P_0Q}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\quad (\sigma(P_0, Q) = 0, \quad \sigma(P_0, P) = 0)$.

Замечание. Строго говоря, в соответствии с определением 3.1.16 две точки P_0, P_1 определяют трубку $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ только в том случае, если P_0, P_1 образуют базис, т.е. если $F_1(P_0,P_1)=2\sigma(P_0,P_1)\neq 0$. Иначе говоря, изотропную трубку $\mathcal{T}_{P_0P_1},\quad \sigma(P_0,P_1)=0$ определить прямо нельзя. Однако в плотном σ-пространстве можно определить усеченную изотропную трубку $\mathcal{T}^c_{P_0P_1},\quad \sigma(P_0,P_1)=0$ как предел времениподобной трубки $\mathcal{T}_{P_0P},\quad \sigma(P_0,P)>0$ при $P\to P_1$, введя при этом надлежащим образом параметризацию на ней. Параметризацию изотропной усеченной трубки $\mathcal{T}^c_{P_0Q}$, где $\sigma(P_0,Q)=0$, можно определить, например, так

$$\mathcal{Q}'(\tau)=\mathcal{S}_{1;\tau}(\mathcal{T}_{(P'Q}),\qquad \sigma(P',Q)>0,\qquad \mathcal{Q}'(\tau)|_{\tau=1}=Q,\qquad Q,P'\in\Omega$$

$$\mathcal{Q}(\tau)=\lim_{\substack{P'\to P_0\\ \sigma(P',Q)>0}}\mathcal{Q}'(\tau),\qquad \mathcal{T}^c_{(P_0Q}=\bigcup_{\tau>0}\{P'\mid P'\in\mathcal{Q}(\tau)\}\tag{4.2.8}$$

Другими словами, луч $\mathcal{T}^c_{(P_0Q}$ усеченной изотропной трубки определяется как предел времениподобного луча $\mathcal{T}^c_{(P'Q}$ при $P'\to P_0$, а параметризация $\mathcal{T}^c_{(P_0Q}$ является пределом параметризации времениподобного луча трубки $\mathcal{T}^c_{(P'Q}$. Предполагается, что $\tau=1$ в точке Q для любого $\mathcal{T}_{(P'Q}$.

Положим в (4.2.5) $P=Q$. Тогда можно положить $P'=Q'$. Получаем в результате

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P})=2\sigma(P_0,P)=(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P})\tag{4.2.9}$$

Определение 4.2.3 . *Геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}\subset\Omega$ определяет T-луч $\mathcal{T}_{(P_0P}\subset\Omega$, если существует один и только один T-луч $\mathcal{T}_{(P_0P}$, содержащий $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$, а с остальными T-лучами $\mathcal{T}_{(P_0Q},\quad Q\in\Omega$ геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ не имеет общих точек, т.е. $\mathcal{G}^*_{(P_0P}\cap\mathcal{T}_{(P_0P'}=\emptyset$, если $P'\notin\mathcal{T}_{(P_0P}$.*

Теорема 4.2.1 . *Пусть $V^+_{P_0}=\{\sigma,\Omega^+_{P_0}\}$, $\Omega^+_{P_0}\subset\Omega$ есть σ-подпространство σ-пространства $V=\{\sigma,\Omega\}$, определенное на множестве $\Omega^+_{P_0}=\{P\mid\sigma(P_0,P)>0\}\cup\{P_0\}$ точек P с времениподобным интервалом до точки P_0, и выполнены следующие условия:*
(i) σ-пространство $V^+_{P_0}=\{\sigma,\Omega^+_{P_0}\}$ плотно в точке P_0.
(ii) В ассоциированном с $V^+_{P_0}$ векторном σ-пространстве $W^+_{P_0}=\{\sigma_{P_0},\omega^+_{P_0}\}$ определены векторы $\mathbf{u}_{P_0P}\in\omega^{+*}_{P_0}$ векторного σ-пространства $W^{+*}_{P_0}=\{p^*_{P_0},\omega^{+*}_{P_0}\}$, $\omega^{+*}_{P_0}=\{\mathbf{u}_{P_0P}|P\in\Omega^+_{P_0}\}$, т.е. определены скалярные произведения $(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})$, $P,Q\in\Omega^+_{P_0}$, $(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q})$, $P,Q\in\Omega^+_{P_0}$, (существуют пределы (4.2.1), (4.2.5) при любом способе стремления $P'\to P_0,\quad Q'\to P_0$).
(iii) Каждый времениподобный геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}\subset\Omega^+_{P_0}$ определяет T-луч $\mathcal{T}_{(P_0P}\subset\Omega^+_{P_0}$, $P\in\Omega^+_{P_0}$.

Пусть $V^{+*}_{P_0}=\{\sigma^*_{P_0},\Omega^+_{P_0}\}$ есть ассоциированное с $W^{+*}_{P_0}$ σ-пространство. Тогда возникает отображение $V^+_{P_0}\to V^{+*}_{P_0}$. Для того, чтобы $V^{+*}_{P_0}$ было D-мерным евклидовым σ-пространством и отображение $V^+_{P_0}\to V^{+*}_{P_0}$ было геодезическим, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

I. $V_{P_0}^+$ *экстремально на любом времениподобном луче* $\mathcal{T}_{(P_0P}$, $\quad P \in \Omega_{P_0}^+$.
II. Выполняется соотношение

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{u}_{P_0Q}), \qquad \forall P, \forall Q \in \Omega_{P_0}^+ \tag{4.2.10}$$

III. σ*-пространство* $V_{P_0}^{+*}$ *имеет структуру* D*-мерного евклидова* σ*-пространства, т.е. существует такой* $(D+1)$*-точечный базис* $\mathcal{P}^D \subset \Omega_{P_0}^+$*, что*

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)x_i^*(P)x_k^*(Q), \qquad P, Q \in \Omega_{P_0}^+$$

$$\begin{gathered} x_i^*(P) = (\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{u}_{P_0P}), \qquad i = 1,2,\dots D, \qquad P \in \Omega_{P_0}^+ \\ x_i(P) = (\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1,2,\dots D \qquad P \in \Omega_{P_0}^+ \\ g_{ik}^*(\mathcal{P}^D) = (\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{u}_{P_0P_k}), \qquad i,k = 1,2,\dots D \\ \det \parallel g_{ik}^* \parallel \neq 0, \end{gathered} \tag{4.2.11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть по предположению теоремы $V_{P_0}^{+*}$ есть D-мерное евклидово σ-пространство и отображение $V_{P_0}^+ \to V_{P_0}^{+*}$ – геодезическое. Тогда существует $(D+1)$-точечный базис $\mathcal{P}^D$ и выполнено условие III теоремы 4.2.1. Так как $V_{P_0}^{+*}$ есть евклидово σ-пространство, то уравнения для геодезических лучей $\mathcal{G}_{(P_0P}^*$ и $\mathcal{G}_{(P_0^*P^*}^*$

$$\mathcal{G}_{(P_0P}^* = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{Q\in\Omega_{P_0}^+} \{P' \mid (\mathbf{P}_0\mathbf{P}'.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \tau(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{u}_{P_0Q})\}, \tag{4.2.12}$$

$$P, Q \in \Omega_{P_0}^+, \qquad \mathcal{G}_{(P_0P}^* \subset V_{P_0}^{+*}$$

$$\mathcal{G}_{(P_0^*P^*}^* = \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{Q\in\Omega_{P_0}^+} \{P' \mid (\mathbf{u}_{P_0P'}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \tau(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q})\}, \tag{4.2.13}$$

$$P, Q \in \Omega_{P_0}^+, \qquad \mathcal{G}_{(P_0^*P^*}^* \subset V_{P_0}^{+*}$$

записываются в виде (4.1.34), (4.1.35). Из совпадения геодезических лучей $\mathcal{G}_{(P_0P}^*$ и $\mathcal{G}_{(P_0^*P^*}^*$ при геодезическом отображении в соответствии с (4.1.38) - (4.1.40) следует

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{u}_{P_0P_i}) = (\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P_i}) = (\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i), \qquad i = 1,2,\dots D \tag{4.2.14}$$

$$P \in \Omega_P^+, \qquad \mathcal{P}^D \in \Omega_{P_0}^+$$

и условие II теоремы, описываемое соотношением (4.2.10), выполнено.

По предположению (iii) теоремы всякий геодезический луч $\mathcal{G}_{(P_0P}^* \subset \Omega_{P_0}^+$ определяет $\mathcal{T}_{(P_0P}$. Пусть $P' \in \mathcal{T}_{(P_0P}$. кроме того всегда $P' \in \mathcal{G}_{(P_0P'}^*$. Поскольку луч $\mathcal{G}_{(P_0P'}^*$ имеет общую точку с $\mathcal{T}_{(P_0P}$, то в силу предположения (iii)

$\mathcal{G}^*_{(P_0P'} \subset \mathcal{T}_{(P_0P}$. Но одновременно $\mathcal{G}^*_{(P_0P'}$ имеет общую точку P' с $\mathcal{T}_{(P_0P'}$ и, следовательно, $\mathcal{G}^*_{(P_0P'} \subset \mathcal{T}_{(P_0P'}$. Так как $\mathcal{G}^*_{(P_0P'}$ определяет $\mathcal{T}_{(P_0P'}$, то согласно предположению (iii) и определению 4.2.3 имеется только один T-луч $\mathcal{T}_{(P_0P'}$, содержащий луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P'}$, поэтому

$$\mathcal{T}_{(P_0P} = \mathcal{T}_{(P_0P'} \qquad (4.2.15)$$

Поскольку P' есть произвольная точка T-луча $\mathcal{T}_{(P_0P}$, то (4.2.15) есть условие определенности (3.1.73) для T-луча $\mathcal{T}_{(P_0P}$.

Из соотношений (4.2.11), (4.2.10), (4.2.1) следует

$$x_i(P) = (\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = (\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i) =\mid 2\sigma(P_0,P)\mid^{1/2} \Pi(P_0,\mathcal{T}_{(P_0P},P_i) \qquad (4.2.16)$$

$$P, P', P_i \in V^+_{P_0}, \qquad i = 1, 2, \ldots D$$

$$x_i(P') =\mid 2\sigma(P_0,P')\mid^{1/2} \Pi(P_0,\mathcal{T}_{(P_0P'},P_i) \qquad (4.2.17)$$

$$P', P_i \in V^+_{P}, \qquad i = 1, 2, \ldots D$$

В силу соотношения (4.2.15) из (4.2.16) и (4.2.17) следует, что $x_i(P)$ и $x_i(P')$ различаются лишь множителем $\mid \sigma(P_0,P)/\sigma(P_0,P')\mid^{1/2}$, поэтому точка P' удовлетворяет уравнению (4.1.34), и $P' \in \mathcal{G}^*_{(P_0P}$. Следовательно, $\mathcal{G}^*_{(P_0P'} = \mathcal{G}^*_{(P_0P}$. Так как P' - произвольная точка T-луча $\mathcal{T}_{(P_0P}$, то $\mathcal{T}_{(P_0P} \subset \mathcal{G}^*_{(P_0P}$ и поскольку одновременно $\mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \mathcal{T}_{(P_0P}$, то

$$\mathcal{T}_{(P_0P} = \mathcal{G}^*_{(P_0P}, \qquad P \in \Omega^+_{P_0} \qquad (4.2.18)$$

T-луч в евклидовом σ-пространстве $V^{+*}_{P_0}$ есть геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ в евклидовом σ-пространстве $V^{+*}_{P_0}$, поэтому сечение его минимально, и имеется одно-однозначное соответствие между точкой P и ее координатами $x(P)$.

Необходимое условие (4.1.44) геодезического отображения принимает вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}') = (\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P'}), \qquad P' \in \mathcal{T}_{(P_0P}, \qquad P \in \Omega^+_{P_0} \qquad (4.2.19)$$

Из (4.2.19) с учетом (4.1.4) следует, в частности,

$$\sigma(P_0,P') = \sigma^*_{P_0}(P_0,P'), \qquad \sigma(P',P) = \sigma^*_{P_0}(P',P), \qquad (4.2.20)$$

$$P' \in \mathcal{T}_{(P_0P}, \qquad P \in \Omega^+_{P_0}$$

Из определения сечения (3.1.52) и соотношений (4.2.20) следует, что сечения T-луча в σ-пространстве $V^+_{P_0}$ и в σ-пространстве $V^{+*}_{P_0}$ совпадают. Из минимальности сечения $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$=$\mathcal{T}_{(P_0P}$ в $V^{+*}_{P_0}$ следует минимальность сечения $\mathcal{T}_{(P_0P}$ в $V^+_{P_0}$.

Таким образом, σ-пространство $V^+_{P_0}$ экстремально на любом времениподобном T-луче $\mathcal{T}_{(P_0P}$ (условие I теоремы), и необходимость условий I-III доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия (i)-(iii) и I-III теоремы. Покажем, что в этом случае σ-пространство $V^{+*}_{P_0}$ евклидово, а отображение $V^+_{P_0} \to V^{+*}_{P_0}$

является геодезическим, т.е. выполнены условия (i)-(v), упомянутые в определении 4.1.11 геодезического отображения.

Выполнение условия (i) определения 4.1.11 очевидно. Из существования пределов (4.2.1), (4.2.5) следует существование векторного σ-пространства $W^{+*}_{P_0}$ векторов направления и определение в нем векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ векторного σ-пространства $W^{+}_{P_0}$.

Полагая в соотношении (4.2.5) $Q = P$ и вычисляя пределы при $Q' = P' \to P_0$ получаем

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P}) = 2\sigma(P_0, P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad P \in \Omega^{+}_{P_0} \tag{4.2.21}$$

т.е. условие (iv) определения 4.1.11. Условие (v) определения 4.1.11 следует из условия (iii) теоремы.

Из условия II теоремы 4.2.1 и (4.1.30) следует совпадение геодезических лучей $\mathcal{G}^{*}_{(P_0P} = \mathcal{G}^{*}_{(P_0^*P^*}$, т.е. условие (iii) определения 4.1.11.

Из условия III теоремы 4.2.1 следует, что σ-пространство $V^{+*}_{P_0}$, ассоциированное с $W^{+*}_{P_0}$, имеет структуру D-мерного евклидова σ-пространства. Из соотношений (4.2.21) и (4.2.11) следует

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)x_i(P)x_k(P), \qquad P \in \Omega^{+}_{P_0} \tag{4.2.22}$$

Это соответствует соотношению (4.1.16), которое означает, что присоединение любого вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $P \in \Omega^{+}_{P_0}$ к векторному σ-пространству $W^{+*}_{P_0}$ не изменяет его размерности. Тем самым условие (ii) определения 4.1.11 выполняется полностью.

Остается доказать одно-однозначное соответствие между точкой P и ее координатами $x(P)$, что вместе с евклидовой структурой σ-пространства $V^{+*}_{P_0}$ означает его евклидовость.

Геодезический луч $\mathcal{G}^{*}_{(P_0P}$ (4.1.30) в σ-пространстве $V^{+*}_{P_0}$ со структурой D-мерного евклидова пространства имеет вид (4.1.22)

$$\mathcal{G}^{*}_{(P_0P} = \bigcup_{\tau>0}\{P' \mid \bigwedge_{i=1}^{i=D} x^*_i(P') = \tau x^*_i(P)\}, \qquad P, P' \in \Omega^{+}_{P_0} \qquad \mathcal{G}^{*}_{(P_0P} \subset \Omega^{+}_{P_0} \tag{4.2.23}$$

и отличается от геодезического луча в евклидовом σ-пространстве лишь тем, что одно-однозначного соответствия между точкой P и ее координатами $x_i(P)$ может не быть. В соответствии с условием (iii) теоремы геодезический луч $\mathcal{G}^{*}_{(P_0P} \subset V^{+*}_{P_0}$ определяет T-луч в $V^{+}_{P_0}$ и $\mathcal{G}^{*}_{(P_0P} \subset \mathcal{T}_{(P_0P}$, $\quad \forall P \in \Omega^{+}_{P_0}$.

Пусть $P' \in \mathcal{T}_{(P_0P}$. Из (4.2.11), (4.2.10) и (4.2.1) следуют соотношения (4.2.16), (4.2.17). Тогда координаты $x_i(P)$ и $x_i(P')$, $i = 1, 2, \ldots D$ различаются лишь множителем. Сравнение с (4.2.23) показывает, что $P' \in \mathcal{G}^{*}_{(P_0P}$. Поскольку P' произвольная точка T-луча $\mathcal{T}_{(P_0P}$, то $\mathcal{T}_{[P_0P} \subset \mathcal{G}^{*}_{(P_0P}$. Это вместе с $\mathcal{G}^{*}_{(P_0P} \subset \mathcal{T}_{(P_0P}$ эквивалентно условию (4.2.18). Поскольку $V^{+}_{P_0}$ экстремально на $\mathcal{T}_{(P_0P}$, $P \in \Omega^{+}_{P_0}$, то сечение T-луча $\mathcal{T}_{(P_0P}$ и геодезического луча $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ минимально. Вместе с (4.2.23) это означает одно-однозначное соответствие между точкой $P \in \Omega^+_{P_0}$ и ее координатами $x(P) \in \mathbb{R}^D$. Отсюда следует евклидовость σ-пространства $V^{+*}_{P_0}$, имеющего евклидову структуру. Теорема доказана.

Пусть векторное σ-пространство $W^{+*}_{P_0} = \{p^*_{P_0}, \omega^{+*}_{P_0}\}$ есть D-мерное евклидово σ-пространство времениподобных векторов направления $\mathbf{u}_{P_0P}$. Произведем его расширение, добавив векторы направления $\mathbf{u}_{P_0P}$, $P \in \Omega^-_{P_0}$ с координатами

$$x_i(P) = (\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad P \in \Omega^-_{P_0}, \qquad i = 1, 2, , \dots D; \tag{4.2.24}$$

где $\Omega^-_{P_0}$ определено соотношениями (4.1.53), а векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $P_i \in \Omega^+_{P_0}$, $i = 1, 2, \dots D$ все времениподобны и образуют базис в $W^{+*}_{P_0}$.

Определение 4.2.4 . *Усеченный T-луч $\mathcal{T}^c_{(P_0P} \subset \Omega$, $P \in \Omega$ есть пересечение геодезического луча $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ с T-лучом $\mathcal{T}_{(P_0P} \subset \Omega$.*

$$\mathcal{T}^c_{(P_0P} = \mathcal{G}^*_{(P_0P} \bigcap \mathcal{T}_{(P_0P} \tag{4.2.25}$$

Для случая $P \in \Omega^+_{P_0}$ выполнено (4.2.18) и

$$\mathcal{T}^c_{(P_0P} = \mathcal{G}^*_{(P_0P} = \mathcal{T}_{(P_0P} \tag{4.2.26}$$

Однако, в случае, когда $P \in \Omega^-_{P_0}$, усеченный T-луч $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$ отличен от $\mathcal{T}_{(P_0P}$ и обладает свойством определенности (3.1.73), которым T-луч $\mathcal{T}_{(P_0P}$, вообще говоря, не обладает.

Следует иметь в виду, что усечение T-луча достаточно сложная операция, использующая возможность геодезического отображения $V \to V^*_{P_0}$ на евклидово σ-пространство $V^*_{P_0}$, ассоциированное с $W^*_{P_0}$.

Лемма 4.2.1 . *Пусть заданы σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$, евклидово σ-пространство $V^*_{P_0} = \{\sigma^*_{P_0}, \Omega\}$, и геодезическое отображение $V \to V^*_{P_0}$. Тогда геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ определяет усеченный T-луч $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$, т.е. выполнены условия определения 4.2.3 для усеченного T-луча $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$.*

Доказательство. В силу свойства (v) определения 4.1.11 геодезического отображения

$$\mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \mathcal{T}_{(P_0P} \tag{4.2.27}$$

Тогда в соответствии с (4.2.25)

$$\mathcal{G}^*_{(P_0P} = \mathcal{T}^c_{(P_0P} \tag{4.2.28}$$

Таким образом, каждому геодезическому лучу $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ соответствует по крайней мере один усеченный T-луч. Покажем,что такой усеченный T-луч только один. Пусть P'' есть общая точка геодезического луча $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ и усеченного T-луча $\mathcal{T}^c_{(P_0P'} = \mathcal{G}^*_{(P_0P'}$, $P' \neq P$, т.е. $P'' \in \mathcal{G}^*_{(P_0P'}$, $P'' \in \mathcal{G}^*_{(P_0P}$. Покажем, что

$\mathcal{T}^c_{(P_0P'} = \mathcal{T}^c_{(P_0P} = \mathcal{G}^*_{(P_0P}$. В силу (4.2.27) и второго соотношения (4.1.30) выполнены уравнения

$$\mathcal{G}^*_{(P_0P}: \qquad (\mathbf{u}_{P_0P''}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \tau_P(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{u}_{P_0Q}), \qquad \forall Q\in\Omega, \qquad \tau_P>0$$

$$\mathcal{G}^*_{(P_0P'}: \qquad (\mathbf{u}_{P_0P''}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \tau_{P'}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}'.\mathbf{u}_{P_0Q}), \qquad \forall Q\in\Omega, \qquad \tau_{P'}>0 \qquad (4.2.29)$$

Отсюда следует, что $P'\in\mathcal{G}^*_{(P_0P} = \mathcal{T}^c_{(P_0P}$ и $\mathcal{G}^*_{(P_0P'} = \mathcal{G}^*_{(P_0P}$. Следовательно, $\mathcal{T}^c_{(P_0P} = \mathcal{T}^c_{(P_0P'}$ и геодезическому лучу $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ соответствует только один усеченный T-луч. Иными словами, геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ не имеет общих точек с другими T-лучами $\mathcal{T}^c_{(P_0P'}\neq\mathcal{T}^c_{(P_0P}$, т.е. $\mathcal{G}^*_{(P_0P}\cap\mathcal{T}^c_{(P_0P'}=\emptyset$, если $P'\notin\mathcal{T}^c_{(P_0P}$. Лемма доказана.

Теорема 4.2.2 . *Пусть $V=\{\sigma,\Omega\}$ есть σ-пространство, а $V^+_{P_0}=\{\sigma,\Omega^+_{P_0}\}$ есть σ-подпространство σ-пространства V, определенное на множестве $\Omega^+_{P_0}=\{P\mid\sigma(P_0,P)>0\}\cup\{P_0\}$ точек P с времениподобным интервалом до точки P_0.*
(i) Пусть σ-пространство $V^+_{P_0}=\{\sigma,\Omega^+_{P_0}\}$ плотно в точке P_0.
(ii) Задано векторное σ-пространство $W^{+*}_{P_0}=\{p^*_{P_0},\omega^{+*}_{P_0}\}$ времениподобных векторов направления $\mathbf{u}_{P_0P}\in\omega^{+*}_{P_0}$ и векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}\in\omega^+_{P_0}$ определены в нем, т.е. в точке P_0 определены скалярные произведения $(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})$, $P\in\Omega^+_{P_0}$, $Q\in\Omega$, $(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q})$, $P,Q\in\Omega^+_{P_0}$, (существуют пределы (4.2.1), (4.2.5) при любом способе стремления $P'\to P_0$, $Q'\to P_0$).
(iii) Пусть $W^{+*}_{P_0}=\{p^*_{P_0},\omega^+_{P_0}\}$ есть D-мерное евклидово векторное σ-пространство, а $W^*_{P_0}=\{p^*_{P_0},\omega_{P_0}\}$ есть его расширение без увеличения размерности в результате добавления векторов направления $\mathbf{u}_{P_0P}\in\omega^-_{P_0}$, для которых скалярные произведения определены соотношениями

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)x_i(P)x_k(Q),$$

$$(P\in\Omega^+_{P_0}\wedge Q\in\Omega^-_{P_0})\vee(P\in\Omega^-_{P_0}\wedge Q\in\Omega^+_{P_0})\vee(P\in\Omega^-_{P_0}\wedge Q\in\Omega^-_{P_0}) \qquad (4.2.30)$$

$$x_i(P)=(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad P\in\Omega, \qquad P_i\in\Omega^+_{P_0}, \qquad i=1,2,\dots D$$

$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i\in\omega^+_{P_0}$, $i=1,2,\dots D$ *образует базис в* $W^+_{P_0}$.

Пусть $V^*_{P_0}=\{\sigma^*_{P_0},\omega_{P_0}\}$ есть σ-пространство, ассоциированное с $W^*_{P_0}$ в точке P_0.

Тогда для того, чтобы $V^*_{P_0}$ было евклидовым σ-пространством, а отображение $V\to V^*_{P_0}$ было геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:
I. σ-пространство V экстремально на любом усеченном T-луче $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$, $P\in\Omega$.
II. для любых $P,Q\in\Omega$

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{u}_{P_0Q}), \qquad (4.2.31)$$

III для любых $P, Q \in \Omega$

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)x_i(P)x_k(Q), \tag{4.2.32}$$

IV. для $P' \in \mathcal{T}^c_{(P_0P}, \quad P \in \Omega$

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P'}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}'), \tag{4.2.33}$$

V. Всякий геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ *принадлежит* T*-лучу* $\mathcal{T}_{(P_0P}$, $\mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \mathcal{T}_{(P_0P}$, $P \in \Omega$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $V^*_{P_0}$ есть D-мерное евклидово σ-пространство и отображение $V \to V^*_{P_0}$ геодезическое. Тогда существует $(D+1)$-точечный базис $\mathcal{P}^D = \{P_i\}$, $i = 0, 1, \dots D$. Поскольку $V^{+*}_{P_0} \subset V^*_{P_0}$ также есть D-мерное евклидово σ-пространство, то базис $\mathcal{P}^D$ может быть выбран в $V^{+*}_{P_0}$ так, что $\mathcal{P}^D \subset \Omega^+_{P_0}$ и все векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \dots D$ базиса времениподобны. Из евклидовости $V^*_{P_0}$ следует выполнение (4.2.32), т.е. условия III теоремы.

В евклидовом σ-пространстве $V^*_{P_0}$ геодезические лучи $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$, $\mathcal{G}^*_{(P^*P^*_0}$ описываются уравнениями (4.1.34), (4.1.35)

$$\mathcal{G}^*_{(P_0P}: \qquad x^*_i(P') = \tau x_i(P), \qquad i = 1, 2, \dots D, \qquad P, P' \in \Omega \tag{4.2.34}$$

$$\mathcal{G}^*_{(P^*_0P^*}: \qquad x^*_i(P') = \tau x^*_i(P), \qquad i = 1, 2, \dots D, \qquad P, P' \in \Omega \tag{4.2.35}$$

где

$$x_i(P) = (\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad P, P_i \in \Omega, \qquad i = 1, 2, \dots D \tag{4.2.36}$$

$$x^*_i(P) = (\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{u}_{P_0P}), \qquad P, P_i \in \Omega, \qquad i = 1, 2, \dots D \tag{4.2.37}$$

В соответствии с условием (iii) определения 4.1.11 геодезического отображения геодезические лучи $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ и $\mathcal{G}^*_{(P^*_0P^*}$ совпадают. Тогда из (4.2.34), (4.2.35) следует, что $x^*_i(P) = \alpha x_i(P)$, $P \in \Omega$, $1 = 1, 2, \dots D$. Вместе с условием (iv) определения 4.1.11 геодезического отображения (4.1.24) это влечет за собой $\alpha = 1$ и совпадение координат $x^*_i(P)$ и $x_i(P)$, т.е.

$$(\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{u}_{P_0P}) = (\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad P, P_i \in \Omega, \qquad i = 1, 2, \dots D, \tag{4.2.38}$$

Так как любой ненулевой вектор $\mathbf{u}_{P_0Q}$, $Q \neq P_0$, $Q \in \Omega$ может быть выбран в качестве базисного вектора $\mathbf{u}_{P_0P_1} = \mathbf{u}_{P_0Q}$, то из (4.2.38) следует (4.2.31), т.е. условие II теоремы.

Для доказательства условия I теоремы заметим, что в соответствии с условием (v) определения 4.1.11 геодезического отображения $\mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \mathcal{T}_{(P_0P}$, $P \in \Omega$, т.е. выполнено условие V теоремы. Тогда в силу (4.2.25) определения 4.2.4 усеченного T-луча

$$\mathcal{T}^c_{(P_0P} = \mathcal{G}^*_{(P_0P}, \qquad P \in \Omega \tag{4.2.39}$$

Геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ в евклидовом σ-пространстве V^*_P однозначно определяется любой своей точкой $P' \in \mathcal{G}^*_{(P_0P}$, т.е. он обладает свойством определенности (3.1.73). Он имеет минимальное сечение, так как в евклидовом $V^*_{P_0}$ имеется одно-однозначное соответствие между точкой $P \in \Omega$ и ее координатами $x(P) \in \Omega_E \subset \mathbb{R}^D$.

Для геодезического луча $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ имеет место равенство (4.1.44), которое в силу (4.2.39) можно записать в виде

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P'}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}'), \qquad P' \in \mathcal{T}^c_{(P_0P}, \qquad P \in \Omega \tag{4.2.40}$$

Соотношение (4.2.40) представляет собой условие IV теоремы. Кроме того для $P' = P$ из него следует

$$\sigma(P_0, P) = \sigma^*_{P_0}(P_0, P), \qquad P \in \Omega. \tag{4.2.41}$$

Используя соотношение (4.1.4) для обеих частей равенства (4.2.40), получаем в силу (4.2.41)

$$\sigma(P', P) = \sigma^*_{P_0}(P', P), \qquad P' \in \mathcal{T}^c_{(P_0P}, \qquad P \in \Omega \tag{4.2.42}$$

Из соотношения (3.1.52), определяющего сечение трубки, и (4.2.41), (4.2.42) следует, что сечения усеченного T-луча $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$ одинаковы в σ-пространствах V и $V^*_{P_0}$. Это означает минимальность сечения $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$ в σ-пространстве V. Так как $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$ обладает свойством определенности, то σ-пространство V экстремально на усеченном T-луче $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$. Этим доказано условие I теоремы. Необходимость условий I - V доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия (i)-(iii) и I-V теоремы. Покажем, что в этом случае σ-пространство $V^*_{P_0}$ евклидово, а отображение $V \to V^*_{P_0}$ является геодезическим, т.е. выполнены условия (i)-(v), упомянутые в определении 4.1.11 геодезического отображения.

Выполнение условия (i) определения 4.1.11 очевидно. Из существования пределов (4.2.1), (4.2.5) следует существование векторного σ-пространства $W^{+*}_{P_0}$ времениподобных векторов направления и определение в нем векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $P \in \Omega$ векторного σ-пространства W_{P_0}. Возможность расширения $W^{+*}_{P_0}$ до векторного σ-пространства $W^*_{P_0}$ векторов направления $\mathbf{u}_{P_0P}$, $P \in \Omega$ предусмотрена условиями (i)-(iii) теоремы, причем в силу условия III теоремы $W^*_{P_0}$ как и ассоциированное с ним σ-пространство $V^*_{P_0}$ имеют структуру D-мерного евклидова σ-пространства.

Из условия IV теоремы при $P' = P$ следует

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P}) = 2\sigma(P_0, P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad P \in \Omega, \tag{4.2.43}$$

т.е. условие (iv) определения 4.1.11 геодезического отображения. Согласно (4.2.31) любой вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $P \in \Omega$ определен в $W^*_{P_0}$, причем в силу (4.2.43) и

(4.2.32) его присоединение к $W^*_{P_0}$ не меняет его размерности. Это означает выполнение условия (ii) определения 4.1.11.

Из условия II теоремы и (4.1.30) следует совпадение геодезических лучей $\mathcal{G}^*_{(P_0P} = \mathcal{G}^*_{(P_0^*P^*}$, $P \in \Omega$, т.е. условие (iii) определения 4.1.11. Условие V теоремы эквивалентно условию (v) определения 4.1.11.

Остается доказать одно-однозначное соответствие между точками P и их координатами $x(P)$, что вместе с евклидовой структурой $V^*_{P_0}$ (условие III теоремы) означает его евклидовость.

В силу условия V теоремы $\mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \mathcal{T}_{[P_0P}$. Тогда из определения (4.2.25) усеченного T-луча следует

$$\mathcal{T}^c_{(P_0P} = \mathcal{G}^*_{(P_0P}, \qquad P \in \Omega \tag{4.2.44}$$

С другой стороны геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$ (4.1.34) в σ-пространстве $V^*_{P_0}$ с евклидовой структурой имеет вид (4.1.22) и, следовательно

$$\mathcal{T}^c_{(P_0P} = \bigcup_{\tau>0}\{P' \mid \bigwedge_{i=1}^{i=D} x_i(P') = \tau x_i(P)\}, \qquad P, P' \in \Omega \tag{4.2.45}$$

Согласно условию I теоремы σ-пространство V экстремально на $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$, $P \in \Omega$, поэтому имеется одно-однозначное соответствие между точкой P и ее координатами $x(P)$. Это означает минимальность сечений $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$, что вместе с евклидовой структурой σ-пространства $V^*_{P_0}$ означает его евклидовость. Теорема доказана.

Замечание. Описанный способ построения геодезического отображения $V \to V^*_{P_0}$ основывается исключительно на свойствах временитодобных T-лучей $\mathcal{T}_{(P_0P}$. Важны их экстремальность и плотность. В то же время свойства пространсвенноподобных трубок практически не используются. Такой подход актуален при описании реального пространства-времени, где с помощью материальных тел реализуются лишь временитодобные трубки, тогда как пространственноподобные трубки не экстремальны и имеют абстрактный характер.

Описанный способ расширения векторного σ-пространства $W^{+*}_{P_0}$временитодобных векторов направления базируется главным образом на евклидовости $W^{+*}_{P_0}$.

По существу теорема 4.2.2 трактует об эквивалентности существования геодезического отображения σ-пространства V на евклидово σ-пространство $V^*_{P_0}$ и условий I-V. При этом условия (i)-(iii) не играют роли в осуществлении этой эквивалентности. Прочитав доказательство теоремы можно убедиться, что условия (i)-(iii) в доказательстве не используются. Роль условий (i)-(iii) чисто конструктивная. Они позволяют построить σ-пространство $V^*_{P_0}$, базируясь на σ-пространстве V, и проверить выполнение условий I-V для конкретного σ-пространства.

Если не придавать значения конструктивности, то можно опустить условия (i)-(iii) и использовать для вычисления пределов (4.2.1), (4.2.3) соотношения (4.2.6), (4.2.7), вычисляя их вдоль усеченных T-лучей. При этом усеченный луч

$\mathcal{T}^{c}_{(P_0 P}$ может быть времениподобным, пространственноподбным или изотропным. В последнем случае используется соотношение (4.2.8). Неконструктивность такого подхода проявляется в том, что для определения пределов (4.2.6)-(4.2.8), необходимых для построения $V^*_{P_0}$, нужно знать усеченные T-лучи $\mathcal{T}^{c}_{(P_0 P}$, а для их построения согласно определению 4.2.4 нужно знать $V^*_{P_0}$. Другими словами, такая процедура вычисления пределов (4.2.6)-(4.2.8) рекурсивна. Эта рекурсивность преодолевается, если существуют экстремальные T-лучи, для определения которых не надо привлекать евклидово σ-пространство $V^*_{P_0}$. Однако, использование пределов (4.2.6)-(4.2.8) вдоль усеченных T-лучей несколько упрощает формулировки, позволяя не выделять явно экстремальные T-лучи. Дополним теперь определение 4.1.12 так, чтобы оно было применимо к изотропным усеченным T-лучам.

Определение 4.2.5 . *Усеченный T-луч $\mathcal{T}^{c}_{(P_0 P}$ плотен в точке P_0, если для любого $\epsilon > 0$ всегда найдется значение параметра τ, нумерующего сечения луча $\mathcal{T}^{c}_{(P_0 P}$, такое, что $0 < \tau < \epsilon$ и $\mathcal{S}_{1;\tau}(\mathcal{T}^{c}_{(P_0 P}) \neq \emptyset$.*

Приведем формулировку теоремы 4.2.2 в терминах пределов (4.2.6)-(4.2.8).

Теорема 4.2.3 . *Пусть на множестве Ω задано σ-пространство и выполнены условия*
(i) Предел

$$(\mathbf{u}_{P_0 P}.\mathbf{u}_{P_0 Q}) = \Gamma^*_{P_0}(P_0, Q, P) =$$
$$\lim_{\tau_Q\to+0}\lim_{\tau_P\to+0}\frac{\Gamma(P_0, Q(\tau_Q), P(\tau_P))}{\tau_Q\tau_P}, \qquad P, Q \in \Omega\backslash\{P_0\} \tag{4.2.46}$$
$$P(\tau_P) \in \mathcal{S}_{1;\tau_P}(\mathcal{T}^{c}_{P_0 P}), \qquad Q(\tau_Q) \in \mathcal{S}_{1;\tau_Q}(\mathcal{T}^{c}_{P_0 Q})$$

существует для любых $P, Q \in \Omega\backslash\{P_0\}$ и не зависит от способа стремления τ_P и τ_Q к нулю. Тем самым определено векторное σ-пространство $W^*_{P_0} = \{p^*_{P_0}, \omega^*_{P_0}\}$ векторов направления $\mathbf{u}_{P_0 P}$, $P \in \Omega$, которое предполагается ассоциированным с $V^*_{P_0} = \{\sigma^*_{P_0}, \Omega\}$ в точке P_0.
(ii) Всякий усеченный T-луч $\mathcal{T}^{c}_{(P_0 P} = \mathcal{T}_{(P_0 P} \cap \mathcal{G}^*_{(P_0 P}$, $P \in \Omega$ плотен в точке P_0.
(iii) Всякий вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $P \in \Omega$ определен в $W^*_{P_0}$, т.е. существует предел для $\forall Q \in \Omega$

$$(\mathbf{u}_{P_0 Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \lim_{\tau_Q\to+0}\frac{\Gamma(P_0, Q(\tau_Q), P)}{\tau_Q}, \tag{4.2.47}$$
$$P \in \Omega, \qquad Q \in \Omega\backslash\{P_0\}, \qquad Q(\tau_Q) \in \mathcal{S}_{1;\tau_Q}(\mathcal{T}^{c}_{P_0 Q})$$

Тогда для того, чтобы σ-пространство $V^*_{P_0}$ было евклидовым, а отображение $V \to V^*_{P_0}$ было геодезическим необходимо и достаточно выполнения следующих условий:
I. σ-пространство V экстремально на любом усеченном T-луче $\mathcal{T}^{c}_{(P_0 P}$, $P \in \Omega\backslash\{P_0\}$.

II.

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{u}_{P_0Q}), \qquad P, Q \in \Omega \tag{4.2.48}$$

III.

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \sum_{i,k=1}^{D} g^{*ik}(\mathcal{P}^D)x_i(P)x_k(Q), \qquad P, Q \in \Omega \tag{4.2.49}$$

IV.

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P'}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}'), \qquad P' \in \mathcal{T}^c_{(P_0P}, \qquad P \in \Omega \tag{4.2.50}$$

V. Всякий геодезический луч $\mathcal{G}^*_{(P_0P}$, $P \in \Omega$ принадлежит T-лучу $\mathcal{T}_{(P_0P}$, $\quad \mathcal{G}^*_{(P_0P} \subset \mathcal{T}_{(P_0P}$, $\quad P \in \Omega$.

Теорема 4.2.3 доказывается точно так же как теорема 4.2.2. Она применима и в том случае, когда нет экстремальных T-лучей $\mathcal{T}_{(P_0P}$. Однако, в этом случае нельзя утверждать, что σ-пространству V соответствует единственное геодезическое отображение $V \to V^*_{P_0}$.

Далее будет использоваться главным образом теорема 4.2.3. При этом имеется в виду, что неконструктивность использования пределов (4.2.46), (4.2.47) в случае необходимости может быть скомпенсирована возвратом к формулировке в виде теоремы 4.2.2.

Определение 4.2.6 . *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ порождает D-мерное евклидово σ-пространство $V^*_{P_0} = \{\sigma^*_{P_0}, \Omega\}$ при точке P_0, если выполнены условия (i)-(iii) теоремы 4.2.3 и возникают D-мерное евклидово σ-пространство $V^*_{P_0}$ и геодезическое отображение $V \to V^*_{P_0}$ на него.*

Теорема 4.2.4 . *Пусть σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ порождает D-мерное евклидово σ-пространство $V^*_{P_0} = \{\sigma^*_{P_0}, \Omega\}$ при любой точке P_0. Если V плотно в каждой точке $P \in \Omega$ на любом усеченном T-луче $\mathcal{T}^c_{(PP'}$, $P, P' \in \Omega$, то V определяет D-мерное многообразие на открытом множестве $\Omega_0 = \overline{\Omega}\backslash B$, где $\overline{\Omega}$ есть замыкание Ω, а B есть граница множества $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 4.2.3 имеется взаимно однозначное соответствие между точкой $P \in \Omega$ и ее координатами $x = \{x_i(P)\}$, $i = 1, 2, \ldots D$, $x \in M \subset \mathbb{R}^D$ в некотором базисе $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $\quad i = 1, 2, \ldots D$, $\quad P_i \in \Omega$, $\quad i = 1, 2, \ldots D$. Будем называть точкой координаты x точки P. Определим δ-окрестность точки $x \in M$ как множество точек $y \in M$, удовлетворяющих условию

$$\mid x - y \mid^2 = \sum_{i=1}^{D} \mid x_i - y_i \mid^2 < \delta, \qquad \delta > 0 \tag{4.2.51}$$

Так как σ-пространство V плотно в каждой точке P на любом усеченном T-луче $\mathcal{T}^c_{(P_0P'}$, $P, P' \in \Omega$, то множество M плотно в каждой точке x, т.е. любая δ-окрестность точки $x \in M$ содержит по крайней мере одну точку $y \in M$, $y \neq x$. Присоединим к множеству M все его предельные точки. В результате возникнет замкнутое множество $\overline{M}$, которое не будет иметь изолированных точек, так как M всюду плотно. Пусть $x \in M$, а $y \in \overline{M}$ есть предельная точка, не принадлежащая M , $y \notin M$. Определим

$$\sigma(x,y) = \lim_{y' \to y} \sigma(x,y'), \qquad x \in M, \qquad y' \in M, \qquad y \in \overline{M}.$$

Пусть B есть граница $\overline{M}$, а $M_0 = \overline{M} \backslash B$. Поставим в соответствие множеству M_0 координат $x \in M_0$ множество Ω_0 точек P, $M_0 \leftrightarrow \Omega_0$. Множество Ω_0 точек P с системой координат (4.2.36) образует D-мерное многообразие.

4.3 Риманово пространство.

Идея построения риманова пространства на базе σ-пространства очень проста. Как мы видели в предыдущем разделе плотное в точке P_0 σ-пространство при некоторых условиях порождает евклидово пространство, касательное нему в точке P_0, и геодезическое отображение на него. Если σ-простанство $V = \{\sigma, \Omega\}$ плотно в любой точке $P' \in \Omega$, то оно порождает касательное евклидово пространство $V^*_{P'}$ в каждой точке P' и геодезическое отображение на него. С другой стороны, изучая в главе I мировую функцию риманова пространства, мы узнали, что она тоже генерирует касательное евклидово пространство $E_{P'}$ в каждой точке P' и геодезическое отображение на него. Если можно отождествить евклидово σ-пространство $V^*_{P'}$ с $E_{P'}$ в каждой точке P', то следует ожидать, что σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ будет римановым пространством.

Определение 4.3.1 . *D-мерное риманово пространство V есть D-мерное многообразие M с квадратичной формой*

$$(dS)^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k, \qquad g = \det \parallel g_{ik} \parallel \neq 0, \tag{4.3.1}$$

заданной на нем в каждой точке P с координатами $x(P)$.

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до D.

В так определенном римановом пространстве V мировая функция $\sigma(P,P')$ определяется через интервал $S(P,P')$ с помощью соотношений (2.1.7), (2.1.8)

$$S(P,P') = S(x,x') = \int\limits_{P'}^{P} \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k} \tag{4.3.2}$$

$$\sigma(x,x') = \sigma(P,P') = \frac{1}{2}S^2(P,P') \tag{4.3.3}$$

где x и x' суть координаты соответственно точек P и P' в некоторой системе координат K. Интегрирование в (4.3.2) производится вдоль геодезической

$\mathcal{L}_{PP'}$, которая является экстремалью функционала (2.1.7) и определяется уравнениями (2.1.2) - (2.1.4).

Как мы видели в разделе 2.3, мировая функция риманова пространства V генерирует и описывает геодезическое отображение $V \to E_{x'}$ на евклидово пространство $E_{x'}$, касательное к V в точке P' с координатами x'. При таком отображении всякая геодезическая $\mathcal{L}_{PP'} \subset V$ и $\mathcal{L}_{PP'} \ni P'$ отображается в прямую $\mathcal{L}^*_{PP'} \subset E_{x'}$, $\mathcal{L}^*_{PP'} \ni P'$. При отображении сохраняется длина любого отрезка геодезической $\mathcal{L}_{PP'}$ и углы между геодезическими в точке P'. Система координат K в V отображается в систему координат $K_{x'}$ в $E_{x'}$. Если $P \to P^*$, $P \in V$, $P^* \in E_{x'}$, то координаты точки P в K совпадают с координатами P^* в $E_{x'}$ $(x = x^*)$. При таком отображении согласно (2.3.44)

$$\sigma^*_{P'}(P, P'') = \sigma^*_{x'}(x, x'') = \sigma(x', x) + \sigma(x', x'') - \\ \sigma_{i'}(x', x) g^{i'k'}(x') \sigma_{k'}(x', x'') \tag{4.3.4}$$

где σ есть мировая функция риманова пространства V, а $\sigma^*_{P'}$ есть мировая функция евклидова пространства $E_{x'}$.

Лемма 4.3.1 . *Если мировая функция σ-пространства $V = \{\sigma, M\}$ есть дважды дифференцируемая функция координат $x = \{x^i\}$, $i = 1, 2, ..D$ и такова, что*

$$\det \parallel g_{ik}(x) \parallel = \det \left\| \left[\frac{\partial^2 \sigma(x, y)}{\partial y^i \partial y^k} \right]_{x=y} \right\| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots D \tag{4.3.5}$$

то σ-пространство V определяет D-мерное риманово пространство R на M.

Доказательство. Разлагая $\sigma(x, x + dx)$ в ряд по степеням dx^i, получаем в силу свойств (3.1.1) мировой функции

$$\frac{1}{2}(dS)^2 = \sigma(x, x + dx) = \frac{1}{2} g_{ik}(x) dx^i dx^k + o(\mid dx \mid^2)$$

$$g_{ik}(x) = \left[\frac{\partial^2 \sigma(x, y)}{\partial y^i \partial y^k} \right]_{x=y}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots D \tag{4.3.6}$$

$$\det \parallel g_{ik} \parallel \neq 0,$$

Сравнение с определением 4.3.1 риманова пространства доказывает лемму.

Замечание. Вообще говоря, мировая функция σ_R риманова пространства R, определяемая соотношениями (4.3.6), (4.3.2), (4.3.3) не совпадает с мировой функцией σ-пространства V, потому что σ не определяется своими вторыми производными, взятыми в пределе совпадения $x = y$. Функция σ может не быть мировой функцией какого бы то ни было риманова пространства.

Определение 4.3.2 . *σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ есть риманово σ-пространство, если Ω есть подмножество точек риманова пространства R и мировая функция σ_R риманова пространства R совпадает с мировой функцией σ σ-пространства V на множестве Ω.*

$$\sigma(P,P_0)=\sigma_R(P,P_0),\qquad P_0\in\Omega,\qquad P\in\Omega. \tag{4.3.7}$$

Сформулируем условия, которым должно удовлетворять σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ для того, чтобы в рамках T-геометрии возникла риманова геометрия.

Пусть σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ порождает евклидово σ-пространство $V^*_{P_0}=\{\sigma^*_{P_0},\Omega\}$ в любой точке $P_0\in\Omega$ в смысле определения 4.2.6. Тогда в соответствии с (4.2.49), (4.2.50) мировая функция $\sigma(P_0,P)$, $P_0,P\in\Omega$ может быть представлена в виде

$$\sigma(P_0,P)=\frac{1}{2}g^*_{ik}(\mathcal{P}^D)\left[x^i_{P_0}(P)-x^i_{P_0}(P_0)\right]\left[x^k_{P_0}(P)-x^k_{P_0}(P_0)\right], \tag{4.3.8}$$

$$x^i_{P_0}(P)=g^{*ik}(\mathcal{P}^D)x_{P_0k}(P),\qquad x^i_{P_0}(P_0)=0,\qquad i=1,2,\dots D.$$

где индекс "P_0" у координат означает, что это координаты (4.2.11) прямолинейные в евклидовом σ-пространстве $V^*_{P_0}$. Согласно (4.2.45) уравнение усеченного T-луча $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$ в этих координатах имеет вид

$$x^i_{P_0}(P')=\tau x^i_{P_0}(P),\qquad i=1,2,\dots D;\qquad \tau\geq 0,\qquad P'\in\mathcal{T}^c_{(P_0P}. \tag{4.3.9}$$

Имеется одно-однозначное соответствие между точками σ-пространства V и их координатами $x_{P_0}(P)\in M\subset\mathbb{R}^D$. По предположению σ-пространство V плотно в любой точке $P'\in\mathcal{T}^c_{(P_0P}$. Это, в частности, означает, что на $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$ существуют точки P'', координаты которых $x^i_{P_0}(P'')$ сколь угодно мало отличаются от $x^i_{P_0}(P')$:

$$x^i_{P_0}(P'')=x^i_{P_0}(P')+dx^i_{P_0}=(\tau+d\tau)x^i_{P_0}(P),\qquad |\,d\tau\,|<\epsilon. \tag{4.3.10}$$

Точки P_0,P суть произвольные точки множества Ω, $P'\in\mathcal{T}^c_{(P_0P}$, а $\sigma(P,P_0)$ есть многократно дифференцируемая функция координат $x^i_{P_0}(P)$, как это видно из (4.3.8). Тогда (4.3.8) можно записать в виде

$$\sigma(P_0,P)=\sigma\left(x_{P_0}(P_0),x_{P_0}(P)\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^1\sqrt{g^*_{ik}(\mathcal{P}^D)\frac{dx^i_{P_0}(P')}{d\tau}\frac{dx^k_{P_0}(P')}{d\tau}}d\tau\right\}^2, \tag{4.3.11}$$

где интегрирование производится вдоль участка $\mathcal{L}_{(P_0P]}=\mathcal{T}^c_{(P_0P]}$ усеченного T-луча $\mathcal{T}^c_{(P_0P}$, описываемого уравнением (4.3.9).

Пользуясь результатом теоремы 4.2.4, превратим множество точек Ω в многообразие M_0, дополнив его недостающими предельными точками. В результате всюду плотное σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ превратится в непрерывное σ-пространство $V = \{\sigma, M_0\}$, заданное на многообразии M_0. При этом мировая функция (4.3.8) превратится в дифференцируемую функцию координат $x_{P_0}(P) \in M_0 \subset \mathbb{R}^D$, заданную на многообразии M_0.

Произведем замену координат

$$x^i_{P_0} \to x^i = x^i(x^1_{P_0}, x^2_{P_0}, \dots x^D_{P_0}), \qquad i = 1, 2, \dots D,$$

$$\det \| \partial x^i_{P_0} / \partial x^k \| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, \dots D,$$

$$g^*_{ik}(\mathcal{P}^D) \to g_{ik}(x) = \frac{\partial x^l_{P_0}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j_{P_0}}{\partial x^k} g^*_{lj}(\mathcal{P}^D). \tag{4.3.12}$$

Полагая

$$x^i = x^i(P), \qquad x'^i = x^i(P_0), \qquad i = 1, 2, \dots D, \tag{4.3.13}$$

перепишем (4.3.11) в виде

$$\sigma(P_0, P) = \sigma(x', x) = \frac{1}{2} S^2(x', x), \tag{4.3.14}$$

$$S(x, x') = \int\limits_{\mathcal{L}_{[x'x]}} \sqrt{g_{ik}(x) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau}}\, d\tau.$$

Здесь интегрирование производится вдоль отрезка $\mathcal{L}_{[x'x]}$ геодезической, соединяющей между собой точки с координатами x и x'. В том, что интегрировать следует вдоль геодезической $\mathcal{L}_{x'x}$, определяемой уравнениями (2.1.2)-(2.1.4) как экстремаль функционала (2.1.7), можно убедиться следующим образом. Найдем дифференциальное уравнение для экстремалей выражения (4.3.11), рассматриваемого как функционал от $x^i_{P_0}(\tau)$. Легко убедиться, что (4.3.9) является решением этого уравнения и, следовательно, экстремалью функционала (4.3.11). Таким образом, интеграл (4.3.11) вычисляется вдоль экстремали. Поскольку экстремаль инвариантна относительно замены переменных, то вычисление интеграла (4.3.14), полученного из (4.3.11) с помощью замены переменных, тоже следует производить вдоль экстремали.

После замены переменных (4.3.12) связь координат с точкой P_0 утрачивается. Мировая функция (4.3.14) полностью определяется точками x, x' и зависимостью метрического тензора g_{ik} от координат.

Сравнивая (4.3.14) с (2.1.2)-(2.1.8), легко видеть, что мировая функция (4.3.14) описывает D-мерное риманово пространство.

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 4.3.1 . *Для того, чтобы всюду непрерывное σ-пространство $V = \{\sigma, M_0\}$ было D-мерным римановым σ-пространством достаточно, чтобы σ-пространство $V = \{\sigma, M_0\}$ порождало D-мерное евклидово σ-пространство*

$V^*_{P_0} = \{\sigma^*_{P_0}, M_0\}$ в каждой точке $P_0 \in M_0$, и отображение $V \to V^*_{P_0}$ было геодезическим, т.е. чтобы были выполнены условия (i)-(iii) и I-V теоремы 4.2.3.

Замечание. Возможно что теорема 4.3.1 верна и в том случае, когда σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ является всюду плотным σ-пространством. Однако, пока не удалось доказать это.

Обратная теорема выглядит следующим образом.

Теорема 4.3.2 . *Всюду плотное D-мерное риманово σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ порождает D-мерное евклидово σ-пространство $V^*_{P_0} = \{\sigma^*_{P_0}, \Omega\}$ в каждой точке $P_0 \in \Omega$, и отображение $V \to V^*_{P_0}$ является геодезическим, т.е. выполняются условия (i)-(iii) и I-V теоремы 4.2.3,*

Замечание. Для случая, когда D-мерное риманово σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ является всюду непрерывным, а множество Ω является многообразием, теорема доказывалась в конце третьего раздела второй главы. В данном случае мы повторяем выкладки, отбросив условие непрерывности и ограничившись менее жестким условием плотности множества Ω. По существу, утверждается следующее. Если для D-мерного риманова пространства, заданного на многобразии M_0, определить мировую функцию, а затем изъять из многообразия M_0 часть его точек, превратив M_0 в M и сохранив для оставшихся точек мировую функцию, то возникшее риманово σ-пространство $V = \{\sigma, M\}$ сохраняет способность риманова пространства порождать в каждой точке касательное к нему евклидово пространство и геодезическое отображение на него при условии, что оставшихся точек достаточно много и M является плотным в каждой точке. Если же сначала изъять точки из M_0, превратив его в M, а затем попытаться определить мировую функцию, то вопрос определения мировой функции и построения геодезического отображения на M остается открытым, поскольку построение мировой функции риманова пространства определено надлежащим образом только для многообразия. Иначе говоря, требование непрерывности для риманова пространства не есть существенное геометрическое условие, связанное с особенностями риманова пространства, а чисто формальное требование, связанное с проблемой построения мировой функции на основе метрического тензора.

Пусть M_0 есть многообразие, а M есть многообразие с выколотыми отдельными точками. Множество выколотых точек может быть более мощным, чем множество M, однако, если выкалывание производится так, что M остается всюду плотным, то такое многообразие с выколотыми точками с физической точки зрения почти не отличается от многообразия M. Дело в том, что нет физического процесса или физического явления, где использование M приводит к наблюдаемым результатам, отличным от тех, к которым привело бы использование M_0. Между тем математическое различие очень велико. Множество M_0 непрерывно, а M, вообще говоря, – нет. С физической точки зрения нет разницы между непрерывным и дискретным, но достаточно плотным пространством.

В связи со сказанным выше представляется разумным определить D-мерное риманово σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ как σ-пространство, способное порождать в каждой точке $P \in \Omega$ D-мерное евклидово σ-пространство $V_P^* = \{\sigma_P^*, \Omega\}$ и геодезическое отображение $V \to V_P^*$ на него.

Доказательство теоремы 4.3.2. Пусть $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть D-мерное риманово σ-пространство. Предполагается, что все точки множества Ω могут быть пронумерованы с помощью координат $x = \{x^i\}$, $i = 1, 2, \dots D$ из некоторой области $M \subset \mathbb{R}^D$. Область M определения координат всюду плотна в смысле определений 4.1.12, 4.1.13, а мировая функция есть дифференцируемая функция координат. Производные по координатам можно вычислить, поскольку существуют бесконечные последовательности точек, сходящиеся к любой точке $P \in \Omega$ и соответственно к любой точке $x = x(P) \in M$. Всякий луч геодезической $\mathcal{L}_{(P_0 P} \subset \Omega$ будем рассматривать как усеченный T-луч в σ-пространстве V. Он описывается уравнениями

$$\mathcal{L}_{(P_0 P}: \qquad \sigma_{i'}(x', x'') = \tau'' \sigma_{i'}(x', x), \qquad i = 1, 2, \dots D$$

$$x' = x(P_0), \qquad x = x(P), \qquad x'' = x(P''), \qquad P'' \in \mathcal{L}_{(P_0 P}, \tag{4.3.15}$$

$$\tau'' = \mid \sigma(x', x'')/\sigma(x', x)|^{1/2} \geq 0$$

Убедимся в выполнении условий (i)-(iii) и I-V теоремы 4.2.3. Для бесконечно малого значения τ'' соотношение (4.3.15) принимает вид

$$\mathrm{d}x'^i = x''^i - x'^i = \left[\sigma^{k'i''}(x', x'')\right]_{x''=x'} \tau'' \sigma_{k'}(x', x) = -g^{i'k'} \sigma_{k'}(x', x) \tau'' \tag{4.3.16}$$

где $\sigma^{k'i''}$ определяется соотношением типа (2.2.28)

$$\sigma^{k'i''} \sigma_{l'i''} = \delta_{l'}^{k'}$$

Обозначим посредством

$$\mathrm{d}_Q x = x(Q(\tau_Q)) - x(P_0), \qquad Q(\tau_Q) \in \mathcal{L}_{(P_0 Q}, \qquad Q \in \Omega$$

$$\mathrm{d}_P x = x(P(\tau_P)) - x(P_0), \qquad P(\tau_P) \in \mathcal{L}_{(P_0 P}, \qquad P \in \Omega \tag{4.3.17}$$

Тогда выражения, входящие под знак пределов (4.2.46) и (4.2.47), могут быть преобразованы с помощью (4.3.16) следующим образом

$$\Gamma(P_0, Q(\tau_Q), P(\tau_P))/(\tau_P \tau_Q) =$$

$$[\sigma(x', x' + \mathrm{d}_Q x) + \sigma(x', x' + \mathrm{d}_P x) - \sigma(x' + \mathrm{d}_P x, x' + \mathrm{d}_Q x)](\tau_P \tau_Q)^{-1} =$$

$$\frac{1}{2}\{g_{i'k'}[\mathrm{d}_Q x^i \mathrm{d}_Q x^k + \mathrm{d}_P x^i \mathrm{d}_P x^k - (\mathrm{d}_P x^i - \mathrm{d}_Q x^i)(\mathrm{d}_P x^k - \mathrm{d}_Q x^k)]\}(\tau_P \tau_Q)^{-1} =$$

$$(g_{i'k'} \mathrm{d}_P x^i \mathrm{d}_Q x^k)(\tau_P \tau_Q)^{-1} \tag{4.3.18}$$

$$\frac{\Gamma(P_0, Q(\tau_Q), P)}{\tau_Q} = \frac{\sigma(x', x) + \sigma(x', x' + \mathrm{d}_Q x) - \sigma(x' + \mathrm{d}_Q x, x)}{\tau_Q} =$$

$$-\sigma_{i'}(x',x)\mathrm{d}_Q x^i/\tau_Q \qquad (4.3.19)$$

Используя выражения (4.3.15)-(4.3.19) для вычисления пределов (4.2.46), (4.2.47), получаем

$$(\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0Q}) = \sigma_{i'}(x',x(P))g^{i'k'}\sigma_{k'}(x',x(Q)) \qquad (4.3.20)$$

$$(\mathbf{u}_{P_0Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \sigma_{i'}(x',x(P))g^{i'k'}\sigma_{k'}(x',x(Q)) \qquad (4.3.21)$$

Из (4.3.20), (4.3.21) следует выполнение условий (ii), (iii) и II теоремы 4.2.3. Выполнение условия (i) следует из предположения теоремы о плотности V в любой точке $P_0 \in \Omega$. Выражение (4.2.49) (условие III теоремы 4.2.3) получается из (4.3.20), если принять во внимание , что в (4.2.49) в качестве координат $x(P)$ точки P используются прямолинейные координаты $x_i^*(P)$ в евклидовом σ-пространстве $V_{P_0}^*$, определяемые соотношением (4.2.11), т.е. в силу (4.3.20) из (4.2.11) следует

$$x_i^*(P) \equiv (\mathbf{u}_{P_0P_i}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = \sigma_{l'}(x',x(P_i))g^{l'k'}\sigma_{k'}(x',x(P)), \qquad (4.3.22)$$

$$i = 1,2,\dots D,$$

$$x_i^*(P_k) \equiv g_{ik}^*(\mathcal{P}^D) = \tilde\sigma_{l'i}g^{l'k'}\tilde\sigma_{s'k}, \qquad i,k = 1,2,\dots D, \qquad (4.3.23)$$

где использовано обозначение

$$\tilde\sigma_{l'i} \equiv \sigma_{l'}(x',x(P_i)), \qquad l,i = 1,2,\dots D \qquad (4.3.24)$$

Пусть $\tilde\sigma^{l'i}$ есть матрица, обратная матрице (4.3.24). Тогда

$$g^{*ik}(\mathcal{P}^D) = \tilde\sigma^{l'i}g_{l's'}\tilde\sigma^{s'k}, \qquad i,k = 1,2,\dots D. \qquad (4.3.25)$$

Подставляя (4.3.22) и (4.3.25) в (4.2.49) получаем после упрощения соотношение (4.3.20). Условие I теоремы 4.2.3 об экстремальности геодезической $\mathcal{L}_{(P_0P}$ выполнено, так как геодезическая определяется любыми двумя своими точками и сечение ее всегда есть точка, т.е. оно минимально.

Докажем выполнение (4.2.50) (IV условие теоремы 4.2.3). Примем во внимание, что в римановом пространстве мировая функция удовлетворяет уравнению (2.1.11):

$$\sigma_{i'}g^{i'k'}\sigma_{k'} = 2\sigma \qquad (4.3.26)$$

Пусть при парметризации геодезической $\mathcal{L}_{P_0P}$ точкам P_0, P и $P'' \in \mathcal{L}_{P_0P}$ соответствуют значения параметра τ соответственно: 0, 1 и τ'' и выполнено уравнение (4.3.15). С помощью (3.1.6) и (4.3.2) получаем

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}'') = \frac{1}{2}\sigma_{l'}(x',x)g^{l's'}\sigma_{s'}(x',x)[1+\tau''^2-(1-\tau'')^2] =$$

$$\tau''\sigma_{l'}(x',x)g^{l's'}\sigma_{s'}(x',x) \qquad (4.3.27)$$

С помощью (4.3.15), (4.3.20) и (4.3.21) это можно записать в виде

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}'') = \sigma_{l'}(x', x)g^{l's'}\sigma_{s'}(x', x'') = (\mathbf{u}_{P_0P}.\mathbf{u}_{P_0P''}), \qquad P'' \in \mathcal{L}_{P_0P} \qquad (4.3.28)$$

Тем самым доказано выполнение условия (4.2.50).

Выполнение условия V теоремы 4.2.3 очевидно, так как в римановом пространстве интервал S определяется в виде интеграла (4.3.2) вдоль геодезической, задающей геодезический луч $\mathcal{G}^{*}_{P_0P}$, и удовлетворяет уравнениям (3.1.59), (3.1.61) для сегментов трубки $\mathcal{T}_{P_0P}$, определяющим T-луч $\mathcal{T}_{(P_0P}$.

Доказав выполнение условий (i)-(iii), I-V, мы тем самым доказали необходимость порождения $V^{*}_{P_0}$ римановым σ-пространством V. Теорема доказана.

Глава 5

Т-геометрия на многообразии

В этой главе рассматривается специальный случай Т-геометрии, когда мировая функция и, следовательно, геометрия задаются на многообразии, но мировая функция не удовлетворяет системе уравнений (2.2.41), которой удовлетворяет мировая функция любого риманова пространства. Геометрия оказывается неримановой и невырожденной. Число таких неримановых геометрий очень велико и описывается функцией дисторсии $D(x, x')$, которая является функцией от двух точек. Даже в очень специальной случае, когда геометрия является однородной и изотропной, число невырожденных (неримановых) геометрий описывается функцией одного аргумента, что значительно превышает число однородных и изотропных римановых геометрий, описывемых одним параметром – кривизной.

В собственно римановой геометрии геодезическая является трубкой первого порядка, и не возникает вопроса, какой из двух математических инстументов (многообразие или ЕГО) является предпочтительным, поскольку оба они дают один результат. В случае неримановой геометрии на многообразии мы принимаем, что мировая функция и порождемые ею ЕГО являются первичными геометрическими структурами, тогда как многообразие и такой его атрибут как линия являются вторичными геометрическими структурами и не имеют прямого отношения к геометрии, поскольку возможность введения многообразия определяется видом мировой функции, и введение многообразия не налагает на геометрию никаких новых ограничений сверх тех, которые налагаются видом мировой функции. Вообще говоря, утверждение, что ЕГО являются первичными структурами, бессодержательно, пока геометрия обсуждается как абстрактная концепция вне связи ее с реальным миром.

Это утверждение обретает смысл лишь тогда, когда рассматривается реальная геометрия, например, геометрия пространства-времени. В этом случае утверждение, что мировая функция и порожденные ей трубки являются первичными геометрическими структурами, означает, что физические явления, которые описывались линиями в геометрии Минковского, должны в невырожденной модели пространства-времени описываться трубками или их элементами. Например, движение малой частицы, описываемое мировой линией в модели Минковского, должно описываться в невырожденной модели в терминах трубок (а не линий). Это важное утверждение основано на уверенности, что в основе физики и механики лежит геометрия. Применительно к невырожденной геометрии пространства-времени оно означает, что линии не имеют прямого отношения к пространству-времени и являются реальными геометрическими объектами лишь постольку и тогда, поскольку и когда они одновременно являются ЕГО. Применительно к пространству-времени различие между Т-геометрией (метрической концепцией геометрии), где геометрическими структурами являются ЕГО, и дифференциальной геометрией, где геометрическими структурами являются атрибуты многообразия, проявляется уже в модели Минковского. Времениподобные прямые в модели Минковского суть ЕГО, т.е. они являются одновременно геометрическими структурами дифференциальной геометрии и Т-геометрии. Пространственноподобные прямые не являются ЕГО, т.е. будучи структурами дифференциальной геометрии, они не являются геометрическими структурами Т-геометрии. Времениподобные прямые описывают мировые линии реальных свободных частиц, тогда как пространственноподобные прямые не описывают никаких реальных физических явлений. С этой точки зрения метрическая концепция геометрии (Т-геометрия) является предпочтительней, чем дифференциальная геометрия, так как ее геометрические структуры адекватны реальным физическим явлениям. Далее мы увидим, что учет дисторсии подтверждает и усиливает тот тезис, что реальное пространство-время следует описывать в терминах геометрических структур Т-геометрии, и геометрией реального пространства-времени является именно Т-геометрия, не дифференциальная геометрия.

Вместе с тем математический аппарат современной физики и механики тесно связан с понятием многообразия и таким его атрибутом, как линия. Математический аппарат невырожденной геометрии разработан в настоящее время недостаточно. В такой ситуации представляется разумным использование многообразия и приспособленного к нему математического аппарата в качестве основного математического инструмента при рассмотрении пространственно-временны́х моделей с малой невырожденностью (дисторсией). При этом эффекты, порожденные дисторсией, рассматриваются как эффекты, обусловленные воздействием некоторого физического поля (или полей). В пространственно-временно́й модели с невырожденной геометрией масса частицы становится геометрической величиной, и описание движения частицы полностью геометризуется. Помимо этого в результате воздействия дисторсии движение микрочастиц становится стохастическим, и это является главным результатом учета дисторсии (невырожденности геометрии). Появление в геометрии случайных структур приводит к необходимости статистического описания этих структур. В результате статистическое описание оказывается неотъемлемой частью невырожденной геометрии пространства-времени.

Адекватная модель пространства-времени всегда была важнейшим условием эффективного развития физики. Однако, до последнего времени не существовало проблемы выбора адекватной модели для однородного и изотропного пространства-времени, так как модели Минковского просто не было альтернативы (если не считать экзотических моделей типа стохастического [30, 31] пространства-времени). С возникновением невырожденной геометрии такая проблема возникла, т.к. оказалось, что имеется много однородных и изотропных моделей пространства-времени, различающихся дисторсией. Кроме того оказалось, что в моделях с ненулевой дисторсией мировые трубки свободных частиц являются стохастическими. В то же время известно, что движение микрочастиц является стохастическим в том смысле, что точные эксперименты с отдельными микрочастицами не воспроизводимы. В подобной ситуации выбор модели Минковского является неудачным, так как в этой модели нет естественной геометрической стохастичности, и наблюдаемые квантовые эффекты приходится объяснять с помощью некоторой дополнительной концепции, известной как квантовая теория. Представляется более правильным пересмотреть выбор модели пространства-времени. Следует выбрать модель с ненулевой дисторсией таким образом, чтобы порожденная дисторсией естественная геометрическая стохастичность объясняла квантовую стохастичность и наблюдаемые квантовые эффекты по возможности без всяких дополнительных предположений. Физика существенно выиграет в простоте и логичности, если удастся объяснить все квантовые эффекты (или большинство из них) как результат естественной геометрической стохастичности, порожденной свойствами пространства-времени.

Выбирая адекватную модель пространства-времени, мы существенно используем условие того, что статистическое описание естественной геометрической стохастичности в выбранной модели совпадает квантовым описанием в модели Минковского.

В первом параграфе аппарат дифференциальной геометрии применяется для исследования невырожденной геометрии на многообразии и, в частности, для определения свойств дисторсии. Во втором параграфе рассматривается движение частиц в однородном и изотропном пространстве-времени с ненулевой дисторсией. Третий параграф посвящен рассмотрению особенностей статистического описания случайных линий. В четвертом параграфе рассматривается связь между квантовым и статистическим описаниями. В пятом параграфе показано, что статистическое описание случайных мировых трубок микрочастицы совпадает с квантовым описанием с помощью уравнения Шредингера, если интегральную дисторсию пространства-времени связать надлежащим образом с квантовой постоянной $\hbar$ [28, 29]. В шестом параграфе обсуждаются некоторые концептуальные вопросы, связанные с использованием понятий индивидуального и среднестатистического объекта.

5.1 Мировая функция на многообразии. Простейшие обобщения риманова пространства.

Если в качестве множества, на котором задается σ-пространство, используется D-мерное многообразие M, то тем самым на свойства σ-пространства $V = \{\sigma, M\}$ накладываются некоторые ограничения. Изучим свойства σ-пространства, определяемого произвольной дифференцируемой мировой функцией $\sigma(x, x')$, заданной на D-мерном многообразии.

Пусть σ-пространство $V = \{\sigma, M\}$ задано на D-мерном многообразии M . Многообразие M вносит в σ-пространство некоторую внутреннюю структуру, позволяющую, в частности, проводить одномерные линии на M . Пусть

$$\det \parallel \sigma_{ik'} \parallel \equiv \det \parallel \frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^i \partial x'^k} \parallel \neq 0, \tag{5.1.1}$$

Рассмотрим систему из D уравнений

$$\sigma_{i'}(x, x') = \tau \sigma_{i'}(x'', x') = \tau b_{i'}, \qquad \sigma_{i'} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^i} \sigma(x, x'), \qquad \tau \geq 0 \tag{5.1.2}$$

$$i' = 1, 2, \dots D, \qquad x' = x(P_0), \qquad x = x(P), \quad x'' = x(P'')$$

относительно переменных x, где τ - параметр, а $b_{i'}$ - вектор в точке x' в некоторой системе координат K. В силу (5.1.1) система уравнений (5.1.2), рассматриваемая относительно $x^i = x^i(P)$, разрешима. Ее решение имеет вид

$$\mathcal{G}^*_{[P_0 P'']}: \qquad x^i = x^i(\tau, b_k), \qquad i = 1, 2, \dots D; \qquad \tau \geq 0 \tag{5.1.3}$$

и описывает определенный соотношением (4.1.30) геодезический луч $\mathcal{G}^*_{[P_0 P'']}$, в евклидовом пространстве $E_{x'}$, касающемся риманова пространства V в точке x'. Чтобы показать это продифференцируем (5.1.2) по τ, рассматривая x как функцию параметра τ. Получаем

$$\sigma_{i'k}(x, x') \frac{dx^k}{d\tau} = \sigma_{i'}(x'', x') = b_{i'}, \qquad \sigma_{i'k} \equiv \sigma_{ki'} \equiv \frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x'^i \partial x^k} \tag{5.1.4}$$

Дифференцируя еще раз по τ, получим

$$\sigma_{i'k} \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \sigma_{i'kl} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0, \qquad \sigma_{i'kl} \equiv \partial_l \sigma_{i'k}(x, x') \tag{5.1.5}$$

Введем обозначение (2.2.17), заменяя в нем G на σ

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{kl}(x, x') = \sigma_{kls'} \sigma^{is'} \tag{5.1.6}$$

где $\sigma^{ik'}$ определяется соотношением (2.2.7) ($G = \sigma$)

$$\sigma_{kl'} \sigma^{il'} = \delta^i_k, \tag{5.1.7}$$

Тогда уравнение (5.1.5) можно записать в виде

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}=0,\qquad i=1,2,\ldots D; \tag{5.1.8}$$

Как мы видели в разделе 2.2, Γ^i_{kl} есть символ Кристоффеля для некоторого евклидова пространства $E_{x'}$ (формула (2.2.18). Метрический тензор G_{ik} в точке x евклидова пространства $E_{x'}$ задается соотношением

$$G_{ik}=G_{ik}(x,x')=\sigma_{il'}g^{l'j'}\sigma_{kj'}=\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^{x'}_i\tilde{\nabla}^{x'}_k(\sigma_{l'}g^{l'j'}\sigma_{j'}) \tag{5.1.9}$$

где $g^{l'j'}$ есть контравариантный метрический тензор в точке x', а ковариантный метрический тензор задается соотношением (2.2.9) ($G=\sigma$)

$$g_{i'k'}=-[\sigma_{ik'}]_{x=x'}. \tag{5.1.10}$$

Символ $\tilde{\nabla}^{x'}_i$ означает касательную производную по x^i с параметром x' (2.2.18), т.е. ковариантную производную с символом Кристоффеля (5.1.6). Легко проверить, что соотношение

$$\Gamma^i_{kl}(x)=\frac{1}{2}G^{ij}(G_{lj,k}+G_{jk,l}-G_{kl,j}), \tag{5.1.11}$$

связывающее символ Кристоффеля с метрическим тензором G_{ik} в $E_{x'}$ выполняется в силу (5.1.9) и (5.1.6).

Поскольку в $E_{x'}$ как и в любом римановом пространстве, касательный метрический тензор связан с мировой функцией $\sigma^*_{P_0}=\sigma^*_{x'}$ пространства $E_{x'}$ соотношением (2.2.34)

$$\tilde{\nabla}^{x'}_i\tilde{\nabla}^{x'}_k\sigma^*_{P_0}(x,x')=G_{ik}, \tag{5.1.12}$$

то сравнивая (5.1.12) с (5.1.9) и интегрируя, получаем

$$\sigma^*_{P_0}(x,x')=\frac{1}{2}\sigma_{l'}g^{l'j'}\sigma_{j'}. \tag{5.1.13}$$

Для риманова пространства справедливо уравнение (2.2.39), которое вместе с (5.1.13) влечет за собой

$$\sigma(x,x')=\sigma^*_{P_0}(x,x')=\sigma^*_{x'}(x,x'), \tag{5.1.14}$$

которое верно, когда x' суть координаты точки P_0.

Мировая функция в $E_{x'}$ между точками x и x'' может быть представлена в виде

$$\sigma^*_{P_0}(x,x'')=\frac{1}{2}\{\sigma_{i'}(x',x)-\sigma_{i'}(x',x'')\}g^{i'k'}\{\sigma_{k'}(x',x)-\sigma_{k'}(x',x'')\} \tag{5.1.15}$$

Как следует из (5.1.4) и (5.1.9), справедливо соотношение

$$\frac{dx^i}{d\tau}G_{ik}\frac{dx^k}{d\tau}=b_{i'}g^{i'k'}b_{k'}=\text{const} \tag{5.1.16}$$

Из (5.1.8) и (5.1.16) следует, что линия (5.1.3) есть прямая (геодезическая) в $E_{x'}$, проходящая через точки P_0 и P'' с координатами соответственно x' и x''. В соответствии с (4.1.30) геодезический луч $\mathcal{G}^*_{[P_0P''}$ тоже есть полупрямая в евклидовом пространстве $E_{x'}$, выходящая из точки P_0 и проходящая через точку P''. Таким образом, уравнение (5.1.2) описывает множество геодезических лучей $\mathcal{G}^*_{[P_0P''}$ в $E_{x'}$, исходящих из точки P_0.

Задание σ-пространства $V = \{\sigma, M\}$ на D-мерном многообразии $M \subset \mathbb{R}^D$ обеспечивает возможность одно-однозначного отображения $f_{P_0} : V \to V^*_{P_0}$, $P_0 \in M$ на D-мерное евклидово пространство $V^*_{P_0} = \{\sigma^*_{P_0}, M\}$ для любой точки $P_0 \in M$

$$f_{P_0}: \quad \sigma(P,Q) \to \sigma^*_{P_0}(P,Q), \qquad P,Q \in M, \qquad P_0 \in M, \qquad \sigma, \sigma^*_{P_0} \in \mathbb{R}$$

Возможно также обратное отображение

$$f^{-1}_{P_0}: \qquad V^*_{P_0} \to V, \qquad P_0 \in M.$$

$$f^{-1}_{P_0}: \quad \sigma^*_{P_0}(P,Q) \to \sigma(P,Q), \qquad \forall P,Q \in M, \qquad P_0 \in M, \qquad \sigma, \sigma^*_{P_0} \in \mathbb{R}$$

Наконец, σ-пространство $V = \{\sigma, M\}$ порождает преобразования вида

$$f_{P_1} f^{-1}_{P_0}: \qquad V^*_{P_0} \to V^*_{P_1}, \qquad P_0, P_1 \in M,$$

$$f_{P_1} f^{-1}_{P_0}: \quad \sigma^*_{P_0}(P,Q) \to \sigma^*_{P_1}(P,Q), \qquad \forall P,Q \in M, \qquad P_0, P_1 \in M, \qquad \sigma^*_{P_1}, \sigma^*_{P_0} \in \mathbb{R}$$

т.е. преобразования D-мерного евклидова пространства $V^*_{P_0}$ в D-мерное евклидово пространство $V^*_{P_1}$. Поскольку в этом преобразовании свойства многообразия никак не задействованы, то можно надеяться, что изучая свойства преобразований вида $f^{-1}_{P_0} f_{P_1}$, можно отделить свойства σ-пространства $V = \{\sigma, M\}$ как геометрического построения, от свойств, привнесенных многообразием M.

Выясним в какой степени система геодезических лучей на многообразии определяет мировую функцию. Пусть мировая функция $\tilde{\sigma}$ определяет ту же систему геодезических лучей, что и σ, т.е. система уравнений

$$\tilde{\sigma}_{i'}(x,x') = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}_{i'}(x'',x') = \tilde{\tau} b_{i'}, \qquad \tilde{\tau} \geq 0 \tag{5.1.17}$$

имеет те же решения (5.1.3), что и система (5.1.2) при всех значениях x' и x'', отличаясь, быть может, только способом параметризации. Тогда

$$\tilde{\sigma}_{i'}(x'',x') = A\sigma_{i'}(x'',x'), \qquad A = A(x',x''), \qquad x',x'' \in M) \tag{5.1.18}$$

Соотношение (5.1.18) возможно лишь в том случае, если

$$A = 1 + D'(\sigma), \qquad \tilde{\sigma} = \sigma + \int_0^{\sigma} D'(\sigma')d\sigma' = \sigma + D(\sigma)$$

где $1 + D'$ есть неотрицательная функция своего аргумента. Если σ есть мировая функция риманова прстранства, удовлетворяющая уравнению (4.3.26), то $\tilde{\sigma}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\sigma}_{i'}\tilde{g}^{i'k'}\tilde{\sigma}_{k'} = q(\tilde{\sigma}), \qquad \tilde{g}_{i'k'} = -[\tilde{\sigma}_{ik'}]_{x=x'} = [1 + D'(0)]^2 g_{i'k'} \tag{5.1.19}$$

где функция $q(\tilde{\sigma})$ определяется из уравнения

$$2\sigma \cdot \left(\frac{1 + D'(\sigma)}{1 + D'(0)}\right)^2 = q(\tilde{\sigma}) = q[\sigma + D(\sigma)] \tag{5.1.20}$$

Если $D'(\sigma) \neq 0$, то $\tilde{\sigma}$ уже не является мировой функцией риманова пространства.

Теорема 5.1.1 *Система геодезических лучей (5.1.2) на многообразии определяет мировую функцию σ с точностью до произвольного неотрицательного множителя, зависящего от σ*

Будем называть величину $D(\sigma)$ функцией дисторсии (искажения) риманова пространства.

В применении к пространству-времени важным является случай, когда производная функции дисторсии отлична от нуля только в малой области $0 < \sigma < \sigma_0$

$$D'(\sigma_R) = \alpha(\sigma_R), \qquad 0 < \sigma_R < \sigma_0 \tag{5.1.21}$$
$$D'(\sigma_R) = 0, \qquad \sigma_R < 0, \qquad \sigma_R > \sigma_0$$

где σ_R есть мировая функция риманова пространства R. Тогда

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \sigma_R + d, & \sigma_0 < \sigma_R \\ \sigma_R + D(\sigma_R), & 0 \leq \sigma_R < \sigma_0 \\ \sigma_R, & \sigma_R < 0 \end{cases}, \tag{5.1.22}$$

$$D(\sigma_R) = \int\limits_0^{\sigma_R} \alpha(x)dx, \qquad d = D(\sigma_0) = \text{const} \tag{5.1.23}$$

Постоянную d условимся называть глобальной (интегральной) дисторсией риманова пространства. Если $d \ll \sigma_R$, то интервал

$$(2\tilde{\sigma})^{1/2} = [2(\sigma_R + d)]^{1/2} \cong (2\sigma_R)^{1/2}\left(1 + \frac{d}{2\sigma_R}\right) \tag{5.1.24}$$

мало отличается от интервала риманова пространства.

Заметим, что в случае (5.1.21) изучение влияния интегральной дисторсии на σ-пространство с помощью разложения его мировой функции $\tilde{\sigma}(x, x')$ по степеням $x - x'$ мало эффективно, поскольку интегральная дисторсия не чувствительна к детальной структуре функции α в (5.1.21).

Пусть однородное и изотропное σ-пространство $V = \{\sigma, M\}$, $M = \mathbb{R}^n$, $n > 2$ связано с псевдоевклидовым пространством $E = \{\sigma_E, M\}$ с помощью соотношения

$$\sigma = \sigma_E + D(\sigma_E) \tag{5.1.25}$$

(5.1.22), где σ_E есть мировая функция псевдоевклидова пространства, а D есть функция дисторсии. Предположим, что времениподобные трубки псевдоевклидова пространства E экстремальны, т.е. имеется одно времениподобное измерение и $n-1$ пространственноподобных. Рассмотрим сегмент времениподобной трубки $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ в V (рис. 5.1.1). Пусть τ – параметр вдоль $\mathcal{T}_{[P_0P_1}$, принимающий значения 0 и 1 соответственно в точках P_0 и P_1, так что

$$S(P_0,P_1)=S, \qquad S(P_0,P)=\tau S, \qquad S(P,P_1)=(1-\tau)S, \tag{5.1.26}$$

где $S=(2\sigma)^{1/2}$ есть интервал, измеренный в V. Пусть интервал S_E, измеренный в псевдоевклидовом пространстве E, есть

$$S_E=g(S), \tag{5.1.27}$$

где S есть интервал, измеренный между теми же точками в V, причем в соответствии с (5.1.22) функция g связана с функцией дисторсии D соотношением

$$\frac{1}{2}S^2=\frac{1}{2}g^2(S)+D[\frac{1}{2}g^2(S)]. \tag{5.1.28}$$

Пусть P - точка на $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, определяемая (5.1.26) а $P'\in\mathcal{L}_{[P_0P_1]}\subset E$, где $\mathcal{L}_{[P_0P_1]}$ есть отрезок прямой в E между точками P_0 и P_1, причем вектор $\mathbf{P'P}$ ортогонален векторам $\mathbf{P'P}_1$ и $\mathbf{P'P}_0$ в E, что по определению означает

$$\begin{aligned} S_E^2(P',P)+S_E^2(P',P_1)&=S_E^2(P,P_1)\\ S_E^2(P',P)+S_E^2(P',P_0)&=S_E^2(P,P_0). \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

Кроме того точка $P'\in\mathcal{L}_{[P_0P_1]}$ удовлетворяет уравнению

$$S_E(P',P_1)+S_E(P',P_0)=S_E(P_0,P_1)=g(S). \tag{5.1.30}$$

Введем обозначение

$$R_E^2(\tau)=-S_E^2(P',P), \tag{5.1.31}$$

где $R_E(\tau)$ есть радиус трубки $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ в точке P, описываемой параметром τ. Он измерен в псевдоевклидовом пространстве E. Исключая из уравнений (5.1.29) и (5.1.30) величины $S_E(P',P_1)$ и $S_E(P',P_0)$ и используя обозначения (5.1.26), (5.1.31), приходим к уравнению

$$\sqrt{g^2(S\tau)+R_E^2(\tau)}+\sqrt{g^2[S(1-\tau)]+R_E^2(\tau)}=g(S). \tag{5.1.32}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{gathered} R_E^2(\tau)=\frac{1}{4}g^{-2}(S)[g(S)+g(S\tau)+g(S-\tau S)][g(S)-g(S\tau)-g(S-\tau S)]\times \\ [g(S)+g(S\tau)-g(S-\tau S)][g(S)-g(S\tau)+g(S-\tau S)]. \end{gathered} \tag{5.1.33}$$

Выражение (5.1.33) описывает в псевдоевклидовом пространстве E форму сегмента трубки $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Оно существенно упрощается для среднего сечения сегмента, т.е. для $\tau = 1/2$. В этом случае

$$R_{\rm mid} = R_E(1/2) = \sqrt{\frac{1}{4}g^2(S) - g^2(S/2)}. \tag{5.1.34}$$

Применительно к пространству-времени интересным является случай (5.1.21), (5.1.22), когда дисторсия $D(\sigma_E)$ и функция $g(S)$ имеют соответственно вид

$$D(\sigma_E) = \begin{cases} 0, & \sigma_E < 0 \\ \sigma_E d/\sigma_0, & 0 < \sigma_E < \sigma_0 \\ d, & \sigma_0 < \sigma_E \end{cases} \tag{5.1.35}$$

$$S_E^2 = g^2(S) = \begin{cases} \frac{S^2\sigma_0}{(\sigma_0+d)}, & 0 < S^2 < 2(\sigma_0 + d) \\ S^2 - 2d, & 2(\sigma_0 + d) < S^2 \end{cases}, \tag{5.1.36}$$

где d=const есть интегральная дисторсия, а $\sigma_0 > 0$ - некоторая постоянная. В этом случае R_{mid} не зависит от S, в чем легко убедиться, подставляя (5.1.36) в (5.1.34).

Для случая (5.1.36) форма сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ определяется соотношением

$$R_E^2(\tau) = \begin{cases} \tau^2 S^2 \frac{\left(1-\frac{\tau d}{2(\sigma_0+d)}\right)^2}{\left(1-\frac{2d}{S^2}\right)} - \frac{\tau^2 S^2\sigma_0}{(\sigma_0+d)}, & \tau < \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{S} \\ \frac{3d}{2} + 2d\left(\tau - 1/2\right)^2\left(1 - \frac{2d}{S^2}\right)^{-1}, & \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{S} < \tau < 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{S} \\ \left(1-\tau\right)^2 S^2 \left[\frac{\left(1-\frac{(1-\tau)d}{2(\sigma_0+d)}\right)^2}{\left(1-\frac{2d}{S^2}\right)} - \frac{\sigma_0}{(\sigma_0+d)}\right], & 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{S} < \tau < 1 \end{cases}, \tag{5.1.37}$$

Как видно из (5.1.37) функция $R_E(\tau)$ имеет локальный минимум при τ=1/2 и

$$R_E = R_E(1/2) = \sqrt{3d/2} \tag{5.1.38}$$

При $S^2 \gg d$ форма трубки не зависит от S, а зависит только от дисторсии d и параметра τ

$$R_E^2(\tau) = 2d[3/4 + (\tau - 1/2)^2]. \tag{5.1.39}$$

Радиус $R_E(\tau)$ сегмента трубки изменяется в пределах $[(3d/2)^{1/2}, (2d)^{1/2}]$, т.е. изменение довольно слабое (в пределах 15%).

Величина $d^{1/2}$ может рассматриваться как некоторая элементарная длина, характерная для σ-пространства V и проявляющаяся в конечной толщине времениподобных трубок.

5.2 Трубчатая модель пространства-времени и свободные частицы в этой модели.

Традиционно в отсутствии гравитации в качестве модели пространства-времени используется пространство Минковского, т.е. четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1 с сигнатурой $(+,-,-,-)$. Такой выбор можно мотивировать следующим образом. Во-первых, некоторые естественные геометрические объекты пространства Минковского оказываются реальными физическими объектами. Например, мировые линии свободных макроскопических частиц являются трубками первого порядка пространства Минковского. Во-вторых, нет других однородных и изотропных моделей пространства-времени, отличных от пространства Минковского и пространства постоянной кривизны. Иными словами, до появления T-геометрии пространству Минковского просто не было альтернативы.

В то же время мировые линии свободных микрочастиц (электронов, позитронов и т.д.) случайны. Они заведомо не являются характерными геометрическими структурами пространства Минковского. Для описания движения микрочастиц используются принципы квантовой механики. В тоже время идея представить стохастическое движение микрочастиц как естественное проявление свойств пространства-времени кажется очень привлекательной. Мы сильно продвинулись бы в нашем понимании устройства мира, если бы удалось стохастические мировые линии (трубки) микрочастиц представить как геометрические конструкции, построенные из ЕГО. Такой подход представляется простым и естественным, особенно, если при этом не используются дополнительные предположения, или используется минимальное их число.

По-видимому, понимание привлекательности такого подхода существовало всегда, но одновременно существовало понимание того, что такой подход нельзя реализовать в рамках геометрии Минковского без дополнительных предположений о стохастичности или квантовости пространства-времени (стохастическая геометрия [30, 31], или квантовая геометрия).

Появление Т-геометрии приводит к появлению нового класса однородных и изотропных моделей пространства-времени. Для краткости будем называть такие модели трубчатыми моделями. Пространство-время Минковского является только одной из моделей этого класса. Более того геометрия Минковского является вырожденной и поэтому может обладать свойствами отличными от свойств других моделей этого класса. Очень важным является также то обстоятельство, что рассматривая однородные и изотропные модели пространства-времени, отличные от модели Минковского, мы не делаем никаких предположений, нуждающихся в логическом или экспериментальном обосновании, так как модель Минковского есть просто одна из моделей рассматриваемого класса.

Далее мы рассмотрим проблему описания движения частиц в трубчатой модели пространства-времени (пространстве-времени с ненулевой дисторсией). Предполагается, что Т-геометрия пространства-времени может быть задана на четырехмерном многообразии. Пусть $V_4 = \{\sigma, M\}$, $M = \mathbb{R}^4$ есть σ-пространство, которое рассматриватся в качестве модели пространства-времени. Пусть далее $E_4 = \{\sigma_E, M\}$ есть пространство Минковского, заданное на том же многообразии $M = \mathbb{R}^4$. Предполагается, что

$$\sigma = \sigma(P, P') = \sigma_E(P, P') + D[\sigma_E(P, P')], \qquad P, P' \in M \tag{5.2.1}$$

где D - некоторая ограниченная функция такая, что

$$D(0) = 0, \qquad \sigma \leq \sigma_E + d, \tag{5.2.2}$$

где d=const есть интегральная дисторсия (5.1.22).

Пространство Минковского E_4 есть некоторое вспомогательное пространство, ассоциированное с реальным пространством-временем V_4. Все физические явления должны быть сформулированы и истолкованы в терминах σ-пространства V_4. Пространство Минковского E_4 нужно для установления связи между описанием в σ-пространстве V_4 и традиционным описанием в пространстве Минковского.

Хорошо известно, что в специальной теории относительности нет одновременности в пространственно разделенных точках. В то же время в ньютоновской модели пространства и времени одновременность есть, и она является одним из основных понятий. При создании теории относительности возникла необходимость согласования этих двух концепций, поскольку основная масса нерелятивистских явлений описывается с использованием понятия одновременности, а релятивистские эффекты во многих случаях имеют вид малых поправок. Компромисс между ньютоновской концепцией и теорией относительности достигается, как известно, введением относительной одновременности, или одновременности в данной системе отсчета. Эта одновременность различна в разных системах отсчета. Другими словами, с одной стороны одновременность есть, а с другой, она относительна и разная в разных системах отсчета, и по существу ее нет.

С аналогичной ситуацией мы сталкиваемся при описании трубчатой модели пространства-времени. Здесь есть величины и понятия, которых нет в традиционной модели Минковского. В то же время необходимо установить связь между трубчатой моделью V_4 и моделью Минковского E_4 для того, чтобы характерные эффекты трубчатой модели могли рассматриваться как поправки к традиционному описанию в рамках специальной теории относительности. Связь (5.2.1), (5.2.2) между трубчатой моделью и моделью Минковского поможет найти истолкование характерных для трубчатой модели эффектов и явлений.

Пусть $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $P_0, P \in M$ есть времениподобный вектор. Тогда

$$\mu =\mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)}, \qquad \mu_E =\mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid_E = \sqrt{2\sigma_E(P_0, P_1)}, \tag{5.2.3}$$

есть длины вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ соответственно в V_4 и в E_4. Будем трактовать вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ как вектор импульса частицы с массой μ, а сегмент $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ в V_4 как элемент трубки частицы. В ассоциированном пространстве E_4 элемент мировой линии есть сегмент $\mathcal{L}_{[P_0 P_1]}$. Предполагается, что реальная мировая трубка частицы с массой μ представляет собой ломаную трубку

$$\mathcal{T}_{br} = \bigcup_i \mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]} \tag{5.2.4}$$

составленную из сегментов $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$ длины μ.

$$S(P_i, P_{i+1}) = \sqrt{2\sigma(P_i, P_{i+1})} = \mu, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.2.5}$$

Вектор $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ представляет собой импульс частицы на сегменте $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$. Масса частицы является геометрической величиной, так как она может быть определена по форме ломаной трубки $\mathcal{T}_{br}$, заданной соотношением (5.2.4). В самом деле, сечение трубки (5.2.4) представляет собой двумерную сферу радиуса R_E, который определяется соотношением (5.1.33). Сфера вырождается в точку лишь в точках P_i, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и интервал μ между этими точками определяет массу частицы. В случае пространства Минковского трубка $\mathcal{T}_{br}$ вырождается в ломаную линию. Сечением этой линии всюду является одна точка. По виду линии нельзя определить точки P_i, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, интервал между которыми определяет массу μ частицы. Таким образом, в модели Минковского масса не является геометрической характеристикой и не может быть определена по форме мировой линии частицы. В трубчатой модели V_4 масса μ частицы является геометрической характеристикой и может быть определена по форме мировой трубки $\mathcal{T}_{br}$. Масса μ измеряется здесь в единицах длины. Для получния привычной массы, измеряемой в граммах, следует использовать переводной коэффициент

$$m = b\mu, \qquad [b] = \textit{г/см} \tag{5.2.6}$$

где b - универсальная постоянная с размерностью г/см. Численное значение этой постоянной пока не известно, для нее мы получим далее верхнюю границу. Как в трубчатой модели, так и в модели Минковского связь между вектором импульса p_i и массой m имеет традиционный вид

$$p_i p^i = m^2 c^2 \tag{5.2.7}$$

В модели Минковского мировая линия определяет направление импульса p_i, но не его модуль. В трубчатой модели мировая трубка определяет импульс, включая его модуль.

В модели Минковского мировая линия может рассматриваться как состоящая из бесконечно малых элементов. В трубчатой модели нельзя сделать это. Описание (мировая трубка) частицы массы $m = b\mu$ состоит из конечных элементов $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$, уменьшить которые нельзя, так как это приведет к изменению массы частицы. В этом смысле мы сталкиваемся с проявлением неделимости (атомизма), т.е. с проявлением квантовой идеи о невозможности деления мира на сколь угодно мелкие части. Обычно идея о существовании квантов (конечных порций действия) проявляется в несколько иной форме. Это – существование дискретных собственных значений операторов, ответственных за те или иные физические величины. Это – распадение $2N$-мерного фазового пространства на ячейки объема $\hbar^N$. Но все остальное описание остается непрерывным и бесконечно делимым. При традиционном изложении квантовой теории идея квантов привносится в классически построенный мир извне в виде принципов квантовой теории.

В трубчатой модели пространства-времени идея неделимости возникает из предположения о нарушении предположений I-V теоремы 4.2.2, что влечет за собой появление дисторсии и геометризацию массы частицы. Для того, чтобы снять вырождение, заложенное в модели Минковского, достаточно очень малого нарушения предположений I-V. Это влечет за собой неделимость описания частиц и невозможность прямого применения анализа бесконечно малых.

Далее будет использоваться термин приведенный вектор.

Определение 5.2.1 . *Приведенный вектор* $\mathbf{u} = a\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ *в точке* P σ*-пространства* $V = \{\sigma, \Omega\}$ *есть совокупность вещественного числа* $a \in \mathbb{R}$ *и вектора* $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $P_0, P \in \Omega$. *Скалярное* σ*-произведение двух приведенных векторов* $\mathbf{u}$=$a\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{v}$=$b\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ *определяется соотношением*

$$(\mathbf{u}.\mathbf{v}) \equiv (\mathbf{v}.\mathbf{u}) \equiv (a\mathbf{P}_0\mathbf{P}.b\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \equiv ab(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \tag{5.2.8}$$

где скалярное σ*-произведение векторов определяется соотношением (3.1.6).*

В частности, длина приведенного вектора $a\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ есть

$$\mid a\mathbf{P}_0\mathbf{P} \mid = a \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P} \mid \tag{5.2.9}$$

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ является частным случаем приведенного вектора $a\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ при $a = 1$.

В σ-пространстве все свойства векторов определяются его скалярным σ-произведением с другими векторами. Поскольку для приведенного вектора $\mathbf{u}$ определено скалярное σ-произведение (5.2.8), то вектору $\mathbf{u}$ можно приписать все те свойства, какие приписываются вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ на основе скалярного σ-произведения, т.е. параллельность и антипараллельность приведенных векторов.

В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, слово приведенный будет опускаться. Под 4-скоростью частицы в точке P на сегменте $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ понимается приведенный вектор

$$\mathbf{u}(P) = \mid \mathbf{P}_i\mathbf{P} \mid^{-1} \mathbf{P}_i\mathbf{P}, \qquad P \in \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} \tag{5.2.10}$$

Вектор 4-скорости $\mathbf{u}$ есть единичный вектор в V_4, параллельный вектору импульса $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ в V_4 в смысле определения 3.1.8

$$\mathbf{u}(P) \uparrow\uparrow \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1} : \quad (\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}.\mathbf{P}_i\mathbf{P}) \mid \mathbf{P}_i\mathbf{P} \mid^{-1} = \mid \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1} \mid \qquad P \in \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} \tag{5.2.11}$$

Это равенство следует из (3.1.66) и того, что $P \in \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$. Однако вектор 4-скорости $\mathbf{u}$, вообще говоря, не параллелен вектору импульса $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ в пространстве Минковского E_4

$$(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}.\mathbf{P}_i\mathbf{P})_E \mid \mathbf{P}_i\mathbf{P} \mid_E^{-1} \neq \mid \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1} \mid_E, \qquad P \in \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} \tag{5.2.12}$$

т.к., вообще говоря, $P \notin \mathcal{L}_{P_iP_{i+1}}$. Таким образом, векторы, параллельные в V_4, не параллельны в E_4 и наоборот.

Имеется много векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}$ заданной длины, параллельных вектору $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ в V_4 и не параллельных друг другу. В пространстве E_4 имеется только один времениподобный вектор $\mathbf{P}_i\mathbf{P}$ заданной длины, параллельный времениподобному вектору $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$. Существование многих векторов, параллельных вектору импульса $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ и непараллельных между собой, есть причина стохастичности ломаных трубок в V_4.

Действительно, рассмотрим мировую линию свободной частицы в пространстве Минковского. Ее уравнение имеет вид

$$dp_i/d\tau = 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{5.2.13}$$

где p_i - составляющие импульса в некоторой инерциальной системе координат, а τ - параметр вдоль мировой линии. Уравнение (5.2.13) описывает закон инерции, согласно которому импульс p_i переносится параллельно вдоль мировой линиии. Представив прямую в виде ломаной (5.2.4) с длинами звеньев (5.2.5), можно уравнение (5.2.13) переписать в виде

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1} \uparrow\downarrow \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i-1}, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{5.2.14}$$

Уравнение мировой трубки для свободной частицы в виде (5.2.14) может быть использовано и в случае трубчатой модели V_4. Соотношения (5.2.4), (5.2.5), (5.2.14) определяют мировую трубку свободной частицы массы μ.

Заметим, что уравнение (5.2.14) с помощью (5.2.4), (5.2.5) может быть записано в другом виде.

$$P_{i+1} \in \mathcal{T}_{P_iP_{i-1}} \tag{5.2.15}$$

$$S(P_{i-1}, P_{i+1}) = 2\mu, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{5.2.16}$$

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+2}, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{5.2.17}$$

Используя уравнения (3.1.6), (3.1.8), (3.1.9) можно показать, что три системы уравнений
(1): (5.2.5), (5.2.14); (2): (5.2.15), (5.2.16); (3): (5.2.16), (5.2.17) эквивалентны между собой.

В пространстве Минковского система уравнений (5.2.5), (5.2.14) однозначно определяет все точки P_i, $i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, если задано положение двух соседних точек, например, P_0 и P_1, т.е. импульс $\mathbf{p}$, заданный в одном месте мировой линии, определяет всю мировую линию. В трубчатой модели задание одного звена мировой трубки и использование системы уравнений (5.2.5), (5.2.14) не определяет однозначно всей трубки, так как существует много векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ длины μ, антипараллельных вектору $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i-1}$. Вместо этого определяется "дерево трубок", соответствующие разным вариантам выбора звеньев трубки. В этом смысле мировая трубка свободной частицы является стохастической.

Итак, в трубчатой модели V_4 мировая трубка свободной частицы обладает следующими особенностями:
(i) звенья трубки имеют конечную длину и масса является геометрической величиной,
(ii) импульс не параллелен 4-скорости с точки зрения ассоциированного пространства Минковского,
(iii) мировая трубка случайна.
Если дисторсия исчезает $d \to 0$, то трубчатая модель переходит в модель Минковского, и перечисленные особенности вырождаются и исчезают. Упомянутые особенности трубчатой модели в несколько иной форме встречаются в квантовой теории.

Итак, в трубчатой модели описание движения частиц геометризовано больше, чем в модели Минковского, поскольку в трубчатой модели масса частицы является геометрической характеристикой, тогда как в модели Минковского – это некоторый динамический параметр частицы. Нет никакой необходимости рассматривать специальные предположения о стохастичности пространства-времени, так как в трубчатой модели движение свободной частицы изначально является стохастическим, и стохастичность является естественным свойством всякого (а не только свободного) движения частицы. При описании такого стохастического движения в ассоциированном пространстве E_4 мерой стохастичности может служить отклонение угла между векторами $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ и $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i-1}$ от π. Для малых значений этого угла $\Delta\vartheta$ он может быть оценен с помощью соотношений (5.1.34), (5.2.5) в виде

$$\Delta\vartheta = \frac{R_E(1/2)}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i-1}|} = \frac{\sqrt{g^2(\mu) - 4g^2(\mu/2)}}{4\mu} \tag{5.2.18}$$

Используя соотношение (5.1.28) и предполагая, что для больших $\mu \quad g(\mu) \simeq \mu$ and $D(\mu)$ стремится к интегральной дисторсии d, получаем, что соотношение (5.2.18) для больших μ превращается в

$$\Delta\vartheta = \frac{\sqrt{8D(\mu^2/8) - 2D(\mu^2/2)}}{4\mu} = \frac{\sqrt{6d}}{4\mu}, \qquad \mu \gg \sqrt{d} \tag{5.2.19}$$

Из соотношения (5.2.19) следует что стохастичность пропорциональна $\sqrt{d}/\mu$. Она исчезает для большой массы частицы μ или для малой интегральной дисторсии d. Стохастичность квантовых частиц пропорциональна комптоновской длине волны $\hbar/\mu c$. Если принять что интегральная дисторсия d пропорциональна $\hbar$, то зависимость квантовой стохастичности от массы частицы близка к зависимости, порожденной естественной геометрической стохастичностью.

Можно надеяться получить квантовую стохастичность, как проявление естественной геометрической стохастичности.

Таким образом, для объяснения квантовой стохастичности необходимо максимально правильно выбрать модель пространства-времени из класса допустимых моделей. Вряд ли правильно выбрать геометрию Минковского в качестве модели пространства-времени, а затем с помощью дополнительных гипотез вводить в теорию квантовую стохастичность. Кроме того важно понимать, что выбирая трубчатую модель пространства-времени, мы не делаем каких бы то ни было дополнительных предположений, поскольку все равно какую-то модель пространства-времени нужно выбрать. Выбранная модель может оказаться в чем-то неточной или неправильной, и потребуется ее уточнение и коррекция. Но даже при этих условиях трубчатая модель лучше модели Минковского, которая не содержит стохастичности в принципе.

5.3 Динамическая концепция статистического описания

Естественные науки умеют описывать только воспроизводимые явления. При столкновении со стохастическими явлениями т.е. такими явлениями, которые не воспроизводятся в точности при повторных попытках их воспроизвести, принято использовать процедуру, называемую статистическим описанием. Суть статистического описания состоит в том, что вместо отдельной стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ рассматривается набор многих одинаковых независимых стохастических систем $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, где N число частиц в наборе. Если число стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ в наборе очень велико ($N\to\infty$), то этот набор $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, называемый статистическим ансамблем, оказывается детерминированной динамической системой, которая эволюционирует в соответствии с динамическими уравнениями. Все эксперименты со статистическим ансамблем $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ оказываются воспроизводимыми. Вместо изучения свойств стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ изучаются свойства статистического ансамбля $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, и это лучшее, что можно сделать в том случае, когда мы сталкиваемся со стохастическими системами.

Определение 5.3.1 *Статистическое описание стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть замена ее на набор (статистический ансамбль) $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ многих одинаковых независимых стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$.*

Пример 5.3.1. Пусть электрон, вылетевший из электронной пушки, пролетает сквозь узкую щель в диафрагме и попадает на экран в точке x_1. Другой электрон, вылетевший из той же пушки попадает на экран, вообще говоря, в другой точке x_2. Третий электрон попадает в третью точку x_3 и т.д. Чем уже щель, тем больше разброс электронов. Это свидетельствует о том, что каждый отдельный электрон есть стохастическая система $\mathcal{S}_{\rm st}$, поскольку результат эксперимента с отдельным электроном оказывется невоспроизводимым. Если произвести серию из N (N очень велико) экспериментов с отдельным электроном, то полученное распределение $f(x)$ электронов на экране, будет воспроизведено в другой серии из N экспериментов. Воспроизводство распределения $f(x)$ будет тем лучше, чем больше число N электронов в серии. В пределе $N\to\infty$ воспроизводство распределения $f(x)$ электронов на экране будет идеально точным.

Мысленно спроектируем все эксперименты из одной серии в одну и ту же пространственно-временную область, т.е. представим себе, что из электронной пушки одновременно вылетают N независимых и невзаимодействующих между собой электронов. Поскольку все они движутся случайно и по-разному, то они образуют некоторое электронное облако. В пределе $N\to\infty$ это облако превратится в сплошную среду (флюид), которая представляет собой детерминированную динамическую систему $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\rm st}]$. Эта система $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\rm st}]$ обладает всеми атрибутами динамической системы: динамическими переменными, динамическими уравнениями, плотностью, плотностью потока, тензором энергии-импульса и другими атрибутами динамической системы. Если динамические уравнения для системы $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\rm st}]$ известны, то рассчитав с их помощью поток частиц флюида через поверхность экрана, можно вычислить распределение $f(x)$ электронов по поверхности экрана. Таким образом, проблема статистического описания стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$ сводится к определению вида статистического ансамбля $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\rm st}]$, рассматриваемого как динамическая система, т.е. к определению динамических переменных, вида действия, динамических уравнений и других величин для системы $\mathcal{E}[\infty,\mathcal{S}_{\rm st}]$.

Что касается описания стохастического (квантового) поведения электрона, то оно описывается в терминах флюида [32]. Этот флюид описывает эволюцию облака независимых стохастических электронов. Традиционное квантовое описание электрона в терминах волновой функции возникает, если принять во внимание, что волновая функция (и спин) являются атрибутами любой идеальной (недиссипативной) жидкости [33].

Замечание 5.3.1. В нашей картине статистического описания не нашлось места таким понятиям как вероятность, плотность вероятности и амплитуда вероятности. В некоторых случаях эти понятия можно ввести, если в том имеется необходимость, однако это можно сделать не всегда. Вероятностное описание и статистическое описание – это два различных вида описания. Термин "статистический" означает "основанный на рассмотрении большого числа одинаковых объектов", а термин "вероятностный" означает "основанный на теории вероятностей". Это два различных термина, имеющих совершенно разный смысл. В статистической физике статистическое описание физических процессов основано на теории вероятностей и является вероятностным статистическим описанием. Это обстоятельство и ассоциативное мышление привели к тому, что часто термины "статистический" и "вероятностный" воспринимаются как синонимы, а статистическое описание, не использующее теорию вероятностей, воспринимается как нечто невозможное.

Всегда можно рассмотреть большое число одинаковых невзаимодействующих систем (элементов) и тем самым осуществить статистическое описание. Ввести понятие вероятности и плотности вероятности можно далеко не всегда, поскольку плотность вероятности должна удовлетворять определенным условиям, главное из которых неотрицательность плотности вероятности.

Состояние нерелятивистской динамической системы $\mathcal{S}_{\rm nr}$ в некоторый момент времени t определяется набором координат и импульсов $X = \{x, p\}$ и представляет собой точку в фазовом пространстве состояний X. Состояние статистического ансамбля $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\rm nr}]$ есть плотность состояний $\rho(X, t)$, определяемую как коэффициент пропорциональности между числом состояний dN в объеме фазового пространства dX. Величина $\rho(X, t)$ неотрицательна и при надлежащей нормировке может рассматриваться как плотность вероятности. Таким образом, в нерелятивистской физике статистическое описание может рассматриваться как вероятностное описание.

В релятивистской физике фундаментальным физическим объектом является мировая линия (МЛ). Во избежание недоразумений в тех случаях, когда мировая линия рассматривается как фундаментальный физический объект, будет употребляться термин "МЛ" (вместо термина "мировая линия") Частица (или античастица) является производным объектом – это результат сечения МЛ (мировой линии) трехмерной поверхностью t =const. В нерелятивистской физике все наоборот. Точечная частица в трехмерном пространстве является фундаментальным объектом, а мировая линия частицы в пространстве-времени является производным объектом, описывающим историю частицы. Такое различие между релятивистским и нерелятивистским подходами обусловлено тем, что в первом случае нет абсолютной одновременности, а во втором случае она есть. В динамике не очень существенно, что считать фундаментальным объектом, но при статистическом описании стохастических частиц очень важно, что является фундаментальным физическим объектом, т.е. что является объектом статистического описания.

Рассмотрим статистическое описание стохастических МЛ. Плотность МЛ в окрестности точки $x = \{x^i\}, \quad i = 0, 1, 2, 3$ в пространстве-времени определяется как коэффициент пропорциональности j^i между потоком dN МЛ через площадку dS_i

$$dN = j^i dS_i \tag{5.3.1}$$

Плотность j^i МЛ есть 4-вектор, который, вообще говоря, не может быть интерпретирован, как плотность вероятности. Таким образом, в этом случае вероятностное статистическое описание невозможно.

Пусть K есть инерциальная система координат $t, \mathbf{x}$ в пространстве-времени. Сделаем попытку описать стохастические релятивистские МЛ, рассматривая их пересечения с гиперповерхностью $S: \quad t = t_0$ =const как частицы и античастицы. В этом случае в момент времени $t = t_0$ можно ввести плотности вероятности частиц и античастиц. Трудность, однако, в том, что производя вероятностное статистическое описание на базе таким образом введенных вероятностей, мы описываем не только объективно существующие закономерности, но и наш произвольный выбор системы координат K. Чтобы уметь отстроиться от влияния выбора системы координат, нужно уметь описать одну и ту же ситуацию во всех инерциальных системах координат и выделить во всех этих описаниях то общее, что в них будет. Это общее (инвариантное относительно группы преоразований систем инерциальных координат) и будет описанием интересующих нас объективных закономерностей. Рассмотрим другую инерциальную систему координат K' с координатами $x' = \{x'^i\}, \quad i = 0, 1, 2, 3$, движущуюся относительно системы координат K с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Необходимо уметь пересчитать состояние частиц ансамбля, заданное на гиперповерхности $S: \quad t = t_0 =$const в системе координат K, на гиперповерхность $S': \quad t' = t_0 =$const в системе координат K'. Здесь возможны несколько вариантов.

(1) Рассматривается статистическое описание нерелятивистских частиц (детерминированных или стохастических). В этом случае преобразование от системы координат K к системе координат K' есть нерелятивистское преобразование Галилея, при котором поверхности $S: \quad t = t_0 =$const и $S': \quad t' = t_0 =$const совпадают. Для пересчета состояния частиц с S на S' не нужно знать динамических уравнений для частиц. и такой пересчет может быть всегда произведен. В этом случае вероятностное статистическое описание возможно.

(2) Рассматривается статистическое описание детерминированных релятивистских частиц, для которых известны динамические уравнения. В этом случае гиперповерхности S и S' различны, но пересчет с гиперповерхности S на гиперповерхность S' может быть произведен, если использовать для него динамические уравнения, описывающие движение детерминированных частиц. В этом случае вероятностное статистическое описание также возможно, хотя оно будет иметь, по-видимому, нелокальный характер.

(3) Рассматривается статистическое описание стохастических релятивистских частиц, для которых не существует динамических уравнений. В этом случае гиперповерхности S и S' различны, и пересчет состояния стохастических частиц с гиперповерхности S на гиперповерхность S' осуществить невозможно, так как динамических уравнений не существует. В этом случае вероятностное статистическое описание, имеющее дело с объективными закономерностями, невозможно.

Статистическое описание стохастического электрона относится к последнему случаю. Хотя среднее движение стохастических электронов может оказаться нерелятивистским, его хаотическая составляющая всегда является релятивистской, и вероятностное статистическое описание квантовых электронов невозможно. Как уже упоминалось, невозможность вероятностного статистического описания для релятивистских стохастических систем связана с отсутствием абсолютной одновременности в теории относительности и как следствие с тем обстоятельством, что фундаментальным физическим объектом является МЛ (мировая линия), а не точечная частица. Формально это проявляется в том, что плотность состояний релятивистских частиц описывается

4-вектором j^i, который представляет собой обобщение плотности вероятности на релятивистский случай.

Вообще говоря, возможность вероятностного описания свидетельствует о возможности выделения статистически независимых элементов (событий) описания. Выделить статистически независимые элементы (события) возможно, когда эти элементы (фундаментальные физические объекты) являются точками. По-видимому, протяженные и направленные элементы статистического описания (МЛ) не могут быть сделаны статистически независимыми, и в этом причина невозможности вероятностного статистического описания, которое базируется на гипотезе статистической независимости, т.е. на возможности выделения статистически независимых элементов вероятностного описания. Наглядно можно представлять себе это таким образом. Протяженность случайных МЛ приводит к их перепутыванию и невозможности выделить независимые МЛ. Направленность МЛ проявляется в том, что случайные МЛ описывают одновременно частицы и античастицы, разделить которые на независимые элементы не представляется возможным.

Все это вынуждает нас использовать при статистическом описании стохастических мировых трубок динамические (а не вероятностные) конструкции. Несмотря на то, что статистическое описание, построенное на основе динамики, менее детально и информативно, чем вероятностное статистическое описание, приходится идти на это ввиду невозможности вероятностного статистического описания для релятивистских стохастических объектов. В целом постановка задачи о статистическом описании стохастических мировых трубок выглядит следующим образом.

Стохастичность поведения свободных мировых трубок определяется дисторсией (невырожденностью) реальной геометрии пространства-времени и описывается в рамках геометрии Минковского, которая рассматривается как некоторая вспомогательная геометрия (псевдо-геометрия). Плотность случайных трубок $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ в окрестности точки x описывается 4-вектором $j^i(x)$, Статистическое описание случайных трубок будет определено, если известен вид динамической системы (статистического ансамбля) $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, для которой 4-вектор $j^i(x)$ является зависимой динамической переменной. Таким образом, статистическое описание сводится к определению вида динамической системы $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$: функционала действия, динамических уравнений и других ее атрибутов.

Проблема усугубляется тем, что вид функции дисторсии пространства-времени неизвестен. Известно только, что дисторсия не равна нулю. По существу нужно как-то выбрать оптимальный вид функции дисторсии и определить способ построения функционала действия для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ в пространстве-времени с заданной дисторсией. Решение задачи не единственно, и мы зададим некоторые вспомогательные условия, приводящие к единственному решению.

Для определения вида дисторсии пространства-времени нам придется использовать квантовое описание микрочастиц. Такое описание для нерелятивистских микрочастиц хорошо известно, и оно будет использовано при формулировке вышеупомянутых вспомогательных условий.

5.4 Связь статистического описания с квантовым. Общая концепция статистического описания.

Принципиальная возможность перехода от статистического описания к квантовому связана со следующей проблемой. Квантовое описание использует такие понятия как волновая функция и спин. При квантовом описании волновая функция и спин являются фундаментальными объектами в том смысле, что они определяются только своими свойствами с помощью системы аксиом, известной как квантовые принципы, или квантовая аксиоматика. Квантовые принципы предписывают правила работы с волновой функцией и спином. По существу, это – все, что связывает квантовое описание с классической физикой. С точки зрения классической физики такие квантовые объекты как волновая функция и спин выглядят достаточно экзотично.

Сведение статистического описания к квантовому основано на следующем утверждении [33]. Волновая функция и спин являются атрибутами идеальной жидкости (флюида). Они связаны главным образом с кинематикой жидкости и не зависят от уравнения состояния жидкости, при условии, что в жидкости нет диссипации. Мы видели в предыдущем разделе, что статистическое описание сводится к построению динамической системы $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ (т.е. некоторого флюида). Волновая функция и спин являются атрибутами этого флюида. При этом волновая функция и спин оказываются определенными через свойства флюида. Волновая функция существует для любого флюида (недиссипативной жидкости), но динамические уравнения для нее, вообще говоря, нелинейны и достаточно сложны. Однако, можно выбрать уравнение состояния флюида (зависимость внутренней энергии флюида от его плотности) таким образом, чтобы динамические уравнения для волновой функции были линейными и в нерелятивистском приближении совпадали с уравнением Шредингера. В этом случае статистическое описание в терминах флюида будет совпадать с квантовым описанием, которое определяется квантовой аксиоматикой. После этого необходимость в квантовой аксиоматике отпадает, поскольку волновая функция и спин оказываются определенными через свойства квантового флюида, возникающего при статистическом описании случайных мировых трубок.

Мы не будем здесь вникать в детали того, как и почему волновая функция и спин являются атрибутами флюида, отсылая интересующихся к оригинальной работе [33]. Укажем только, что существование волновой функции и спина связано с мощной группой симметрии динамической системы, каковой является любой флюид. Эта группа перемаркировки (relabeling group в англоязычной литературе) описывает перенумерацию частиц флюида, нумеруемых с помощью лагранжевых координат $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$

$$\xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\alpha = \tilde{\xi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \det \parallel \partial\tilde{\xi}_\alpha/\partial\xi_\beta \parallel \neq 0, \qquad \alpha, \beta = 1,2,3 \tag{5.4.1}$$

$$\xi_0 \to \tilde{\xi}_0 = \tilde{\xi}_0(\xi_0) + a_0(\boldsymbol{\xi}), \qquad \partial\tilde{\xi}_0/\partial\xi_0 > 0 \tag{5.4.2}$$

где $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$ криволинейные лагранжевы координаты в пространстве-времени, а $\tilde{\xi} = \{\tilde{\xi}_0, \tilde{\boldsymbol{\xi}}\}$ есть другая система криволинейных лагранжевых координат. $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ и a_0 суть произвольные функции $\boldsymbol{\xi}$. $\tilde{\xi}_0$ есть произвольная функция ξ_0. ξ_0 – временна́я лагранжева координата, а $\boldsymbol{\xi}$ – пространственные.

Течения флюида классифицируются по спину, нумерующему инвариантные подпространства группы (5.4.1).

Далее при получении и исследовании вспомогательных условий, позволяющих установить вид функции дисторсии, мы будем иметь в виду общую идею сведения статистического описания к квантовому, хотя непосредственно использоваться будут более простые и конкретные соображения. Сформулируем теперь вспомогательные условия, позволяющие определить дисторсию пространства-времени.

1. При стремлении дисторсии к нулю функционал действия должен переходить в действие для детерминированных квази-параллельно движущихся релятивистских частиц.

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}] = -\int mc\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}d^4\xi, \qquad x^i \doteq \frac{\partial x}{\partial \xi_0} \equiv \frac{\partial x}{\partial \tau} \tag{5.4.3}$$

где $x^l = x^l(\tau, \boldsymbol{\xi})$, $l = 0,1,2,3$ суть зависимые переменные, рассматриваемые как функции независимых переменных $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$, $\tau = \xi_0$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$. Здесь m, c суть сответственно масса частицы и скорость света, и $g_{ik} = \mathrm{diag}\{c^2, -1, -1, -1\}$ есть метрический тензор. По повторяющимся латинским индексам производится суммирование (0–3). Если $m =$const, динамическая система $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ может рассматриваться как флюид с нулевым давлением. Тогда переменные $x^l = x^l(\tau, \boldsymbol{\xi})$, $l = 0,1,2,3$ описывают положение $\mathbf{x}$ жидких частиц, нумеруемых пространственными лагранжевыми координатами ξ в момент времени $t = x^0(\tau, \boldsymbol{\xi})$, где $\xi_0 = \tau$ есть временна́я лагранжева координата. При этом 4-ток определяется соотношением [32]

$$j^l = J\dot{x}^l \equiv \frac{\partial\left(x^l, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)}, \qquad l = 0,1,2,3, \qquad J \equiv \frac{\partial\left(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} \tag{5.4.4}$$

где переменные $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$, $\tau = \xi_0$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ рассматриваются как функции от пространственно-временных координат x.

2. Дисторсия пространства-времени и ее зависимость от постоянной Планка $\hbar$ выбирается так, чтобы в нерелятивистском приближении описание в терминах флюида $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ было эквивалентно описанию в терминах нерелятивистского уравнения Шредингера.

3. При ненулевой дисторсии действие имеет вид (5.4.3), но масса m уже не постоянная, а функция состояния ансамбля $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\text{st}}]$, определяемая в результате усреднения по состоянию ансамбля. Процедура усреднения принимает во внимание форму сегментов трубки, зависящую от вида функции дисторсии.

Используемая процедура усреднения далека от совершенства и, может быть, возможно предложить альтернативные процедуры, приводящие к другой величине дисторсии. Важно, однако отметить, что процедуру усреднения нельзя применять непосредственно к динамическим уравнениям, так как в этом случае получатся диссипативные динамические уравнения, что представляется совершенно неприемлемым. Дело в том, что диссипативность динамического уравнения для броуновской частицы легко объяснима, так как стохастическая частица обменивается энергией с термостатом. В случае квантовой стохастичности, обусловленной геометрией, термостата просто нет. В этом случае остается предполагать, что квантовая стохастичность влияет только на параметры динамической системы $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\text{st}}]$. Эта система имеет только один параметр массу (скорость света в качестве параметра мы не рассматриваем).

Прежде чем перейти к определению дисторсии сформулируем общую динамическую концепцию статистического описания, основанного на *понятии статистического ансамбля как динамической системы* [34].

Определение 5.4.1 : *Динамическая система $\mathcal{S}$, чье состояние X эволюционирует в соответствии с динамическими уравнениями называется детерминированной динамической системой.*

Определение 5.4.2 : *Динамическая система $\mathcal{S}$ есть недетерминированная динамическая система (стохастическая система), если не существует динамических уравнений, которые определяют эволюцию состояния системы $\mathcal{S}$.*

Замечание 5.3.2. В литературе обычно детерминированную динамическую систему называют динамической системой, а недетерминированную динамическую систему называют стохастической системой. Такая терминология несколько короче, но она обладает тем недостатком, что в ней нет собирательного термина для динамической системы, которая может быть или детерминированной, или стохастической. Такой термин необходим, так как в противном случае пролагается граница между стохастическими и нестохастическими системами, и эта граница пролегает на глубоком (концептуальном) уровне. Вообще, отсутствие необходимых терминов приводит к существенным затруднениям в научном исследовании. Например, отсутствие обозначения для нуля в римской системе записи чисел приводит к крайней ее громоздкости и неудобствам при ее использовании.

Итак, у нас термин динамическая система есть собирательное понятие, обозначающее детерминированную динамическую систему или недетерминированную (стохастическую) динамическую систему.

Характерным свойством стохастической системы является невоспроизводимость экспериментов с ней. Это означает, что повторение измерений одной и той же величины $\mathcal{R}$ в одном и том же состоянии X стохастической системы (т.е. состоянии, полученном одним и тем же способом) даст, вообще говоря, различные величины $R_1, R_2, \ldots$ Практически всякое изучение стохастической системы осуществляется путем сведения ее к детерминированной динамической системе и ее последующему изучению.

Способ сведения регламентируется статистическим принципом.

Статистический принцип. Множество из $N \quad (N \to \infty)$ одинаковых динамических систем $\mathcal{S}$ (стохастических или детерминированных) образует детерминированную динамическую систему $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}]$. Эта система называется статистическим ансамблем. Системы $\mathcal{S}$, образующие ансамбль, называются элементами ансамбля.

Результатом измерения величины $\mathcal{R}$ в ансамбле $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}]$ является распределение $f(R)$, которое является воспроизводимым при повторных измерениях в ансамбле, если даже измерение величины $\mathcal{R}$ для отдельной системы $\mathcal{S}$ ансамбля не воспроизводится,

Статистический ансамбль $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}]$ является полноправной динамической системой. Ему могут быть приписаны все атрибуты детерминированной динамической системы: энергия, количество движения, угловой момент, их плотности, лагранжиан и все другие динамические величины.

Динамические уравнения ансамбля $\mathcal{E}$ не чувствительны к числу N элементов ансамбля, если это число достаточно велико. Используя эту независимость динамических уравнений от N, можно формально положить $N = 1$ и использовать ансамбль, состоящий из одного элемента. Эту процедуру условимся называть нормированием ансамбля на одну систему. Получившийся в результате этой процедуры статистический ансамбль представляет собой детерминированную динамическую систему $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$, называемую среднестатистической динамической системой. Она важна для истолкования результатов исследования ансамбля в терминах одной системы. Любая аддитивная величина $\mathcal{R}$ (энергия, количество движения и т.д.) для ансамбля $\mathcal{E}$, состоящего из одного элемента, (т.е. для среднестатистической динамической системы $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$) может рассматриваться как среднее значение этой величины $\mathcal{R}$ для элемента ансамбля (стохастической системы $\mathcal{S}$).

Поскольку всякий статистический ансамбль $\mathcal{E}$ есть динамическая система, он может быть элементом другого ансамбля $\mathcal{E}'$. В свою очередь ансамбль $\mathcal{E}'$, будучи динамической системой, может быть элементом ансамбля $\mathcal{E}''$ и т.д. Возникает иерархия ансамблей $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$,..., где каждый предыдущий ансамбль является элементом последующего. Существование такой иерархии очень важно. Оно позволяет, в частности, ввести понятие волновой функции (или амплитуды вероятности). Дело в том, что не всякий ансамбль можно описать с помощью волновой функции, однако всякий ансамбль можно представить как состоящий из элементов, которые описываются с помощью волновой функции. Покажем это на примере классической гамильтоновой системы.

Рассмотрим гамильтонову систему $\mathcal{S}$, состояние которой описывается каноническими переменными $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ и построим иерархию ансамблей на базе этой системы $\mathcal{S}$. Состояние наиболее общего ансамбля $\mathcal{E}$, состоящего из систем $\mathcal{S}$, описывается неотрицательной функцией $F(\mathbf{x},\mathbf{p})$ в фазовом пространстве $(\mathbf{x},\mathbf{p})$.

Функция распределения F эволюционирует в соответствии с уравнением Лиувилля.

$$\mathcal{E}: \quad \frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}=0 \tag{5.4.5}$$

где $H{=}H(\mathbf{x},\mathbf{p})$ есть функция Гамильтона системы $\mathcal{S}$.

Специальный (чистый) статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, состояние которого описывается величинами ρ,φ, определенными в пространстве координат, есть важный частный случай статистического ансамбля $\mathcal{E}$. В этом случае функция распределения $F_{\rho,\varphi}$ определяется следующим образом

$$F_{\rho,\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{p})=\rho(\mathbf{x})\delta(\mathbf{p}-\nabla\varphi(\mathbf{x})) \tag{5.4.6}$$

Общий статистический ансамбль $\mathcal{E}$ может быть представлен как состоящий из ансамблей $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$ (такое представление неоднозначно), что описывается соотношением

$$F(\mathbf{x},\mathbf{p})=\int F_{\rho,\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{p})d[\rho]\mathrm{d}[\varphi] \tag{5.4.7}$$

где производится функциональное интегрирование по аргументам ρ и φ. Подставляя (5.4.6) в (5.4.5), получаем динамические уравнения, описывающие эволюцию состояния ρ,φ чистого ансамбля $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$

$$\mathcal{E}_{\rho,\varphi}: \qquad \begin{array}{l} \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\left(\rho\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x},\nabla\varphi)\right)=0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}+H(\mathbf{x},\nabla\varphi)=0 \end{array} \tag{5.4.8}$$

Уравнения (5.4.5) и (5.4.8) имеют в качестве своих характеристик систему гамильтоновых уравнений

$$\mathcal{S}: \quad d\mathbf{x}/dt=\partial H/\partial\mathbf{p}, \qquad d\mathbf{p}/dt=-\partial H/\partial\mathbf{x} \tag{5.4.9}$$

Будем называть ансамбль $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, описываемый уравнениями (5.4.6), (5.4.8) чистым ансамблем, ансамбль $\mathcal{E}$, описываемый уравнением (5.4.5), - смешанным ансамблем. Эти термины взяты из квантовой механики, где чистый ансамбль описывается волновой функцией. Смешанный ансамбль - это такой ансамбль, элементами которого являются чистые ансамбли. (Смешанный ансамбль состоит из чистых ансамблей). В данном случае ансамбль $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$ может быть описан с помощью волновой функции.

$$\psi=\sqrt{\rho}\exp(i\varphi/\hbar), \tag{5.4.10}$$

где $\hbar$ есть постоянная Планка, тогда как ансамбль $\mathcal{E}$ описать с помощью одной волновой функции, вообще говоря, нельзя. Динамическое уравнение для волновой функции ψ может быть получено из (5.4.8) с помощью замены переменных (5.4.10). Оно, вообще говоря, нелинейно в терминах волновой функции ψ. Здесь постоянная Планка используется как универсальная постоянная, имеющая размерность действия. Ее использование в классическом ансамбле не приводит к каким бы то ни было квантовым эффектам. Ансамбль $\mathcal{E}$, описываемый уравнением (5.4.5) может трактоваться как смешанный ансамбль, так как согласно (5.4.7) его можно рассматривать как состоящий из элементов $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, т.е. из чистых ансамблей, описываемых волновой функцией (5.4.10) или функцией распределения (5.4.6).

Итак, динамические системы: $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, $\mathcal{E}$ образуют иерархию: $\mathcal{S}$ есть элемент ансамбля $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$ есть элемент ансамбля $\mathcal{E}$. В данном случае все динамические системы $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, $\mathcal{E}$ являются детерминированными, и для каждой из них имеются динамические уравнения.

Представим себе случай, когда $\mathcal{S}$ является стохастической системой, а $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$ и $\mathcal{E}$ - детерминированные системы. Тогда для $\mathcal{S}$ не будет динамических уравнений, а в иерархии $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, $\mathcal{E}$ первой детерминированной системой, обладающей динамическими уравнениями, будет чистый ансамбль $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, описываемый волновой функцией. Именно этот случай реализуется в квантовой механике.

Таким образом, с точки зрения статистического принципа, в основе которого лежит статистический ансамбль как динамическая система, нет непроходимой границы между классическим статистическим описанием и квантовым. Все определяется конкретной динамической системой и динамическими уравнениями [34].

Представим себе, что существует чистый ансамбль $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, описывающий случайные мировые трубки частиц массы m в рамках трубчатой модели. Предполагается, что динамические уравнения для этого ансамбля записываются в ассоциированном пространстве Минковского E_4, так как адекватный математический аппарат для трубчатого σ-пространства еще не разработан. Кроме того описание в пространстве Минковского необходимо для того, чтобы можно было сравнивать вновь полученные результаты с уже известными результатами, полученными в модели Минковского.

В пределе исчезающей дисторсии $d = 0$ этот ансамбль должен переходить в чистый статистический ансамбль свободных классических частиц в пространстве Минковского. Будем рассматривать такой ансамбль как распределенную гамильтонову систему. Ее состояние описывается канонически сопряженными переменными $\rho(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})$, нумеруемыми пространственными координатами $\mathbf{x}$. Ее гамильтонов функционал имеет вид

$$\mathcal{H}[\rho,\varphi] = \int \rho c\sqrt{m^2c^2 + (\nabla\varphi)^2}d\mathbf{x} \tag{5.4.11}$$

где m =const есть масса частицы. При m =const функционал (5.4.11) описывает потенциальное течение $\mathbf{v} = \nabla\varphi/m$ флюида без давления (5.4.3). Действие (5.4.3) описывает произвольное течение этого флюида. Связь между функционалами (5.4.3) и (5.4.11) легко устанавливается, если использовать формализм, развитый в работах [32, 33]. Нас в данном случае интересует, как нужно изменить постоянную массу частицы, для того, чтобы течение получившегося флюида описывалось уравнением Шредингера. Для этого достаточно рассмотреть только потенциальное течение, описываемое функционалом Гамльтона (5.4.11).

Функционал Гамильтона (5.4.11) порождает динамические уравнения

$$\partial\rho(\mathbf{x})/\partial t = \delta\mathcal{H}/\delta\varphi(\mathbf{x}), \qquad \partial\varphi(\mathbf{x})/\partial t = -\delta\mathcal{H}/\delta\rho(\mathbf{x}) \tag{5.4.12}$$

где $\delta/\delta\rho$, $\delta/\delta\varphi$ суть символы вариационных производных.

В развернутом виде динамические уравнения имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\left[\frac{\rho c\nabla\varphi}{\sqrt{m^2c^2 + (\nabla\varphi)^2}}\right] = 0, \tag{5.4.13}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\sqrt{m^2c^2 + (\nabla\varphi)^2} = 0. \tag{5.4.14}$$

Поставим следующий вопрос. Как нужно модифицировать функционал (5.4.11), чтобы уравнения (5.4.12) в нерелятивистском приближении превращались в уравнение Шредингера для волновой функции (5.4.10), описывающей свободную частицу массы m.

Оказывается, что для этого достаточно заменить в (5.4.11) m^2 на m_q^2.

$$m^2 \to m_q^2 = m^2 + (\frac{\hbar}{2c}\nabla\log\rho)^2, \qquad m^2 = \text{const}. \tag{5.4.15}$$

и воспользоваться нерелятивистским приближением

$$(\frac{\hbar}{2c}\nabla\log\rho)^2 \ll m^2 \tag{5.4.16}$$

Заменим в (5.4.11) m^2 на выражение (5.4.15). После этого введем вместо переменных ρ, φ комплексную переменную (5.4.10) и комплексно сопряженную ей

$$\psi^* = \sqrt{\rho}\exp(-i\varphi/\hbar) \tag{5.4.17}$$

Тогда гамильтонов функционал (5.4.11) принимает вид

$$\mathcal{H}_q[\psi,\psi^*] = \int mc^2\psi^*\psi\sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{\nabla\psi^*\nabla\psi}{\psi^*\psi}}\,d\mathbf{x} \tag{5.4.18}$$

С учетом (5.4.16), т.е. в нерелятивистском приближении, функционал (5.4.18) записывается в виде

$$\mathcal{H}_q[\psi,\psi^*] = \int(mc^2\psi^*\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi)d\mathbf{x} \tag{5.4.19}$$

а динамические уравнения (5.4.12) принимают вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\frac{\delta\mathcal{H}^*}{\delta\psi}, \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{i\delta\mathcal{H}}{\hbar\delta\psi}, \tag{5.4.20}$$

Из (5.4.19) и (5.4.20) следует

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = mc^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{5.4.21}$$

После этого замена переменных $\psi \to \psi\exp(-imc^2t/\hbar)$ переводит уравнение (5.4.21) в уравнение Шредингера для свободной частицы

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{5.4.22}$$

Уместно заметить, что квантовое описание получается после замены (5.4.15) только в релятивистском гамильтоновом функционале (5.4.11). Если в релятивистском функционале (5.4.11), отбросить массу покоя и перейти к нерелятивистскому функционалу

$$\mathcal{H}_{nr}[\rho,\varphi] = \int \rho\frac{(\nabla\varphi)^2}{2m}d\mathbf{x} \tag{5.4.23}$$

а после этого сделать замену (5.4.15), то квантового описания (5.4.22) не возникает. Квантовое описание (5.4.22) есть следствие замены (5.4.15) для релятивистской массы покоя. Замена (5.4.15) делает переменной массу покоя. Эта модификация массы покоя мала, но достаточна для того, чтобы сделать описание нерелятивистского классического движения квантовым описанием.

С этой точки зрения, как это ни парадоксально, *нерелятивистская* квантовая механика описывает *релятивистские* стохастические эффекты, и любые квантовые эффекты (как релятивистские, так и нерелятивистские) следует осмысливать с релятивистской точки зрения, используя релятивистский формализм.

Можно эту же мысль выразить иначе. Если квантовые эффекты есть результат некоторого стохастического движения частиц, то это *стохастическое движение следует рассматривать как релятивистское даже тогда, когда среднее движение частиц является нерелятивистским и описывается нерелятивистской квантовой механикой.*

Перейдем к геометрическим переменным в гамильтоновом функционале (5.4.11) с массой m^2, замененной на (5.4.15) Замена переменных имеет вид

$$\varphi = bc\tilde{\varphi}, \qquad m = b\tilde{\mu}, \qquad t = \tau/c, \qquad \hbar = bc\sigma_1 \tag{5.4.24}$$

где b есть некоторая универсальная постоянная, определяемая соотношением (5.2.6), а σ_1 - некоторая постоянная размерности [см^2], введенная вместо постоянной Планка. Получаем в результате

$$\mathcal{H}[\rho,\tilde{\varphi}] = \int \sqrt{\mu_q^2 + (\nabla\tilde{\varphi})^2}\rho d\mathbf{x} \tag{5.4.25}$$

$$\mu_q^2 = \tilde{\mu}^2 + [(\sigma_1/2)\nabla\log\rho]^2, \qquad \tilde{\mu} = \text{const} \tag{5.4.26}$$

Квантовые эффекты в статистическом ансамбле, описываемом гамильтоновым функционалом (5.4.25) возникают из-за зависимости геометрической массы μ_q от состояния (ρ,φ) ансамбля.

Функционал (5.4.11) представляет собой сумму (интеграл) одинаковых независимых функций Гамильтона, каждая из которых описывает свободную классическую частицу. В отличие от функционала (5.4.11) гамильтонов функционал (5.4.25) нельзя рассматривать как сумму функций Гамильтона независимых динамических систем, потому что масса μ_q зависит от состояния (ρ, φ) ансамбля. Это означает, что не существует таких классических систем, статистический ансамбль которых описывался бы функцией Гамильтона (5.4.25). Другими словами, состояние отдельной системы $\mathcal{S}$ из иерархии: $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, $\mathcal{E}$ не удовлетворяет каким бы то ни было динамическим уравнениям, и является стохастической системой. Динамическая система $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$ является первой детерминированной системой в иерархии: $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$, $\mathcal{E}$. Исследование отдельной стохастической системы $\mathcal{S}$ лишено смысла. Осмысленным является лишь исследование ансамблей систем $\mathcal{S}$. Первая динамическая система иерархии, которую следует исследовать, – это чистый ансамбль $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$.

5.5 Ориентированная масса

Ранее с помощью (5.2.3), были введены две массы частицы μ и μ_E. Масса μ есть длина вектора импульса частицы в трубчатой модели V_4. μ_E есть ассоциированная масса, т.е. длина того же вектора импульса в ассоциированном пространстве Минковского E_4. Кроме обычной массы можно ввести понятие ориентированной массы, определив ее как скалярное произведение импульса на единичную 4-скорость

$$\mu_o = (\mathbf{p}.\mathbf{u}). \tag{5.5.1}$$

В специальной теории относительности импульс коллинеарен 4-скорости и ориентированная масса есть

$$\mu_o = \pm\mu \tag{5.5.2}$$

Знак ориентированной массы μ_o зависит от взаимной ориентации импульса и скорости. Он различен для частицы и античастицы. В модели Минковского гамильтонов функционал (5.4.11) не зависит от того, какая масса в нем использована, обычная или ориентированная.

В трубчатой модели ориентированная масса зависит от определения 4-скорости и от того, в каком σ-пространстве вычисляется скалярное произведение. Будем отличать ориентированную массу от ориентированной ассоциированной массы. Для ориентированной массы μ_o скалярное произведение вычисляется в V_4, а для ориентированной ассоциированной массы μ_{oE} скалярное произведение вычисляется в E_4.

$$\mu_{oE} = (\mathbf{p}.\mathbf{u})_E \tag{5.5.3}$$

В V_4 векторы импульса и 4-скорости коллинеарны в пределах одного сегмента $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$. В этом случае справедливо (5.5.2). В то же время эти векторы, вообще говоря, не коллинеарны в E_4 и μ_{oE} зависит от точки P, где определяется 4-скорость (5.2.10).

Примем, что в ансамбле случайных мировых трубок, описываемом гамильтоновым функционалом (5.4.11) в качестве массы следует использовать ориентированную ассоциированную массу $m_{oE} = b\mu_{oE}$. Для модели Минковского $m_{oE}^2 = m_o^2 = m^2$, поэтому такое предположение не приводит к каким-либо изменениям в традиционном изложении механики.

Выясним какой должна быть 4-скорость для того, чтобы ориентированная масса имела вид (5.4.26). Выберем систему координат так, чтобы в точке P_0 пространственные компоненты импульса p_i=$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ исчезали. В этой системе координат

$$p_i = (\mu_E, \mathbf{0}), \qquad u^i = (1/\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}, \boldsymbol{\beta}/\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}) \tag{5.5.4}$$

где $\boldsymbol{\beta}$=$\mathbf{v}/c$, а $\mathbf{v}$ есть обычная трехмерная скорость в ансамбле в точке P_0, в системе координат, где $\mathbf{p}$=0. Получаем для ориентированной ассоциировнной массы в этой точке

$$\mu_{oE} = p_i u^i = \mu_E\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2} \cong \mu_E(1+\beta^2/2), \qquad \beta \ll 1 \tag{5.5.5}$$

$\vartheta = \mathrm{arcth}\beta$ есть угол между векторами p_i и u^i, который , вообще говоря, отличен от нуля, хотя и мал $\vartheta \ll 1$.

Сравнивая (5.5.5) с (5.4.26) получаем

$$\boldsymbol{\beta} = \pm\frac{\sigma_1}{2\mu_E}\frac{\nabla\rho}{\rho}, \qquad \mu_E = \tilde{\mu}. \tag{5.5.6}$$

Таким образом, скорость в системе координат, где 3-импульс $\mathbf{p} = 0$, определяется формулой (5.5.6). Заметим, что точно такой же вид имеет средняя скорость в ансамбле броуновских частиц (знак минус в (5.5.6)) в системе координат, где среда неподвижна и коэффициент диффузии есть $\sigma_1/2\mu_E$. Это свидетельствует о существовании общих черт между квантовой частицей и классической частицей, блуждающей случайным образом.

Будем описывать ломаную трубку $\mathcal{T}_{br}$ следующим образом. Назовем центром P сегмента $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} \subset \mathcal{T}_{br}$ точку, расположенную в середине отрезка $\mathcal{L}_{[P_iP_{i+1}]}$ (Рис. 5.4.1), так что

$$S_E(P_i, P) = S_E(P_{i+1}, P) = \frac{1}{2}S_E(P_i, P_{i+1}) = \mu_E/2 \tag{5.5.7}$$

Условимся относить импульс $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ сегмента $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ и все другие характерные величины к центру P сегмента $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$. Допустим, что возможен чистый ансамбль $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$ случайных трубок, состояние которого описывается только величинами ρ, φ, рассматриваемыми как функции четырех координат x^i, $i = 0, 1, 2, 3$ в E_4. Пусть далее все физические величины Y в ансамбле изменяются достаточно медленно на интервале μ_E

$$\frac{\mu_E}{Y}\frac{\partial Y}{\partial x_i} = O(\varepsilon) \ll 1, \qquad i = 0,1,2,3, \qquad \varepsilon \ll 1 \tag{5.5.8}$$

и можно игнорировать дискретный характер трубок, рассматривая физические величины Y как непрерывные и гладкие функции координат x. При этом в каждой точке x пространства E_4 может быть не более одного сегмента, т.е. не может быть двух разных импульсов в одной точке. Таким образом, 4-импульс

$$p_i = \left(\frac{\mu_E}{\sqrt{\mu_E^2 + (\nabla\varphi)^2}}, \frac{\mu_E \nabla\varphi}{\sqrt{\mu_E^2 + (\nabla\varphi)^2}} \right), \tag{5.5.9}$$

описывающий распределение импульса в ансамбле $\mathcal{E}_{\rho,\varphi}$ есть однозначная функция функция координат x. Вектор p_i в точке P рассматривается как импульс некоторого сегмента $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$, имеющего центр в точке P.

4-скорость $\mathbf{u}(P)$ в точке P складывается как средняя скорость сегментов $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} \ni P$, содержащих точку P. Возможны разные способы определения этого среднего. Мы примем, что вклад в 4-скорость в точке P делают лишь те сегменты $\mathcal{T}_{[P_i'P_{i+1}']}$ для которых

$$S(P_i', P) = S(P_{i+1}', P) = \frac{1}{2} S(P_i', P_{i+1}') = \mu/2 \tag{5.5.10}$$

а скорость вычисляется по правилу (5.2.10) (см. рис. 5.5.1, где взято $i = 0$). Таким образом, 4-скорость зависит, вообще говоря, не только от импульса $\nabla\varphi$, но и от плотности ρ мировых трубок в ансамбле.

Как производится вычисление 4-скорости в точке P, можно понять из рис. 5.5.1. Здесь точка P есть центр сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Система координат выбрана с центром в точке P, так что временнáя ось направлена вдоль P_0P_1, поэтому

$$x^i(P) = 0, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{5.5.11}$$

$\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$ есть некоторый сегмент, содержащий точку P и делающий вклад в 4-скорость в точке P. P' есть центр сегмента $\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$, поэтому выполнено условие (5.5.10) для $i = 0$, и в соответствии с (5.1.34)

$$S_E(P, P') = iR_E(1/2) = i\sqrt{\frac{1}{4}g^2(S) - g^2(S/2)}, \tag{5.5.12}$$

где $g(S)$, определяемая соотношением (5.1.28), описывает связь между σ и σ_E. Центр P' сегмента $\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$ располагается на гиперболоиде

$$x_i x^i = -R_E^2, \tag{5.5.13}$$

который изображен пунктиром на рис. 5.5.1.

Введем обозначения

$$y^i = \{0, \mathbf{y}\} = x^i(P''), \qquad z^i = x^i(P'), \qquad i = 0,1,2,3 \tag{5.5.14}$$

Тогда средняя 4-скорость в точке P с координатами (5.5.11) определяется соотношением

$$u^i(P) = K^i/\sqrt{K_j K^j}, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{5.5.15}$$

Здесь

$$K^i = K^i(P) = \int\limits_{\mathbf{y}^2<R_E^2} [x^i(P) - x^i(P_0')]j^0(P'')d\mathbf{y} \tag{5.5.16}$$

есть интеграл, описывающий вклад всех сегментов с центром на гиперболоиде (5.5.13), причем интегрирование в (5.5.16) производится по трехмерной области $y^0 = 0$ внутри гиперболоида (5.5.13). $j^0(P'')$ есть временна́я составляющая четыре-вектора тока

$$j^i = (\rho, \rho\nabla\varphi/\sqrt{\mu_E^2 + (\nabla\varphi)^2}) \tag{5.5.17}$$

в точке P'', а множитель

$$x^i(P) - x^i(P_0') = -x^i(P_0'),$$

описывает вклад сегмента $\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$ в среднюю 4-скорость. $j^0(P'')$ есть статистический вес этого вклада.

Координаты $x^i(P_0')$, как следует из рис. 5.5.1, определяются соотношением

$$x^i(P_0') = -q^i(P')(\mu_E/2 - l_E) + y^i, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{5.5.18}$$

где

$$l_E = S_E(P', P'') = \sqrt{R_E^2 - \mathbf{y}^2}, \tag{5.5.19}$$

а вектор

$$q^i(P') = \frac{j^i(P')}{\mid j^i(P') \mid} = \frac{j^i(P')}{\sqrt{j_k(P')j^k(P')}}, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{5.5.20}$$

есть единичный вектор в направлении импульса $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ сегмента $\mathcal{T}_{[P_0'P_1']}$.

Интеграл (5.5.16) может быть вычислен , если выразить $q^i(P')$ через координаты $\mathbf{y}$. Будем предполагать, что 4-ток j^i может быть разложен в ряд по координатам в окрестности точки P. В нерелятивистском приближении, когда вектор $q^i(P')$ всюду очень мало уклоняется от направления временно́й оси, существенный вклад в интеграл дают лишь члены с $\mathbf{y}^2{=}R_E^2$. В этом случае можно ограничиться лишь линейными членами в разложении $q^i(P')$ и $j^0(P'')$ по степеням координат, а интегрирование в (5.5.16) производить лишь по углам, положив $\mathbf{y}^2{=}R_E^2$. Получаем следующие разложения

$$j^i(P'') = j^i(P) + \varepsilon j^i_{,k}(P)y^k + O(\varepsilon^2) \tag{5.5.21}$$

$$q^i(P') = q^i(P) + \varepsilon \left[j^i_{,k}(P) - \frac{j^i(P) j^0_{,k}(P)}{j^0(P)} \right] z^k / j^0(P) + O(\varepsilon^2) \qquad (5.5.22)$$

где ε есть формальный малый параметр разложения, который в конце полагается равным 1, а z^i и y^i определяются соотношениями (5.5.14). В разложении (5.5.22) использовано, что

$$j^0(P) = \rho(P), \qquad j^\alpha(P) = 0, \qquad \alpha = 1,2,3,$$
$$q^0(P) = 1, \qquad q^\alpha(P) = 0, \qquad \alpha = 1,2,3, \qquad (5.5.23)$$

Поскольку $(\mathbf{P}'\mathbf{P}.\mathbf{P}'\mathbf{P}'_0)_E = 0$, то

$$S^2_E(P'_0, P) = x_i(P'_0) x^i(P'_0) = (\mu_E/2)^2 - R^2_E \qquad (5.5.24)$$

Подставляя (5.5.18) в (5.5.24), получим уравнение для l_E. Решение этого уравнения имеет вид

$$l_E = \frac{\varepsilon}{j^0(P)} j^a_{,\beta}(P) y^\alpha y^\beta + O(\varepsilon), \qquad j^\alpha_{,\beta} \equiv \partial_\beta j^\alpha \qquad (5.5.25)$$

Отсюда следует, что $l_E = O(\varepsilon)$ и тогда

$$z^i = x^i(P') = y^i + q^i(P') l_E = y^i + O(\varepsilon) \qquad (5.5.26)$$

Это означает, что в (5.5.22) можно с точностью до ε заменить z^k на y^k.

Подставляя (5.5.22) в (5.5.18) и (5.5.18), (5.5.21) в (5.5.16), получаем

$$K^i = -\int d\mathbf{y} y^i (j^0 + \varepsilon j^0_{,\alpha} y^\alpha) +$$
$$\int d\mathbf{y} \left[q^i + \frac{\varepsilon}{j^0} (j^i_{,\alpha} - \frac{j^i j^0_{,\alpha}}{j^0}) y^\alpha \right] \left(\frac{\mu_E}{2} - \frac{\varepsilon}{j^0} j^\alpha_{,\beta} y^\alpha y^\beta \right) j^0 + O(\varepsilon^2) \qquad (5.5.27)$$

Учтем, что интеграл от членов, содержащих нечетное число сомножителей y^α, исчезает. Тогда получаем

$$K^0 = 4\pi R^2_E \left(\frac{\mu_E}{2} j_0 - \frac{\varepsilon}{3} j^\alpha_{,\alpha} R^2_E \right) + O(\varepsilon^2)$$
$$K^\gamma = -4\pi R^4_E \frac{\varepsilon}{3} j^0_{,\gamma} + O(\varepsilon^2), \qquad \gamma = 1,2,3 \qquad (5.5.28)$$

Для 3-скорости β, определяемой соотношениями (5.5.4), (5.5.15) и (5.5.28), получаем

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{2R^2_E}{3\mu_E} \nabla \log \rho, \qquad j^0 = \rho. \qquad (5.5.29)$$

Сравнивая это соотношение с (5.5.6) и учитывая (5.1.34), получаем

$$R^2_E = \frac{1}{4} g^2(\mu) - g^2(\mu/2) = \frac{3}{4} \sigma_1. \qquad (5.5.30)$$

Это уравнение для определения функции g справедливо в области $\sigma_E = g^2(\mu)/2 > \sigma_0$, где σ_0 есть постоянная. Его решение имеет вид

$$\mu_E^2 = g^2(\mu) = \mu^2 - \sigma_1, \qquad \sigma_E = \frac{1}{2}\mu_E^2 \geq \sigma_0 > 0, \tag{5.5.31}$$

Наконец, принимая во внимание (5.4.24), получаем связь между мировой функцией σ и мировой функцией евклидова пространства σ_E, а также связь интегральной дисторсии d с постоянной Планка $\hbar$.

$$\sigma = \sigma_E + d, \qquad d = \frac{\hbar}{2bc}, \qquad \sigma_E \geq \sigma_0 \tag{5.5.32}$$

Ограничение на область применимости соотношения (5.5.32) связано с тем, что σ и σ_E должны одновременно обращаться в нуль, что невозможно при постоянной дисторсии d. Дисторсия должна обращаться в нуль одновременно с σ и σ_E. По существу соотношение (5.5.32) применимо лишь для больших σ и имеет асимптотический характер.

Хотя полученные соотношения не позволяют определить значение универсальной постоянной b и интегральной дисторсии d, оказывается возможным оценить верхнюю границу постоянной b и нижнюю границу дисторсии d.

Оценка основана на предположении о применимости описанной выше процедуры определения ориентированной ассоциированной массы μ_{oE} ко всем массивным элементарным частицам, включая электрон. Примем, что $\sigma_0 = \alpha d$, где α есть некоторая положительная постоянная порядка 1. Принимая, что ограничение (5.5.32) справедливо для массы электрона $m_e = \mu_{eE}/b$, получаем

$$m_e^2/2b^2 \geq (1+\alpha)d = \frac{(1+\alpha)\hbar}{2bc} \tag{5.5.33}$$

где m_e - обычная масса электрона. Масса электрона $m_e = b\mu_{eE}$, фигурирующая в динамических уравнениях и в гамильтониане (5.4.25), (5.4.26), связана с μ_{eE}. но не с μ_e. Это дает следующую оценку для постоянной b

$$b \leq \frac{m_e^2 c}{\hbar(1+\alpha)} \cong \frac{2.5 \cdot 10^{-17}\text{г/см}}{(1+\alpha)} \tag{5.5.34}$$

Используя для d выражение (5.5.32), получаем из (5.5.34) следующую оценку для дисторсии пространства-времени

$$d = \frac{\hbar}{2bc} \geq \frac{\hbar^2(1+\alpha)}{2m_e^2c^2} = \frac{1+\alpha}{2}\lambda_e^2 \cong 7 \cdot 10^{-22}(1+\alpha)\text{см} \tag{5.5.35}$$

где λ_e есть комптоновская длина волны электрона. Положив $\alpha = 2$, получаем для характерного радиуса мировой трубки следующую оценку

$$R_E = (3d/2)^{1/2} > 0.5 \cdot 10^{-10}\text{см} \tag{5.5.36}$$

Таким образом, характерный радиус R_E мировых трубок больше ядерных масштабов 10^{-13}см. но, по-видимому, меньше атомных 10^{-8}см.

Для геометрической массы электрона μ_{eE} получаем оценку

$$\mu_{eE} > 10^{-10}\text{см}, \tag{5.5.37}$$

что согласуется с (5.5.36)

Итак, мировая функция пространства-времени может быть аппроксимирована выражением

$$\sigma = \sigma_E + \frac{\hbar}{2bc}, \qquad \sigma > \sigma_0 = \frac{\hbar}{bc} \tag{5.5.38}$$

где c есть скорость света, а b и σ_0 – универсальные постоянные $b < 10^{-17}$г/см

Таким образом, метрическая концепция геометрии позволяет ввести и исследовать дисторсию пространства-времени, т.е. другой способ деформации пространства-времени, отличный от искривления. Дисторсия порождает квантовые эффекты и заменяет в некотором смысле принципы квантовой механики. То обстоятельство, что дисторсия есть свойство пространства-времени, позволяет поставить вопрос, индуцируется ли дисторсия подобно гравитации наличием материи, или это свойство пространства-времени, не зависящее от распределения материи.

Объединение дисторсии пространства-времени с его искривлением может быть использовано для создания квантовой теории гравитации.

5.6 Среднестатистическая динамическая система и редукция ее состояния.

Если число элементов N статистического ансамбля $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}_{\text{st}}]$ достаточно велико, то не имеет значения как велико это N. Некоторые (интенсивные) величины такие как скорости совсем не зависят от N. Другие (экстенсивные) величины такие как концентрация, энергия, импульс и их плотности пропорциональны N. Формально можно положить $N = 1$ и рассматривать статистический ансамбль, состоящий из одного элемента. Эта процедура называется нормированием статистического ансамбля на единицу. После такой нормировки статистический ансамбль $\mathcal{E}[1, \mathcal{S}_{\text{st}}]$ представляет собой детерминированную динамическую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$, которая может интерпретироваться как среднестатистическая динамическая система, полученная в результате некоторого усреднения стохастической системы $\mathcal{S}_{\text{st}}$, в том смысле, что все динамические величины и параметры динамической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ представляют собой средние значения этих величин для стохастической системы $\mathcal{S}_{\text{st}}$. При этом динамические системы $\mathcal{S}_{\text{st}}$ и $\langle\mathcal{S}\rangle$ различны по своим свойствам и их не следует путать между собой. Например, стохастическая система $\mathcal{S}_{\text{st}}$ может быть сосредоточенной или распределенной, но среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ практически всегда является распределенной системой.

Среднестатистическая динамическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ является детерминированной динамической системой, которой можно приписать вполне определенное состояние ψ и для которой существуют динамические уравнения, описывающие эволюцию этого состояния ψ. Измерение некоторой физической величины $\mathcal{R}$ в $\langle\mathcal{S}\rangle$ приводит, вообще говоря, к некоторому распределению $f(R)$ величины $\mathcal{R}$ (а не к определенному значению R' этой величины).

Индивидуальная динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является стохастической динамической системой, которой нельзя приписать состояния ψ таким образом, чтобы можно было говорить об эволюции этого состояния и динамических уравнениях, описывающих эту эволюцию. Измерение некоторой физической величины $\mathcal{R}$ в $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ всегда приводит к некоторому вполне определенному значению R' этой величины (но не к распределению $f(R)$ этой величины).

Пример 5.6.1: Рассмотрим следующее высказывание: "Среднестатистический житель Москвы – наполовину мужчина и наполовину женщина". Это вполне осмысленное статистическое утверждение, которое означает просто, что примерно половина жителей Москвы – мужчины, а вторая половина – женщины. Это высказываение становится бессмысленным, если отнести его к индивидуальному (а не среднестатистическому) жителю Москвы. Измерение (определение пола) жителя Москвы приводит всегда к определенному результату (или мужчина, или женщина), если оно относится к любому конкретному жителю Москвы. То же самое измерение пола у среднестатистического жителя Москва приводит к распределению, т.е. определению, какую часть жителей Москвы составляют мужчины, а какую часть женщины. Существуют, однако, высказывания, которые одинаково применимы как к индивидуальному жителю Москвы, так и к среднестатистическому. Например, высказывание: "Житель Москвы имеет одну и только одну голову." одинаково применимо по отношению к индивидуальному жителю Москвы и по отношению к среднестатистическому, и это связано с тем, что свойство "иметь одну и только одну голову" есть свойство любого жителя Москвы .

При описании стохастического поведения электрона следует различать два вида электронов: индивидуальный электрон $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и среднестатистический электрон $\langle\mathcal{S}\rangle$. Состояние среднестатистического электрона $\langle\mathcal{S}\rangle$ описывается волновой функцией ψ, которая удовлетворяет уравнению Шредингера. Измерение некоторой физической величины $\mathcal{R}$ в состоянии ψ приводит, вообще говоря, к некоторому распределению этой величины. Индивидуальному электрону $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ нельзя приписать какой-либо волновой функции, хотя бы просто потому, что отдельный электрон является сосредоточенной системой, тогда как волновая функция описывает, вообще говоря, распределенную системму. Измерение некоторой физической величины $\mathcal{R}$ для индивидуального электрона приводит всегда к некоторому определенному значению R' этой величины и никогда не приводит к распределению этой величины. Результат R' измерения никак не влияет на волновую функцию, которой для индивидуального электрона просто не существует.

Из сказанного ясно, что употребление одного и того же термина "электрон" для двух различных объектов: индивидуального электрона $\mathcal{S}_{\rm st}$ и среднестатистического электрона $\langle\mathcal{S}\rangle$ может привести к недоразумениям и парадоксам, если свойства индивидуального электрона $\mathcal{S}_{\rm st}$ будут приписываться среднестатистическому электрону $\langle\mathcal{S}\rangle$ и наоборот. К сожалению, в современной литературе практически никогда не различают между индивидуальным $\mathcal{S}_{\rm st}$ и среднестатистическим электроном $\langle\mathcal{S}\rangle$. Пока речь идет только о динамике, где фигурирует только среднестатистический электрон $\langle\mathcal{S}\rangle$, недоразумений обычно не возникает (в конце концов привыкают к тому, что среднестатистический электрон $\langle\mathcal{S}\rangle$ есть распределенная система с необычными для отдельного электрона свойствами). Однако, когда рассматривается процесс измерения, где фигурируют оба вида динамических систем: $\langle\mathcal{S}\rangle$ и $\mathcal{S}_{\rm st}$, измерения над которыми приводят к различным результатам, возникают многочисленные парадоксы, обусловленные употреблением одного и того же термина для двух разных объектов.

Наиболее известный из парадоксов – это так называемый парадокс кота Шредингера. Этот парадокс формулируется обычно следующим образом. Имеется камера, в которой находится кот. Кроме кота в камере находится радиоактивный атом и устройство для умервщления кота. Если атом распадается, то устройство убивает кота. В любой момент времени кот либо жив, либо мертв, и состояние его определяется волновой функцией радиоактивного атома. Пусть в момент времени, когда вероятность распада атома равна 0,5 наблюдатель смотрит на кота сквозь окошко камеры. Пусть он видит, что кот жив. Это означает, что наблюдение (эксперимент) изменяет состояние кота (или волновую функцию радиоактивного атома). То обстоятельство, что взгляд наблюдателя может изменять состояние кота (делать его определенно живым, или определенно мертвым) представляется парадоксальным.

Разрешение возникшего парадокса заключается в том факте, что на самом деле есть два различных кота: среднестатистический ⟨кот⟩ и отдельный индивидуальный Кот. Измерение состояния отдельного Кота всегда приводит к определенному случайному результату. Кот либо жив, либо мертв, а результат что Кот в некоторой степени жив и в некоторой степени мертв невозможен. С другой стороны, поскольку Кот есть стохастический объект нельзя сказать что-нибудь определенное о дальнейшей эволюции Кота (не существует волновой функции для отдельного радиоактивного атома). Эксперимент над ⟨котом⟩, который представляет собой совокупность многих экспериментов над одинаковыми стохастическими Котами, дает только распределение результатов, потому что некоторые Коты живы, а некоторые мертвы. Наблюдая ⟨кота⟩, нельзя сказать определенно, жив он или мертв. Но состояние ⟨кота⟩ (состояние множества радиоактивных атомов) может быть описано с помощью волновой функции. Таким образом, наблюдение Кота дает определенный результат, но без волновой функции, тогда как наблюдение ⟨кота⟩ дает неопределенный результат, но с волновой функцией.

При рассмотрении пардокса с котом Шредингера существенным является следующий вопрос. Какой кот наблюдается в камере? Кот или ⟨кот⟩? Если наблюдатель имеет дело с Котом, он получает определенный результат, например, Кот жив. Однако, наблюдатель не может ничего сказать об изменении состояния, потому что отдельный кот (или атом) есть стохастическая система, которой нельзя приписать состояние (волновую функцию). В этом случае парадокс не возникает. Если наблюдатель следит за ⟨котом⟩, то результат наблюдения будет неопределенным, и парадокс снова не возникает.

Возможен ли такой случай, когда измерение приводит к определенному результату и в то же время состояние кота изменяется? Да это возможно, но для этого нужно определить специальный вид измерения. Определим МИПОР как измерение, производимое над ⟨котом⟩ (ансамблем случайных Котов), приводящее к определенному результату. МИПОР есть аббревиатура термина "массовое измерение, приводящее к определенному результату". Если МИПОР приводит к определенному результату: ⟨кот⟩ жив, это означает по определению, что после проведения эксперимента над многими котами (ансамблем случайных Котов) отбираются только живые Коты (определенный результат измерения), из которых образуется новый статистический ансамбль (новый ⟨кот⟩), где все Коты живые. Такая селекция, проведенная наблюдателем (или прибором) изменяет состояние ⟨кота⟩ после измерения.

Пусть теперь МИПОР производится над ⟨котом⟩ в камере. В этом случае получается определенный результат измерения (кот жив) и состояние ⟨кота⟩ изменяется, но парадокс снова отсутствует, т.к. изменение состояния ⟨кота⟩ (или волновой функции радиоактивного атома) есть результат селекции, произведенной наблюдателем.

В современной физической литературе (см. напр. обзор [35] и ссылки в нем) под квантовомеханическим измерением обычно понимается МИПОР, имеющий две разновидности. Квантовое измерение называется селективным измерением в том случае, когда в результате измерения получается одно значение R' измеряемой величины $\mathcal{R}$, а состояние ψ среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ превращается в результате производимой селекции $\psi\rightarrow\psi_R$ в чистое состояние, описываемое волновой функцией ψ_R, являющейся собственной функцией оператора измеряемой величины $\mathcal{R}$. Квантовое измерение называется неселективным измерением в том случае, когда в результате измерения получается несколько различных значений R'_1, R'_2,... измеряемой величины $\mathcal{R}$, а состояние ψ среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ превращается в результате производимой селекции $\psi\rightarrow\rho_R$ в смешанное состояние, описываемое матрицей плотности ρ_R. Явление превращения чистого состояния среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ в смешанное состояние той же системы называется декогеренцией или редукцией состояния системы. Вопрос о том, как именно измеряющий прибор (или окружающая среда) воздействуют на измеряемую систему, хорошо изучен [35]. Однако вопрос о том, что представляет собой измеряемая система (среднестатистическую или индивидуальную систему) обычно остается в стороне.

Дело здесь в том, что в рамках квантовой механики трудно сказать определенно, что представляет собой реальная динамическая система при реальных измерениях. То ли это среднестатистическая система, то ли это индивидуальная система. В примере 5.6.1 при изучении народонаселения города Москвы невозможно рассматривать среднестатистического жителя Москвы как некоторого индивидуального жителя Москвы, поскольку любой непредубежденный исследователь скажет что-нибудь в таком духе: "Я знаю многих конкретных жителей Москвы (Иванова, Петрову, Сидорова и т.д.), но встречать жителя Москвы, который был бы наполовину мужчиной, а наполовину женщиной мне не доводилось" (патологию с гермафродитом мы исключаем из рассмотрения). Иначе говоря, в данном случае совершенно ясно, что среднестатистический житель Москвы есть некоторая абстракция полезная для изучения, например, экономических закономерностей, но отождествление среднестатистического жителя с отдельным индивидуальным жителем невозможно.

В квантовой механике ситуация несколько иная. Что такое реальный электрон (мы говорим для краткости об электроне вместо квантовой системы) ясно не вполне. Квантовая механика приписывает электрону очень много диковинных свойств. Он описывается операторами вместо обычных величин, ему приписывается волновая функция, описывающая нечто протяженное и распределенное. Если в дополнение к уже имеющимся диковинным свойствам электрона мы припишем реальному электрону еще и свойства среднестатистического объекта или даже припишем ему свойство быть среднестатистическим объектом, мы не совершим большой оплошности, поскольку не найдется человека, который мог бы сказать, что он знает, что такое реальный электрон и что отдельный реальный электрон не имеет тех свойств, которые приписывают среднестатистическому объекту. Что касается статистических операций, используемых в работе со среднестатистическими объектами, то они достаточно хорошо замаскированы и не выделяются на фоне других квантовомеханических операций, которые порой совершенно необъяснимы с точки зрения классической физики, но приводят к правильным предсказаниям. Ситуация еще больше усложняется тем обстоятельством, что существуют свойства , которые с равным правом могут быть приписаны как индивидуальной системе, так и среднестатистической, как мы видели это в примере 5.6.1. Таким образом, в рамках традиционной квантовой механики можно не конкретизировать, как это сделано в [35], что имеется в виду под квантовой системой: среднестатистическая или индивидуальная система, или даже считать, что квантовая механика описывает индивидуальную систему.

В том случае, когда аксиомы квантовой механики отвергаются как принципы и все операции квантовой механики обосновываются как операции статистического описания стохастических систем, дальнейшее настаивание на том, что квантовая механика описывает индивидуальную, а не среднестатистическую систему, становится невозможным.

В заключение рассмотрим вопрос о том, как реализуется МИПОР, т.е. каким образом измеряющий прибор $\mathcal{M}$ осуществляет селекцию систем ансамбля, превращая чистое состояние среднестатистической измеряемой системы $\langle\mathcal{S}\rangle$, описываемое волновой функцией, в смешанное состояние, описываемое матрицей плотности. Нас будет интересовать принципиальная сторона процесса декогеренции (редукции волновой функции). Математическое описание этого процесса декогеренции можно найти в [35]. Мы же только попытаемся объяснить, как, почему и при каких обстоятельствах динамическое взаимодействие измеряющего прибора $\mathcal{M}$ на измеряемую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$ приводит к селекции систем ансамбля, т.е. к статистическому воздействию на измеряемую среднестатистическую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$. Эволюция волновой функции ψ, системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ описывается эволюционным оператором $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(H_0 + H_{int})t\right\}$, где H_0 есть гамильтониан измеряемой системы $\langle\mathcal{S}\rangle$, а H_{int} есть гамильтониан взаимодействия с измеряющим прибором $\mathcal{M}$. Вообще говоря, H_{int} зависит от состояния в котором находится измеритель $\mathcal{M}$. Если измеритель $\mathcal{M}$ достаточно груб или регистрация заблокирована и измеритель $\mathcal{M}$ не реагирует на измеряемую систему $\langle\mathcal{S}\rangle$, то H_{int} один и тот же во всех измерениях серии. В этом случае воздействие $\mathcal{M}$ на $\langle\mathcal{S}\rangle$ чисто динамическое, селекция не производится, состояние системы $\langle\mathcal{S}\rangle$ остается чистым и декогеренция не происходит. Если измеритель $\mathcal{M}$ регистрирует измеряемую величину, относящуюся к $\langle\mathcal{S}\rangle$, изменением своего состояния, то гамильтониан взаимодействия H_{int} будет различным для разных состояний измерителя $\mathcal{M}$. В результате эволюционный оператор $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(H_0 + H_{int})t\right\}$ будет разным для различных систем ансамбля $\langle\mathcal{S}\rangle$, и это приведет к различной их эволюции и, следовательно, к селекции. Таким образом, редукция волновой функции существенно зависит от того, регистрируется ли измерение измерителем $\mathcal{M}$, т.е. изменяется ли состояние $\mathcal{M}$ в процессе измерения.

5.7 Заключительные замечания

Т-геометрия, как математическое построение, основанное на одной лишь метрической структуре пространства, демонстрирует большие возможности этой структуры и ее доминирующую роль в геометрии. Рассмотрение Т-геометрии показывает, что метрическая структура способна в значительной степени заменить собой топологическую структуру пространства. При этом возникает такая ситуация, что некоторые геометрические свойства, приписываемые топологической структуре, оказываются свойствами метрической структуры. Это относится в первую очередь к римановой геометрии, основанной на возможности склеивания множества бесконечно малых евклидовых пространств в единую геометрическую конструкцию. Традиционно это склеивание производится на основе независимо задаваемой топологической структуры пространства (многообразия). Т-геометрия показывает, что для этой цели нет необходимости задавать топологию независимо, поскольку склеивание может быть произведено на основе одной только метрической структуры. Многообразие при этом появляется как производная структура, возникшая на базе метрики. При этом такие свойства как непрерывность пространства по существу оказываются невостребованными в Т-геометрии.

Доминирующая роль метрики не должна быть препятствием на пути обогащения геометрии путем введения дополнительных структур. Однако, применительно к геометрии пространства-времени эти структуры должны вводится как дополнительные, а не заменять собой метрические свойства пространства-времени, поскольку Т-геометрия показывает, что геометрические свойства пространства-времени – это в первую очередь и главным образом его метрические свойства. Если вводить дополнительные структуры наравне с метрической структурой, т.е. как базовые структуры, то возможен конфликт между структурами.

Т-геометрия, как конструкция, основанная только на метрической структуре, существенно расширяет возможности геометрии и увеличивает количество возможных геометрий. Это проявляется при рассмотрении Т-геометрии как модели пространства-времени. Небольшое количественное изменение метрики пространства-времени порождает отказ от вырожденной геометрии Минковского, замену ее невырожденной геометрией и появление естественных стохастических геометрических структур. Характер пространства-времени драматически изменяется. Пространство-время, оставаясь детерминированным само по себе, допускает теперь существование недетерминрованных явлений. Ряд понятий таких как детерминистичность, причинность, непрерывность в таком пространстве-времени требует переосмысления, а может быть, даже пересмотра.

Модель пространства-времени, основанная на Т-геометрии, способна объяснить такие физические явления как отсутствие тахионов (т.е. частиц, описываемых пространственноподобными мировыми линиями,) и стохастическое поведение микрочастиц. Традиционная модель пространства-времени, основанная на римановой геометрии не может объяснить эти простые хорошо известные факты. Она просто воспринимает их как существующую реальность. Иногда приходится слышать, что квантовая механика якобы объясняет невоспроизводимость экспериментов с индивидуальными частицами (например, электронами). Однако, это не так. Квантовая механика только осуществляет описание стохастического поведения микрочастиц. Это описание остается феноменологическим до тех пор, пока не объяснена природа стохастического поведения микрочастиц аналогично тому, что уравнение Эйнштейна - Фоккера - Планка, взятое само по себе, только описывает стохастическое поведение броуновских частиц, но не объясняет его. Объяснение стохастического поведения броуновских частиц наступает только после ссылки на молекулярно-кинетическую теорию, объясняющую природу броуновского движения тепловым движением молекул, и выведения уравнения Эйнштейна - Фоккера - Планка на основе этой теории.

Всеобщий стохастический характер реальных физических объектов микромира, когда стохастичность становится правилом, а детерминистичность – исключением из правил, ведет к тому, что статистическое описание, его приемы и методы следует рассматривать, как составную часть Т-геометрии.

Список литературы

[1] Л.П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия.* ИЛ. 1948.

[2] П.К. Рашевский *Риманова геометрия и тензорный анализ.* Гостехиздат, 1956.

[3] С.П. Новиков, А.Т. Фоменко, *Элементы дифференциальной геометрии и топологии.* Наука, Москва 1987.

[4] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения.* Москва, 1994.

[5] И.Я. Бакельман, А.Л. Вернер, Б.Е. Кантор, *Введение в дифференциальную геометрию "в целом".* Наука, М. 1973.

[6] J.L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960. (русс. пер. Дж.Л. Синг, *Общая теория относительности.* ИИЛ, Москва, 1963.

[7] А.Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* ГИТТЛ. Москва, 1948.

[8] А.Д. Александров, Одна теорема о треугольнике в метрическом пространстве и некоторые приложения. *Труды института им. В.А.Стеклова* **32**, 5, (1951).

[9] A.D. Alexandrow, Uber eine Verallgemeinerung der Riemannischen Geometrie. *Acad. Wiss. Forsch. Math.,* No.1, 33-85, (1957).

[10] В.А. Топоногов, Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. *УМН,* **14**, 87, (1959).

[11] А.Д. Александров, В.Н. Берестовский, И.Г. Николаев, Обобщенные римановы пространства. *УМН,* **41**, вып. 3, 1-44, (1986).

[12] Дж. Бим, П. Эрлих, *Глобальная лоренцова геометрия* Москва, "Мир", 1985.

[13] R.P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367, (1948). Русс. пер. в сб. *Вопросы причинности в квантовой механике*, Москва, ИИЛ, 1955.

[14] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по путям.* Москва, Мир, 1968.

[15] М.Б. Менский *Группа путей: измерения, поля, частицы.* Москва, Наука, 1983.

[16] H.S. Ruse, Teylor's theorem in the tensor calculus. *Proc. London Soc.* **32**, 87, (1931).

[17] H.S. Ruse, An absolute partial differential calculus. *Q. J. Math.* **2**, 190, (1931).

[18] J.L. Synge, A characteristic function in Riemannian space and its applications to the solution of geodesic triangles. *Proc. London Math. Soc.* **32**, 241, (1931).

[19] K. Yano and Y. Muto, Notes on the derivation of geodesics and the fundamental scalar in a Riemannian space. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.* **18**, 142, (1936).

[20] Ю.А. Рылов, Описание риманова пространства с помощью конечного интервала. *Известия высших учебных заведений*, сер. мат. 3, 132, (1962).

[21] Yu.A. Rylov, Relative gravitational field and conservation laws in general relativity. *Ann. Phys.* (Leipzig) **12**, 329, (1964).

[22] B.C.DeWitt, *Dynamical theory of groups and fields*, New York, Gordon and Breach, 1965. (русс. пер. Б.С. ДеВитт, *Динамическая теория групп и полей.* Москва, Наука, ГРФМЛ, 1987.

[23] B.C.DeWitt, Quantum field theory in curved spacetime, *Physics Reports (Section C of Physics Letters Reviews)* **19**, 295, (1975).

[24] S.M. Christensen, Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitray curved background: The covariant point-separation method. *Phys. Rev.* **D14**, 2490, (1976).

[25] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, The generalized Schwinger-deWitt technique in gauge theories and quantum gravity. *Phys. Rep.* **119**, 1, (1985).

[26] Yu.A. Rylov, Distorted Riemannian space and technique of differential geometry. *J.Math. Phys.* **33**, 4220, (1992).

[27] Yu.A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876, (1991).

[28] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092, (1991).

[29] Yu.A. Rylov, Space-time distortion as a reason for quantum stochasticity. in *Chaos: the interplay between stochastic and deterministic behaviour*, eds. P.Garbachewski, M.Wolf, A.Weron, (Karpacz'95 Proc. Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin), vol.457, (1995) p. 523.

[30] Д.И. Блохинцев, *Пространство и время в микромире.* Наука, 1970.

[31] Д.И. Блохинцев, Стохастические пространства. Препринт ОИЯИ Р2 - 6094 (1971)

[32] Yu.A. Rylov, Quantum mechanics as a dynamic construction. *Found. Phys.* **28**, 245, (1998).

[33] Yu.A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.* (1999) (in print)*.

[34] Yu.A. Rylov, Statistical principle and pair production problem. *Physics Essays*, **4**, 300, (1991).

[35] М.Б. Менский, Явление декогеренции и теория непрерывных квантовых измерений. *УФН* **168**, 117, (1998).

*Смотри Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm.*
или mirror Web site: *http://194.190.131.172/~rylov/yrylov.htm.*