Монистическая концепция геометрии

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Рассматривается монистическая концепция геометрии, где имеется только одна фундаментальная величина (мировая функция). Все другие геометрические величины являются производными величинами (функциями мировой функции). Монистическая концепция геометрии сравнивается с плюралистическими концепциями геометрии, где имеется несколько независимых фундаментальных геометрических величин. Обобщение плюралистической концепции собственно евклидовой геометрии оказывается противоречивым, если получившаяся обобщенная геометрия неоднородна. В частности, риманова геометрия получается, вообще говоря, противоречивой, если она получается как обобщение плюралистической концепции евклидовой геометрии.

1 Введение

Термин "монизм"(монистический) применительно к геометрии означает, что концепция геометрии использует только одну фундаментальную величину (расстояние), а все остальные геометрические величины и понятия являются производными от фундаментальной величины. Плюралистическая концепция - это концепция, содержащая много фундаментальных величин, которые могут быть независимыми. Вообще говоря, монистическая концепция может рассматриваться как плюралистическая. Для этого достаточно объявить некоторые производные величины монистической концепции фундаментальными величинами плюралистической концепции. Однако, не всякая плюралистическая концепция может рассматриваться как монистическая. Для такого рассмотрения необходимы надлежащие связи между фундаментальными величинами плюралистической концепции.

Если собираются модифицировать или обобщать некоторую концепцию, то желательно представить концепцию в виде монистической концепции. В этом случае достаточно модифицировать свойства единственной фундаментальной величины. Другие (производные) величины будут модифицированы автоматически, потому что другие величины являются функциями единственной фундаментальной величины. Если модифицируемая концепция является плюралистической, то модификация затрудняется, потому что в плюралистической концепции могут быть связи между фундаментальными величинами. В этом случае нельзя независимо изменять свойства разных фундаментальных величин, которые выглядят как независимые.

Обычно монистическая концепция является более развитой, чем предшествующая плюралистическая концепция. Например, христианство, содержащее единого бога, является более развитой религией, чем язычество, где богов много. Обычно монистическая концепция (или менее плюралистическая концепция) появляется в результате развития плюралистической концепции, которое сопровождается уменьшением числа фундаментальных величин. Например теория тепловых явлений развивалась из аксиоматической термодинамики в статистическую физику. Это развитие сопровождалось преобразованием фундаментальных термодинамических величин в производные величины статистической физики. Появление промежуточных производных понятий монистической концепции делает монистическую концепцию более сложной концепцией, чем предшествующая плюралистическая концепция. Эта сложность обусловлена необходимостью выведения преобразованных величин, которые были фундаментальными в плюралистической концепции. Однако, более сложная монистическая концепция позволяет описывать и объяснять такие физические явления, которые не могут быть описаны в рамках плюралистической теории. Например, тепловые флуктуации описываются статистической физикой, но их нельзя описать в рамках аксиоматической термодинамики.

Геометрия является наукой о расположении и форме геометрических объектов в пространстве и в пространстве событий (пространстве-времени). Любая геометрия задается на множестве Ω точек (событий). Любой геометрический объект $\mathcal{O}$ является множеством Ω' точек $P \in \Omega'$ с $(\Omega' \subset \Omega)$. Форма геометрического объекта $\mathcal{O}$ описывается, если задано расстояние $\rho\left(P_1, P_2\right), \forall P_1, P_2 \in \Omega'$. Форма и взаимное расположение всех геометрических объектов полностью задается, если задано расстояние $\rho\left(P_1, P_2\right), \forall P_1, P_2 \in \Omega$. В обычном пространстве расстояние ρ является вещественной величиной. В пространстве событий расстояние ρ является или вещественной неотрицательной величиной, или мнимой величиной. В этом случае более удобно использовать величину $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$, которая всегда вещественна. Величина σ называется мировой функцией. Эта величина была введена Дж.Л.Сингом [1] для описания римановой геометрии.

Таким образом, геометрия пространства событий (геометрия пространства-времени) полностью описывается одной вещественной функцией σ.

$$\sigma: \quad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R},\quad \sigma(P,Q)=\sigma(Q,P),\quad \sigma(P,P)=0,\quad \forall P,Q\in\otimes \tag{1.1}$$

Поскольку движение физических тел в пространстве описывается как геометрический объект в пространстве-времени, построение геометрических объектов и исследование их свойств является очень важным в таких прикладных науках как физика и механика. Любой геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается перечислением точек этого объекта $\mathcal{O}$. Однако такое описание с помощью прямого перечисления точек, принадлежащих к $\mathcal{O}$, содержит слишком много информации. Стремятся упростить эту процедуру, строя геометрические объекты из блоков. Эти блоки содержат много точек пространства-времени, и построение геометрического объекта $\mathcal{O}$ сводится к конечному или счетному числу операций с блоками.

Процедура построения геометрических объектов из блоков была разработана в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Она может быть использована для описания обычного пространства (но не для пространства-времени), потому что мировая функция σ_{E} геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ неотрицательна. Неотрицательность мировой функции σ_{E} существенно используется для построения геометрических объектов в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Прямое перечисление точек геометрического объекта может быть заменено некоторыми соотношениями, которые выполняются для точек $P\in\mathcal{O}$ и только для них. Однако такое описание нуждается в использовании числовых функций, заданных на Ω, например, использовании мировой функции σ.

На самом деле, собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ обычно строится из трех сортов блоков (точка, отрезок прямой, угол) без упоминания того факта, что эти блоки описываются в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E} (смотри детали в [2]). Свойства этих трех блоков постулируются в виде аксиом. Используя правила построения геометрических объектов из этих блоков, можно сформулировать собственно евклидову геометрию в виде логического построения. Базовые утверждения геометрии имеют вид геометрических аксиом, сформулированных в терминах базовых геометрических величин (точки, прямой и угла). Обычно расстояние ρ_{E} (или мировая функция σ_{E}) рассматриваются как некая производная величина, о которой можно, вообще, не упоминать.

Тот факт, что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть сформулирована в терминах мировой функции (расстояния) хорошо известен. Тем не менее обычно расстояние не используется как фундаментальная величина собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Эта величина позволяет *сформулировать геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ как монистическую концепцию, основанную на единственной фундаментальной величине* (мировой функции σ_{E}). Разумеется мировая функция σ_{E} геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ должна удовлетворять некоторым условиям, сформулированным в терминах мировой функции. Необходимые и достаточные условия того, что геометрия $\mathcal{G}$, описываемая мировой функцией σ, является n-мерной собственно евклидовой геометрией, имеют вид [3]

I.

$$\exists\mathcal{P}^n\subset\Omega,\qquad F_n(\mathcal{P}^n)\neq 0,\qquad F_{n+1}(\Omega^{n+2})=0, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ..P_n\}$, величина $F_n(\mathcal{P}^n)$ представляет собой определитель Грамма

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| \, , \quad i,k = 1,2,...n \tag{1.3}$$

и $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)$ есть скалярное произведение двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, которое определяется в терминах мировой функции σ с помощью соотношения

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) = \sigma(P_0, P_k) + \sigma(P_0, P_i) - \sigma(P_i, P_k) \tag{1.4}$$

II.

$$\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)[x_i(P) - x_i(Q)][x_k(P) - x_k(Q)], \qquad \forall P,Q \in \Omega, \tag{1.5}$$

где величины $x_i(P)$, $x_i(Q)$ определяются соотношениями

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) \, , \qquad x_i(Q) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \, , \qquad i = 1,2,...n \tag{1.6}$$

Контравариантные составляющие $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $(i,k = 1,2,\ldots n)$ метрического тензора определяются ковариантными составляющими $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $(i,k = 1,2,\ldots n)$ с помощью соотношений

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(\mathcal{P}^n) g^{kl}(\mathcal{P}^n) = \delta_i^l, \qquad i,l = 1,2,\ldots n \tag{1.7}$$

где

$$g_{ik}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) \, , \qquad i,k = 1,2,\ldots n \tag{1.8}$$

III. Соотношения

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = x_i, \qquad x_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1,2,\ldots n, \tag{1.9}$$

рассматриваемые как уравнения для определения $P \in \Omega$ как функции координат x_i, $i = 1,2,...n$, всегда имеют одно и только одно решение.

Условие I определяет размерность n геометрии и n базисных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1,2,...n$ на множестве Ω. Условие II определяет свойства метрического тензора $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$.

В таком представлении собственно евклидова геометрия выглядит как монистическая концепция, которая описывается единственной фундаментальной величиной: мировой функцией σ. Другие геометрические величины (понятия и геометрические объекты) являются производными в том смысле, что все они могут быть выражены в терминах точек множества Ω и в терминах мировых функций между ними.

Перспектива построения монистической концепции не только для собственно евклидовой геометрии казалась привлекательной. Было введено метрическое пространство, и построена так называемая метрическая геометрия. Однако построение метрической геометрии возможно только для вещественной метрики (расстояния) $\rho \geq 0$. Такая геометрия не может быть построена в пространстве-времени. Кроме того для построения прямой линии (кратчайшей) нужно наложить на метрику ρ дополнительное ограничение (аксиому треугольника)

$$\rho(P,Q) + \rho(P,R) \geq \rho(R,Q), \quad \forall P,Q,R \in \Omega \tag{1.10}$$

Аксиома треугольника (1.10) отражает нашу веру в то, что существуют только такие геометрии, где прямая представляет собой одномерное множество точек.

Были сделаны попытки [4, 5] построить так называемую дистантную геометрию, в которой нет ограничения (1.10). К сожалению, эти попытки были неудачны в том смысле, что полученная дистантная геометрия не была монистической и полностью метрической. Она содержала неметрическую процедуру, которая позволяла строить прямую линию с помощью непрерывного отображения отрезка числовой оси $[0,1]$ на множество Ω.

2 Плюралистический подход к римановой геометрии как причина ее противоречивости

Обычно не используется монистическая концепция собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, где имеется только одна фундаментальная геометрическая величина (мировая функция). Вместо этого используется плюралистическая концепция геометрии, где имеется несколько фундаментальных геометрических величин (например, размерность, прямая, угол,...), которые рассматриваются как независимые геометрические величины. В собственно евклидовой геометрии удается согласовать свойства этих различных величин и построить непротиворечивую геометрию. Однако, в неевклидовой геометрии не всегда удается согласовать свойства различных фундаментальных величин. Имея несколько фундаментальных величин и приписывая им некоторые свойства, нельзя быть уверенным, что эти свойства будут совместимы между собой. В результате полученная геометрия оказывается противоречивой. Проблема согласованности между свойствами различных фундаментальных величин формулируется обычно в плюралистической геометрии как непротиворечивость аксиом плюралистической геометрии. Любая проверка непротиворечивости геометрических аксиом требует массу усилий, которые не всегда могут быть осуществлены. В результате плюралистическая геометрия оказывается противоречивой. В результате риманова геометрия, которая строится обычно как плюралистическая геометрия, оказывается противоречивой.

Используя монистическую концепцию, где имеется только одна фундаментальная величина, непротиворечивая геометрия строится автоматически. В качестве примера рассмотрим построение прямой линии в монистической геометрии $\mathcal{G}$, описываемой мировой функцией σ, заданной на множестве Ω точек P. Будем использовать термин σ-пространство для величины $V = \{\sigma, \Omega\}$. Евклидово пространство является специальным случаем σ-пространства с $\sigma = \sigma_{\mathrm{E}}$. В собственно евклидовой геометрии (евклидово σ-пространство $V_{\mathrm{E}} = \{\sigma_{\mathrm{E}}, \Omega\}$), отрезок $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ прямой линии между точками P_0 и P_1 определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{[P_0 P_1]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma\left(P_0, R\right)} + \sqrt{2\sigma\left(P_1, R\right)} - \sqrt{2\sigma\left(P_0, P_1\right)} = 0 \right\} \tag{2.1}$$

где мировая функция σ совпадает с евклидовой мировой функцией σ_{E}. Тот же самый вид отрезок прямой $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ должен иметь в любом другом σ-пространстве. В n-мерном σ-пространстве отрезок $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ представляет собой, вообще говоря, $(n-1)$-мерную поверхность. Однако в собственно евклидовой геометрии эта $(n-1)$-мерная поверхность вырождается в одномерное множество. Этот факт является следствием специальных свойств (1.2) - (1.9) евклидовой мировой функции σ_{E}, которая порождает выполнение аксиомы треугольника (1.10). В собственно римановой геометрии аксиома треугольника (1.10) тоже верна. Это тоже связано со специальным видом мировой функции σ_{R} римановой геометрии, хотя при традиционном построении римановой геометрии мировая функция σ_{R} является производной величиной, определяемой соотношением

$$\sigma_{\mathrm{R}}\left(P_0, P_1\right) = \frac{1}{2} \left(\int_{P_0}^{P_1} \sqrt{g_{ik}\left(x\right) dx^i dx^k} \right)^2 \tag{2.2}$$

где интеграл в (2.2) берется вдоль геодезической, соединяющей точки P_0 P_1.

Мировая функция σ_{R}, определяемая соотношением (2.2) удовлетворяет уравнению [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sigma_{\mathrm{R}}\left(x, x'\right) g^{ik}\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \sigma_{\mathrm{R}}\left(x, x'\right) = 2\sigma_{\mathrm{R}}\left(x, x'\right) \tag{2.3}$$

которая описывает по существу экстремальные свойства мировой функции σ_{R}, т.е. тот факт, что мировая функция σ_{R} порождает выполнение условия (1.10).

Обычно считается, что геометрия пространства-времени является римановой (псевдо-римановой) геометрией, и мировая функция σ_{R} реальной геометрии пространства-времени удовлетворяет уравнению (2.3). Каковы причины такого утверждения?

Риманова геометрия пространства-времени получается обычно как обобщение собственно евклидовой геометрии на случай искривленной геометрии пространства-времени. При таком обобщении исходная геометрия рассматривается как плюралистическая геометрия, где имеется несколько фундаментальных величин: точка, прямая, линейное пространство и т.д. Мировая функция рассматривается как производная величина, определяемая соотношением (2.2). При обобщении свойства фундаментальных объектов изменяются. Изменение фундаментальных величин означает изменение аксиом, описывающих свойства этих величин. Изменение различных фундаментальных величин должно быть осуществлено согласованным путем. (Новые аксиомы обобщенной геометрии должны быть совместимы).

Сравним монистический подход с плюралистическим на простом примере. В евклидовой геометрии два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ коллинеарны ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$), если и только если определитель Грамма обращается в нуль

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 : \qquad \left| \begin{array}{cc} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) \\ (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) \end{array} \right| = 0 \tag{2.4}$$

или в развернутом виде

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2 \tag{2.5}$$

где скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ и модуль вектора $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ выражаются через мировую функцию с помощью формул

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) \tag{2.6}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \sqrt{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)} = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \tag{2.7}$$

Прямая линия $\mathcal{T}_{P_0P_1,Q_0}$, проходящая через точку Q_0 коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{P_0P_1,Q_0} = \{R|\mathbf{Q}_0\mathbf{R} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\} = \left\{R|\,(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{R})^2 - |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{R}|^2 = 0\right\} \tag{2.8}$$

Если точка Q_0 совпадает с точкой P_0, выражение в (2.8) может быть представлено в виде

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R})^2 - |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{R}|^2 = A(P_0, P_1, R)\, A(P_0, R, P_1)\, B(P_0, P_1, R) \tag{2.9}$$

где

$$A(P_0, P_1, R) = \sqrt{\sigma(P_0, R)} + \sqrt{\sigma(P_1, R)} - \sqrt{\sigma(P_1, P_0)} \tag{2.10}$$

$$A(P_0, R, P_1) = \sqrt{\sigma(P_1, P_0)} + \sqrt{\sigma(P_1, R)} - \sqrt{\sigma(P_0, R)} \tag{2.11}$$

$$B(P_0, P_1, R) = \sigma(P_1, R) - \sigma(P_0, R) - \sigma(P_1, P_0) - 4\sqrt{\sigma(P_0, P_1)\,\sigma(P_0, R)} \tag{2.12}$$

Множитель $A(P_0, P_1, R)$ отвечает за ту часть прямой линии, которая находится между точками P_0 и P_1, тогда как множитель $A(P_0, R, P_1)$ отвечает за ту часть прямой, что находится вне точек P_0 и P_1. Можно видеть из (2.1), что определение отрезка $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ использует только множитель $A(P_0, P_1, R)$.

Сравним монистический подход и плюралистический на простом примере. В собственно евклидовой геометрии два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$, если эти два вектора параллельны

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{2.13}$$

и их модули равны,, т.е. выполнены следующие условия

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) : \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{2.14}$$

где скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ и модуль вектора $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ выражаются через мировую функцию формулами (2.6) и (2.7)

Это есть добротное определение равенства векторов, потому что оно формулируется в терминах фундаментальной величины (мировой функции), и оно не содержит ссылки на средства описания (систему координат). Естественно использовать определение (2.14) в других геометриях, в частности, в римановой геометрии. В римановой геометрии определение (2.14) используется только для случая, когда точки P_0 и Q_0 совпадают $(P_0 = Q_0)$. В этом случае определение (2.14) совпадает с (1.4). В случае, когда точки P_0 и Q_0 не совпадают, понятие эквивалентности векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ не определяется. Но почему?

Ответ такой. Если в неоднородной геометрии (в римановой геометрии) эквивалентность двух векторов определяется соотношениями (2.14), эквивалентность векторов оказывается, вообще говоря, многовариантной. Это означает, что в точке Q_0 имеется много векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1', \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'', ...$, которые эквивалентны вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и не эквивалентны между собой. Многовариантность есть следствие того факта, что для определения вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, нужно решить два уравнения (2.14) относительно точки Q_1 при заданных точках P_0, P_1, Q_0. В случае евклидовой мировой функции σ_{E} решение всегда единственно благодаря свойствам евклидовой мировой функции σ_{E}. Однако в случае произвольной мировой функции σ может быть много решений, или не быть ни одного решения вовсе. Многовариантность эквивалентности векторов приводит к интранзитивности отношения эквивалентности. Это означает, что многовариантная геометрия является неаксиоматизируемой, потому что в любой аксиоматзируемой геометрии отношение эквивалентности транзитивно. Вообще говоря, многовариантность отношения эквивалентности приводит к тому, что прямые линии оказываются многомерными множествами. Это следует из того факта, что условие параллельности (2.13) является одним их условий эквивалентности векторов (2.14). Условие параллельности (2.13) является частным случаем условия коллинеарности (2.5). Таким образом, существует связь между многовариантностью и многомерностью прямых линий в многовариантной геометрии.

Многовариантная неаксиоматизируемая геометрия представляется недопустимой математикам, которые привыкли рассматривать только аксиоматизируемые геометрии. Математики рассматривают любую геометрию как логическое построение, и они не знают, как работать с геометрией, которая не является логическим построением.

В римановой геометрии многовариантность равенства двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ имеет место, вообще говоря, если только $P_0 \neq Q_0$. Равенство векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$ является одновариантным в римановой геометрии. В результате отрезки (2.1) геодезических (прямых) в римановой геометрии оказываются одномерными. Только прямые вида (2.8) оказываются многомерными в римановой геометрии. Однако такие прямые линии практически не появляются ни в физике, ни в математике, и математики относятся с недоверием к утверждению о многовариантности геометрии.

Используя плюралистический подход при переходе от собственно евклидовой геометрии к римановой геометрии, принимают, что одномерный характер прямых в евклидовой геометрии является свойством любой геометрии. Однако, это свойство является специальным свойством собственно евклидовой геометрии, обусловленным ограничениями (1.2) - (1.9). В римановой геометрии не все свойства (1.2) - (1.9) выполнены, и некоторые прямые (геодезические) оказываются многомерными.

Чтобы устранить многовариантность, математики решили не рассматривать эквивалентность векторов в различных точках пространства. В результате в римановой геометрии рассматривается только эквивалентность векторов, имеющих общее начало. Эквивалентность векторов в различных точках определяется с помощью специальной процедуры, известной как параллельный перенос вектора. Процедура параллельного переноса обеспечивает привычную одновариантную эквивалентность векторов в различных точках, хотя результат зависит от пути параллельного переноса. (В результате по существу эквивалентность векторов разных точках оказывается многовариантной). Такое решение проблемы эквивалентности векторов соответствует плюралистическому подходу к геометрии, когда в римановой геометрии можно изменять свойства векторов произвольным образом. В результате риманова геометрия оказывается противоречивой, хотя эта противоречивость хорошо маскируется.

При плюралистическом подходе к римановой геометрии мировая функция σ_{R}, определяемая соотношением (2.1), оказывается производной величиной, которая зависит от формы геодезических. Кроме того в римановой геометрии может быть несколько различных геодезических, соединяющих точки P_0 и P_1. В этом случае мировая функция $\sigma_{\mathrm{R}}(P_0, P_1)$, определяемая соотношением (2.2) оказывается многозначной. Это недопустимо в монистической концепции геометрии, где мировая функция является фундаментальной величиной геометрии.

Если тем не менее мы хотим использовать мировую функцию σ_{R}, полученную с помощью соотношения (2.2), и рассматривать полученную мировую функцию σ_{R} как фундаментальную величину, то нужно рассматривать однозначную ветвь мировой функции σ_{R}, отбросив все остальные ветви. После такой процедуры получается мировая функция как фундаментальная величина, которая не зависит от выбора геодезических. Разные "римановы"геометрии соответствуют различным выборам геодезических, порождающих мировую функцию.

Пусть риманова геометрия задана на множестве точек Ω. Вырежем отверстие Ω_1 в множестве Ω. При плюралистическом подходе геометрия на множестве $\Omega\backslash\Omega_1$, вообще говоря изменится, потому что отверстие изменяет форму некоторых геодезических. В результате точечное множество $\Omega\backslash\Omega_1$, не может быть вложено изометрически в множество Ω, потому что множество геодезических, определяющих мировую функцию σ_{R} с помощью (2.2), изменилось. Это тоже проявление противоречивости римановой геометрии в рамках плюралистического подхода.

Используя плюралистический подход при переходе от евклидовой геометрии к римановой геометрии, мы одновременно изменяем различные фундаментальные величины. Очень трудно изменять их согласованно и получить непротиворечивую концепцию римановой геометрии. При монистическом подходе имеется только одна фундаментальная величина σ. Всякое изменение мировой функции σ порождает обобщенную геометрию. Не возникает никаких проблем с непротиворечивостью этой обобщенной геометрии, потому что она, вообще говоря, не является логическим построением. В полученной обобщенной геометрии нет ни теорем, ни аксиом, потому что это – конструктивная геометрия. Все определения и геометрические объекты обобщенной геометрии получаются из соответствующих определений и геометрических объектов собственно евклидовой геометрии с помощью деформации. Пусть некоторое утверждение собственно евклидовой геометрии записано в терминах мировой функции σ_{E}, *при условии, что специальные соотношения (1.2) - (1.9) собственно евклидовой геометрии не используются в этой записи.* Заменяя σ_{E} в этой записи мировой функцией σ обобщенной геометрии, получаем соответствующее утверждение обобщенной геометрии. При такой деформации собственно евклидовой геометрии формальная логика не используется, и проблема противоречивости полученной геометрии не может быть поставлена, вообще.

Важное замечание.

В приложениях к теории относительности используется практически только одно соотношение (2.6) для скалярного произведения двух векторов, которое не использует специальные соотношения (1.2) - (1.9).

Неважно, что полученная обобщенная геометрия не является логическим построением. Обобщенная геометрия является наукой о форме и расположении геометрических объектов. Это обстоятельство важно в приложениях геометрии к физике и механике. Очень важно, что монистическая концепция обобщенной геометрии не нуждается в доказательстве многочисленных теорем, что важно при плюралистическом подходе к геометрии.

Противоречивость римановой геометрии, полученной в рамках плюралистического подхода, является очень серьезным препятствием для применения римановой геометрии в релятивистской теории гравитации. Используя монистический подход к геометрии пространства-времени, можно обобщить общую теорию относительности на случай неримановой геометрии [6, 7].

3 Проблемы перехода от плюралистической концепции геометрии к монистической концепции

Хотя монистическая концепция геометрии более совершенна, чем предшествующая плюралистическая концепция, научному сообществу новая монистическая концепция как правило не нравится. Научное сообщество не признает новую монистическую (или менее плюралистическую) концепцию в течение длительного времени. Возражения научного сообщества против новой монистической (или менее плюралистической) концепции имеют скорее социальный, чем научный характер. В самом деле, уменьшая число фундаментальных величин в новой монистической концепции, мы вынуждены преобразовывать некоторые фундаментальные величины плюралистической концепции в производные величины монистической (или менее плюралистической) концепции. Производные величины монистической концепции выглядят более сложно, чем предшествующие величины плюралистической концепции, и члены научного сообщества задают себе вопрос: "Зачем рассматривать более сложные величины, если это не дает ничего нового?"

Такую же ситуацию мы имели при переходе от аксиоматической термодинамики к статистической физике. В самом деле, соотношения статистической физики и кинетической теории много сложнее, чем простые правила работы с термодинамическими величинами. Они действительно не дают ничего нового в тех областях физики, где хорошо работает термодинамика и где работает большинство исследователей. Статистическая физика дает новые результаты только при рассмотрении тепловых флуктуаций. Однако это обстоятельство не ясно для большинства физиков. Научное сообщество в целом было настроено против работ Болцмана и Гиббса, которые ввели монистическую концепцию термических явлений, сведя тепловые явления к механическим.

Подобная ситуация имеет место в квантовой механике. Использование неаксиоматизируемой геометрии пространства-времени в микромире позволяет свести квантовые эффекты к геометрическим эффектам. Пусть в микромире геометрия пространства-времени описывается мировой функцией

$$\sigma_{\mathrm{d}} = \sigma_{\mathrm{M}} + d \cdot \mathrm{sign}\sigma_{\mathrm{M}}, \qquad d = \frac{\hbar}{2bc} = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского. Здесь $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света и b есть некоторая универсальная постоянная. Мировая цепь (линия), описывающая движение частицы, оказывается стохастической в этой геометрии пространства-времени. Статистической описание стохастических времениподобных мировых цепей (линий) эквивалентно квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера [8]. В такой концепции квантовые принципы являются следствием параметров геометрии пространства-времени. Число фундаментальных величин уменьшается и концепция становится менее плюралистической. Однако при этом не обнаруживается новых эффектов в области, описываемой традиционной квантовой механикой. Новые эффекты можно обнаружить в области теории элементарных частиц [9]. Необходимы новые исследования в теории элементарных частиц, использующие новую менее плюралистическую концепцию. Расчеты, связанные с этими новыми исследованиями довольно сложны, используемый формализм является новым, и никто не интересуется этой менее плюралистической концепцией пока не будут полученные новые численные результаты, показывающие, что менее плюралистическая концепция верна.

Монистическая концепция геометрии существенна также и в мегамире. Современная теория гравитации полагает, что геометрия пространства-времени не может быть неаксиоматизируемой (неримановой) геометрией. Такая точка зрения основывается на результатах современной геометрии, где всякая геометрия рассматривается как логическое построение (а не наука о расположении геометрических объектов). Например, симплектическая геометрия не имеет ничего общего со свойствами пространства-времени или пространства. Но она использует математический формализм, который близок к формализму евклидовой геометрии. Математики используют термин "геометрия" для симплектической геометрии, потому что это скорее логическое построение, чем наука о расположении геометрических объектов в пространстве или пространстве-времени.

По-видимому, такое отношение к геометрии является причиной отторжения конструктивных (нексиоматизируемых) геометрий, которые важны для применения геометрии к физике. Математики готовы принять и развивать противоречивую риманову геометрию [10], но они не готовы изучать монистическую концепцию геометрии, где все в порядке с непротиворечивостью. Например, когда я предложил свой доклад, озаглавленный "Неаксиоматизируемые геометрии и их применение в физике" на один из семинаров Института Математики имени Стеклова, мой доклад был отвергнут. Мне сказали, что нет участников семинара, заинтересованных в этом вопросе. Разумеется, это действительно так. Но институт им. Стеклова является ведущим математическим институтом России, и его сотрудники предпочитают развивать и использовать привычную противоречивую концепцию геометрии, игнорируя непротиворечивую концепцию!

Тем не менее такой подход к монистической концепции геометрии представляется достаточно естественным в свете общего отношения к переходу от плюралистической концепции к монистической, хотя в данном случае монистическая концепция геометрии много проще, чем, например, менее общая концепция римановой геометрии.

Однако, нет правил без исключений. Такой выдающийся геометр, как Гриша Перельман оценил ситуацию с монистической концепцией геометрии правильно. Я не имею удовольствия быть знакомым с ним, и оцениваю его точку зрения, анализируя поведение. Через несколько месяцев (конец 2005 года) после появления работы [10] Перельман ушел из Математического института, где он работал, сказав директору института, что он прекращает свои математические исследования. Такое решение преуспевающего геометра может быть объяснено только сильным разочарованием в своей деятельности. Всю свою жизнь Перельман развивал топологическое направление в геометрии, где топологические величины являются фундаментальными величинами в геометрии. Когда он понял, что топологические величины являются производными величинами, которые определяются мировой функцией, а риманова геометрия, которая использовалась в его исследованиях, является противоречивой, он был шокирован. По-видимому, этот шок определил его решение прервать свои занятия математическими исследованиями.

Что касается, его отказа от медали Филдса и премии Института Клея, то это важно только с точки зрения меркантильных обывателей, измеряющих все жизненные ценности в рублях и долларах. С точки зрения Перельмана деньги – это пустяки по сравнению с проблемами математики. Кроме того, проблема, решенная Перельманом, является Проблемой Тысячелетия только с точки зрения сегодняшнего дня. Через несколько лет эта проблема превратится в заурядную проблему топологии. Перельман очень хорошо понимал это. Он отказался от премии, ссылаясь на некомпетентность людей, присудивших ему премию и не понимавших того, что понимал он. На самом деле, можно понять поведение Перельмана только зная о противоречивости римановой геометрии. Но никто не обращал внимания на эту противоречивость, если даже был знаком с признаками этой противоречивости.

Я не обсуждал с Перельманом его отношение к римановой геометрии. Моя интерпретация поведения Перельмана является только гипотезой. Однако это – очень правдоподобная гипотеза. Я не знаю других разумных гипотез, которые могли бы объяснить поведение Перельмана. Я выдвинул эту гипотезу для того, чтобы убедить тех исследователей, которые верят скорее авторитетам, чем логическим аргументам. Риманова геометрия в своем традиционном изложении противоречива, если даже моя интерпретация поведения Перельмана не верна.

Таки образом, отношение исследователей к монистической концепции геометрии развивается естественным путем. Я думаю, что тем исследователям, которые поймут преимущества монистической концепции геометрии и будут использовать ее в своих исследованиях, удастся добиться прогресса в физике.

Список литературы

[1] Synge, J.L. *Relativity: the General Theory.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1960.

[2] Yu. A. Rylov, Different conceptions of Euclidean geometry. *e-print 0709.2755.*

[3] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002).

[4] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**,

[5] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953. 75-113, (1928).

[6] Yu. A. Rylov, Relativistic nearness of events and deformation principle as tool of the relativity theory generalization on the arbitrary space-time geometry. *e-print 0910.3582v4*

[7] Yu. A. Rylov, Necessity of the general relativity revision and free motion of particles in non-Riemannian space-time geometry. *e-print 1001.5362v1.*

[8] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32**(**8**), *2092-2098, (1991).*

[9] Yu. A. Rylov, Necessity of the general relativity revision and free motion of particles in non-Riemannian space-time geometry. *e-print 1001.5362v1.*

[10] Yu. A. Rylov, New crisis in geometry? *e-print math.GM/0503261*.