Птолемеевость традиционной программы исследований микромира и альтернативная исследовательская программа

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, 117526, Москва, пр. Вернадского 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site: *http://194.190.131.172/~rylov/yrylov.htm*

Аннотация

Показано, что традиционный подход к исследованию микромира использует ошибочное положение (неправильную модель пространства-времени), ошибочность которого компенсируется с помощью дополнительных гипотез (принципов квантовой механики). Этим он напоминает доктрину Птолемея в небесной механике. Предлагается альтернативная исследовательская программа, использующая более точную модель пространства-времени и не нуждающаяся в дополнительных гипотезах (принципах квантовой механики) для непринужденного объяснения квантовых эффектов. Если бы более точная модель пространства-времени была известна в начале XX века, т.е. в момент начала исследований микромира, развитие квантовой механики могло бы пойти по другому пути. Альтернативная программа появилась со столетним опозданием из-за того, что теоретическая физика все это время не располагала надлежащим математическим аппаратом. Отсутствие этого аппарата было связано с существованием определенных предубеждений, которые пришлось преодолеть, создавая новые концепции геометрии и статистического описания. В предлагаемой работе кратко излагаются основные положения созданного математического аппарата и принципы его использования в альтернативной программе исследования микромира.

1 Введение

Когда в начале XX века началось изучение физических явлений микромира, исследователи столкнулись с двумя серьезными проблемами, которые не могли быть решены в рамках классической физики того времени и требовали нового подхода. Первая проблема – это проблема движения микрочастиц со скоростями близкими к скорости света. Она была решена созданием специальной теории относительности (СТО). Концентрированным выражением принципов СТО является утверждение, что пространство событий (пространство-время) описывается геометрией Минковского, или, что одно и то же, мировой функцией [1]

$$\sigma_{\mathrm{M}}\left(x,x'\right)=\sigma_{\mathrm{M}}\left(t,\mathbf{x},t',\mathbf{x}'\right)=\frac{1}{2}\left(c^2\left(t-t'\right)^2-\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)^2\right) \tag{1.1}$$

где c есть скорость света, а $x=\{t,\mathbf{x}\}$ и $x'=\{t',\mathbf{x}'\}$ суть координаты двух произвольных точек в пространстве событий.

Вторая проблема – это проблема стохастического движения микрочастиц, которое казалось невозможным понять и объяснить в рамках детерминистической классической физики. Для описания явлений, связанных со стохастическим движением микрочастиц, следовало дополнительно модифицировать геометрию пространства событий, заменив мировую функцию σ_{M} на σ

$$\sigma\left(x,x'\right)=\sigma_{\mathrm{M}}\left(x,x'\right)+D\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(x,x'\right)\right), \tag{1.2}$$

где σ_{M} есть мировая функция Минковского (1.1), а

$$D=D(\sigma_{\mathrm{M}})=\left\{\begin{array}{lll} d & \text{если} & \sigma_{\mathrm{M}}>\sigma_0 \\ 0 & \text{если} & \sigma_{\mathrm{M}}\leq 0 \end{array}\right., \tag{1.3}$$

$$d=\frac{\hbar}{2bc}=\text{const}\approx 10^{-21}\text{см}^2,\qquad \sigma_0=\text{const}\approx d\approx 10^{-21}\text{см}^2$$

есть поправка, называемая дисторсией. Здесь $\hbar$ – квантовая постоянная, $b\approx 10^{-17}$г/см – новая универсальная постоянная. Значения дисторсии D в интервале $[0,\sigma_0]$ пока неизвестны. Они должны быть установлены в результате дальнейших исследований.

Формально изменение геометрии очень мало, т.к. дисторсия D есть лишь небольшая поправка к мировой функции геометрии Минковского. Однако, качественно изменение модели пространства событий при переходе от (1.1) к (1.2) получается не меньшим, чем при переходе от модели Ньютона к модели Минковского. Геометрия пространства событий, порождаемая мировой функцией (1.2), (мы будем называть ее Т-геометрией) не является римановой геометрией. Т - геометрия является невырожденной геометрией. В такой геометрии в каждой точке пространства имеется много единичных векторов, параллельных данному, и движение свободных частиц является изначально стохастическим, хотя сама по себе геометрия является вполне детерминированной. Легко понять, что движение свободных частиц является стохастическим в стохастической геометрии [2, 3, 4, 5, 6, 7], но то, что движение частиц может быть изначально стохастическим в детерминированной геометрии, кажется несколько неожиданным и требует пояснения. Оно будет дано во втором разделе.

Явления, обусловленные стохастичностью движения микрочастиц (известные как квантовые эффекты), могут быть непринужденно объяснены классической физикой в пространстве событий с Т-геометрией (1.2) без каких бы то ни было дополнительных предположений или гипотез. Что касается самого утверждения (1.2) о характере геометрии пространства событий, то оно не является дополнительной гипотезой. Это просто уточнение геометрии Минковского, используемое вместо (1.1). Другими словами, (1.2) является гипотезой в той же степени, в какой является гипотезой утверждение, что геометрия пространства событий есть геометрия Минковского. Как видно из (1.2), (1.3) мировая функция σ существенно отличается от σ_{M} только для малых пространственно-временных интервалов порядка 10^{-10}см, то-есть в микромире.

По ряду причин, которые мы обсудим во втором разделе, Т-геометрия не была известна в начале XX века, и проблема стохастичности микрочастиц решалась иначе. Ньютоновская модель пространства-времени была сохранена, но был сделан ряд гипотез о законах движения микрочастиц. Эти дополнительные гипотезы известны как принципы квантовой механики. А сама концепция такого решения проблемы стохастичности микрочастиц называется квантовой механикой (КМ).

Квантовая механика является изначально нерелятивистской теорией, т.е. первая и вторая проблемы микромира сначала решаются по отдельности. Затем возникает проблема объединения квантовой механики (КМ) и СТО. Схема традиционной программы исследования микромира выглядит так

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & \begin{array}{c}\text{проблема}\\ \text{больших}\\ \text{скоростей}\end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c}\text{геометрия}\\ \text{Минковского}\end{array} & \searrow & \\ \begin{array}{c}\text{классич.}\\ \text{физика}\end{array} & & & & & & \begin{array}{c}\text{проблема}\\ \text{объединения}\\ \text{СТО и КМ}\end{array} \\ & \searrow & \begin{array}{c}\text{проблема}\\ \text{стохастичности}\\ \text{микрочастиц}\end{array} & \rightarrow & \text{принципы КМ} & \nearrow & \end{array} \qquad (1.4)$$

Релятивистская квантовая теория поля и теория элементарных частиц – это разные аспекты проблемы объединения КМ и СТО.

Непредубежденный наблюдатель, знакомый с другим возможным вариантом (1.2) решения проблемы, склонен интерпретировать это в том смысле, что исследовательская программа (1.4) использует ошибочное положение (неадекватную модель пространства-времени), которое проявляется в виде противоречий, возникающих то в одном, то в другом месте. Для сведения концов с концами приходится вводить все новые и новые гипотезы, компенсирующие конкретные проявления ошибочного положения теории. В то же время исследователи, развивающие теорию, склонны списывать все возникающие проблемы на сложность физических явлений в микромире. Концепция, содержащая ошибочное положение и компенсирующая его с помощью дополнительных гипотез, чтобы получить согласие с наблюдениями, известна в истории науки. Это – хорошо известная доктрина Птолемея. В доктрине Птолемея удавалось правильно описывать движение небесных светил несмотря на ошибочное утверждение о положении Земли в центре Вселенной. Это достигалось ценой введения все новых и новых дополнительных гипотез (о дифферентах и эпициклах), компенсирующих изначальное ошибочное утверждение о положении Земли. Несмотря на успехи в объяснении астрономических наблюдений доктрина Птолемея в конечном счете вела в тупик, и наиболее разумным способом предоления трудностей была замена ошибочного утверждения на правильное. О концепции типа доктрины Птолемея нельзя сказать , что она неверна, так как она правильно описывает наблюдения, однако она не является полноценной научной теорией, так как использует ошибочное положение. Далее такие концепции будут называться компенсирующими, или птолеемевыми концепциями.

Нечто аналогичное наблюдается в решении проблемы объединения КМ и СТО. Используется неадекватная модель пространства-времени, и это является источником многих, если не всех, проблем современной квантовой теории. Использование адекватной модели (1.2) пространства-времени снимает проблему объединения КМ и СТО, так как концепция (1.2) является изначально релятивистской и "квантовой" (она является квантовой в том смысле, что включает в себя квантовую постоянную $\hbar$). Кроме того она не содержит никаких дополнительных гипотез и принципов. Проблемы объединения и согласования различных принципов просто не существует. Вместо этого существует проблема статистического описания стохастических микрочастиц. Это очень серьезная проблема, потому что вероятностное статистическое описание, используемое в нерелятивистской статистической физике, непригодно для описания стохастического движения релятивистских частиц (см. детали в разд. 3).

В целом схема альтернативной программы исследований явлений микромира выглядит так

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \nearrow & \begin{array}{c}\text{проблема}\\ \text{больших}\\ \text{скоростей}\end{array} & \searrow & & & \\
\begin{array}{c}\text{класс.}\\ \text{физика}\end{array} & & & & \begin{array}{c}\text{невырожд.}\\ \text{геометрия}\end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c}\text{статист.}\\ \text{описание}\end{array} \\
 & \searrow & \begin{array}{c}\text{проблема}\\ \text{стохастичности}\\ \text{микрочастиц}\end{array} & \nearrow & & &
\end{array}
\tag{1.5}
$$

Исследовательская программа (1.4) является компенсирующей, или птолемеевой концепцией, поскольку использует неправильную модель пространства-времени и квантовые принципы, компенсирующие ошибочность этой модели. В настоящее время она детально разработана, поскольку над ней почти в течение века трудилось несколько поколений исследователей, что не мешает ей порождать все новые и новые проблемы, требующие все новых и новых гипотез для своего разрешения. Этим она тоже напоминает доктрину Птолемея и мы отметим это обстоятельство, присвоив ей название "Птолемей-2". Птолемеевость традиционной исследовательской программы (1.4) не является очевидной. Она стала очевидной лишь только после появления альтернативной исследовательской программы, не являющейся птолемеевой.

В отличие от (1.4) исследовательская программа (1.5) является полноценной физической теорией. Она не является птолемеевой концепцией, поскольку не использует никаких дополнительных (компенсирующих) гипотез сверх тех, что использовались в классической физике. Она очень проста и естественна. К настоящему моменту она очень молода и слабо разработана. Все это ассоциируется с доктриной Коперника в момент ее возникновения. Мы отметим эти обстоятельства, присвоив ей название "Коперник-2". Смысл присвоения этих названий в том, чтобы отметить качественное различие концепций Птолемей-2 и Коперник-2 и подчеркнуть неприменимость при оценке их взаимоотношений критериев и приемов, выработанных при работе с птолемеевыми концепциями.

Дело в том, что с одной стороны птолемеева концепция, т.е. теория, содержащая ошибочное положение и компенсирующая его посредством дополнительных гипотез, не является полноценной научной теорией. С другой стороны, она широко применяется, и исследователи явлений микромира в течение нескольких десятков лет вынуждены были работать с разными видами птолемеевых концепций. В результате были выработаны правила работы и критерии оценки полученных результатов, пригодные для работы с птолемеевыми концепциями, но не эффективные при работе с полноценными научными концепциями, не содержащими ошибок. Для работы с птолемеевыми концепциями характерна "короткая логика", т.е. используются гипотезы, из которых стараются сделать выводы, хорошо и быстро проверяемые экспериментально, тогда как длинные цепи логических расуждений, приводящие к результатам, которые нельзя быстро проверить на эксперименте, обычно доверия не вызывают. Другой особенностью птолемеевой концепции является примат эксперимента над логикой и принципами, когда хороши любые принципы лишь бы с их помощью можно было объяснить экспериментальные данные. Исследователи, работавшие только с птолемеевыми концепциями, в многих случаях не имеют опыта работы с полноценными научными теориями и не умеют правильно оценивать их.

В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию. Имеются две конкурирующие птолемеевы концепции A и B. Пусть концепция A появилась раньше и была признана научным сообществом. После появления концепции B ее оценка сторонниками концепции A производится следующим образом. Ставится вопрос, объясняет ли концепция B все те наблюдаемые факты, которые объясняет концепция A. Если нет, то концепция B заведомо хуже. Если концепция B объясняет все те факты, которые объясняет концепция A, и кроме того объясняет еще что-то, что не может объяснить концепция A, то предпочтение следует отдать концепции B. Наконец, если концепция B объясняет только те факты, которые объясняет концепция A и ничего сверх этого, то предпочтение следует отдать концепции A, как появившейся первой. Вторая концепция, приводящая к тем же результатам считается излишней. Излишним считается также анализ количества и качества гипотез, используемых в концепциях A и B. Все это правильно до тех пор, пока обе концепции A и B являются птолемеевыми. Если же новая концепция B претендует на то, чтобы быть полноценной, а не птолемеевой, т.е. содержит существенно меньше дополнительных гипотез, чем концепция A, то предпочтение следует отдать концепции B даже в том случае, когда она не объясняет ничего сверх того, что объясняет концепция A. В этом случае не следует жалеть усилий для изучения и использования концепции B, поскольку она является более перспективной, и при дальнейшем развитии сможет объяснить многое из того, что не могла объяснить в момент своего возникновения.

Именно этот последний случай имел место в конфликте между доктринами Птолемея и Коперника. В первое время после своего возникновения доктрина Коперника не объясняла ничего в движении небесных светил, что не могла бы объяснить доктрина Птолемея, но ее дальнейшее развитие привело к результатам, о которых доктрина Птолемея не могла даже помышлять. Доктрина Коперника была существенно проще, поскольку не использовала дополнительных компенсирующих предположений. Именно простота доктрины Коперника, обусловленная ее полноценностью, оказалась основным фактором, обеспечившим ее торжество.

Исследовательская программа Коперник-2 претендует на роль полноценной (нептолемеевой) концепции именно потому, что она не использует квантовых принципов для объяснения нерелятивистских квантовых эффектов. С другой стороны оценка программы Птолемей-2 как компенсирующей концепции основана на том, что возможна программа Коперник-2, использующая существенно меньше гипотез и, в частности, не использующая принципы КМ. Птолемеевость программы Птолемей-2 была совсем не очевидна, пока не стало ясно, что квантовые эффекты можно объяснить, не используя принципов квантовой механики. О птолемеевости традиционной исследовательской программы (1.4) можно было только догадываться по таким косвенным признакам как необходимость в дополнительных гипотезах и рост запутанности релятивистской квантовой теориии по мере ее развития. Что касается релятивистских квантовых эффектов, то программа Коперник-2 пока не может ничего сказать по этому поводу в силу своей недостаточной разработанности. Следует иметь в виду, что программа Коперник-2 очень молода, тогда как над программой Птолемей-2 работали несколько поколений исследователей в течение нескольких десятков лет. Однако, есть надежда на прогресс в объяснении релятивистских эффектов по мере развития программы Коперник-2, тогда как у программы Птолемей-2 такой надежды нет. Опыт исследований в рамках Птолемей-2 говорит о том, что по мере продвижения вперед число проблем возрастает, а сама концепция Птолемей-2 приобретает все более сложный и запутанный вид.

Программу Коперник-2 нельзя назвать новой в идейном отношении. Все ее ступени были известны с начала XX века. То, что квантовые эффекты могут быть объяснены как результат статистического описания стохастического поведения микрочастиц представлялось естественным многим исследователям [8, 9]. Такое объяснение представлялось очень правдоподобным в свете успеха статистической физики, объяснившей таким образом природу тепла и тепловых явлений. То, что причиной стохастичности может быть геометрия пространства событий, тоже не является новым [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Трудности работы по программе Коперник-2 были связаны с недостаточной математической разработкой концепции геометрии и концепции статистического описания. Иначе говоря, не было достаточно эффективных математических инструментов для описания стохастического движения микрочастиц. Эти инструменты пришлось создавать, разрабатывая новую концепцию геометрии и новую концепцию статистического описания. Именно разработка этих новых концепций позволила сформулировать и обосновать исследовательскую программу Коперник-2. Таким образом, при разработке исследовательской программы Коперник-2 определяющими являются чисто технические и математические результаты.

Вновь разработанные концепции геометрии и статистического описания являются более общими, чем существовавшие ранее. Формально бо́льшая общность достигается за счет уменьшения числа фундаментальных понятий, т.е. понятий использующихся для построения концепции. В частности, в Т-геометрии не используется понятие кривой, а в динамической концепции статистического описания не используются понятия вероятности и плотности ветоятности.

Во втором разделе рассмотрена новая концепция геометрии, причем основное внимание уделяется концептуальным вопросам. В частности, исследуются вопросы, каким образом в пространстве событий с детерминированной геометрией может возникать стохастическое движение свободных частиц и в чем причина того, что такая простая и необходимая конструкция как Т-геометрия не была построена раньше. В третьем разделе рассмотрены принципальные вопросы динамической концепции статистического описания – новой концепции статистического описания, не стесненной ограничениями теории вероятностей. В четвертом разделе динамическая концепция статистического описания применяется для описания квантово-стохастической частицы.

2 Метрическая концепция геометрии

Обычно геометрия строится на основе линейного пространства, в котором определены линейные операции (умножение вектора на число и сложение векторов) над векторами – основными объектами линейного пространства. Векторы линейного пространства определяются двумя точками: началом вектора и его концом. При этом предполагается, что начала всех векторов линейного пространства совпадают, так что каждый вектор однозначно определяется точкой, изображающей его конец. После задания в линейном пространстве скалярного произведения возникает векторное евклидово пространство. Поскольку имеется однозначное соответствие между векторами линейного пространства и точками, изображающими их конец, то векторное евклидово пространство порождает точечное евклидово пространство, где роль основной характеристики пространства играет расстояние d между точками, или мировая функция $\sigma = \frac{1}{2}d^2$. Скалярное произведение в векторном евклидовом пространстве однозначно связано с мировой функцией в соответствующем точечном евклидовом пространстве. По скалярному произведению в векторном евклидовом пространстве может быть определена мировая функция в соответствующем точечном пространстве и наоборот.

Введение линейного пространства как основы евклидова пространства возможно только в непрерывном и однородном пространстве, где все точки одинаковы и одинаковы их связи друг с другом. Если нарушить непрерывность линейного пространства, удалив из него хотя бы одну точку, то оставшаяся часть перестает быть линейным пространством, так как теперь линейные операции неопределены, и они не всегда будут приводить к определенному результату. В неоднородном пространстве приходится вводить касательное линейное пространство в каждой точке, и множество этих линейных пространств образует основу для построения неоднородной (римановой) геометрии.

Практическая работа с пространством событий как пространством Минковского наводит на мысль, что геометрия определяется мировой функцией (расстоянием между парами точек) пространства событий и что линейное пространство не является необходимым атрибутом геометрии. Оно играет роль неких строительных лесов, которые используются для построения геометрии и которые можно отбросить после того, как геометрия построена. Если это действительно так, то геометрию можно построить, не ссылаясь на линейное пространство. При этом может оказаться, что некоторые ограничения, налагаемые обычно на геометрию, порождены не самой геометрией, а свойствами линейного пространства, используемого при ее построении.

Построение геометрии, основанное только на информации имеющейся в мировой функции, мы называем метрической концепцией геометрии. Этот подход хорошо известен как метрическая геометрия [10, 11, 12], однако не удавалось провести его последовательно (т.е. без привлечения дополнительной информации) и построить геометрию столь же содержательную как евклидова. Впервые это удалось сделать в работах [13, 14].

Идея построения геометрии на основе одной только мировой функции σ предельно проста. Все соотношения евклидовой геометрии записываются в терминах мировой функции и объявляются справедливыми для любой мировой функции, т.е. для любой геометрии. Практически, важно представить в терминах мировой функции только скалярное произведение, поскольку все остальные соотношения в конечном счете выражаются через него. Важно также нигде не использовать понятие кривой, определяемой как непрерывное отображение отрезка вещественной оси в пространство Ω

$$\mathcal{L}: \quad [0,1] \rightarrow \Omega. \tag{2.1}$$

Пусть Ω есть множество точек с заданной на нем мировой функцией σ

$$\sigma: \qquad \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.2}$$

$$\sigma(P,Q) = \sigma(Q,P), \qquad \sigma(P,P) = 0, \qquad \forall P,Q, \in \Omega \tag{2.3}$$

Будем называть совокупность $V = \{\sigma, \Omega\}$ σ-пространством. Вектором $\overrightarrow{PQ} \equiv \mathbf{PQ}$ называется упорядоченное множество из двух точек $\{P,Q\}$ (точка P есть начало вектора, а Q – его конец), причем длина вектора задается соотношением $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2\sigma(P,Q)}$. Скалярное произведение двух векторов $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$, имеющих общее начало, задается соотношением

$$\left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0P_2}\right) = \sigma(P_0,P_1) + \sigma(P_0,P_2) - \sigma(P_1,P_2), \tag{2.4}$$

которое в евклидовом пространстве представляет собой просто формулировку теоремы косинусов для треугольника с вершинами в точках P_0, P_1, P_2, записанную в терминах мировой функции σ. Можно, однако, интерпретировать соотношение (2.4) как определение скалярного произведения через мировую функцию без ссылки на линейное пространство. Определенное таким образом скалярное произведение мы будем называть скалярным σ-произведением, чтобы подчеркнуть его независимость от наличия или отсутствия линейного пространства.

Заметим, что скалярное σ-произведение может быть определено и для векторов $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{Q_0Q_1}$, имеющих различное начало. В этом случае соотношение (2.4) принимает вид

$$\left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{Q_0Q_1}\right) = \sigma(P_0,Q_1) + \sigma(Q_0,P_1) - \sigma(P_0,Q_0) - \sigma(P_1,Q_1), \tag{2.5}$$

Другим важным свойством евклидова пространства является его размерность, определяемая максимальным числом линейно независимых векторов. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости n векторов $\overrightarrow{P_0P_i}$, $\quad i = 1,2,...n$ евклидова пространства является обращение в нуль определителя Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = 0, \qquad \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \ldots P_n\} \subset \Omega, \tag{2.6}$$

где

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det\left\|\left(\overrightarrow{P_0P_i}.\overrightarrow{P_0P_k}\right)\right\|, \qquad i,k = 1,2,\ldots n \tag{2.7}$$

Из (2.4) и (2.7) следует, что линейная зависимость векторов может быть определена в терминах мировой функции без ссылки на линейное пространство.

Существуют необходимые и достаточные условия того, что σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ является n-мерным евклидовым пространством. Эти условия представляют собой утверждение, что существует множество $(n+3)$-точечных σ-подпространств $\{\sigma, \mathcal{P}^{n+2}\} \subset V$, мировая функция которых удовлетворяет некоторым соотношениям. σ-подпространства этого множества имеют $n+1$ общих фиксированных точек $\mathcal{P}^n$, тогда как остальные две точки P_{n+1}, P_{n+2} являются произвольными точками σ-пространства и бегущими точками σ-подпространств $\{\sigma, \mathcal{P}^{n+2}\}$ этого множества. Соответствующая теорема доказана в [14]. Из теоремы следует, что информации, заключенной в мировой функции достаточно для построения полноценной геометрии, не менее содержательной, чем евклидова. При этом каждому выбору мировой функции, удовлетворяющей условию (2.2), соответствует своя геометрия. Выбор вида мировой функции не стеснен ни условием непрерывности, ни условием вырожденности геометрии.

Все известные до сих пор геометрии (риманова и евклидова) являются вырожденными геометриями. Невырожденная геометрия является новой разновидностью геометрии, и понятие невырожденности заслуживает специального обсуждения. Два вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_0R}$, имеющие общее начало, называются коллинеарными $\overrightarrow{P_0P_1}||\overrightarrow{P_0R}$, если они линейно зависимы, т.е. если выполнено условие

$$F_2(P_0, P_1, R) = \begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0P_1}\right) & \left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0R}\right) \\ \left(\overrightarrow{P_0R}.\overrightarrow{P_0P_1}\right) & \left(\overrightarrow{P_0R}.\overrightarrow{P_0R}\right) \end{vmatrix} = 0, \tag{2.8}$$

которое может быть записано в виде

$$\cos^2\vartheta = \frac{\left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0R}\right)^2}{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|^2 \left|\overrightarrow{P_0R}\right|^2} = 1 \tag{2.9}$$

означающем что угол ϑ между векторами равен либо 0, либо π.

Пусть вектор $\overrightarrow{P_0P_1}$ задан в n-мерном евклидовом пространстве, а $\overrightarrow{P_0R}$ есть коллинеарный ему вектор. Тогда множество $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ точек R

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \{R | F_2(P_0, P_1, R) = 0\} \tag{2.10}$$

представляет собой прямую, проходящую через точки P_0, P_1, или, что одно и то же, прямую, проходящую через точку P_0, параллельно вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$. С другой стороны, при произвольной мировой функции множество $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, определяемое одним уравнением описывает, вообще говоря, $(n-1)$-мерную поверхность. То обстоятельство, что в случае евклидова пространства эта $(n-1)$-мерная поверхность вырождается в одномерную линию, связано с особым видом мировой функции евклидова пространства. Даже малое изменение мировой функции евклидова пространства либо снимает вырождение, и тогда одномерная линия превращается в полую $(n-1)$-мерную трубку, охватывающую прямую, либо усиливает вырождение, и тогда одномерная линия вырождается в две точки P_0, P_1. Таким образом, в невырожденной геометрии прямые заменяются полыми трубками. Отсюда название геометрии – трубчатая геометрия, или кратко – Т-геометрия.

Если на множестве Ω точек пространства нет непрерывной системы координат, то трудно определить является ли одномерной линией множество (2.10). В этом случае для оценки степени вырожденности можно рассмотреть пересечение трубки $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ со сферой радиуса $r = \sqrt{2\sigma(P_0, Q)}$ с центром в точке P_0 и проходящей через точку Q

$$\mathcal{S}(P_0, Q) = \{R | \sigma(P_0, Q) = \sigma(P_0, R)\} \tag{2.11}$$

В случае евклидова пространства пересечение $\mathcal{T}_{P_0P_1} \cap \mathcal{S}(P_0, Q)$ состоит из двух точек Q_1, Q_2. При этом вектор $\overrightarrow{P_0Q_1}$ параллелен вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$, $(\overrightarrow{P_0Q_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{P_0P_1})$, и вектор $\overrightarrow{P_0Q_2}$ антипараллелелен вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$, $(\overrightarrow{P_0Q_2} \downarrow\uparrow \overrightarrow{P_0P_1})$. Иначе говоря, при вырожденной геометрии в каждой точке P_0 имеется только один вектор заданной длины, параллельный данному вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$, и только один вектор заданной длины, антипараллельный данному вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$.

В случае невырожденной геометрии пересечение $\mathcal{T}_{P_0P_1} \cap \mathcal{S}(P_0, Q) = \omega_+ \cup \omega_-$ разбивается на два такие подмножества ω_+ и ω_-, что точки $Q_1 \in \omega_+$ определяют векторы $\overrightarrow{P_0Q_1}$, $\overrightarrow{P_0Q_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{P_0P_1}$, а точки $Q_2 \in \omega_-$ определяют векторы $\overrightarrow{P_0Q_2}$, $\overrightarrow{P_0Q_2} \downarrow\uparrow \overrightarrow{P_0P_1}$. При этом каждое из подмножеств ω_+ и ω_- содержит много точек. Это соответствует тому, что в невырожденной геометрии в каждой точке P_0 есть много векторов заданной длины $r = \sqrt{2\sigma(P_0, Q)}$, параллельных (антипараллельных) данному вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$.

Невырожденность геометрии пространства событий, т.е. существование в каждой точке многих единичных времениподобных векторов, параллельных данному, есть причина стохастичности движения свободных частиц в этом пространстве событий. Чтобы показать это, рассмотрим пространство событий, в каждой точке P_0 которого имеется много времениподобных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, заданной длины $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \mu$, параллельных заданному времениподобному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$. Заметим, что в геометрии Минковского имеется только один времениподобный вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, заданной длины μ, параллельный времениподобному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$. В пространстве Минковского мировая линия частицы может быть аппроксимирована ломаной линией, состоящей из прямолинейных звеньев одинаковой длины. При этом точки $\ldots P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \ldots$ стыковки звеньев таковы, что вектор $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ пропорционален импульсу частицы, а его длина $|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = \mu$ пропорциональна ее массе $m = b\mu$, где $b \approx 10^{-17}$г/см есть некоторая универсальная постоянная, а μ – геометрическая масса частицы. Если частица свободная, то в соответствии с законом инерции Галилея смежные векторы параллельны, т.е. вектор $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ параллелен вектору $\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Определим мировую линию свободной частицы как ломаную с параллельными смежными звеньями. Тогда в геометрии Минковского положения всех звеньев ломаной определяются однозначно, если фиксировано положение одного из звеньев. Определенность ломаной означает определенность мировой линии частицы, что обусловливает детерминированность свободного движения частицы. В Т-геометрии, где имеется много векторов, параллельных данному, фиксация положения одного из звеньев ломаной не приводит к однозначному определению положения остальных звеньев ломаной. Это означает, что в таком пространстве событий движение свободной частицы стохастично, хотя сама по себе геометрия не является стохастической. Т-геометрия – есть, вообще говоря, нериманова геометрия. В некоторых случаях, когда множество векторов заданной длины, параллельных данному вектору, вырождается в один вектор, Т-геометрия может вырождаться в риманову геометрию. Например, геометрия Минковского, будучи (псевдо)римановой геометрией является частным случаем Т-геометрии.

Итак, Т-геометрия представляет собой очень общую конструкцию, обладающую таким важным свойством как невырожденность. Невырожденность геометрии есть новое неизвестное ранее свойство геометрии, которое по своей важности сравнимо с такими свойствами геометрии как однородность и непрерывность. Представляется загадкой, почему такая простая и общая конструкция как Т-геометрия не была известна раньше. Почему такое свойство геометрии как невырожденность не было известно до конца XX века? Отсутствие Т-геометрии в списке геометрий не позволило в начале XX века правильно решить проблему стохастичности микрочастиц.

Отсутствие Т-геометрии в начале XX века даже в качестве некоей умозрительной конструкции объясняется, по-видимому, наличием дискриминатора Т-геометрии, использовавшегося при построении геометрии. Дело в том, что формулируя геометрию в терминах некоторых фундаментальных понятий (например, таких как размерность, система координат, расстояние, кривая), мы автоматически дискриминируем геометрии, несовместимые хотя бы с одним из фундаментальных понятий, используемых при построении геометрии. Например, декартова система координат является дискриминатором неоднородной (римановой) геометрии. Именно по этой причине риманова геометрия строится в произвольной (недекартовой) системе координат со всеми ее атрибутами в виде скобок Кристоффеля и ковариантных производных. Стоит только заявить, что риманова геометрия описывается в декартовой системе координат, где метрический тензор g_{ik} =const, как неоднородность геометрии дискриминируется и остается лишь однородная (евклидова) геометрия. В XIX веке декартова система координат рассматривалась как нечто имманентное самой геометрии, и это, видимо, обусловило предубеждения многих математиков XIX века против римановой геометрии.

Дискриминатором невырожденных геометрий является понятие кривой. Осознать этот факт удалось лишь сравнительно недавно [15]. Известны попытки обобщить риманову и метрическую геометрии. Были попытки обобщить метрическую геометрию, отказавшись от аксиомы треугольника. Такую геометрию называют дистантной геометрией. Попытки ее построить были предприняты К. Менгером [16] и Л. Блюменталем [17]. Однако, метрическая геометрия или дистантная геометрия, построенные без использования понятия кривой оказывались очень бедными геометриями, т.е. они содержали очень мало геометрических объектов. Для получения более содержательной геометрии применялось понятие кривой, которое по существу дискриминировало возможность эффективно использовать отказ от аксиомы треугольника и получить невырожденную геометрию.

Таким образом, с одной стороны использование понятия кривой при построении T-геометрии автоматически дискриминирует ее невырожденность. С другой стороны при построении геометрии очень трудно отказаться от использования понятия кривой, поскольку неясно, чем можно заменить это очень важное понятие римановой геометрии, применяющееся при построении геометрических объектов. В настоящее время большинство математиков придерживается той точки зрения, что понятие кривой (2.1) является неоходимым атрибутом построения любой геометрии. Это является источником предубеждения некоторых из них против T-геометрии и очень напоминает ситуацию конца XIX века, когда большинство математиков, считая декартову систему координат атрибутом любой геометрии, имели предубеждения против римановой геометрии.

Понятие непрерывной кривой (2.1) выполняет в римановой геометрии две основные функции: (1) кривая является фундаментальным понятием, использующимся при построении римановой геометрии, (2) кривая является инструментом для построения геометрических объектов. Под геометрическим объектом понимается некоторое множество точек $\mathcal{O} \subset \Omega$. Обычно это континуальное множество. В T-геометрии все основные геометрические соотношения определяются прямо через мировую функцию, и первая функция кривой оказывается невостребованной.

Вторая функция кривой используется в римановой геометрии, где обычно геометрический объект строится как след движения более простого геометрического объекта. Например, одномерная кривая $\mathcal{L}$ рассматривается как след движения точки и описывается непрерывным отображением (2.1). Двумерная поверхность $\mathcal{S}$ рассматривается как след движущейся одномерной кривой и описывается непрерывным отображением

$$\mathcal{S} : \qquad [0,1] \times [0,1] \to \Omega \tag{2.12}$$

и т.д. Такое построение геометрического объекта содержит непрывное отображение типа континуум $\to$ континуум, которое очень трудно для исследования, поскольку прежде чем исследовать такие отображения их надо хотя бы перечислить. Но уже задача перечисления всех возможных отображений типа континуум $\to$ континуум представляет собой очень сложную задачу из-за большой мощности множества таких отображений.

Чтобы исследовать отображения такого вида и использовать их в геометрии, приходится выделять только некоторую их часть, налагая ограничения на свойства пространства Ω (например, такие ограничения как непрерывность и топологические свойства). Эти ограничения неконтролируемым образом уменьшают общность геометрии.

В Т-геометрии геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается с помощью каркас-оболочного метода. Любой геометрический объект $\mathcal{O}$ рассматривается как множество пересечений и объединений элементарных геометрических объектов (ЭГО).

Элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ описывается как множество нулей некоторой функции

$$f_{\mathcal{P}^n}: \qquad \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ... P_n\} \subset \Omega \tag{2.13}$$

в виде

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_f(\mathcal{P}^n) = \{R | f_{\mathcal{P}^n}(R) = 0\} \tag{2.14}$$

Конечное множество $\mathcal{P}^n \subset \Omega$ называется каркасом элементарного геометрического объекта $\mathcal{E} \subset \Omega$. Континуальное множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ называется оболочкой каркаса $\mathcal{P}^n$. Функция $f_{\mathcal{P}^n}$, определяющая элементарный геометрический объект (ЭГО) есть функция параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$ и бегущей точки $R \in \Omega$. Предполагается, что функция $f_{\mathcal{P}^n}$ есть алгебраическая функция нескольких аргументов $w = \{w_1, w_2, ... w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов w_k есть мировая функция $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ двух аргументов $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$, принадлежащих либо каркасу $\mathcal{P}^n$, либо бегущей точке R.

Например,

$$\mathcal{S}(P_0, P_1) = \{R | f_{P_0 P_1}(R) = 0\}, \qquad f_{P_0 P_1}(R) = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0, R)} \tag{2.15}$$

есть сфера проходящая через точку P_1 и имеющая центр в точке P_0. Эллипсоид $\mathcal{EL}$, проходящий через точку P_2 и имеющий фокусы в точках P_0, P_1 ($P_0 \neq P_1$) описывается соотношением

$$\mathcal{EL}(P_0, P_1, P_2) = \{R | f_{P_0 P_1 P_2}(R) = 0\}, \tag{2.16}$$

где

$$f_{P_0 P_1 P_2}(R) = \sqrt{2\sigma(P_0, P_2)} + \sqrt{2\sigma(P_1, P_2)} - \sqrt{2\sigma(P_0, R)} - \sqrt{2\sigma(P_1, R)} \tag{2.17}$$

Если фокусы P_0, P_1 совпадают ($P_0 = P_1$), то эллипсоид $\mathcal{EL}(P_0, P_1, P_2)$ вырождается в сферу $\mathcal{S}(P_0, P_2)$. Если точки P_1, P_2 совпадают ($P_1 = P_2$), то эллипсоид $\mathcal{EL}(P_0, P_1, P_2)$ вырождается в отрезок прямой $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ между точками P_0, P_1.

$$\mathcal{T}_{[P_0 P_1]} = \mathcal{EL}(P_0, P_1, P_1) = \{R | f_{P_0 P_1 P_1}(R) = 0\}, \tag{2.18}$$

$$f_{P_0 P_1 P_1}(R) = S_2(P_0, R, P_1) \equiv \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0, R)} - \sqrt{2\sigma(P_1, R)} \tag{2.19}$$

Другие функции f порождают другие оболочки элементарных геометрических объектов (ЭГО) для данного каркаса $\mathcal{P}^n$.

Например, множество из двух точек $\{P_0, P_1\}$ образует каркас не только трубки $\mathcal{T}_{P_0 P_1}$, но и сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ трубки (прямой) (2.18), и луча $\mathcal{T}_{[P_0 P_1}$ трубки (прямой), определяемого соотношением

$$\mathcal{T}_{[P_0 P_1} = \{R | S_2(P_0, P_1, R) = 0\} \tag{2.20}$$

где функция S_2 определена соотношением (2.19)

Любое отображение (2.13) вида континуум$\to$континуум задано и фиксировано, потому что функция $f_{\mathcal{P}^n}$ есть известная функция своего аргумента и параметров $\mathcal{P}^n$. Каждая такая функция $f_{\mathcal{P}^n}$ определяет некоторый класс элементарных геометрических объектов (ЭГО). Множество таких функций есть n-параметрическое множество функций. Для построения и исследования этого класса ЭГО нет нужды накладывать ограничения на множество Ω, или на мировую функцию. Таким образом, каркас-оболочный метод построения геометрических объектов имеет дело только с исследованием относительно простых отображений вида

$$m_n : \qquad I_n \to \mathbb{R}, \qquad I_n = \{0, 1, ..., n\} \tag{2.21}$$

и не нуждается в наложении ограничений на множество Ω. Такие отображения связаны с построением и исследованием каркасов ЭГО. При изучении каркасов одновременно изучаются соответствующие классы ЭГО, потому что при заданной функции (2.13) каждый ЭГО жестко связан со своим каркасом.

Иногда при исследовании геометрического объекта бывает достаточно ограничиться изучением его каркаса, который представляет собой счетное множество точек и легче поддается изучению, чем континуальное множество точек, образующее сам геометрический объект. Например, при анализе причины стохастичности движения свободных частиц мы ограничились изучением каркаса $\dots P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \dots$ ломаной трубки. Это существенно упростило анализ.

Каркас-оболочный метод существенно упрощает задачу построения геометрических объектов, позволяя расчленить задачу на неформальную задачу построения каркаса геометрического объекта и формальную процедуру построения оболочки по его каркасу. Учитывая, что задача построения оболочки геометрического объекта по его каркасу формализована, можно рассматривать оболочку геометрического объекта как атрибут его каркаса.

3 Динамическая концепция статистического описания

Существуют многочисленные попытки рассматривать квантовое описание движения микрочастиц как результат статистического описания их стохастического движения [8, 9]. Как правило они базируются на теории вероятностей, которая непригодна для описания релятивистского стохастического движения, каким является движение, обусловленное квантовой стохастичностью. Непригодность теории вероятностей для описания релятивистских стохастических процессов связана с тем, что понятие плотности вероятности предполагает возможность разбиения пространства событий на множества одновременных независимых событий. Это невозможно в релятивистской теории, где нет абсолютной одновременности. Формально это проявляется в том, что при описании релятивистской стохастической частицы объектом статистического описания является такой протяженный физический объект как мировая линия в пространстве-времени, тогда как в нерелятивистском случае объектом статистического описания является точечная частица в трехмерном пространстве. Многочисленные неудачные попытки представить квантовую механику как результат вероятностного статистического описания серьезно дискредитировали саму идею сведения квантово-механического описания к статистическому описанию случайно движущихся частиц, и сейчас многие серьезные исследователи довольно скептически относятся к самой возможности сведения квантовой механики к статистическому описанию, несмотря на то, что квантовая механика считается статистической теорией.

Термин "статистическое описание" означает, строго говоря, описание, содержащее много одинаковых или почти одинаковых объектов. При этом ссылка на понятие вероятности или плотности вероятности совсем не обязательна. Более того она нежелательна, поскольку статистическое описание, основанное на понятии вероятности, ограничено возможностью введения вероятности. Гораздо более эффективной, хотя и менее информативной, оказывается динамическая концепция статистического описания, суть которой формулируется следующим образом [18, 21].

Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть стохастическая система, т.е. динамическая система[1], эксперименты с которой невоспроизводимы и для которой не существует динамических уравнений. Пусть, например, $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть электрон, пролетающий сквозь узкое отверстие в диафрагме и попадающий на экран в некоторой точке x_1. Другой эксперимент, произведенный с электроном, приготовленным тем же способом, приведет к попаданию его в точку x_2, вообще говоря, другую. Иначе говоря, электрон $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть стохастическая система и эксперименты с ним невоспоизводимы.

Если произвести N, $(N \to \infty)$ экспериментов с $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, то получившееся на экране распределение электронов будет воспроизводимым. Оно может быть воспроизведено в другой серии из N_1, $(N_1 \to \infty)$ экспериментов. Это означает, что динамическая система $\mathcal{E}\left[N, \mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, состоящая из многих независимых недетерминированных (случайных) динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть детерминированная динамическая система, эксперименты с которой воспроизводимы и для которой существуют динамические уравнения, хотя для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ динамических уравнений нет. Динамическую систему $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}\right] = \mathcal{E}\left[\infty, \mathcal{S}\right]$ принято называть статистическим ансамблем, а составляющие его динамические системы $\mathcal{S}$ – элементами статистического ансамбля. Элементами ансамбля могут быть как детерминированные динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, так и стохастические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Статистический ансамбль $\mathcal{E}$, будучи динамической системой, может быть

[1]Традиционная терминология содержит только термины "стохастическая система" и "динамическая система". Необходимый нам термин для собирательного понятия отсутствует. По этой причине здесь и далее термин "динамическая система" используется как собирательное понятие по отношению к терминам "недетерминированная динамическая система" (вместо принятого "стохастическая система") и "детерминированная динамическая система" (вместо обычного "динамическая система").

элементом другого статистического ансамбля $\mathcal{E}'$, который в свою очередь может быть элементом статистического ансамбля $\mathcal{E}''$ и т.д.

Идея динамической концепции статистического описания состоит в том, что, не имея возможности изучать стохастическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ из-за невоспроизводимости экспериментов с ней и отсутствия динамических уравнений для нее, мы можем изучать статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[N, \mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ как детерминированную динамическую систему и на основе результатов этого изучения делать определенные заключения о свойствах стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$.

Почему набор $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ многих независимых случайных динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ превращается в детерминированную динамическую систему? По-видимому, потому, что типичные черты стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ суммируются или усредняются, а их случайные черты компенсируются. Так это, или нет, но несомненно, что $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ является детерминированной динамической системой, и это является основой статистического описания. В любом случае можно рассматривать это утверждение как некий принцип, который мы будем называть статистическим принципом [18, 21].

Статистический ансмбль обладает несколькими важными свойствами, используя которые можно так преобразовать статистическое описание, что оно утратит свои статистические черты и будет восприниматься как чисто динамическое. Такое описание престает быть похожим на статистическое описание, понимаемое как вероятностное статистическое описание. Имеются три основные свойства статистического описания.

(1) Свойства статистического ансамбля не зависят от числа N его элементов, если это число достаточно велико, т.е. $N \to \infty$.

(2) Статистический ансамбль может быть элементом другого статистического ансамбля.

(3) В простейшем случае чистого ансамбля статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ совпадает динамической системой $\mathcal{E}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right] = \mathcal{S}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$, состоящей из многих взаимодействующих детерминированных систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. При этом вид взаимодействия детерминированных систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ определяется характером стохастичности стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, что позволяет маркировать характер стохастичности видом взаимодействия и сводить описание стохастичности к взаимодействию детерминированных систем.

Начнем рассмотрение с первого свойства, позволяющего нормировать состояние ансамбля. Пусть стохастическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ представляет собой микрочастицу, состояние которой описывается координатами $\mathbf{x}$ и импульсом $\mathbf{p}$. Тогда при достаточно большом N ансамбль $\mathcal{E}\left[N, \mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ представляет собой распределенную динамическую систему, типа флюида (идеальной сплошной среды), для которой существует действие $\mathcal{A}\left[N, \varphi, \boldsymbol{\xi}\right]$, где $\varphi = \varphi\left(t, \mathbf{x}\right)$, и $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}\left(t, \mathbf{x}\right)$ суть динамические переменные, описывающие состояние флюида. Действие для статистического ансамбля обладает свойством

$$\mathcal{A}\left[aN, \varphi, \boldsymbol{\xi}\right] = a\mathcal{A}\left[N, \varphi, \boldsymbol{\xi}\right], \qquad a = \mathrm{const}, \qquad a > 0. \tag{3.1}$$

Оно порождает динамические уравнения и тензор энергии-импульса T_k^i. Кроме того для динамической системы $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}_{\rm st}]$ могут быть введены плотность частиц j^0 и плотность потока частиц j^α, $\alpha = 1,2,3$. В силу соотношения (3.1) свойства ансамбля не зависят от числа N его элементов, если оно достаточно велико. Однако, можно считать, что это свойство выполнено для любого N, формально положить $N = 1$ и рассматривать ансамбль, состоящий из одного элемента. Такой статистический ансамбль мы будем назвать среднестатистической динамической системой $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$. Таким образом, $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle = \mathcal{E}[N, \mathcal{S}_{\rm st}]_{N=1}$. Более точно это означает, что, если $\mathcal{A}[N, \varphi, \boldsymbol{\xi}]$ есть действие для статистического ансабмля $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}_{\rm st}]$, то выражение

$$\mathcal{A}_{\rm av}[\varphi, \boldsymbol{\xi}] = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathcal{A}[N, \varphi, \boldsymbol{\xi}]}{N}$$

есть действие для $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$.

Среднестатистическая система $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$, построенная на основе стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$, является детерминированной динамической системой, для которой значение любой физической величины q интерпретируется как среднее значение $\langle q \rangle$ той же величины q для стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$. Среднестатистическая система $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$ является детерминированной системой, для которой имеются динамические уравнения. Пользуясь этими уравнениями можно рассчитать эволюцию среднего значения $\langle q \rangle$ любой физической величины q для стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$.

В результате статистическое описание стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$ сводится к рассмотрению динамики среднестатистической детерминированной системы $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$, причем то обстоятельство, что $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$ остается статистическим ансамблем может вполне выпасть из рассмотрения.

Таким образом, можно рассматривать параллельно две динамические системы $\mathcal{S}_{\rm st}$ и $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$. Система $\mathcal{S}_{\rm st}$ есть сосредоточенная, но стохастическая. Система $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$ – распределенная, но детерминированная. Их нельзя путать между собой и следует употреблять для них разные термины и обозначениия. Состояние распределенной системы $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$ можно описывать волновой функцией ψ (это будет показано ниже). Именно эта динамическая система рассматривается обычно в квантовой механике. Она рассматривается как динамическая система, описывающая реальную физическую частицу. Что касается стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$, то она просто не фигурирует в формализме квантовой механики. Ее можно смело игнорировать, пока речь идет о динамике, в которой действительно задействована только среднестатистическая система $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$. Однако, при обсуждении процесса измерения игнорирование стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$ недопустимо, потому что существует несколько различных процедур измерения, в которых по-разному задействованы системы $\mathcal{S}_{\rm st}$ и $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$.

К сожалению, в квантовой механике почти никогда не различают системы $\mathcal{S}_{\rm st}$ и $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$. Более того, при рассмотрении процесса измерения для них употребляется один и тот же термин, что недопустимо уже с точки зрения обычной логики. Сверх этого при такой "обобщенной терминологии" различные процедуры измерения сливаются в одну процедуру, которую различные исследователи трактуют по-разному, в зависимости от того, какую из двух систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ или $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ они имеют в виду в данный момент. Результатом всего этого являются многочисленные парадоксы, связанные с процессом измерения (редукция волнового пакета, парадокс кошки Шредингера, парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена [22] и т.д.), хотя никаких парадоксов на самом деле нет, а есть простая путаница, связанная с тем, что употребляется один и тот же термин для двух разных объектов. Заметим, что все парадоксы появляются только при обсуждении процессов измерения, когда задействованы обе системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. При обсуждении динамики, где фигурирует только $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$, никаких парадоксов не возникает.

Второе свойство статистического ансамбля утверждает, что один статистический ансамбль может быть элементом другого. Такая организация статистического описания удобна в следующем отношении. Если элементами статистического ансамбля являются детерминированные динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, т.е. такие динамические системы, для которых существуют динамические уравнения, то построение динамических уравнений для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\infty,\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ представляет собой формальную процедуру, которая легко может быть осуществлена, если динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ известны. Если же элементами статистического ансамбля являются недетерминированные динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, т.е. такие динамические системы, для которых динамические уравнения не существуют, то построение динамических уравнений для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\infty,\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ представляет собой сложную неформальную процедуру.

Поясним это на примере описания детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, движение каждой из которых описывается функцией Гамильтона $H(t,\mathbf{x},\mathbf{p},)$, где $\mathbf{x}=\{x^{\alpha}\}\quad\alpha=1,2,...n$, – обобщенные координаты, а $\mathbf{p}=\{p_{\alpha}\}\quad\alpha=1,2,...n$ – обобщенный импульс, Наиболее общий статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{gen}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ обычно описывается функцией распределения $F(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля. Можно $\mathcal{E}_{\mathrm{gen}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ рассматривать как статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{gen}}\left[\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\right]$, элементами которого являются статистические ансамбли $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ специального вида, элементами которых являются динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$.

Следуя фон Нейману [23], будем называть ансамбль специального вида $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}\right]$ чистым ансамблем, поскольку он допускает описание в терминах волновой функции. (Это будет показано ниже). По определению, чистым называется статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$, описываемый функцией распределения

$$F_{\mathrm{p}}(t,\mathbf{x},\mathbf{p})=\rho(t,\mathbf{x})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}(t,\mathbf{x}))\qquad(3.2)$$

Он удовлетворяет системе уравнений, написанной для независимых переменных $\{t,\mathbf{x}\}$, т.е. в конфигурационном пространстве координат $\mathbf{x}$. Иначе говоря, чистый статистический ансамбль описывается в терминах нескольких функций $\rho(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{P}(t,\mathbf{x})$ только аргумента $\mathbf{x}$ вместо описания в терминах одной функции от переменных $\mathbf{x},\mathbf{p}$. Система динамических уравнений для этих функций получается в результате подстановки (3.2) в уравнение Лиувилля для функции распределения $F(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$ и последующего интегрирования по переменной $\mathbf{p}$ с весовыми множителями 1 и $\mathbf{p}$.

Если теперь частица является стохастической $\mathcal{S}_{\rm st}$, то трудной и неформальной процедурой будет только построение чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm p}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ с недетерминированными элементами $\mathcal{S}_{\rm st}$, (т.е. переход $\mathcal{S}_{\rm st}\rightarrow\mathcal{E}_{\rm p}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$). Поскольку $\mathcal{E}_{\rm p}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ представляет собой детерминированную динамическую систему, то построение статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm gen}\left[\mathcal{E}_{\rm p}\right]$, элементами которого являются статистические ансамбли $\mathcal{E}_{\rm p}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ (т.е. переход $\mathcal{E}_{\rm p}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]\rightarrow\mathcal{E}_{\rm gen}\left[\mathcal{E}_{\rm p}\right]$), будет относительно простой формальной процедурой. Таким образом, принципиальным является переход $\mathcal{S}_{\rm st}\rightarrow\mathcal{E}_{\rm p}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$. Именно ему мы уделим основное внимание.

Состояние $F\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)$ ансамбля общего вида $\mathcal{E}_{\rm gen}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ эволюционирует в соответствии с уравнением Лиувилля

$$\mathcal{E}_{\rm gen}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]:\qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}F\right)-\frac{\partial}{\partial p_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial x^{\alpha}}F\right)=0 \tag{3.3}$$

где $H=H\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)$ есть функция Гамильтона для динамической системы $\mathcal{S}_{\rm d}$. По повторяющимся греческим индексам производится суммирование от 1 до n

Динамические уравнения для статистического ансамбля специального вида $\mathcal{E}_{\rm p}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\rho\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)\right]_{\mathbf{p}=\mathbf{P}}=0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho P_{\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\rho P_{\beta}\left[\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)\right]_{\mathbf{p}=\mathbf{P}}\right)+\rho\frac{\partial H}{\partial x^{\beta}}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{P}\right)=0,\qquad \beta=1,2,...n \tag{3.5}$$

Будем интерпретировать ρ как плотность частиц, а $\mathbf{v}=\partial H/\partial\mathbf{p}$ как обобщенную скорость. Тогда уравнение (3.4) истолковывается как уравнение непрерывности, а уравнения (3.5) можно интерпретировать как обобщенные уравнения Эйлера для некоторого флюида без давления.

Система уравнений (3.4), (3.5) является замкнутой, но она не является полной и не может быть получена из вариационного принципа. Добавим к обобщенным уравнениям Эйлера уравнения

$$\frac{dx^{\beta}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial P_{\beta}}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{P}\right),\qquad \beta=1,2,...n \tag{3.6}$$

описывающие движение частицы в заданном поле скоростей $\mathbf{v}=\partial H/\partial\mathbf{P}$. Эти уравнения можно переписать в виде, известном в гидродинамике как условия Лина [24]

$$\frac{\partial\xi_{\beta}}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial P_{\alpha}}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{P}\right)\partial_{\alpha}\xi_{\beta}=0,\qquad \beta=1,2,...n \tag{3.7}$$

где $\boldsymbol{\xi}\left(t,\mathbf{x}\right)=\left\{\xi_{\alpha}\left(t,\mathbf{x}\right)\right\},\quad \alpha=1,2,...n$ суть n независимых интегралов n уравнений (3.6).

Система из $2n+1$ уравнений (3.4), (3.5), (3.7) образует полную систему динамических уравнений, описывающих эволюцию чистого ансамбля $\mathcal{E}_{\rm p}[\mathcal{S}_{\rm d}]$. Она может быть проинтегрирована и приведена к системе из $n+2$ уравнений для $n+2$ пременных $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$

$$b_0[\partial_0\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_\alpha] + H(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = 0, \qquad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad k = 0, 1, ...n \tag{3.8}$$

$$\partial_0\rho + \partial_\alpha\left(\rho\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{P})\right) = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial \xi_\beta}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{P})\,\partial_\alpha\xi_\beta = 0, \qquad \beta = 1, 2, ...n \tag{3.10}$$

где φ есть новая переменная, а $\mathbf{P}$ выражается через n произвольных функций $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \{g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\}, \quad \alpha = 1, 2, ...n$ аргумента $\boldsymbol{\xi}$.

$$P_\beta = b_0\left(\partial_\beta\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\right)\partial_\beta\xi_\alpha, \qquad \beta = 1, 2, ...n \tag{3.11}$$

Правильность утверждения об интегрировании системы (3.4), (3.5), (3.7) может быть проверена прямой подстановкой (3.11) в (3.5), либо использованием техники, разработанной в [25]. b_0 есть произвольная постоянная, которая может быть включена в переменную φ и произвольные функции $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$.

Система из $n+2$ уравнений (3.8), (3.9), (3.10) является полной и замечательна в том отношении, что она может описываться в терминах многокомпонентной комплексной функции ψ (волновой функции). Это преобразование удобно осуществить, используя вариационный принцип Гамильтона.

Можно показать, что динамические уравнения (3.8), (3.9), (3.10) для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm p}[\mathcal{S}_{\rm d}]$ детерминированных динамических систем $\mathcal{S}_{\rm d}$ получаются из вариационного принципа с действием

$$\mathcal{E}_{\rm p}[\mathcal{S}_{\rm d}]: \qquad \mathcal{A}[\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}] = -\int \rho\{H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) + p_0\}d^{n+1}x, \tag{3.12}$$

$$p_k = b_0\left[\partial_k\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_k\xi_\alpha\right], \qquad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad k = 0, 1, ..., n \tag{3.13}$$

где $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$ суть зависимые переменные, рассматриваемые как функции аргумента $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{t, \mathbf{x}\}$. $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ есть функция Гамильтона для $\mathcal{S}_{\rm d}$. b_0 – произвольная постоянная и $g^\alpha(\boldsymbol{\xi}), \quad \alpha = 1, 2, ..., n$ – произвольные функции аргумента $\boldsymbol{\xi}$. Динамические переменные $\varphi, \boldsymbol{\xi}$ суть гидродинамические потенциалы (потенциалы Клебша). Клебш [26, 27] ввел их для описания несжимаемой жидкости. Переменные $\varphi, \boldsymbol{\xi}$ называются потенциалами, потому что импульс $\mathbf{p} = \mathbf{P}(t, \mathbf{x})$ выражается через производные потенциалов $\varphi, \boldsymbol{\xi}$, как это можно увидеть из соотношений (3.13). Функция Гамильтона $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ есть функция, которая определяет вид действия (3.12), и вариационный принцип, основанный на действии (3.12), может быть назван вариационным принципом Гамильтона.

Введем k-компонентную комплексную функцию $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,\dots k$, определив ее соотношениями

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u_\alpha^*(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1,2,\dots k \tag{3.14}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{k}\psi_\alpha^*\psi_\alpha$$

где (*) означает комплексное сопряжение, $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1,2,\dots k$ суть функции только переменных $\boldsymbol{\xi}$. Они удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial\xi_\beta}u_\alpha) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}), \qquad \beta = 1,2,...n, \qquad \sum_{\alpha=1}^{k}u_\alpha^*u_\alpha = 1 \tag{3.15}$$

k есть такое натуральное число, что уравнения (3.15) допускают решение, Вообще говоря, k зависит от призвольных функций интегрирования $\mathbf{g} = \{g^\beta(\boldsymbol{\xi})\}$, $\beta = 1,2,...n$.

Легко проверить, что

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad p_l(\varphi,\xi) = -\frac{ib_0}{2\psi^*\psi}(\psi^*\partial_l\psi - \partial_l\psi^*\cdot\psi), \qquad l = 0,1,...n \tag{3.16}$$

Вариационная задача с действием (3.12) оказывается эквивалентной вариационной задаче с функционалом действия

$$A[\psi,\psi^*] = \int\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - H\left(x, -\frac{ib_0}{2\psi^*\psi}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)\right)\psi^*\psi\}\mathrm{d}^{n+1}x \tag{3.17}$$

где $\boldsymbol{\nabla} = \{\nabla_\alpha\} = \{\partial_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,...n$.

Заметим, что функция ψ, рассматриваемая как функция независимых переменных $\{t,\mathbf{x}\}$ является очень неопределенной в том смысле, что одно и то же состояние $\{\rho(t,\mathbf{x}), \mathbf{P}(t,\mathbf{x})\}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}_\mathrm{p}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ может описываться различными ψ-функциями. Есть две причины для такой неопределенности. Во-первых, функции $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ не определены однозначно уравнениями (3.15). Во-вторых, их аргументы $\boldsymbol{\xi}$ как функции x определены только с точностью до преобразования перемаркировки

$$\xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\alpha = \tilde{\xi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \det\parallel\partial\tilde{\xi}_\alpha/\partial\xi_\beta\parallel = 1, \qquad \alpha,\beta = 1,2,...n \tag{3.18}$$

Описание статистического ансамбля $\mathcal{E}_\mathrm{p}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ в терминах функции ψ более неопределенно, чем описание в терминах гидродинамических потенциалов $\boldsymbol{\xi}$. Информация о начальных и граничных условиях, содержащаяся в функциях $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$, утрачивается при описании в терминах ψ-функции.

Динамические уравнения имеют вид

$$\delta\psi_\beta^*: \qquad \left[ib_0\partial_0 - H + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}p_\alpha + \frac{ib_0}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\nabla_\alpha + \nabla_\alpha\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\right]\psi_\beta = 0, \qquad \beta = 1,2,...k \tag{3.19}$$

$$\delta\psi_\beta: \qquad \left[-ib_0\partial_0 - H + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}p_\alpha - \frac{ib_0}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\nabla_\alpha + \nabla_\alpha\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\right]\psi_\beta^* = 0, \qquad \beta = 1,2,...k \tag{3.20}$$

где $H = H(x,\mathbf{p})$ и $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}(x,\mathbf{p})$ рассматриваются как операторы умножения на эти величины, и нужно подставить выражение (3.16) вместо $\mathbf{p}$ и только после этого действовать оператором $\boldsymbol{\nabla}$. Вообще, динамические уравнения (3.19), (3.20) нелинейны относительно ψ-функции, хотя они могут быть линейны в некоторых случаях. В этих случаях динамические уравнения довольно легко решаются.

Число k компонентов ψ-функции в действии (3.17) произвольно. Формальная вариация действия относительно ψ_α и ψ_α^*, $\alpha = 1,2,\dots k$ приводит к $2k$ вещественным динамическим уравнениям, но не все они независимы. Имеются такие комбинации вариаций $\delta\psi_\alpha$, $\delta\psi_\alpha^*$, $\alpha = 1,2,\dots k$ которые не изменяют выражений (3.16). Такие комбинации вариаций $\delta\psi_\alpha$, $\delta\psi_\alpha^*$, $\alpha = 1,2,\dots k$ не изменяют действия (3.17), и соответствующие комбинации динамических уравнений $\delta\mathcal{A}/\delta\psi_\alpha = 0$, $\delta\mathcal{A}/\delta\psi_\alpha^* = 0$ являются тождествами, что ассоциируется со связью между динамическими уравнениями. Таким образом, при увеличении числа k, число уравнений увеличивается, но число независимых уравнений остается неизменным. Число k ограничено снизу условием того, что уравнения (3.15) имеют решение. Другими словами, минимальное число k_m компонентов ψ-функции зависит от вида функций $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$, т.е. от начальных условий. Это число k_m ассоциируется с кинематическим спином (k-спином) $s = 2k_m + 1$ состояния ансамбля [25].

ψ-функция и k-спин напоминают соответственно волновую функцию и спин. ψ-функция совпадает с волновой функцией, если динамические уравнения (3.19), (3.20) становятся линейными. Это оказывается возможным для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_\mathrm{p}[\mathcal{S}_\mathrm{st}]$ стохастических систем $\mathcal{S}_\mathrm{st}$. В этом случае k-спин ассоциируется со спином описываемой частицы, но k-спин остается свойством статистического ансамбля $\mathcal{E}_\mathrm{p}[\mathcal{S}_\mathrm{st}]$ (т.е. коллективным свойством), тогда как в квантовой механике спин рассматривается как свойство отдельной частицы.

По этому поводу следует заметить, что на самом деле в квантовой механике спин не всегда является свойством отдельной частицы. В работе [28] был произведен сравнительный анализ двух динамических систем $\mathcal{S}_\mathrm{S}$ и $\mathcal{S}_\mathrm{P}$, описываемых соответственно уравнением Шредингера и уравнением Паули. Оказалось, что в классическом приближении обе динамические системы могут интерпретироваться как чистые статистические ансамбли соответственно $\mathcal{E}_\mathrm{S}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ и $\mathcal{E}_\mathrm{P}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$, элементами которых является одна и та же динамическая система $\mathcal{S}_\mathrm{d}$. Статистические ансамбли $\mathcal{E}_\mathrm{S}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ и $\mathcal{E}_\mathrm{P}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]$ различаются только своей структурой, т.е. выбором функций $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$.

Таким образом, анализ способов описания чистого статистического ансамбля показывает, что волновая функция и спин не являются специфически квантовыми объектами. Волновая функция – это просто набор комплексных потенциалов, и мистики в ней не больше, чем в потенциалах электромагнитного поля.

4 Чистый статистический ансамбль стохастических систем

Рассмотрим статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ нет динамических уравнений, и динамические уравнения для $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ нельзя вывести из динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Однако мы верим, что динамические уравнения для $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ существуют, поскольку эксперименты со статистическими ансамблями стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ воспроизводимы.

Будем рассматривать движение стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ как результат взаимодействия между детерминированной частицей $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ и неким стохастическим агентом, который возмущает движение $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ и делает его стохастическим. Чтобы получить динамические уравнения для $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, нужно сделать некоторые предположения о свойствах этого стохастического агента, потому что нельзя получить динамические уравнения для $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ из ничего. Если $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ есть броуновская частица. движущаяся в газе, то предполагают, что броуновская частица сталкивается с молекулами газа, и эти столкновения делают движение броуновской частицы стохастическим. Предполагается, что эти столкновения независимы и случайны. В результате движение броуновской частицы можно рассматривать как марковский процесс. Динамическая система $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ оказывается диссипативной, и для нее не существует вариационного принципа.

Такой способ не подходит для описания влияния геометрической стохастичности, поскольку случайная составляющая движения частицы является релятивистской, и вероятностное статистическое описание применять нельзя. В этом случае предполагается, что влияние стохастического агента проявляется в усреднении параметров функции Гамильтона H, описывающей движение $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Эти параметры начинают зависеть от состояния статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$, т.е. от коллективной переменной ρ. В результате элементы статистического ансамбля начинают взаимодействовать между собой и перестают быть независимыми. Динамическая система $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ перестает быть статистическим ансамблем и превращается в динамическую систему $\mathcal{E}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$, которую мы будем называть приведенным ансамблем (опуская определение "статистический").

Для свободной релятивистской частицы функция Гамильтона имеет вид

$$H(x,\mathbf{p}) = \sqrt{m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2} \tag{4.1}$$

где масса m является единственным параметром гамильтониана системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Вариационый принцип (3.12) для динамической системы $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ имеет при этом вид

$$\mathcal{A}[\rho,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int \rho\{-\sqrt{m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2} - b_0[\partial_0\varphi + g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_{\alpha}]\}\mathrm{d}^4x, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{p}$ задается соотношением (3.13) с $n=3$. После усреднения [19, 20], проводимого с учетом мировой функции (1.2), (1.3), эффективная масса m частицы изменяется

$$m^2 \to m_{\mathrm{q}}^2 = m^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho)^2 \tag{4.3}$$

После замены $m^2 \to m_{\mathrm{q}}^2$ действие принимает вид

$$\mathcal{A}[\rho,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int \rho\{-\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2 + \hbar^2c^2\left(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2} - b_0[\partial_0\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_\alpha]\}\mathrm{d}^4x, \quad (4.4)$$

При этом функция Гамильтона

$$H_{\mathrm{eff}}\left(x,\mathbf{p}\right) = \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2c^2\left(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2 + \mathbf{p}^2c^2} \qquad (4.5)$$

инвариантна относительно преобразования $\rho \to a\rho$, $a =$const.

Действие (4.4) является действием для некоторого статистического ансамбля, поскольку для (4.4) условие (3.1) независимости от числа элементов принимает вид

$$\mathcal{A}\left[a\rho,\varphi,\boldsymbol{\xi}\right] = a\mathcal{A}\left[\rho,\varphi,\boldsymbol{\xi}\right], \qquad a = \mathrm{const}, \qquad a > 0. \qquad (4.6)$$

и выполняется. Однако, теперь оно уже не может интерпретироваться как действие для чистого статистического ансамбля, элементами которого являются какие-либо детерминированные системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, поскольку эти $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ взаимодействуют между собой и не являются независимыми. Это означает, что действие (4.2) можно и нужно интерпретировать как действие для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, элементами которого являются стохастические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$.

В нерелятивистском приближении действие (4.4) имеет вид

$$\mathcal{A}[\rho,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int \rho\{-mc^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2 - b_0[\partial_0\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_\alpha]\}\mathrm{d}^4x, \qquad (4.7)$$

где $\mathbf{p}$ определяется соотношением (3.13). Действие (4.7) не может интерпретироваться как действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ детерминированных систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, но оно может быть истолковано как действие для множества $\mathcal{E}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ детерминированных систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, взаимодействующих между собой посредством потенциальной энергии

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{\mathbf{p}_{\mathrm{st}}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2. \qquad (4.8)$$

где $\mathbf{p}_{\mathrm{st}} = -\hbar\boldsymbol{\nabla}\ln\rho$ есть средний импульс стохастической составляющей движения частицы. Таким образом, с одной стороны, (4.7) есть действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, а с другой стороны, (4.7) есть действие для множества $\mathcal{E}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ взаимодействующих детерминированных систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Это означает, что можно установить соответствие между характером стохастичности и видом взаимодействия детерминированных систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ и маркировать характер стохастичности видом взаимодействия. По существу такое сведение стохастичности к взаимодействию есть единственно возможный способ математического описания стохастичности. Он описывается соотношением

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right] = \mathcal{E}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right] \qquad (4.9)$$

В терминах ψ-функции (3.15) действие (4.7) записывается в виде

$$A[\psi,\psi^*] = \int\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-mc^2\rho-\frac{\hbar^2(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{2m\rho} + \frac{b_0^2}{8\rho m}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi-\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)^2\}\mathrm{d}^4x, \tag{4.10}$$

где $\rho\equiv\psi^*\psi$.

Пусть функция ψ имеет k компонентов. Перегруппируя компоненты функции ψ действия (4.10), получаем его в виде

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = \int\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \frac{b_0^2}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{k}Q^*_{\alpha\beta,\gamma}Q_{\alpha\beta,\gamma}\rho+\frac{b_0^2-\hbar^2}{8\rho m}(\nabla\rho)^2-mc^2\rho\}\mathrm{d}^4x, \qquad \rho\equiv\psi^*\psi \tag{4.11}$$

где предполагается суммирование по γ от 1 до 3, и

$$Q_{\alpha\beta,\gamma}=\frac{1}{\psi^*\psi}\begin{vmatrix}\psi_\alpha & \psi_\beta\\ \partial_\gamma\psi_\alpha & \partial_\gamma\psi_\beta\end{vmatrix}, \qquad \alpha,\beta=1,2,\ldots k \qquad \gamma=1,2,3 \tag{4.12}$$

и $Q^*_{\alpha\beta,\gamma}$ есть комплексно сопряженная величина к $Q_{\alpha\beta,\gamma}$.

В простейшем случае, когда ψ-функция имеет только один компонент, все величины $Q_{11,\gamma}=0,\quad\gamma=1,2,3$, и движение ансамбля частиц потенциальное. Тогда действие (4.11) приводится к виду

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = \int\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi - mc^2\rho+\frac{b_0^2-\hbar^2}{8\rho m}(\nabla\rho)^2\}\mathrm{d}^4x, \qquad \rho\equiv\psi^*\psi \tag{4.13}$$

Благодаря последнему члену в действии (4.13) динамическое уравнение, порожденное действием (4.13) нелинейно за исключением случая, когда $b_0^2=\hbar^2$, хотя b_0 есть постоянная интегрирования и действие (4.13) описывает одну и ту же динамическую систему при любом значении b_0. Приравнивая произвольную постоянную интегрирования b_0 к $\hbar$ ($b_0=\hbar$), получаем вместо (4.13)

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = \int\{\frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi-mc^2\psi^*\cdot\psi\}\mathrm{d}^4x \tag{4.14}$$

Легко видеть, что динамическое уравнение, порождаемое действием (4.14) линейно. После замены $\psi\rightarrow\exp(-imc^2t/\hbar)\psi$, выводящей из уравнения массу покоя, динамическое уравнение превращается в уравнение Шредингера в его традиционной форме

$$i\hbar\partial_0\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi=0. \tag{4.15}$$

Постоянная b_0 описывает масштаб фазы ψ-функции, и преобразование фазы ψ-функции

$$\psi \to \tilde{\psi} = |\psi| \exp\left(\frac{\tilde{b}_0}{b_0} \log \frac{\psi}{|\psi|}\right), \tag{4.16}$$

заменяет в действии (4.13) постоянную b_0 на $\tilde{b}_0$. Действия (4.13) и (4.14) разительно отличаются друг от друга, хотя оба описывают одну и ту же динамическую систему. Действие (4.13) содержит только один квантовый член, т.е. член, содержащий квантовую постоянную $\hbar$, и полагая $\hbar = 0$, мы автоматически переходим от квантового описания к классическому. Напротив, в действии (4.14) почти все члены квантовые и нельзя положить $\hbar = 0$, так как при этом исчезает всякое описание динамической системы. Для получения классического описания из действия (4.14) нужно использовать изощренные приемы квазиклассического описания. Возникающая при переходе от действия (4.13) к действию (4.14), линейность динамического уравнения представляется скорее некоей счастливой случайностью, чем проявлением квантовомеханического принципа линейности динамических уравнений.

Описывая стохастические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ с помощью действия (4.14), можно интерпретировать величину $\psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$ как плотность вероятности обнаружения частицы в точке $\mathbf{x}$. Это связано с тем, что величина $\psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$ неотрицательна, и интеграл от нее сохраниется в силу динамического уравнения. Введенную таким образом плотность вероятности удобно использовать для описания частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, но все это не имеет прямого отношения к статистическому описанию. Вообще, рассмотрение действия (4.14) для динамической системы $\mathcal{E}_{\mathrm{red}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ не ассоциируется с традиционной вероятностной концепцией статистического описания.

Можно показать [29], что задания динамической системы, т.е. задания действия (4.14), достаточно для описания всех квантовых эффектов (диффракции, интерференции, туннельного эффекта, соотношения неопределенностей, нахождения собственных значений стационарных состояний и т.д.). Иначе говоря, если задана динамическая система (4.14), то при описании квантовых эффектов можно обойтись без ссылки на принципы квантовой механики. Это утверждение справедливо не только в случае конкретного действия (4.14), но и в общем случае действия, возникающего как следствие статистического описания. Это утверждение завершает логическую схему исследовательской программы Коперник-2.

Итак, программа Коперник-2 в нерелятивистском приближении дает квантово-механическое описание, опираясь только на геометрию пространства событий и не используя принципов КМ. Общий релятивистский случай разработан пока недостаточно, однако статистическое описание, сводящееся к динамической системе $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$, описываемой уравнением Клейна-Гордона, получено в [29]. Для его получения нужно вместо нерелятивистской эффективной массы $m_{\mathbf{q}}$, задаваемой соотношением (4.3), использовать релятивистский вариант, включающий в себя замену в (4.3) оператора $\boldsymbol{\nabla}$ на оператор $\{\partial_i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$ и замену временно́го компонента $j^0 = \rho$ на соответствующий релятивистский инвариант j^0/H. Однако нерелятивистский по своей форме вариационный принцип Гамильтона (3.12) мало пригоден для работы с релятивистскими величинами. Удобнее использовать вариационный принцип Лагранжа, эквивалентный (3.12)

$$\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]: \qquad \mathcal{A}[j,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int \{L(x, \frac{\mathbf{j}}{j^0})j^0 - b_0 j^i[\partial_i\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_i\xi_\alpha]\}\mathrm{d}^{n+1}x, \qquad (4.17)$$

где $L(x, \frac{d\mathbf{x}}{dt})$ есть лагранжиан системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ и $\{j^i\}$, $i = 0, 1, ...n$ есть поток частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в ансамбле $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$. Тогда вариационный принцип для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right] = \mathcal{E}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ принимает вид

$$\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}[j,\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa] = \int \{-mcK\sqrt{j^i g_{ik} j^k} - b_0 j^i[\partial_i\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_i\xi_\alpha]\}\mathrm{d}^3x, \quad (4.18)$$

$$m_{\mathrm{q}} = mK, \qquad K \equiv \sqrt{1 + \lambda^2(\partial_l\kappa^l + \kappa^l\kappa_l)}, \qquad \partial_k \equiv \partial/\partial x^k, \qquad (4.19)$$

где m есть масса частицы, а $\lambda \equiv \hbar/mc$ есть ее комптонова длина волны. g_{ik} =diag$\{c^2, -1, -1, -1\}$ – метрический тензор. $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$; и $\kappa^l = \kappa^l(x)$, $x = \{x^l\}$, $l = 0, 1, 2, 3$. По повторяющимся латинским индексам производится суммирование от 0 до 3, а по греческим от 1 до 3. Здесь эффективная масса $m_{\mathrm{q}} = mK$ выражается через некоторое κ-поле, описывающее взаимодействие частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в динамической системе $\mathcal{E}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$. Одновременно κ-поле описывает стохастичность систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$.

Из динамических уравнений следует, что κ-поле имеет потенциал, обозначаемый посредством $\frac{1}{2}\ln\rho$, т.е. $\kappa_l = \frac{1}{2}\partial_l \ln\rho$. Тогда можно ввести ψ-функцию с помощью соотношений (3.14). В простейшем случае, когда ψ-функция имеет один компонент, динамическое уравнение для нее совпадает с уравнением Клейна-Гордона, а в нерелятивистском приближении – с уравнением Шредингера.

κ-поле имеет все характерные свойства поля, т.е. оно обладает собственной энергией, способно отрываться от вещества и существовать самостоятельно в его отсутствии, т.е. при $j^k = 0$, $k = 0, 1, 2, 3$. Кроме того оно способно порождать пары частица–античастица и ответственно за квантовые эффекты, т.е. при $\kappa^i \equiv 0$, $i = 0, 1, 2, 3$ статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ превращается в статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$.

5 Заключительные замечания

Исследовательская программа Коперник-2 является логически более совершенной, чем Птолемей-2, и это связано с тем, что при ее обосновании использовались более общие и более совершенные концепции геометрии и статистического описания. Важно понимать, что эти более общие концепции не являются результатом каких-то удачных гипотез или ограничений. Напротив, большая общность и эффективность новых концепций геометрии и статистического описания достигается в результате отказа от необоснованных ограничений, применявшихся раньше. В новой концепции геометрии отброшено понятие кривой. Оно не используется как слишком ограничительное. В новой концепции статистического описания понятия вероятности и плотности вероятности отброшены и не используются как слишком ограничительные. Важно также и то, что для формулирования программы Коперник-2 нужно *одновременное использование* Т-геометрии и динамической концепции статистического описания. Использование одной только Т-геометрии объясняет квантовую стохастичность, но не позволяет воспроизвести математический аппарат квантовой механики. Использование одной динамической концепции статистического описания позволяет только получить аппарат квантовой механики, но не объясняет причин квантовой стохастичности и не дает возможности развития этого аппарата в "геометрическом направлении", которое характерно для всего развития физики за последние полтора века.

Из того, что исследовательская программа Коперник-2 объясняет основные квантовые эффекты, не используя дополнительных гипотез (принципов квантовой механики), следует, что Копреник-2 является логически более состоятельной исследовательской программой, чем Птолемей-2. Последняя использует неадекватную геометрию пространства-времени, которая должна быть исправлена. Однако, программа Птолемей-2 функционирует почти сто лет. Все описания явлений микромира и соответствующие расчеты производятся в терминах понятий квантовой механики. Наработан колоссальный фактический материал, пересмотр которого затруднителен и нежелателен. В этой связи важно знать, в какой степени переход от программы Птолемей-2 к программе Коперник-2 затронет имеющиеся сейчас результаты, полученные на основе квантовой механики.

Чтобы оценить это, полезно обратиться к опыту взаимодействия аксиоматической термодинамики и статистической физики, которая обосновала термодинамику и указала пределы применимости ее соотношений. Этот опыт показывает, что ограничения, налагаемые статистической физикой, затронули только очень малую часть выводов термодинамики. В области применения термодинамики для практических целей все осталось неизменным. Следует ожидать, что переход к программе Копреник-2 совершенно не затронет результатов нерелятивистской квантовой механики, которая сейчас наиболее развита и имеет практические приложения. Что касается релятивистской квантовой теории и особенно теории элементарных частиц, то здесь возможны существенные изменения.

Отметим одну важную проблему, связанную с динамической системой $\mathcal{S}_\mathrm{D}$, описываемой уравнением Дирака или действием

$$\mathcal{S}_\mathrm{D}: \qquad \mathcal{A}_\mathrm{D}[\bar{\psi},\psi] = \int (-m\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi - \frac{i}{2}\hbar\partial_l\bar{\psi}\gamma^l\psi)d^4x \qquad (5.1)$$

где ψ есть четырех-компонентная комплексная волновая функция. Как известно, уравнение Дирака является релятивистским уравнением, однако, динамическая система $\mathcal{S}_\mathrm{D}$ не является релятивистской, и это очень странно. Обнаружено это было при анализе динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ [30], предпринятом для выяснения того, с каким геометрическим объектом ассоциируется $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$. Смысл дираковских матриц γ^i в действии (5.1) не очень ясен, поэтому они были исключены, а система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ изучалась в тензорных переменных j^l, S^l, $(l=0,1,2,3)$, φ,κ, определенных тензорными соотношениями

$$j^l=\bar{\psi}\gamma^l\psi, \qquad l=0,1,2,3, \qquad \bar{\psi}=\psi^*\gamma^0, \tag{5.2}$$

$$S^l=i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^l\psi, \qquad l=0,1,2,3, \qquad \gamma_5=\gamma^{0123}\equiv\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{5.3}$$

Здесь γ^l, $l=0,1,2,3$ суть дираковские γ-матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\gamma^i\gamma^k+\gamma^k\gamma^i=2g^{ik}, \qquad i,k=0,1,2,3, \tag{5.4}$$

где $g^{ik}=$diag$(1,-1,-1,-1)$ есть метрический тензор. Только два компонента псевдовектора S^l являются независимыми из-за двух тождеств

$$S^lS_l\equiv-j^lj_l, \qquad j^lS_l\equiv 0. \tag{5.5}$$

Чтобы описать $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ в тензорных переменных, делается замена переменных

$$\psi=Ae^{i\varphi+\frac{1}{2}\gamma_5\kappa}\exp(-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\Pi, \qquad \bar{\psi}=A\Pi(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\exp(-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta})e^{-i\varphi+\frac{1}{2}\gamma_5\kappa} \tag{5.6}$$

где Π есть делитель нуля

$$\Pi=\frac{1}{4}\left(1+\gamma^0\right)(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}), \qquad \mathbf{z}=\left\{z^1,z^2,z^3\right\}, \qquad \mathbf{z}^2=1 \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\}, \qquad \sigma_1=-i\gamma^2\gamma^3, \qquad \sigma_2=-i\gamma^3\gamma^1, \qquad \sigma_3=-i\gamma^1\gamma^2 \tag{5.8}$$

Переменные $A,\boldsymbol{\eta}=\{\eta^1,\eta^2,\eta^3\}$, $\mathbf{n}=\{n^1,n^2,n^3\}$, $(\mathbf{n}^2=1)$ суть шесть промежуточных переменных, а $\mathbf{z}$ есть постоянный 3-вектор. Подставляя (5.6) в (5.1) и используя соотношения (5.2), (5.3), можно выразить действие (5.1) в терминах тензорных переменных j^l,S^l,κ,φ, содержащих восемь независимых вещественных составляющих.

Ожидалось, что после преобразования к тензорным переменным j^l, S^l, φ,κ действие (5.1) удастся записать в релятивистски ковариантной форме. Однако этого не произошло. Действие и динамические уравнения удается записать в релятивистски ковариантной форме только после введения постоянного единичного времениподобного 4-вектора f^i, который является абсолютным объектом в смысле Андерсона [31] и описывает разделение пространства-времени на пространство и время. (Заметим, что 3-вектор $\mathbf{z}$ тоже является абсолютным объектом, но он оказался фиктивным.) Другими словами, динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ является нерелятивистской. Разумеется, она является нерелятивистской и при описании в терминах волновой функции ψ, однако, в этом случае 4-вектор f^i поглощается другими абсолютными объектами (γ-матрицами) и обнаружить его сразу не удается (см. обсуждение в [30]). Можно было бы думать, что появление 4-вектора f^i есть результат вычислительной ошибки (преобразование действия (5.1) к тензорным переменным довольно громоздко), но тот же временіподобный вектор f^i появляется и в более простом случае двумерного пространства-времени, когда возможно [32] преобразование системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ к динамической системе $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$, описываемой уравнением Клейна-Гордона и не содержащей γ-матриц. К сожалению, это обстоятельство заставляет думать, что вывод о нерелятивистском характере динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ верен.

Таким образом, динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ является нерелятивистской, и это является серьзным испытанием для обеих исследовательских программ Птолемей-2 и Коперник-2. Прояснение причин этого обстоятельства может серьезно продвинуть нас в понимании того, как устроен микромир.

Исследовательские программы Птолемей-2 и Коперник-2 указывают различные пути дальнейших фундаментальных исследований, и в этом состоит наиболее важное различие между ними. Ключевое слово для дальнейших исследований по программе Птолемей-2 – *линейность*, тогда как для программы Коперник-2 ключевым словом является *геометризация*.

Список литературы

[1] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[2] K. Menger, Statistical metric. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **28**, 535-537, (1942).

[3] A. Wald, On statistical generalization of metric spaces, *Reports of a Mathematical Colloquium. Second series* **5-6**, 76-79. Reprinted in *Abraham Wald: Selected papers in statistics and probability*, New-York, 1955. pp.413-416,

[4] K. Menger, Probabilistic geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **37**, 226-229, (1951).

[5] B. Schweizer, A. Sklar, Statistical metric spaces. *Pacific J. Math.,* **10**, 313-334, (1960).

[6] Д. И. Блохинцев, *Пространство и время в микромире.* Наука, 1970.

[7] Д. И. Блохинцев, Стохастические пространства. *Сообщения ОИЯИ, Дубна, P2-6094*, (1971).

[8] J. E. Moyal, *Proc. Cambr. Phil. Soc.,* **45**, 99, (1949). (Русс. пер. в сб. *Вопросы причинности в квантовой механике.* ред. Я. П. Терлецкого и А. А. Гусева).

[9] I. Fényes, *Zs. f. Phys.*, **132**, 81, (1952). (Русс. пер. в сб. *Вопросы причинности в квантовой механике.* ред. Я. П. Терлецкого и А. А. Гусева).

[10] В. А. Топоногов, Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. *УМН,* **14**, 87, (1959).

[11] А. Д. Александров, В. Н. Берестовский, И. Г. Николаев, Обобщенные римановы пространства. *УМН,* **41**, вып. 3, 1, (1986).

[12] Ю. Бураго, М. Громов, Г. Перельман, Пространства А.Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами. *УМН,* **47**, вып. 2, 3, (1992).

[13] Yu. A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).

[14] Ю. А. Рылов, Описание метрического пространства как классификация его конечных подпространств. *ФПМ* (в печати).

[15] Yu. A. Rylov, Geometry without topology. *Electronic archives of LANL* math.MG/0002161

[16] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).

[17] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[18] Yu. A. Rylov, Quantum mechanics as relativistic statistics.III: A relativistic particle in two-dimensional space-time. *Int. J. Theor. Phys.* **19**, 645, (1980).

[19] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[20] Yu. A. Rylov, Space-time distortion as a reason for quantum stochasticity. in *Chaos: the interplay between stochastic and deterministic behaviour*, eds. P. Garbachewski, M. Wolf, A. Weron, (Karpacz'95 Proc. Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin), **457**, 523-529, (1995)

[21] Yu. A. Rylov, Statistical principle and pair production problem. *Phys. Essays* **4**, 300-313, (1991).

[22] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* **47**, 777-780, (1935).

[23] J. V. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin Springer, 1932.

[24] C. C. Lin, Hydrodynamics of Helium II. *Proc. Int. Sch Phys.* Course XXI, pp. 93-146, New York, Academic, 1963.

[25] Yu. A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.*, **40,** 256-278, (1999).

[26] A. Clebsch, Über eine allgemaine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[27] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[28] Yu. A. Rylov, Pauli electron as a dynamic system. *Found. Phys.* **25,** 1055-1086, (1995).

[29] Yu. A. Rylov, Quantum mechanics as a dynamic construction. *Found. Phys.* **28,** 245, (1998).

[30] Yu. A. Rylov, Dirac equation in terms of hydrodynamic variabls. *Adv. Appl. Clif. Alg.* **5**, 1-40, (1995).

[31] J. L. Anderson, *Principles of relativity physics.* Academic Press, New-York, 1967, pp 75-88.

[32] Yu. A. Rylov, Interplay between dynamic systems described by the Klein-Gordon and Dirac equation. *Adv. Appl. Clif. Alg.* **9**, 177-192, (1999).