Ограниченные линейные свойства скалярного произведения в Т-геометрии

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Москва, 119526, Пр. Вернадского 101-1,
e-mail: rylov@ipmnet.ru

Аннотация

Показано, что скалярное произведение двух векторов может быть введено в любой геометрии (метрическом пространстве) не зависимо от возможности введения линейного пространства. Линейные свойства скалярного произведения ограничены. Область линейности увеличивается в однородной геометрии.

Т-геометрия [1] – это очень общая геометрия, задаваемая на произвольном множестве точек Ω с помощью мировой функции σ:

$$\sigma : \quad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P) = 0, \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{1}$$

Т-геометрия симметрична, если кроме того

$$\sigma(P,Q) = \sigma(Q,P) \tag{2}$$

Т-геометрия не имеет своей собственной аксиоматики. Она получается в результате деформации собственно евклидовой геометрии. Иначе говоря, всякое соотношение Т-геометрии получается в результате некоторой деформации соответствующего соотношения собственно евклидовой геометрии. Соотношение евклидовой геометрии записывается в σ-имманентной форме (т.е. в терминах одной только мировой функции σ). После этого мировая функция собственно евклидовой геометрии заменяется на мировую функции другой Т-геометрии. Получается соответствующее соотношение этой Т-геометрии. Представление соотношения собственно евклидовой геометрии в σ-имманентной форме всегда возможно, потому что собственно евклидова геометрия может быть сформулирована σ-имманентно (в терминах одной только мировой функции) [1].

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \equiv \overrightarrow{P_0P_1}$ в Т-геометрии есть упорядоченное множество из двух точек $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{P_0, P_1\}, \quad P_0, P_1 \in \Omega$. Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0,Q_1) + \sigma(P_1,Q_0) - \sigma(P_0,Q_0) - \sigma(P_1,Q_1) \tag{3}$$

для всех $P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega$.

Как следует из (2), (3), в симметричной Т-геометрии

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) \tag{4}$$

для всех $P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega$

Если мировая функция σ такова [1], что σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ является n-мерным собственно евклидовым пространством E_n, скалярное произведение (3) превращается в скалярное произведение двух векторов в E_n. Кроме того, из (3) следует, что в любой Т-геометрии

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = -(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0.\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_0), \tag{5}$$

$$(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) = -(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0), \tag{6}$$

для всех $P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega$

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) + (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) &= (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1), &(7)\\ (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) + (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) &= (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2.) &(8)\end{aligned}$$

для всех $P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1 \in \Omega$

Рассмотрим отношение между двумя векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathcal{T}\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1: \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) \wedge (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) = (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1) \tag{9}$$

для всех $Q_0, Q_1 \in \Omega$

Отношение (9) рефлексивно, симметрично и транзитивно. Оно может рассматриваться как отношение эквивалентности. Итак, два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$ эквивалентны $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$, если имеют место соотношения

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) &= (\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1), \quad \forall Q_0, Q_1 \in \Omega &(10)\\ (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) &= (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1), \quad \forall Q_0, Q_1 \in \Omega &(11)\end{aligned}$$

Тогда получаем из (6), (7)

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0 = -\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \alpha\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \qquad \alpha = -1 \tag{12}$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \tag{13}$$

Соотношения (12), (13) определяют операцию умножения вектора на вещественное число $\alpha = \pm 1$ и суммирование векторов. Но векторы в σ-пространстве $V = \{\sigma, \Omega\}$ не являются свободными векторами и два вектора могут быть сложены, если только начало одного вектора является концом другого. При таком определении сложения векторов скалярное произведение векторов имеет линейные свойства

$$\begin{aligned}(\alpha\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 + \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) &= \alpha(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) &(14)\\ (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\alpha\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 + \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1) &= \alpha(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1) &(15)\end{aligned}$$

$$\alpha = \pm 1, \beta = \pm 1, \qquad P_0, P_1, R_0, R_1 \in \Omega, \ \forall Q_0, Q_1 \in \Omega$$

Линейные свойства скалярного произведения ограничены по сравнению с линейными свойствами скалярного произведения в евклидовом пространстве, потому что в соответствии с (5) – (8) линейные операции над векторами всегда возможны только в следующих случаях:

1. $\alpha = 0 \vee \beta = 0$
2. $\alpha = \beta = \pm 1$, $(P_1 = R_0) \vee (R_1 = P_0)$
3. $\alpha = -\beta = \pm 1$, $(P_1 = R_1) \vee (P_0 = R_0)$

В других случаях линейные операции над векторами, вообще говоря, не определены, но они могут быть определены в некоторых специальных T-геометриях, когда, соотношения (14), (15)

$$\begin{array}{c} (\mathbf{S_0S_1}.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \alpha\,(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) + \boldsymbol{\beta}\,(\mathbf{R_0R_1}.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) \\ (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{S_0S_1}) = \alpha\,(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) + \boldsymbol{\beta}\,(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{R_0R_1}) \end{array} \tag{16}$$

выполнены для всех векторов $\mathbf{Q_0Q_1}$ и некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда по определению

$$\mathbf{S_0S_1} = \alpha\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 + \beta\mathbf{R_0R_1} \tag{17}$$

В общем случае не существует вектора $\mathbf{S_0S_1}$, удовлетворяющего (16) для всех векторов $\mathbf{Q_0Q_1}$, и линейные операции определены только в случае, когда выполнены соотношения (5) – (8).

Пусть $E_n = \{\sigma_{\mathrm{E}}, \mathbb{R}^n\}$ есть n-мерное собственно евклидово пространство. Удалим некоторое множество Ω' точек из $\mathbb{R}^n$. Тогда σ-пространство $V = \{\sigma_{\mathrm{E}}, \Omega\}$, $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \Omega'$ есть результат деформации евклидова пространства E_n, потому что удаление точек есть специальный вид деформации. Линейная операция (17) определена в E_n для всех точек P_0, P_1, R_0, R_1 и всех вещественных α, β. Линейная операция (17) определена в V для некоторых вещественных α, β и для $P_0, P_1, R_0, R_1 \in \Omega$, при условии что существуют такие точки $S_0, S_1 \in \Omega$, что соотношения (16) выполнены для всех $Q_0, Q_1 \in \Omega$. Таким образом, удаление точек из евклидова пространства разрушает его линейную структуру, но не полностью. Изменение мировой функции играет ту же роль. Однако, существует минимальная линейная структура (12), (13), которая остается при любой деформации евклидова пространства.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **30**, 733-760, (2002).