Создание трубчатой геометрии как причина нового пересмотра концепции пространства-времени

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики РАН,
119526, Москва, Проспект Вернадского, 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site:
http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm

Аннотация

Трубчатая геометрия (Т-геометрия) является обобщением собственно евклидовой геометрии, основанном на свойстве σ-имманентности. Собственно евклидова геометрия может быть полностью описана в терминах мировой функции $\sigma = \rho^2/2$, где ρ есть расстояние. Это свойство называется σ-имманентностью. Предполагая, что любая физическая геометрия σ-имманентна, можно построить Т-геометрию $\mathcal{G}$, заменяя в σ-имманентном представлении евклидовой геометрии евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией σ Т-геометрии $\mathcal{G}$. Такой метод построения геометрии очень прост и эффективен. Т-геометрия обладает новым геометрическим свойством невырожденностью. Класс однородных изотропных Т-геометрий описывается функцией одного параметра. Используя Т-геометрию как пространственно-временную геометрию, можно построить детерминированную геометрию пространства-времени с изначально стохастическим движением свободных частиц и геометризованной массой частиц. Такая определенная надлежащим образом геометрия пространства-времени (с квантовой постоянной как атрибутом геометрии) позволяет объяснить квантовые эффекты как результат статистического описания движения частиц. Принципы квантовой механики получаются как следствие геометрии, и нельзя говорить о квантовой природе микромира. Геометризация массы частиц оказывается связанной с ограниченной делимостью сегментов прямой линии. Следствием геометризации массы частицы является утверждение, что проблема спектра масс элементарных частиц является проблемой скорее геометрии, чем динамики.

1 Введение

Собственно евклидова геометрия была построена Евклидом много лет тому назад. Евклидова геометрия была создана как геометрическая конструкция, описывающая взаимное расположение геометрических объектов в пространстве. Главным объектом евклидовой геометрии является точка, т.е. геометрический объект, не имеющий размера. Прямая имеет длину, но не имеет толщины. Плоскость есть непрерывное множество параллельных прямых. Сложные геометрические объекты являются объединениями более простых геометрических объектов. Простейшие геометрические объекты (точки, прямые, плоскости и т.п.) называются элементарными геометрическими объектами (ЭГО). Евклидова геометрия однородна и изотропна. Все одинаковые ЭГО имеют одинаковые свойства в разных местах пространства. Свойства элементарных геометрических объектов (ЭГО) постулируются, а свойства более сложных геометрических объектов получаются с помощью логических рассуждений из аксиом, описывающих свойства ЭГО. Расстояние между двумя точками P и Q вводится в евклидовой геометрии как число, описывающее отношение между отрезком прямой PQ и некоторым универсальным стандартным отрезком прямой AB. В евклидовом изложении евклидовой геометрии расстояние является численной величиной, которая не используется при построении евклидовой геометрии.

Евклидова геометрия является с одной стороны логическим построением, а с другой стороны это наука о взаимном расположении геометрических объектов. Таким образом, существуют два аспекта евклидовой геометрии. Всякая другая геометрия получается как обобщение евклидовой геометрии. Можно обобщать евклидову геометрию, рассматривая ее как логическое построение. В этом случае мы изменяем свойства ЭГО, т.е. заменяем аксиомы евклидовой геометрии. В результате мы получаем другие однородные геометрии (аффинная геометрия, проективная геометрия, симплектическая геометрия и т.п.). Вообще, любое логическое построение, содержащее понятия точки и прямой, можно рассматривать как геометрию. Мы будем называть такую геометрию математической, потому что такие геометрии интересны, главным образом, для математиков, которые тренируют свои математические и логические способности, создавая и исследуя такие геометрии.

Геометрия как наука о взаимном расположении геометрических объектов интересна главным образом для физиков, котрые используют ее, описывая физические явления, происходящие в пространстве и в пространстве-времени. Такую геометрию мы будем называть физической геометрией. Основной характеристикой физической геометрии является расстояние между двумя произвольными точками пространства. Обобщение евклидовой геометрии получается в результате деформации евклидова пространства. При такой деформации расстояние между точками изменяется. Одинковые ЭГО в разных местах пространства становятся различными, и полученная обобщенная геометрия становится неоднородной. В такой геометрии нельзя использовать аксиомы, потому что одинаковые ЭГО становятся различными после неоднородной деформации. Обобщение евклидовой геометрии нельзя производить тем же способом, каким это делается в математической геометрии. Известный математик Феликс Клейн [1] полагал, что только однородная геометрия заслуживает названия геометрии. По его мнению риманову геометрию (вообще говоря, необнородную) следует квалифицировать как риманову географию или риманову топографию. Другими словами, Феликс Клейн рассматривал геометрию главным образом как логическое построение. Нам кажется, что квалификация римановой геометрии как физической геометрии более удобна, чем квалификация ее как разновидность топографии, хотя этот пункт не является принципиальным. Гораздо важнее то, что физическая геометрия и математическая геометрия являются совершенно разными конструкциями, потому что они основаны на разных принципах.

В этой работе мы будем рассматривать только физическую геометрию, где взаимное расположение геометрических объектов является главным предметом изучения. Взаимное расположение геометрических объектов описывается расстоянием ρ, которое задается для всех пар точек $P,Q\in\Omega$, где Ω есть множество всех точек пространства. Обычно вместо расстояния ρ рассматривают величину $\sigma(P,Q)=\frac{1}{2}\rho^2(P,Q)$, известную как мировая функция [2]. Мировая функция является вещественной даже в пространственно-временной геометрии, где ρ может быть мнимым. Очень важно, что мировая функция евклидовой геометрии является единственной величиной, необходимой для описания собственно евклидовой геометрии. Иными словами, *собственно евклидова геометрия может быть полностью описана в терминах мировой функции* σ_{E} евклидова пространства. Это утверждение является важной теоремой евклидовой геометрии, которая может быть доказана в рамках евклидовой геометрии. Эта теорема является основанием для построения всех физических геометрий.

Свойство физической геометрии быть полностью построенной с помощью мировой функции мы будем называть σ-имманентным свойством этой геометрии. Мы сформулируем важную теорему о σ-имманентности евклидовой геометрии ниже, как только будет развит необходимый формализм. Сейчас только заметим, что собственно евклидова геометрия может быть построена как математическая геометрия без ссылок на понятие расстояния или понятие мировой функции. Мировая функция σ_{E} евклидова пространства может быть введена, когда собственно евклидова геометрия уже построена. Таким образом, мировая функция не нужна для построения евклидовой геометрии.

Свойство σ-имманентности евклидовой геометрии было обнаружено сравнительно недавно [3, 4]. Было доказано, что евклидова геометрия может быть представлена в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E}, при условии, что функция σ_{E} удовлетворяет ряду ограничений, записанных в терминах σ_{E}. По определению, *всякая геометрия есть совокупность всех геометрических объектов* $\mathcal{O}$ *и всех соотношений* $\mathcal{R}$ *между ними.* σ-иммманентность собственно евклидовой геометриии означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и любое соотношение $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ могут быть представлены в терминах евклидовой мировой функции σ_{E} в виде $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$.

Допустим, что любая физическая геометрия $\mathcal{G}$ обладает свойством σ-имманентности. Тогда геометрия $\mathcal{G}$ может быть построена как результат деформации собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. В самом деле, собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ есть совокупность геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и соотношений $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Сделаем замену

$$\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma, \qquad \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \to \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma), \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \to \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma) \tag{1.1}$$

Тогда совокупность геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma)$, соотношений $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma)$ и мировой функции σ образует физическую геометрию $\mathcal{G}$.

Например, пусть геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ является сферой $\mathcal{S}_{\mathrm{E}P_0Q}$, проходящей через точку Q и имеющей центр в точке P_0. В собственно евклидовой геометрии мы имеем

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}): \qquad \mathcal{S}_{\mathrm{E}P_0Q} = \{R | \sigma_{\mathrm{E}}(P_0, R) = \sigma_{\mathrm{E}}(P_0, Q)\} \tag{1.2}$$

Геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma)$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma): \qquad \mathcal{S}_{P_0Q} = \{R | \sigma(P_0, R) = \sigma(P_0, Q)\} \tag{1.3}$$

является сферой $\mathcal{S}_{P_0Q}$ в физической геометрии $\mathcal{G}$.

Пусть $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ есть скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{E}}$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Оно может быть записано в σ-имманентном виде (т.е. в терминах мировой функции σ_{E})

$$\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}): \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{E}} = \sigma_{\mathrm{E}}(P_0, P_1) + \sigma_{\mathrm{E}}(P_0, P_2) - \sigma_{\mathrm{E}}(P_1, P_2) \tag{1.4}$$

где индекс 'E' показывает, что величина относится к евклидовой геометрии. Легко видеть, что (1.4) есть следствие евклидовых соотношений

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{E}}^2 = 2\sigma_{\mathrm{E}}(P_0, P_1) \tag{1.5}$$

$$|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|_{\mathrm{E}}^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{E}}^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{E}}^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|_{\mathrm{E}}^2 - 2(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)_{\mathrm{E}} \tag{1.6}$$

В соответствии с (1.1) в физической геометрии $\mathcal{G}$ получаем вместо (1.4)

$$\mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma): \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = \sigma(P_0, P_1) + \sigma(P_0, P_2) - \sigma(P_1, P_2) \tag{1.7}$$

Такой способ построения физической геометрии очень прост. Он не использует никаких логических рассуждений. Он основан на допущении, что *любая физическая геометрия обладает σ-имманентным свойством.* При этом существенно используется тот факт, что собственно евклидова геометрия уже построена, и все необходимые логические построения уже сделаны в собственно евклидовой геометрии.

Мы будем называть принципом деформации применение замены (1.1) к построению физической геометрии. Всякая замена расстояния ρ, или мировой функции σ между точками пространства означает деформацию пространства. Мы будем толковать понятие деформации в широком смысле слова. Деформация может преобразовывать точку в поверхность и поверхность в точку. Деформация может удалять некоторые точки евклидова пространства, нарушая его непрерывность, или уменьшая размерность. Деформация может добавлять дополнительные точки к евклидову пространству, увеличивая его размерность. Мы можем интерпретировать любое σ-имманентное обобщение евклидовой геометрии как ее деформацию. Иначе говоря, принцип деформации есть очень общий метод построения обобщенных геометрий.

Будем называть физическую геометрию, построенную на основе принципа деформации, трубчатой геометрией (T-геометрией) [3, 4, 5]. Такое название используется потому, что в T-геометрии прямые линии имеют, вообще говоря, форму полых трубок, которые в некоторых T-геометриях могут вырождаться в одномерные кривые. В этом пункте T-геометрия отличается от римановой геометрии, где прямые линии (геодезические) одномерны по построению.

Построение неоднородной геометрии на аксиоматической основе практически невозможно, потому что имеется очень много различных неоднородных геометрий. Очень трудно придумать аксиоматику для неоднородной геометрии, где одинаковые объекты имеют разные свойства в разных местах пространства. Кроме того невозможно придумать аксиоматику для каждой из всех этих геометрий. Таким образом, на самом деле, нет альтернативы применению принципа деформации при построении физической геометрии. Действительная проблема состоит в последовательном применении принципа деформации. Поскольку *один только принцип деформации достаточен для построения физической геометрии*, то нельзя использовать дополнительные средства построения геометрии. При построении физической геометрии не используются система координат и другие средства описания.

Обычно построение римановой геометрии осуществляется в некоторой системе координат. Риманова геометрия получается из евклидовой геометрии с помощью принципа деформации, т.е. заменой бесконечно малого евклидова расстояния $dS_{\mathrm{E}} = \sqrt{g_{\mathrm{E}ik}dx^i dx^k}$ римановым расстоянием $dS_{\mathrm{R}} = \sqrt{g_{\mathrm{R}ik}dx^i dx^k}$. Свойства римановой геометрии определяются видом метрического тензора $g_{\mathrm{R}ik}$. Однако, вид метрического тензора зависист от выбора системы координат. Если мы используем различные системы координат, то получаем формально различные описания одной и той же римановой геометрии. Чтобы отделить существенную часть описания, которая относится к самой геометрии, рассматривают описание во всех возможных системах координат. Общая часть описаний во всех системах координат (инварианты группы преобразований координат) образует описание самой геометрии. К сожалению, мы не можем использовать все системы координат. Практически используются только непрерывные координаты. Число координат фиксировано и совпадает с размерностью римановой геометрии. Мы не можем сказать однозначно, является ли непрерывность свойством рассматриваемой геометрии, или, может быть, это только свойство координатного описания. В результате большинство геометров полагают, что непрерывность есть свойство внутренне присущее геометрии. Они допускают, что дискретные геометрии могут быть построены, но они не знают, как это сделать, потому что нельзя использовать дискретные координаты для описания дискретных геометрий.

Математики снабжают снабжают физиков своими геометрическими построениями, и физики верят, что пространство-время непрерывно. Непрерывность пространства-времени нельзя проверить экспериментально, и единственной причиной непрерывности пространства-времени является то, что математики умеют строить только непрерывные геометрии, а построить дискретные геометрии не удается.

Та же самая ситуация с размерностью пространства. Геометры считают размерность имманентным свойством любой геометрии. Они могут себе представить n-мерную риманову геометрию, но не могут себе представить геометрию без размерности, или геометрию переменной размерности. Причиной подобных убеждений является тот факт, что размерность многообразия и его непрерывность являются исходными точками построения римановой геометрии, и в этом месте нельзя отделить свойства геометрии от свойств многообразия.

В Т-геометрии мы имеем дело с геометрией самой по себе, потому что никакие средства описания не используются. В результате Т-геометрия нечувствительна к непрерывности или дискретности пространства, так же как и к его размерности. Применение дополнительных средств описания приводит к непоследовательности и ограничению списка возможных физических геометрий.

Всякое обобщение собственно евклидовой геометрии основано на некотором свойстве евклидовой геометрии (или ее объектов). Это свойство сохраняется во всех обобщенных геометриях, тогда как другие свойства евклидовой геометрии варьируются. Характер и свойства полученной обобщенной геометрии существенно зависят от выбора сохраняющегося свойства базовой евклидовой геометрии. Например, риманова геометрия есть такое обобщение евклидовой геометрии, где сохраняются одномерность и непрерывность евклидовой прямой, тогда как ее кривизна и кручение варьируются. Прямая рассматривается как главный геометрический объект евклидовой геометрии, и предполагается, что такие свойства евклидовой прямой как непрерывность и одномерность (отсутствие толщины) сохраняются при обобщении. Это означает, что непрерывность и одномерность прямой линии должны быть главными свойствами обобщенной (римановой) геометрии. В соответствии с таким выбором сохраняющегося геометрического объекта вводится понятие кривой $\mathcal{L}$ как непрерывное отображение отрезка вещественной оси на пространство Ω

$$\mathcal{L}: \qquad [0,1] \to \Omega \tag{1.8}$$

Чтобы ввести понятие непрерывности, которое является базовым понятием обобщения, вводится понятие топологического пространства, размерости пространства Ω и другие базовые понятия римановой геометрии, которые необходимы для построения риманового обобщения евклидовой геометрии.

Свойство σ-имманентности евклидовой геометрии является свойством всей евклидовой геометрии. Используя σ-имманентность для обобщения, мы не налагаем никаких ограничений на отдельные геометрические объекты евклидовой геометрии. В результате σ-имманентное обобщение оказывается наиболее мощным обобщением. Кроме того с общей точки зрения, использование свойства всей геометрии для обобщения представляется более разумным, чем использование свойств отдельного геометрического объекта. Таким образом, σ-имманентное обобщение евклидовой геометрии, использующее свойство всей евклидовой геометрии, представляется более обоснованным, чем риманово обобщение, использующее свойства евклидовой прямой.

Перечислим наиболее привлекательные черты σ-имманентного обобщения евклидовой геометрии:

1. Для обобщения используется σ-имманентность, которая является свойством всей геометрии (а не свойством отдельного геометрического объекта, как это имеет место при римановом обобщении).

2. σ-имманентное обобщение не использует каких-либо логических построений, и σ-имманентное обобщение автоматически так же непротиворечиво, как и евклидова геометрия, чья аксиоматика используется неявно. В частности, Т-геометрия не содержит каких-либо теорем. В результате главной проблемой Т-геометрии является правильное σ-имманентное описание геометрических объектов и соотношений евклидовой геометрии. σ-имманентное описание включает некоторые тонкости, которые будут обсуждены ниже.

3. σ-иманентное обобщение – это очень мощное обобщение, которое варьирует практически все свойства евклидовой геометрии, включая такие как транзитивность параллелизма и непрерывность, которые сохраняются при римановом обобщении.

4. σ-имманентное обобщение позволяет использовать бескоординатное описание и игнорировать проблемы, связанные с преобразованиями координат и преобразованиями других средств описания.

5. Т-геометрия может использоваться как геометрия пространства-времени. В этом случае трубчатый характер прямых непринужденно объясняет стохастические мировые линии квантовых микрочастиц. Рассматривая квантовую постоянную $\hbar$ как атрибут геометрии пространства-времени, можно получить квантовое описание как статистическое описание случайных мировых линий [6]. Такая пространственно-временная геометрия не может быть получена в рамках риманова обобщения евклидовой геометрии.

В работе рассматриваются взаимоотношения между σ-имманентным и римановым обобщениями евклидовой геометрии. Дело в том, что мировая функция σ была впервые введена в римановой геометрии [2]. Мировая функция играет важную, но не ключевую роль в описании римановой геометрии, тогда как в Т-геометрии мировая функция σ является единственной величиной необходимой для ее построения и описания.

Рассмотрим два обобщения евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ с одной и той же мировой функцией σ. Пусть одно из обобщений будет римановой геометрией $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$, а другое будет σ-имманентным обобщением $\mathcal{G}_{\sigma}$. Совпадают ли обобщения $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ и $\mathcal{G}_{\sigma}$? Многие важные детали обоих обобщений совпадают, однако другие детали геометрического описания различны. Вообще говоря, геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ и $\mathcal{G}_{\sigma}$ различны, хотя обе геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ и $\mathcal{G}_{\sigma}$ описываются одной и той же мировой функцией σ. Геометрия $\mathcal{G}_{\sigma}$ однозначно определяется мировой функцией σ безо всяких логических построений. Это означает, что σ-имманентное обобщение $\mathcal{G}_{\sigma}$ не может быть непоследовательным, потому что базовая геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ непротиворечива [7]. Что касается риманова обобщения $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$, то оно может оказаться противоречивым, потому что оно использует дополнительные средства описания (многообразие, топология), которые не являются необходимыми для построения σ-имманентного обобщения евклидовой геометрии. Следует исследовать в какой мере дополнительные средства описания совместимы между собой и с заданной мировой функцией σ, которая одна достаточна для построения последовательного σ-имманентного обобщения $\mathcal{G}_{\sigma}$.

Применение дополнительных средств описания приводит к переопределению задачи обобщения евклидовой геометрии. Некоторая непоследовательность риманова обобщения является следствием этого переопределения.

2 Евклидова геометрия в σ-иманентной форме

Определение. *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть множество Ω точек P с заданной мировой функцией σ*

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega\to\mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P)=0, \qquad \forall P\in\Omega \tag{2.1}$$

Пусть собственно евклидова геометрия задана на множестве Ω, и величина

$$\rho(P_0,P_1)=\sqrt{2\sigma(P_0,P_1)}, \qquad P_0,P_1\in\Omega \tag{2.2}$$

является евклидовым расстоянием между точками P_0, P_1.

Пусть вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1=\{P_0,P_1\}$ есть упорядоченное множество из двух точек P_0, P_1. Точка P_0 является началом вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, а точка P_1 – его концом. Длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяется соотношением

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2=2\sigma(P_0,P_1) \tag{2.3}$$

В евклидовой геометрии скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)$ между двумя векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, имеющими общее начало P_0 выражается соотношением (1.7)

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)=\sigma(P_0,P_1)+\sigma(P_1,P_0)-\sigma(P_1,P_2) \tag{2.4}$$

Из выражения (2.4), записанного для скалярных произведений $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1)$ и $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0)$, и из свойств скалярного произведения в евклидовом пространстве следует, что скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ может быть записано в σ-имманентном виде

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) &= (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) - (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0) = \\ &\sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Пусть $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ суть n векторов в евклидовом пространстве. Необходимое и достаточное условие их линейной зависимости есть

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| = 0, \qquad i, k = 1, 2, ..n, \qquad \mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\} \tag{2.6}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||$ есть определитель Грама, построенный из скалярных произведений векторов.

Сформулируем теорему о σ-имманентности евклидовой геометрии.

Теорема. *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ является n-мерным собственно евклидовым пространством, если и только если мировая функция σ удовлетворяет следующим условиям, записанным в терминах мировой функции σ.*

I. Условие симметрии:

$$\sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{2.7}$$

II. Определение размерности:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k(\Omega^{k+1}) = 0, \qquad k > n \tag{2.8}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама (2.6). Векторы P_0P_i, $i = 1, 2, ...n$ являются базисными векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0. Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta^i_l, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i, l = 1, 2, ...n \tag{2.9}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{2.10}$$

III. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)(x_i(P) - x_i(Q))(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{2.11}$$

где координаты $x_i(P)$, $i = 1, 2, ...n$ точки P являются ковариантными координатами вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, определенными соотношениями

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.12}$$

IV: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{2.13}$$

V. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.14}$$

рассматриваемая как система для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$, имеет всегда одно и только одно решение. Условия II – V содержат ссылку на размерность n евклидова пространства.

Теорема утверждает, что собственно евклидово пространство обладает свойством σ-имманентности, и следовательно, любое утверждение $\mathcal{S}$ собственно евклидовой геометрии может быть выражено в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E} евклидовой геометрии в виде $\mathcal{S}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Производя замену $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ в утверждении $\mathcal{S}$, получаем соответствующее утверждение $\mathcal{S}(\sigma)$ другой Т-геометрии $\mathcal{G}$, описываемой мировой функцией σ.

3 Построение геометрических объектов в σ-имманентном виде

В Т-геометрии геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается с помощью каркас-оболочного метода [4]. Это означает, что геометрический объект $\mathcal{O}$ рассматривается как множество объединений и пересечений элементарных геометрических объектов (ЭГО).

Конечное множество $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ параметров оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$ образует каркас элементарного геометрического объекта (ЭГО) $\mathcal{E} \subset \Omega$. Множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ точек, образующих ЭГО, называется оболочкой его каркаса $\mathcal{P}^n$. Для непрерывной обобщенной геометрии оболочка $\mathcal{E}$ обычно является непрерывным множеством точек. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$

$$f_{\mathcal{P}^n}: \qquad \Omega \to \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

определяющая ЭГО, является функцией бегущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ предполагается алгебраической функцией от s аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ является мировой функцией от двух аргуметов $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$, или принадлежащих каркасу $\mathcal{P}^n$, или совпадающих с бегущей точкой R. Таким образом, геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется своим каркасом и его оболочной функцией как множество нулей оболочной функции

$$\mathcal{E} = \{R | f_{\mathcal{P}^n}(R) = 0\} \tag{3.2}$$

Например, цилиндр $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ с точками P_0, P_1 на оси цилиндра и точкой Q на его поверхности определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(P_0, P_1, Q) &= \{R | f_{P_0 P_1 Q}(R) = 0\}, \\ f_{P_0 P_1 Q}(R) &= F_2(P_0, P_1, Q) - F_2(P_0, P_1, R) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$F_2(P_0, P_1, Q) = \begin{vmatrix} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

Здесь $\sqrt{F_2(P_0, P_1, Q)}$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{F_2(P_0, P_1, Q)}$ есть площадь треугольника с вершинами в точках P_0, P_1, Q. Равенство $F_2(P_0, P_1, Q) = F_2(P_0, P_1, R)$ означает, что расстояние между точкой Q и осью, определяемой вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, равно расстоянию между точкой R и осью.

Элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется во всех геометриях сразу. В частности, он определяется в собственно евклидовой геометрии, где он получает истолкование. Элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ интерпретируется на основе нашего знания собственно евклидовой геометрии. Таким образом, собственно евклидова геометрия используется для интерпретации любой физической геометрии в качестве эталонной геометрии. В частности, цилиндр (3.3) однозначно определяется в любой Т-геометрии с любой мировой функцией σ.

В евклидовой геометрии точки P_0 и P_1 определяют ось цилиндра. Форма цилиндра зависит от его оси и радиуса, но не от расположения точек P_0, P_1 на оси цилиндра. В результате в евклидовой геометрии цилиндры $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ и $\mathcal{C}(P_0, P_2, Q)$ совпадают, если векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ коллинеарны. В общем случае произвольной Т-геометрии цилиндры $\mathcal{C}(P_0, P_1, Q)$ и $\mathcal{C}(P_0, P_2, Q)$ не совпадают, вообще говоря, даже если векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ коллинеарны. Таким образом, вообще говоря, деформация евклидовой геометрии расщепляет евклидовы геометрические объекты.

Мы не пытаемся повторять предписания Евклида при построении геометрии. Мы берем геометрические объекты и соотношения между ними, полученные в рамках евклидовой геометрии, и описываем их в терминах мировой функции. После этого деформируем их, заменяя евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией интересующей нас геометрии. На практике построение элементарных геометрических объектов сводится к представлению элементарного геометрического объекта в σ-имманентном виде, т.е. в терминах мировой функции. Последняя задача есть проблема собственно евклидовой геометрии. Задача представления геометрического объекта (или соотношения между объектами) в σ-имманентном виде есть реальная проблема построения Т-геометрии.

Приложение принципа деформации ограничено двумя условиями.

1. Принцип деформации применяется отдельно от других методов построения геометрии. В частности, при построении физической геометрии нельзя использовать топологические структуры, потому что для эффективного приме-

нения принципа деформации получаемая физическая геометрия должна определяться только мировой функцией (метрикой).

2. Описывая евклидовы геометрические объекты $\mathcal{O}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и евклидовы соотношения $\mathcal{R}(\sigma_{\mathrm{E}})$ в терминах σ_{E}, нельзя использовать специальные свойства евклидовой мировой функции σ_{E}. В частности, определения $\mathcal{O}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и $\mathcal{R}(\sigma_{\mathrm{E}})$ должны иметь один и тот же вид в евклидовых геометриях разных размерностей. Они не должны зависеть от размерности евклидова пространства.

Построение T-геометрии не использует координат и других методов описания, потому что использование средств описания накладывает ограничения на создаваемую геометрию. Всякий способ описания представляет собой структуру St, заданную на базовой евклидовой геометрии с мировой функцией σ_{E}. Замена $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ достаточна для построения единственной обобщенной геометрией $\mathcal{G}_{\sigma}$. Если использовать дополнительную структуру St для построения T-геометрии, то мы получим, вообще говоря, другую геометрию $\mathcal{G}_{St}$, которая совпадает с $\mathcal{G}_{\sigma}$ не для всех σ, а только для некоторых мировых функций σ. Таким образом, использование дополнительных средств описания ограничивает список возможных обобщенных геометрий. Например, если мы используем координатное описание при построеии обобщенной геометрии, то полученная геометрия оказывается непрерывной, потому что описание с помощью координат эффективно только для непрерывных геометрий, где число координат совпадает с размерностью геометрии.

Поскольку σ-имманентное описание собственно евклидовой геометрии возможно, то оно возможно и для любой T-геометрии, потому что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ и любое соотношение $\mathcal{R}$ в физической геометрии $\mathcal{G}$ получаются из соответствующего геометрического объекта $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и соответствующего соотношения $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ с помощью замены $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ в описании $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$. Для того, чтобы это было возможно, описание $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ не должно ссылаться на особые свойства евклидовой геометрии σ_{E}, описываемые условиями II – V. Формальным признаком применения условий II – V является ссылка на размерность n, потому что каждое из условий II – V содержит ссылку на размерность n собственно евклидовой геометрии.

Предположим, что геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_n}(\sigma_{\mathrm{E}_n}, n)$ определен в n-мерном евклидовом пространстве, и это определение явно ссылается на размерность n евклидова пространства. Деформируем n-мерное евклидово пространство E_n в m-мерное евклидово пространство E_m. Тогда мы должны сделать замену

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}_n}(\sigma_{\mathrm{E}_n}, n) \to \mathcal{O}_{\mathrm{E}_n}(\sigma_{\mathrm{E}_m}, n) \tag{3.5}$$

С другой стороны можно определить тот же самый геометрический объект прямо в m-мерном евклидовом пространстве E_m в виде $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_m}(\sigma_{\mathrm{E}_m}, m)$. Приравнивая это выражение к (3.5), получаем

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}_n}(\sigma_{\mathrm{E}_m}, n) = \mathcal{O}_{\mathrm{E}_m}(\sigma_{\mathrm{E}_m}, m), \qquad \forall m, n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

Это означает, что определение геометрического объекта $\mathcal{O}$ не должно зависеть от размерности евклидова пространства.

Если мы тем не менее используем специальные свойства II – V евклидова пространства в σ-имманентном описании геометрического объекта $\mathcal{O}$, или соотношения $\mathcal{R}$ и ссылаемся на размерность n, то, в конечном счете, мы ссылаемся на систему координат, которая является только средством описания.

Продемонстрируем это на примере определения прямой в евклидовом пространстве. Прямая $\mathcal{T}_{P_0Q}$ в собственно евклидовом пространстве определяется двумя ее точками P_0, Q, $(P_0 \neq Q)$ как множество точек R

$$\mathcal{T}_{P_0Q} = \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}\}, \tag{3.7}$$

где условие $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ означает, что векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны, т.е. скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R})$ этих двух векторов удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R})^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \tag{3.8}$$

где скалярное произведение определено соотношением (2.5). Таким образом, прямая линия $\mathcal{T}_{P_0Q}$ определяется σ-имманентно, т.е. в терминах мировой функции σ. Мы будем использовать два разных названия (прямая и трубка) для геометрического объекта $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Термин "прямая" используется, когда нужно подчеркнуть, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ есть результат деформации евклидовой прямой. Термин "трубка" используется, когда нужно подчеркнуть то, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ может быть многомерной поверхностью.

В евклидовой геометрии можно использовать другое определение коллинеарности. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны, если составляющие векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в некоторой прямолинейной системе координат пропорциональны. Например, в n-мерном евклидовом пространстве можно ввести прямолинейную систему координат, выбрав $n+1$ точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и образовав n базисных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$. Тогда условие коллинеарности может быть записано в виде n уравнений

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = a(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R}), \qquad i = 1, 2, ...n, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{3.9}$$

где $a \neq 0$ есть некоторая вещественная постоянная. Соотношения (3.9) являются соотношениями для ковариантных составляющих векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в рассматриваемой системе координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$. Определение коллинеарности (3.9) зависит от размерности n евклидова пространства. Пусть точки $\mathcal{P}^n$ выбраны таким образом, что $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \neq 0$. Тогда исключая параметр a из соотношений (3.9), получаем $n-1$ независимых соотношений, и геометрический объект

$$\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n} = \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}\} = \bigcap_{i=2}^{i=n} \mathcal{S}_i, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{S}_i = \left\{R \left| \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})} = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R})}\right.\right\}, \qquad i = 2, 3, ...n \tag{3.11}$$

определенный в соответствии с (3.9), зависит от $n+2$ точек $Q, \mathcal{P}^n$. Этот геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ определен σ-имманентно. Это – комплекс, состоящий из прямой линии и системы координат, представленной $n+1$ точкой $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$. В евклидовом пространстве зависимость от системы координат и от n точек $\{P_1, ...P_n\}$, определяющих эту систему является фиктивной. Геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит существенно только от двух точек P_0, Q и в евклидовом пространстве совпадает с прямой линией $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Однако, при деформации евклидова пространства геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, $\mathcal{T}_{P_0Q}$ деформируются различно. Точки $P_1, P_2, ...P_n$ перестают быть фиктивными в определении $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, и геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{T}_{P_0Q}$ становятся, вообще говоря, разными геометрическими объектами. Однако, будучи различными, вообще говоря, они могут совпадать в некоторых частных случаях.

Какой из двух геометрических объектов в деформированной геометрии $\mathcal{G}$ следует рассматривать как прямую линию? Разумеется, это – $\mathcal{T}_{P_0Q}$, потому что его определение не содержит ссылки на систему координат, тогда как определение $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит от выбора системы координат, представляемой точками $\mathcal{P}^n$. Вообще, определения геометрических объектов и соотношений между ними не должны ссылаться на средства описания. В противном случае точки, определяющие систему координат, будут включены в определение геометрического объекта.

Однако, в данном случае геометрический объект $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является, вообще говоря, $(n-1)$-мерной поверхностью, тогда как $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является пересечением $(n-1)$ $(n-1)$-мерных поверхностей, т.е. $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является, вообще говоря, одномерной кривой. Одномерная кривая $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ лучше соответствует нашим представлениям о прямой линии, чем $(n-1)$-мерная поверхность $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Тем не менее, в физической геометрии $\mathcal{G}$ именно $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является аналогом евклидовой прямой.

Очень трудно преодолеть традиционное представление, что евклидова прямая не может деформироваться в многомерную поверхность, и *это представление долгие годы препятствовало построению Т-геометрии.* Практически использовались такие физические геометрии, где деформация евклидова пространства преобразовывала евклидову прямую в одномерную линию. Это означает, что выбирались такие геометрии, где геометрические объекты $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ совпадали.

$$\mathcal{T}_{P_0Q} = \mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n} \tag{3.12}$$

Условие (3.12) совпадения объектов $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, наложенное на Т-геометрию, ограничивает список возможных Т-геометрий.

Вообще говоря, условие (3.12) выполнено быть не может, потому что левая часть равенства (3.12) не зависит от точек $\{P_1, P_2, ...P_n\}$, тогда как правая часть равенства (3.12), вообще говоря, зависит. Трубка $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ не зависит от точек $\{P_1, P_2, ...P_n\}$, если расстояния $\sqrt{2\sigma(P_i, P_k)}$ между любыми двумя точками $P_i, P_k \in \mathcal{P}^n$ бесконечно малы. В римановой геометрии ограничение (3.12) выполняется при дополнительных условиях

$$\sqrt{2\sigma(P_i, P_k)} = \text{infinitesimal}, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{3.13}$$

4 Взаимодействие между метрической геометрией и T-геометрией

Рассмотрим метрическую геосметрию, заданную на множестве Ω точек. Метрическое пространство $M = \{\rho, \Omega\}$ задается метрикой (расстоянием) ρ.

$$\begin{aligned} \rho \quad &: \quad \Omega \times \Omega \to [0, \infty) \subset \mathbb{R} && (4.1)\\ \rho(P,P) &= 0, \qquad \rho(P,Q) = \rho(Q,P), \qquad \forall P,Q \in \Omega && (4.2)\\ \rho(P,Q) &\geq 0, \quad \rho(P,Q) = 0, \quad \text{если и только если } P = Q, \quad \forall P,Q \in \Omega && (4.3)\\ 0 &\leq \rho(P,R) + \rho(R,Q) - \rho(P,Q), \qquad \forall P,Q,R \in \Omega && (4.4) \end{aligned}$$

На первый взгляд, метрическое пространство является частным случаем σ-пространства (2.1), и метрическая геометрия является частным случаем T-геометрии с дополнительными ограничениями (4.3), (4.4), наложенными на мировую функцию $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$. Однако, это не так, потому что метрическая геометрия не снабжена принципом деформации. Дело в том, σ-имманентность евклидовой геометрии, так же как и комплекс условий (2.7) - (2.14) не были известны до 1990 года, хотя каждое из условий (2.7) - (2.14) было хорошо известно. Дополнительные (по сравнению с σ-пространством) ограничения (4.3), (4.4) налагаются, чтобы обеспечить одномерность прямых линий. В метрической геометрии кратчайшая (прямая) линия может быть построена только в том случае, когда она одномерна.

Рассмотрим множество $\mathcal{EL}(P,Q,a)$ точек R

$$\mathcal{EL}(P,Q,2a) = \{R | f_{P,Q,2a}(R) = 0\}, \qquad f_{P,Q,2a}(R) = \rho(P,R) + \rho(R,Q) - 2a \quad (4.5)$$

Если метрическое пространство совпадает с собственно евклидовым пространством, то это множество точек является эллипсоидом с фокусами в точках P, Q и большой полуосью a. Соотношения $f_{P,Q,2a}(R) > 0$, $f_{P,Q,2a}(R) = 0$, $f_{P,Q,2a}(R) < 0$ определяют соответственно внешние точки, точки на границе и внутренние точки эллипсоида. Если $\rho(P,Q) = 2a$, то получаем вырожденный эллипсоид, который совпадает с сегментом $\mathcal{T}_{[PQ]}$ прямой линии, проходящей через точки P, Q. В собственно евклидовой геометрии вырожденный эллипсоид является одномерным сегментом прямой линии, однако, вовсе не очевидно, что он будет одномерным в произвольной метрической геометрии. Для того, чтобы вырожденный эллипсоид был одномерным в любом метрическом пространстве, неоходимо, чтобы любой вырожденный эллипсоид $\mathcal{EL}(P,Q,\rho(P,Q))$ не имел внутренних точек. Это огранчение записывается в виде

$$f_{P,Q,\rho(P,Q)}(R) = \rho(P,R) + \rho(R,Q) - \rho(P,Q) \geq 0 \tag{4.6}$$

Сравнивая соотношение (4.6) с (4.4), видим, что условие (4.4) введено для того, чтобы сделать прямые (кратчайшие) одномерными (отсутствие внутренних точек в геометрическом объекте, определяемом двумя точками).

Поскольку метрическая геометрия не использует принципа деформации, она является бедной геометрией, потому что в рамках этой геометрии нельзя построить скалярное произведение двух векторов, определить линейную независимость векторов и построить такие геометрические объекты как плоскости. Все эти объекты, так же как и другие строятся на основе деформации собственно евклидовой геометрии.

Обобщая метрическую геометрию, Менгер [8] и Блюменталь [9] отбросили аксиому треугольника (4.4). Они пытались построить дистантную геометрию, которая была бы более общей геометрией, чем метрическая геометрия. Поскольку они не использовали принципа деформации, они не могли определить кратчайшую (прямую) без ссылки на топологическое понятие кривой $\mathcal{L}$, определяемой как непрерывное отображение (1.8), которое не может быть выражено через расстояние. В результате дистантная геометрия не стала чисто метрической геометрией (т.е. геометрией, определяемой только расстоянием).

Заметим, что риманова геометрия использует принцип деформации в координатной форме. Дистантная геометрия не могла использовать его в такой форме, потому что метрическая и дистантная геометрии формулируются в бескоординатном виде. Однако, применение принципа деформации в бескоординатном виде требует использования свойства σ-имманентности евклидовой геометрии. К. Менгер шел к понятию σ-имманентности и остановился в одном шаге перед ним. Взглянем на теорему Менгера [8], записанную в наших обозначениях.

Теорема. *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ является изометрически вложимым в n-мерное собственно евклидово пространство E_n, если и только если любое множество из $n+3$ точек, принадлежащих Ω, изометрически вложимо в E_n.*

Теорема о σ-имманентности евклидовой геометрии получается из теоремы Менгера, если вместо условия "любое множество из $n+3$ точек, принадлежащих Ω изометрически вложимо в E_n" написать условие (2.11), которое также содержит $n+3$ точки: $P, Q, \mathcal{P}^n$ и описывает тот факт, что $\{P, Q, \mathcal{P}^n\} \subset E_n$. В этом случае условие теоремы будет содержать только ссылку на свойства мировой функции евклидова пространства, а не на евклидовость пространства. (Непрерывностью σ-пространства V в данном случае пренебрегают).

5 Условия применения принципа деформации

Римановы геометрии удовлетворяют условию (3.12). Они представляют собой разновидность неоднородной физической геометрии и, следовательно, используют принцип деформации. При построении римановой геометрии бесконечно малое евклидово расстояние деформируется в риманово расстояние. Деформация выбирается так, чтобы евклидова прямая $\mathcal{T}_{\mathrm{E}P_0Q}$, проходящая через точку P_0, коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, преобразовывалась в геодезическую $\mathcal{T}_{P_0Q}$, проходящую через точку P_0, коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ в римановом пространстве.

Заметим, что в Т-геометриях, удовлетворяющих условию (3.12) для всех точек $Q, \mathcal{P}^n$, прямая линия

$$\mathcal{T}_{Q_0;P_0Q} = \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}\} \tag{5.1}$$

проходящая через точку Q_0 коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, не является, вообще говоря, одномерной линией. Если бы римановы геометрии были Т-геометриями, они содержали бы неодномерные геодезические (прямые линии). Однако, римановы геометрии не являются Т-геометриями, потому что при их построении используется не только принцип деформации, но и некоторые другие методы, содержащие ссылку на средства описания. В частности, в римановых геометриях отсутствует абсолютный параллелизм, и нельзя определить прямую линию (5.1), потому что условие коллинеарности $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ не определено, если точки P_0 и Q_0 не совпадают. С одной стороны, отсутствие абсолютного параллелизма позволяет обойти проблему неодномерности прямых. С другой стороны, это делает римановы геометрии непоследовательными, потому что они перестают быть Т-геометриями, которые последовательны по построению (смотри детали в [10]).

Дело в том, что применения *только принципа деформации* достаточно для построения физической геометрии. Кроме того такое построение последовательно, потому что не используется никаких логических рассуждений. Если ввести добавочную структуру (например, топологическую структуру), то получим обогащенную физическую геометрию, т.е. физическую геометрию, снабженную дополнительной структурой на ней. Физическая геометрия, снабженная дополнительной структурой, является более богатой конструкцией, чем просто физическая геометрия. Однако, это верно только в том случае, когда дополнительная структура является дополнением к физической геометрии. Если использовать дополнительную структуру при построении геометрии, мы отождествляем дополнительную структуру с одной из структур физической геометрии. Требование того, чтобы дополнительная структура была структурой физической геометрии, ограничивает применение принципа деформации и уменьшает список возможных физических геометрий, потому что совпадение дополнительной структуры с некоторой структурой физической геометрии возможно не для всех физических геометрий, а только для некоторых из них.

Пусть, например, мы используем для построения физической геометрии понятие кривой $\mathcal{L}$ (1.8). Кривая $\mathcal{L}$, рассматриваемая как непрерывное отображение, является топологической структурой, которая не может быть выражена только через мировую функцию. Использование отображения (1.8) требует введения понятия топологического пространства и, в частности, понятия непрерывности. Если отождествить топологическую кривую (1.8) с "метрической" кривой, определяемой как ломаная линия

$$\mathcal{T}_{\mathrm{br}} = \bigcup_i \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} = \left\{R|\sqrt{2\sigma\left(P_i, P_{i+1}\right)} - \sqrt{2\sigma\left(P_i, R\right)} - \sqrt{2\sigma\left(R, P_{i+1}\right)}\right\}$$

состоящая из прямолинейных сегментов $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ между точками P_i, P_{i+1}, то список возможных геометрий ограничивается, потому что отождествление возможно только в некоторых геометриях. Отождествляя (1.8) и (5.2), мы исключаем все дискретные геометрии и те физические геометрии, где сегмент $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ прямой линии является поверхностью, а не одномерным множеством точек. Таким образом, дополнительные структуры приводят к (i) обогащенным физическим геометриям, (ii) ограниченным физическим геометриям и (iii) ограниченным обогащенным физическим геометриям. Результат зависит от способа использования дополнительной структуры.

Заметим, что некоторые ограничения (непрерывность, выпуклость, отсутствие абсолютного паралллелизма), налагаемые на физические геометрии являются результатом несогласованности средств описания, используемых при построении геометрии. В Т-геометрии, которая использует только принцип деформации, таких ограничений нет. Кроме того в Т-геометрии появляется некоторое новое свойство физической геометрии, которое отсутствует в традиционных версиях физической геометрии. Это свойство, называемое невырожденностью геометрии, следует прямо из использования произвольных деформаций собственно евклидовой геометрии.

Определение. *Геометрия вырождена в точке* P_0 *в направлении вектора* $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$, $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \neq 0$, *если соотношения*

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) = \sqrt{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{R}|}, \qquad |\mathbf{P}_0\mathbf{R}| = a \neq 0, \tag{5.3}$$

рассматриваемые как уравнения для определения точки R, *имеют не более одного решения для любого* $a \neq 0$. *В противном случае геометрия невырождена в точке* P_0 *в направлении вектора* $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$.

Заметим, что первое уравнение (5.3) является условием параллельности векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$.

Собственно евклидова геометрия вырождена, т.е. она вырождена во всех точках в направлении всех векторов. Рассматривая геометрию Минковского, следует различать между геометрией Минковского и Т-геометрией Минковского. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией и различаются в определении параллельности. В Т-геометрии Минковского параллельность двух векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ определяется первым уравнением (5.3). Это определение основывается на принципе деформации. В n-мерной геометрии Минковского (n-мерная псевдоевклидова геометрия индекса 1) параллельность определяется соотношением типа (3.9)

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}) = a\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right), \qquad i = 1, 2, ...n, \qquad a > 0 \tag{5.4}$$

где точки $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ определяют в n-мерной геометрии Минковского прямолинейную систему координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ..n$. Зависимость определения (5.4) от точек $(P_0, P_1, ...P_n)$ фиктивна, но зависимость от числа $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$ существенна. Таким образом, определение (5.4) зависит от способа описания геометрии.

Т-геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех времениподобных векторов, и невырождена во всех точках в направлении всех пространственноподобных векторов. Геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех векторов. Традиционно используется геометрия Минковского, а невырожденность пространственноподобных направлений игнорируется.

Рассматривая собственно риманову геометрию, следует различать между римановой Т-геометрией и римановой геометрией. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией. Они различаются в определении параллельности. В римановой Т-геометрии параллельность двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определяется сотношением (5.3). В римановой геометрии параллельность двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определена только в случае, когда точки P_0 и Q_0 совпадают. Параллельность удаленных векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$, вообще говоря, не определена. Этот факт известен как отсутствие абсолютного параллелизма.

Собственно риманова геометрия локально вырождена, т.е. вырождена во всех точках P_0 в направлении всех векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ с началом в точке P_0. В общем случае, когда $P_0 \neq Q_0$, собственно риманова Т-геометрия, вообще говоря, невырождена. Однако, локально собственно риманова Т-геометрия вырождена так же, как и собственно риманова геометрия. Собственно риманова геометрия вырождена, потому что она вырождена локально, тогда как нелокальная невырожденность в римановой геометрии не определена из-за отсутствия абсолютного параллелизма. Традиционно используют риманову геометрию, (а не риманову Т-геометрию), полностью игнорируя свойство невырожденности.

С точки зрения традиционного подхода к физической геометрии невырожденность является нежелательным свойством физической геометрии, хотя с точки зрения логики и принципа деформации *невырожденность является неотъемлемым свойством физической геометрии.* Нелокальная невырожденность удаляется из собственно римановой геометрии отрицанием понятия параллельности удаленных векторов. Невырожденность пространственноподобных направлений устраняется из геометрии Минковского с помощью переопределения параллельности векторов. Однако, невырожденность является важным свойством реальной пространственно-временной геометрии. Чтобы оценить это, рассмотрим пример.

6 Простой пример невырожденной геометрии пространства-времени

Пусть пространственно-временная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, описывается Т-геометрией на четырехмерном многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$. Мировая функция σ_{d} задается соотношением

$$\sigma_{\mathrm{d}} = \sigma_{\mathrm{M}} + D\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right) = \begin{cases} \sigma_{\mathrm{M}} + d & \text{если } \sigma_0 < \sigma_{\mathrm{M}} \\ \left(1 + \frac{d}{\sigma_0}\right)\sigma_{\mathrm{M}} & \text{если } 0 \leq \sigma_{\mathrm{M}} \leq \sigma_0 \\ \sigma_{\mathrm{M}} & \text{если } \sigma_{\mathrm{M}} < 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

где $d \geq 0$ и $\sigma_0 > 0$ – некоторые постоянные. Величина $\sigma_{\rm M}$ есть мировая функция в пространственно-временной геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$. В прямолинейной ортогональной (инерциальной) системе координат $x = \{t, \mathbf{x}\}$ мировая функция $\sigma_{\rm M}$ имеет вид

$$\sigma_{\rm M}(x, x') = \frac{1}{2}\left(c^2 (t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2\right) \tag{6.2}$$

где c есть скорость света.

Сравним ломаную линию (5.2) в пространственно-временной геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$ и в невырожденной геометрии $\mathcal{G}_{\rm d}$. Предположим, что $\mathcal{T}_{\rm br}$ есть времениподобная ломаная линия. Все звенья $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$ ломаной $\mathcal{T}_{\rm br}$ времениподобны и имеют одну и ту же длину

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\rm d} = \sqrt{2\sigma_{\rm d}(P_i, P_{i+1})} = \mu_{\rm d} > 0, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{6.3}$$

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\rm M} = \sqrt{2\sigma_{\rm M}(P_i, P_{i+1})} = \mu_{\rm M} > 0, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{6.4}$$

где индексы "d" и "M" означают величины, рассчитанные соответственно с помощью $\sigma_{\rm d}$ и с помощью $\sigma_{\rm M}$. Вектор $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ рассматривается как импульс частицы на сегменте $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$, а величина $|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = \mu$ интерпретируется как ее масса. Из определения (2.5) и соотношения (6.1) следует, что для времениподобных векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ с $\mu > \sqrt{2\sigma_0}$

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\rm d}^2 = \mu_{\rm d}^2 = \mu_{\rm M}^2 + 2d, \qquad \mu_{\rm M}^2 > 2\sigma_0 \tag{6.5}$$

$$(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\rm d} = (\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\rm M} + d \tag{6.6}$$

Расчет формы сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}(\sigma_{\rm d})$ в $\mathcal{G}_{\rm d}$ дает соотношение

$$r^2(\tau) = \begin{cases} \tau^2\mu_{\rm d}^2 \frac{\left(1 - \frac{\tau d}{2(\sigma_0 + d)}\right)^2}{\left(1 - \frac{2d}{\mu_{\rm d}^2}\right)} - \frac{\tau^2\mu_{\rm d}^2\sigma_0}{(\sigma_0 + d)}, & 0 < \tau < \frac{\sqrt{2(\sigma_0 + d)}}{\mu_{\rm d}} \\ \frac{3d}{2} + 2d(\tau - 1/2)^2\left(1 - \frac{2d}{\mu_{\rm d}^2}\right)^{-1}, & \frac{\sqrt{2(\sigma_0 + d)}}{\mu_{\rm d}} < \tau < 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0 + d)}}{\mu_{\rm d}} \\ (1 - \tau)^2\mu_{\rm d}^2\left[\frac{\left(1 - \frac{(1-\tau)d}{2(\sigma_0 + d)}\right)^2}{\left(1 - \frac{2d}{\mu_{\rm d}^2}\right)} - \frac{\sigma_0}{(\sigma_0 + d)}\right], & 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0 + d)}}{\mu_{\rm d}} < \tau < 1 \end{cases}, \tag{6.7}$$

где $r(\tau)$ есть пространственный радиус сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}(\sigma_{\rm d})$ в системе координат, где точки P_0 и P_1 имеют координаты $P_0 = \{0, 0, 0, 0\}$, $P_1 = \{\mu_{\rm d}, 0, 0, 0\}$ и τ является параметром вдоль сегмента $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}(\sigma_{\rm d})$, $(\tau(P_0) = 0,\ \tau(P_1) = 1)$. Из (6.7) можно видеть, что характерный радиус сегмента равен $\sqrt{d}$.

Пусть ломаная трубка $\mathcal{T}_{\rm br}$ описывает "мировую трубку" свободной частицы. По определению, это означает, что любое звено $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$ параллельно смежному звену $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$

$$\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i \uparrow\uparrow \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}: \qquad (\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}) - |\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i| \cdot |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = 0 \tag{6.8}$$

Определение параллельности различно в геометриях $\mathcal{G}_{\rm M}$ и $\mathcal{G}_{\rm d}$. В результате звенья, параллельные в геометрии $\mathcal{G}_{\rm M}$, не параллельны в $\mathcal{G}_{\rm d}$ и наоборот.

Пусть $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{M}})$ описывает мировую линию свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Угол ϑ_{M} между смежными звеньями в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ определяется соотношением

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{M}} = \frac{(\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_{\mathrm{M}}}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}\cdot|\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0|_{\mathrm{M}}} = 1 \tag{6.9}$$

Угол $\vartheta_{\mathrm{M}} = 0$, и геометрический объект $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{M}})$ является времениподобной прямой на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$.

Пусть теперь $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{d}})$ описывает мировую трубку свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Угол ϑ_{d} между смежными звеньями в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ определяется соотношением

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{d}} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{d}}}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{d}}\cdot|\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_{\mathrm{d}}} = 1 \tag{6.10}$$

Угол $\vartheta_{\mathrm{d}} = 0$ также. Если нарисовать ломаную трубку $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{d}})$ на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$, используя координаты базовых точек P_i и измерить угол ϑ_{dM} между смежными звеньями в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, то получим для угла ϑ_{dM} следующее выражение

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{dM}} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{M}}}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{M}}\cdot|\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_{\mathrm{M}}} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{d}} - d}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|^2_{\mathrm{d}} - 2d} \tag{6.11}$$

Подставляя значение величины $(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{d}}$, взятой из (6.10), (6.5) получаем

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{dM}} = \frac{\mu^d_{\mathrm{d}} - d}{\mu^2_{\mathrm{d}} - 2d} \approx 1 + \frac{d}{\mu^2_{\mathrm{d}}}, \qquad d \ll \mu^2_{\mathrm{d}} \tag{6.12}$$

Следовательно, $\vartheta_{\mathrm{dM}} \approx \sqrt{2d}/\mu_{\mathrm{d}}$. Это означает, что смежное звено располагается на конусе с углом $\sqrt{2d}/\mu_{\mathrm{d}}$, и вся трубка $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{d}})$ имеет случайную форму, потому что каждое звено вихляет с характерным углом $\sqrt{2d}/\mu_{\mathrm{d}}$. Угол вихляния зависит от дисторсии d и от массы частицы μ_{d}. Угол вихляния мал для частицы большой массы. Случайное смещение конца сегмента порядка $\mu_{\mathrm{d}}\vartheta_{\mathrm{dM}} = \sqrt{2d}$, т.е. того же порядка, что и толщина сегмента. Это естественно, потому что эти два явления имеют общую причину: дисторсию D пространства-времени.

Следует заметить, что влияние геометрии пространства-времени на движение частицы нелокально в том смысле, что вид мировой функции (6.1) для значений $\sigma_{\mathrm{M}} < \frac{1}{2}\mu^2_{\mathrm{d}}$ не существенен для стохастичности движения частицы массы μ_{d}.

Такая ситуация, когда мировая линия свободной частицы является стохастической в детерминированной геометрии, и эта стохастичность зависит от массы частицы, кажется экзотической и невероятной. Однако, эксперименты показывают что движение реальных частиц малой массы действительно стохастично, и эта стохастичность возрастает, когда масса частицы уменьшается. С физической точки зрения теоретическое обоснование стохастичности желательно, и некоторые исследователи изобретают стохастические геометрии, квантовые геометрии и другие экзотические геометрические построения, чтобы получить квантовую стохастичность. Однако, в римановой геометрии пространства-времени движение частицы не зависит от ее массы, и в рамках римановой геометрии пространства-времени трудно объяснить квантовую стохастичность свойствами пространственно-временной геометрии. Невырожденная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ непринужденно объясняет стохастичность и ее зависимость от массы частицы. Больше того, при надлежащем выборе дисторсии d статистическое описание стохастической $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ приводит к квантовому описанию (в терминах уравнения Шредингера) [6]. Для этого достаточно положить

$$d = \frac{\hbar}{2bc} \tag{6.13}$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c – скорость света, а b есть некоторая универсальная постоянная, свзывающая геометрическую массу μ с обычной массой частицы m с помощью соотношения $m = b\mu$. Иными словами, невырожденная геометрия (6.1) ближе к реальной геометрии, чем геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$.

Дальнейшее развитие статистического описания геометрической стохастичности приводит к созданию модельной концепции квантовых явлений(МККЯ), которая относится к обычной квантовой теории примерно так же, как статистическая физика относится к аксиоматической термодинамике. МККЯ представляет собой хорошо определенную релятивистскую концепцию с эффективными методами исследования [11], тогда как традиционная квантовая теория не является хорошо определенной, потому что содержит неправильную пространственно-временную геометрию, чья некорректность компенсируется дополнительными гипотезами (квантовыми принципами). Кроме того она имеет проблемы с применением нерелятивистского формализма квантовой механики к описанию релятивистских явлений.

Геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, так же как и геометрия Минковского является однородной геометрией, потому что мировая функция σ_{d} инвариантна относительно всех преобразований координат, относительно которых инвариантна мировая функция σ_{M}. В этой связи возникает вопрос, можно ли придумать аксиоматику для $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ и получить геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ из этой аксиоматики с помощью подходящих рассуждений. Заметим, что такая аксиоматика должна зависеть от параметра d, потому что мировая функция σ_{d} зависит от этого параметра. Если $d = 0$, эта аксиоматика должна совпадать с аксиоматикой геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Если $d \neq 0$, эта аксиоматика не может совпадать с аксиоматикой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, потому что в этом случае некоторые аксиомы геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ не выполняются. Вообще, изобретение аксиоматик, зависящих от параметра d и в общем случае от функции дисторсии D, представляется очень трудной проблемой. Кроме того, зачем изобретать аксиоматики? Аксиоматика для собственно евклидовой геометрии была получена раньше. Нет необходимости повторять процесс построения геометрии каждый раз на основе новой аксиоматики. Достаточно применить принцип деформации к построенной евклидовой геометрии, записанной σ-имманентно. Применение принципа деформации к евклидовой геометрии является очень простой и общей процедурой, которая не ограничена понятиями непрерывности, выпуклости и другими искуственными ограничениями, порожденными предвзятым подходом к физической геометрии. (Предвзятость подхода проявляется в априорном предположении, что прямая одномерна в любой физической геометрии).

Итак, мы видели, что невырожденность, так же как и неодномерность прямой являются свойствами реальной физической геометрии. Собственно евклидова геометрия является основой для всех физических геометрий, и она является вырожденной. Тем не менее, это не причина для отрицания существования невырожденных физических геометрий.

7 Следствия невырожденности геометрии пространства-времени

Возможность существования невырожденнной пространственно-временной геометрии существенно изменяет существующую концепцию пространства-времени в микромире. Небольшая коррекция мировой функции пространства Минковского позволяет объяснить таинственную квантовую природу микромира. Квантовые принципы как добавление к классической картине мира оказываются ненужными. Квантовые принципы становятся следствием пространственно-временной геометрии. Геометрия пространства-времени в микромире радикально меняется. В пространстве-времени появляется универсальная поперечная длина $\sqrt{d}$ (6.13). Движение частиц становится изначально стохастическим. Теперь не нужно искать причину стохастичности в том смысле, что стохастическое движение является естественным движением любой частицы, тогда как детерминированное движение является движением частиц очень большой массы.

В классической механике (ньютоновской и релятивистской) естественное движение частицы является детерминированным. Если частица движется стохастически, то нужно искать причину стохастичности. В классической механике мы сводим стохастическое движение частицы к естественному детерминированному движению. В невырожденном пространстве-времени мы должны уметь воспринимать стохастическое движение непосредственно без сведения его к детерминированному движению. Это очень трудная задача, потому что нужно создать новую концепцию механики. Некоторые идеи о создании такой концепции можно найти в [16, 17].

8 Ассоциативные проблемы вместо логических

Логические проблемы по существу отсутствуют в T-геометрии, так как предполагается, что они уже решены в собственно евклидовой геометрии. Рассматривая пространственно-временную геометрию как T-геометрию, мы сталкиваемся с проблемой разделения геометрии и динамики.

Физическая геометрия является наукой о взаимном расположении геометрических объектов. Но всякий геометрический объект является абстракцией. Геометрический объект как множество точек не существует сам по себе. На самом деле, мы имеем некоторую субстанцию, принимающую форму геометрического объекта. Множество точек (геометрический объект) есть абстракция этого факта. Предполагается, что мы всегда можем отделить форму субстанции от ее содержания.

Классическая физика и классическая динамика предполагают, что субстанция может принимать любую форму. Таким образом принимается, что любое множество пространственных точек образует геометрический объект, потому что любое множество точек может быть заполнено субстанцией. Это предполагает неограниченную делимость субстанции и, следовательно, неограниченную делимость геометрических объектов. Все это верно для обычного пространства.

В пространстве-времени картина другая. В классической физике частица является простейшим элементом субстанции. Существование частицы в пространстве-времени описывается непрерывной трубкой, известной как мировая трубка частицы. Если частица точечная, мировая трубка вырождается в одномерную мировую линию. Произвольный геометрический объект, т.е. произвольное множество событий (пространственно-временных точек) не может существовать. Если мы предполагаем, что субстанция состоит из точечных частиц, то геометрический объект в пространстве-времени будет состоять из произвольного множества бесконечных одномерных мировых линий. Только такое множество событий может быть реализовано в качестве геометрического объекта, потому что только такое множество может быть наполнено субстанцией. Геометрический объект, который может быть реализован, т.е. может быть наполнен субстанцией, условимся называт физическим объектом. Мировая линия точечной частицы предполагается неограниченно делимой, хотя это нельзя проверить на опыте, потому, что мировая линия всегда предполагается бесконечной или замкнутой.

Одномерная кривая (1.8) и ее частный случай – одномерная прямая образуют основу римановой геометрии и основу классической динамики. Свойство делимости непрерывной одномерной прямой формулируется следующим образом. Пусть отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ одномерной прямой между точками P_0 и P_1

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \{R | f_{\mathrm{s}P_0P_1}(R) = 0\} \tag{8.1}$$

$$f_{\mathrm{s}P_0P_1}(R) = \sqrt{2\sigma(P_0,R)} + \sqrt{2\sigma(R,P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0,P_1)} \tag{8.2}$$

разделен на две части $\mathcal{T}_{[P_0Q]}$ и $\mathcal{T}_{[QP_1]}$ точкой Q. Если прямая непрерывна и одномерна, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{[P_0P_1]} &= \mathcal{T}_{[P_0Q]} \cup \mathcal{T}_{[QP_1]}, \qquad \forall Q \in \mathcal{T}_{[P_0P_1]} \\ \mathcal{T}_{[P_0Q]} &= \{R | f_{\mathrm{s}P_0Q}(R) = 0\}, \qquad \mathcal{T}_{[QP_1]} = \{R | f_{\mathrm{s}QP_1}(R) = 0\} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Соотношения (8.3) удовлетворяются для любых точек P_0, P_1, при условии, что геометрия риманова и все отрезки $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ одномерны. Свойство (8.3) одномерной прямой (геодезической) будем называть делимостью (свойством делимости).

Повторяя деление отрезка $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ много раз, получаем

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \bigcup_{i=0}^{i=N}\mathcal{T}_{[Q_iQ_{i+1}]}, \qquad Q_0=P_0, \qquad Q_{N+1}=P_1 \tag{8.4}$$

$$Q_k \in \mathcal{T}_{[Q_{k-1}Q_{k+1}]}, \qquad \forall Q_k\in\mathcal{T}_{[P_0P_1]}, \qquad k=1,2,...N \tag{8.5}$$

Делимость позволяет разделить отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ на бесконечно малые отрезки и восстановить первоначальный отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ по его бесконечно малым частям. Важно, что бесконечно малый отрезок $\mathcal{T}_{[Q_iQ_{i+1}]}$ является элементом мировой линии. Он превращается в несколько элементов мировой линии после дальнейшего деления.

Неограниченная делимость одномерной непрерывной кривой является основой для анализа бесконечно малых, созданного Ньютоном и Лейбницем. Поскольку любой геометрический объект римановой геометрии и объекты классической механики (траектории в фазовом пространстве и мировые линии в пространстве-времени) могут рассматриваться как состоящиие из бесконечно малых отрезков прямой, анализ бесконечно малых оказывается математическим инструментом геометрии и физики. Возможность восстановления мировой линии по ее бесконечно малым элементам является необходимым свойством безграничной делимости. Одновременно оно является необходмиым условием применимости анализа бесконечно малых.

В невырожденной геометрии, где прямая не является одномерной, получаем, вообще говоря,

$$\mathcal{T}_{[P_0Q]} \nsubseteq \mathcal{T}_{[P_0P_1]}, \qquad \mathcal{T}_{[QP_1]} \nsubseteq \mathcal{T}_{[P_0P_1]}, \qquad Q\in\mathcal{T}_{[P_0P_1]} \tag{8.6}$$

Это означает, что мы можем разделить сегмент $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ на части, но мы, вообще говоря, не можем восстановить его по его частям, потому что соотношение (8.3) не выполняется.

Разумеется, можно разделить сегмент $\mathcal{T}_{[P_0Q]}$ на две части, разрезав его в точке $Q\neq P_0,P_1$. Например,

$$\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1} = \left\{R|f_{\mathrm{s}P_0P_1}(R)=0\wedge\sqrt{2\sigma(P_0,R)}\leq\sqrt{2\sigma(P_0,Q)}\right\}, \qquad Q\in\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$$

$$\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_1Q]P_0} = \left\{R|f_{\mathrm{s}P_0P_1}(R)=0\wedge\sqrt{2\sigma(P_1,R)}\leq\sqrt{2\sigma(P_1,Q)}\right\}, \qquad Q\in\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$$

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}\cup\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_1Q]P_0} \tag{8.7}$$

Однако, множества $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$ и $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_1Q]P_0}$ не совпадают с сегментами $\mathcal{T}_{[P_0Q]}$ и $\mathcal{T}_{[P_1Q]}$. В частности, множество $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$ зависит от внешней точки $P_1\notin\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$. Это означает, что мы не можем рассматривать множества $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$ и $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_1Q]P_0}$ как физические объекты, т.е. как множества точек, которые могут быть заполнены субстанцией. Кроме того, тот факт, что $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$ зависит от внешней точки $P_1\notin\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$ означает, что множество $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$ является частью $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, тогда как $\mathcal{T}_{[P_0Q]}$ может рассматриваться как самостоятельный объект, а не как часть другого геометрического объекта. Мы следующим образом формулируем различие между $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$ и $\mathcal{T}_{[P_0Q]}$. Множество точек $\mathcal{T}_{[P_0Q]}$ образует физический объект, тогда как множество точек $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$ физическим объектом не является. Множество точек $\mathcal{T}_{\mathrm{c}[P_0Q]P_1}$ является частью физического объекта $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Здесь мы сталкиваемся со странной ситуацией, когда часть физического объекта может не быть физическим объектом. Другими словами, физический объект имеет конечный размер и не может быть разделен на физические объекты бесконечно малого размера.

Отсутствие неограниченной делимости (конечная делимость) простейшего геометрического объекта – сегмента прямой означает конечную делимость и других более сложных геометрических объектов. Конечная делимость ассоциируется некоторым образом с "квантовой природой" микромира. "Квантовая природа" микромира довольно туманное понятие, означающее описание физических явлений с помощью формализма квантовой механики. "Квантовость" означает нечто, связанное скорее с динамикой, чем с геометрией. Конечная делимость, есть свойство невырожденной геометрии пространства-времени. Это главным образом геометрическое свойство, хотя имеется некоторая ссылка на свойства материи. Однако, важно то, что конечная делимость есть величина, которая может быть исследована численно геометрическими методами, коль скоро известна мировая функция пространства-времени. В любом случае понятие конечной делимости менее туманно, чем понятие "квантовой природы".

9 Граница между физикой и геометрией

Всякое физическое явление происходит в пространстве-времени. Существование пространства-времени является общим обстоятельством для всех физических явлений. Описание каждого физического явления имеет две стороны: (1) сторона общая для всех физических явлений, известная как геометрия пространства-времени, (2) сторона характерная для каждого физического явления, известная как динамика. Это означает, что некоторые характеристики физического явления рассматриваются как геометрические, тогда как другие характеристики рассматриваются как динамические. Граница между геометрией и динамикой не постоянна. Эта граница изменяется по мере развития физики.

Во время Исаака Ньютона геометрия была наиболее развитой областью математики. Геометрические методы исследования были доминирующими. Знаменитые "Начала" Ньютона [12] были написаны, главным образом в терминах геометрии. Создание Ньютоном и Лейбницем анализа бесконечно малых изменило положение. Аналитические методы проникли в геометрию, и возникла аналитическая геометрия. Дальнейшее развитие геометрии и, в частности, обобщение евклидовой геометрии осуществлялось аналитическими методами в рамках дифференциальной геометрии. Методы анализа бесконечно малых были эффективны при описании только таких физических процессов, которые можно было разделить на множество локальных процессов.

С другой стороны, роль геометрии пространства-времени в описании динамических систем возрастала. Оказалось, что некоторые физические понятия, рассматриваемые вначале как динамические, имеют геометрическую природу. Например, законы сохранения энергии-импульса, рассматриваемые сначала как свойства динамических систем, оказались порожденными геометрией пространства-времени. Квантовые явления, рассматриваемые в XX веке как специфические динамические явления, выглядят сейчас как порожденные геометрией пространства-времени. В частности, квнтовая постоянная $\hbar$ оказалась параметром геометрии пространства-времени. Теперь можно не говорить об особой квантовой природе физических явлений микромира. Все они непринужденно объясняются свойствами геометрии пространства-времени. Наши знания о физических явлениях микромира развиваются, роль геометрии пространства-времени возрастает, и граница геометрия – динамика сдвигается в сторону динамики.

Вообще, представляется естественным, что всеобщие физические законы должны иметь геометрическую природу, потому что пространство-время есть единственное обстоятельство, проявляющееся во всех физических явлениях. Напрмер, закон сохранения электрического заряда и кратность электрического заряда элементарному должны иметь геометрическую природу, потому что эти явления являются универсальными. В настоящее время эти явления не всегда связывают с геометрией пространства-времени.

В невырожденной геометрии пространства-времени нет основы для анализа бесконечно малых, который предполагает неограниченную делимость физических объектов и возможность восстановления первичного физического объекта по его частям. Заметим, делимость мировой трубки нельзя проверить на опыте. Это предположение может быть проверено только по его следствиям.

В такой ситуации нельзя себе представить, что можно делить на части мировую трубку реальной частицы. Мы вынуждены предположить, что деление на части мировой трубки реальной частицы производится объективно, и это деление не является результатом нашего способа описания мировой трубки. Различное деление мировой трубки соответствует мировым трубкам различных частиц. Мировая трубка реальной частицы является ломаной трубкой, т.е. цепью связанных конечных сегментов $\mathcal{T}_{[P_kP_{k+1}]}$, чьи длины пропорциональны массе частицы, тогда как вектор $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ описывает импульс частицы. В невырожденной геометрии пространства-времени нельзя абстрагироваться от размера звена, который связан с массой частицы. В результате масса частицы становится геометрической характеристикой частицы. Другими словами, масса частицы геометризуется. При традиционном рассмотрении масса частицы является ее динамической характеристикой. Таким образом, в пространстве-времени с невырожденной геометрией граница между геометрией и динамикой сдвигается в сторону динамики.

Любое звено имеет конечный размер, и традиционный математический формализм не работает в невырожденной пространственно-временной геометрии.

Возникает проблема адекватного математического описания геометрических объектов в невырожденной геометрии пространства-времени.

10 Взаимодействие аналитического и геометрического методов

Построение T-геометрии с помощью локальных аналитических методов оказывается неэффективным. Применение аналитических методов к геометрии требует введения непрерывных систем координат, которые сильно ограничивают список возможных геометрий. Применение конечных нелокальных методов (принцип деформации) оказывается более эффективным при обобщении геометрии. В невырожденном пространстве-времени с трубками вместо одномерных прямых применение дифференциальной геометрии оказывается неэффективным при построении локальных характеристик пространственно-временной геометрии.

Дело в том, что методы дифференциальной геометрии тесно связаны с понятием одномерной кривой как первичным объектом геометрии. В геометрии, где одномерная кривая не является физическим объектом, локальные методы работают неэффективно. Нелокальные геометрические методы, основанные на описании целого геометрического объекта, а не его бесонечно малых элементов, не развиваются. В результате мы вынуждены использовать аналитические методы, основанные на геометрии и статистике, для обоснования квантовой механики. В этом случае дисторсия пространственно-временной геометрии рассматривается как поправка к пространственно-временной геометрии Минковского.

Рассмотрим простой пример, который показывает, что возможно не только описание в терминах анализа бесконечно малых. Рассмотрим решение уравнения Клейна-Гордона в римановом пространстве-времени. В пространстве-времени Минковского это уравнение имеет вид

$$\left(g^{ik}\partial_i\partial_k+\frac{m^2}{\hbar^2c^2}\right)\psi=0,\qquad g^{ik}=\mathrm{diag}\left\{c^{-2},-1,-1,-1\right\} \tag{10.1}$$

Причинная функция Грина для уравнения (10.1) имеет вид [13]

$$\begin{aligned} D^c\left(x-x'\right) &= \frac{1}{4\pi}\delta\left(2\sigma\right)-\frac{mc}{8\pi\hbar\sqrt{2\sigma}}\theta\left(\sigma\right)\left[J_1\left(\frac{mc\sqrt{2\sigma}}{\hbar}\right)-iN_1\left(\frac{mc\sqrt{2\sigma}}{\hbar}\right)\right] \\ &\quad +i\frac{mc}{4\pi^2\hbar\sqrt{-2\sigma}}\theta\left(-\sigma\right)K_1\left(-\frac{mc\sqrt{2\sigma}}{\hbar}\right), \qquad (10.2) \\ \theta\left(x\right) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x>0 \\ 0, & \text{если } x<0 \end{cases} \end{aligned}$$

где σ есть мировая функция

$$\sigma = \sigma\left(x, x'\right) = \frac{1}{2}\left(c^2\left(x^0 - x'^0\right)^2 - \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right)^2\right) \tag{10.3}$$

а J_1, N_1 и K_1 суть цилиндрические функции первого порядка (соответственно Бесселя, Нейманна и Ханкеля).

Получение причинной функции Грина (10.2) эквивалентно решению уравнения Клейна-Гордона (10.1).

В римановом пространстве-времени уравнение (10.1) превращается в уравнение

$$\left(g^{ik}\nabla_i\nabla_k + \frac{m^2}{\hbar^2 c^2}\right)\psi = 0, \tag{10.4}$$

где теперь g^{ik} есть метрический тензор риманова пространства-времени, и ∇_k есть ковариантная производная в этом пространстве-времени.

Если мы рассмотрим процесс, который описывается уравнением Клейна-Гордона в кривом пространстве-времени, мы можем использовать различные методы:

1. Решить уравнение (10.4).

2. Взять выражение (10.2) для причинной функции Грина, где σ есть мировая функция риманова пространства-времени. Она определяется как симметричное решение уравнения Гамильтона -Якоби

$$g^{ik}\left(\partial_i\sigma\right)\partial_k\sigma = 2\sigma, \qquad \sigma\left(x, x'\right) = \sigma\left(x', x\right) \tag{10.5}$$

Второй метод проще в том смысле, что уравнение (10.5) является уравнением первого порядка.

Мы не уверены, что оба метода ведут к одному и тому же результату и не будем здесь обсуждать, какой из методов правильный. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Второй (интегральный) метод может быть применен, *по крайней мере, формально*, в кривом пространстве-времени и в невырожденном пространстве-времени (6.1). В последнем случае мировая функция в (10.2) берется в виде (6.1). Первый (дифференциальный) метод не может быть применен в невырожденном пространстве-времени (6.1) даже формально, потому что не известно, как учесть пространственно-временную дисторсию.

11 Проблемы восприятия Т-геометрии

Хотя построение Т-геометрии очень просто, математики воспринимают его довольно трудно [14]. Восприятие Т-геометрии особенно трудно для профессиональных геометров, которые знают и используют формализм дифференциальной геометрии. Дело в том, что Т-геометрия не может быть построена с помощью формализма дифференциальной геометрии и анализа бесконечно малых, который является основой дифференциальной геометрии.

Риманова геометрия строится как обобщение собственно евклидовой геометрии, представленной в виде дифференциальной геометрии. Обобщение производится на основе такого геометрического объекта как евклидова прямая. Такие свойства евклидовой прямой как непрерывность и одномерность сохраняются при обобщении, тогда как нулевая кривизна и нулевое кручение изменяются. В евклидовой геометрии так же как и в римановой понятие непрерывной одномерной кривой является первичным объектом геометрии. Понятие кривой первично в том смысле, что всякий геометрический объект может рассматриваться как состоящий из множества кривых. В свою очередь кривая может рассматриваться как состоящая из бесконечного множества бесконечно малых отрезков кривой. Бесконечно малые отрезки кривой могут рассматриваться как бесконечно малые отрезки прямой. Таким образом любой геометрический объект строится из бесконечно малых отрезков кривой (прямой), которые являются первичными объектами римановой геометрии.

С другой стороны, анализ бесконечно малых был придуман Ньютоном и Лейбницем для описания функций

$$y = f(x) \tag{11.1}$$

Такая функция описывает кривую на плоскости (x, y). Любой геометрический объект может быть построен из бесконечно малых отрезков кривой (11.1). Это означает, что анализ бесконечно малых применим для описания дифференциальной геометрии и, в частности, для описания римановой геометрии. Применимость анализа бесконечно малых к проблемам механики и физики связана с тем фактом, что эти дисциплины могут быть описаны в терминах кривых, или геометрических объектов, состоящих из кривых.

Т-геометрия является обобщением евклидовой геометрии, основанном на свойстве σ-имманентности евклидовой геометрии, которая может быть представлена в терминах мировой функции σ_{E}. σ-имманентность есть свойство всей евклидовой геометрии, тогда как прямая является только одним из геометрических объектов евклидовой геометрии. Прямая – очень важный геометрический объект, но это только один геометрический объект среди многих других. Обобщение, сделанное на основе всей евклидовой геометрии предпочтительнее, чем обобщение, сделанное на основе свойств одного геометрического объекта. Таким образом, с общей точки зрения Т-геометрия предпочтительнее римановой геометрии. Одномерная непрерывная кривая не является первичным геометрическим объектом Т-геометрии. Она может быть введена как вторичный геометрический объект, т.е. как геометрический объект, полученный в результате пересечения нескольких первичных геометрических объектов, например, (3.10), (3.11). В некоторых специальных случаях трубки первого порядка могут вырождаться в одномерную прямую. В этом случае можно использовать анализ бесконечно малых. В общем случае одномерная кривая не является первичным геометрическим объектом, и применение анализа бесконечно малых оказывается неэффективным.

Замечание. В римановой геометрии одномерная кривая является первичным геометрическим объектом геометрии. Поверхность может быть построена из кривых. Этот факт естественен и привычен. В Т-геометрии одномерная кривая является вторичным (производным) геометрическим объектом, который может быть построен из некольких первичных объектов (поверхностей) как результат их пересечения. Кажется неправдоподобным, что в Т-геометрии кривая строится из поверхностей. Я очень хорошо помню, что очень долго не мог воспринять этот факт.

Геометрия может описываться не только в терминах бесконечно малых величин. Она может описываться также в терминах конечных геометрических величин. К сожалению, динамика частиц может описываться только методами анализа бесконечно малых в терминах бесконечно малых величин. В современной физике геометрические методы не используются для описания динамики частиц. Динамика частиц описывется в терминах одномерных кривых (траектории в фазовом пространстве, мировые линии в пространстве-времени). Анализ бесконечно малых прекрасно описывает эти геометрические объекты. Проблема применения геометрических методов в современной динамике частиц не возникала.

В Т-геометрии невырожденного пространства-времени (невырожденное пространство время (6.1)) мировая трубка частицы не является одномерной кривой. Это цепь, состоящая из конечных неодномерных звеньев. В простейшем случае каждое звено является сегментом $\mathcal{T}_{[P_kP_{k+1}]}$ прямой. Длина сегмента пропорциональна массе частицы m. Квантовые эффекты связаны с толщиной $\sqrt{d}$ и длиной $\left|\mathcal{T}_{[P_kP_{k+1}]}\right|$ звена, и мы не можем устремить к нулю длину $\left|\mathcal{T}_{[P_kP_{k+1}]}\right|$. Следовательно, мы не можем свести проблему динамики частиц к описанию в терминах одномерной кривой и решать проблему методами анализа бесконечно малых. К сожалению, в динамике частиц не существует других методов описания кроме анализа бесконечно малых. Мы вынуждены описывать цепь как одномерную линию. Форма звена (толщина, длина) учитываются как некоторый случайный агент. Этот агент делает одномерную мировую линию случайной. Статистическое описание этого случайного движения приводит к квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера. Однако, такой результат мы получаем только в простейшем случае бесструктурной частицы.

Анализ свободной дираковской частицы (т.е. динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемой уравнением Дирака) показывает [18], что дираковская частица является сложной структурой. Эта структура может быть интерпретирована или динамически, или геометрически. В соответствии с динамической интерпретацией дираковская частица есть ротатор, т.е. две субчастицы, вращающиеся вокруг общего центра инерции. В соответствии с геометрической интерпретацией мировая трубка дираковской частицы является цепью из звеньев $\mathcal{T}_{[P_iQ_iP_{i+1}]}$, $i = 0, \pm 1, ...$ Каждое звено $\mathcal{T}_{[P_iQ_iP_{i+1}]}$ представляет собой треугольник с вершинами в точках P_i, Q_i, P_{i+1}. В случае динамической интерпретации мы сталкиваемся с проблемой конфайнмента, т.е. мы должны объяснить, какие силы связывают составляющие дираковской частицы. В случае геометрической интерпретации мы не должны ничего объяснять. Если в простейшем случае звено может быть сегментом $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ трубки первого порядка, то почему оно не может быть сегментом $\mathcal{T}_{[P_iQ_iP_{i+1}]}$ трубки второго порядка, или даже сегментом $\mathcal{T}_{[P_iQ_iR_iP_{i+1}]}$ трубки третьего порядка? Геометрическая интерпретация кажется более предпочтительной, потому что она выглядит более естественной. Кроме того она не содержит проблемы конфайнмента. Геометрическая интерпретация выглядит особенно привлекательно в случае сегмента $\mathcal{T}_{[P_iQ_iR_iP_{i+1}]}$, где три вершины P_i, Q_i, R_i ассоциируются с кварками внутри сложной частицы. Проблемы конфайнмента нет при геометрическом подходе.

Хотя модель дираковской частицы не совсем совершенна, потому что внутренние степени свободы описываются нерелятивистски [19], но это лучшая модель релятивистской частицы, и не следует игнорировать результаты ее исследования. Кроме того нерелятивистский характер модели может быть скорректирован [19]. В настоящее время проблема спектра масс элементарных частиц рассматривается как главная проблема теории элементарных частиц. Традиционно проблема спектра масс элементарных частиц рассматривается как динамическая проблема, напоминающая проблему спектра излучения атома. Проблему пытаются решить поиском подходящей динамической системы.

В невырожденной геометрии пространства-времени масса частицы геометризована, и следует ожидать, что проблема спектра масс элементарных частиц является геометрической проблемой, а не динамической. Другими словами, следует искать подходящую структуру звеньев, образующих мировые трубки, а не динамическую систему имитирующую эту структуру. Исследование динамических систем основано главным образом на группах связанных со структурой звена. Такое косвенное исследование более сложно, чем прямое исследование геометрической структуры звена. Кроме того, рассматривая динамическую систему, мы должны принять во внимание, что динамическое взаимодействие распространяется со скоростью, меньшей скорости света. Если мы рассматриваем структуру с чисто геометрическими связями, мы свободны от этого ограничения, потому что геометрия более фундаментальная часть описания, чем динамика. Принципы теории относительности накладывают ограничения на динамические системы, но не на геометрические объекты. В частности, мы можем решать проблему конфайнмента без введения глюонов.

Невырожденное пространство-время с частицами, описываемыми неодномерными мировыми трубками, ставит проблему создания адекватного математического формализма. Этот формализм должен иметь дело с конечными (а не бесконечно малыми) величинами. Кроме того этот формализм должен быть ориентирован на различные геометрические объекты (тогда как анализ бесконечно малых ориентирован на бесконечно малый отрезок одномерной кривой). Построение такого математическог формализма очень сложная проблема. Пока такой формализм не создан, мы вынуждены сводить геометрические проблемы к динамическим и использовать анализ бесконечно малых.

12 Заключительные замечания

Т-геометрия – это очень простое обобщение евклидовой геометрии. Построение Т-геометрии расширяет класс геометрий, пригодных для описания пространства-времени. Среди римановых геометрий имеется только одна однородная и изотропная геометрия, пригодная для описания пространства-времени. Это – геометрия Минковского. Среди Т-геометрий имеется класс однородных и изотропных Т-геометрий. Каждая однородная и изотропная Т-геометрия маркируется функцией дисторсии $D(\sigma_{\mathrm{M}})$, описывающей форму и толщину сегмента времениподобной прямой. Можно интерпретировать это обстоятельство как введение универсальной поперечной длины. Движение свободной частицы является изначально детерминированным только в пространственно-временной геометрии Минковского с $D(\sigma_{\mathrm{M}}) = 0$. Во всех остальных однородных и изотропных Т-геометриях движение свободных частиц является изначально стохастическим.

Когда в начале XX века было обнаружено, что движение свободных частиц малой массы является изначально стохастическим, следовало выбрать одну из Т-геометрий с $D(\sigma_{\mathrm{M}}) \neq 0$ в качестве пространственно-временной геометрии. К сожалению, в то время не были известны ни невырожденные Т-геометрии, ни свойство невырожденности. Исследователи были вынуждены использовать пространственно-временную геометрию Минковского всюду, включая микромир. Чтобы получить следствия стохастического движения частиц и объяснить физические явления в микромире, они были вынуждены ввести *дополнительные гипотезы*, известные как квантовые принципы. Из-за отсутствия альтернативы квантовые принципы получили широкое распространение, и сейчас большинство исследователей говорит о квантовой природе микромира.

Когда была построена Т-геометрия, стало ясно, что физические явления в микромире непринужденно объясняются правильным выбором геометрии пространства-времени. Нет никакой необходимости вводить квантовые принципы и говорить о квантовой природе явлений микромира. Квантовая природа микромира предписывает квантовать все физические поля, включая метрические поля, описывающие свойства пространства-времени. В невырожденном пространстве-времени вместо квантовой природы мы имеем дисторсию и конечную делимость, так что нет никакой необходимости квантовать метрические поля. Электромагнитное и гравитационное поля являются метрическими полями, потому что в пятимерной геометрии Калуцы-Клейна они описывают свойства пространства-времени. Проквантовать гравитационное поле не удается, и с ним нет проблем. Однако, электромагнитное поле было успешно проквантовано, и в этом месте имеются разногласия между двумя подходами. Экспериментальных свидетельств в пользу необходимости квантования нет. Эксперименты показывают, что электромагнитное поле излучается и поглощается в виде квантов. Этот факт может быть объяснен свойствами излучающего и поглощающего атома. Но *существует ли* электромагнитное поле в виде квантов? Нам не известны эксперименты, которые могли бы положительно ответить на этот вопрос. Кроме того динамические уравнения для электромагнитного и гравитационного полей не содержат квантовой постоянной. Таким образом, сомнения в необходимости квантования электромагнитного поля остаются.

Принятие невырожденной Т-геометрии в качестве пространственно-временной геометрии стало третьим существенным пересмотром наших представлений о пространстве и времени.

Первый существенный пересмотр представлений о пространстве-времени был связан с переходом от ньтоновской модели пространства-времени с двумя инвариантами к пространственно-временной геометрии Минковского с одним инвариантом. Второй существенный пересмотр представлений о пространстве-времени был связан с переходом от однородной пространственно-временной геометрии к неоднородной пространственно-временной геометрии, где неоднородность порождена распределением вещества. Третий существенный пересмотр модели пространства-времени основан на существовании нового класса физических геометрий, имеющих такие неизвестные и и необычные свойства как невырожденность и отсутствие безграничной делимости. Эти новые свойства геометрии пространства-времени касаются главным образом микромира. Как всякий пересмотр, новые представления о пространстве-времени трудны для восприятия. Это осбенно трудно для исследователей, полагающих, что геометрия – это совокупность координат, метрического тензора, ковариантных производных и т.п.

Применение Т-геометрии к физике микромира порождает проблемы, связанные с дальнейшей геометризацией физики. Интерпретация новых свойств Т-геометрии и построение адекватного математического формализма суть главные проблемы новой концепции пространства-времени.

Список литературы

[1] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung die Mathematik im 19. Jahrhundert* teil 1, Berlin, Springer 1926.

[2] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[3] Yu. A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).

[4] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (available at http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002).

[5] Yu. A. Rylov, Asymmetric geometry without topology as a geometry of microcosm. in *Geometrical and Topological Ideas in Modern Physics (Proceedings of the XXV workshop on the fundamental problems of high energy physics and field theory).* Protvino, June 25-28, 2002, pp. 154-190.

Another version "Asymmetric nondegenerate geometry". (Available at http://arXiv.org/abs/math.MG/0205061).

[6] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[7] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* 7 Auflage, B.G.Teubner, Leipzig, Berlin, 1930.

[8] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).

[9] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[10] Yu. A. Rylov, Deformation principle and problem of parallelism in geometry and physics. *(*In preparation, available at http://arXiv.org/abs/ math.GM /0210413)

[11] Yu. A. Rylov, Model conception of quantum phenomena: logical structure and investigation methods. (In preparation, available at http://arXiv.org/abs /physics/0310050, v2).

[12] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687.

[13] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to theory of quantum fields.* Moscow, 1957, GITTL. (in Russian) p.432.

[14] Yu. A. Rylov, New crisis in geometry? (Available at http://arXiv.org/ abs/mat.GM/0503261).

[15] Yu. A. Rylov, Deformation principle as a foundations of physical geometry and its application to the space-time geometry. ((Available at http://arXiv.org/abs/physics/0411103)

[16] Yu. A. Rylov, Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0210003).

[17] Yu. A. Rylov, What object does the wave function describe? (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0405117).

[18] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle composite? (Available at http://arXiv.org /abs/physics /0410045).

[19] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle completely relativistic? (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0412032).