

На правах рукописи

КАЗАКОВ КИРИЛЛ ЕВГЕНЬЕВИЧ

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
И ИЗНОСА УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ
ТЕЛ СО СЛОЖНЫМИ СВОЙСТВАМИ
И ФОРМОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена в Институте проблем механики Российской академии наук.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Манжиров Александр Владимирович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Тарлаковский Дмитрий Валентинович,
Московский авиационный институт
(государственный технический университет);

доктор физико-математических наук,
Солдатенков Иван Алексеевич,
Институт проблем механики Российской академии наук

Ведущая организация:

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 31 января 2008 г. в 15 часов на заседании Диссертационного совета Д 002.240.01 при Институте проблем механики Российской академии наук по адресу: 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем механики Российской академии наук.

Автореферат разослан 28 декабря 2007 г.

Ученый секретарь

Диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена решению новых плоских и осесимметричных задач механики контактного взаимодействия и износа тел с покрытиями. В ней исследуются закономерности эволюции контактных характеристик вязкоупругих стареющих оснований с неоднородными покрытиями и покрытиями, имеющими реальную форму поверхности, а также износ упругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями*. Изучаются эффекты, связанные с наличием неоднородности и учетом реальной формой поверхности покрытий, а также с наличием процесса износа.

Актуальность темы. Рассмотренные в диссертации задачи механики контактного взаимодействия и износа тел с покрытиями являются актуальными как с точки зрения фундаментальных вопросов теории, так и с точки зрения различных приложений. В теоретическом плане эти задачи интересны тем, что впервые учитывают наличие таких факторов как конформность контактирующих поверхностей, сложная форма поверхности тел, поверхностная неоднородность покрытий и тем, что для их решения необходимо развивать новые математические методы (поскольку известные методы удовлетворительных результатов не дают). С точки зрения приложений интерес к этим задачам вызван как раз тем, что новые их особенности продиктованы потребностями в описании свойств неоднородности и сложной формы поверхности покрытий, которые они приобретают вследствие технологических процессов нанесения и шлифовки. Без учета подобного рода свойств воссоздать реальные картины процессов контактного взаимодействия тел с покрытиями невозможно.

Цели работы: постановка контактных задач для упругих и вязкоупругих тел с конформными и поверхностно неоднородными покрытиями, форма и неоднородность которых описываются быстро осциллирующими функциями; развитие проекционного метода для решения смешанных интегральных уравнений плоских и осесимметричных задач; исследование процесса износа упругого основания с поверхностно неоднородным покрытием; решение модельных задач и всестороннее исследование процессов контактного взаимодействия и их особенностей; формулировка выводов и рекомендаций практического характера.

Методика исследования. Представленные в диссертации исследования опираются, в первую очередь, на классические подходы механики контактных взаимодействий и трибологии, идеи теории контактных задач для тел с покрытиями, на теории классических и смешанных интегральных уравнений,

*Поверхностно неоднородными называются такие покрытия, свойства которых меняются от точки к точке поверхности, но постоянны по их глубине.

на проекционный метод решения последних. При этом используются результаты и методы уравнений математической физики, интегральных уравнений, функционального и математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Все рассмотренные в диссертации задачи исследованы впервые. Их решения построены в аналитическом виде на основании проекционного метода теории смешанных интегральных уравнений. При этом быстро осциллирующие функции формы поверхности или неоднородности покрытий выделены в решении в явном виде.

На основании проведенных расчетов обнаружены и исследованы механические эффекты, возникающие при учете неоднородности покрытия и сложной формы его поверхности. Изучена задача износа упругого основания с поверхностно неоднородным покрытием. Получены ее аналитическое решение и простые асимптотические формулы поведения основных характеристик при больших значениях времени, удобные для использования в инженерной практике.

Практическая значимость. Контактные задачи для тел с покрытиями часто возникают при расчете механизмов и деталей машин в машиностроении, инженерных конструкций и фундаментов в строительстве, приборов и устройств техники и радиотехнике, эффективности процессов в технологии. Практическая значимость работы состоит в проведении исследований новых классов плоских и осесимметричных задач и построении методов решения новых интегральных уравнений, позволяющих учитывать реальные, особенности процессов контактного взаимодействия и износа.

Представленные в диссертации исследования выполнены в рамках плановой тематики Института проблем механики Российской академии наук «Моделирование процессов формирования, взаимодействия, деформирования и разрушения упруговязкопластических тел под действием нагрузок и физических полей» (Гос. рег. № 0120.0503826), а также проектов, финансируемых грантом Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-1245.2006.1, Отделением энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (программа № 13 ОЭ) и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00002, № 05-01-00693 и № 06-01-00521).

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением строгих математических методов при построении решений поставленных задач и их анализе. Она основывается также на практических оценках погрешностей выполняемых приближенных вычислений, сопоставлении получаемых в частных случаях результатов с заранее прогнозируемыми или известными.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина Института проблем механики Российской академии наук (Москва, 2004); Международной молодежной научной конференции «XXXI Гагаринские чтения» (Москва, 2005); V Российской конференции с международным участием «Смешанные задачи механики деформируемого тела» (Саратов, 2005); IX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной 85-летию со дня рождения акад. РАН И.И. Воровича (Ростов-на-Дону, 2005); Международной молодежной научной конференции «XXXII Гагаринские чтения» (Москва, 2006); Международной конференции «Ракетно-космическая техника: Фундаментальные и прикладные проблемы механики», посвященной 90-летию В.И. Феодосьева (Москва, 2006); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006); 35-й конференции по механике сплошной среды Solmesh 2006 (Краков, Польша, 2006); Индо-российском совещании по проблемам нелинейной механики деформируемого твердого тела при больших деформациях (Дели, Индия, 2006); Международной молодежной научной конференции «XXXIII Гагаринские чтения» (Москва, 2007); Семинаре по механике сплошной сред им. Л.А. Галина Института проблем механики Российской академии наук (Москва, 2007); Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы трибологии» (Самара, 2007); Всероссийской сессии Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики деформируемого твердого тела» (Самара, 2007); XVIII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды (Саратов, 2007); Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященной 95-й годовщине со дня рождения академика НАН Армении Н.Х. Арутюняну (Цахкадзор, Армения, 2007); XI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2007).

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы. Полный объем диссертации вместе с иллюстрациями составляет 128 страниц. Из них 9 занимает список литературы, содержащий 112 наименований. Общее количество иллюстраций — 42.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждается тематика предпринятых в диссертации исследований и обосновывается их актуальность. Затем следуют несколько вводных параграфов. В § 0.1 проводится краткий обзор важнейших работ по ме-

ханике непрерывно наращиваемых тел и формулируется цель настоящей диссертационной работы. В § 0.2 описываются ее структура и содержание, а также основные особенности и методы проводимых исследований, указываются работы, в которых рассматривались сходные с изучаемыми в диссертации задачи и приводятся описания этих задач. В § 0.3 кратко описываются используемые в работе определяющие соотношения материала. В § 0.4 излагается проекционный метод А.В. Манжирова решения смешанных интегральных уравнений с N дополнительными условиями

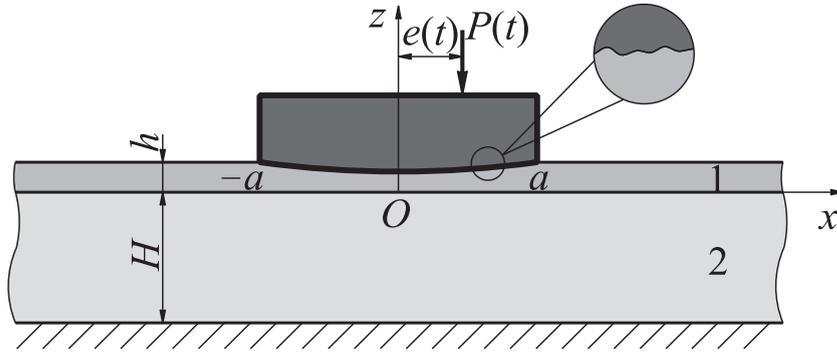
$$c(t)m(\mathbf{r})(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)q(\mathbf{r}, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}q(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad t \in [\tau_0, T], \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} q(\boldsymbol{\xi}, t) f_i(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} = M_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) f_i(\mathbf{r}) - g(\mathbf{r}, t)$$

в общем случае, который используется для решения контактных и износ-контактных задач в настоящей работе. Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор в \mathbb{R}^n , Ω — ограниченное замкнутое множество в \mathbb{R}^n , $c(t)$ — непрерывная по t на интервале $[\tau_0, T]$ заданная функция, $\alpha_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) — непрерывные по t на интервале $[\tau_0, T]$ искомые функции, $q(\mathbf{r}, t)$ — непрерывная в $L_2(\Omega)$ по t на $[\tau_0, T]$ искомая функция, $g(\mathbf{r}, t)$ — непрерывная в $L_2(\Omega)$ по t заданная функция, $m(\mathbf{r})$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$, $\{f_1(\mathbf{r}), \dots, f_N(\mathbf{r})\}$ — некоторая система N линейно независимых функций из $L_2(\Omega)$; \mathcal{I} — тождественный оператор, \mathcal{V}_k ($k = 1, 2$) — интегральные операторы Вольтерра с непрерывными либо полярными ядрами $K_k(t, \tau)$, \mathcal{F} — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

В **главе 1** исследуется контактное взаимодействие жесткого штампа и вязкоупругого основания с тонким покрытием в случае, когда поверхности штампа и покрытия являются конформными (взаимоповторяющимися). Подобная задача может возникнуть, например, когда штамп погружается в затвердевающее покрытие до его полного отверждения, в результате чего поверхность покрытия принимает форму основания штампа. Примерами таких покрытий может служить слой клея, бетона в его молодом возрасте, многих полимерных материалов. В разделе 1.1 рассмотрены плоские, а в разделе 1.2 осесимметричные контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований в случае их конформного контакта с жесткими штампами. Даны их постановки. Получены разрешающие смешанные интегральные уравнения. При решении этих уравнений использован обобщенный проекционный метод, который реализован для конкретных типов уравнений плоских и осесимметричных задач. Решен ряд модельных задач, включая задачи, в кото-



Фиг. 1. Конформный контакт штампа и вязкоупругого основания в плоском случае

рых форма штампа описывается быстро осциллирующими функциями. Изучено влияние формы основания штампа на напряженно-деформированное состояние области контакта и на кинематические характеристики штампа.

В §1 раздела 1.1 дается постановка плоской контактной задачи для вязкоупругого основания с покрытием и жесткого штампа в случае их конформного контакта. Предполагается, что и основной слой, и покрытие изготовлены из однородных вязкоупругих стареющих материалов (рис. 1). Считается, что область контакта не изменяется с течением времени, а покрытие имеет толщину, которая много меньше этой области контакта (ширины штампа), т.е. покрытие тонкое. Жесткость верхнего слоя не превышает жесткости нижнего. Между слоями, а также между нижним слоем и подстилающим основанием осуществляется либо идеальный, либо гладкий контакт. При помощи известного решения задачи о действии нагрузки на слой с тонким покрытием выводится интегральное уравнение контактной задачи для слоя с покрытием, форма которого совпадает с формой основания штампа ($x \in [-a, a]$, $t \geq \tau_0$):

$$k_\nu (\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \frac{q(x, t) h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \mathcal{F} \frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta(t) + \alpha(t)x, \quad (3)$$

$$\int_{-a}^a q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-a}^a \xi q(\xi, t) d\xi = M(t) = e(t)P(t), \quad (4)$$

где $q(x, t)$ — контактные давления под штампом, $P(t)$ — сила давления, приложенная в момент времени τ_0 , $e(t)$ — эксцентриситет ее приложения; $E_k(t - \tau_k)$ — модули упругомгновенной деформации покрытия ($k = 1$) и нижнего слоя ($k = 2$), ν_2 — коэффициент Пуассона нижнего слоя; k_ν — безразмерный коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем, \mathcal{I} — тождественный оператор; \mathcal{V}_k — интегральные операторы Вольтерра с ядрами ползучести $K^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$); \mathcal{F} — интегральный оператор с известным ядром плоской контактной задачи $k_{pl}[(x - \xi)/H]$; $h(x)$ — толщина покрытия, H — толщина нижнего слоя, $\delta(t)$ — осадка штампа, $\alpha(t)$ — угол его

наклона. При помощи замены переменных уравнение (3) и дополнительные условия (4) можно привести к виду ($x \in [-1, 1], t \geq 1$)

$$m(x)c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x, \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 q(\xi, t)\xi d\xi = M(t), \quad (6)$$

где функция $m(x)$ пропорциональна толщине покрытия. Уравнение (5) является частным случаем уравнения (1). Вводя обозначения

$$Q(x, t) = \sqrt{m(x)}q(x, t), \quad k(x, \xi) = \frac{k_{\text{pl}}(x, \xi)}{\sqrt{m(x)}\sqrt{m(\xi)}},$$

$$\mathcal{A}Q(x, t) = \int_{-1}^1 k(x, \xi)Q(\xi, t) d\xi,$$

уравнение (5) и дополнительные условия (6) приведем к виду

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)Q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{A}Q(x, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}} \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi = M(t). \quad (8)$$

Параграф 2 этого раздела посвящен подробному описанию решения поставленной в § 1 задачи на основании изложенного во введении обобщенного проекционного метода в конкретном случае плоской задачи. Решение уравнения (7) при условиях (8) в классе непрерывных в гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$ по времени t функций.

Для этого сначала строится полная ортонормированная в $L_2[-1, 1]$ система функций такая, что она содержит в качестве первого элемента $\text{const}/\sqrt{m(x)}$, а в качестве второго — линейную комбинацию первого элемента и $x/\sqrt{m(x)}$. Остальные элементы этой системы можно представить в виде произведения функций, зависящих от x и весовой функции $1/\sqrt{m(x)}$. Система функций, удовлетворяющая оговоренным выше условиям, может быть построена на основании следующих формул

$$\int_{-1}^1 p_i(\xi)p_j(\xi) d\xi = \delta_{ij}, \quad p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad J_n = \int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{m(\xi)} d\xi, \quad P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{J_0}},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_{-1} = 1, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_n & J_{n+1} & \cdots & J_{2n} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Гильбертово пространство $L_2[-1, 1]$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2[-1, 1] = L_2^{(1)}[-1, 1] \oplus L_2^{(2)}[-1, 1]$, где $L_2^{(1)}[-1, 1]$ — евклидово пространство с базисом $\{p_0(x), p_1(x)\}$, а $L_2^{(2)}[-1, 1]$ — гильбертово пространство с базисом $\{p_2(x), p_3(x), \dots\}$. Подынтегральная функция и правая часть также представляются в виде алгебраической суммы функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(1)}[-1, 1]$ и $L_2^{(2)}[-1, 1]$, соответственно, то есть

$$Q(x, t) = Q_1(x, t) + Q_2(x, t), \quad f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t),$$

Заметим, что в представлении для $Q(x, t)$ нам известно слагаемое $Q_1(x, t)$, функции разложения которого определяются дополнительными условиями (8):

$$z_0(t) = \frac{P(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1(t) = \frac{J_0 M(t) - J_1 P(t)}{\sqrt{J_0(J_0 J_2 - J_1^2)}},$$

а слагаемое $Q_2(x, t)$ требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить $f_1(x, t)$, а функция $f_2(x, t) \equiv 0$. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную в итоге задачу как частный случай обобщенной проекционной задачи, рассмотренной в разделе разделе 0.4.

Окончательные формулы для определения контактных давлений имеют вид:

$$Q(x, t) = z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x),$$

$$z_k(t) = -(\mathcal{I} + \mathcal{W}_k) \frac{(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) [z_0(t)K_k^{(0)} + z_1(t)K_k^{(1)}]}{c(t) + \gamma_k}, \quad \varphi_k(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \varphi_i^{(k)} p_i(x),$$

$$k(x, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \quad \sum_{n=2}^{\infty} R_{mn} \varphi_n^{(k)} = \gamma_k \varphi_m^{(k)}, \quad m = 2, 3, \dots$$

$$K_k^{(0)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{0n} \varphi_n^{(k)}, \quad K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{1n} \varphi_n^{(k)}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$\mathcal{W}_k f(x, t) = \int_1^t R_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau,$$

где $R_k^*(t, \tau)$ ($k = 2, 3, \dots$) — резольвента ядра

$$K_k^*(t, \tau) = \frac{c(t)K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \gamma_k}.$$

В результате получены точные аналитические формулы в рядах с выделе-

нием особенности:

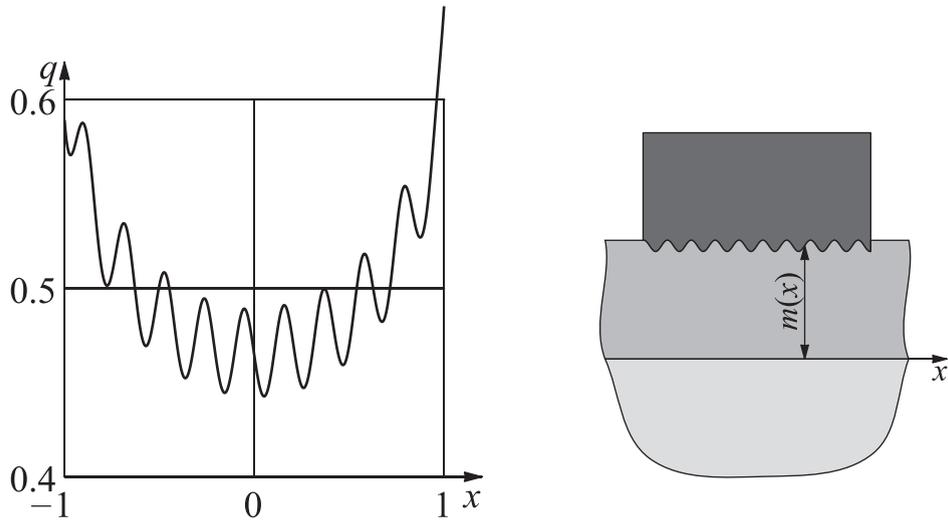
$$q(x, t) = \frac{1}{m(x)} \left[z_0(t)P_0(x) + z_1(t)P_1(x) + \dots \right], \quad (10)$$

где $P_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) — построенные по (9) полиномы. Решения такого вида позволяют производить аналитические вычисления для оснований с покрытиями, имеющих толщину, которая описывается быстро осциллирующими и даже разрывными функциями, чего невозможно добиться другими известными методами. Получены также формулы для осадки и угла наклона штампа:

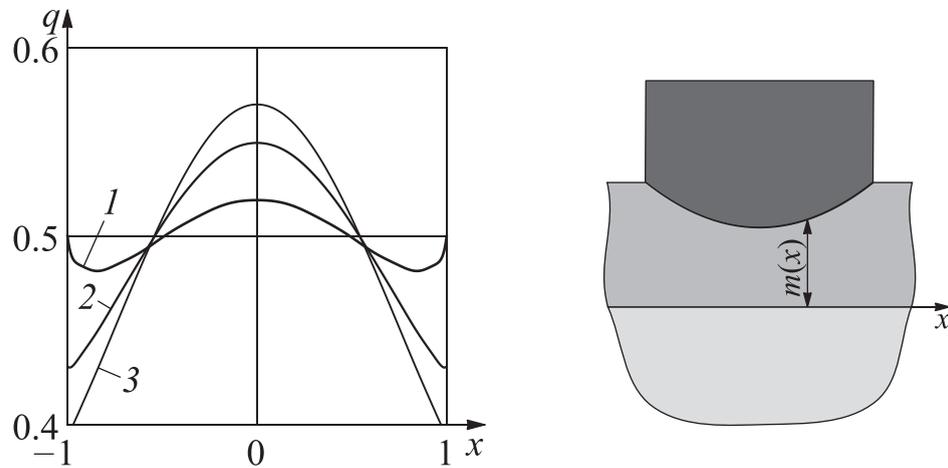
$$\begin{aligned} \alpha(t) = & \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}} \left\{ c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)z_1(t) + \right. \\ & \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{10}z_0(t) + R_{11}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(1)} z_k(t) \right] \right\}, \\ \delta(t) = & \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)z_0(t) + \right. \\ & \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{00}z_0(t) + R_{01}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(0)} z_k(t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

В §§ 3–5 ставятся и выписываются решения задач о нахождении эксцентриситета приложения нагрузки по заданному углу поворота (при заданной силе); о нахождении силы приложения по известной осадке штампа (при заданном моменте); о нахождении решения интегрального уравнения с известной правой частью (при заданных осадке и угле поворота). Решения всех задач строятся на основании проекционного метода, а структура полученных решений схожа с полученной в § 2.

Численные расчеты для оснований с покрытиями, профиль которых повторяет форму основания штампа, представлены в § 6. Показано, что распределение контактных давлений и поведение штампа существенно зависят от формы покрытия (или штампа, поскольку речь идет о конформном контакте), а учет явления конформного контакта приводит к результатам, принципиальным образом отличающимся от классического случая (рис. 2, 3). Исследовано влияние силы и эксцентриситета ее приложения на характер решения. В частности, установлено, что угол наклона штампа может менять свой знак с течением времени даже при постоянных силе и эксцентриситете; существует эксцентриситет приложения постоянной силы, при котором угол наклона не меняется с течением времени, причем этот эксцентриситет не зависит от величины силы; при постоянной силе приложения контактные давления, осадка и угол поворота штампа прямо пропорциональны ее значению, откуда следует,



Фиг. 2. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x) = 1 + 0.05 \sin(30x)$ при $t = 1$



Фиг. 3. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x) = 0.7 + 0.4x^2$ ($1 - t = 1$, $2 - t = 1.5$, $3 -$ установившееся распределение)

что характер поведения штампа на слое не зависит от значения силы (если при каком-либо значении постоянной силы, действующей на штамп, происходит отрыв, то и при любом другом значении отрыв также будет происходить; если при какой-либо постоянной силе угол поворота меняет свой знак с течением времени, то и при любой другой он также будет менять этот знак, причем в тот же самый момент времени и т. д.). Отмечено, что с помощью использованного метода можно решать контактные задачи для оснований с покрытиями и штампов, имеющих сложный профиль поверхности, определяемый экспериментально при помощи специальных измерительных приборов, причем функции $m(x)$ в этом случае оказываются сильно осциллирующими. Предложены графические методы решения контактных задач по нескольким уже известным решениям, основанный на линейности решения относительно силы и эксцентриситета ее приложения, а также метод определения области

приложения нагрузки.

Как уже было сказано, раздел 1.2 посвящен решению осесимметричных контактных задач для тел с покрытиями в случае их конформного контакта с жесткими штампами.

В первом параграфе этого раздела дается постановка таких осесимметричных контактных задач, выводится основное интегральное уравнение и записываются дополнительные условия. Полученное интегральное уравнение, как и в плоском случае, является частным случаем уравнения (1), что позволяет использовать описанный во введении проекционный метод в частном случае осесимметричной задачи. Подробное решение приведено в § 2 раздела 1.2. Как и в плоском случае полученное решение имеет структуру

$$q(r, t) = \frac{1}{m(r)} \left[v_0(t) P_0^{\circ}(r) + \dots \right],$$

где $P_k^{\circ}(r)$ ($k = 0, 1, \dots$) — некоторые полиномы специального вида. Как видно, и в осесимметричном случае решение интегрального уравнения есть произведение функции, имеющей особенности (возможно разрывы, осцилляции) и некоторой гладкой функции, что позволяет вести расчеты для оснований, профили поверхностей которых получены из реальных экспериментов.

В следующем параграфе представлено решение задачи при заданной осадке штампа, когда распределение контактных давлений и сила приложения нагрузки подлежат определению. Решение и структура решения этих задач аналогично проделанному выше.

В параграфе § 4 замечено, что осесимметричная задача в известном смысле проще, нежели плоская задача, так как в ней присутствует всего одна степень свободы — осадка. Однако все качественные выводы, сделанные для плоской задачи и не относящиеся к повороту, переносятся и на осесимметричные задачи. С помощью проведенного в этом параграфе численного расчета показано, что графики распределения контактных давлений целесообразно преобразовывать к их реальному виду, что связано с нелинейной заменой переменных по радиальной координате.

Раздел 1.3 подводит черту под рассмотренными в 1.1 и 1.2 задачами. В нем даются общие выводы, относящиеся к контактным задачам для тел с покрытиями, форма которых повторяет форму основания штампа, приводятся наиболее значимые формулы, даются рекомендации практического характера.

Глава 2 посвящена задачам контактного взаимодействия жесткого штампа и вязкоупругих оснований с тонкими упругими поверхностно неоднородными покрытиями, то есть покрытиями, свойства которых меняются от точки

к точке его поверхности, но постоянны по глубине. Поверхностная неоднородность покрытия возникает обычно вследствие особенностей нанесения этого покрытия на основной слой, а также при поверхностной обработке уже нанесенных покрытий (лазерная обработка, ионная имплантация и т. д.). Поверхностная неоднородность может быть вызвана также использованием различных материалов при изготовлении покрытий. В разделе 2.1 рассматриваются плоские, а в разделе 2.2 осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями. Изучается влияние вида неоднородности покрытия на контактные напряжения под штампом, а также на его осадку и угол поворота.

Параграф 1 раздела 2.1 посвящен постановке плоской контактной задачи для вязкоупругих оснований с поверхностно неоднородными упругими покрытиями. Как и в случае конформного контакта предполагается, что покрытие тонкое по сравнению с шириной штампа, а его жесткость не превышает жесткости нижнего слоя. Как и ранее, между слоями, а также между нижним слоем и подстилающим основанием может осуществляться либо идеальный, либо гладкий контакт. Смешанное интегральное уравнение для такой постановки и дополнительные условия имеют вид ($x \in [-a, a]$)

$$\frac{q(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \mathcal{F} \frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad (11)$$

$$\int_{-a}^a q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-a}^a \xi q(\xi, t) d\xi = M(t) = e(t)P(t), \quad (12)$$

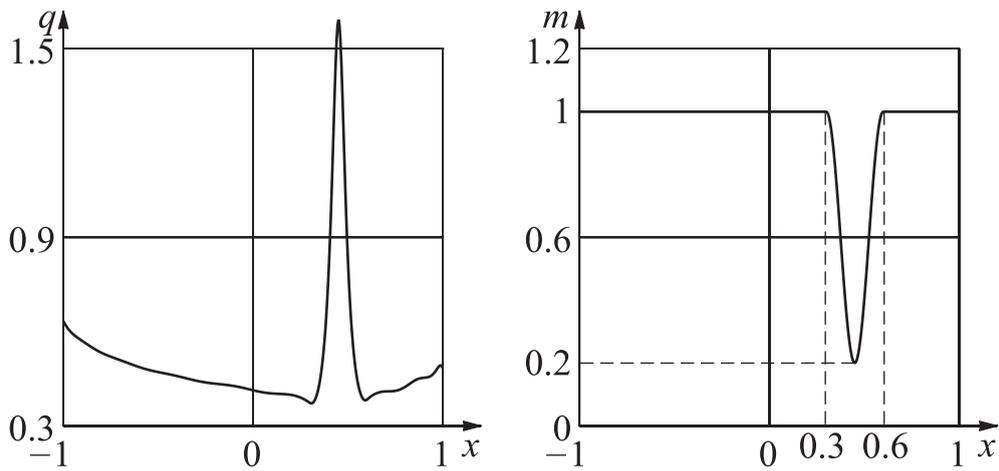
В отличие от случая конформного контакта, теперь рассматриваются упругие покрытия, а в правой части интегрального уравнения появляется функция формы основания штампа $g(x)$, которая, по сути, является функцией зазора между штампом и слоем в их недеформированном состоянии (когда они соприкоснулись, но до начала действия силы, $g(x) \geq 0$, $\exists x_0 \in [-a, a] : g(x_0) = 0$). После замены переменных уравнения (11) и (12) преобразуются к виду ($x \in [-1, 1]$, $t \geq 1$)

$$c(t)m(x)q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \mathcal{F} q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad (13)$$

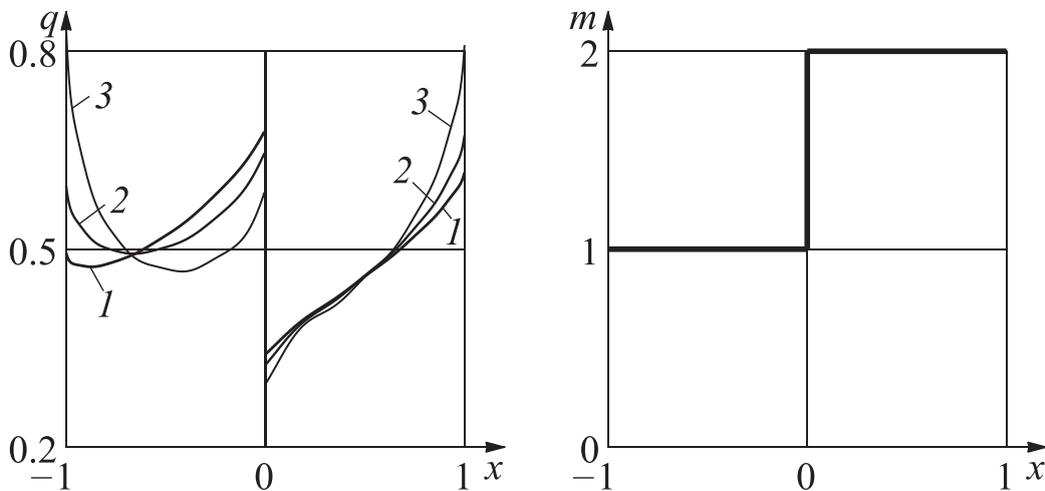
$$\int_{-1}^1 q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 q(\xi, t)\xi d\xi = M(t). \quad (14)$$

Здесь функция $m(x)$ обратно пропорциональна жесткости покрытия $R(x)$.

В §2 приведено решение поставленной в §1 контактной задачи (13), (14). Структура решения для контактных напряжений получается такой же, как и в задаче о конформном контакте, то есть удается в решении в явном виде выделить функцию $m(x)$, а значит и связанную с ней функцию жесткости $R(x)$.



Фиг. 4. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ при $t = 1$



Фиг. 5. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$
(1 — $t = 1$, 2 — $t = 1.5$, 3 — установившееся распределение)

Параграфы 3–5 раздела 2.1 посвящены решению задач, когда задан угол поворота, но неизвестен момент приложения силы; когда задана осадка, но неизвестна сила приложения нагрузки; когда заданы осадка и угол поворота штампа, а сила и момент приложения подлежат определению. Во всех поставленных задачах, разумеется, неизвестным остается и распределение контактных давлений. Решения всех описанных задач, найденных при помощи проекционного метода, имеют структуру, схожую с той, что была получена в § 2.

В параграфе 6 приведены численные расчеты для оснований с поверхностью неоднородными покрытиями. Произведены расчеты как для покрытий, жесткости которых изменены локально (рис. 4), так и для покрытий, жесткости которых описываются кусочнопостоянными функциями (рис. 5). Рассмотрен случай, когда покрытие состоит из двух материалов, граница раздела которых совпадает с осью штампа. Проиллюстрировано влияние формы

штампа на распределение контактных давлений и на осадку штампа. Отмечено, что большинство графических методов, рассмотренных в параграфе 6 раздела 1.1 работают и в случае поверхностной неоднородности. Однако следует учитывать тот факт, что в правой части разрешающего интегрального уравнения появляется функция формы основания штампа, вносящая свои коррективы в решение.

В разделе 2.2 рассматриваются осесимметричные контактные задачи для оснований с поверхностно неоднородными покрытиями. В первом параграфе выводится разрешающее интегральное уравнение, во втором приводится его решение. Структура его, как и ранее, представляет из себя произведение жесткости покрытия и некоторой функции непрерывной по t со значениями из $L_2(0, 1)$. В параграфе 3 рассматривается решение задачи при известной правой части, то есть при заданной осадке штампа. Здесь следует лишь отметить, что все качественные выводы, сделанные для плоской задачи и не относящиеся к повороту штампа распространяются и на осесимметричную.

Основные результаты главы зафиксированы в 2.3.

В **главе 3** рассматриваются контактные задачи износа упругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями. Считается, что между слоями, а также между нижним слоем и подстилающим основанием осуществляется идеальный контакт. Предполагается, что скорость изнашивания слоя прямо пропорциональна касательным усилиям и осредненному значению модуля скорости скольжения V и обратно пропорциональна твердости покрытия, а касательные усилия и контактные давления связаны законом Кулона. Рассматриваются кусочно однородные покрытия, отношения твердостей и жесткостей которых совпадают, а также покрытия, технологический процесс нанесения или упрочнения которых делает их твердости и жесткости зависящими от координат точек поверхности, но не влияет на их отношение. Раздел 3.1 посвящен плоским контактными задачам износа, а раздел 3.2 — осесимметричным. Структура разделов совпадает со структурой разделов 1.1, 2.1 и 1.2, 2.2, соответственно.

В §1 раздела 1.1 рассматриваются плоские износо-контактные задачи. Разрешающее интегральное уравнение и дополнительные условия имеют вид ($x \in [-a, a]$, $t \geq \tau_0$)

$$\frac{q(x, t)h}{k_T T(x)} + \frac{k_1 k_2 V}{T(x)} \int_{\tau_0}^t q(x, s) ds + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2} \mathcal{F}q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad (15)$$

$$\int_{-a}^a q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-a}^a \xi q(\xi, t) d\xi = M(t) = e(t)P(t), \quad (16)$$

где k_1 , k_2 , k_T — некоторые размерные и безразмерные коэффициенты, а $T(x)$ — функция прочности покрытия. После замены переменных урав-

нения (15), (16) принимают вид ($x \in [-1, 1]$, $t \geq 1$)

$$cm(x) \left[q(x, t) + V \int_1^t q(x, \tau) d\tau \right] + \mathcal{F}q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 q(\xi, t) \xi d\xi = M(t). \quad (18)$$

Видно, что слагаемое $q(x, t) + V \int_1^t q(x, \tau) d\tau$ можно записать в операторном виде $(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)q(x, t)$, где \mathcal{V}_1 — оператор, ядро которого постоянно и равно $-V$. Таким образом, уравнение (17) является частным случаем общего уравнения (1) и может быть решено при помощи проекционного метода А.В. Манжирова.

В параграфе § 2 приводится решение поставленной задачи. В нем в явном виде выделена функция прочности покрытия. Показано, что при постоянных силе P и моменте M , действующих на штамп, для упругого основания при больших значений времени в представлении контактных давлений остаются только главные члены разложения и тогда уравнение (10) можно представить в виде произведения функции твердости $T(x)$ и некоторой линейной функции, то есть

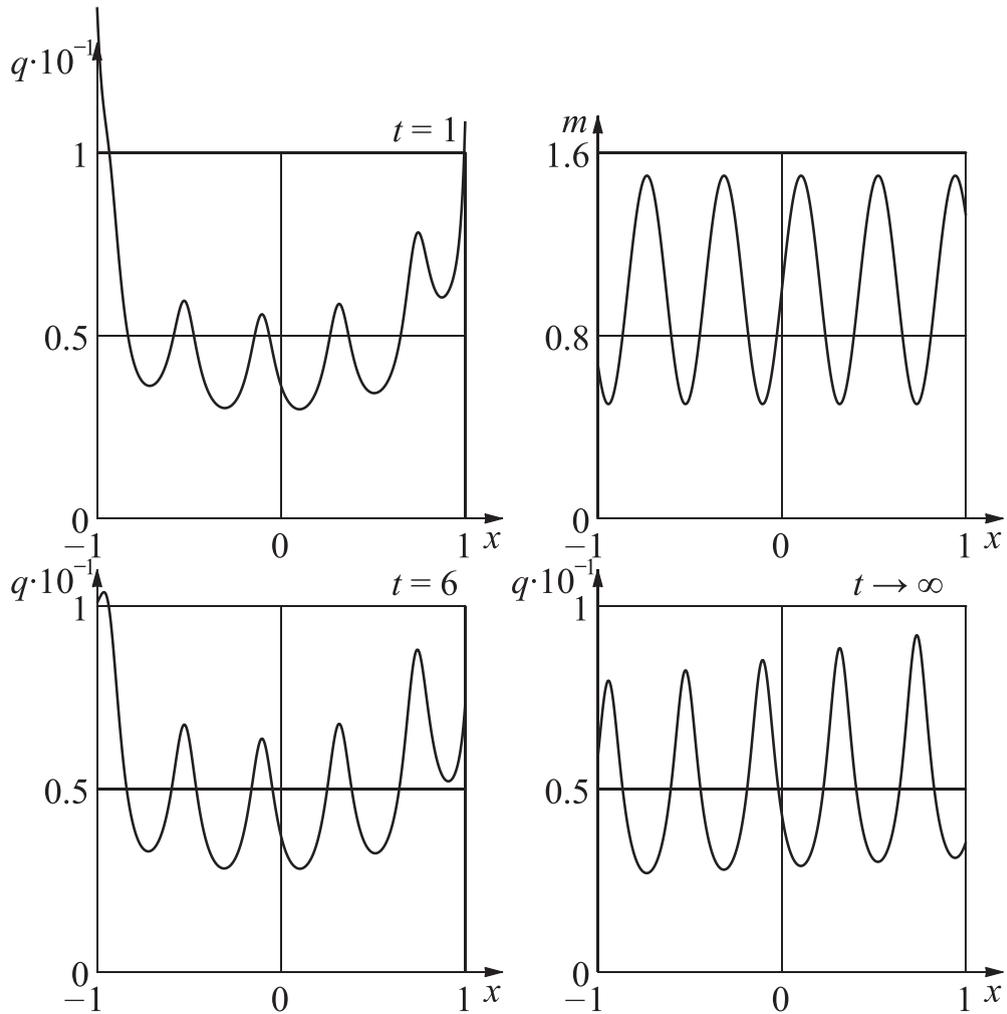
$$q(x, t) = AT(ax)(1 + \Theta x),$$

где коэффициент Θ обусловлен наличием перекоса штампа за счет приложенного момента M или продольной неоднородности покрытия. Отмечено, что коэффициенты Θ и A не зависят от функции формы основания $g(x)$ и определяются из условий равновесия штампа на слое. При постоянных силе P и моменте приложения нагрузки M осадка и угол поворота стремятся к линейным по времени функциям, причем углы наклона асимптот определяются исключительно скоростью износа штампа.

Следующие три параграфа посвящены постановкам и решениям задач с известной функцией угла поворота, с известной функцией осадки штампа и с заданной правой частью. Для всех трех постановок получены решения.

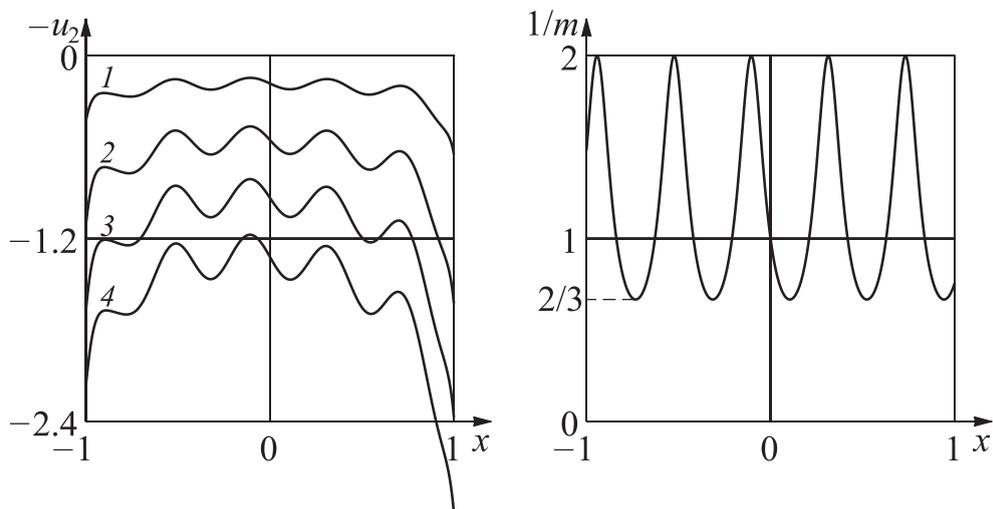
В параграфе 6 приведены численные расчеты задач износа упругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями, при различных распределениях неоднородности. Установлено, что процесс износа под штампом происходит неравномерно. При снятии штампа под ним образуется некоторый профиль поверхности. Если, например, твердость описывается некоторой осциллирующей функцией, то образуется волнистая поверхность (рис. 6, 7). Также установлено, что образовавшийся профиль тем выше, чем меньше жесткость нижнего слоя. Осадка штампа практически не зависит от распределения твердости.

В раздел 3.2 рассматриваются осесимметричные износо-контактные задачи. В § 1 приводится их постановка, а в § 2 — решение. Третий параграф по-



Фиг. 6. Распределение контактных давлений при различных моментах времени.

$$P(t) \equiv 10, e(t) \equiv 0, m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x), c = 0.1, g(x) \equiv 0$$



Фиг. 7. Профиль изношенной поверхности в различные моменты времени. $P(t) \equiv 10,$

$$e(t) \equiv 0, m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x), c = 0.1, g(x) \equiv 0$$

$$(1 - t = 3.5, 2 - t = 8.5, 3 - t = 13.5, 4 - t = 18.5)$$

священ решению интегрального уравнения с известной правой частью. Как и в плоском случае отдельно выделяются решения для задач с упругими основаниями.

Важнейшие результаты выполненных в третьей главе исследований описаны в 3.3.

В **заключении** сформулированы выводы и перечислены основные научные результаты всей диссертационной работы.

Использованный в данной работе проекционный метод позволяет единообразно подойти к решению сложных разнообразных контактных задач, как к решению некоторой общей проекционной задачи. В частности, он показывает, что в случае плоской контактной задачи существует четыре различных варианта постановки: 1) когда заданы осадка и угол поворота штампа (то есть правая часть уравнения задана), 2) когда заданы осадка штампа и момент приложения нагрузки, 3) когда заданы угол поворота штампа и сила приложения нагрузки, 4) когда заданы сила и момент приложения нагрузки. Каждая из постановок представляет из себя отдельную задачу со своим специфическим интегральным оператором, что приводит к необходимости для каждой из четырех задач строить свою систему собственных функций.

Следует заметить, что решения задач с неполной информацией о правой части и дополнительными условиями (случаи 1)–3)) не были ранее получены даже для упругого материала. Это удалось сделать только при помощи проекционного метода А.В. Манжирова. Более того, он позволил построить новое эффективное решение классической задачи для интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром Шмидта при заданной правой части, отличающееся от классического решения данного Шмидтом и приведенного в книге Гурса.

В **приложении** демонстрируются преимущества использованного проекционного метода по сравнению с известными методами.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Поставлены и решены плоские и осесимметричные задачи о конформном контакте между вязкоупругими стареющими основаниями с покрытиями и жесткими штампами. Показана важность учета конформного контакта, его существенное отличие от классического гладкого. Решение задач получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция формы основания выделена явно, что позволяет проводить расчеты для реальных форм поверхности покрытий, описываемых быстро осциллирующие функции.

2. Поставлены и решены плоские и осесимметричные задачи для поверхностно неоднородных вязкоупругих слоистых оснований. Такой тип неоднородности учтен впервые, причем в полученном решении функция жесткости верхнего тонкого слоя выделена явно, что дает возможность расчета как быстро осциллирующих, так и кусочно-постоянных функций жесткости, которые часто встречаются на практике.
3. Предложена простейшая модель износа поверхностно неоднородного упругого основания. Решена соответствующая износо-контактная задача в аналитическом виде. Получены простые асимптотические формулы, пригодные для использования в инженерных расчетах.
4. Развита проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений для использования в конкретных плоских и осесимметричных контактных и износо-контактных задачах для тел с поверхностно неоднородными покрытиями и покрытиями со сложной формой поверхности.
5. Все задачи сопровождаются детальными модельными расчетами, а также графиками, на которых впервые показаны распределения контактных напряжений в случаях реальных функций поверхностной неоднородности и экспериментально измеренного профиля поверхности. На основании анализа полученных решений и расчетов обнаружены новые механические эффекты. Сделаны практически важные выводы.

ПУБЛИКАЦИИ

Основные результаты диссертационной работы отражены в следующих публикациях:

1. *Казаков К.Е.* Контактные задачи для тел с покрытиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. №4(54). С. 176–196.
2. *Казаков К.Е., Минеева О.М.* Осесимметричная контактная задача для упругого основания с тонким неоднородным покрытием // Междунар. молод. науч. конф. «XXXI Гагаринские чтения», Секция №3, Механика и моделирование материалов и технологий, Москва, 5–9 апреля 2005 г. Тез. докл. — Москва: ИПМех РАН, 2005. С. 20–21.
3. *Казаков К.Е.* Об износе поверхностно неоднородного основания // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы V Рос. конф. с междунар. участием / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 171–174.
4. *Казаков К.Е.* Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого основания с тонким неоднородным покрытием // Современные проблемы

- механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Т. 1. — Ростов-на-Дону: Издательство ООО «ЦВВР», 2005. С. 93–97.
5. *Манжиров А.В., Казаков К.Е.* Плоские и осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих стареющих тел с поверхностно неоднородными покрытиями // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию со дня рождения Е.И. Шемякина. — М.: Физматлит, 2006. С. 411–422.
 6. *Казаков К.Е.* Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого тела с покрытием переменной толщины // XXXII Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодежной научной конференции в 8 томах. Москва, 4–8 апреля 2006 г. — М.: МАТИ, 2006. Т. 1. С. 124–125.
 7. *Казаков К.Е.* Контактные задачи для тел с покрытиями // Ракетно-космическая техника. Фундаментальные и прикладные проблемы механики: Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию В.И. Феодосьева. Москва, 4–6 мая 2006 г. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. С. 53.
 8. *Казаков К.Е.* Плоские контактные задачи для тел с покрытиями переменной толщины // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. III (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006). — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. М.И. Лобачевского, 2006. С. 103.
 9. *Manzhirou A.V., Kazakov K.E., Fedotov I.* Wear of elastic foundations with inhomogeneous coatings // 35th Solid Mechanics Conference. Volume of Abstracts. Krakow, September 4–8, 2006. — Warsaw: In-t of Fund. Tech. Research of the Polish Academy of Sciences, 2006. P. 279–280.
 10. *Manzhirou A.V., Kazakov K.E.* Contact problems for covered solids with real surface shape // Proceedings. Indo-Russian workshop on Problems in Nonlinear Mechanics of Solids with Large Deformation. November 22–24, 2006, IIT Delhi. — New Delhi: IIT Delhi, 2006. P. 63–70
 11. *Казаков К.Е.* Контактные задачи для тел со сложными свойствами и формой поверхности // Междунар. молод. науч. конф. «XXXIII Гагаринские чтения», Секция №3, Механика и моделирование материалов и технологий, Москва, 3–7 апреля 2007 г. Тез. докл. — М.: ИПМех РАН, 2007. С. 30–31.
 12. *Манжиров А.В., Казаков К.Е.* Износ вязкоупругого основания с неоднородным покрытием // Сборник трудов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы трибологии», июнь

- 2007 г., в 2-х томах. Том 1. — М: Машиностроение, 2007 г. 507 с. С. 338–351.
13. *Казаков К.Е.* Контактные задачи для тел с покрытиями // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды. Тезисы докладов Международной конференции / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. 128 с. С. 53–54.
 14. *Казаков К.Е.* Осесимметричная контактная задача о склейке // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды Международной конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна. 25–28 сентября 2007, Цахкадзор, Армения. — Ер.: Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, 2007. 531 с. С. 200–204.
 15. *Казаков К.Е.* Плоский конформный контакт штампа и вязкоупругого основания с покрытием // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XI Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 26–29 ноября 2007 г. — Ростов-на-Дону: Издательство ООО «ЦВВР», 2007.