

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А. Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

САУРИН ВАСИЛИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕШЕНИЙ В
ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2013

Содержание

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Основные понятия линейной теории упругости	17
1.1. Напряжения	17
1.2. Линейные деформации	29
1.3. Уравнения состояния	39
1.4. Краевые задачи	50
1.4.1. Формулировка задач статики	50
1.4.2. Динамические задачи	57
1.5. Упрощенные модели	59
1.5.1. Упругие стержни и струны	59
1.5.2. Модели балок	65
1.5.3. Мембраны	69
1.5.4. Плоское напряженное и плоское деформированное состояния . .	73
1.6. Классические вариационные подходы	76
1.6.1. Энергетические соотношения	76
1.6.2. Прямые принципы	78
1.6.3. Дополнительные принципы	83
1.7. Вариационные принципы в динамике	85
1.8. Обобщенные вариационные принципы	94
1.8.1. Соответствия между вариационными принципами	94
1.8.2. Полу-обратный подход	102
1.9. Конечно-элементная дискретизация	104
1.9.1. Метод Ритца	106
1.9.2. Метод Галеркина	109
1.9.3. Метод конечных элементов	111

1.9.4. Метод граничных элементов	121
Глава 2. Метод интегро-дифференциальных соотношений	123
2.1. Основные идеи	123
2.1.1. Аналитические решения в линейной теории	123
2.1.2. Интегральная формулировка закона Гука	130
2.2. Семейство квадратичных функционалов	135
2.3. Метод Ритца в МИДС	139
2.3.1. Алгоритм полиномиальных аппроксимаций	139
2.3.2. Двумерная защемленная пластина – статический случай	142
2.4. Двумерные задачи о свободных колебаниях	147
2.4.1. Формулировка краевой задачи	148
2.4.2. Собственные колебания круглых и эллиптических мембран	153
2.5. Вариационные принципы для квадратичных функционалов	162
2.6. Связь с классическими вариационными принципами	166
2.7. Двусторонние энергетические оценки	170
2.8. Тело на упругом основании	181
2.8.1. Вариационный принцип для функционала энергетической ошибки	181
2.8.2. Двусторонние оценки в задачах с Винклеровским основанием	188
Глава 3. Метод конечных элементов на основе итегро-дифференциального подхода	195
3.1. Кусочно полиномиальные аппроксимации	195
3.1.1. Двумерные C^0 полиномиальные сплайны	195
3.2. Гладкие полиномиальные сплайны	199
3.2.1. Треугольник Аргириса	199
3.2.2. Матрица жесткости для треугольника Аргириса	206
3.2.3. C^2 -аппроксимации для треугольного элемента	208
3.3. Конечно-элементная техника в задачах линейной упругости	211
3.3.1. Алгоритм МКЭ	211

3.4. Уточнение и адаптация сетки	225
Глава 4. Вариационный, асимптотический и проекционный подходы на основе полу-дискретных аппроксимаций	238
4.1. Сведение задачи в частных производных к системе ОДУ	239
4.2. Анализ напряженно-деформированного состояния балки	249
4.3. Двумерные колебания упругой балки	255
4.4. Асимптотический подход	264
4.4.1. Классический вариационный подход	265
4.4.2. Интегро-дифференциальный подход	271
4.4.3. Основные идеи асимптотического подхода	271
4.4.4. Уравнения балки – общий случай нагружения	278
4.5. Колебания упругой балки	283
4.5.1. Формулировка задачи на собственные значения	284
4.5.2. Продольные колебания балки	288
4.5.3. Поперечные колебания балки	294
4.6. Трехмерные задачи статики	302
4.7. Проекционная формулировка задач линейной упругости	318
4.8. Проекции, вариации и асимптотики	324
Глава 5. Моделирование трехмерных задач статики и динамики	331
5.1. Проекционные алгоритмы	331
5.2. Консольная балка с треугольным сечением	353
5.3. Проекционная модель балки	359
5.4. Интегральные характеристики балки с треугольным поперечным сечением	362
5.5. Интегральные проекции в задаче на собственные значения	365
5.6. Естественные колебания балки с треугольным поперечным сечением	370
5.7. Вынужденные колебания балки с треугольным сечением	383

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

388

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

391

Введение

Одной из задач математической физики является разработка специальных моделей для изучения различных природных явлений. Теория и методы этой научной дисциплины широко распространены благодаря тому, что ее модели основаны на фундаментальных законах природы, таких как законы сохранения энергии, импульса, массы, заряда, и так далее. В частности, это приводит к тому, одна и та же модель может описывать различные физические процессы.

Кроме того, методы математической физики могут быть применены и к другим областям науки. Эти подходы в настоящее время используются в химии, геологии, биологии, экологии, экономике и т.д. Они также широко применяются в технике для моделирования различных систем и устройств. Математическое моделирование можно рассматривать как надежную замену исследуемого объекта его математическим описанием и последующим анализом, как правило, с помощью методов вычислительной математики.

Цели математической физики тесно связаны с исследованием процессов в системах с распределенными параметрами, которые обычно занимают некоторую область пространства, так называемые сплошные среды. Величины, характеризующих состояние среды и ее поведение зависят обычно от пространственных координат и времени. Прогресс математического моделирования для таких распределенных процессов исторически был стимулирован прогрессом в механике и электродинамике.

Модели, которые описывают поведение таких систем, можно разделить на три уровня: отношение континуума, как целого, к окружающей среде, взаимодействие элементарных объемов системы и свойства одного элемента объема. Отношения на первом уровне определяются внешними условиями, включая, в общем случае, граничные и начальные ограничения. Второй уровень соответствует взаимодействию элементарных объемов в соответствии с законами

состояния и учитывает перенос материальных частиц в пространстве, что дает возможность получить уравнения обменных процессов. Наконец, третий уровень характеризует свойства среды в элементарном объеме.

Системы с распределенными параметрами, как правило, описываются уравнениями в частных производных, а в некоторых случаях, интегральными или интегро-дифференциальными соотношениями. Эти модели могут также включать функционалы от неизвестных переменных. Такие функционалы достигают своего стационарного значения на допустимом множестве функций, что соответствует стационарной точке, то есть искомому решению задачи. Это, как правило, связано с постановкой задачи, основанной на соответствующем вариационном принципе, который имеет определенный физический смысл. В некоторых случаях решение может соответствовать экстремуму функционала. Классификация систем уравнений в частных производных и их отношения к вариационному исчислению можно найти в книгах [19], [25], [51], [52], [62], [66], [156].

Разнообразие природных явлений порождает широкий спектр подходов к решению задач математической физики. Подробное описание разработанных методов и подходов в области вычислительной механики представлены в энциклопедии [192]. Среди этих методов, следует обратить особое внимание на три подхода, которые получили значительное развитие, особенно в последние годы, а именно, вариационные, проекционные методы и метод наименьших квадратов (МНК). Все эти подходы имеют очевидные преимущества, так и некоторые недостатки, на которых хотелось бы сосредоточить внимание в данной работе.

Вариационные принципы и их применение ко многим областям физики, включая теорию упругости, имеют давнюю историю. Тем не менее, значение этих принципов стало четко понятно только благодаря достижениям в методе конечных элементов (МКЭ), который восходит от Куранта [128] и Тернера [199]. С тех пор было неоднократно доказано, что вариационная техника

является мощным инструментом в математической постановке задач МКЭ. И наоборот, бурное развитие этого метода стимулировало совершенствование вариационного подхода. Основные идеи МКЭ можно найти, например, в книгах [111, 172].

Важной особенностью вариационных принципов является то, что основные уравнения, описывающие поведение среды, непосредственно следуют из них, как стационарные условия соответствующего функционала. Кроме того, вариационные формулировки имеют ряд преимуществ по сравнению с постановками задач в частных производных.

Во-первых, вариационная техника подходит для преобразования задачи, изначально заданной в частных производных, к эквивалентной, которая решается чаще проще, чем оригинальная. В вариационной формулировке при дополнительных ограничениях, это преобразование обычно осуществляется с помощью метода множителей Лагранжа, который является очень эффективной и регулярной процедурой. Таким образом, можно получать семейства вариационных принципов, которые являются эквивалентными друг другу.

Во-вторых, если точное решение задачи не может быть найдено, то вариационный метод часто дает различные конечномерные формулировки для нахождения приближенного решения.

В-третьих, реализация вариационных принципов гарантирует стабильность численных алгоритмов и оптимальность приближенных решений. При этом, результирующая система уравнений, как правило, симметрична и положительно определена.

Среди недостатков вариационного подхода, можно отметить, что не все задачи математической физики позволяют сформулировать вариационные принципы. При этом, довольно трудно построить достоверные оценки качества решения. При нахождении приближенных решений вариационной задачи, сформулированной с множителями Лагранжа, например, на основе принципа Ху-Васидзу в теории упругости [18], задача теряет свойство положи-

тельной определенности и симметрии.

Проекционные методы, такие как методы Галеркина [118], Петрова-Галеркина [109, 110], [142], и т.д., лишены некоторых недостатков, присущих вариационным подходам. Во-первых, эти методы применимы для задач, для которых вариационные принципы еще не сформулированы. Во-вторых, проекционные методы являются более гибкими при составлении системы управляющих уравнений. Недавнее исследование и обзор, касающийся разрывных методов Галеркина можно найти в [143].

У проекционных подходов, безусловно, есть свои недостатки. В частности, выбор тестовых и пробных функций представляет собой процедуру, которая не всегда однозначна и проста. Иногда бывает трудно обеспечить устойчивость численных алгоритмов и обеспечить его сходимость, особенно в нелинейных задачах. Так же, как и для вариационных подходов, зачастую довольно трудно построить надежные оценки качества приближенного решения.

Третий подход, который также можно отнести к общим методам математической физики, является МНК метод. О состоянии дел в этом подходе с применением к МКЭ представлены в [119]. Действительно, это выглядит довольно привлекательным составить неотрицательный функционал следующим образом. Все уравнения, описывающие изучаемое явление, возводятся в квадрат, суммируются, и интегрируются в пространстве и времени. Кроме того, заранее известно, что глобальный минимум этого интеграла равен нулю. Обычные стратегии МКЭ могут быть применены в МНК методах нахождения приближенных решений.

При этом, явные двусторонние оценки качества решения могут быть построены соответственно. Нижняя грань функционала известна, и значение функционала на приближенном решении всегда может быть выбрано в качестве верхней границы.

Тем не менее, следует отметить, что уравнения Эйлера (условия стационарности) для этой задачи минимизации, в общем, отличаются от систе-

мы уравнений в частных производных, которая генерирует этот функционал. Иными словами, задача, полученная из МНК, является вариационным принципом для другой краевой задачи. Таким образом, вопросы существования и единственности решения этой системы требуют дальнейших исследований.

Одной из общих характерных черт, присущей всем вышеупомянутым методам, является некоторая неоднозначность в формулировке конечномерных аппроксимаций решения. Не ясно, какие из соотношений нужно ослаблять, а какие должны быть выполнены точно.

В качестве примера, рассмотрим уравнения линейной теории упругости. В первоначальной постановке присутствуют 15 переменных, а именно, 12 компонентов тензоров напряжений и деформаций, а также три компоненты вектора перемещений, которым соответствуют 9 уравнений в частных производных (уравнения равновесия и кинематические соотношения) и 6 алгебраических уравнений состояния (закон Гука).

Если все отношения, включая граничные условия учитываются в интегральной (слабой) форме, то это формулировка соответствует принципу Ху-Васидзу, который содержит 18 переменных (добавлены три множителя Лагранжа) и не наложено никаких ограничений на них. Физический смысл множителей Лагранжа следует из условий стационарности соответствующего функционала. Если потребовать выполнения некоторых основных уравнений, число независимых переменных в вариационной формулировке может быть уменьшена. Например, можно вывести принцип Хеллингера-Рейсснера, в котором присутствует 12 неизвестных функций. После последовательного исключения переменных получается классический принцип минимума полной потенциальной энергии, в котором остаются только три переменные, компоненты вектора перемещений. Эквивалентность этих принципов была теоретически обоснована, например, в [18], но с практической точки зрения, понятно, что это большая разница решать задачу относительно только трех переменных или пятнадцати.

Подобная неопределенность характеризует и проекционные подходы. При составлении проекционной системы уравнений имеет большое значение соответствующий выбор пробных и тестовых функциональных пространств.

В дополнение к ограничениям, которые были отмечены выше, метод МНК весьма чувствителен к выбору весовых коэффициентов. Наличие таких факторов обусловлено тем, что определяющие соотношения имеют различную размерность. Уравнения равновесия имеют физическую размерность силы, отнесенной к единице объема. Соотношения закона Гука могут быть, например, безразмерными, как и кинематические условия. Граничные условия могут быть заданы в единицах длины либо силы, отнесенной к единице площади. Отметим, что определение соответствующих весовых коэффициентов для данной системы уравнений является не простой задачей.

Подход, который вносит ряд преимуществ и учитывает вышеупомянутые недостатки, присущие вариационным и проекционным методом, а также технике МНК и обсуждаемый в этой работе, получил название, как метод интегро-дифференциальных соотношений (МИДС) [36].

Суть этого подхода заключается в том, что часть управляющих уравнений выполняется точно, а другие соотношения учитываются в интегральном виде. Соотношения, которые должны быть ослаблены, определяются априори, часто с физической точки зрения.

Например, в задачах теплопроводности, только закон Фурье учитывается интегрально, в то время как первый закон термодинамики, начальные и граничные условия выполняются точно [187]. При численном моделировании линейных задач теории упругости, приближенные поля напряжений и перемещений строго выполняют уравнения равновесия, кинематические соотношения и граничные условия. В то время как соотношения закона Гука ослаблены, т. е. выполнены в некотором интегральном смысле [89] или спроектированы на некоторое конечномерное подпространство функций [47]. Заметим, что это выглядит довольно разумным в численной реализации представить

закон Гука в виде интеграла от функции, которая является квадратичной формой компонент, описывающих напряженно-деформированное состояние тела.

Приближенное решение интегро-дифференциальной задачи находится путем минимизации ее квадратичного функционала при дифференциальных ограничениях в виде уравнений равновесия, кинематических соотношений и граничных условий. Такая формулировка полностью согласуется с идеями МНК, но, при этом, она одновременно является и вариационным принципом. Таким образом, вариационные и МНК методы в этом случае совпадают.

Дальнейшие исследования показали, что существуют и другие положительно определенные квадратичные формы, соответствующие закону Гука, которые не обязательно являются полными квадратами, но, в то же время, составляют основу вариационных принципов. Таким образом был построен функционал энергетической ошибки, который позволяет разделить интегро-дифференциальную задачу, первоначально сформулированную в терминах напряжений и перемещений, на две независимые подзадачи: одну в перемещениях (принцип минимума полной потенциальной энергии), другую в напряжениях (принцип минимума полной дополнительной энергии).

Для различных вариационных формулировок, следующих из МИДС, были предложены двусторонние энергетические оценки качества приближенного решения [151]. Конечно-элементные алгоритмы были разработаны не только для проверки погрешности математической модели, но и для адаптивного уточнения МКЭ сеток для того, чтобы улучшить качество решения [44].

В соответствии с идеями этого метода, был разработан проекционный подход, как модификация метода Петрова-Галеркина. При использовании полудискретных полиномиальных аппроксимаций и проекционной техники, трехмерные статические и динамические задачи теории упругости могут быть решены с высокой точностью [47].

Отметим, что локальные соотношения закона Гука могут быть ослаблены

не только интегральным способом, но и путем применения асимптотического подхода [154]. Такой подход дает возможность разрабатывать различные балочные модели, которые могут служить надежным инструментом для анализа новых типов зданий и сооружений [153].

Прежде всего МИДС направлен на разработку более эффективных численных стратегий, основанных на идеях МКЭ и полу-дискретных аппроксимаций искомым функции. Подходы, обсуждаемые в этой работе, были применены не только к статическим и спектральным задачам теории упругости, а также к прямым и обратным начально-краевым задачам [45] механики деформируемого твердого тела, гидро-и термодинамики [186].

Данная работа представляет результаты деятельности автора в линейной теории упругости и методе конечных элементов в течение последних десяти лет в Институте проблем механики Российской академии наук. Несмотря на то, что основные положения линейной упругости были сформулированы в 19-м веке, она по-прежнему остается очень привлекательной для многих ученых. В последние десятилетия активно развивались различные численные подходы, в которых конечно-элементные формулировки на основе классических вариационных принципов, а также проекционные алгоритмы играют ключевую роль. В этих методах, некоторые уравнения теории упругости (уравнения равновесия, граничные условия в напряжениях и т.д.) используются в обобщенной форме, тогда как напряженно-деформированные соотношения закона Гука считаются, часто неявно, как строгие локальные равенства.

Диссертацию можно условно разделить на три основные части. Первая часть связана с основными понятиями линейной теории упругости, которые являются основой для двух других частей. В главе 1 вводятся и обсуждаются: традиционная нотация для полей напряжений, деформаций и перемещений, определяющие уравнения, а также формулировки краевых задач. Приводятся соотношения упрощенных моделей, таких как упругие балки и мембраны. Классические и обобщенные вариационные принципы в теории упруго-

сти описаны во второй части этой главы. Упор делается на их применение к численному решению краевых задач.

Средняя часть диссертации (главы 2–3) посвящена методу интегро-дифференциальных соотношений. В главе 2 рассмотрены различные способы ослабить определяющее соотношение между равновесными напряжениями и кинематически допустимыми перемещениями, учитываемые, как правило, в локальной форме. Введено параметрическое семейство квадратичных неотрицательных функционалов (закон Гука в интегральной форме) и сформулированы соответствующие задачи минимизации для анализа напряженно-деформированного состояния, а также собственных колебаний упругих тел и конструкций. Описаны численные алгоритмы, основанные на полиномиальных приближениях функций неизвестных напряжений и перемещений и подходящих способах минимизации, и проиллюстрирована их эффективность на примере двумерных статических и динамических задач.

Во второй части главы 2 обсуждены вариационные свойства квадратичных функционалов ошибки напряжений и деформаций. Показано, что условия стационарности этих функционалов совместно с уравнениями равновесия и граничными условиями эквивалентны полной системе уравнений линейной теории упругости. Кроме того, интегро-дифференциальные формулировки имеют прямое отношение к классическим вариационным принципам и позволяют разделить задачу на две независимые подзадачи в перемещениях и в напряжениях, соответственно. Двусторонние оценки запасаемой упругой энергии, получены для различных типов граничных условий.

Глава 3 фокусируется на численном подходе, базирующемся на методе интегро-дифференциальных соотношений и методе конечных элементов. Разработан адаптивный алгоритм с использованием кусочно-полиномиальных аппроксимаций высоких порядков кинематически допустимых перемещений и равновесных напряжений для произвольной триангуляции области. Обсуждаются различные стратегии уточнения и адаптации сетки, разработанные на

основе явных локальных и интегральных двусторонних энергетических оценках приближенного решения.

Глава 4 посвящена подходам, в которых исходная задача, сформулированная в частных производных аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработанная вариационная техника распространяется на случай полу-дискретных аппроксимаций вектора перемещений и тензора напряжений, включая, с одной стороны, полиномиальные разложения конечной размерности относительно некоторых координатных компонентов и, с другой стороны, неизвестные функции относительно оставшейся компоненты. Подход проиллюстрирован на примере плоских статических и динамических балочных задачах.

Далее в этой главе рассматривается асимптотический подход, согласно которому последовательные краевые задачи состоят из соответствующим образом выбранных коэффициентов в полу-дискретных полиномиальных разложениях соотношений между напряжениями и деформациями. Привлекательность этого метода состоит в том, что дифференциальный порядок приближенной системы уравнений в два раза меньше, чем порядок, вытекающий из вариационного подхода. Представлены соответствующие алгоритмы для двух-и трехмерного моделирования статических задач, а также анализа свободных колебаний упругих балок.

В последней части этой главы описаны различные модификации метода Петрова-Галеркина, основанные на интегральных проекциях соотношений между напряжениями и деформациями на специальное пространство тестовых функций и полу-дискретизации допустимых полей перемещений и напряжений. Численные проекционные алгоритмы разработаны с целью построения систем с минимальной размерностью, которые гарантируют качество данного решения. Также в этой главе обсуждается связь между проекционными, асимптотическими и вариационными подходами.

Первая часть Главы 5 фокусируется на приложениях проекционного под-

хода к пространственным статическим задачам для упругих балок с несимметричным поперечным сечением. Особое внимание уделяется эффективному вычислению таких геометрических и механических характеристик, таких как изгибная и крутильная жесткость, координаты центра изгиба и т.д. Количественно оценено влияние формы поперечного сечения и граничных условий (эффект Сен-Венана) на деформации балки.

Во второй части этой главы подход, разработанный на основе проекционной техники, распространяется на трехмерные динамические задачи. Проведен частотно-волновой анализ свободных и вынужденных колебаний балки. Характерные особенности собственных частот и форм проиллюстрированы на примере комбинированных крутильных, продольных и поперечных колебаний балок с треугольным сечением. Обсуждены спектральные характеристики балок и их специальные резонансные свойства связанные с отсутствием симметрии.

Заключение содержит основные результаты диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [36]– [47], [89], [120], [121], [149]– [156], [177]– [185]. Основные результаты, выносимые на защиту и опубликованные в указанных работах, получены автором диссертации.

Количество страниц в диссертации — 408, в том числе иллюстраций — 102 и таблиц — 13.

Автор выражает особую признательность к.ф.-м.н. Г.В.Костину за научное сотрудничество и конструктивное обсуждение диссертационной работы.

Глава 1

Основные понятия линейной теории упругости

Основные идеи линейной теории упругости отражены в книгах [53], [56], [57], [67], [71], [72], [85], [94], [96], [100], [114], [136], [165], [167], [173].

1.1. Напряжения

В линейной теории упругости рассматривают два типа сил, а именно те, которые прикладываются к границе упругого тела (поверхностные нагрузки) и распределенные в теле (объемные силы).

Поверхностные нагрузки возникают, если внешние объекты влияют на тело. Такие силы могут быть либо непрерывно распределены на внешней границе тела, например, гидростатическое давление и ветровая нагрузка, или приложены по точечно к телу, то есть локально. Любая сосредоточенная сила может рассматриваться как предельный случай поверхностных сил в предположении, что фрагмент границы подверженный такому воздействию имеет малый размер по отношению ко всей поверхности тела.

Объемные силы непрерывно распределены внутри области, занятой телом. Гравитация является примером таких нагрузок, которые особенно часто встречаются в приложениях.

Принцип напряжений Эйлера и Коши является одной из основных аксиом, которые используются для описания механических явлений в деформированном упругом теле. Формулируется он следующим образом: взаимодействие сил, происходящее на любой воображаемой поверхности, проведенной внутри тела, аналогично тому, что происходит на границе [125, 126, 133, 134]. Некоторые краткие исторические комментарии предоставлены Трусделлом и Топеном в [197].

Во-первых, этот принцип утверждает, что элементарные поверхностные

силы существуют на границах каждой подобласти, произвольно выбранной в деформированном теле.

Во-вторых, он утверждает, что изменение таких нагрузок в любой внутренней точке определяется только направлением вектора нормали к поверхности. Можно также предположить, что эта элементарная сила в данной точке зависит от других геометрических свойств поверхности, например, ее кривизны. Тем не менее, как было показано Ноллом в [167], можно сформулировать общую теорию поверхностных сил, которая позволяет нам пренебречь зависимостью от таких дополнительных геометрических характеристик (см. также [138, 205]).

В-третьих, принцип напряжений декларирует, что каждая часть деформированного упругого тела находится в статическом равновесии. Это утверждение может быть истолковано как равенство нулю соответствующей результирующей силы (аксиома баланса сил), а также как отсутствие общего момента относительно любой заданной точки (аксиома баланса моментов).

Таким образом, с помощью математических аксиом, этот принцип выражает интуитивное представление, что любой кусок упругого тела может быть уравновешен силами, приложенными к внутренней поверхности подобласти, подверженной воздействию заданных объемных сил и, может быть, заданных нагрузок на части поверхности, которая принадлежит границе тела.

Предположим, что самоуравновешенная система поверхностных и объемных сил действует на некоторое упругое тело (см. Рис. 1.1) и тело деформируется под действием этих сил. Будем считать, что процесс деформации закончился, и все частицы тела находятся в равновесии. Такое состояние тела называется напряженно-деформированным.

Разрежем мысленно тело на две части (A и B) некоторой гладкой поверхностью и рассмотрим условия равновесия для одной из этих частей, например A . Вообще говоря, те внешние силы P_4 , P_5 , P_6 , которые непосредственно приложены к части A не находятся в равновесии. Тем не менее, новое тело A ,

как часть целого, должно находиться в равновесии. Для обеспечения полного равновесия и баланса сил с P_4 , P_5 , P_6 , некоторые нагрузки должны быть добавлены к поверхности между A и B . Эти силы отражают не что иное, как влияние тела B на тело A , и называются внутренними силами упругости. Считается, что они распределены на внутренней поверхности непрерывно, но, вообще говоря, неоднородно.

Их интенсивность в некоторой точке поверхности O , как правило, определяется следующим образом. Выберем небольшую поверхность S , окружающую точку O . Внутренние упругие силы и моменты в этой области эквивалентны силе R и паре (момент) M соответственно. Отметим, что эти результаты, в общем, отличные, как по величине так и ориентации, от соответствующих результирующих сил действующих на всей поверхности разреза, как показано на Рис. 1.1. Ограничим контур площади S таким образом, что точка O всегда находится во внутренности элемента S . Пусть поверхность уменьшается до тех пор пока не станет элементом с бесконечно малой площадью $S \rightarrow 0$. Тогда значения R и M , также стремятся к нулю. Предел отношения R/S , который характеризует интенсивность внутренних упругих сил, определяет напряжение в точке O по отношению к области элемента S

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{R}{S} = \sigma^{(n)}. \quad (1.1)$$

Величина и направление являются атрибутами напряжения. Направление напряжения такое же, как и для вектора R . В соответствии с принципом напряжений Эйлера - Коши абсолютное значение коэффициента M/S стремится к нулю

$$\lim_{S \rightarrow 0} M/S = 0$$

если площадь S обращается в нуль. Случай, когда предельное значение данного коэффициента не равно нулю рассматривается в так называемой микроморфной теории упругости [132].

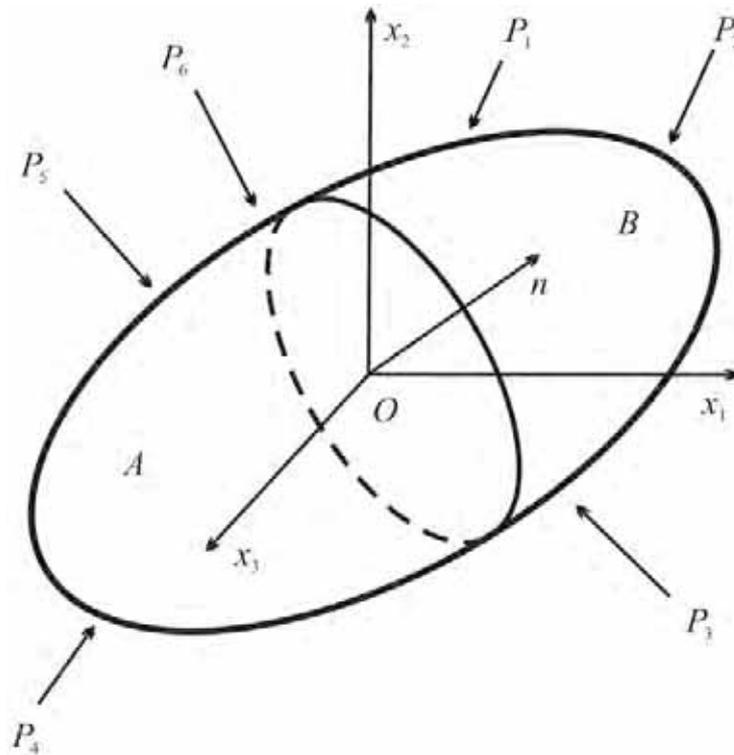


Рис. 1.1. Упругое тело, нагруженное внешними силами

Во время предельного процесса, описанного выше, ориентация поверхности, которая определяется нормалью к поверхности, остается неизменной в пространстве. Если выбрана другая нормаль n , то другой вектор напряжения $\sigma^{(n)}$ должен быть выбран. Таким образом, вектор $\sigma^{(n)}$ характеризуется не только своей величиной и направлением, но и ориентацией поверхности. Таким образом, когда говорят о напряжении в какой-то точке, необходимо указать, какой элемент площади рассматривается. По определению, направление площадки совпадает с ее единичным вектором внешней нормали по отношению к той части тела чье равновесие изучается.

Два вектора напряжений измеренные в некоторой точке, но на площадках, направленных противоположно друг другу подчиняются соотношению

$$\sigma^{(-n)} = -\sigma^{(n)}. \quad (1.2)$$

Как видно из Рис. 1.1, это соотношение описывает взаимодействие между двумя частями A и B упругого тела и может трактоваться как третий закон

Ньютона (сила действия и противодействия между двумя телами равны по величине и противоположны друг другу по направлению).

В общем, направление вектора напряжений не совпадает с направлением внешней нормали поверхности. Вектор напряжений можно разложить на два независимых вектора: один, p , коллинеарен нормали к области S , а с другой стороны, τ ортогонален нормали. Эти векторы называются нормальными и касательными напряжениями соответственно.

Когда скалярное произведение вектора нормального напряжения p и внешней нормали n является положительным, то это напряжение стремится растянуть материал, в противном случае оно стремится сжать тело. Касательное напряжение τ стремится сдвинуть или вырезать материал вдоль области S и называется напряжением сдвига.

Вектор напряжения $\sigma^{(n)}$, определенный в точке на поверхности с внешней нормалью n часто представляется с использованием проекций этого вектора на декартовы оси координат x_1, x_2, x_3 . Тогда, обозначая эти величины $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$, выражение для напряжений имеет вид

$$p = \sigma^{(n)} \cdot n = \sigma_{n1} n_1 + \sigma_{n2} n_2 + \sigma_{n3} n_3, \quad (1.3)$$

где $n_i, i = 1, 2, 3$, являются компонентами нормали n в декартовых координатах. Считается, что вектор n имеет единичную длину и, следовательно, $n \cdot n = 1$. Здесь точка обозначает скалярное произведение двух векторов в евклидовом пространстве.

Компоненты вектора напряжения, определенные в точке на поверхности параллельно одной из координатных плоскостей, например, x_2x_3 , обычно обозначаются символами $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$. Здесь первый индекс 1 показывает, что направление внешней нормали совпадает с осью x_1 . Таким образом, σ_{11} является компонентой вектора нормальных напряжений p , σ_{12} и σ_{13} компоненты вектора сдвиговых напряжений τ . Знак нормального напряжения был опре-

делен выше. Следующее правило обычно применяется к касательным напряжениям. Если внешняя нормаль совпадает с положительным направлением одной из координатных осей, то положительное направление тангенциальной компоненты напряжений определяется так же, как направления двух других осей. Если нормаль n имеет противоположное направление, необходимо также изменить положительное направление касательных напряжений.

Было показано (см., например, [100]), что векторы напряжений $\sigma^{(n)}$, определенные в некоторой заданной точке O на разных гранях S не являются независимыми друг от друга. Все напряжения могут быть получены однозначно, если три вектора напряжений на трех различных площадках известны в данный момент. Например, эти площадки могут быть взаимно ортогональны. Этот факт указывает на то, что величины, определяющие напряженное состояние упругого тела, можно охарактеризовать как компоненты некоторого тензора.

Девять компонент векторов напряжений, связанных с тремя гранями, параллельными координатным плоскостям могут быть представлены в виде матрицы напряжений

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right\}. \quad (1.4)$$

Эти компоненты представляют собой физическую величину σ , которая называется тензором напряжений Коши (тензор второго ранга).

Компоненты тензора напряжения σ заданные в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 изменяются после поворота координат в соответствии с законом преобразования компонент тензора второго ранга. Преобразование координат

в трехмерном пространстве имеет следующее представление

$$\begin{aligned}
 x_1^* &= (e_1^* \cdot e_1)x_1 + (e_1^* \cdot e_2)x_2 + (e_1^* \cdot e_3)x_3 = Q_{11}x_1 + Q_{12}x_2 + Q_{13}x_3, \\
 x_2^* &= (e_2^* \cdot e_1)x_1 + (e_2^* \cdot e_2)x_2 + (e_2^* \cdot e_3)x_3 = Q_{21}x_1 + Q_{22}x_2 + Q_{23}x_3, \\
 x_3^* &= (e_3^* \cdot e_1)x_1 + (e_3^* \cdot e_2)x_2 + (e_3^* \cdot e_3)x_3 = Q_{31}x_1 + Q_{32}x_2 + Q_{33}x_3,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где e_i и e_i^* являются ортами исходной и новой систем координат соответственно, или в матричной форме

$$x^* = Qx, \tag{1.6}$$

где Q является матрицей поворота (матрица направляющих косинусов). То-

гда, компоненты напряжений преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma^* &= Q\sigma Q^T; \\
\sigma_{11}^* &= \sigma_{11}Q_{11}^2 + \sigma_{22}Q_{12}^2 + \sigma_{33}Q_{13}^2 + \\
&(\sigma_{12} + \sigma_{21})Q_{11}Q_{12} + (\sigma_{13} + \sigma_{31})Q_{11}Q_{13} + (\sigma_{23} + \sigma_{32})Q_{12}Q_{13}, \\
\sigma_{22}^* &= \sigma_{11}Q_{21}^2 + \sigma_{22}Q_{22}^2 + \sigma_{33}Q_{23}^2 + \\
&(\sigma_{12} + \sigma_{21})Q_{21}Q_{22} + (\sigma_{13} + \sigma_{31})Q_{21}Q_{23} + (\sigma_{23} + \sigma_{32})Q_{22}Q_{23}, \\
\sigma_{33}^* &= \sigma_{11}Q_{31}^2 + \sigma_{22}Q_{32}^2 + \sigma_{33}Q_{33}^2 + \\
&(\sigma_{12} + \sigma_{21})Q_{31}Q_{32} + (\sigma_{13} + \sigma_{31})Q_{31}Q_{33} + (\sigma_{23} + \sigma_{32})Q_{32}Q_{33}, \tag{1.7} \\
\sigma_{12}^* &= (\sigma_{11}Q_{11} + \sigma_{21}Q_{12} + \sigma_{31}Q_{13})Q_{21} + \\
&(\sigma_{12}Q_{11} + \sigma_{22}Q_{12} + \sigma_{32}Q_{13})Q_{22} + (\sigma_{13}Q_{11} + \sigma_{23}Q_{12} + \sigma_{33}Q_{13})Q_{23}, \\
\sigma_{13}^* &= (\sigma_{11}Q_{11} + \sigma_{21}Q_{12} + \sigma_{31}Q_{13})Q_{31} + \\
&(\sigma_{12}Q_{11} + \sigma_{22}Q_{12} + \sigma_{32}Q_{13})Q_{32} + (\sigma_{13}Q_{11} + \sigma_{23}Q_{12} + \sigma_{33}Q_{13})Q_{33}, \\
\sigma_{23}^* &= (\sigma_{11}Q_{21} + \sigma_{21}Q_{22} + \sigma_{31}Q_{23})Q_{21} + \\
&(\sigma_{12}Q_{21} + \sigma_{22}Q_{22} + \sigma_{32}Q_{23})Q_{22} + (\sigma_{13}Q_{21} + \sigma_{23}Q_{22} + \sigma_{33}Q_{23})Q_{23}.
\end{aligned}$$

В частности, следующие формулы для симметричного тензора напряжений ($\sigma_{12} = \sigma_{21}$) справедливы (вращение системы координат на угол α отно-

сительно оси x_3):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^* &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha, \\
 \sigma_{22}^* &= \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha, \\
 \sigma_{12}^* &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\
 \sigma_{13}^* &= \sigma_{13}, \quad \sigma_{23}^* = \sigma_{23}, \quad \sigma_{33}^* = \sigma_{33}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Обозначения, введенные для напряжений могут быть также использованы для внешней нагрузки распределенной по границе тела. Если площадка S относится к внешней поверхности, то усилия приложенные к этому элементу играют такую же роль, как и внутренние упругие силы, о которых говорилось выше. Компоненты напряжений σ_{n1} , σ_{n2} и σ_{n3} характеризуют интенсивность распределенной поверхностной нагрузки на площадке S . Тогда формулу Коши для поверхностных напряжений можно записать в векторной форме

$$\sigma^{(n)} = \sigma \cdot n \tag{1.9}$$

или представить покомпонентно

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \\
 \sigma_{n2} &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \\
 \sigma_{n3} &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3,
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

с учетом соотношения для координат (1.6) и тензорных преобразований (1.7). Если поверхностная нагрузка характеризуется вектором напряжения q , заданным на некоторые части внешней поверхности, то краевое условие равновесия $q = \sigma^{(n)} = -\sigma^{(-n)}$ следует из уравнения (1.2). В соответствии с формулами (1.10), граничные условия в напряжениях могут быть выражены

через компоненты вектора q , как

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= q_1, \\
 \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 &= q_2, \\
 \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= q_3.
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Чтобы удовлетворить всем требованиям равновесия, суммы всех сил и моментов, действующих на тело должны быть равны нулю соответственно. Тогда, шесть интегральных уравнений равновесия сил и моментов напряженного тела занимающего область Ω с границей $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ можно записать следующим образом. Три статические соотношения, полученные проектированием всех действующих сил на оси координат имеют вид

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \sigma_{n1} d\Gamma + \int_{\Omega} f_1 d\Omega &= 0, \\
 \int_{\Gamma} \sigma_{n2} d\Gamma + \int_{\Omega} f_2 d\Omega &= 0, \\
 \int_{\Gamma} \sigma_{n3} d\Gamma + \int_{\Omega} f_3 d\Omega &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

где $d\Omega$ является элементом объема области Ω и $d\Gamma$ является элементом площади на границе Γ . Первые слагаемые в левой части этих соотношений являются проекциями поверхностных сил на оси координат. Вторые члены являются проекциями объемных сил на ту же ось. Здесь f_1 , f_2 и f_3 являются компонентами вектора f объемной плотности силы.

Три уравнения баланса моментов относительно координатных осей могут

быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (x_3 \sigma_{n2} - x_2 \sigma_{n3}) d\Gamma + \int_{\Omega} (x_3 f_2 - x_2 f_3) d\Omega &= 0, \\
\int_{\Gamma} (x_1 \sigma_{n3} - x_3 \sigma_{n1}) d\Gamma + \int_{\Omega} (x_1 f_3 - x_3 f_1) d\Omega &= 0, \\
\int_{\Gamma} (x_2 \sigma_{n1} - x_1 \sigma_{n2}) d\Gamma + \int_{\Omega} (x_2 f_1 - x_1 f_2) d\Omega &= 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Поверхностные интегралы относятся к силам, распределенным по границе, в то время как объемные интегралы имеют дело с объемными силами.

Таким образом, чтобы сохранить равновесие напряженного тела, должны быть выполнены соотношения (1.12) и (1.13). Следовательно, если это упругое тело находится в статическом состоянии равновесия под действием внешних нагрузок, то каждая ее произвольно выбранная часть также должна быть в равновесии. С помощью теоремы Гаусса интеграл по поверхности, например, в первом уравнении (1.12) может быть преобразован в интеграл по объему (см., например, [108]))

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) d\Gamma = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) d\Omega. \tag{1.14}$$

После преобразования подобному (1.14), соотношения (1.12) можно записать в интегральной форме

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 \right) d\Omega &= 0, \\
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 \right) d\Omega &= 0, \\
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 \right) d\Omega &= 0
\end{aligned} \tag{1.15}$$

или в тензорном представлении

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) d\Omega = 0, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}^T. \quad (1.16)$$

Здесь введен оператор градиента ∇ .

Так как интегральные соотношения (1.15) или (1.16) в статическом случае выполняются в любой подобласти Ω , следовательно, все подынтегральные соотношения в (1.15) и, конечно, в формуле (1.16) должны быть равны нулю в любой внутренней точке тела

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma + f &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Применяя теорему Гаусса и формулы Коши (1.10) к поверхностным интегралам в (1.13) и принимая во внимание (1.17) могут быть получены еще три интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{32} - \sigma_{23}) d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} (\sigma_{13} - \sigma_{31}) d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} (\sigma_{21} - \sigma_{12}) d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Эти уравнения справедливы для любой подобласти упругого тела, и, следо-

вательно, подинтегральные выражения должны быть тождественно равны нулю в каждой внутренней точке тела. Это означает, что тензор напряжений σ является симметричным или, другими словами, его диагональные элементы не изменяются после транспонирования матрицы (1.4)

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12}. \quad (1.19)$$

Этот весьма важный результат иногда называется теоремой Больцмана или принципом взаимности касательных напряжений.

1.2. Линейные деформации

Внешние силы приводят к деформации упругих тел. Одной из задач механики деформируемого твердого тела является, в частности, задача описания изменения формы тел. Это чисто геометрическая задача. Одним из общих предположений в математических моделях механики сплошных сред является то, что любые изменения в состоянии тела осуществляются непрерывно. Подразумевается, что подобласти, которые являются соседними до деформации остаются соседними и после этой деформации. Любая конечная часть среды не может быть преобразована, в связи с деформацией, ни к бесконечно малым ни бесконечно большим объемам. Материалы с первоначально непрерывно распределенными физическими свойствами не могут содержать никаких разрывов и пустот, а также других особенностей при этой деформации.

Деформации упругого тела полностью определяются относительными перемещениями ее точек. Если тело совершает некоторые поступательные движения или вращается как целое, то относительное положение его частиц не изменяется и тело не деформируется. Такие смещения не производят никаких внутренних напряжений.

Изменения длины линейных элементов, а также углов между этими эле-

ментами должны быть получены с помощью перемещений для того чтобы определить локальную деформацию или деформацию.

В математических терминах, деформацию можно рассматривать как геометрическое отображение недеформированного тела в деформированное. Различные системы криволинейных координат в евклидовом (т.е. не искривленном) пространстве используются для описания не напряженных а также напряженных тел. Гипотеза сплошных сред накладывает довольно жесткие ограничения на это отображение. Во-первых, такое отображение должно быть взаимно однозначным, так что обратное отображение должно существовать. Во-вторых, отображение должно быть непрерывным и обратное также должно быть непрерывным. Кроме того, координатные функции должны быть непрерывными и дифференцируемыми.

Эти функции могут быть определены либо на изначально недеформированном состоянии тела либо на деформированном. В свою очередь, это приводит к двум различным формам описания кинематики деформируемого тела, а именно, через координаты Лагранжа или координаты Эйлера.

В классической теории упругости, недеформированные и деформированные тела обычно описываются в декартовой системе координат. В соответствии с этими двумя формами описания, обозначим координаты Лагранжа как X_i и координаты Эйлера как x_i соответственно ($i = 1, 2, 3$).

В Лагранжевом подходе, наблюдатель жестко связан с конкретной частицей тела и координаты Лагранжа являются независимыми

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3). \quad (1.20)$$

В то же время изучается то, что происходит с частицей, а также в ее окрестности.

Что касается описания Эйлера, то наблюдатель находится в фиксированной точке пространства. При этом координаты Эйлера также являются неза-

висимыми

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3). \quad (1.21)$$

При этом интересуются процессами, которые происходят в данной точке и в ее окрестности.

Каждый из этих подходов имеет ряд преимуществ, и оба применяются в механике сплошных сред. Соотношения между этими методами достаточно хорошо изучены и определены условия взаимно-однозначного соответствия и непрерывности, наложенные на отображения (1.20) и (1.21). Отметим, что описание Лагранжа часто является предпочтительным в теории упругости, в то время, как координаты Эйлера широко используются в механике жидкости.

Как уже было отмечено, в этом разделе, все точки деформированной среды характеризуются смещениями, которые могут быть определены вектором перемещений u с компонентами u_i , $i = 1, 2, 3$. Вектор u подчиняется равенству

$$u = x - X. \quad (1.22)$$

Согласно формулировке Лагранжа, где вектор $X = \{X_1, X_2, X_3\}^T$ является независимой переменной, перемещения вводятся как

$$u(X) = x(X) - X. \quad (1.23)$$

В описании Эйлера с независимым вектором $x = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ перемещения определяются в виде

$$u(x) = x - X(x). \quad (1.24)$$

Вследствие деформации тела, прямые линии, выбранные в недеформированном теле становятся, в общем случае, кривыми различной длины.

По определению, расстояние между двумя бесконечно близкими точками называется линейным элементом. Введем для описания деформации дефор-

мированный dl и недеформированный dL линейные элементы и вычислим разность квадратов соответствующих элементов

$$(dl)^2 - (dL)^2, \quad (1.25)$$

как меру деформации. Эти величины могут быть выражены через координаты Лагранжа или Эйлера в виде

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= dx \cdot dx = dx_i dx_i = \delta_{mn} dx_m dx_n, \\ (dL)^2 &= dX \cdot dX = dX_i dX_i = \delta_{mn} dX_m dX_n, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где δ_{mn} это дельта Кронекера, а суммирование предполагается, по повторяющимся индексам.

Принимая во внимание формулы (1.26) и следующие дифференциальные соотношения

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j, \quad dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j, \quad (1.27)$$

можно получить

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= dx \cdot dx = dX \cdot F^T F \cdot dX = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} dX_m dX_n, \\ (dL)^2 &= dX \cdot dX = dX \cdot H^T H \cdot dX = \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_i}{\partial x_n} dx_m dx_n, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где F является материальным градиентом тензора деформации и $H = F^{-1}$ пространственным тензором градиента деформации с компонентами

$$F_{mn} = \frac{\partial x_m}{\partial X_n}, \quad H_{mn} = \frac{\partial X_m}{\partial x_n}, \quad (1.29)$$

соответственно.

Координаты Лагранжа и Эйлера позволяют ввести два различных тензора деформации. Из уравнений (1.28) следует, что выражения (1.25) в коор-

динамах Лагранжа принимают вид

$$(dl)^2 - (dL)^2 = dX \cdot (FF^T - I) \cdot dX = 2dX \cdot E \cdot dX = 2E_{mn}dX_m dX_n, \quad (1.30)$$

с

$$2E_{mn} = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} - \delta_{mn}, \quad (1.31)$$

где E_{mn} – компоненты тензора деформации Грина - Лагранжа E и I является единичным тензором.

По аналогии, из описания Эйлера следует, что

$$(dl)^2 - (dL)^2 = dx \cdot (HH^T - I) \cdot dx = 2dX \cdot \varepsilon \cdot dX = 2\varepsilon_{mn}dx_m dx_n \quad (1.32)$$

с

$$2\varepsilon_{mn} = \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_i}{\partial x_n} - \delta_{mn}, \quad (1.33)$$

где ε_{mn} это компоненты тензора деформации Эйлера - Альманси ε . Оба E и ε – тензоры второго ранга. Можно показать, что они симметричны. Множитель два в уравнениях (1.31) и (1.33) вводится по некоторым геометрическим соображениям.

Тензор градиента F можно разложить, используя полярную теорему разложения в виде произведения двух тензоров второго ранга [198]

$$F = QU, \quad (1.34)$$

где Q это специальный ортогональный тензор, U это положительно определенный симметричный тензор. Тогда тензор деформации Грина - Лагранжа может быть представлен в следующем виде

$$E = \frac{1}{2} (U^2 - I). \quad (1.35)$$

Отметим, что различные меры деформации могут быть введена через тензор U , например, тензор деформации Био

$$E_{(1/2)} = U - I. \quad (1.36)$$

Тензоры деформации E и ε можно также выразить через производные от перемещений u . Из (1.23) следует, что в описании Лагранжа $x_i = X_i + u_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда, принимая во внимание следующее соотношение

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \quad (1.37)$$

компоненты тензора деформации Грина-Лагранжа могут быть представлены как

$$E_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_n}{\partial X_m} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m} \frac{\partial u_i}{\partial X_n} \right). \quad (1.38)$$

В соответствии с описанием Эйлера (1.24) следует, что

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right). \quad (1.39)$$

Значения E_{mn} и ε_{mn} являются компонентам тензоров Лагранжа и Эйлера соответственно.

Если среда движется как твердое тело, то $(dl)^2 = (dL)^2$. Это означает, что $E_{mn} = \varepsilon_{mn} = 0$. Таким образом, если компоненты этих тензоров деформации равны нулю, то это является необходимым и достаточным условием отсутствия деформаций в континууме и, следовательно, полей напряжений.

Отметим, что трудно дать простую и наглядную геометрическую интерпретацию нелинейных компонент E_{mn} и ε_{mn} тензоров деформации, определенных в формулах (1.38) и (1.39). Тем не менее, некоторые соотношения между этими тензорами и относительной деформации могут быть выявлены.

Рассмотрим сначала тензор Лагранжа E . Пусть бесконечно малый эле-

мент недеформированной среды ($dS = dX_1, dX_2 = dX_3 = 0$) переходит при деформации в элемент $dl = dx$ с тремя нетривиальными компонентами dx_i , $i = 1, 2, 3$. Тогда относительная деформация определяется как отношение длин

$$E_1 = (|dl| - dS)/dS. \quad (1.40)$$

При этом, в соответствии с описанием Лагранжа, относительная деформация определяется в соответствии с первоначальной длиной. Соответственно, $|dl| = (1 + E_1)dS$ и уравнение (1.30) могут быть сведены к форме

$$(dl)^2 - (dL)^2 = 2E_{11} (dX_1)^2 = (2E_1 + E_1^2) (dX_1)^2. \quad (1.41)$$

Из этого следует, что

$$E_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2} - 1.$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для других направлений. Таким образом, компоненты E_{mn} при $m = n$ явно связаны с деформацией растяжения линейных элементов. Таким же образом можно показать, что компоненты E_{mn} со смешанными индексами, $m \neq n$, характеризуют изменение относительных углов в среде. Подобный анализ может быть также проведен для тензора деформации Эйлера.

В дальнейшем ограничимся случаем малых смещений и деформаций и будем считать, что все частные производные от перемещений значительно меньше единицы. Квадратичные члены учитываются в геометрически нелинейной теории упругости (см., например, [15], [73], [74], [130]). Тогда, тензоры

Лагранжа и Эйлера можно линеаризовать и их компоненты становятся

$$E_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_n} + \frac{\partial u_n}{\partial X_m} \right), \quad (1.42)$$

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right).$$

Кроме того, как следует из предположения о малости перемещений $x_i \approx X_i$ различия между описаниями Лагранжа и Эйлера исчезают, т. е. $E_{mn} \approx \varepsilon_{mn}$. В этом случае, ε называется тензором деформаций Коши и его можно записать в тензорной форме следующим образом

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T). \quad (1.43)$$

Основным преимуществом линейной теории является то, что ее математический формализм является довольно простым по сравнению с тем, который применяется в нелинейной теории упругости. Это особенно важно в связи с тем, что уравнения линейной теории упругости точно описывают поведение конструкций в широком классе инженерных приложений. Конечно, нужно иметь в виду, что эта математическая модель не всегда правильно отражает законы природы. Кроме того, эта линеаризация не позволяет оценить априори нарушения механических законов. Но преимуществом этой теории, которое едва ли можно переоценить, является возможность использовать суперпозицию решений.

Можно выписать диагональные элементы тензора деформации или деформации растяжения через компоненты перемещений следующим образом

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (1.44)$$

Сдвиговые компоненты ε_{ij} и соответствующие изменения углов γ_{ij} , $i \neq j$

имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{12}, \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{13}, \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{23}.\end{aligned}\tag{1.45}$$

Компоненты матрицы линейного тензора деформации могут быть представлены как

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2} \gamma_{12} & \frac{1}{2} \gamma_{13} \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2} \gamma_{23} \\ \frac{1}{2} \gamma_{13} & \frac{1}{2} \gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Изменения углов γ_{12} , γ_{13} , и γ_{23} называются инженерными компонентами деформации. Тензор деформации Коши является симметричным тензором второго ранга. Его свойства аналогичны свойствам тензора напряжений Коши уже введенного в разделе 1.1.

Легко видеть из (1.44) и (1.45), что шесть компонентов ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} , ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} тензора ε не являются независимыми, поскольку они могут быть получены из трех независимых компонентов u_1 , u_2 , u_3 вектора перемещений u , как это было показано выше. Это утверждение может быть подтверждено различными способами. Например, разобьем мысленно недеформированное тело на бесконечное количество прямолинейных параллелепипедов. После этого, будем считать, что каждый из таких элементов деформируется произвольно. Далее, попробуем соединить непрерывно все эти деформированные параллелепипеды. В общем случае эта попытка может быть неудачной, поскольку, для того чтобы такая сборка была возможна, необходимо удовлетворить некоторые специальные соотношения между деформациями.

Таким образом, если шесть компонентов поля деформации являются про-

изводными от трех функций смещения вектора u , как в уравнениях (1.44) и (1.45), то они не являются независимыми и должны удовлетворять уравнениям совместности Сен - Венана. Как это было показано, например в [57], эти условия могут быть представлены в матричной форме

$$\begin{pmatrix} R_1 & U_3 & U_2 \\ U_3 & R_2 & U_1 \\ U_2 & U_1 & R_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.46)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, & R_2 &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ R_3 &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ U_1 &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right), \\ U_2 &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right), \\ U_3 &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Уравнения совместности (1.46) могут быть также представлены в тензорной форме

$$\nabla \times (\nabla \times \varepsilon)^T \equiv \text{Ink } \varepsilon = 0. \quad (1.48)$$

Отметим, что это соотношение является необходимым и достаточным условием, которое напрямую вытекает из формул (1.44) и (1.45) после дифференцирования. Стоит также отметить, что существуют три эквивалентных

соотношения между величинами $R_1, R_2, R_3, U_1, U_2, U_3$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial R_3}{\partial x_3} &= 0.\end{aligned}\tag{1.49}$$

Эти равенства могут быть также получены дифференцированием, как в [200]. Это означает, что $R_1, R_2, R_3, U_1, U_2, U_3$ не являются независимыми функциями.

1.3. Уравнения состояния

Статическое и кинематическое описания представленные в разделах 1.1. и 1.2. являются справедливыми для твердых и жидких сред. Но введенные соотношения не достаточны для описания явлений происходящих в таких средах. Очевидно, что механическое поведение реальных материалов очень сложно и разнообразно. Например, деформации в твердых телах могут быть, как упругие, так и пластические, они могут быть зависимы от времени или истории нагружения и т. д. Неполноту системы, состоящей из кинематических соотношений и уравнений равновесия, можно объяснить с физической точки зрения. Действительно, уравнения равновесия не зависят от свойств материала тела. И не важно, что среда рассматривается как твердое, жидкое, или газообразное тело. Очевидно, что результирующая деформация, вследствие действия заданных нагрузок, будет различной для тел сделанных из свинца или стали. Ясно также, что если два тела, занимающие идентичные области, изготовлены из различных материалов, например, одно из железа а другое из дерева, но при этом имеют одинаковую деформацию, то для этого должны быть приложены две разные системы сил. Обратим внимание, на то что

в результирующие поля напряжений также отличны друг от друга. Таким образом, необходимо ввести некоторые соотношения между напряжениями и деформациями. Только такие соотношения могут учитывать характерные свойства различных материалов.

В природе существует много различных материалов и физических законов, описывающих поведение сред в различных условиях. Таким образом, создание некоторой универсальной физической модели, которая была бы в состоянии учесть все механические свойства реальных материалов, может быть трудной задачей. Стоит отметить, что такой закон был бы очень труден и неудобен для практического использования. Поэтому представляется целесообразным получить некоторые приближенные соотношения, которые отражают характерные особенности поведения материалов под действием различных нагрузок. При этом, важным условием является то, что все предлагаемые модели должны отражать достаточную корреляцию между идеальным и реальным описанием материалов.

Физические законы, которые часто называют уравнениями состояния не могут быть установлены абсолютно произвольно. Некоторые фундаментальные принципы были сформулированы в теории механики сплошных сред для получения таких соотношений. Основные принципы утверждают, что:

- Любой физический закон должен быть инвариантным относительно выбора системы координат и кинематических переменных.
- Определяющие соотношения не зависят от положения наблюдателя и его движения.
- Такой закон должен учитывать однородность и изотропность физического пространства.
- Уравнения состояния должны находиться в соответствии с законами термодинамики.

Механика деформируемого твердого тела фокусируется, в первую очередь, на уравнениях, связывающих напряжения с кинематическими вели-

чинами (деформациями и скоростями деформаций). Другими физическими явлениями, такими как тепло и массообмен, электропроводность, как правило, пренебрегают. Предполагается также, что все деформационные процессы выполняются при достаточно медленном изменении нагрузки, так что температура тела остается постоянной за счет теплообмена с окружающей средой (изотермический процесс). Кроме того, если нагружение происходит достаточно быстро, то такой процесс можно рассматривать как адиабатический.

Твердое тело под нагрузкой изменяет свою форму, и такие изменения часто настолько малы, что могут быть обнаружены только чувствительным оборудованием. При этом, тело пытается восстановить свою первоначальную форму после снятия деформирующих сил. Если работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию (нет диссипации энергии), то можно сказать, что материал, из которого сделано тело находится в упругом состоянии.

Несмотря на то, что аксиомы баланса сил и моментов приняты безоговорочно, определение упругости вызывает некоторые сомнения. Тем не менее, такое определение позволило изучить многие различные конструкции и привело к большому количеству формулировок интересных задач. Так, что теория упругости, несмотря на свои недостатки и ограничения, является одним из главных достижений в механике сплошных сред.

В теории упругости считается, что тело в исходном состоянии свободно от внутренних напряжений, имеет постоянную температуру, и находится в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой. Предполагается также, что деформационные процессы обратимы и работа внешних сил преобразуется во внутреннюю энергию, запасаемую упругим телом. Работа деформации не зависит от времени и истории нагружения, т.е., каким образом напряжения и деформации достигают своего конечного значения. Это означает, что поля напряжений в упругом теле зависят только от полей деформации. Иными словами, определяющие соотношения могут быть

получены из выражения внутренней энергии, в котором компоненты тензора деформации ε и тензора напряжений σ , введенные в разделах 1.1. и 1.2. являются независимыми переменными состояния.

Работа внешних сил совершаемая в единице объема, называется удельной потенциальной энергией деформации (плотность энергии деформации)

$$U = \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon} \sigma : d\varepsilon = \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (1.50)$$

Здесь символом ‘:’ обозначено тензорное скалярное произведение. Тензорную нотацию и соответствующие определения можно найти в [27], [168]. В следствие того, что интеграл (1.50) не зависит от пути интегрирования, то подынтегральное выражение должно быть полным дифференциалом. Так как тензоры σ и ε являются симметричными, то уравнение (1.50) можно записать покомпонентно в дифференциальной форме

$$dU = \sigma_{11}d\varepsilon_{11} + \sigma_{22}d\varepsilon_{22} + \sigma_{33}d\varepsilon_{33} + 2(\sigma_{12}d\varepsilon_{12} + \sigma_{13}d\varepsilon_{13} + \sigma_{23}d\varepsilon_{23}). \quad (1.51)$$

Из уравнения (1.51) видно, что

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}. \quad (1.52)$$

Удельная потенциальная энергия деформации $U(\varepsilon)$ является однозначной функцией тензора деформации ε и называется упругим потенциалом. С другой стороны, следующее выражение

$$dU_c = \varepsilon_{11}d\sigma_{11} + \varepsilon_{22}d\sigma_{22} + \varepsilon_{33}d\sigma_{33} + 2(\varepsilon_{12}d\sigma_{12} + \varepsilon_{13}d\sigma_{13} + \varepsilon_{23}d\sigma_{23}) \quad (1.53)$$

также является полным дифференциалом

$$dU + dU_c = d(\sigma : \varepsilon).$$

Таким образом справедливо следующее соотношение

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial \sigma}. \quad (1.54)$$

Величина U_c называется дополнительной энергией деформации (плотность энергии напряжений). Понятие плотности потенциальной энергии $U(\varepsilon)$ было введено Грином в 1839 году при формулировании теории света [137].

Предположение, что потенциальная энергия существует находится в хорошем соответствии с гипотезой обратимости изотермического и адиабатического процессов и характеризует упругие свойства материалов.

Значение энергии не является отрицательной величиной. Это свойство используется, например, для доказательства единственности решения задачи линейной упругости. Кроме того, теоремы минимума потенциальной энергии и дополнительной энергии, которые будут обсуждены в дальнейшем, основаны на положительности энергии. В классической линейной теории упругости плотность энергии напряжений $U(\varepsilon)$ является квадратичной формой компонентов деформации.

После ряда экспериментов с проволокой, Роберт Гук обнаружил линейную зависимость между деформирующими силами и перемещениями. Затем он сформулировал закон “*Ut tensio sic vis*” - “каково удлинение, такова сила”, который был опубликован в 1676 году в качестве анаграммы “*ceiinnosssttuv*” [144].

Tensio определяется Гуком не только как растяжение, но и как упругая деформация тела произвольного вида. Здесь слово *vis* означает внешнюю силу или систему сил (например, пара сил), порождающих деформацию тела.

Результаты многочисленных исследований подтвердили справедливость закона Гука для многих реальных материалов. При этом, были оценены предельные деформации, при которых линейное соотношение между напряжениями и деформациями остается верным. Эти деформации изменяются в ши-

роком диапазоне значений от одного материала к другому. В то время как, например, сталь подчиняется закону Гука в относительно широком диапазоне параметров нагружения, то такой материал, как чугун отклоняется от линейного поведения даже при относительно малых напряжениях. В соответствии с Коши [125], обобщенный закон Гука может быть представлен в виде линейной зависимости между тензорами напряжений и деформаций в виде

$$\sigma = C(x) : \varepsilon, \quad (1.55)$$

где C это тензор модулей упругости четвертого ранга. Компоненты тензора C не зависят от пространственных координат в случае однородных сред. Так как компоненты напряжений и деформаций зависят от ориентации декартовой системы координат, то компоненты тензора модулей упругости также должны соответствовать этой зависимости. Эти модули являются инвариантными по отношению к произвольным вращениям системы координат только в случае изотропного материала.

Соотношение между напряжениями и деформациями (1.55) можно рассматривать как линейный член разложения в ряд некоторой общей нелинейной функции $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Можно показать, что существует девять соотношений в формуле (1.55) с девятью переменными в каждом. Таким образом, тензор C состоит из 81 компонентов. В силу симметрии тензоров σ и ε , число независимых уравнений уменьшается до шести, и, следовательно, в силу свойств симметрии

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (1.56)$$

тензор упругих модулей имеет не более 36 независимых компонент. Матрица

из этих компонентов может быть представлена в виде

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{array} \right\} .$$

Дальнейшее сокращение числа независимых величин тензора C следует из термодинамики, если считать, что потенциальная энергия деформации существует. Используя выражение (1.55) для σ , уравнение (1.51) примет вид

$$dU = \varepsilon : C : d\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} : d\varepsilon . \quad (1.57)$$

После повторного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right) = C , \quad (1.58)$$

следует симметрия компонентов тензора модулей упругости

$$C_{ijkl} = C_{klij} . \quad (1.59)$$

Учитывая это дополнительное требование, число независимых компонент тензора упругости снижается до 21. Этот случай соответствует материалам с самыми общими анизотропными свойствами.

Для того, чтобы получить выражение для удельной потенциальной энергии возьмем соотношение (1.51) и рассмотрим некоторый элемент объема

упругого тела. Напряженно-деформированное состояние этого элемента определяется полями σ и ε . Вычисляя работу в единице объема (1.50) заметим, что эта работа не зависит от пути нагружения. Тогда, для любой прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ справедливо соотношение

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33}) + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23}. \quad (1.60)$$

Это равенство называется формулой Клапейрона (теорема).

Соотношение между напряжениями и деформациями (1.55) можно обратить. Таким образом, получается следующее соотношение

$$\varepsilon = C^{-1}(x) : \sigma. \quad (1.61)$$

Здесь C^{-1} это тензор упругой податливости обратный к тензору C . Этот объект является тензором четвертого ранга и имеет такие же свойства симметрии как и тензор C . С помощью либо уравнения (1.55) либо (1.61) формула Клапейрона принимает вид

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon : C : \varepsilon \quad (1.62)$$

или

$$U_c = \frac{1}{2} \sigma : C^{-1} : \sigma. \quad (1.63)$$

Как уже упоминалось, максимальное количество упругих модулей тензора модулей упругости равно 21. Такого рода анизотропия материала называется аэлотропией. Аэлотропия означает, что физические свойства (например, электропроводность, показатель преломления) тела зависят от направления, в которых они измеряются. Отметим, что количество модулей упругости материала связано с симметрией. В связи с этим дополнительные соотношения между упругими компонентами C_{ijkl} могут возникать, например, в кристаллической системе. В результате этого число модулей упругости для таких

материалов уменьшается. Многие металлы имеют гексагональную или кубической кристаллические решетки с пятью или тремя независимыми упругими параметрами соответственно.

Некоторые из материалов являются одновременно однородными и изотропными. Слово "изотропия" которое ввел Коши означает равные свойства во всех направлениях по аналогии с аэолотропией. Можно доказать на основе инвариантных свойств изотропных сред по отношению к вращению осей координат, что число независимых упругих модулей в этом случае равно двум. Те же характеристики присущи материалам, состоящим из многих кристаллитов различного размера и ориентации или так называемые материалы с поликристаллической структурой. Можно отметить ряд работ, в которых исследуются механические свойства упругих тел и конструкций со сложной внутренней структурой (см., например, [54], [55], [58], [99], [113], [115], [120], [121], [124], [131], [173]).

Для описания линейной изотропной упругой среды обычно вводятся модули Ламе λ и μ . Тогда, соотношение (1.55) можно записать покомпонентно

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} , \\
 \sigma_{22} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} , \\
 \sigma_{33} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} , \\
 \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} = \mu\gamma_{12} , \\
 \sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13} = \mu\gamma_{13} , \\
 \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23} = \mu\gamma_{23} .
 \end{aligned}
 \tag{1.64}$$

И тензор модулей упругости C в матричной форме может быть представлен

в следующем виде

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{array} \right\}.$$

Для любых тензоров σ и ε , заданных в некоторой точке тела, всегда можно найти такие системы координат, в которых все недиагональные компоненты этих тензоров равны нулю. Такие оси этих системах координат принято называть главными осями напряжений и деформаций. Из закона Гука для изотропного материала следует, что главные оси напряжений и деформаций совпадают, то есть тензоры напряжений и деформаций соосны. Это очевидно, так как только растягивающие и сжимающие напряжения действуют вдоль главных направлений. Таким образом, они не могут создать какие-либо деформации сдвига, как это видно из формулы (1.64).

Вместо модулей Ламе, часто используются другие коэффициенты. Рассмотрим одноосное растяжение изотропного тела вдоль оси x_1 . В этом случае компонента σ_{11} является единственным ненулевым напряжением и модуль Юнга определяется соотношением $E = \sigma_{11}/\varepsilon_{11}$. Принимая во внимание формулы (1.64) имеем

$$2\mu\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{11}$$

или

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}. \quad (1.65)$$

Кроме того, как это было экспериментально установлено, существует поперечная деформация, так что $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$, где константа ν называется коэффициентом Пуассона, который может быть представлен в виде

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (1.66)$$

С другой стороны, выражения для модулей Ламе могут быть получены следующим образом

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (1.67)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G.$$

Постоянная G называется модулем сдвига материала и определяется как отношение напряжения сдвига к соответствующей инженерной деформации, например, $G = \sigma_{12}/\gamma_{12}$.

Тензор модулей упругости C в матричной форме может быть выражен через модули упругости E и ν как

$$\frac{E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{array} \right\}. \quad (1.68)$$

В свою очередь, тензор податливости C^{-1} в уравнении состояния (1.61) может быть также выражен через значения E и ν . Тогда уравнение (1.61) можно переписать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

Методологию экспериментального определения модулей упругости можно найти в книге [60].

1.4. Краевые задачи

1.4.1. Формулировка задач статики

Уравнений теории упругости можно разделить на три основные группы. Прежде всего, это дифференциальное уравнение равновесия, полученных для внутренних напряжений в разделе 1.1. как

$$\nabla \cdot \sigma + f(x) = 0. \quad (1.70)$$

Во-вторых, это кинематические соотношения между тензором деформации ε и вектором перемещений $u = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ в форме, введенной в разделе 1.2.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T). \quad (1.71)$$

К третьей группе, обсуждавшейся в разделе 1.3., относятся соотношения между напряжениями и деформациями, записанные в тензорных обозначениях

$$\sigma = C(x) : \varepsilon. \quad (1.72)$$

Таким образом, существует 15 линейных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния упругого тела. Иногда, условия совместности добавляют ко второй группе. Также считается, что напряженно-деформированное состояние известно, если все компоненты тензоров напряжений и деформаций σ и ε заданы в каждой точке упругого тела.

Для завершения формулировки краевой задачи в теории упругости, нужно добавить к системе подходящие граничные условия. В дальнейшем, ограничимся рассмотрением только линейных граничных условий, которые могут быть записаны покомпонентно

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u = \bar{u}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(1)}; \quad (1.73)$$

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n = \bar{q}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(2)}; \quad (1.74)$$

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n + \kappa^{(i)}(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) = \bar{q}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(3)}. \quad (1.75)$$

Здесь \bar{u}_i и \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ – заданные функции граничных перемещений и внешних поверхностных нагрузок соответственно, $\bar{e}^{(i)}$ – орты декартовой системы координат; $\kappa^{(i)}$ – коэффициенты упругого (Винклеровского) основания. Отметим, что орты $\bar{e}^{(i)}$ могут изменяться в зависимости от ориентации границы, например, орт $\bar{e}^{(1)}$ совпадает с направлением внешней нормали n .

Границы $\Gamma_i^{(k)}$ для всех типов граничных условий $k = 1, 2, 3$, подчиняются следующему правилу

$$\bar{\Gamma}_i^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_i^{(2)} \cup \bar{\Gamma}_i^{(3)} = \Gamma; \quad \Gamma_i^{(j)} \cap \Gamma_i^{(k)} = \emptyset, \quad j \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

где $\Gamma = \partial\Omega$ – внешняя граница тела Ω .

Обычно, три типа краевых задач выделяют в механике твердого тела.

Первая краевая задача, называемая задачей Дирихле, заключается в решении уравнений в частных производных (1.70), (1.71), а также алгебраического уравнения внутри заданной области Ω относительно функций u , ε , σ так, чтобы перемещения принимали заданные значения на границе $\Gamma \equiv \bar{\Gamma}_1^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_2^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_3^{(1)}$, как в формуле (1.73).

Вторая краевая задача, называемая задачей Неймана, состоит в решении системы (1.70)–(1.72) так, чтобы напряжения принимали заданные значения на внешней поверхности $\Gamma \equiv \bar{\Gamma}_1^{(2)} \cup \bar{\Gamma}_2^{(2)} \cup \bar{\Gamma}_3^{(2)}$, как в формуле (1.74).

Третья краевая задача или смешанная задача (см., например, [3]), предполагает, что различные типы граничных условий, как в перемещениях так и в напряжениях заданы на различных частях границы Γ .

Все граничные условия в вышеупомянутых задачах вкладываются в формулировку, даваемой формулами (1.73) и (1.74). Кроме того, условия (1.75) позволяют рассматривать линейные задач теории упругости с частью границы, где ни смещения, ни поверхностные силы явно не зафиксированы, например, упругое тело на Винклеровском основании.

Во всех этих случаях объемные (или массовые) силы F предполагаются известными. Кроме того, эти силы в сочетании с поверхностной нагрузкой q не могут быть выбраны произвольными, поскольку они должны удовлетворять всем интегральным условиям равновесия (1.12) и (1.13).

Краевые задачи в классической линейной теории упругости, как правило, сформулированы либо только в перемещениях либо в напряжениях. Поэтому кажется довольно естественным уменьшить число независимых переменных с помощью исключения вектор-функции u или тензор-функции σ из управляющих уравнений (1.70)–(1.72).

Существует два способа сделать это. В первом из них, три уравнения (уравнения Навье) остаются в результате исключения напряжений σ и дефор-

маций ε по формулам (1.70)–(1.72). Очевидным преимуществом такого подхода является то, что условия совместности не требуются. С другой стороны, исключение перемещений u и деформаций ε посредством уравнений совместности приводит к шести дифференциальным уравнениям относительно напряжений σ (уравнения Бельтрами - Митчелла). Эти две системы уравнений в частных производных часто называют основными уравнениями линейной теории упругости.

Оба подхода широко используются в линейной теории упругости. Какой подход применить, зависит от постановки задачи. Стоит отметить, что общее решение, которое применимо ко всем случаям, до сих пор не было получено ни для какой из основных формулировок.

Основные уравнения в перемещениях получаются если выражение (1.72) для σ подставляется в формулу (1.70), а затем и тензор деформации ε исключается по формуле (1.71).

После этого уравнения Навье могут быть записаны покомпонентно

$$\begin{aligned} \left[(1 - 2\nu) \Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right] u_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1 - 2\nu}{G} f_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \left[(1 - 2\nu) \Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] u_2 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1 - 2\nu}{G} f_2 &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \left[(1 - 2\nu) \Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] u_3 + \frac{1 - 2\nu}{G} f_3 &= 0, \end{aligned} \quad (1.76)$$

где

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

– оператор Лапласа.

Отметим, что получение решения уравнений Навье является довольно трудной математической задачей. Действительно, если рассмотреть вторую краевую задачу, то условия (1.74) довольно неудобны. После подстановки

выражений (1.71) и (1.72) для тензора σ в (1.74), эти условия принимают вид

$$C : (\nabla u + \nabla u^T) \cdot n = 2\bar{q}(x), \quad (1.77)$$

где \bar{q} – заданный вектор граничных напряжений.

Тем не менее, линейные уравнения Навье (1.76) являются отправной точкой для множества численных методов, так как они не используют условия совместности.

Вместо использования перемещений u в виде неизвестной вектор-функции можно сначала решить уравнения равновесия в напряжениях. Тогда тензор деформации ε определяется в явном виде посредством обращения закона Гука (1.61). Уравнения совместности

$$\nabla \times \nabla \times (C^{-1} : \sigma) = 0 \quad (1.78)$$

должны быть решены именно с учетом уравнений равновесия (1.70). Как результат получаются шесть уравнений Бельтрами-Митчелла относительно компонент тензора напряжения σ . Как пример решения такой задачи отметим работы [83], [84]. Эти уравнения могут быть записаны в декартовых

координатах для однородного изотропного материала в виде

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) - 2\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \\
\Delta\sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) - 2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \\
\Delta\sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_3^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) - 2\frac{\partial f_3}{\partial z}, \\
\Delta\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2} &= -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right), \\
\Delta\sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_3} &= -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right), \\
\Delta\sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2\partial x_3} &= -\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right),
\end{aligned} \tag{1.79}$$

$$\zeta = \text{tr } \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

Несмотря на то что все соотношения линейной теории упругости заданы, остаются два основных вопроса. Существует ли решение этих уравнений, и если решение существует единственно ли оно? Что касается первого вопроса, то это чисто математическая задача. Однако стоит отметить, что эта проблема все еще не решена и этот вопрос, обычно не ставят.

С физической точки зрения, очевидно, что упругое тело под действием некоторой нагрузки может находиться в равновесном состоянии. Кроме того, так как математическая постановка задач теории упругости основана на фундаментальных физических принципах, можно предположить, что этот базис не может привести к абсурдным результатам.

Доказательство теоремы единственности для статических краевых задач упругости может быть осуществлено различными методами. Обычно эта теорема доказывается *ex adverso* (от противного) и основывается на том, что

предположение о единственности не приводит к противоречию.

Существование и положительная определенность упругой энергии играют центральную роль в доказательстве единственности. При этом отправной точкой является положение, которое известно как теорема Клапейрона в линейной упругости.

Теорема 1.1. *В предположении, что внешние силы остаются постоянными при переходе тела из начального состояния в конечное, потенциальная энергия деформации тела, которое под действием заданной нагрузки находится в равновесном состоянии, равна половине работы, проделанной этими силами.*

Доказательство того, что уравнения линейной теории упругости имеет единственное решение (если оно вообще существует) впервые было дано Кирхгофом [148]. Этот вывод основан на принципе суперпозиции сил и предположении, что перемещения не влияют на внешние силы. В случаях, когда этот принцип не применим, тогда несколько различных форм равновесия может соответствовать одной и той же системе нагрузок. Эти вопросы относятся к устойчивости различных форм равновесия упругих тел.

Если граница тела является многосвязной поверхностью, то это доказательство уже не действует, так как можно получить многозначные решения. Прежде всего, это обусловлено возможностью упругого тела находиться в предварительно напряженном состоянии. Такие напряжения могут возникнуть в упругих телах в процессе их изготовления. Понятие предварительно напряженного состояния имеет большое значение в практике, но оно редко принимается во внимание, потому что, как правило, не существует надежных измерений и точных данных о таких состояниях.

В заключение этого раздела, на основе вышеизложенного можно сказать, что если решение краевых задач (1.70)–(1.75) существует, то оно единственно.

1.4.2. Динамические задачи

Если внешние силы, действующие на упругое тело меняются во время процесса нагружения, тогда изменение полей напряжений и деформаций во времени необходимо учитывать в дополнение к их пространственному распределению. В этом случае, напряжения $\sigma(t, x)$, деформации $\varepsilon(t, x)$ и перемещения $u(t, x)$ зависят не только от пространственных координат x , а также от временной координаты t . Функции плотности объемной силы $f(t, x)$, поверхностная нагрузка $q(t, x)$, а также вектор граничных перемещений $u(t, x)$ могут меняться в динамических процессах. Даже в отсутствие внешней нагрузки, колебания могут быть возбуждены в теле, которое изначально находилось в неравновесном состоянии. Описание экспериментальных подходов определения динамических характеристик конструкций можно найти, например, в [16].

В динамической формулировке задач линейной упругости, кинематические уравнения (1.71), определяющие соотношения (1.72) и граничные условия (1.73)–(1.75) остаются в том же виде, как и для статического случая в то время как дополнительный член (сила инерции), который определяется объемной плотностью ρ упругого материала и ускорением точек тела, должен быть добавлен к уравнению равновесия (1.70).

Динамическое уравнение равновесия имеет вид

$$\nabla \cdot \sigma - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(t, x) = 0. \quad (1.80)$$

Начальные условия на перемещения и скорости точек тела

$$u(0, x) = u^0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = v^0(x), \quad (1.81)$$

должны быть заданы для завершения формулировки. Здесь u^0 и v^0 – вектор-функции начального смещения и скорости соответственно.

Также как и уравнения Навье для статики, динамические уравнения движения можно также записать в перемещениях u . С помощью условий (1.71), (1.72) и (1.80) это уравнение можно представить в виде

$$\nabla \cdot C : \varepsilon(u) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(t, x) = 0. \quad (1.82)$$

В дальнейшем только гармонические колебания упругих тел будут рассматриваться. Отметим, что для данного типа движений применим метод разделения пространственных и временных переменных. Это означает, что неизвестные функции, а также внешние нагрузки и граничные перемещения могут быть представлены, например, таким образом

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(x) \sin \omega t, & \sigma &= \tilde{\sigma}(x) \sin \omega t, & \varepsilon &= \tilde{\varepsilon}(x) \sin \omega t, \\ f &= \tilde{f}(x) \sin \omega t, & \bar{q}_i &= \tilde{q}_i(x) \sin \omega t, & \bar{u}_i &= \tilde{u}_i(x) \sin \omega t, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1.83)$$

где ω является частотой колебаний. Если анализируются вынужденные колебания, то все неизвестные переменные определяются гармоническими внешней нагрузкой и граничными смещениями с заданной частотой. В противном случае рассматривается задача на собственные значения для описания свободных колебаний некоторого тела ($F = q_{0,1} = u_{0,1} = 0$).

После подстановки выражений (1.83) в формулы (1.71)–(1.75), (1.82) и исключения зависящих от времени членов $\sin \omega t$, динамическое уравнение равновесия для гармонического движения приводится к виду

$$\nabla \cdot \sigma + \rho(x) \omega^2 u + f(x) = 0. \quad (1.84)$$

Здесь знак "Гильда" опущен для простоты. Тогда в этой формулировке кинематические и определяющие соотношения (1.71), (1.72) с граничными условиями (1.73)–(1.75) не меняют своей формы.

1.5. Упрощенные модели

Для получения приближенных решений в теории упругости разработано большое количество приближенных моделей, к которым можно отнести стержни, струны, балки, пластины, оболочки. Об основных положениях таких теорий можно познакомиться в книгах [11], [13], [20], [28], [29], [68], [69], [85], [90], [95], [97], [98], [115], [116], [164], [173], [174], [196], [201], [202], [203].

1.5.1. Упругие стержни и струны

В качестве примера простейших механических систем с распределенными параметрами рассмотрим прямолинейный упругий стержень с переменным сечением, как показано на Рис. 1.2.

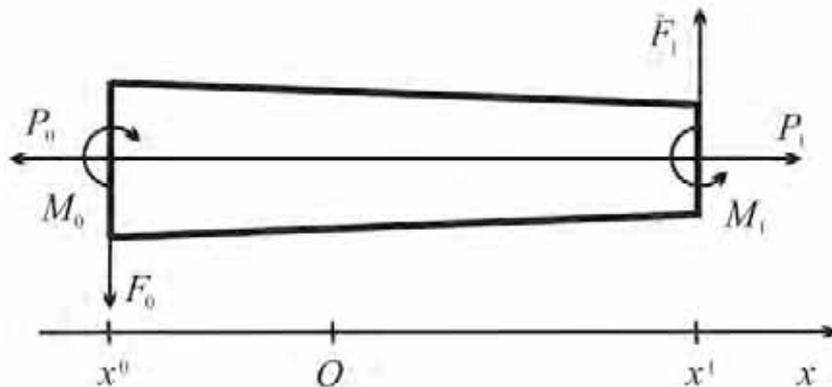


Рис. 1.2. A rectilinear elastic rod (beam) with a variable cross section.

Введем координатную ось x направленную вдоль средней линии стержня с начальной точкой O . Считается, что характерный размер сечения стержня значительно меньше, чем его длина. Все боковые смещения этого упругого тела игнорируются и деформированное состояние стержня описывается только функцией перемещений $u(X)$. Координата X точки стержня в недеформированном состоянии и координаты $x(X)$ этой точки в деформированном состоянии связаны соотношением

$$x(X) = X + u(X).$$

Если напряженно-деформированное состояние стержня описывается координатой x , то это описание Эйлера, в противном случае система определяется координатой Лагранжа X . В дальнейшем, функция перемещений u и ее производные относительно этих пространственных координат предполагаются малыми. Поэтому оба эти описания, как было показано в разделе 1.2., эквивалентны друг другу. Таким образом, координата x может быть выбрана в качестве единственной переменной.

Пусть $E(x) > E_0 > 0$ – модуль Юнга, $A(x) > A_0 > 0$ – площадь поперечного сечения стержня, $f(x)$ – линейная плотность внешних сил, $\kappa(x)$ – модуль упругого основания, $\kappa^{0,1}$ – коэффициенты упругой опоры на концах стержня.

Считается, что в отсутствие деформации, стержень занимает открытый отрезок

$$\Omega = \{x : x \in (x^0, x^1)\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что система координат выбрана так, что $x^0 = 0$. В этом случае, значение x^1 определяет длину стержня.

В данном случае неизвестными функциями, которые должны быть найдены, являются продольные перемещения $u(x)$, внутренние нормальные напряжения $\sigma(x)$, действующие в сечениях стержня, и нормальные деформации $\varepsilon(x)$.

Точно так же как и для трехмерной линейной теории упругости, одномерные соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние упругого стержня можно условно разделить на три группы:

а) кинематическое соотношение

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad x \in \Omega; \quad (1.85)$$

b) определяющее соотношение (закон Гука)

$$\sigma = E(x)\varepsilon, \quad x \in \Omega; \quad (1.86)$$

с) уравнение равновесия

$$\frac{d}{dx} (A(x)\sigma) - \kappa(x)u + f(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1.87)$$

Выражая функции напряжения и деформации через перемещение u по формулам (1.85) и (1.86), получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{du}{dx} \right) - \kappa(x)u + f(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1.88)$$

По аналогии с предыдущим разделом, граничные условия на концах стержня $x = x_0$ и $x = x_1$ можно разделить на три типа

a) Условия Дирихле

$$u(x^0) = u_0, \quad u(x^1) = u_1; \quad (1.89)$$

b) Условия Неймана

$$-A(x^0)\sigma(x^0) = P_0, \quad A(x^1)\sigma(x^1) = P_1; \quad (1.90)$$

с) упругая заделка

$$A(x^0)\sigma(x^0) - \kappa_0 u(x^0) = -P_0, \quad A(x^1)\sigma(x^1) + \kappa_1 u(x^1) = P_1. \quad (1.91)$$

Здесь u_0 и u_1 – некоторые фиксированные смещения концов, P_0 и P_1 – заданные силы. Отметим, что это всегда возможно положить $u_0 = 0$. При этом граничные силы P_0 , P_1 должны быть совместны и связаны друг с другом

через интегральный баланс сил

$$P_0 + P_1 + \int_{x^0}^{x^1} (f - \kappa u) dx = 0. \quad (1.92)$$

Только одно граничное условие из трех типов, представленных в уравнениях (1.89)–(1.91) можно задать на каждом конце стержня. В результате девять различных краевых задач могут быть сформулированы.

Рассмотрим также динамическую модель упругого стержня при заданных внешних нагрузках. В этом случае, напряжения $\sigma(t, x)$, деформации $\varepsilon(t, x)$ и перемещения $u(t, x)$ являются функциями временной координаты t и пространственной координаты x . Линейная плотность внешней силы $f(t, x)$, граничные перемещения $u_{0,1}(t)$ и напряжения $P_{0,1}(t)$ могут также измениться в ходе процесса.

С учетом сил инерции, статические уравнения равновесия (1.87) преобразуется в уравнение в частных производных

$$A(x)\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (A(x)\sigma) + \kappa(x)u = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > t_0. \quad (1.93)$$

Здесь ρ является объемной плотностью материала стержня. Кинематическое уравнение (1.85) также преобразуется в уравнение в частных производных

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.94)$$

Уравнение состояния (1.86), а также граничные условия (1.89)–(1.91) остаются в прежнем виде.

Для того чтобы завершить формулировку начально-краевой задачи, необходимо добавить начальные условия на перемещения и скорости точек стержня:

$$u(t_0, x) = u^0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = v^0(x), \quad (1.95)$$

где u^0 и v^0 – некоторые начальные смещения и скорости, соответственно. В этой линейной системе, начальный момент времени t_0 может быть выбран равным нулю без ограничения общности.

Окончательное уравнение движения упругого стержня в перемещениях $u(t, x)$ имеет следующий вид:

$$A(x)\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x)E(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \kappa(x)u = f(x, t). \quad (1.96)$$

Если рассматриваются гармонические колебания упругого стержня, то все неизвестные функции, а также заданная внешняя нагрузка и граничные перемещения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(x) \sin \omega t, & \sigma &= \tilde{\sigma}(x) \sin \omega t, & \varepsilon &= \tilde{\varepsilon}(x) \sin \omega t, \\ f &= \tilde{f}(x) \sin \omega t, & q_{0,1} &= \tilde{q}_{0,1} \sin \omega t, & u_{0,1} &= \tilde{u}_{0,1} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1.97)$$

где ω – либо заданная частота вынужденных колебаний либо неизвестная частота собственных колебаний если $f = q_{0,1} = u_{0,1} = 0$.

После подстановки выражений (1.97) в уравнения (1.86), (1.93), (1.94) и опуская знак ‘тильда’, управляющие уравнения гармонических колебаний стержня есть

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad x \in \Omega; \quad (1.98)$$

$$\sigma = E(x)\varepsilon, \quad x \in \Omega; \quad (1.99)$$

$$\frac{dA(x)\sigma}{dx} + (A\rho(x)\omega^2 - \kappa(x))u = -f(x), \quad x \in \Omega \quad (1.100)$$

при некоторых из девяти типов граничных условий (1.89)–(1.91). Константы $u_{0,1}$ и $P_{0,1}$ – известные амплитуды конечных перемещений и сил соответственно. Начальных условий не требуется для этой краевой задачи.

Стоит отметить, что подобная система уравнений описывает линейное поведение упругой нити. В модели струны, функция u является боковым сме-

щением, ε – угол наклона струны, а σ является проекцией натяжения струны на ось, нормальную к недеформированной линии струны.

Еще одним полезным упрощением трехмерной линейной теории упругости, которое имеет широкое применение в машиностроении, является модель кручения упругого стержня. Пусть ось x вновь направлена вдоль средней линии тонкого прямолинейного стержня с постоянным поперечным сечением. В этой модели [95] предполагается, что боковые смещения должны иметь определенную форму

$$u_y = z\theta(x), \quad u_z = -y\theta(x), \quad (1.101)$$

где θ является углом поворота сечения вокруг оси x , y и z являются боковыми координатами.

Продольные перемещения

$$u_x = \psi(y, z) \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (1.102)$$

определяют деформацию сечения стержня и, как следствие, касательные напряжения σ_{12} и σ_{13} . Функция ψ получается, как решение уравнений в частных производных относительно координат y и z при специальных граничных условиях, вытекающих из кинематических и равновесных соотношений линейной упругости. В предположении, что функция деформации ψ достаточно мала и угол θ меняется незначительно вдоль оси x , то величина этого угла может быть получена из следующей системы уравнений:

$$\varepsilon = \frac{d\theta}{dx}, \quad M = kGJ_r\varepsilon, \quad \frac{dM}{dx} = 0, \quad x \in (x^0, x^1). \quad (1.103)$$

В этой модели, угол $\theta(x)$ является неизвестной функцией, $M(x)$ – крутящий момент в сечении, коэффициент кручения J_R является специфическим для выбранной формы сечения стержня, произведение kGJ_r называется кру-

тильной жесткостью, K это корректирующий коэффициент. Различные граничные условия аналогичные тем, которые заданы формулами (1.89)–(1.91) могут быть также введены здесь

$$\theta(x^0) = \theta_0, \quad \theta(x^1) = \theta_1; \quad (1.104)$$

$$M(x^0) = M_0, \quad M(x^1) = M_1; \quad (1.105)$$

$$M(x^0) + \kappa_0\theta(x^0) = M_0, \quad M(x^1) + \kappa_1\theta(x^1) = M_1 \quad (1.106)$$

с заданными перемещениями $\theta_{0,1}$, крутящим моментом $M_{0,1}$, и угловыми коэффициентами пружин $\kappa_{0,1}$ на концах стержня x^0 и x^1 .

1.5.2. Модели балок

Балочная теория Бернулли основана на интуитивных гипотезах, которые были предложены Д. Бернулли в конце 17-го века. Он предположил, что плоское поперечное сечение балки, которое было нормальным к срединной линии балки до деформации остается плоским и нормальным к этой линии после деформации. Кроме того, подразумевается, что сечение мало деформируется при нагружении балки.

Эта теория занимает важное место среди упрощенных теории в механике деформируемого твердого тела [28]. Несмотря на то, что балочная теория применима для широкого класса технических проблем, она не учитывает такие важные механические характеристики упругих конструкций, как сдвиг и анизотропные свойства материала. Качественные формулы учитывающие влияние коэффициента Пуассона были предложены для статических (балка Тимошенко) и динамических задач (поправка Рэлея, см. [88]). В модели разработанной Рейсснером в [174] вариационный подход используется для описания изгиба тонкой пластины (балки) в соответствии с априори фиксированными базисными функциями, аппроксимирующими поля перемещений. Та-

кие аппроксимации были применены в теории упругих балок для получения совместных уравнений более высокого порядка с учетом пространственного распределения перемещений и напряжений в удлиненных упругих телах [163].

Рассмотрим плоский изгиб прямолинейной балки с поперечным сечением симметричным относительно двух взаимно перпендикулярных прямых. Одна из этих линий находится в плоскости изгиба. Ось x направлена вдоль центральной линии балки.

Если функция $w(x)$ определяет малые боковые смещения центральной линии, то согласно гипотезам Бернулли, которые упоминались выше, продольное перемещение $u(x, z)$ точек поперечного сечения балки является линейной функцией координаты z (ось z параллельна плоскости изгиба) и имеет вид

$$u(x, z) = -\frac{dw(x)}{dx}z. \quad (1.107)$$

Только переменная $w(x)$ (перемещение) представлена в этой модели. Эта функция связана с нормальной составляющей напряжения в соответствии с

$$\varepsilon(x, z) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2}z. \quad (1.108)$$

Изгибающий момент $\mu(x)$ находится путем интегрирования линейного момента от этой функции деформаций по сечению балки

$$\mu(x) = -E(x) \iint_A \varepsilon(x, z)z^2 dydz = E(x)J(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad (1.109)$$

где J момент инерции поперечного сечения. Ось y (см. формулу (1.109)) ортогональна плоскости изгиба. После введения сдвиговой силы

$$F(x) = -\frac{d\mu(x)}{dx}, \quad (1.110)$$

баланс внутренних сил упругости и внешней нагрузки в поперечном направ-

лении z может быть выражен через изгибающий момент $\mu(x)$ и боковое смещение $w(x)$ в виде

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} + \kappa(x)w = f(x). \quad (1.111)$$

Здесь введены коэффициент упругого основания κ и плотность распределенной поперечной нагрузки f соответственно. После подстановки момента μ из уравнения (1.109) в формулу (1.111) уравнение балки примет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) + \kappa(x)w = f(x). \quad (1.112)$$

Для завершения формулирования краевой задачи, необходимо, чтобы по два граничных условия были заданы на каждом конце балки $x = x^{0,1}$.

Также как и для случая продольного нагружения упругого стержня, описанного в предыдущем пункте, здесь граничные условия либо в перемещениях

$$w(x^0) = w_0, \quad w(x^1) = w_1 \quad (1.113)$$

либо в перерезывающих силах

$$F(x^0) = F_0, \quad F(x^1) = F_1 \quad (1.114)$$

могут быть заданы (см. Рис. 1.2). Кроме того, условия на углы наклона

$$\alpha = \frac{dw(x)}{dx} \quad (1.115)$$

центральной линии балки в этих точках

$$\alpha(x^0) = \alpha_0, \quad \alpha(x^1) = \alpha_1 \quad (1.116)$$

или на сосредоточенные изгибающие моменты

$$\mu(x^0) = M_0, \quad \mu(x^1) = M_1 \quad (1.117)$$

могут быть поставлены.

Полезным обобщением этих граничных условий является учет боковых и угловых упругих опор:

$$F(x^0) = \kappa_w^0 w(x^0) + F_0, \quad F(x^1) = -\kappa_w^1 w(x^1) + F_1 \quad (1.118)$$

и

$$\mu(x^0) = \kappa_\alpha^0 w(x^0) + M_0, \quad \mu(x^1) = -\kappa_\alpha^1 w(x^1) + M_1, \quad (1.119)$$

соответственно. Здесь $\kappa_w^{0,1}$ и $\kappa_\alpha^{0,1}$ – заданные коэффициенты упругости этих опор.

Если в рамках модели Бернулли рассматриваются изгибные движения упругой балки, то для получения дифференциального уравнения ее движения необходимо учесть боковые силы инерции

$$A(x)\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x)J(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \kappa(x)w = f(t, x). \quad (1.120)$$

При этом инерция вращения поперечного сечения балки не принимается во внимание.

Чтобы завершить описание движения балки, как и для модели упругого стержня, описанной в предыдущем пункте, необходимо задать ее начальное состояние через распределения боковых перемещений и начальных скоростей точек балки

$$w(0, x) = w^0(x), \quad v(0, x) = v^0(x), \quad v(t, x) = \frac{\partial w(t, x)}{\partial t}. \quad (1.121)$$

В случае гармонических колебаний упругой балки, неизвестные функции

перемещений, изгибающих моментов, и деформаций могут быть представлены в виде

$$w = \tilde{w}(x) \sin \omega t, \quad \mu = \tilde{\mu}(x) \sin \omega t, \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon}(x) \sin \omega t, \quad (1.122)$$

соответственно, где ω – частота колебаний балки. Опуская знак "тильда" результирующими уравнениями, описывающими гармонические движения, являются кинематические и определяющие соотношения (1.108), (1.109), а также новое уравнение динамического равновесия

$$\frac{d^2 \mu}{dx^2} - (A\rho(x)\omega^2 - \kappa(x)) w = f(x) \quad (1.123)$$

при учете некоторых четырех из двенадцати граничных условий (1.113), (1.114), (1.116)–(1.119).

1.5.3. Мембраны

Двумерным аналогом линейной модели струны, описываемом в этом разделе, является модель упругой мембраны. С теоретической точки зрения, мембрана представляет собой гибкую, бесконечно тонкую пластину однородно растягиваемую во всех направлениях такими большими напряжениями, что эти растяжения не изменяются существенно при поперечном нагружении или движениях точек мембраны. В линейном приближении упругая потенциальная энергия мембраны считается пропорциональной отношению ее поверхности.

Пусть декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ фиксирована в трехмерном пространстве и недеформированная мембрана занимает некоторую плоскую область $\Omega \subset \{x_1, x_2, 0\}$ с границей Γ (см. Рис. 1.3). Это означает, что срединная поверхность мембраны лежит в плоскости $x_3 = 0$.

В приложениях область Ω можно рассматривать как криволинейный мно-

гоугольник с конечным числом n вершин A_j , $j = 0, \dots, n$, $A_0 = A_m$. Предполагается, что многоугольник Ω является открытой, ограниченной и связанной областью, так что

$$\Gamma = \partial\Omega = \bigcup_{j=1}^n \bar{\Gamma}_j,$$

где Γ_j является открытой аналитической плоской кривой

$$\Gamma_j = \{x_1 = \varphi_j(\xi), \quad x_2 = \psi_j(\xi), \quad \xi \in I = (-1, 1)\}$$

с некоторыми аналитических функций φ_j и ψ_j , заданными на замкнутом отрезке \bar{I} . Эти функции удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{d\varphi_j}{d\xi} \right|^2 + \left| \frac{d\psi_j}{d\xi} \right|^2 \geq c > 0.$$

Если обе φ_j и ψ_j являются линейными функциями ξ , тогда Γ_j является открытым линейным отрезком. Там, где эта линейность выполняется для каждого $j = 1, \dots, m$, область Ω представляет собой обычный многоугольник.

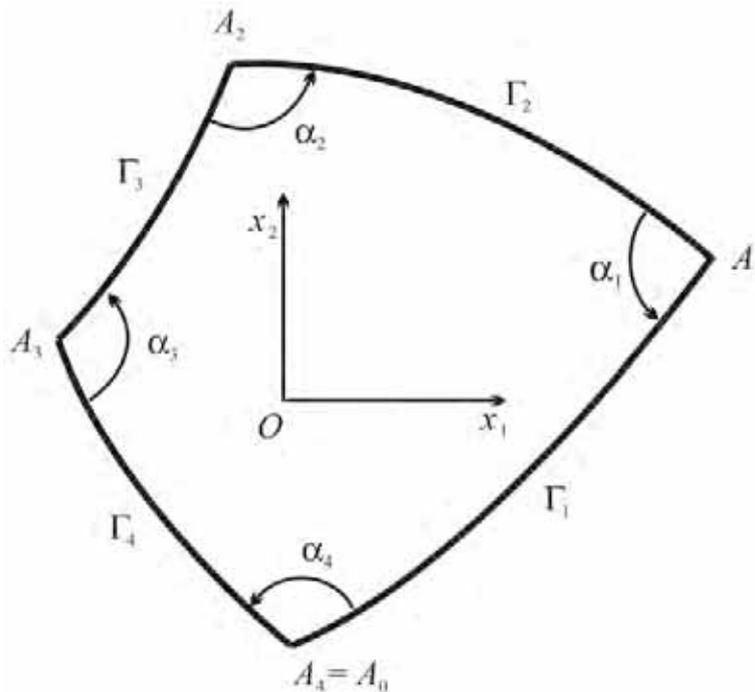


Рис. 1.3. Криволинейная многоугольная область Ω .

Внутренний угол α_j при вершине A_j определяется кривыми Γ_j и Γ_{j-1} . Предполагается, что этот угол ориентирован, как это показано на Рис. 1.3 и справедливо следующее неравенство: $0 < \alpha_j < 2\pi$. Этот случай соответствует области с липшицевой границей.

Только (сравнительно небольшие) боковые смещения $w(x_1, x_2)$ мембраны являются допустимыми в линейной модели. Отметим, что в статическом случае, внешняя сила с плотностью f распределенная по поверхности мембраны может быть компенсирована только внутренними упругими напряжениями. Тогда уравнение статики для мембраны может быть записано в виде

$$\tau \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = f(x). \quad (1.124)$$

Константа τ для изотопного мембраны называется коэффициентом натяжения мембраны.

Определяющее соотношение между физическими и геометрическими параметрами может быть получено путем введения вектор-функции $\sigma = \{\sigma_1(x_1, x_2), \sigma_2(x_1, x_2)\}^T$ в соответствии с

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{h} \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \sigma_2 = \frac{\tau}{h} \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad (1.125)$$

где $h(x_1, x_2)$ является толщиной мембраны. Функции σ_1 и σ_2 являются проекциями соответствующих напряжений вдоль осей x_1 и x_2 на боковую ось x_3 .

Как и для модели упругой струны в разделе 1.5.1., вектор деформаций может быть составлен следующим образом

$$\varepsilon = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\}^T. \quad (1.126)$$

После этого, два скалярных уравнения в уравнении (1.125) могут быть пере-

писаны в векторной форме

$$\sigma = \frac{\tau}{h} \varepsilon. \quad (1.127)$$

С помощью соотношений (1.125) и (1.127) статическое уравнения (1.124) выражается через вектор напряжения

$$\nabla \cdot (h(x_1, x_2)\sigma) + f(x_1, x_2) = 0. \quad (1.128)$$

Для того чтобы задать граничные условия, ограничимся случаем, когда граница области Ω является объединением трех различных частей $\Gamma = \bar{\Gamma}^{(1)} \cup \bar{\Gamma}^{(2)} \cup \bar{\Gamma}^{(3)}$. Каждая из этих частей состоит из набора кривых Γ_j , которые не пересекаются друг с другом ($\bar{\Gamma}^{(j)} \cap \bar{\Gamma}^{(k)} = \emptyset$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, 3$). На границе каждого из сегментов $\bar{\Gamma}^{(1)}$, $\bar{\Gamma}^{(2)}$ и $\bar{\Gamma}^{(3)}$ могут быть поставлены следующие условия Дирихле, Неймана и Винклера соответственно:

а) в перемещениях

$$w = w_0(x_1, x_2), \quad \{x_1, x_2\} \in \Gamma^{(1)}; \quad (1.129)$$

б) в напряжениях

$$n(x_1, x_2) \cdot \sigma = q_0(x_1, x_2), \quad \{x_1, x_2\} \in \Gamma^{(2)}; \quad (1.130)$$

в) как упругое опирание

$$n(x_1, x_2) \cdot \sigma - \kappa(x_1, x_2)w = q_0(x_1, x_2), \quad \{x_1, x_2\} \in \Gamma^{(3)}. \quad (1.131)$$

Здесь w_0 и q_0 – некоторые заданные функции граничных смещений и боковых напряжений, n – единичная внешняя нормаль к границе Γ , $\kappa > 0$ – коэффициент упругого опирания.

В динамическом случае силы инерции должны быть добавлены к форму-

ле (1.124):

$$h\rho(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \tau \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = f(t, x_1, x_2) \quad (1.132)$$

с объемной плотностью ρ зависящей от координат x_1 и x_2 .

Так же, как и во всех предыдущих примерах этого раздела, начальные условия на перемещения и скорости

$$\begin{aligned} w(0, x_1, x_2) &= w^0(x_1, x_2), & v(0, x_1, x_2) &= v^0(x_1, x_2), \\ v(t, x_1, x_2) &= \frac{\partial w(t, x_1, x_2)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.133)$$

должны быть введены, чтобы корректно сформулировать начально-краевую задачу.

Соответственно, уравнение гармонических колебаний для упругой мембраны может быть получено на основе метода разделения переменных в виде

$$h\rho(x_1, x_2) \omega^2 w + \tau \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = -f(x_1, x_2). \quad (1.134)$$

Здесь $w(x_1, x_2)$ – амплитуда колебания мембраны, ω – либо заданная частота вынужденных движений либо частота собственных колебаний. Уравнение в частных производных (1.134) и граничные условия (1.129)–(1.131) совместны друг с другом в задаче на собственные значения только если $f = w_0 = q_0 = 0$.

1.5.4. Плоское напряженное и плоское деформированное состояния

Частный случай, имеющий большое практическое значение, называется плоским напряженным состоянием упругого тела. Считается, например, что, все компоненты тензора напряжений $\sigma_{iz}(x)$, $i = 1, 2, 3$, действующих вдоль оси x_3 равны нулю.

В приложениях, это состояние может реализоваться, например, когда

один размер тела намного меньше, чем два других. Эта модель также применима, если $\sigma_{i3}(x)$ мала по сравнению с другими напряжениями. Отличны от нуля только компоненты σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} и первоначальная пространственная задача теории упругости сводится к двумерной. В этом случае тензор напряжений может быть представлен в матричной форме

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.135)$$

В свою очередь, тензор деформации также упрощается, и, например, для изотропного материала закон Гука может быть выражен как

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \\ -\nu & -\nu & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (1.136)$$

В этом случае компонента ε_{33} не равна нулю из-за коэффициента Пуассона. Однако, эта функция может быть исключена из основных уравнений, поскольку она не оказывает влияния на величину упругой энергии. Тогда, обратный закон Гука можно записать в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}. \quad (1.137)$$

Еще одним интересным случаем является так называемое плоское деформированное состояние. Все компоненты тензора деформации $\varepsilon_{iz}(x)$, $i = 1, 2, 3$, как предполагается равны нулю. Это может произойти, например, из-за специфических ограничений на перемещения и/или большого размера упругой конструкции в этом направлении. Тогда тензор деформации можно записать в виде

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.138)$$

По аналогии с плоским напряженным состоянием, только четыре компоненты напряжений не являются тривиальными:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \\ \nu & \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.139)$$

Нормальное напряжение σ_{33} должно быть исключено, что бы привести пространственную задачу к плоской. При этом соотношения закона Гука имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.140)$$

В задачах с плоским напряженным или плоским деформированном состояниях, координаты, а также вектор перемещений имеют только две со-

ставляющие $x = \{x_1, x_2\}^T$ и $u = \{u_1, u_2\}^T$ соответственно. Равенство нулю вектора равновесия и тензорного кинематического соотношения, введенных в разделе 1.4., остается неизменным.

1.6. Классические вариационные подходы

1.6.1. Энергетические соотношения

Понятия работы и энергии играют центральную роль в механике. Механическая работа и энергия связаны друг с другом, например, внешние силы, могут совершить некоторую работу W и изменить энергию системы, и наоборот, система может потратить часть накопленной энергии для совершения работы. Понятие энергии является основным для различных методов механики сплошных сред. Все энергетические принципы взаимосвязаны друг с другом, так как они основаны на фундаментальных законах механики.

Известно, что принцип виртуальной работы является основой для вариационных формулировок задач статики в случае конечного числа материальных точек под действием внутренних и внешних сил. Суть принципа состоит в том, что виртуальная работа δW совершаемая всеми силами, приложенными к конечномерной механической системе при заданных геометрических ограничениях равна нулю вдоль любого допустимого виртуального перемещения, если система находится в состоянии равновесия. Тот же принцип можно сформулировать и по-другому: если $\delta W = 0$ на любых бесконечно малых виртуальных перемещениях, которые удовлетворяют заданные геометрические ограничения, то механическая система находится в равновесии. Таким образом, принцип виртуальной работы эквивалентен уравнениям равновесия системы.

Как было показано в разделе 1.3., плотность энергии деформации в теории упругости $U(\varepsilon)$ является потенциалом напряжений и плотность дополнительной энергии $U_c(\sigma)$ соответствует потенциалу деформаций. Следующее

соотношение

$$U(\varepsilon) + U_c(\sigma) = \sigma : \varepsilon \quad (1.141)$$

между функциями U и U_c справедливо как в линейном так и в нелинейном случаях. При этом плотность упругой энергии U зависит только от компонент тензора деформаций ε , в то время как плотность энергии напряжений U_c является функцией компонент напряжений.

Для линейного упругого материала, значения $U(\varepsilon)$ и $U_c(\sigma)$ соответствующие точному решению задачи линейной упругости совпадают друг с другом и, таким образом, справедлива теорема Клапейрона

$$U(\varepsilon) = U_c(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon. \quad (1.142)$$

Учитывая кинематические уравнения (1.43) и связь между напряжениями и деформациями (1.68), выражение для плотности энергии U для изотропного материала может быть представлено с помощью частных производных от компонент вектора перемещения U следующим образом

$$\begin{aligned} U(u) = & \frac{G\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \\ & + G \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\ & + \frac{G}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.143)$$

С учетом обратной формы закона Гука (1.69) удельная дополнительная

энергии деформации U_c может быть задана следующим образом

$$U_c(\sigma) = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + 2(1 + \nu) (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33}) \right]. \quad (1.144)$$

1.6.2. Прямые принципы

Рассмотрим упругое тело, которое находится в состоянии равновесия под действием объемной силы с плотностью $f(x)$ и поверхностной нагрузки

$$\bar{e}_i(x) \cdot \sigma \cdot n = \bar{q}_i(x) \quad \text{at} \quad x \in \Gamma_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3$$

в то время как компоненты вектора перемещения $\bar{e}_i(x) \cdot u = \bar{u}_i(x)$ заданы на части $\Gamma_i^{(1)}$ границы Γ . В этой формулировке $\bar{\Gamma}_i^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_i^{(2)} = \Gamma$ или, другими словами, $\Gamma_i^{(3)} = \emptyset$ для $i = 1, 2, 3$ в соответствии с обозначениями, введенными в главе 1. Стоит отметить, что $\bar{e}_i(x)$ являются ортами, заданными на границе тела. Если бесконечно малые виртуальные перемещения представить в виде вектора

$$\delta u = \{\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3\}^T$$

тогда после вычисления общей работы всех сил получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 \right) \delta u_1 \right. \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 \right) \delta u_2 \\ & \left. + \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 \right) \delta u_3 \right] d\Omega + \int_{\Gamma} (n \cdot \sigma - q) \cdot \delta u d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.145)$$

Здесь $d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3$ и $d\Gamma$ – элементарные объем и площадь соответственно; $q(x)$ является внешней нагрузкой, действующей на поверхности тела.

Принимая во внимание, что все допустимые виртуальные перемещения не нарушают граничные условия в перемещениях, то есть

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u = 0, \quad x \in \Gamma_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.146)$$

тогда можно применить теорему Гаусса о дивергенции к объемному интегралу в уравнении (1.145):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33}) \\ & + 2(\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\delta\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\delta\varepsilon_{23})] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (f_1(x)\delta u_1 + f_2(x)\delta u_2 + f_3(x)\delta u_3) d\Omega \\ & - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}_1^{(i)}(x)\delta u_1 + \bar{e}_2^{(i)}(x)\delta u_2 + \bar{e}_3^{(i)}(x)\delta u_3 \right) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.147)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{11} &= \frac{\partial\delta u_1}{\partial x_1}, \quad \delta\varepsilon_{22} = \frac{\partial\delta u_2}{\partial x_2}, \\ \delta\varepsilon_{33} &= \frac{\partial\delta u_3}{\partial x_3}, \quad \delta\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\delta u_1}{\partial x_2} \right), \\ \delta\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial\delta u_1}{\partial x_3} \right), \quad \delta\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial\delta u_2}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (1.148)$$

Выражение (1.147) является сутью принципа виртуальной работы. Можно показать, что подынтегральное выражение в первом объемном интеграле в формуле (1.147) является первой вариацией плотности энергии деформации

U если компоненты тензора напряжений σ выражены через деформации ε . Тогда уравнение (1.147) можно переписать в виде

$$\delta \int_{\Omega} U(u) d\Omega - \int_{\Omega} f(x) \cdot \delta u d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u \right) d\Gamma = 0. \quad (1.149)$$

Это уравнение называется расширенным принципом виртуальной работы.

Если предположить, что объемные и поверхностные силы потенциальны, то существует функционал, называемый полной потенциальной энергией тела

$$\Pi = \int_{\Omega} [U(u) + I(u)] d\Omega + \int_{\Gamma} J(u) d\Gamma. \quad (1.150)$$

Вариации потенциалов I и J объемных и поверхностных сил соответственно, в формуле (1.150) определяются следующими выражениями:

$$-\delta I = f \cdot \delta u, \quad x \in \Omega; \quad (1.151)$$

$$\delta J = n \cdot \sigma \cdot \delta u, \quad x \in \Gamma. \quad (1.152)$$

Тогда, принцип (1.149) можно переформулировать:

Теорема 1.2. *Статическое состояние равновесия упругого тела гарантирует стационарное значение его потенциальной энергии*

$$\delta \Pi[u] = 0. \quad (1.153)$$

Если распределение объемных сил f и граничных напряжений \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ фиксировано и при варьировании их величины и направления не изменяются, то соответствующие потенциалы могут быть найдены в явном виде

$$-I = f(x) \cdot u, \quad (1.154)$$

$$J = \sum_{i=1}^3 J_i, \quad -J_i = \begin{cases} \bar{q}_i(x) (\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u) & x \in \Gamma_i^{(2)} \\ 0 & x \notin \Gamma_i^{(2)} \end{cases}. \quad (1.155)$$

Для такого рода нагружения, можно сформулировать принцип минимума полной потенциальной энергии:

Теорема 1.3. *Среди всех возможных перемещений упругого тела, действительные перемещения обеспечивают минимальное значение полной потенциальной энергии Π*

$$\Pi[u^*] = \min_u \Pi[u]. \quad (1.156)$$

Доказательство. Обозначим векторы допустимых и действительных перемещений как u и u^* соответственно, с отношениями $u_i = u_i^* + \delta u_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда можно разложить потенциальную энергию $\Pi[u]$ относительно перемещений u

$$\Pi[u] = \Pi[u^*] + \delta\Pi[u^*, \delta u] + \delta^2\Pi[\delta u], \quad (1.157)$$

где $\delta\Pi$ и $\delta^2\Pi$ являются первой и второй вариацией функционала Π соответственно. Первая вариация линейна, тогда как вторая квадратичных относительно вариации δu и ее первых частных производных, а именно,

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} \left[\sigma_{11}^* \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22}^* \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} + \sigma_{33}^* \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3} \right. \\ & + \sigma_{12}^* \left(\frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} \right) + \sigma_{13}^* \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \right) \\ & \left. + \sigma_{23}^* \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_3} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} (f_1 \delta u_1 + f_2 \delta u_2 + f_3 \delta u_3) d\Omega \\ & - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i \left(\bar{e}_1^{(i)} \delta u_1 + \bar{e}_2^{(i)} \delta u_2 + \bar{e}_3^{(i)} \delta u_3 \right) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (1.158)$$

$$\delta^2\Pi = \int_{\Omega} U(\delta u) d\Omega, \quad (1.159)$$

где $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}(u^*)$, $i, j = 1, 2, 3$, являются компонентами действительных напряжений. Так как ограничения (1.146) наложенные на вариации δu_i и компоненты тензора напряжения $\sigma(u^*)$ должны точно удовлетворять линейным уравнениям упругости, то можно показать с учетом соотношения (1.145), что первая вариация $\delta\Pi$ обращается в нуль. Кроме того, поскольку плотность энергии $U(u)$ является неотрицательной функцией, то

$$\delta^2\Pi \geq 0. \quad (1.160)$$

В случае, когда положение и ориентация недеформированного тела фиксированы, например, $\Gamma_1^{(1)} \cap \Gamma_2^{(1)} \cap \Gamma_3^{(1)} \neq \emptyset$, то равенство в уравнении (1.160) имеет место только тогда, когда все три вариации δu_i , $i = 1, 2, 3$, тождественно равны нулю в области Ω . Таким образом, полная потенциальная энергия Π достигает своего абсолютного минимального значения на решение $u^*(x)$. \square

В соответствии с [190] это утверждение можно обобщить на случай Винклеровского основания (1.75), если $\Gamma_1^{(3)} \cup \Gamma_2^{(3)} \cup \Gamma_3^{(3)} \neq \emptyset$. В этом случае потенциальная энергия упругого основания выраженная в перемещениях должна быть добавлена к энергии Π , если $\bar{q}_i(x) = 0$ на $\Gamma_i^{(3)}$

$$\Pi^w = \Pi + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \frac{\kappa_i(x)}{2} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right)^2 d\Gamma. \quad (1.161)$$

Отметим, что общие вопросы вариационного исчисления и техники оптимального проектирования обсуждаются в [7] – [9], [18], [64], [87], [101], [103], [122], [123], [128], [157], [166].

1.6.3. Дополнительные принципы

С помощью функции плотности дополнительной энергии U_c , можно сформулировать вариационные принципы двойственные принципам виртуальной работы и минимума полной потенциальной энергии. Предположим, что упругое тело, нагруженное заданными внешними силами, находится в равновесном состоянии при смешанных ограничениях на границе Γ , т.е. $\Gamma_i^{(3)} = \emptyset$ при $i = 1, 2, 3$. Пусть напряжения σ_{ij} в теле претерпевают малые вариации $\delta\sigma_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Кинематические соотношения и условия в перемещениях на частях границы Γ_i^1 подчиняются интегральному уравнению

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\left(\varepsilon_{11} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \delta\sigma_{11} + \left(\varepsilon_{22} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \delta\sigma_{22} + \left(\varepsilon_{33} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \delta\sigma_{33} \right. \\ & + \left(2\varepsilon_{12} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \delta\sigma_{12} + \left(2\varepsilon_{yz} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \delta\sigma_{13} \\ & \left. + \left(2\varepsilon_{zx} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \delta\sigma_{23} \right] d\Omega \\ & + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u - \bar{u}_i \right) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta q \right) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (1.162)$$

с вариацией вектора внешней нагрузки $\delta q = \delta\sigma \cdot n$. После интегрирования по частям, это соотношение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon : \delta\sigma d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \delta\sigma \cdot u d\Omega - \int_{\Gamma} u \cdot \delta q d\Gamma \\ & + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u - \bar{u}_i \right) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta q \right) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Допустимые виртуальные напряжения подобраны так, чтобы они не на-

рушали векторное уравнение равновесия $\nabla \cdot \delta\sigma = 0$ и граничные условия

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta q = 0 \quad \text{at} \quad x \in \Gamma_i^{(2)} = \Gamma \setminus \Gamma_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда уравнение (1.163) приводится к виду

$$\int_{\Omega} \varepsilon : \delta\sigma d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \bar{u}_i \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta q \right) d\Gamma = 0. \quad (1.164)$$

С математической точки зрения интегральное соотношение (1.164) устанавливает принцип виртуальной дополнительной работы, который является справедливым для любых допустимых изменений напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия, и граничным условиям. Этот дополнительный принцип является двойственным теореме 1.2.

Можно видеть, что подинтегральное выражение в объемном интеграле из уравнения (1.164) является первой вариацией плотности дополнительной энергии $U_c(\sigma)$. Тогда верна следующая теорема:

Теорема 1.4. *Статическое состояние равновесия упругого тела гарантирует стационарное значение дополнительной энергии*

$$\delta\Pi_c[\sigma] = \delta \int_{\Omega} U_c(\sigma) d\Omega - \int_{\Gamma} u \cdot \delta\sigma \cdot n d\Gamma = 0. \quad (1.165)$$

Эта формулировка называется обобщенным принципом дополнительной виртуальной работы.

Принцип минимума полной дополнительной энергии в линейной теории упругости непосредственно вытекает из принципа дополнительной виртуальной работы в предположении, что функции граничных перемещений не меняются при любом изменении напряжений.

Теорема 1.5. *Среди всех допустимых напряжений упругого тела, действительные напряжения обеспечивают абсолютное минимальное значение*

ние полной дополнительной энергии

$$\Pi_c[\sigma^*] = \min_{\sigma} \Pi_c[\sigma]. \quad (1.166)$$

Здесь функционал

$$\Pi_c = \int_{\Omega} U_c(\sigma) d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \bar{u}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma \quad (1.167)$$

получается из уравнения (1.165) и тензора действительных напряжений, обозначенного как $\sigma^*(x)$. Доказательства этого принципа осуществляются по аналогии с теоремой 1.3. Они следуют из свойства положительности второй вариации

$$\delta^2 \Pi_c = \Pi_c(\delta\sigma) \geq 0.$$

Эта вариационная формулировка может быть распространена на задачи, где Винклеровское основание контактирует с упругим телом, т. е. $\Gamma_1^{(3)} \cup \Gamma_2^{(3)} \cup \Gamma_3^{(3)} \neq \emptyset$. Так же, как и для принципа минимума потенциальной энергии, дополнительная потенциальная энергия упругого основания, выраженная в напряжениях, должна быть добавлена к функционалу Π_c если $\bar{q}_i(x) = 0$ на $\Gamma_i^{(3)}$:

$$\Pi_c^w = \Pi_c + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \frac{1}{2\kappa_i(x)} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right)^2 d\Gamma. \quad (1.168)$$

1.7. Вариационные принципы в динамике

Так же как и в разделе 1.4., рассмотрим движение упругого тела, занимающего область Ω с кусочно-гладкой границей Γ . Если объемные силы распределены в этой области с плотностью $f(t, x)$, то уравнение движения

тела (1.82) может быть явно выражено через перемещения в соответствии с

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot C(x) : (\nabla u + \nabla u^T) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(t, x) = 0. \quad (1.169)$$

Предполагается, что орты $\bar{e}^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, 3$ фиксированы в каждой точке $x \in \Gamma$, где нормаль n существует. Кроме того, будем считать, что либо перемещение либо компоненты напряжений заданы на границе Γ как функции времени t и координаты x

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u - \bar{u}_i(t, x) = 0, \quad x \in \Gamma_i^{(1)}; \quad (1.170)$$

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n - \bar{q}_i(t, x) = 0, \quad x \in \Gamma_i^{(2)}, \quad (1.171)$$

где части $\Gamma_i^{(1)}$ и $\Gamma_i^{(2)}$ границы $\Gamma = \bar{\Gamma}_i^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_i^{(2)}$ не имеют пересечений $\Gamma_i^{(1)} \cap \Gamma_i^{(2)} = \emptyset$ для любого индекса $i = 1, 2, 3$.

По аналогии со статической вариационной формулировкой, принцип Гамильтона (см. [18]) для динамических краевых задач линейной упругости может быть получен с помощью понятия кинетической энергии тела

$$T = \int_{\Omega} K(u) d\Omega, \quad (1.172)$$

где

$$K = \frac{\rho(x)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (1.173)$$

это плотность кинетической энергии. Если действительные перемещения тела обозначить как $u(t, x)$ и некоторые произвольные виртуальные траектории вблизи действительного движения как δu , то изменение кинетической энергии $T(t)$ может быть задано как

$$\delta T = \int_{\Omega} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} d\Omega. \quad (1.174)$$

После умножения уравнений (1.169) и (1.171) на δu и интегрируя по области Ω и границе Γ , получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot C(x) : \varepsilon(u) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(t, x) \right] \cdot \delta u \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} [n \cdot C(x) : \varepsilon(u) - q] \cdot \delta u \, d\Gamma = 0, \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T). \end{aligned} \quad (1.175)$$

Отметим, что условие на первую вариацию

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u = 0 \quad (1.176)$$

граничных условий (1.170) выполняется в любой точке $x \in \Gamma_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$. После интегрирования уравнения (1.175) по частям и учитывая формулу (1.176), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \delta u \, d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon(u) : C(x) : \delta \varepsilon \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (f(t, x) \cdot \delta u) \, d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u \right) \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.177)$$

Видно, что интегрирование уравнения (1.177) на фиксированном интервале $t \in [t_0, t_1]$ не нарушает это равенство. Следовательно

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \delta u \, d\Omega dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \varepsilon(u) : C : \delta \varepsilon \, d\Omega dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (f(t, x) \cdot \delta u) \, d\Omega dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(t, x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u \right) \, d\Gamma dt = 0. \end{aligned} \quad (1.178)$$

Следующим шагом для получения динамического принципа является ин-

тегрирование по частям первого слагаемого в формуле (1.178) по времени t .
В результате получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\Omega} \delta K d\Omega - \int_{\Omega} \delta U d\Omega + \int_{\Omega} (f(t, x) \cdot \delta u) d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(t, x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u \right) d\Gamma \right\} dt \quad (1.179)$$

$$- \int_{\Omega} \left[\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \delta u \right]_{t=t_0}^{t=t_1} d\Omega = 0,$$

где обозначения δU и δK используются для вариаций плотности энергии деформации $U(u)$ и плотности кинетической энергии $K(u)$, заданные формулой (1.173) соответственно.

Если пространственно-временная краевая задача рассматривается при начальных и конечных перемещениях

$$u(t_0, x) = u^0(x), \quad u(t_1, x) = u^1(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.180)$$

то последний объемный интеграл в формуле (1.179) равен нулю

Если объемная плотность силы f и компоненты граничной нагрузки \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ не зависят от функции перемещений $u(t, x)$, то можно ввести, так же, как и в формуле (1.150) общую потенциальную энергию $\Pi(t)$ со следующими функциями

$$I = -f(t, x) \cdot u,$$

$$J = \sum_{i=1}^3 J_i, \quad J_i = \begin{cases} -\bar{q}_i(t, x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) & x \in \Gamma_i^{(2)} \\ 0 & x \notin \Gamma_i^{(2)} \end{cases}. \quad (1.181)$$

Тогда, вводя в рассмотрение функционал действия

$$H = \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt, \quad \Pi = \int_{\Omega} (U + I) d\Omega + \int_{\Gamma} J d\Gamma, \quad (1.182)$$

принцип виртуальной работы, даваемый формулой (1.153) для статического случая, можно обобщить на динамический случай в соответствии с

$$\delta H[u] = 0. \quad (1.183)$$

Таким образом, принцип Гамильтона гласит:

Теорема 1.6. Среди всех допустимых движений $u(t, x)$ упругого тела, которые удовлетворяют граничным условиям (1.170) и начальным, а также терминальным условиям (1.180), действительное движение $u^*(t, x)$ является стационарной точкой функционала H .

Отметим, что в соответствии с этим принципом, граничные условия в перемещениях (1.170) являются существенными и должны выполняться точно. Напротив, естественные граничные условия (1.171) могут быть учтены только интегрально как линейный член разложения относительно $u(t, x)$ в функционале H .

Также как и для статического случая, можно сформулировать еще одно вариационное утверждение, которое является дополнением к принципу Гамильтона. Считается, что условия (1.170), (1.171) заданы на границе тела и распределение скоростей

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.184)$$

зафиксировано в начале и в конце временного интервала $t \in [t_0, t_1]$ в соответствии с

$$v(t_0, x) = v^0(x), \quad v(t_1, x) = v^1(x). \quad (1.185)$$

Если функции дополнительной кинетической энергии $T_c(t)$ и дополнительной

потенциальной энергии $\Pi_c(t)$ существуют, где

$$T_c = \int_{\Omega} K_c(v) d\Omega, \quad K_c = \frac{\rho(x)v^2}{2},$$

$$\Pi_c = \int_{\Omega} U_c(\sigma) d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \bar{u}_i(t, x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma,$$
(1.186)

тогда следующий принцип для функционала

$$H_c[\sigma, v] = \int_{t_0}^{t_1} (T_c - \Pi_c) dt$$
(1.187)

может быть сформулирован:

Теорема 1.7. *Среди всех допустимых равновесных напряжений $\sigma(t, x)$ и скоростей $v(t, x)$ в упругом теле, которые удовлетворяют граничным условиям (1.171) и начальным, а также терминальным состояниям (1.185) действительное решение $\sigma^*(t, x)$ и $v^*(t, x)$ является стационарной точкой функционала H_c .*

В этой формулировке уравнение динамического равновесия

$$\nabla \cdot \sigma + f(t, x) = \rho(x) \frac{\partial v}{\partial t}$$
(1.188)

накладывается на функции напряжений и скоростей, как дифференциальное ограничение, в дополнение к основным граничным условиям (1.171) в напряжениях. Естественные условия в перемещениях (1.170) являются линейной частью функционала H_c .

Стоит подчеркнуть, что оба принципа Гамильтона и дополнительный к нему сформулированы для пространственно-временных краевых задач и не могут быть непосредственно применены для решения начально-краевых задач, которые широко распространены в динамике.

Таблица 1.1

Связь между граничными условиями и интегралом Ξ .

Условие I	Условие II	Ξ
$u(t_0, x) = u^0(x)$	$u(t_1, x) = u^1(x)$	0
$v(t_0, x) = v^0(x)$	$v(t_1, x) = v^1(x)$	$\int_{\Omega} \rho(x) [v^0(x) \cdot u(t_0, x) - v^1(x) \cdot u(t_1, x)] d\Omega$
$u(t_0, x) = u^0(x)$	$v(t_1, x) = v^1(x)$	$-\int_{\Omega} \rho(x) [v^1(x) \cdot u(t_1, x)] d\Omega$
$v(t_0, x) = v^0(x)$	$u(t_1, x) = u^1(x)$	$\int_{\Omega} \rho(x) [v^0(x) \cdot u(t_0, x)] d\Omega$
$u(t_0, x) = u(t_1, x)$	$v(t_0, x) = v(t_1, x)$	0

После небольших модификаций, Теоремы 1.6 и 1.7 могут быть распространены на динамические задачи с другими начальными и терминальными условиями. Существуют по крайней мере пять групп начальных и конечных условий, указанных в двух левых столбцах таблицы 1.1, для которых принцип Гамильтона (1.183), например, может быть изменен путем простого добавления одного специального члена Ξ к функционалу действия (1.182):

$$H^u = H[u] + \Xi[u]. \quad (1.189)$$

Этот член следует из последнего объемного интеграла в формуле (1.179). Конкретный вид этого члена представлен для всех пяти случаев в третьем столбце таблицы 1.1.

Как видно из последней строки таблицы 1.1 функционал действия H совпадает с модифицированным H^u не только в случае, когда вектор перемещения u задан в начале и в конце динамического процесса (первая строка), а также, если некоторые периодические условия наложены на перемещения U и скорости V .

Важным случаем в задачах теории упругости с периодическими условиями, которые были обсуждены в Разделе 1, являются гармонические колебания тела. В соответствии с периодическими условиями в таблице 1.1 (строка 5), частота колебаний ω должна быть кратной параметру движения

$$\omega^0 = \frac{2\pi}{t_1 - t_0}. \quad (1.190)$$

Тогда соответствующая пространственно-временная декомпозиция может быть осуществлена относительно перемещений и внешних сил в соответствии с

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(x) \sin \omega t, \quad f = \tilde{f}(x) \sin \omega t, \quad x \in \Omega, \\ \bar{u}_i &= \tilde{\bar{u}}_i(x) \sin \omega t, \quad x \in \Gamma_i^{(1)}, \\ \bar{q}_i &= \tilde{\bar{q}}_i(x) \sin \omega t, \quad x \in \Gamma_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.191)$$

Даже если заданные внешние силы и граничные перемещения приведены в более общем виде, например, $f = \tilde{f}^{(1)}(x) \sin \omega t + \tilde{f}^{(2)}(x) \cos \omega t$, то эта задача вследствие ее линейности может быть сведена к двум подзадачам в форме (1.191). Важно, что собственная частота свободных колебаний ($\tilde{f} = \tilde{\bar{q}}_i = \tilde{\bar{u}}_i = 0$) также должна делиться на ω^0 . В дальнейшем, знак ‘тильда’ будет опущен.

После подстановки выражений (1.191) в формулу (1.177) и исключения зависящего от времени члена $\sin \omega t$, вариационная формулировка для гармонических амплитуд $u(x)$ тела имеет вид

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_{\Omega} \rho(x) u \cdot \delta u \, d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon(u) : C : \delta \varepsilon \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} (f(x) \cdot \delta u) \, d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u \right) \, d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (1.192)$$

подобно вариации (1.149) для статического случая за исключением первого

‘кинематического’ члена.

В результате функционал для гармонических движений имеет вид

$$\begin{aligned}
 L_h = & \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega} \rho(x) (u \cdot u) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} U(u) d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} (f(x) \cdot u) d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.193}$$

Теперь, вариационный принцип для вынужденных колебаний упругого тела можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1.8. Среди всех допустимых амплитуд $u(x)$ упругих колебаний тела, удовлетворяющих граничным условиям $\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u = \bar{u}_i(x)$, $x \in \Gamma_i^{(1)}$, действительные формы движения $u^*(x)$ являются стационарной точкой функционала L_h .

Наконец, форма функционала

$$L_{\omega} = \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega} \rho(x) (u \cdot u) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(u) : C : \varepsilon(u) d\Omega.$$

для собственных колебаний тела следует непосредственно из уравнения (1.193). И соответствующий принцип гласит:

Теорема 1.9. Среди всех допустимых амплитуд $u(x)$ упругих колебаний тела удовлетворяющих однородным условиям $\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u = 0$, $x \in \Gamma_i^{(1)}$ собственная форма $u^*(x)$ с частотой ω^* является стационарной точкой функционала L_{ω} .

Эти принципы (Теоремы 1.8 и 1.9) могут быть обобщены на случай граничных условий с упругим основанием аналогично статическому случаю.

1.8. Обобщенные вариационные принципы

1.8.1. Соответствия между вариационными принципами

Четыре классических вариационных принципа были получены в разделе 1.6. для статических краевых задач в теории упругости. Прежде всего, принцип виртуальной работы получен путем интегрирования уравнений равновесия и граничных условий на напряжения. Это утверждение непосредственно приводит к принципу минимума полной потенциальной энергии после введения положительно определенной формы плотности энергии деформаций. После этого, принцип дополнительной виртуальной работы был сформулирован с функцией плотности энергии напряжений. Наконец, соответствующая формулировка задачи минимизации дополнительной потенциальной энергии была также дана.

На первый взгляд, такое разнообразие вариационных (интегральных) формулировок в теории упругости может привести к конфузу. Строго говоря, задача упругости, записанная в локальной форме и приведенная в начале раздела 1.4., является единственной, поскольку, как там было показано, формулировки в перемещениях с уравнениями Навье или в напряжениях с уравнениями Бельтрами-Митчелла можно рассматривать как несколько одинаковых модификаций одной, исходной задачи.

Сформулируем абстрактное понятие вариационных принципов как интегральную постановку задачи теории упругости, в которой стационарная точка некоторого функционала при ограничениях определяет напряженно-деформированное состояние тела. При этом стационарные условия рассматриваемого функционала совместно с существенными ограничениями должны составлять полную систему уравнений теории упругости. Заметим, что результат может принадлежать некоторому специальному функциональному пространству, которое не приемлемо для классического решения исходной системы уравнений в частных производных. Таким образом, напряженно-

деформированное состояние рассматривается в некотором обобщенном смысле. Тем не менее, следует подчеркнуть, что любое классическое решение, если оно существует, должно быть стационарной точкой предлагаемого функционала [189].

В этом разделе обсуждаются некоторые общие приемы для построения вариационных принципов теории упругости. Прежде всего, выделим те условия, которые позволяют перейти от принципа виртуальной работы к принципу минимума полной потенциальной энергии. Там предполагается, что

а) существует положительно определенная форма (плотность энергии деформации);

б) компоненты тензора деформации удовлетворяют кинематическим уравнениям, то есть они могут быть вычислены с помощью частных производных компонентов перемещений;

с) компоненты вектора перемещения являются непрерывными функциями пространственных координат и подчиняются соответствующим граничным условиям;

д) любые объемные и поверхностные силы должны быть связаны с некоторыми потенциалами.

Если принять эти предположения, то поля действительных перемещений могут быть получены путем минимизации полной потенциальной энергии Π . Как будет показано ниже, можно учесть локальные условия б) и с) с помощью множителей Лагранжа, обобщая этот принцип минимума.

Предположение а) является фундаментальным для получения корректно обобщенных вариационных принципов. Существование специальных положительных квадратичных форм (например, плотность энергии деформации U или плотность энергии напряжений U_c), чьи экстремальные свойства анализируются, определяет тип и структуру соответствующих вариационных принципов. Стоит отметить, что в литературе практически отсутствует обсуждение соответствующих подходов к выбору таких форм. С механической точки

зрения, применение энергетических функций в классических вариационных задачах выглядит довольно естественно. Однако не так ясно, существуют ли какие-либо альтернативные квадратичные формы, которые, может быть, являются более эффективными для решения задач теории упругости. Это имеет особенное значение для развития численных алгоритмов и в следующих главах этому вопросу будет уделено должное внимание.

Не будет преувеличением сказать, что метод множителей Лагранжа является фундаментальным подходом в вариационном исчислении для получения различных вариационных принципов. Этот подход может быть применен, например, путем добавления некоторых сочетаний локальных соотношений теории упругости к выражению для плотности энергии деформации $U(\varepsilon)$ с помощью множителей Лагранжа.

Рассмотрим упругое тело занимающее пространственную область Ω с граничными условиями двух типов, а именно в перемещениях и напряжениях, т.е. $\Gamma = \bar{\Gamma}_i^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_i^{(2)}$, следуя ранее принятым обозначениям. Введем шесть множителей Лагранжа $\sigma_{11}(x)$, $\sigma_{22}(x)$, $\sigma_{33}(x)$, $\sigma_{12}(x)$, $\sigma_{13}(x)$, $\sigma_{23}(x)$, которые являются компонентами тензора $\sigma(x)$, определенного в области Ω , как функции координат $x = \{x_1, x_2, x_3\}^T$, и три других множителя $p_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, которые являются компонентами вектора $p(x)$, заданными на внешней поверхности $\Gamma_i^{(1)}$. Принцип Ху - Васидзу является обобщенной вариационной формулировкой, который устанавливает, что действительное решение $u^*(x)$, $\varepsilon^*(x)$, $\sigma^*(x)$, $p_i^*(x)$, $i = 1, 2, 3$ задачи линейной упругости может быть получено из условий стационарности следующего функционала

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \int_{\Omega} U(\varepsilon) d\Omega - \int_{\Omega} \sigma : \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \nabla u - \frac{1}{2} \nabla u^T \right) d\Omega - \int_{\Omega} f(x) \cdot u d\Omega \\ & - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} p_i \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u - \bar{u}_i(x) \right) d\Gamma - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (1.194)$$

с восемнадцатью независимыми переменными $u_1, u_2, u_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, p_1, p_2, p_3$. Другими словами, один вектор u , два тензора ε и σ , а также три скалярные функции $p_i, i = 1, 2, 3$ должны быть проварьированы в уравнении (1.194). При этом никакие дополнительные ограничения не накладываются на эти переменные. Стоит напомнить, что $\bar{e}^{(i)}$ это заданные орты, связанные с граничными точками и \bar{u}_i или \bar{q}_i – граничные значения перемещений и напряжений, действующих вдоль этих ортов.

Первую вариацию функционала Ху-Васидзу Π_1 можно записать в тензорной форме

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_1 = & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} - \sigma \right) : \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \left(\varepsilon - \frac{\nabla u + \nabla u^T}{2} \right) : \delta\sigma d\Omega \\
& - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot \delta u d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u - \bar{u}_i(x) \right) \delta p_i d\Gamma \\
& + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n - p_i \right) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u \right) d\Gamma \\
& + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n - \bar{q}_i(x) \right) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u \right) d\Gamma = 0.
\end{aligned} \tag{1.195}$$

Управляющие уравнения теории упругости, которые были введены в разделе 1.4. могут быть получены из первой вариации (1.195) как стационарные условия функционала Π_1 . Эти условия включают в себя уравнения закона Гука, уравнения равновесия, кинематические соотношения и граничные условия

в перемещениях ($x \in \Gamma_i^{(1)}$) и напряжениях ($x \in \Gamma_i^{(2)}$):

$$\sigma = C : \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T), \quad \nabla \cdot \sigma + f = 0,$$

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u = \bar{u}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(1)}, \quad (1.196)$$

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n = \bar{q}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

а также три дополнительных соотношения, заданные на внешней поверхности тела

$$p_i = \bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n, \quad x \in \Gamma_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.197)$$

Механический смысл множителей Лагранжа σ_{ij} и p_i непосредственно следует из уравнений (1.196) и (1.197).

Таким образом, стационарные условия обобщенного функционала Π_1 включают в себя уравнения краевой задачи (1.196). Если Винклеровские условия (упругое основание) заданы на некоторых частях $\Gamma_i^{(3)}$, $i = 1, 2, 3$, границы Γ , то они могут быть учтены путем присоединения дополнительных интегралов по этим поверхностям к функционалу Π_1 , как в разделе 1.6. (см., например, формулу (1.161)).

Если кинематические уравнения и граничные условия в перемещениях в формуле (1.196) тождественно выполняются, то функционал Ху-Вашидзу Π_1 сводится к полной потенциальной энергии Π , запасаемой упругим телом в соответствии с формулой (1.150).

Можно получить и другую форму вариационного принципа, которая не содержит множители Лагранжа $p_i(x)$, $i = 1, 2, 3$. Для этого необходимо подставить выражения (1.197) для соответствующих членов в (1.195). После это-

го функционал Π_1 можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= \int_{\Omega} U(\varepsilon) d\Omega - \int_{\Omega} \left(\varepsilon - \frac{\nabla u + \nabla u^T}{2} \right) : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega \\
&- \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u - \bar{u}_i(x) \right) d\Gamma \\
&- \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma .
\end{aligned} \tag{1.198}$$

Неизвестными независимыми переменными в этом новом принципе являются перемещения, деформации и напряжения. Можно доказать, что стационарные условия для этой вариационной формулировки совпадают с локальными соотношениями упругости (1.196).

Следующее упрощение функционала (1.198) может быть реализовано заменой тензора $C^{-1} : \sigma$ для деформаций ε , в соответствии с Законом Гука и интегрированием по частям членов с частными производными перемещений в уравнении (1.198). В результате, еще один вариационный принцип, сформулированный в перемещениях u и напряжениях σ появляется вместе с функционалом

$$\begin{aligned}
\Pi_3 &= \int_{\Omega} U_C(\sigma) d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + f) \cdot u d\Omega \\
&- \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \bar{u}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma \\
&+ \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \left(\bar{q}_i(x) - \bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma ,
\end{aligned} \tag{1.199}$$

где U_C это плотность энергии напряжений.

В этой формулировке варьирование выполняется относительно девяти независимых компонентов вектора перемещения u и тензора напряжений σ ,

которые снова заданы без каких-либо дополнительных ограничений. Можно доказать, что стационарные условия этого функционала есть

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}C : (\nabla u + \nabla u^T), \quad \nabla \cdot \sigma + f = 0, \\ \bar{e}^{(i)}(x) \cdot u &= \bar{u}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(1)}, \quad \bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n = \bar{q}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.200)$$

Покажем, что принцип Хеллингера - Рейсснера и принцип минимума дополнительных энергии являются частными случаями вариационной формулировки Ху-Васидзу (1.195). Действительно, если соотношения закона Гука

$$\varepsilon = C^{-1} : \sigma$$

строго выполняются, то компоненты тензора деформации ε могут быть исключены из функционала Ху-Васидзу (1.194). После этого преобразования, результирующее выражение имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_R &= \int_{\Omega} \left(\frac{\nabla u + \nabla u^T}{2} \right) : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} U_c(\sigma) d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega \\ &- \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} p_i \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u - \bar{u}_i(x) \right) d\Gamma - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.201)$$

Интеграл, введенный в формуле (1.201) является функционалом Хеллингера - Рейсснера, приведенный, например, в [18], где изучается более простой случай граничных условий:

$$\Gamma_1^{(1)} = \Gamma_2^{(1)} = \Gamma_3^{(1)}, \quad \Gamma_1^{(2)} = \Gamma_2^{(2)} = \Gamma_3^{(2)}, \quad \Gamma_1^{(3)} \cup \Gamma_2^{(3)} \cup \Gamma_3^{(3)} = \emptyset.$$

Так как функционал (1.201) больше не зависит от компонентов тензора деформации, то число независимых переменных в Π_R уменьшается до 12, включая u , σ и $p_i(x)$, $i = 1, 2, 3$. Эти функции не ограничены. Условиями

стационарности являются соотношения Гука, где деформации заменены на их выражения через первые частные производные от перемещений, а также уравнения равновесия и граничные условия.

После интегрирования по частям первого слагаемого в уравнении (1.201) и исключения множителей $p_i(x)$ в соответствии с формулой (1.197), получается другая форма вариационного принципа (1.199) с функционалом $-\Pi_3$. Более того, если уравнения равновесия удовлетворяются вместе с граничными условиями в напряжениях, то этот функционал сводится к полной дополнительной энергии Π_c , определенной в разделе 1.6. формулой (1.167).

В выражении $\Pi[u]$ для полной потенциальной энергии, введенной формулой (1.150), допустимая вектор-функция $u(x)$ выбрана так, что бы тензорная кинематическая связь и геометрические граничные условия в формуле (1.196) выполнялись. Кроме того, допустимый тензор напряжений в функционале $\Pi_c[\sigma]$ должен удовлетворять векторному уравнению равновесия и силовым граничным условиям. Можно доказать, что эти две энергии Π и Π_c дополняют друг друга при решении задач теории упругости. Преобразование Π в Π_c описано в [157] и называется преобразованием Фридрикса: действительное решение гарантирует минимальные значения, как для потенциальной энергии и так и для дополнительной.

Таким образом, было показано, что принцип минимума потенциальной энергии следует из принципа виртуальной работы. Они могут быть сведены с помощью множителей Лагранжа к разнообразным вариационным формулировкам, таким как принципы Ху-Васидзу и Хеллингера - Рейсснера.

Принцип минимума дополнительной энергии была получен на основе принципа дополнительной виртуальной работы. Кроме того, можно показать, что принцип минимума потенциальной энергии является производным от принципа минимума дополнительной энергии.

Другие идеи, связанные с понятием энергии, обсуждаются в книге [61].

1.8.2. Полу-обратный подход

Другой подход к построению вариационных принципов получил свое название как полу-обратный метод. Он был предложен Хе [140, 141]. В этом методе не предполагается, что бы любая управляющая функция, например, такая как плотность энергии деформации, была априори известна. Она может быть получена основываясь на свойства краевой задачи. Покажем основные идеи этого подхода на модельном примере.

Пример 1.1. Введем следующую систему уравнений в частных уравнениях первого порядка

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} = 0, \quad (1.202)$$

$$\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} = 0 \quad (1.203)$$

с координатами $x = \{x_1, x_2\}^T$. Условия на границе

$$\begin{aligned} \Gamma &= \bar{\Gamma}_0^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_1^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_0^{(2)} \cup \bar{\Gamma}_1^{(2)}, \\ \Gamma_i^{(1)} &= \{x : x_1 = x_1^i, x_2 \in (x_2^0, x_2^1)\}, \\ \Gamma_i^{(2)} &= \{x : x_2 = x_2^i, x_1 \in (x_1^0, x_1^1)\}, \\ i &= 0, 1, \quad x_1^0 < x_1^1, \quad x_2^0 < x_2^1, \end{aligned} \quad (1.204)$$

прямоугольной области

$$\Omega = \{x : x_1 \in (x_1^0, x_1^1), x_2 \in (x_2^0, x_2^1)\}, \quad (1.205)$$

задаются следующим образом

$$u_j = \bar{u}_j^i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(j)}, \quad i = 0, 1, \quad j = 1, 2. \quad (1.206)$$

Предполагается, что интеграл

$$J = \int_{\Omega} A(u_1, u_2) d\Omega = \int_{x_2^0}^{x_2^1} \int_{x_1^0}^{x_1^1} A dx_1 dx_2 \quad (1.207)$$

существует и его стационарные условия эквивалентны системе уравнений в частных производных (1.203) и (1.206) при ограничении (1.202). Здесь A является неизвестной функцией. Применяя метод множителей Лагранжа, введем функционал

$$J[u_1, u_2, \phi] = \int_{\Omega} \left\{ A + \phi \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right\} d\Omega \quad (1.208)$$

с множителем Лагранжа ϕ .

Три стационарных условия интеграла (1.208) даются формулой (1.208) и

$$\frac{\delta A}{\delta u_1} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0 \quad (1.209)$$

$$\frac{\delta A}{\delta u_2} - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0, \quad (1.210)$$

где $\delta A / \delta u_j$, $j = 1, 2$ это так называемые вариационные производные. Из соотношений (1.209) и (1.210) видно, что

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\delta A}{\delta u_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\delta A}{\delta u_2} \right) = 0. \quad (1.211)$$

Поскольку формула (1.203) справедлива, то сравнивая уравнения (1.203) и (1.211), можно утверждать, что

$$\frac{\delta A}{\delta u_1} = u_1, \quad \frac{\delta A}{\delta u_2} = u_2. \quad (1.212)$$

Например, функция

$$A = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \quad (1.213)$$

удовлетворяет условие (1.212). После интегрирования по частям с учетом граничных условий (1.206), можно сформулировать следующий вариационный принцип: найти неизвестную функцию $\phi^*(x)$, которая является стационарной точкой функционала

$$\begin{aligned}
 J[\phi] = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right)^2 \right] d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma_0^{(1)}} \bar{u}_1^0(x) \phi dx_1 + \int_{\Gamma_1^{(1)}} \bar{u}_1^1(x) \phi dx_1 + \int_{\Gamma_0^{(2)}} \bar{u}_2^0(x) \phi dx_2 + \int_{\Gamma_1^{(2)}} \bar{u}_2^1(x) \phi dx_2.
 \end{aligned} \tag{1.214}$$

Множитель Лагранжа удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = u_1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = u_2. \tag{1.215}$$

которые следуют из уравнений (1.209), (1.210), и (1.213).

1.9. Конечно-элементная дискретизация

Возможности найти точные решения краевых задач в теории упругости действительно ограничены. Не только в пространственном случае, но и для плоских задач, обсуждавшихся в главе 1, часто не удается найти точное решение, даже если упругий материал изотропный и однородный, а тело имеет геометрически простые границы.

Вряд ли можно предложить регулярные процедуры нахождения аналитического решения для ограниченных областей. Основная трудность заключается не только в выборе основных функций, выполняющих основные уравнения в области, но и, скорее всего, удовлетворения различных граничных условий. По этой причине ученые осознали необходимость разработки эффективных численных алгоритмов. Такие подходы условно делятся на непрерывные (аналитические) и дискретные, но и гибридные методы также широко рас-

пространены.

Неопределенные значения неизвестных функций и, может быть, их производных для заданного конечного множества точек применяется в дискретных методах чтобы найти приближенное решение. При этом, приближенные решения управляющих уравнений находятся различными путями в смысле числовых значений основных переменных. Одним из хорошо известных и широко распространенных дискретных подходов является метод конечных разностей, а также различные его модификации [162]. Основная идея этого метода состоит в том, что управляющее соотношения в частных производных и граничные ограничения сводятся к системе линейных или нелинейных алгебраических уравнений.

Кроме того, аналитические подходы основаны главным образом на том, что среда с бесконечным числом степеней свободы аппроксимируется системой с конечным числом степеней свободы. Для этой цели некоторые базисные функции выбираются так, чтобы приближать точное решение. Многие из этих подходов основаны на вариационных принципах механики. Большинство современных численных алгоритмов базируется на методах Ритца и Галеркина. Эти два подхода стали очень важными с развитием метода конечных элементов, о котором можно сказать, что он является основным инструментом в теории поля.

Отметим, что для этих двух подходов результирующая система обычно содержит большое количество неизвестных и заданных параметров. Однако, в связи с ростом компьютерных эффективности, численные алгоритмы очень быстро развиваются и позволяют решать довольно трудные задачи. Это особенно относится к методам конечных и граничных элементов.

Стоит повторить здесь, что основа численной техники находится в тесной связи (благодаря дифференциальным уравнениям Эйлера-Лагранжа) с вариационными формулировками соответствующих краевых задач. Практически любую задачу теории упругости можно переформулировать вариационным

способом, чтобы приблизиться к точному решению. Тем не менее, для большинства современных методов использующих вариационное исчисление не требуются напрямую выводить уравнения Эйлера-Лагранжа в явном виде. Некоторые из этих методов описаны ниже более подробно.

1.9.1. Метод Ритца

Пусть функция $u^*(x)$, определенная в области $x \in \Omega$, находится как решение следующей абстрактной вариационной задачи

$$J[u] = \int_{\Omega} F(x, u) d\Omega \rightarrow \min_u \quad (1.216)$$

с граничными условиями

$$G(x, u) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (1.217)$$

где F и G – заданные функции координат x , аргумента u , а, быть может, и его производных относительно координаты x . Отметим, что любая задача минимизации может быть преобразована в задачу максимизации, если изменить знак функционала.

В соответствии с методом Ритца, предполагается найти приближенную форму экстремали $u^*(x)$ в виде сходящейся последовательности аппроксимирующих функций $\tilde{u}_1(x), \tilde{u}_2(x), \dots, \tilde{u}_N(x)$, так называемой минимизирующей последовательности. Элементы этой последовательности, функции Ритца, определяются по формуле

$$u_K(x) = \sum_{k=1}^K a_k \varphi_k(x), \quad K = 1, \dots, N, \quad (1.218)$$

где $\varphi_k(x)$, $k = 1, \dots, K$ – заданные функции и a_k – неизвестные вещественные постоянные или параметры Ритца.

Чтобы гарантировать сходимость этого метода, необходимо выбрать такие функции $\varphi_k(x)$, которые удовлетворяют граничное условие (1.217)

$$G(x, \varphi_k(x)) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

и линейно независимые элементы базиса, плотного в банаховом пространстве $\mathcal{B}_u(\Omega)$, где точное решение $u^*(x)$ определено. Линейная независимость означает, что ни одна из функций $\varphi_k(x)$ не может быть выражена как конечная линейная комбинация других функций из этого множества. Плотность этого множества относится к таким свойствам, что любая функция $u(x) \in \mathcal{B}_u$ может быть аппроксимирована конечномерной линейной комбинацией функций $\varphi_k(x)$ с заданной точностью в смысле нормы $\|u\|_{\mathcal{B}_u}$, определенной в пространстве \mathcal{B}_u . В приложениях, полиномиальные и тригонометрические функции, а также сплайн-приближения могут быть использованы для построения минимизирующей последовательности Ритца.

С учетом формулы (1.218), функционал в формуле (1.216) для любого целого K , $1 \leq K \leq N < \infty$ имеет вид

$$J[u_K] = \int_{\Omega} F(u_K(x)) d\Omega. \quad (1.219)$$

После интегрирования, вариационная формулировка (1.216) превращается в соответствующую конечномерную задачу минимизации

$$J(a) \rightarrow \min_a, \quad a = a^{(K)} = \{a_1, a_2, \dots, a_K\}^T. \quad (1.220)$$

В результате, функционал J становится функцией параметров Ритца, которые могут быть найдены по следующей векторной формуле

$$\frac{\partial J(a)}{\partial a} = 0. \quad (1.221)$$

Если функционал $J[u]$ является квадратичным относительно переменной u , то система (1.221) состоит из линейных алгебраических уравнений. Если векторы $a^{(K)}$ являются решениями системы (1.221), то соответствующие функции $\tilde{u}_K(x)$ найденные в соответствии с формулами (1.218) и (1.221) могут быть соответствующим образом расположены в минимизирующей последовательности

$$J[\tilde{u}_1] \geq J[\tilde{u}_2] \geq \dots \geq J[\tilde{u}_N] \geq J[u^*]. \quad (1.222)$$

К сожалению, не во всех вариационных задачах, можно быть уверенным, что минимизирующая последовательность, построенная таким образом, приводит к правильному результату. Даже если условие

$$\lim_{K \rightarrow \infty} J[\tilde{u}_K] = J[u^*]$$

выполнено, то последовательность $\tilde{u}_K(x)$, $K = 1, 2, \dots$ может не сходиться к решению в норме

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_K(x) - u^*(x)\|_{\mathcal{B}_u} = 0.$$

тем не менее, функция $\tilde{u}_N(x)$ часто принимается в качестве подходящего приближения экстремали $u^*(x)$.

Не смотря на то, что сходимость метода Ритца довольно трудно доказать, он оказывается особенно полезным в приложениях. В этом случае можно попытаться обеспечить ”практическую“сходимость решения и сосредоточиться на выборе такой аппроксимации с разумным количеством базисных функций, которые обеспечивают заданную точность. Следовательно, такой функционально-ориентированный выбор этих функций, а также соответствующие оценки качества численного решения имеют большое значение для алгоритмов Ритца, адаптированных к краевым задачам теории упругости.

1.9.2. Метод Галеркина

Метод Ритца, обсужденный в предыдущем пункте, в основном применяется к классическому типу вариационной задачи, в которых минимизируется выпуклый (по крайней мере локально) функционал. Однако, вполне возможно численно решать гораздо более широкий класс задач с распределенными параметрами с помощью метода Галеркина и его многочисленных модификаций.

Пусть функции $v_0(x)$ и $v(x)$, заданные в области Ω принадлежат гильбертову пространству $\mathcal{H}_v(\Omega)$ со скалярным внутренним произведением $\langle v_0, v \rangle$. Как следует из определения гильбертова пространства, $v_0 = 0$ если $\langle v_0, v \rangle = 0$ для каждого элемента $v \in \mathcal{H}_v$. Введем базис в \mathcal{H}_v , порождаемый функциями $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Если $\langle v_0, \varphi_k \rangle = 0$ выполняется для любого k , то функция v_0 является нулевым элементом пространства \mathcal{H}_v . Множество всех таких функций v , такое что

$$v = v_K(x) = \sum_{k=1}^K b_k \varphi_k(x) \quad (1.223)$$

для любых натуральных чисел K и действительных значений b_k , $k = 1, \dots, K$, является плотным в пространстве \mathcal{H}_v , i.e. $v_0 = 0$, если $\langle v_0, v_K \rangle = 0$ для любых K и b_k , $k = 1, \dots, K$. Полую информацию о функциональных пространствах можно найти в книге [104].

Рассмотрим следующее уравнение

$$Lu + f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.224)$$

где левая часть уравнения (1.224) принадлежит \mathcal{H}_v с линейным оператором L . Тогда функция $u^*(x)$ называется решением уравнения (1.224) если выполняются следующие соотношения

$$\langle Lu^*(x) + f(x), \varphi_k(x) \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.225)$$

В соответствии с основной идеей метода Галеркина, если каждая линейная комбинация базисных функций $\varphi_k(x) \in \mathcal{H}_v(\Omega)$ также принадлежит пространству $\mathcal{H}_u(\Omega)$ допустимых функций $u(x)$, то функции $u_K(x)$

$$u_K(x) = \sum_{k=1}^K a_k \varphi_k(x), \quad u_K \in \mathcal{H}_v(\Omega), \quad (1.226)$$

могут быть использованы для приближения к точному решению. Здесь K – фиксированное натуральное число, a_k – неизвестные вещественные коэффициенты. Значения a_k можно найти как решение систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^K \langle L\varphi_k(x), \varphi_j(x) \rangle a_k + \langle f(x), \varphi_j(x) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, K, \quad (1.227)$$

вытекающих из скалярного равенства $\langle Lu_K + f, v_K \rangle = 0$ для произвольно заданных параметров b_k в формуле (1.223).

Для статических задач теории упругости, можно показать, что методы Ритца и Галеркина приводят к одинаковым системам линейных алгебраических уравнений [87].

В обобщение последнего подхода, а именно, метода Петрова-Галеркина [93], два различных базиса $\varphi_k(x) \in \mathcal{H}_u(\Omega)$ и $\psi_k(x) \in \mathcal{H}_v(\Omega)$ могут быть выбраны для пробных функций $u(x)$ и тестовых функций $v(x)$, задаваемых следующим образом

$$u = u_K(x) = \sum_{k=1}^K a_k \varphi_k(x), \quad u_K \in \mathcal{H}_u(\Omega), \quad (1.228)$$

$$v = v_K(x) = \sum_{k=1}^K b_k \psi_k(x), \quad v_K \in \mathcal{H}_v(\Omega).$$

В результате система уравнений для нахождения коэффициентов a_k может

быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial b_j} \langle Lu + f, v \rangle = \sum_{k=1}^K \langle L\varphi_k(x), \psi_j(x) \rangle a_k + \langle f(x), \psi_j(x) \rangle = 0, \quad (1.229)$$

для $j = 1, \dots, K$. Отметим, что алгебраические системы Петрова - Галеркина и Ритца отличаются друг от друга.

1.9.3. Метод конечных элементов

В основе метода конечных элементов, а также подходов, описанных выше, лежит специальная дискретизация краевой задачи. Классическим предшественником МКЭ в линейной упругости был так называемый метод рамной аналогии предложенный Хренниковым и МакХенри [145, 164]. Применение этого метода, разработанного в строительной механике позволяет численно решать различные задачи для балочных моделей, в теории пластин и оболочек. К середине 20-го века с возникновением и развитием высокопроизводительных компьютеров, матричные методы начали быстро развиваться, особенно в теории упругости, для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций сложной формы.

С разработкой МКЭ получили развитие матричные и численные методы [12], [22], [34], [49], [102], [158], [159], [193]. Матричные методы в перемещениях и силах были улучшены и обобщены Аргиресем [106, 107], который применил их для эффективного анализа сложных статических и динамических систем (например, авиационные конструкции). Примерно в то же время, при обобщении таких подходов, появилась идея разделение целого тела на конечное число подобластей. С тех пор термин “конечные элементы” появился во множестве публикаций (см., например, [199]), где этот метод был применен для решения двумерных задач линейной теории упругости с помощью треугольных и четырехугольных элементов.

Широкое признание техники МКЭ произошло после конечно-элементной реализации метода Ритца на основе принципа минимума потенциальной энергии (метод перемещений). Первоначально этот метод был разработан интуитивно на основе матричных методов статики, но позже, он получил строгое математическое обоснование.

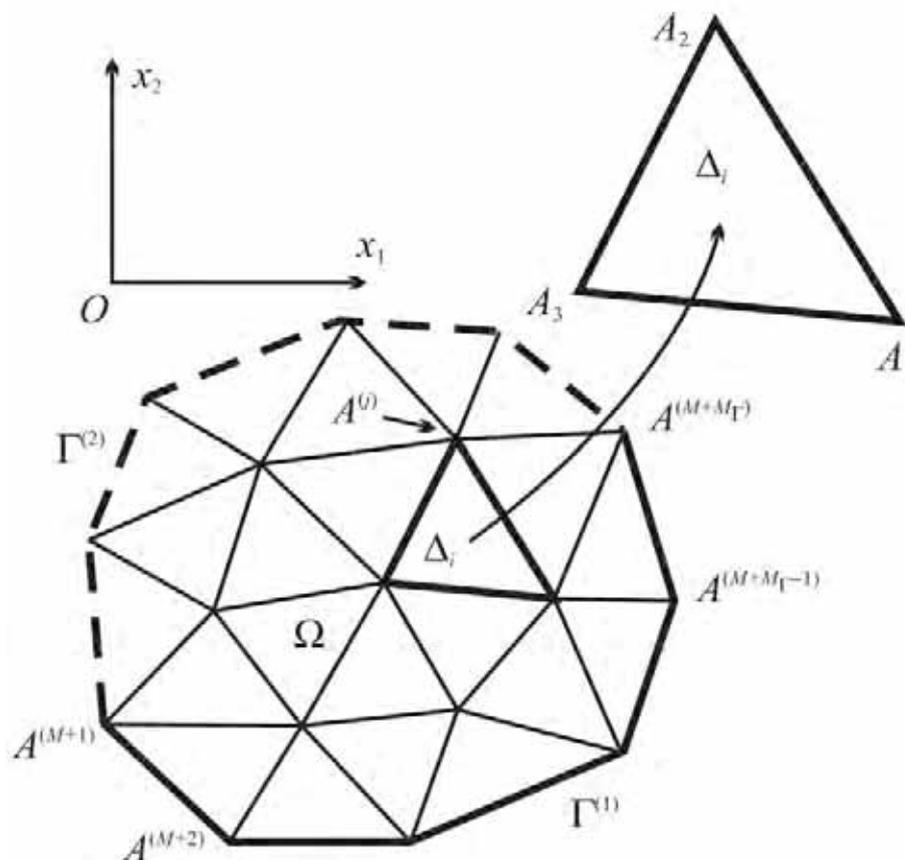


Рис. 1.4. Конечно-элементная сетка с регулярной триангуляцией.

Обсуждение основных вопросов метода конечных элементов можно найти в работах [10], [21], [33], [34], [59], [73], [91], [92], [93], [127], [139], [160], [188].

Чтобы выявить характерные особенности анализа методом конечных элементов, рассмотрим двумерную задачу упругости. Пусть положение упругого тела задано в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 (см. Рис. 1.4). Также как и в разделе 1.5., напряженно-деформированное состояние тела определяется вектором перемещения $u = \{u_1, u_2\}^T$, вектором напряжений

$\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$ и вектором деформаций

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}\}^T = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\}^T.$$

Объемная сила с интенсивностью $f = \{f_1(x), f_2(x)\}^T$ приложена к упругому телу. Смешанная краевая задача, обсуждавшаяся в разделе 1.4., рассматривается с граничными условиями в перемещениях и напряжениях (части границ изображены на Рис. 1.4 сплошной и пунктирной линиями соответственно) в соответствии с

$$u = 0, \quad x \in \Gamma^{(1)}; \quad \sigma \cdot n = \bar{q}(x) = \{\bar{q}_1(x), \bar{q}_2(x)\}^T, \quad x \in \Gamma^{(2)} \quad (1.230)$$

с границей $\Gamma = \bar{\Gamma}^{(1)} \cup \bar{\Gamma}^{(2)}$. Такая формулировка часто возникает в приложениях.

Соответствующий алгоритм метода конечных элементов может быть описан на примере этой краевой задачи (см., например, [112]).

Алгоритм 1.1. В соответствии с МКЭ, область Ω занимаемая телом делится воображаемыми границами на конечные элементы произвольной формы. Вообще говоря, эти элементы могут иметь разные формы, а также размеры и быть ограниченными прямыми линиями, и / или, скорее, произвольными кривыми. В качестве примера, здесь выбраны треугольные элементы.

Пусть область Ω является прямолинейным многоугольником, который разбит на треугольные элементы с прямолинейными краями. Для удобства применяется регулярная триангуляция, в которой каждое ребро треугольника либо принадлежит границе Γ , либо является общей гранью ровно двух элементов в Ω (Рис. 1.4). Внутренности всех треугольников в Ω попарно не пересекаются.

Почти все вершины элементов, общим числом $M + M_\Gamma$, принадлежат более чем одному треугольнику. В свою очередь, количество треугольников – N .

Элементы и вершины имеют соответствующие индексы и обозначены как Δ_i , $i = 1, \dots, N$ и $A^{(j)}$, $j = 1, \dots, M + M_\Gamma$ соответственно. Здесь M_Γ является количеством вершин $A^{(j)}$, $j = M + 1, \dots, M + M_\Gamma$, которые принадлежат части границы $\bar{\Gamma}^{(1)}$, где перемещения равны нулю.

Кроме того, вершины каждого треугольника локально пронумерованы по часовой стрелке с индексами $k = 1, 2, 3$. Однозначное соответствие $A_k = A^{(j)}$ устанавливается между локальным индексом вершины k элемента Δ_i и глобальным индексом j этой вершины:

$$j(i, k) = j_{ik}, \quad (1.231)$$

но конечно, это не взаимно однозначное отображение. Декартовы координаты вершины A_k в локальной нотации есть

$$x_1 = x_{1k} = x_1^{(j_{ki})}, \quad x_2 = x_{2k} = x_2^{(j_{ki})}, \quad (1.232)$$

где $x_1^{(j)}$ и $x_2^{(j)}$ являются координатами вершин в глобальной нотации в соответствии с формулой (1.231).

Зафиксируем один треугольник Δ_i с вершинами, пронумерованными, как это показано на Рис. 1.4. Введем следующую систему линейных базисных функций, определяемую координатами этого треугольника:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{x_{22} - x_{23}}{2S}(x_1 - x_{12}) - \frac{x_{12} - x_{13}}{2S}(x_2 - x_{22}), \\ g_2 &= \frac{x_{23} - x_{21}}{2S}(x_1 - x_{13}) - \frac{x_{13} - x_{11}}{2S}(x_2 - x_{23}), \\ g_3 &= \frac{x_{21} - x_{22}}{2S}(x_1 - x_{11}) - \frac{x_{11} - x_{12}}{2S}(x_2 - x_{21}), \end{aligned} \quad (1.233)$$

где величина

$$2S = x_{11}x_{22} + x_{12}x_{23} + x_{13}x_{21} - x_{12}x_{21} - x_{13}x_{22} - x_{11}x_{23} \quad (1.234)$$

является удвоенной площадью элемента Δ_i . Эти функции в литературе [34] получили название барицентрических координат или L -координат, однако стоит отметить, что они являются линейными функциями (в дальнейшем, g -функции), которые имеют простую геометрическую интерпретацию. Функция $g_1(x)$ равна нулю на стороне треугольника A_2A_3 ($g_1(x_{12}, x_{22}) = g_1(x_{13}, x_{23}) = 0$) и достигает своего максимального значения в элементе Δ_i при вершине A_1 ($g_1(x_{11}, x_{21}) = 1$). Аналогичные свойства присущими и другим функциям $g_{2,3}$ лишь с разницей в перестановке индексов: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$. Кроме того, сумма всех этих функций равна единице:

$$g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) \equiv 1. \quad (1.235)$$

g -функции можно легко дифференцировать по пространственным координатам

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} &= \frac{x_{22} - x_{23}}{2S}, & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= \frac{x_{13} - x_{12}}{2S}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} &= \frac{x_{23} - x_{21}}{2S}, & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} &= \frac{x_{11} - x_{13}}{2S}, \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} &= \frac{x_{21} - x_{22}}{2S}, & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} &= \frac{x_{12} - x_{11}}{2S}. \end{aligned} \quad (1.236)$$

Для интегрирования выражений, в которые входят полиномиальные соотношения от g -функций, на треугольном элементе, полезно знать следующую аналитическую формулу:

$$\int_{\Delta_i} g_1^i g_2^j g_3^k d\Delta_i = \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} 2S. \quad (1.237)$$

Аппроксимация функций перемещений определяется в каждой точке треугольного элемента через g -функции

$$u_1 = b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3, \quad u_2 = b_4 g_1 + b_5 g_2 + b_6 g_3. \quad (1.238)$$

Таким образом, вектор перемещения u на треугольнике Δ_i определяется шестью параметрами, которые могут быть собраны в вектор $b = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}^T$. Как следует из (1.238) и свойств g -функций, перемещения вершин элемента Δ_i (узлы треугольной сетки) равны

$$u_{1k} = u_1(x_{1k}, x_{2k}) = b_k, \quad u_{2k} = u_2(x_{1k}, x_{2k}) = b_{k+3}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.239)$$

Чтобы гарантировать непрерывность полей перемещений для всех элементов, которые имеют общий узел $A^{(j)}$, все соответствующие параметры b_k и b_{k+3} этих треугольников должны иметь одно и то же значение, соответственно. Глобальный вектор $a \in \mathcal{R}^{2(M+M_\Gamma)}$ проектных параметров может быть определен компонентами a_{2j-1} и a_{2j} , задающими, соответственно, перемещения u_1 и u_2 в точке $A^{(j)}$. Очевидно, что $a_{2j-1} = a_{2j} = 0$ на части $\bar{\Gamma}^{(1)}$ границы, где заданы нулевые перемещения, $j > M$.

Однозначное соответствие $A_k = A^{(j)}$, о котором говорилось выше, может быть выражено через узловые матрицы

$$D^{(i)} \in \mathcal{R}^{6 \times 2(M+M_\Gamma)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

которые связывают локальные векторы b каждого элемента Δ_i и глобальный вектор a в соответствии с формулой (1.231). Компоненты каждой матрицы $D^{(i)}$ равны либо единице либо нулю. Отметим, что в матрице $D^{(i)} = \{d_{ij}\}$

$$d_{k,2j(i,k)-1} = 1, \quad d_{k+3,2j(i,k)} = 1, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.240)$$

присутствует только шесть ненулевых элементов.

В этом случае, функция вектора перемещений $u^{(i)}(x)$, заданная на некотором элементе Δ_i выражается через вектор a в соответствии с

$$\tilde{u} = u^{(i)}(x) = G^{(i)}(x)D^{(i)}a, \quad x \in \Delta_i. \quad (1.241)$$

Здесь $G^{(i)}(x) \in \mathcal{R}^{2 \times 6}$ – матричная функция следующей структуры

$$G^{(i)} = \left\{ \begin{array}{cccccc} g_1^{(i)} & g_2^{(i)} & g_3^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_1^{(i)} & g_2^{(i)} & g_3^{(i)} \end{array} \right\}, \quad x \in \Delta_i \quad (1.242)$$

с кусочно-линейными функциями $g_k^{(i)}(x)$

$$g_k^{(i)} = \left\{ \begin{array}{ll} g_k(x), & x \in \Delta_i \\ 0, & x \notin \Delta_i \end{array} \right., \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.243)$$

Эта функция задана специальным образом для каждого треугольника Δ_i , $i = 1, \dots, N$. Это означает, что глобальные координаты $x_{1,2}^{(j_{ik})}$ должны быть заменены на локальные x_{1k} и x_{2k} , как и в уравнении (1.232).

Отметим, что такие приближения гарантируют непрерывность перемещений на межэлементных границах каждого двух соприкасающихся треугольников. Как будет показано дальше формула (1.243) аналогична и для других элементов с различным числом узлов, причем не только для плоских задач, но и для трехмерных.

Деформации, заданные на элементе Δ_i , могут быть также представлены в векторной форме

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{(i)}(x) = E^{(i)}(x)D^{(i)}a, \quad x \in \Delta_i, \quad (1.244)$$

где

$$E^{(i)} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2^{(i)}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3^{(i)}}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2^{(i)}}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3^{(i)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2^{(i)}}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3^{(i)}}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2^{(i)}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3^{(i)}}{\partial x_1} \end{array} \right\} \quad (1.245)$$

является элементом матрицы деформаций.

Тогда, соответствующий вектор напряжения $\sigma^{(i)}$ может быть выражен через соотношения закона Гука следующим образом

$$\sigma^{(i)} = C(x)\varepsilon^{(i)}, \quad x \in \Delta_i. \quad (1.246)$$

Например, матрица модулей упругости для однородного изотропного материала при плоском напряженном состоянии имеет вид:

$$C = \frac{E}{1 - \nu^2} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{array} \right\}. \quad (1.247)$$

Таким образом, соотношение между напряжениями и перемещениями узлов есть

$$\tilde{\sigma} = \sigma^{(i)}(x) = S^{(i)}a = CE^{(i)}D^{(i)}a, \quad x \in \Delta_i, \quad (1.248)$$

где $S^{(i)}$ – матрица напряжений для элемента с индексом i .

Для описания напряженно-деформированного состояния тела в целом, глобальные матричные функции напряжений, деформаций и перемещений

должны быть собраны в

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^N S^{(i)}(x)D^{(i)}, \quad \tilde{E} = \sum_{i=1}^N E^{(i)}(x)D^{(i)}, \quad \tilde{G} = \sum_{i=1}^N G^{(i)}(x)D^{(i)}. \quad (1.249)$$

После этого аппроксимации напряжений, деформаций и перемещений задаются в области Ω следующим образом

$$\tilde{\sigma} = \tilde{S}(x)a, \quad \tilde{\varepsilon} = \tilde{E}(x)a, \quad \tilde{u} = \tilde{G}(x)a. \quad (1.250)$$

Приближенное решение может быть получено на основе принципа минимума полной потенциальной энергии, сформулированном в разделе 1.6. и методе Ритца, обсуждаемом в этом разделе. В соответствии с формулой (1.150) полная потенциальная энергия Π может быть представлена в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\sigma}^T \tilde{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} f^T(x) \tilde{u} d\Omega - \int_{\Gamma^{(2)}} \bar{q}^T(x) \tilde{u} d\Gamma \quad (1.251)$$

с заданными функциями плотности объемной силы f и граничной нагрузки \bar{q} . Энергию (1.251) можно переписать помощью формулы (1.250) следующим образом

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^T \tilde{S}^T(x) \tilde{E}(x) a d\Omega - \int_{\Omega} f^T(x) \tilde{G} a d\Omega - \int_{\Gamma^{(2)}} \bar{q}^T(x) \tilde{G} a d\Gamma \quad (1.252)$$

или, окончательно, в матричной форме

$$\Pi = \frac{1}{2} a^T K a - F a. \quad (1.253)$$

Здесь введены матрица жесткости

$$K = \int_{\Omega} \tilde{E}^T(x) C \tilde{E}(x) d\Omega \quad (1.254)$$

и вектор внешних сил

$$F = \int_{\Omega} \tilde{G}^T f(x) d\Omega - \int_{\Gamma^{(2)}} \tilde{G}^T \bar{q}(x) d\Gamma \quad (1.255)$$

Это означает, что приближенное значение общей потенциальной энергии в этом МКЭ алгоритме выражается только через перемещения узловых точек.

Если принять во внимание тот факт, что последние $2M_{\Gamma}$ элементов вектора a равны нулю в связи с однородными условиями на перемещения, заданными на части границы $\Gamma^{(1)}$ в уравнении (1.230), то соответствующие строки и столбцы должны быть удалены из матрицы K и ее размер уменьшается до $2M \times 2M$. Аналогично, размеры векторов a и F уменьшаются до $2M$. Известный вектор a проектных параметров находится из условия минимума функции потенциальной энергии $\Pi(a)$:

$$\frac{\partial \Pi(a)}{\partial a} = \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial a_{2M}} \right\}^T = 0. \quad (1.256)$$

Условие (1.256) эквивалентно линейному уравнению представленному в матричной форме

$$Ka = F. \quad (1.257)$$

Можно дать другую формулировку МКЭ для задачи теории упругости, которая следует из вариационных принципов обсужденных в разделе 1.6.. В алгоритме, описанному выше, кинематические и определяющие соотношения в точности удовлетворяются, в то время как уравнения равновесия выполняются приближенно. Наоборот, условия равновесия выполняются точно в дополнительном вариационный принципе, сформулированного в напряжениях. При этом уравнения совместности удовлетворяются интегрально.

Дальнейшее развитие метода конечных элементов связано с обобщенными

принципами Ху-Васидзу и Хеллингера-Рейсснера, введенных в разделе 1.8..

1.9.4. Метод граничных элементов

Метод граничных элементов (МГЭ) был также успешно применен для решения краевых задач в теории упругости. Этот подход необходимо кратко упомянуть здесь, поскольку он недавно был разработан наряду с МКЭ.

Суть метода состоит в том, что основные уравнения теории упругости, которые описывают поведение неизвестных функций внутри области, сводятся к интегральному уравнению по границе. В результате, неизвестные граничные значения связаны с величинами, заданными на внешней поверхности тела посредством этого интегрального уравнения. Впервые такой подход был применен для решения задачи кручения с помощью так называемых прямых методов в теории потенциалов (см. [147]).

Развитием этого исследования стал метод интегральных уравнений для плоских задач теории упругости предложенный Rizzo [176]. Этот подход был позднее обобщен для решения пространственных задач (см. Крус [129]).

Подробную информацию о технике МГЭ можно найти в [48], [192]. Тем не менее, стоит отметить определенное преимущество метода граничных интегральных уравнений. В этом методе (в отличие от метода конечных элементов) только функции, заданные на внешней поверхности тела должны быть дискретизированы. Благодаря этому, количество узлов и, следовательно, число проектных параметров резко уменьшается для поверхностной сетки по сравнению с соответствующей объемной. В результате конечномерные решения строятся, например, в трехмерном случае только для параметров, распределенных на поверхности упругого тела. В связи с этим, первоначально пространственные задачи могут быть сведены к двумерным.

Важно отметить, что, несмотря на то, что размер типичной матрицы в МГЭ алгоритме гораздо меньше, чем число алгебраических уравнений в ана-

логичной системе МКЭ, эта матрица является полной, не симметричной, и, как правило, не положительно определенной. Тем не менее, матрица МГЭ может быть сведена к зонной структуре путем деления границы на поддомены. Таким образом, можно решать задачи теории упругости с достаточно большим числом степеней свободы.

Глава 2

Метод интегро-дифференциальных соотношений

2.1. Основные идеи

Несмотря на то, что основные идеи линейной теории упругости были сформированы еще в 19 веке, все еще остаются вопросы, которые требуют более детального обсуждения и довольно редко обсуждаются в литературе. Прежде всего, это связано с тем, что до сих пор не выработан общий подход к построению аналитических решений задач теории упругости в локальной (сильной) формулировке, которые были рассмотрены в главе 1. А также численные методы, которые интенсивно развиваются и основываются на математически обоснованных вариационных принципах, поднимают другой вопрос. Как можно оценить качество численного решения? Данный раздел посвящен этим вопросам.

2.1.1. Аналитические решения в линейной теории

Оценим сначала саму возможность получать решение задачи теории упругости в виде аналитических действительных функций. По определению, аналитическая функция $h(x)$, заданная в некоторой области Ω , совпадает с ее рядом Тейлора в окрестности точки $x \in \Omega$.

Рассмотрим задачу плоского деформированного состояния, которая была обсуждена в разделе 1.5. для однородного изотропного тела, занимающего четверть плоскости x_1x_2 , как это показано на Рис. 2.1. Это тело ограничено в области Ω некоторой аналитической кривой Γ_0 , пересекающая оси координат x_1 и x_2 декартовой системы координат Ox_1x_2 в точках $\{x_1^0, 0\}^T$ и $\{0, x_2^0\}^T$ соответственно. Здесь введен вектор координат $x = \{x_1, x_2\}^T$. Предполагается,

что заданная внешняя нагрузка приложена к телу на частях

$$\Gamma_1 = \{x : x_1 \in (0, x_1^0), x_2 = 0\}, \quad \Gamma_2 = \{x : x_2 \in (0, x_2^0), x_1 = 0\} \quad (2.1)$$

границы $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$. Граничные напряжения заданы на этих линиях следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x) &= q_1(x_1), \quad \sigma_{12}(x) = q_2(x_1), \quad x \in \Gamma_1; \\ \sigma_{12}(x) &= q_3(x_2), \quad \sigma_{11}(x) = q_4(x_2), \quad x \in \Gamma_2; \\ \sigma_{n1}(x) &= q_1^0(x), \quad \sigma_{n2}(x) = q_2^0(x), \quad x \in \Gamma_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Компоненты нагрузки q_1^0 и q_2^0 пока не заданы и будут обсуждены позже.

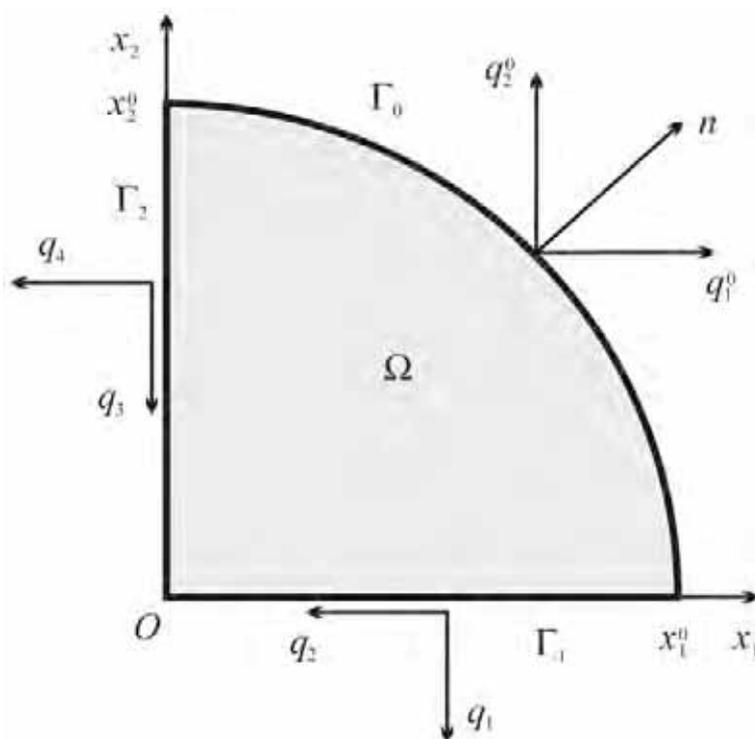


Рис. 2.1. Плоское упругое тело нагруженное внешними силами.

Из условий самоуравновешенности нагрузки (равновесие) следует, что

следующие интегралы равны нулю:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{x_1^0} q_1(x_1) dx_1 + \int_0^{x_2^0} q_3(x_2) dx_2 - \int_{\Gamma_0} q_2^0(x) d\Gamma = 0, \\
 & \int_0^{x_1^0} q_2(x_1) dx_1 + \int_0^{x_2^0} q_4(x_2) dx_2 - \int_{\Gamma_0} q_1^0(x) d\Gamma = 0, \\
 & \int_0^{x_1^0} q_1(x_1) x_1 dx - \int_0^{x_2^0} q_4(x_2) x_2 dx_2 \\
 & + \int_{\Gamma_0} (q_1^0(x) x_2 - q_2^0(x) x_1) d\Gamma = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Функции q_i , $i = 1, \dots, 4$ и $q_{1,2}^0$ должны быть выбраны так, что бы интегралы в формуле (2.3) существовали.

Плоское напряженно-деформированного состояния однородного изотропного тела описывается двумя уравнениями Навье

$$\begin{aligned}
 \Delta u_1 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) &= 0, \\
 \Delta u_2 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пренебрежем в этом примере объемными силами, т.е. $f_1(x) = f_2(x) = 0$. С помощью кинематических соотношений Коши (1.71), граничные условия на

интервалах Γ_1 и Γ_2 могут быть выражены через перемещения

$$\begin{aligned}
 \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_2=0} &= q_1, \\
 G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} &= q_2, \\
 G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0} &= q_3, \\
 \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \Big|_{x_1=0} &= q_4.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Будем искать решение краевой задачи (2.4) и (2.5) в виде полиномиальных функций

$$u_1 = \sum_{i+j=0}^N u_1^{(ij)} x_1^i x_2^j = P_1^{(N)}, \quad u_2 = \sum_{i+j=0}^N u_2^{(ij)} x_1^i x_2^j = P_2^{(N)}, \tag{2.6}$$

т. е. полных полиномах степени $N \geq 0$.

Замечание 2.1. Пусть двумерные полиномы представлены в виде суммы одночленов

$$P(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^M a_k x_1^{p(k,1)} x_2^{p(k,2)},$$

где $p(k, l)$ – степени переменной x_l , $l = 1, 2$ в k -м одночлене и a_k , $k = 1, \dots, M$ – отличные от нуля вещественные постоянные. Степень одночлена равна сумме степеней всех переменных, входящих в одночлен. В свою очередь, степень многомерного полинома определяется как максимальная из степеней одночленов, включенных в многочлен, то есть

$$N = \max_{k \leq M} \left\{ \sum_{l=1}^d p(k, l) \right\},$$

где D – размерность функций ($d = 2$ в этом примере).

Этот многочлен может быть представлен в канонической форме. Для этого необходимо собрать подобные члены и пересортировать мономы в соответствии с их степенями. Тогда, любой многочлен однозначно определяется с помощью этой формы. Полином является полным, если он включает в себя все возможные одночлены степени $k \leq N$. Например, полный двумерный многочлен степени 2 (квадратичный) в канонической форме задается

$$P^{(2)}(x_1, x_2) = a_6 x_1^2 + a_5 x_1 x_2 + a_4 x_2^2 + a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1.$$

Стоит отметить некоторые важные свойства двумерных полиномов. Во-первых, количество M линейно независимых мономов в полном многочлене степени N определяется по формуле

$$M = \frac{(N+1)(N+2)}{2}. \quad (2.7)$$

Во-вторых, первая частная производная преобразует многочлен $P^{(N)}$ в полный полином степени $N-1$, например, согласно выражению

$$\frac{\partial P^{(N)}}{\partial x_1} \rightarrow P^{(N-1)}. \quad (2.8)$$

Поскольку ищется аналитическое решение, то из заданных аппроксимаций (2.6) следует, что граничные напряжения q_j , $j = 1, \dots, 4$ должны быть одномерными полиномами степени $N-1$. Таким образом, они могут быть представлены в виде

$$q_1 = \sum_{i=0}^{N-1} q_1^{(i)} x_1^i, \quad q_2 = \sum_{i=0}^{N-1} q_2^{(i)} x_1^i, \quad q_3 = \sum_{i=0}^{N-1} q_3^{(i)} x_2^i, \quad q_4 = \sum_{i=0}^{N-1} q_4^{(i)} x_2^i. \quad (2.9)$$

Здесь коэффициенты $q_j^{(i)}$ предполагаются известными величинами.

Для того чтобы решить задачу (2.4) и (2.5), учтем форму полиномиальных аппроксимаций $u_{1,2}$ в формуле (2.6) и свойства (2.7), (2.8). Число неизвестных

параметров $u_{1,2}^{(ij)}$, в соответствии с формулой (2.7), равно $2M$ (два полных полинома).

После подстановки функции (2.6) в u_1 и u_2 в формулу (2.4), получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} \Delta P_1^{(N)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial P_1^{(N)}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2^{(N)}}{\partial x_2} \right) &= P_1^{(N-2)} = 0, \\ \Delta P_2^{(N)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial P_1^{(N)}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2^{(N)}}{\partial x_2} \right) &= P_2^{(N-2)} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Выполнение этих соотношений в каждой точке x эквивалентно условию, что все коэффициенты при каждом мономе в соответствующих полиномах $P_1^{(N-2)}$ и $P_2^{(N-2)}$ равны нулю. Эти коэффициенты являются линейной комбинацией коэффициентов $u_{1,2}^{(ij)}$ и получаются из уравнений Навье (2.10). Общее число одночленов в этих функций равно

$$M_1 = N(N-1).$$

Следовательно, остается только

$$M_2 = 2M - M_1 = 4N + 2$$

независимых (неопределенных) коэффициентов после удовлетворения уравнения (2.10). Чтобы гарантировать выполнение граничных ограничений (2.5), заданных в полиномиальном виде в формуле (2.9), дополнительные

$$M_3 = 4N - 1$$

условия должны быть разрешены. Отметим, что одно из условий исчезает в связи с тем, что должен быть обеспечен баланс внешних сил в вершине угла

$O(q_2(0) = q_4(0))$.

Три оставшихся константы необходимы, чтобы зафиксировать положение тела в плоскости x_1x_2 (не допустимо движение твердого тела как целого). Это эквивалентно, например, следующим условиям

$$u_1(0,0) = u_2(0,0) = \left. \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_2=0} = 0. \quad (2.11)$$

После удовлетворения всех условий, описанных выше, определяются однозначные поля перемещений $u^*(x)$. Эти рассуждения остаются корректными для каждого многочлена степени $N < \infty$ в формуле (2.9). Например, если задать однородную внешнюю граничную нагрузку $q_j = 0$, $j = 1, \dots, 4$, то решение

$$u_1(x_1, x_2) = u_2(x_1, x_2) \equiv 0, \quad x \in \Omega$$

является единственным результатом. Подобные поля могут быть найдены и для других типов функций, заданных вдоль координатных осей, например, граничные условия в перемещениях. Тем не менее, однозначное напряженно-деформированное состояние упругого тела снова определяется только четырьмя соответствующими функциями, заданными на Γ_1 и Γ_2 .

При нахождении решения краевой задачи (2.4), (2.5), граничные условия на кривой Γ_0 пока еще не были упомянуты. Из единственности решения $u^*(x)$ следует, что граничные функции $q_{1,2}^0(x)$ в формуле (2.2) предопределены полиномиальными коэффициентами $q_j^{(i)}$. Но этот факт находится в противоречии с механическим смыслом рассматриваемой задачи.

Действительно, существует бесконечное число различных внешних нагрузок $q_{1,2}^0(x)$, удовлетворяющих равновесию (2.3) и, как следствие, бесконечное число соответствующих напряженно-деформированных состояний тела, показанного на Рис. 2.1. Поэтому невозможно точно описать эти состояния только полиномами (2.6). Этот факт косвенно указывает, что ресурсы нахождения решений как аналитических функций крайне ограничены. Такие

решения доступны только для задач упругости с достаточно сильной корреляции между формой тела и типом граничных функций.

На самом деле, решения краевой задачи теории упругости нужно находить как функции, которые принадлежат некоторым специальным функциональным пространствам. Но довольно трудно априори дать однозначный ответ на вопросы, которые возникают в связи с этим, например, такие: какие особенности являются допустимыми для неизвестных функций или где такие особенности могут появляться? Эти вопросы остаются открытыми для изучения и некоторые аспекты этой проблемы будут рассмотрены в этой работе.

2.1.2. Интегральная формулировка закона Гука

Большим достижением стало создание теории функциональных пространств, которые называются пространствами Соболева. Соответствующая математическая техника позволяет доказать базовые утверждения в линейной теории упругости, касающиеся существования обобщенных решений и обосновать выбор соответствующих конечномерных аппроксимаций.

Некоторые из возникающих вопросов могут быть решены путем преобразования задач теории упругости, записанных в локальной форме, в интегральную (вариационные принципы, методы Ритца и Галеркина, и так далее). Различные интегральные формулировки задач теории упругости были обсуждены в главе 1. Отличительной особенностью слабых формулировок является то, что некоторые локальные управляющие уравнения удовлетворяются в обобщенном смысле. Лучше объяснить этот факт на примере. Из равенства

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 0,$$

следует, что $f(x) = 0$ почти всюду, за исключением, быть может, множества точек x меры ноль. Где $f(x)$ является интегрируемой с квадратом функцией. В частности, значение этого интеграла не изменится, если функция f прини-

мают ненулевые значения в конечном число точек в интервале $x \in (0, 1)$.

Давайте обсудим вопросы: какие из определяющих уравнений удовлетворяются интегрально в классических вариационных принципах а какие требуют строго выполнения в дифференциальной форме? В принципе минимума полной потенциальной энергии, кинематические соотношения (1.71) и граничные условия для перемещений (1.73) принимаются в локальной форме, как существенные ограничения. Уравнения равновесия (1.70) и внешние условия в напряжениях (1.74) учитываются в потенциальной энергии (1.167). В отличие от предыдущего случая, в принципе минимальной полной дополнительной энергии условия равновесия и граничные напряжения составляют систему основных локальных ограничений, в то время как кинематические соотношения и граничные перемещения вытекают из стационарных условиях дополнительной энергии (1.167). В принципах Ху-Васидзу и Хеллингера - Рейсснера обсуждавшиеся в разделе 1.8. почти все, управляющие соотношения заданы в слабой форме. Отметим, что закон Гука единственное ограничение, которое всегда выполняется в локальной форме для всех этих вариационных принципов.

Введем в рассмотрение тензор напряжений σ^0 , который связан с данным тензором деформации ε^0 следующим образом

$$\sigma^0 = C : \varepsilon^0 . \quad (2.12)$$

Здесь ε^0 это тензор Коши

$$\varepsilon^0 = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) . \quad (2.13)$$

Тензор σ^0 называется геометрическим тензором напряжений и может быть выражен через вектор перемещений u с помощью кинематических диф-

ференциальных уравнений (2.13) в следующем виде

$$\sigma^0 = \frac{1}{2}C : (\nabla u + \nabla u^T) . \quad (2.14)$$

Индекс '0' означает, что соответствующие тензоры $\varepsilon^0(u)$ и $\sigma^0(u)$ зависят только от геометрических параметров (перемещений u).

Наоборот, поля напряжений σ порождают соответствующий тензор

$$\varepsilon = C^{-1} : \sigma . \quad (2.15)$$

Тензор ε называется силовым тензором деформации.

Как уже отмечалось в главе 1, обычные вариационные принципы, как правило, получаются на основе метода множителей Лагранжа, принимая во внимание, что существует положительно определенная форма, например, плотность энергии напряжений или деформаций. Отметим, что такой подход является общим для получения интегральных соотношений, но при этом подразумевается строгое выполнение предписанных законов состояния, например, соотношения между напряжениями и деформациями (2.12) или (2.15).

Обсудим механический смысл, управляющих соотношения линейной упругости более подробно. Уравнения равновесия заданное формулой (1.70) вытекают из предположений, что существует конечный предел (1.1) и напряжения σ достаточно гладкие функции. Эти требования отражают третий закон Ньютона, и, вообще говоря, должны быть строго выполнены.

С геометрической точки зрения, кинематические уравнения (2.14), в рамках предположения о малости деформаций и перемещений просто описывают деформированное состояние тела и также должны быть справедливыми.

Что касается граничных условий, их форма обусловлена типом краевой задачи которая решается, и они должны быть заданы априори.

Выполнение закона Гука в виде линейных алгебраических уравне-

ний (2.12) или (2.15) не выглядит так безоговорочно обязательным. Реальные упругие конструкционные материалы подчиняются этому линейному закону лишь приблизительно. Вообще говоря, гипотеза о линейной зависимости между напряжениями и деформациями связана с желанием упростить задачи теории упругости. Кроме того, в связи с тем, что условия однородности для реальных материалов строго не реализованы (может быть, за исключением некоторых кристаллов), модули упругости находятся экспериментально и обычно с довольно большой ошибкой. Это означает, что формулировка задач теории упругости имеет неопределенность, связанную с идентификацией материальных констант.

Управляющие соотношения теории упругости описывают напряженно-деформированное состояние в любой внутренней точке упругого тела. Кроме того, предполагается, что напряжения во внутренних точках тела должны стремиться к граничным напряжениям. Аналогично, перемещения внутренних точек переходят непрерывно в их граничные значения. Это предполагает, что компоненты тензора упругих модулей C , определенные во внутренности области, непрерывно проходят через границу [18]. С другой стороны, необходимо принять во внимание, что граничные условия создаются конкретными физическими и геометрическими факторами. Например, некоторые части границы могут быть общими частями между двумя или более средами (упругими или неупругими). В этом случае любая граничная точка принадлежит одновременно рассматриваемому телу и телам, которые вызывают эти граничные условия. Некоторые внутренние поверхности тела также могут быть границами различных материалов. Таким образом, любая точка этих границ принадлежит одновременно материальным частям с различными механическими свойствами. Иными словами, тензор упругих модулей на таких поверхностях, строго говоря, не определен.

Для учета такой неопределенности в линейных задачах теории упругости предлагается [36, 151] следующая интегральная формулировка соотношения

между напряжениями и деформациями в теле, занимающего область Ω

$$\int_{\Omega} [(\sigma - \sigma^0) : (\sigma - \sigma^0)]^{\frac{s}{2}} d\Omega = 0, \quad (2.16)$$

где уравнения (2.12) и (2.14) принимаются во внимание и $s \geq 1$ является константой, которая определяет интегральные свойства неизвестных функций u и σ .

Из равенства (2.16) следует, что компоненты тензоров σ и σ^0 равны друг друга всюду, за исключением, быть может, множество точек меры ноль (например, на некоторых частях границы Γ области Ω). В этом описании, вектор перемещений u и тензор напряжений σ считаются независимыми переменными.

В этой главе предполагается, что перемещения равны нулю на части $\Gamma_1 \neq \emptyset$ границы Γ и вектор напряжения $\bar{q}(x)$ зафиксирован на другой части $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$. Объемные силы отсутствуют ($f(x) \equiv 0, x \in \Omega$). Предлагается следующая интегро-дифференциальная формулировка статической задачи теории упругости.

Найти такой вектор перемещений $u^(x) \in \mathcal{W}^{1,s}(\Omega)$ и тензор напряжений $\sigma^*(x) \in \mathcal{L}^s(\Omega)$, удовлетворяющие интегральным соотношениям (2.16), уравнению равновесия*

$$\nabla \cdot \sigma = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.17)$$

и граничным условиям

$$u = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad (2.18)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{q}(x), \quad x \in \Gamma_2. \quad (2.19)$$

Основная идея метода интегро-дифференциальных соотношений [36] заключается в том, что уравнения состояния, заданные в локальной алгебраической форме, заменяются эквивалентными интегральными соотношениями и, при этом, вводятся независимые геометрические и силовые переменные.

Предлагаемая формулировка в теории упругости включает в себя исследование специальных связей с классической постановкой в локальных и интегральных (вариационной) формах и разработка эффективных численных подходов к решению различных задач теории упругости. Отметим, что этот метод также применим и к другим краевым и начально-краевым задачам математической физики (см. [38, 186]).

2.2. Семейство квадратичных функционалов

Зададим следующий неотрицательный функционал

$$\Phi^{(s)}[u, \sigma] = \int_{\Omega} (\varsigma : \varsigma)^{\frac{s}{2}} d\Omega \geq 0, \quad (2.20)$$

где тензор ошибки напряжений

$$\varsigma = \sigma^0(u) - \sigma, \quad \varsigma \in \mathcal{L}^s(\Omega) \quad (2.21)$$

введен с учетом (2.14). Представим интегральное равенство (2.16) в виде

$$\Phi^{(s)} = 0.$$

После присвоения параметру s значения два с $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ и $\sigma \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, получим неотрицательный функционал

$$\Phi_{\sigma} = \Phi^{(2)} = \int_{\Omega} \varsigma : \varsigma d\Omega \geq 0, \quad (2.22)$$

который является квадратичным относительно напряжений и производных перемещений. Тогда, соотношение (2.16) может быть переписано в соответствии с

$$\Phi_{\sigma} = \int_{\Omega} (\sigma^0(u) - \sigma) : (\sigma^0(u) - \sigma) d\Omega = 0. \quad (2.23)$$

Функционал ошибки напряжений Φ_σ не является единственной положительной квадратичной формой от неизвестных функций. Как следует из свойства интегрируемой с квадратом функции ς , функционал ошибки деформаций

$$\Phi_\varepsilon = \int_{\Omega} \xi : \xi d\Omega \geq 0 \quad (2.24)$$

с тензором ошибки деформаций

$$\xi = \varepsilon^0(u) - \varepsilon(\sigma), \quad \xi \in \mathcal{L}^2(\Omega), \quad (2.25)$$

равен нулю только тогда, когда $\xi = 0$ in Ω .

В соответствии с формулами (2.12) и (2.14) этот тензор может быть использован в интегро-дифференциальной формулировке (2.16)–(2.18), (2.23) вместо тензора (2.21) следующим образом

$$\Phi_\varepsilon[u, \sigma] = 0. \quad (2.26)$$

Действительно, если модуль упругости тензор $C(x)$ является ограниченной функцией и справедливо уравнение (2.23), то

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon &= \int_{\Omega} \xi : \xi d\Omega = \int_{\Omega} (C^{-1} : \varsigma) : (C^{-1} : \varsigma) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \varsigma : C^{-1} : C^{-1} : \varsigma d\Omega \leq \|C^{-2}\|_{\mathcal{L}^\infty} \int_{\Omega} \varsigma : \varsigma d\Omega \leq c \Phi_\sigma = 0. \end{aligned}$$

Другим важным квадратичным функционалом является функционал энергетической ошибки

$$\Phi[u, \sigma] = \int_{\Omega} \varphi(u, \sigma) d\Omega \geq 0 \quad (2.27)$$

с плотностью энергетической ошибки

$$\varphi = \frac{1}{2}\xi(u, \sigma) : \varsigma(u, \sigma) \geq 0. \quad (2.28)$$

Положительная определенность квадратичной интегральной формы Φ и неотрицательность функции φ , которая определяется для каждого вектора $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ и тензора $\sigma \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, напрямую следуют из соответствующих свойств плотности энергии деформаций U и напряжений U_C , соответственно:

$$\varphi = \frac{1}{2}\xi : \varsigma = \frac{1}{2}\varsigma : C : \varsigma = U(\varsigma) = \frac{1}{2}\xi : C^{-1} : \xi = U_c(\xi) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Функционал энергетической ошибки Φ также может быть использован в интегро-дифференциальной формулировке вместо функции ошибки напряжений Φ_σ или ошибки деформаций Φ_ε в соответствии с

$$\Phi[u, \sigma] = 0. \quad (2.29)$$

С учетом неравенства (2.22), интегро-дифференциальная задача (2.23) при ограничениях (2.17)–(2.19) может быть сведена к задаче минимизации. Действительно, если решение $u^*(x)$ и $\sigma^*(x)$ системы (2.17)–(2.19), (2.23) существует, то функционал Φ_σ достигает своего минимального значения на этом решении среди всех перемещений u и напряжений σ .

Пусть рассматриваются допустимые перемещения u и напряжения σ при ограничениях (2.17)–(2.19). Тогда, можно сформулировать следующие минимизационные задачи, связанные с введенными функционалами Φ_σ , Φ_ε и Φ :

Задача 2.1. Найти такие $u^*(x)$ и $\sigma^*(x)$, которые минимизируют функционал ошибки напряжений

$$\Phi_\sigma[u^*(x), \sigma^*(x)] = \min_{u, \sigma} \Phi_\sigma[u, \sigma] = 0. \quad (2.30)$$

Задача 2.2. Найти $u^*(x)$ и $\sigma^*(x)$, которые минимизируют функционал ошибки деформаций

$$\Phi_\varepsilon[u^*(x), \sigma^*(x)] = \min_{u, \sigma} \Phi_\varepsilon[u, \sigma] = 0. \quad (2.31)$$

Задача 2.3. Найти $u^*(x)$ и $\sigma^*(x)$, которые минимизируют функционал энергетической ошибки

$$\Phi[u^*(x), \sigma^*(x)] = \min_{u, \sigma} \Phi[u, \sigma] = 0. \quad (2.32)$$

Стоит отметить, что решения Задач 2.1–2.3 эквивалентны друг другу, если они существуют.

Пусть произвольная вектор-функция u подчиняется однородным условиям (2.18) на Γ_1 и тензорная функция σ является равновесной и задана на части границы Γ_2 , в соответствии с формулами (2.17) и (2.19). Тогда, качество этих полей, или, другими словами, их близость к точному решению u^* и σ^* , может быть количественно установлена с помощью следующих безразмерных параметров

$$\Delta_\sigma = \frac{\Phi_\sigma}{\Psi_\sigma}, \quad \Delta_\varepsilon = \frac{\Phi_\varepsilon}{\Psi_\varepsilon}, \quad \Delta = \frac{\Phi}{W_\sigma}, \quad (2.33)$$

которые будем называть относительными интегральными ошибками. Здесь неотрицательные функционалы Ψ_σ и Ψ_ε

$$\Psi_\sigma = \int_\Omega \sigma : \sigma d\Omega \geq 0, \quad \Psi_\varepsilon = \int_\Omega \varepsilon : \varepsilon d\Omega = \int_\Omega \sigma : C^{-2} : \sigma d\Omega \geq 0, \quad (2.34)$$

вводятся с помощью тензора напряжений σ и

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma : C^{-1} : \sigma d\Omega \geq 0, \quad (2.35)$$

является энергией напряжений упругого тела.

2.3. Метод Ритца в МИДС

2.3.1. Алгоритм полиномиальных аппроксимаций

Рассмотрим численный алгоритм условной минимизации функционалов Φ_σ , Φ_ε или Φ на основе метода Ритца, обсуждавшегося в разделе 1.9. В этом разделе мы ограничимся изучением задач плоского напряженного состояния упругих тел ($x = \{x_1, x_2\}^T$). Алгоритм, приведенный ниже, основан на полиномиальной аппроксимации неизвестных функций $u_i(x)$ и $\sigma_{ij}(x)$, как в [36], [37] и [43].

Алгоритм 2.1. Предполагается, что упругое тело занимает выпуклую многоугольную область Ω с кусочно-линейной границей Γ . На каждом краю полигона, заданы граничные условия (2.18) и (2.19) с вектором функцией $\bar{q}(x)$ в полиномиальной форме. Для простоты, здесь предполагается также, что объемные силы отсутствуют, как в формуле (2.17). Компоненты u_i и σ_{ij} аппроксимируются полными полиномами

$$\tilde{u}_i = \sum_{k+l=0}^{N_u} u_i^{(kl)} x_1^k x_2^l, \quad i = 1, 2, \quad (2.36)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sum_{k+l=0}^{N_\sigma} \sigma_{ij}^{(kl)} x_1^k x_2^l, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.37)$$

где $u_i^{(kl)}$ и $\sigma_{ij}^{(kl)}$ – неизвестные коэффициенты компонентов перемещений и напряжений, соответственно, N_σ и N_u – степени полных полиномиальных приближений \tilde{u}_i и $\tilde{\sigma}_{ij}$.

Так как многоугольник является выпуклым, то однородное уравнение на перемещения и полиномиальные ограничения на напряжения (2.19) вместе с условием равновесия (2.17) можно точно выполнить без вырождения приближений перемещений и напряжений в Ω после соответствующего выбора степеней многочленов N_σ и N_u .

С учетом (2.37), двумерные уравнения равновесия могут быть представлены покомпонентно

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.38)$$

Из уравнений (2.37) и (2.38) следует, что коэффициенты $\sigma_{ij}^{(kl)}$ должны подчиняться линейным соотношениям

$$\begin{aligned} (k+1)\sigma_{11}^{(k+1,l)} + (l+1)\sigma_{12}^{(k,l+1)} &= 0, \\ (k+1)\sigma_{12}^{(k+1,l)} + (l+1)\sigma_{22}^{(k,l+1)} &= 0, \quad 0 \leq k+l \leq N_\sigma - 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для фиксированной степени N_σ общее количество M_σ коэффициентов $\sigma_{ij}^{(kl)}$ изначально равно

$$M_\sigma = \frac{3}{2}(N_\sigma + 1)(N_\sigma + 2).$$

Если соотношения (2.39) выполнены, то число независимых констант $\sigma_{ij}^{(kl)}$ уменьшается до

$$M_\sigma^0 = \frac{1}{2}(N_\sigma + 1)(N_\sigma + 6).$$

Определенная часть этих констант используется для удовлетворения граничных условий в напряжениях (2.19).

Стоит отметить, что минимальная допустимая степень N_σ зависит от количества сторон многоугольника K_σ , на которых предусмотрены условия в напряжениях, и максимальной степени многочлена в этих условиях J_σ . Тогда

справедлива следующая гарантированная оценка допустимого числа N_σ :

$$N_\sigma \geq J_\sigma, \quad M_\sigma^0 \geq 2K_\sigma(J_\sigma + 1).$$

Аналогично, могут быть получены соответствующие оценки степени N_u полиномиальной аппроксимации \tilde{u}_i :

$$M_u \geq 2K_u(N_u + 1),$$

где K_u – число сторон многоугольника, на которых граничное условие (2.18) определено, M_u – общее число коэффициентов $u_i^{(kl)}$

$$M_u = (N_u + 1)(N_u + 2).$$

После удовлетворения уравнений равновесия (2.39) и граничных условий (2.18) и (2.19), следующие задачи безусловной минимизации возникают: найти вектор $a^* \in \mathcal{R}^N$ минимизирующий следующие функционалы

$$\Phi_1(a) = \Phi_\sigma[\tilde{u}, \tilde{\sigma}] \rightarrow \min_{a \in \mathcal{R}^N}, \quad (2.40)$$

$$\Phi_2(a) = \Phi_\varepsilon[\tilde{u}, \tilde{\sigma}] \rightarrow \min_{a \in \mathcal{R}^N}, \quad (2.41)$$

$$\Phi_3(a) = \Phi[\tilde{u}, \tilde{\sigma}] \rightarrow \min_{a \in \mathcal{R}^N}. \quad (2.42)$$

Здесь $a \in \mathcal{R}^N$ есть вектор проектных параметров, состоящий из N независимых коэффициентов $u_i^{(kl)}$ и $\sigma_{ij}^{(kl)}$, которые остаются в уравнениях (2.37) и (2.36) после решения всех уравнений равновесия и граничных условий.

После интегрирования по области Ω , задачи (2.40)–(2.42) сводятся к минимизации соответствующих квадратичных форм

$$\Phi_i(a) = a^T K^{(i)} a - 2 \left(F^{(i)} \right)^T a \rightarrow \min_{a \in \mathcal{R}^N}. \quad (2.43)$$

Здесь $K^{(i)} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ является симметричной и положительно определенной матрицей и $F^{(i)} \in \mathcal{R}^N$ есть вектор, определяемый граничными поверхностными силами, $i = 1, 2, 3$.

Векторы $a^{(i)}$, минимизирующие соответствующие функционалы Φ_i в формуле (2.43), находятся как решения следующих линейных систем в соответствии с задачами 2.1–2.3:

$$K^{(i)}a = F^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.44)$$

2.3.2. Двумерная защемленная пластина – статический случай

В качестве примера, рассмотрим плоский изгиб прямоугольной упругой пластины (см. Рис. 2.2) с

$$\Omega = \{x : x_1 \in (0, x_1^0), x_2 \in (0, x_2^0)\}. \quad (2.45)$$

Предполагается, что однородная изотропная пластина нагружена некоторым напряжением сдвига $q_0(x_2)$ распределенными по краю Γ_1 с координатой $x_1 = x_1^0$. Тело защемлено вдоль края Γ_3 , где $x_1 = 0$. Остальные ребра Γ_2 и Γ_4 пластины свободны от нагрузок.

Таким образом, граничные условия имеют вид

$$u_1|_{x_1=0} = u_2|_{x_1=0} = 0. \quad (2.46)$$

$$\sigma_{22}|_{x_2=0} = \sigma_{22}|_{x_2=x_2^0} = \sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma_{12}|_{x_2=x_2^0} = \sigma_{11}|_{x_1=x_1^0} = 0, \quad (2.47)$$

$$\sigma_{12}|_{x_1=x_1^0} = q_0(x_2) = \frac{6q^0}{(x_2^0)^2} \left(x_2 - \frac{x_2^2}{x_2^0} \right), \quad \int_0^{x_2^0} q_0(x_2) dx_2 = q^0, \quad (2.48)$$

Искомое решение u_i^* и σ_{ij}^* аппроксимируется полиномами даваемыми формулами (2.37) и (2.36). Считается, что степени полиномов для перемещений и напряжений связаны $N_u = N_\sigma + 1$.

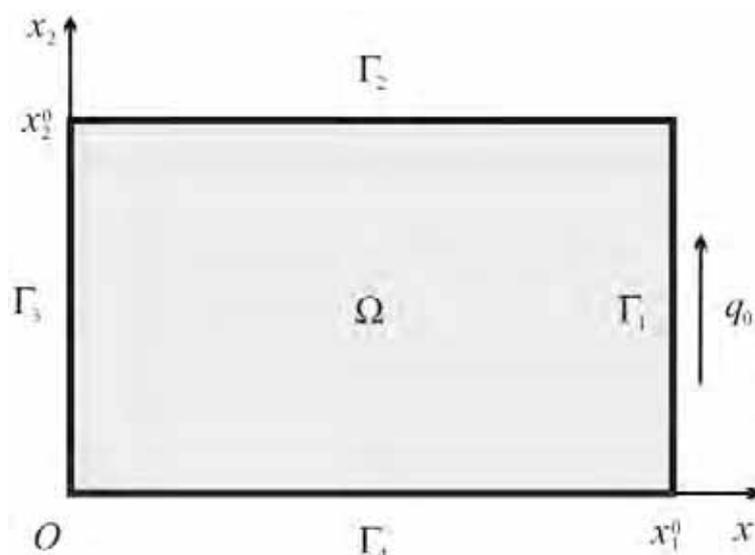


Рис. 2.2. Прямоугольная упругая пластина.

Пример 2.1. В соответствии с Алгоритмом 2.1, уравнения равновесия (2.38) и граничные условия (2.46), (2.47) аналитически удовлетворяются на первом шаге. На втором этапе формируются матрица жесткости $K^{(i)}$ и векторы силы $F^{(i)}$. Наконец, решается одна из линейных задач (2.44). Чтобы избежать нежелательной ошибки вычислений, все расчеты выполняются аналитически с помощью символьных вычислений.

Следующие безразмерные геометрические и материальные параметры были выбраны: длина пластины $x_1^0 = 1$ и высота $x_2^0 = 1$, модуль Юнга $E = 100$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, внешняя сила $q^0 = 1$.

Расчеты были проведены для задач 2.1–2.3 с различными полиномиальными аппроксимациями степени N_σ . В таблице 2.1 представлены номера N_σ реализованные в эти расчетах и соответствующие общие размерности N вектора проектных параметров a .

Таблица 2.1

Число степеней свободы N по отношению к степени многочлена N_σ для примера 2.1

N_σ	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N	105	131	160	192	227	265	306	350	397

Упругие энергии $W_i(N) = W(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$ для Задач 2.1–2.3 приведены на Рис. 2.3, где упругая энергия определяется как

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon^0 d\Omega . \quad (2.49)$$

Как можно видеть из Рис. 2.3, приближенное значение W_1 (сплошная линия) энергии W монотонно убывает при увеличении порядка N_{σ} . В отличие от этого, значения энергий W_2 и W_3 (пунктирные и штрих-пунктирные кривые соответственно) монотонно растут, если число N_{σ} увеличивается.

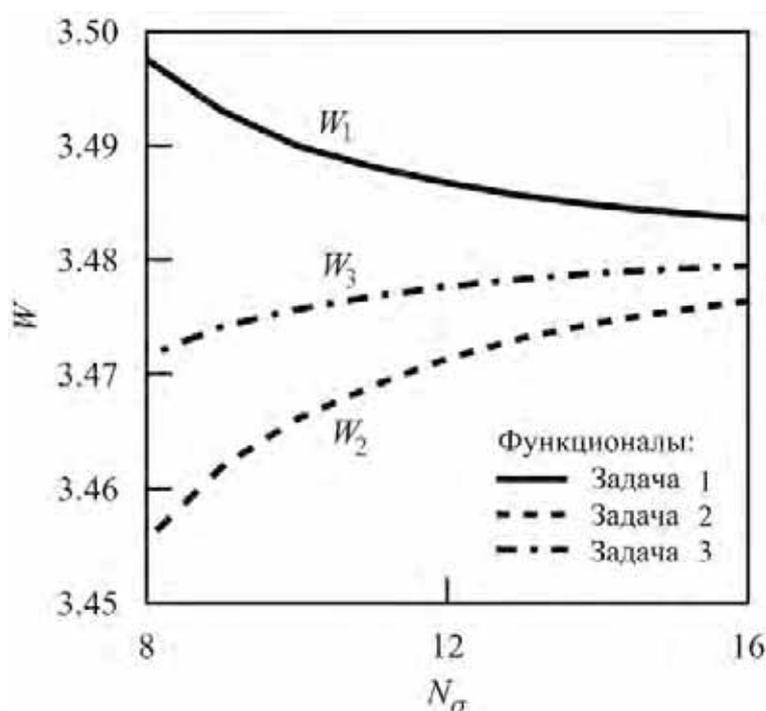


Рис. 2.3. Упругие энергии W_i как функции числа степеней свободы N .

Скорость уменьшения функций

$$\Delta_1 = \Delta_{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{\sigma}), \quad \Delta_2 = \Delta_{\varepsilon}(\tilde{u}, \tilde{\sigma}), \quad \Delta_3 = \Delta(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$$

являются важными характеристиками сходимости алгоритма. Относительные интегральные ошибки Δ_i , $i = 1, 2, 3$, соответствующие Задачам 2.1–2.3, представлены как функции от N_{σ} на Рис. 2.4 сплошной, штриховой и штрих-пунктирной кривыми, соответственно. Эти значения близки друг к другу и

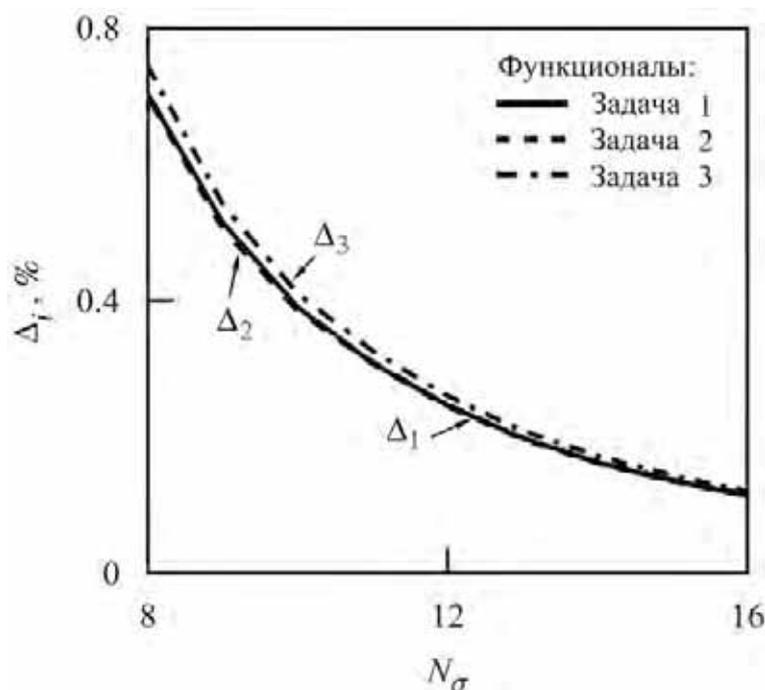


Рис. 2.4. Относительная интегральная ошибка $\Delta_i(N_\sigma)$ для Задач 2.1–2.3.

монотонно уменьшаются, если порядок аппроксимации N_σ растет.

Упругие энергии W_i , относительные интегральные ошибки Δ_i и некоторые из относительных энергетических погрешностей

$$\delta_W^{(ij)} = \left| \frac{W_i - W_j}{W_i} \right|$$

представлены в таблице 2.2 для порядка аппроксимации $N_\sigma = 16$ ($N = 397$).

Характерное перемещение в середине нагруженного края равно

$$u_2 \left(1, \frac{1}{2} \right) \simeq 0.0696.$$

Задачи 2.1 и 2.2 дают верхние границы для упругой энергии W , запасаемой в этой упругой пластине, в то время как Задача 2.3 устанавливает оценку снизу для этой энергии (см. Рис. 2.4 и Таблицу 2.2).

Распределение плотности упругой энергии

$$U_e(x) = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon^0 \quad (2.50)$$

Таблица 2.2

Упругие энергии W_i , относительные интегральные ошибки Δ_i и относительные интегральные погрешности $\delta_W^{(2i)}$ для Задач 2.1–2.3.

Задача	1	2	3
W_i	0.03476	0.03484	0.03480
$\Delta_i, \%$	0.1129	0.1128	0.1194
$\delta_W^{(2i)}, \%$	0.21	0	0.12

для Задачи 2.3 при $N_\sigma = 16$ изображено на Рис. 2.5. С механической точки зрения, максимальные значения плотности энергии реализуется в углах, смежных с заземленным краем: $x = \{0, 0\}^T$ и $x = \{0, 1\}^T$.

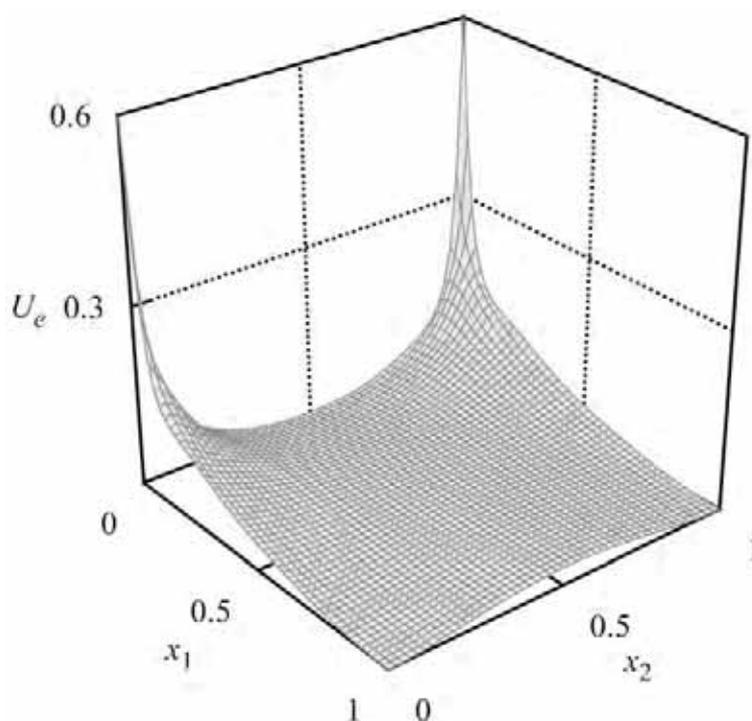


Рис. 2.5. Распределение упругой энергии $U_e(x)$ в Ω для Задачи 2.3.

МИДС позволяет явно анализировать распределение локальных ошибок. Для этой цели может быть использована плотность энергии ошибки $\varphi(\tilde{u}(x), \tilde{\sigma}(x))$, введенная в формуле (2.28). Как можно видеть на Рис. 2.6 для Задачи 2.3 с $N_\sigma = 16$ эта функция имеет максимальные значения в тех же точках, где концентрируется плотность упругой энергии (2.50), показанная на Рис. 2.5. Как будет показано далее функция φ указывающая на особен-

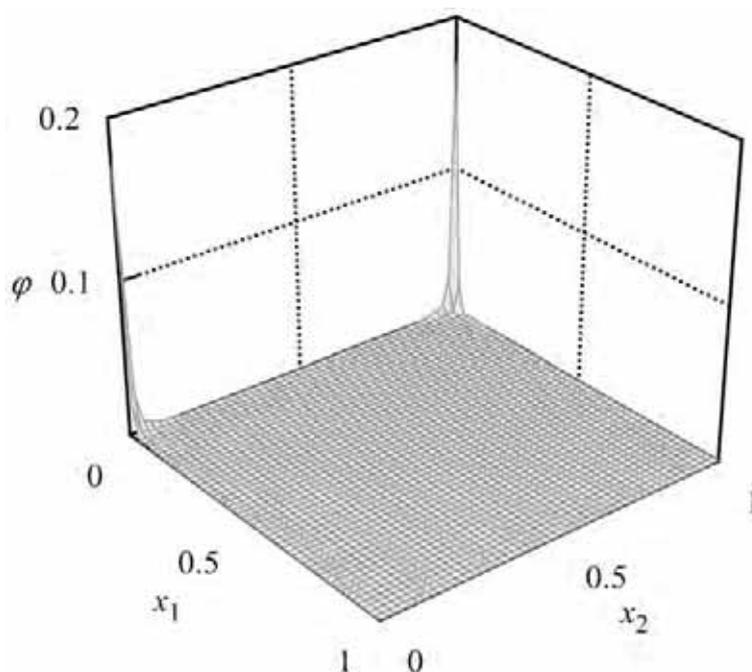


Рис. 2.6. Распределение энергетической ошибки $\varphi(x)$ в Ω для задачи 2.3.

ности решения может использоваться для уточнения и адаптации сетки в процедурах МКЭ, чтобы улучшать качество приближенного решения.

2.4. Двумерные задачи о свободных колебаниях

Несмотря на то, что первые работы, посвященные собственным колебаниям упругих мембран появились еще в девятнадцатом веке, когда аналитические решения были получены для ряда простых областей [51, 88], еще остаются открытыми вопросы, относящиеся к построению приближенных функций и оценок качества решения для мембран сложной формы, структурно-неоднородных оболочек, и т.д. Различные методы, основанные на вариационных принципах используются для таких задач [18]. Колебания треугольной мембраны были исследованы с помощью вариационного подхода и кусочно-полиномиальных аппроксимаций [149]. Стоит отметить также метод ускоренной сходимости [2, 105], который был использован, чтобы найти собственные частоты колебаний для эллиптических мембран с различными граничными условиями.

Для демонстрации применимости МИДС к динамическим задачам, проанализируем собственные колебания круговой и эллиптической мембран.

2.4.1. Формулировка краевой задачи

Рассмотрим упругую мембрану, занимающую плоскую область Ω с границей Γ . Линеаризованное выражение для площади поверхности деформированной мембраны может быть записано в виде интеграла

$$\int_{\Omega} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega,$$

где $w(x)$ – боковые смещения мембраны.

Тогда, вводя коэффициент пропорциональности τ (Коэффициент натяжения мембраны, как в разделе 1.5.), потенциальная энергия мембраны может быть записана в виде

$$W_M = \frac{\tau}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega. \quad (2.51)$$

Уравнение гармонических колебаний упругой мембраны дается формулой (1.134). В дальнейшем предполагается, что объемная плотность ρ и толщина h не зависят от пространственных координат $\{x_1, x_2\}^T$, при этом $h = 1$. Только однородные условия Дирихле (1.129) и Неймана (1.130) рассматриваются в данном разделе. Таким образом, краевая задача может быть записана следующим образом

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 w + \tau \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \quad x \in \Omega; \\ w &= 0, \quad x \in \Gamma^{(1)}; \\ n(x) \cdot \sigma &= 0, \quad x \in \Gamma^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Здесь $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}^T$ является вектором напряжения и n это внешняя нормаль к границе Γ .

Чтобы сформулировать интегро-дифференциальную задачу, перепишем соотношения (1.125) в следующей интегральной форме

$$\begin{aligned}\Phi_M &= \int_{\Omega} \varphi_M d\Omega = 0, \\ \varphi_M &= \left(\sigma_1 - \tau \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\sigma_2 - \tau \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2.\end{aligned}\tag{2.53}$$

Равенство (2.53) предполагает, что локальные условия (1.125) должны быть выполнены всюду в области Ω за исключением быть может некоторых точек, составляющих множество меры нуль. Видно также, что функционал Φ_M является неотрицательным при любых значениях скалярной функции $w \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ и вектор-функции $\sigma \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. С помощью этого интегрального соотношения, краевая задача (2.52) может быть сведена к следующей вариационной задаче [46]: найти функции $w^*(x)$ и $\sigma^*(x)$, которые строго удовлетворяют уравнению равновесия (1.128), граничные условия из формулы (2.52) и доставляют минимум функционалу Φ_M :

$$\Phi_M[w, \sigma] \rightarrow \min_{w, \sigma}\tag{2.54}$$

при изопериметрическом ограничении

$$W_M[w, \sigma] = 1.\tag{2.55}$$

В случае, когда задача (2.52) имеет решение w^* и σ^* , то значение функционала Φ_M равно нулю :

$$\Phi_M[w^*, \sigma^*] \equiv 0.\tag{2.56}$$

Таким образом, интегро-дифференциальная постановка задачи состоит в

нахождении таких собственных значений λ и форм w , σ , что

$$\begin{aligned}\Phi_M &= \int_{\Omega} \varphi_M(w, \sigma) d\Omega \rightarrow \min_{w, \sigma}, \\ \varphi_M &= \varsigma \cdot \varsigma, \quad \varsigma = \sigma^0 - \sigma, \quad \sigma^0 = \tau \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \nabla \cdot \sigma + \lambda w &= 0, \quad \lambda = \tau^{-1} \rho \omega^2, \quad W_M = 1, \\ w &= 0, \quad x \in \Gamma^{(1)}, \quad n(x) \cdot \sigma = 0, \quad x \in \Gamma^{(2)}.\end{aligned}\tag{2.57}$$

Для решения краевой задачи (2.57), применим метод Ритца, описанный в разделе 1.9., и аппроксимируем неизвестные функции w , σ_1 и σ_2 конечномерными полиномиальными функциями

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \sum_{k+l=0}^{N_w} w^{(kl)} x_1^k x_2^l, \\ \sigma_1 &= \sum_{k+l=0}^{N_\sigma} \sigma_1^{(kl)} x_1^k x_2^l, \\ \sigma_2 &= \sum_{k+l=0}^{N_\sigma} \sigma_2^{(kl)} x_1^k x_2^l,\end{aligned}\tag{2.58}$$

где N_w и N_σ являются степенями полных полиномов.

После подстановки аппроксимаций (2.58) в уравнения равновесия и граничные условия из (2.57), удовлетворение этих соотношений в каждой точке x эквивалентно условию, что все коэффициенты, которые являются линейными комбинациями $w^{(kl)}$, $\sigma_1^{(kl)}$, и $\sigma_2^{(kl)}$ каждого монома в соответствующих полиномах, равны нулю. Собрав оставшиеся константы в N -мерный вектор проектных параметров a и интегрируя первое соотношение в уравнении (2.57), Φ_M можно представить в виде функции от N переменных:

$$\Phi_M = \Phi_M(a).\tag{2.59}$$

Компоненты вектора a находятся из следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_M}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi_M}{\partial a_N} = 0. \quad (2.60)$$

Эта система может быть переписана в матричном виде

$$Ka = 0, \quad (2.61)$$

где $K \in \mathcal{R}^{N \times N}$ является матрицей этой системы с элементами

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial a_i \partial a_j}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.62)$$

Отметим, что в классическом подходе, основанном на принципе Гамильтона (теорема 1.9), элементы матрицы K линейно связаны с собственными числами λ . В отличие от этого подхода, элементы матрицы K введенные формулой (2.62), квадратично зависят от λ и эта матрица имеет следующую структуру:

$$K(\lambda) = \lambda^2 K^{(2)} + \lambda K^{(1)} + K^{(0)}, \quad K^{(0)}, K^{(1)}, K^{(2)} \in \mathcal{R}^{N \times N} \quad (2.63)$$

Собственные числа λ_j , $j = 1, 2, \dots, 2N$ могут быть найдены из условия

$$\det K(\lambda) = 0. \quad (2.64)$$

Заметим, что формула (2.64) является полиномом степени $2N$ относительно параметра λ . Соответствующие собственные векторы $a^{(j)}$ находятся из системы уравнений (2.61) с $\lambda = \lambda_j$. Можно показать, что если вектор a является точным нетривиальным решением уравнения (2.61), то значение $\Phi(a)$ в формуле (2.59) равно нулю.

Принимая во внимание тот факт, что определитель матрицы $K(\lambda)$ является полиномом с действительными коэффициентами, то, как следует из основной теоремы алгебры, решение уравнения (2.64) состоит из действительных и пар комплексно сопряженных корней. Если значения частоты

$$\omega_j = (\rho^{-1}\tau\lambda_j)^{\frac{1}{2}}$$

действительные, то они вместе с собственными векторами $a^{(j)}$ точно удовлетворяют всем соотношениям интегро-дифференциальной задачи (2.57). Эти собственные частоты ω_j и векторы $a^{(j)}$ представляет собой точное решение задачи о собственных колебаниях мембраны.

Если использованные конечномерные аппроксимации (2.58) не дают возможности найти точное решение, то частоты ω_j , удовлетворяющие уравнению (2.64), могут быть только комплексными величинами. Таким образом, компоненты собственных векторов $a^{(j)}$, также оказываются комплексными величинами. Этот факт можно проиллюстрировать на примере. Известно, что аналитическое решение задачи о свободных колебаниях для тонкой круглой мембраны описывается в терминах тригонометрических функций Бесселя [51]. Таким образом, конечномерные полиномиальные приближения (2.58) не могут точно описать, такого рода решения.

Несмотря на то, что комплексные значения собственных частот ω_j не имеют механического смысла, как предполагается в формуле (2.52), действительные части

$$\tilde{\lambda}_j = \operatorname{Re}(\lambda_j), \quad \tilde{a}^{(j)} = \operatorname{Re}(a^{(j)})$$

могут служить в качестве приближенного решения этой краевой задачи, как это будет показано ниже, в трех примерах этого раздела. Следующий критерий также может быть использован для оценки качества полученных при-

ближенных решений:

$$\Delta_M = \tau^{-1} \Phi_M(\tilde{a}^{(j)}, \tilde{\lambda}_j) < \mu, \quad (2.65)$$

где μ – положительная действительная величина, характеризующая точность решения. При этом мнимая часть собственного значения $\text{Im}(\lambda_j)$ является неявной оценкой качества решения.

2.4.2. Собственные колебания круглых и эллиптических мембран

Проиллюстрируем некоторые специальные свойства МИДС на примере однородной упругой мембраны, занимающей эллиптическую область Ω с полуосями x_1^0 и x_2^0 . Система координат выбрана так, что принципиальные оси эллипса $\Gamma = \partial\Omega$ совпадают с осями x_1 и x_2 , как это показано на Рис. 2.7. Предполагается, что коэффициент натяжения мембраны τ и поверхностная плотность ρ равны единице.

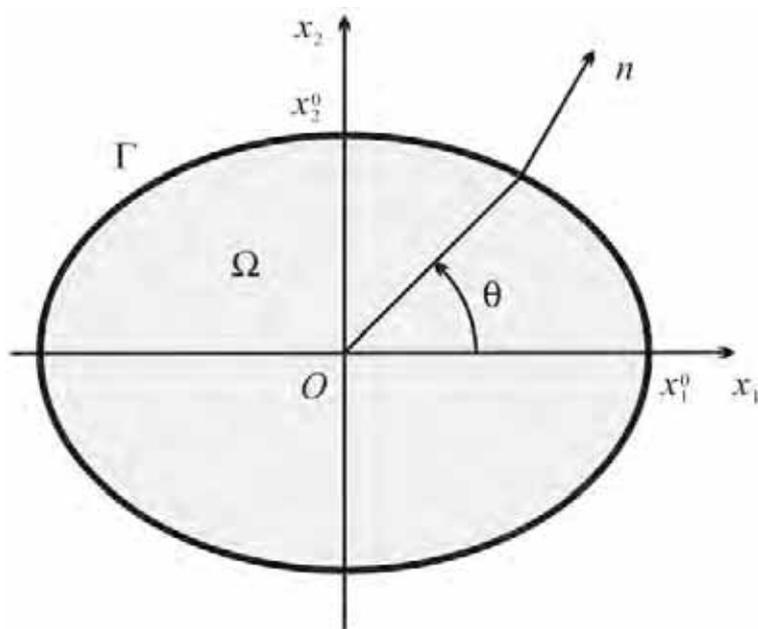


Рис. 2.7. Эллиптическая область Ω .

Пример 2.2. Рассмотрим сначала собственные колебания круглой мембраны с единичным радиусом, $x_1^0 = x_2^0 = 1$. Мембрана фиксируется по

его внешнему контуру, т.е. только граничные условия Дирихле, $\Gamma = \Gamma^{(1)}$ ($\Gamma^{(2)} = \emptyset$) заданы для уравнения (2.52).

Неизвестные функции w , σ_1 и σ_2 аппроксимируются полиномами в виде конечномерных разложений (2.58). Пусть степени полиномов в формуле (2.58) связаны друг с другом следующим соотношением

$$N_\sigma = N_w + 1 \quad (2.66)$$

в соответствии с предложенным алгоритмом.

Тогда общее число свободных параметров, доступных в формуле (2.58), чтобы найти приближенные собственные значения и формы, равно

$$N_T = \frac{(3N_w + 7)(N_w + 2)}{2}.$$

Для удовлетворения уравнений равновесия, которые получаются после подстановки разложений (2.58) в уравнение (2.57), необходимо приравнять к нулю коэффициенты при каждом мономе этих многочленов. Число разрешаемых соотношений определяется по следующей формуле:

$$N_e = \frac{(N_w + 1)(N_w + 2)}{2}.$$

Для этой краевой задачи удобно использовать полярные координаты:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad (2.67)$$

где r и θ – радиальные и угловые координаты, соответственно, как показано на Рис. 2.7. После подстановки выражений (2.67) в формулу (2.57), получается граничное уравнение

$$w(r, \theta)|_{r=1} = 0,$$

которое является полиномом относительно тригонометрических функций

$\sin(\theta)$ и $\cos(\theta)$. Если все коэффициенты при каждом мономе равны нулю, тогда это полиномиальное выражение удовлетворяется тождественно. Для этой цели, необходимо решить $N_b = 2N_w + 1$ алгебраических соотношений. Отметим, что условие Неймана $n \cdot \sigma = 0$ так же может быть удовлетворено подобным образом.

Следовательно, имеется

$$N_v = N_w^2 + 3N_w + 5$$

свободных параметров для решения вариационной системы уравнений (2.61).

Для повышения эффективности этого численного алгоритма можно учесть свойства симметрии краевой задачи. В том случае, когда мембрана является симметричной относительно осей декартовой системы координат, краевая задача может быть разделена на четыре независимых подзадачи следующим образом.

Первая задача описывает колебания мембраны (тип I), для которых функции перемещений W являются симметричными относительно осей координат:

$$w(x_1, x_2) = w(-x_1, x_2) = w(x_1, -x_2).$$

Второй тип вибрации (II) определяет перемещения, которые симметричны относительно оси x_1 и антисимметричны по отношению к другой оси:

$$w(x_1, x_2) = w(-x_1, x_2) = -w(x_1, -x_2).$$

Для третьей подзадачи (тип III), характерно следующее свойство:

$$w(x_1, x_2) = -w(-x_1, x_2) = w(x_1, -x_2).$$

Антисимметрия полей перемещений по отношению к осям координат харак-

Таблица 2.3

Частотные характеристики круглой мембраны.

λ^*	Мода колебаний	$\operatorname{Re}\lambda - \lambda^*$	$\operatorname{Im}\lambda$	$\Delta, \%$
5.783	I	$5.8 \cdot 10^{-20}$	$3.1 \cdot 10^{-11}$	$7.9 \cdot 10^{-21}$
14.682	II, III	$2.2 \cdot 10^{-19}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$5.7 \cdot 10^{-17}$
26.375	I, IV	$3.9 \cdot 10^{-13}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-11}$
30.471	I	$4.0 \cdot 10^{-12}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$
40.706	II, III	$1.9 \cdot 10^{-11}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-9}$
49.218	II, III	$4.4 \cdot 10^{-10}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$8.5 \cdot 10^{-9}$
57.583	I, IV	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$
70.850	I, IV	$3.1 \cdot 10^{-6}$	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$
74.887	I	$7.1 \cdot 10^{-6}$	$4.9 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$
76.939	II, III	$9.2 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$6.4 \cdot 10^{-6}$

теризует последний тип колебаний (IV):

$$w(x_1, x_2) = -w(-x_1, x_2) = -w(x_1, -x_2).$$

Полиномиальные представления (2.58) особенно удобны для аппроксимации полей перемещений и напряжений декомпозированных колебаний мембраны. Например, только четные функции $x_1^{2j} x_2^{2k}$ в формуле (2.58) используются для описания симметричных перемещений w (тип I). В этом случае компоненты σ_1 и σ_2 вектора напряжений σ определяются функциями $x_1^{2j+1} x_2^{2k}$ и $x_1^{2j} x_2^{2k+1}$, соответственно.

Известно, что задача о собственных колебаниях однородной круговой мембраны, закрепленной по контуру имеет аналитическое решение [51]. Первые десять чисел, которые являются квадратами корней функций Бесселя

$$J_k(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и соответствующие типы мод представлены в первых двух столбцах таблицы 2.3. Отметим, что кратные частоты могут относиться к двум разным типам колебаний в силу симметрии.

Точные решения дают нам возможность оценить эффективность предложенного алгоритма и найти приближенные собственные частоты и формы колебаний мембран. Значения $\operatorname{Re}\lambda - \lambda^*$ и $\operatorname{Im}\lambda$ характеризующие точность собственных значений, а также относительные интегральные ошибки Δ_M (оценка качества собственной формы), определенные в формуле (2.65), приведены в таблице при фиксированной степени полиномов $N_w = 15$. Отметим достаточно высокую точность нижних собственных частот, которая снижается, когда величины собственных значений λ^* становятся больше. Стоит также отметить, что было получено 35 собственных мод, которые удовлетворяют неравенству (2.65) при фиксированных значениях параметров $\mu = 0.01$ и $N_w = 15$.

Величины мнимой части $\operatorname{Im}\lambda$ и интегральной относительной погрешности Δ_M для приближенных собственных значений уменьшаются, когда параметр N_w растет, как это показано на Рис. 2.8 и на Рис. 2.9 для первых трех собственных значений (сплошная, штрих-пунктирная и штриховая кривые соответственно), представленных в таблице 2.3.

Пример 2.3. Рассмотрим однородную эллиптическую мембрану, закрепленную по контуру. Уравнение границы мембраны можно записать в параметрическом виде.

$$x_1 = x_1^0 \cos \theta, \quad x_2 = x_2^0 \sin \theta \quad (2.68)$$

Следующие значения выбраны в численном примере: $x_1^0 = 1$ и $x_2^0 = 0.6$.

Традиционный метод разделения переменных сводит краевую задачу о собственных колебаниях эллиптической мембраны к системе из двух параметрически связанных обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнения Матье [51]). Однако, решение этой системы не такая уж и простая задача, так как нет достаточно эффективного метода расчета функций Матье.

Как и в Примере 2.2 для круговой области, можно удовлетворить в точ-

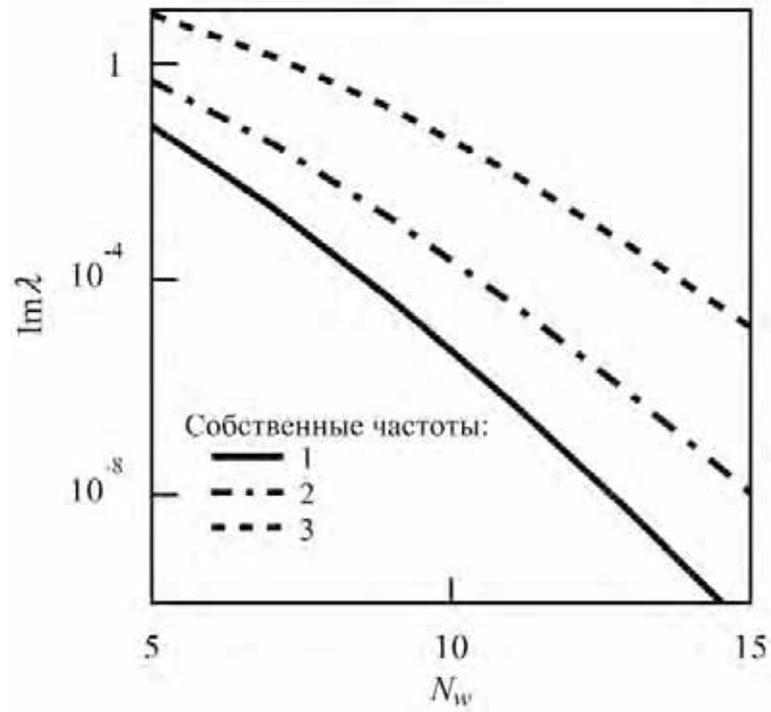


Рис. 2.8. Мнимая часть $\text{Im} \lambda$ как функция от аппроксимационной степени N_w для круглой мембраны.

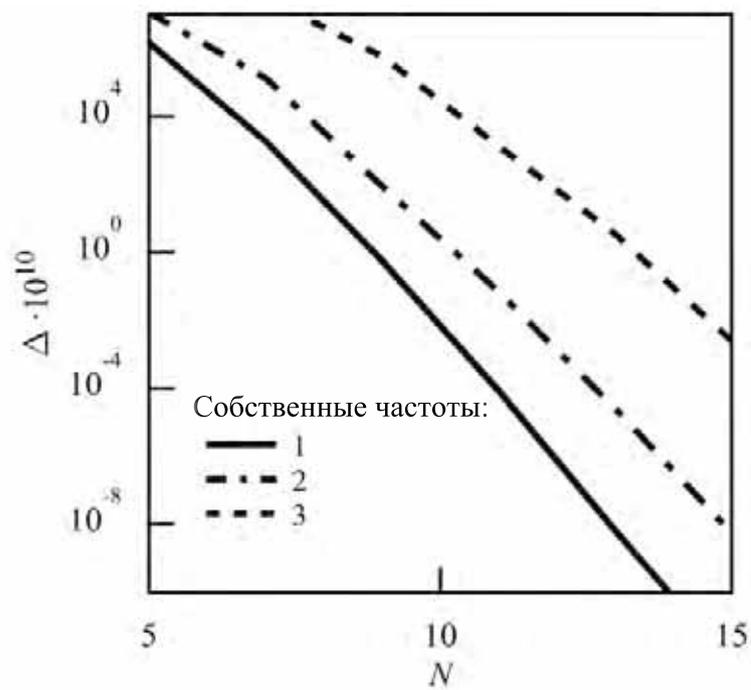


Рис. 2.9. Относительная интегральная ошибка Δ собственной формы как функция от степени аппроксимации N_w для круглой мембраны.

Таблица 2.4

Частотные характеристики для эллиптической мембраны (задача Дирихле).

Re λ	Мода колебаний	Im λ
10.846	I	$1.4 \cdot 10^{-9}$
20.952	III	$9.4 \cdot 10^{-8}$
33.938	II	$7.4 \cdot 10^{-7}$
35.331	I	$7.1 \cdot 10^{-5}$
48.869	IV	$2.0 \cdot 10^{-4}$
54.110	III	$6.0 \cdot 10^{-4}$
67.523	II	$1.1 \cdot 10^{-3}$
70.977	I	$6.7 \cdot 10^{-4}$
77.306	I	$4.4 \cdot 10^{-2}$
90.038	IV	$5.4 \cdot 10^{-2}$

ности уравнения равновесия и граничные условия из формулы (2.57) с помощью выражений (2.68) координат контура и полиномиальных аппроксимаций (2.58) функций w , σ_1 , и σ_2 . Вследствие симметрии эллипса относительно осей координат (как это видно на Рис. 2.7), исходная задача может быть разделена на четыре независимые также, как и в Примере 2.2.

Первые десять собственных величин $\tilde{\lambda} = \text{Re}\lambda$ и их мнимые части $\text{Im}\lambda$, характеризующие точность аппроксимаций, приведены в таблице 2.4. Как и для случая круглой мембраны, можно отметить достаточно высокую точность этих частот, а также тот факт, что точность собственных чисел ухудшается, если $\tilde{\lambda}$ становится больше. Относительная погрешность Δ для эллиптической мембраны больше, чем для круглой мембраны вычисленной с той же степенью полиномиальных приближений N_w . Стоит также отметить, что 25 мод были получены, удовлетворяющих неравенству (2.65) при фиксированном значении (2.65) и заданном параметре $N_w = 15$.

Поведение просто упорядоченных чисел $\tilde{\omega}(m) = \sqrt{\tilde{\lambda}(m)}$, относительно их порядкового номера m для различных типов (I - IV) колебаний, показано на Рис. 2.10. Частоты $\tilde{\omega}$ могут быть определены из этого графика при некотором числе m и типе моды. Видно, что абсолютные значения некоторых

частот, которые соответствуют различным модам близки друг к другу. Таким образом, если не учитывать свойства симметрии, то это может привести к определенным трудностям при численном нахождении собственных частот и соответствующих форм в связи с их кратностью.

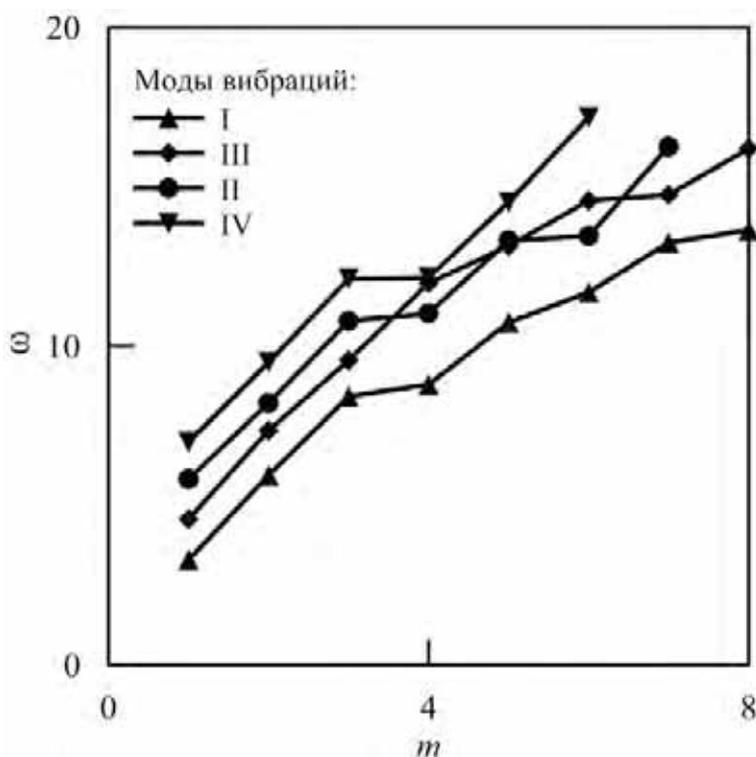


Рис. 2.10. Собственные частоты ω эллиптической мембраны как функции их порядкового номера m .

МИДС позволяет анализировать качество полученных приближенных решений с использованием локальных критериев. Подынтегральная функция $\varphi_M(x)$ в выражении (2.53) для функционала Φ_M может быть выбрана в качестве некоторого распределенного параметра, определяющего погрешность приближения для плотности потенциальной энергии (подынтегральное выражение (2.51)). Неотрицательная функция $\varphi_M(x)$ имеет размерность поверхностной плотности энергии. Рассмотрим, например, самую низкую асимметричную моду собственных колебаний (тип IV, $\text{Re}\lambda = 48.869$ в таблице 2.4). Для полиномиальной аппроксимации (2.58) при $N_w = 15$, локальная энергетическая ошибка показанная на Рис. 2.11 близка к нулю и достигает своих максимальных значений на границе мембраны.

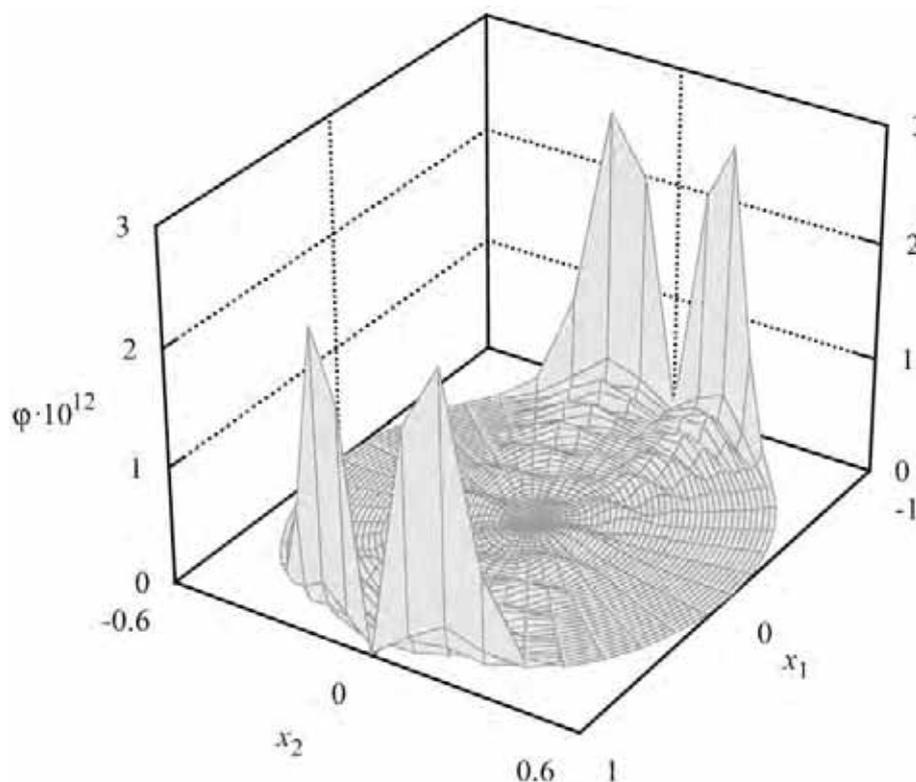


Рис. 2.11. Локальная энергетическая ошибка в эллиптической мембране.

Пример 2.4. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях (2.57) эллиптической мембраны с граничным условием Неймана на $\Gamma = \Gamma^{(2)}$ из уравнения (2.7) ($\Gamma^{(1)} = \emptyset$). Используя формулу (2.68), это условие может быть представлено в следующем виде

$$\frac{\sigma_1 \cos \theta}{x_1^0} + \frac{\sigma_2 \sin \theta}{x_2^0} = 0. \quad (2.69)$$

Данная задача соответствует задаче о свободных колебаниях тяжелой идеальной жидкости в вертикальных эллиптических резервуара с постоянной глубиной [1].

Параметры этой задачи заданы, как и в примере 2.3 ($\rho = \tau = 1$, $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 0.6$, $N_w = 15$). Типы и примерные величины первых десяти чисел $\tilde{\lambda} = \text{Re} \lambda$ и значений $\text{Im} \lambda$ приведены в таблице 2.5.

Характерной особенностью задачи с граничными условиями Неймана, представленные в Примере 2.4, в отличие от задачи Дирихле в Примере 2.3,

Таблица 2.5

Частотные характеристики эллиптической мембраны (задача Неймана).

Re λ	Мода колебаний	Im λ
3.490	III	$5.2 \cdot 10^{-12}$
8.905	II	$1.3 \cdot 10^{-11}$
11.466	I	$9.4 \cdot 10^{-9}$
16.864	IV	$7.1 \cdot 10^{-8}$
23.571	III	$6.6 \cdot 10^{-7}$
28.273	II	$1.3 \cdot 10^{-6}$
32.690	I	$4.2 \cdot 10^{-6}$
39.545	I	$3.2 \cdot 10^{-4}$
43.267	IV	$3.5 \cdot 10^{-4}$
47.218	III	$4.2 \cdot 10^{-5}$

является то, что мода колебаний, соответствующая наименьшему нетривиальному собственному значению, в задаче Неймана соответствует третьему типу колебаний. Это явление было также отмечено в [1].

2.5. Вариационные принципы для квадратичных функционалов

В этом разделе обсуждаются некоторые вариационные свойства задач минимизации 2.1–2.3. Граничные условия можно записать покомпонентно, как в уравнениях (1.73) и (1.74)

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u = \bar{u}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(1)}; \quad (2.70)$$

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n = \bar{q}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(2)}. \quad (2.71)$$

Здесь \bar{u}_i и \bar{q}_i , $i = 1, 2, 3$ – граничные перемещения и нагрузки соответственно. Части границы $\Gamma_i^{(1)}$ и $\Gamma_i^{(2)}$ дополняют друг друга:

$$\bar{\Gamma}_i^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_i^{(2)} = \Gamma, \quad \Gamma_i^{(1)} \cap \Gamma_i^{(2)} = \emptyset, \quad i = 1, 2, 3.$$

Объемная плотность силы $f(x)$, как предполагается, распределена внутри области Ω .

Рассмотрим Задачу 2.1 с функционалом Φ_σ определенным в формуле (2.22). Пусть действительные и произвольные допустимые перемещения и напряжения обозначены как u^* , σ^* и u , σ , соответственно, с их отношениями

$$u = u^* + \delta u, \quad \sigma = \sigma^* + \delta \sigma.$$

Тогда, можно распространить функционал ошибки напряжений $\Phi_\sigma[u, \sigma]$ на вариации неизвестных функций δu и $\delta \sigma$ в соответствии с

$$\Phi_\sigma[u, \sigma] = \Phi_\sigma[u^*, \sigma^*] + \delta_u \Phi_\sigma + \delta_\sigma \Phi_\sigma + \delta^2 \Phi, \quad (2.72)$$

где $\delta_u \Phi_\sigma$ и $\delta_\sigma \Phi_\sigma$ являются первыми вариациями функционала Φ_σ относительно u и σ ; $\delta^2 \Phi$ является второй вариацией.

Интегрируя первую вариацию

$$\delta_{\sigma^0} \Phi_\sigma = 2 \int_{\Omega} \zeta : \delta \sigma^0 d\Omega$$

по частям и учитывая формулу (2.14), получим следующие равенства

$$\delta_u \Phi_\sigma = -2 \int_{\Omega} \nabla \cdot (C(x) : \zeta) \cdot \delta u d\Omega + 2 \int_{\Gamma} n(x) \cdot (C(x) : \zeta) \cdot \delta u d\Gamma, \quad (2.73)$$

$$\delta_\sigma \Phi_\sigma = -2 \int_{\Omega} \zeta : \delta \sigma d\Omega.$$

Как видно из уравнения (2.73), первые вариации $\delta_u \Phi_\sigma$ и $\delta_\sigma \Phi_\sigma$ равны нулю для любых δu и $\delta \sigma$, если выполняются следующие уравнения

$$\zeta = 0, \quad \nabla \cdot (C(x) : \zeta) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2.74)$$

$$n(x) \cdot (C(x) : \zeta) \cdot e^{(i)} = 0, \quad x \in \Gamma_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следовательно, тензорное уравнение Гука

$$\varsigma(u, \sigma) = \sigma^0(u) - \sigma = 0, \quad (2.75)$$

которое является условием стационарности функционала Φ_σ и вместе с граничными ограничениями (2.70) и (2.71), а также векторным соотношением равновесия

$$\nabla \cdot \sigma + f(x) = 0 \quad (2.76)$$

составляют полную систему уравнений линейной теории упругости.

Вторая вариация

$$\delta^2 \Phi_\sigma[\delta u, \delta \sigma] = \int_{\Omega} \varsigma(\delta u, \delta \sigma) : \varsigma(\delta u, \delta \sigma) d\Omega \quad (2.77)$$

неотрицательна в связи с положительно определенностью формы подынтегрального выражение (2.77).

Пусть теперь второй квадратичный функционал $\Phi_\varepsilon \geq 0$ введенный в формуле (2.24), достигнет своего абсолютного минимума (нулевого значения) на действительных перемещении u^* и напряжении σ^* в соответствии с Задачей 2.2. Тогда, первые вариации этого функционала имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_u \Phi_\varepsilon &= -2 \int_{\Omega} \nabla \cdot \xi \cdot \delta u d\Omega + 2 \int_{\Gamma} n(x) \cdot \xi \cdot \delta u d\Gamma, \\ \delta_\sigma \Phi_\varepsilon &= -2 \int_{\Omega} \xi : C^{-1}(x) : \delta \sigma d\Omega. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Условием стационарности функционала Φ_ε , также как и для Φ_σ , является вновь тензорное соотношение Гука, просто переписанное в другом виде

$$\xi(u, \sigma) = \varepsilon^0(u) - \varepsilon(\sigma) = 0. \quad (2.79)$$

Вторая вариация – также неотрицательна:

$$\delta^2 \Phi_\varepsilon[\delta u, \delta \sigma] = \int_{\Omega} \xi(\delta u, \delta \sigma) : \xi(\delta u, \delta \sigma) d\Omega \geq 0. \quad (2.80)$$

С учетом соотношений (2.13)–(2.14), функционал Φ_ε выраженный через тензор ошибки деформации ξ , можно переписать через компоненты тензора ошибки напряжений ς . В частности, интеграл Φ_ε для двумерного однородного изотропного тела (плоское напряженное состояние) имеет вид

$$\Phi_\varepsilon = \frac{(1 + \nu^2)}{E^2} \int_{\Omega} \left[\varsigma_{11}^2 - \frac{4\nu}{(1 + \nu^2)} \varsigma_{11}\varsigma_{22} + \varsigma_{22}^2 + \frac{2(1 + \nu)^2}{(1 + \nu^2)} \varsigma_{12}^2 \right] d\Omega. \quad (2.81)$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Неотрицательность функционала в формуле (2.81) следует из того, что множитель перед смешанным членом ограничен неравенством

$$4\nu(1 + \nu^2)^{-1} < 2,$$

так как величина коэффициента Пуассона находится в следующем интервале

$$-1 < \nu < 1/2.$$

Обобщая этот подход, можно ввести в рассмотрение, например, параметрическое семейство неотрицательных квадратичных функционалов

$$\Phi_\varsigma = c^2 \int_{\Omega} \left[\varsigma_{11}^2 - 2a\varsigma_{11}\varsigma_{22} + \varsigma_{22}^2 + b^2\varsigma_{12}^2 \right] d\Omega \geq 0, \quad |a| < 1, \quad (2.82)$$

для которых их условия стационарности эквивалентны соотношению Гука. Здесь a , b и c некоторые вещественные постоянные. В частности, функционал Φ в Задаче 2.3 получается из уравнения(2.82) с

$$a = \nu, \quad b = \sqrt{2(1 + \nu)}, \quad c = \sqrt{E^{-1}}.$$

Аналогичные функциональные семейства могут быть построены для произвольного анизотропного трехмерного тела.

2.6. Связь с классическими вариационными принципами

Рассмотрим вариант Задачи 2.3 с функционалом Φ : найти действительные вектор перемещения $u^*(x)$ и тензор напряжения $\sigma^*(x)$, минимизирующие функционал

$$\Phi[u^*, \sigma^*] = \min_{u, \sigma} \Phi[u, \sigma] = 0, \quad \Phi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varsigma : \xi d\Omega, \quad (2.83)$$

при ограничениях (2.70), (2.71), и (2.76).

Преобразуем интеграл в формуле (2.83) к виду

$$\Phi = W_{\varepsilon} + W_{\sigma} - 2W, \quad (2.84)$$

$$W_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^0 : \varepsilon^0 d\Omega, \quad W_{\sigma} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon d\Omega, \quad W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon^0 d\Omega,$$

где W_{ε} и W_{σ} являются энергиями деформации и напряжения соответственно. Как видно из уравнения (2.84), W_{ε} и W_{σ} зависят только от геометрических величин σ^0 , ε^0 и силовых переменных σ , ε , соответственно. В то же время, член W связывает деформации ε^0 и напряжения σ и явно не зависит от свойств упругого материала (см. [185]).

Интегрирование упругой энергии W по частям с учетом кинематического соотношения (2.13) позволяют получить следующее выражение

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon^0 d\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma \cdot u d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} q \cdot u d\Gamma. \quad (2.85)$$

Из уравнения равновесия (2.76) видно, что выполняется равенство

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma \cdot u \, d\Omega = - \int_{\Omega} f(x) \cdot u \, d\Omega \quad (2.86)$$

Таким образом, справедливо следующее важное свойство:

Свойство 2.1. Упругая энергия W запасаемая в тела равна половине механической работы внешних сил:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x) \cdot u \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} q \cdot u \, d\Gamma. \quad (2.87)$$

Отметим, что это свойство справедливо для любых равновесных полей напряжений и соответствует теореме Клапейрона (Теорема 1.1). Используя Свойство 2.1, может быть доказана следующая теорема, сформулированная в [89, 151].

Теорема 2.1. Для любых кинематически допустимых полей перемещений u , подчиняющихся граничным условиям (2.70) и равновесных полей напряжений σ , удовлетворяющих граничные условия (2.71), сумма полной потенциальной и дополнительной энергий неотрицательна:

$$\Phi[u, \sigma] = \Pi[u] + \Pi_c[\sigma] \geq 0. \quad (2.88)$$

Доказательство. Рассмотрим равновесие тела в интегральном смысле. Это означает, что для любой подобласти $\Upsilon \subset \Omega$ с достаточно гладкой границей $\partial\Upsilon$ и любых допустимых полей перемещений u в Ω , справедливо следующее интегральное равенство

$$\int_{\Upsilon} (\sigma : \nabla u) \, d\Upsilon = \int_{\Upsilon} f(x) \cdot u \, d\Upsilon + \int_{\partial\Upsilon} n \cdot \sigma \cdot u \, d\partial\Upsilon. \quad (2.89)$$

После подстановки (2.87) в уравнение (2.84) и учитывая граничные условия (2.70) и (2.71), функционал Φ приобретает форму

$$\begin{aligned} \Phi = & W_\varepsilon(u) - \int_{\Omega} f(x) \cdot u \, d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma \\ & + W_\sigma(\sigma) - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \bar{u}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma \geq 0. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Используя выражения для полной потенциальной энергии $\Pi[u]$, определенной в формуле (1.150) с потенциалами из уравнений (1.154), (1.155) и общей дополнительной энергии $\Pi_c[\sigma]$, введенной в формуле (1.167), можно представить неравенство (2.90), как в формуле (2.88). \square

Как следует из структуры (2.88) функционала Φ , задачи минимизации с ограничениями (2.70), (2.71), (2.89) и (2.83) эквивалентны независимой минимизации потенциальной энергии Π относительно допустимой вектор-функции u при краевых ограничениях на перемещения (2.70) и дополнительной энергии Π_c относительно тензорной функции σ , удовлетворяющей равновесному условию (2.89) при граничных ограничениях, заданных в напряжениях (2.71):

$$\min_{u, \sigma} \Phi[u, \sigma] = \min_u \Pi[u] + \min_\sigma \Pi_c[\sigma] = \Pi[u^*] + \Pi_c[\sigma^*]. \quad (2.91)$$

В дополнение к такому разложению, следующее равенство для минимальных значений функционалов Φ , Π , и Π_c справедливо для точного решения:

$$\Phi[u^*, \sigma^*] = \Pi[u^*] + \Pi_c[\sigma^*] = 0. \quad (2.92)$$

Замечание 2.2. Как следует из (2.91), что существование минимальных значений для полной потенциальной энергии Π и полной дополнительной энергии Π_c является лишь необходимыми условиями существования решения задачи линейной упругости. Для того, чтобы получить достаточное

условие необходимо доказать, что сумма этих энергий равна нулю, как в формуле (2.92).

Стоит подчеркнуть, что приближенные поля перемещений для краевых задач должны быть найдены с помощью принципа минимума полной потенциальной энергии (Теорема 1.5), тогда как поля напряжений могут быть получены численно на основе принципа минимальной полной дополнительной энергии (Теорема 1.7).

Полуобратный метод, обсуждавшийся в разделе 1.8., может также быть применен для получения вариационного принципа (2.83). Согласно этому подходу, пробный функционал может быть взят, например, в виде

$$\tilde{\Phi} = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma^0(u) : \varepsilon^0(u) - \sigma : \varepsilon^0(u) + h(x, \sigma) \right] d\Omega,$$

где u является вектором перемещений при ограничениях (2.70) и σ является тензором напряжений при ограничениях (2.71), (2.89); $h(\sigma)$ – неизвестная функция зависящая от σ . Условие стационарности $\tilde{\Phi}$ относительно вектора u есть

$$\begin{aligned} \delta_u \tilde{\Phi} = & - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma^0(u) + f(x)) \cdot \delta u \, d\Omega \\ & + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \left(n \cdot \sigma^0(u) \cdot \bar{e}^{(i)}(x) - \bar{q}_i(x) \right) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u \right) d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Это приводит к векторному уравнению Навье с граничными условиями (2.71), выраженных через вектор перемещений u , в соответствии с

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma^0(u) + f &= 0, \quad x \in \Omega; \\ e^{(i)}(x) \cdot \sigma^0(u) \cdot n(x) &= \bar{q}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Условия стационарности относительно напряжений

$$\delta_\sigma \tilde{\Phi} = - \int_\Omega \left(\varepsilon^0(u) - \frac{\partial h(x, \sigma)}{\partial \sigma} \right) : \delta \sigma d\Omega = 0$$

приводят к следующему уравнению Эйлера

$$\varepsilon^0(u) - \frac{\partial h(x, \sigma)}{\partial \sigma} = 0.$$

Неизвестная функция H выбрана так, что это уравнение соответствует закону Гука в виде (2.79). Таким образом,

$$h(x, \sigma) = \frac{1}{2} \sigma : C^{-1}(x) : \sigma$$

и результирующий интеграл $\tilde{\Phi}$ совпадает функционалом энергетической ошибки Φ .

Положительная определенность второй вариации $\delta^2 \Phi$ относительно u и σ следует из Теоремы 2.1 и соответствующих свойств второй вариации ($\delta^2 \Pi \geq 0$ и $\delta^2 \Pi_c \geq 0$), обсужденных в разделе 1.6..

2.7. Двусторонние энергетические оценки

МИДС позволяет строить эффективные двусторонние оценки упругой энергии

$$W(u^*, \sigma^*) = W_\varepsilon(u^*) = W_\sigma(\sigma^*)$$

запасенной в упругом теле [89]. Эти оценки будут определены для любых допустимых перемещений $u(x)$ и напряжений $\sigma(x)$, которые могут быть получены, например, на основе метода Ритца (Алгоритм 2.1) как приближение к точному решению $u^*(x)$ и $\sigma^*(x)$. Современные методы оценки качества приближенного решения представлены в [175].

В частности, пусть

$$\bar{u}_i(x) \equiv 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

в формуле (2.70), т. е. заданы соответствующие нулевые компоненты перемещений на всех граничных поверхностях $\Gamma_i^{(1)}$. Тогда, из минимизационной формулировки (2.91) следует, что

$$\Pi_c(\sigma) = W_\sigma(\sigma) \geq W_\sigma(\sigma^*) = W(u^*, \sigma^*) .$$

В то же время, уравнение (2.92) эквивалентно выражению

$$\max_u (-\Pi(u)) = \Pi_c(\sigma^*) = W_\sigma(\sigma^*) ,$$

что приводит к

$$-\Pi(u) \leq W_\sigma(\sigma^*) = W(u^*, \sigma^*) .$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Для любых кинематически допустимых полей перемещений $u(x)$, удовлетворяющих однородным граничным условиям (2.70), и любых полей равновесных напряжений $\sigma(x)$, подчиняющихся граничному условию (2.71) в напряжениях, справедливы следующие двусторонние оценки упругой энергии, запасенной в теле*

$$-\Pi(u) \leq W(u^*, \sigma^*) \leq \Pi_c(\sigma) . \tag{2.93}$$

Наоборот, если объемная сила отсутствует и

$$\bar{q}_i(x) \equiv 0 , \quad i = 1, 2, 3$$

в формуле (2.71), т.е. соответствующие компоненты напряжений не заданы на частях границы $\Gamma_i^{(2)}$, то

$$\Pi(u) = W_\varepsilon(u) \geq W_\varepsilon(u^*) = W(u^*, \sigma^*).$$

Из формул (2.91) и (2.92) вытекает, что

$$\max_{\sigma}(-\Pi_c(\sigma)) = \Pi(u^*) = W_\varepsilon(u^*)$$

и тогда

$$-\Pi_c(\sigma) \leq W_\varepsilon(u^*) = W(u^*, \sigma^*).$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. *Для любого равновесного поля напряжений $\sigma(x)$, удовлетворяющего однородным граничным условиям (2.71) и любому кинематически допустимому полю перемещений $u(x)$, подчиняющемуся граничным условиям (2.70), справедливы следующие оценки*

$$-\Pi_c(\sigma) \leq W(u^*, \sigma^*) \leq \Pi(u). \quad (2.94)$$

В соответствии с Алгоритмом 2.1, где неизвестные функции $u(x)$ и $\sigma(x)$ задаются полиномиальными аппроксимациями (2.36) и (2.37), задача минимизации (2.91) сводится к безусловной минимизации (2.42) после удовлетворения ограничений (2.70), (2.71), (2.76) и интегрирования функционала Φ :

$$\Phi_3(a) = a^T K^{(3)} a - 2 \left(F^{(3)} \right)^T a \rightarrow \min_{a \in R^N}. \quad (2.95)$$

Здесь a является N -мерным вектором проектных параметров, состоящего из независимых коэффициентов $u_i^{(kl)}$ и $\sigma_{ij}^{(kl)}$, $K \in \mathcal{R}^{N \times N}$ является симметричной, положительно определенной матрицей. Вектор $F^{(3)} \in \mathcal{R}^N$ в случае ограни-

чений (2.70), (2.71), (2.76) определяется поверхностными функциями $\bar{u}_i(x)$, $\bar{q}_i(x)$, а также объемной плотностью силы $f(x)$. Вектор a^* , минимизирующий функционал Φ_3 в формуле (2.95) находится из системы линейных уравнений

$$K^{(3)}a + F^{(3)} = 0. \quad (2.96)$$

Используя свойство декомпозиции задачи минимизации (2.91), доказанной в разделе 2.6., задача минимизации (2.95) оказывается эквивалентной, соответственно, двум независимым подзадачам в перемещениях и напряжениях:

$$K^u a^u + F^u = 0, \quad K^\sigma a^\sigma + F^\sigma = 0. \quad (2.97)$$

Здесь $a^u \in \mathcal{R}^{M_u}$ и $a^\sigma \in \mathcal{R}^{M_\sigma}$, $M_u + M_\sigma = N$ являются векторами независимых параметров, состоящих только из неопределенных коэффициентов $u_i^{(kl)}$ или $\sigma_{ij}^{(kl)}$, соответственно. Как было установлено в теоремах 2.2 и 2.3, можно явно получить двусторонние энергетические оценки для некоторых типов граничных условий. Например, если граничные условия в перемещениях (2.70) являются однородными в соответствии с теоремой 2.2, то для любых допустимых перемещений и напряжений неравенство (2.93) является верным. Принимая во внимание экстремальные свойства решений a^u и a^σ для систем (2.97), можно показать, что следующие соотношения справедливы

$$\begin{aligned} \Pi(a^u) &= -W(a^u) = -W_\varepsilon(a^u), \quad \Pi_\sigma(a^\sigma) = W_\sigma(a^\sigma), \\ W_\varepsilon &= (a^u)^\top K^u a^u, \quad W = -(F^u)^\top a^u = 0, \\ \Phi_3(a^u, a^\sigma) &= W_\sigma(a^\sigma) - W_\varepsilon(a^u), \end{aligned} \quad (2.98)$$

где следующие двусторонние оценки упругой энергии задаются выражением

$$W_\varepsilon(a^u) \leq W(u^*, \sigma^*) \leq W_\sigma(a^\sigma). \quad (2.99)$$

Аналогично, если условия в напряжениях (2.71) и (2.76) являются однородными в соответствии с теоремой 2.3, то неравенство (2.94) является верным для любых допустимых перемещений и напряжений. Соответствующие энергетические соотношения и оценки для конечномерного решения a^u и a^σ систем (2.97) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Pi_c(a^\sigma) &= -W(a^\sigma) = -W_\sigma(a^\sigma), \quad \Pi(a^u) = -W_\varepsilon(a^u), \\ W_\sigma &= (a^\sigma)^\top K^\sigma a^\sigma, \quad W = -(F^\sigma)^\top a^\sigma = 0, \\ \Phi_3(a^u, a^\sigma) &= W_\varepsilon(a^u) - W_\sigma(a^\sigma) \end{aligned} \tag{2.100}$$

с

$$W_\sigma(a^\sigma) \leq W(u^*, \sigma^*) \leq W_\varepsilon(a^u). \tag{2.101}$$

Пример 2.5. Задача, обсуждавшаяся в Примере 2.1, может продемонстрировать возможности двустороннего оценивания упругой энергии. Рассмотрим прямоугольную упругую пластину (см. Рис. 2.2), закрепленную на левом краю $x_1 = 0$ и нагруженную на правом $x_1 = x_1^0 = 1$, квадратично распределенными сдвиговыми напряжениями $q_0(x_2)$ с интенсивностью $q^0 = 1$ в соответствии с формулой (2.48). Другие края свободны от нагрузок, как в условиях (2.47). Высота x_2^0 пластины равна единице; модули упругости однородного изотропного материала $E = 100$ и $\nu = 0.3$. Полиномиальные степени в формулах (2.36) и (2.37) связаны соотношением $N_u = N_\sigma + 1$. Конечномерная задача минимизации (2.95) разделяется на две отдельные подсистемы линейных алгебраических уравнений (2.97). Этот пример находится в условиях теоремы 2.2, для которой справедливы двусторонние энергетические оценки (2.99).

Для повышения эффективности алгоритма Ритца 2.1, свойства симметрии краевой задачи могут быть включены в рассмотрение. Во-первых, начало системы координат Ox_1x_2 смещается в середину закрепленного края пластин-

ки

$$O' = \left\{ 0, \frac{x_2^0}{2} \right\}^T .$$

Граничные условия (2.47)–(2.46) могут быть переписаны в новой системе координат $O'x_1x_2$ следующим образом

$$\begin{aligned} u_1|_{x_1=0} &= u_2|_{x_1=0} = 0 , \\ \sigma_{22}|_{x_2=\pm\frac{1}{2}} &= \sigma_{12}|_{x_2=\pm\frac{1}{2}} = 0 , \\ \sigma_{11}|_{x_1=1} &= 0, \quad \sigma_{12}|_{x_1=1} = \frac{3}{2} - 6x_2^2 . \end{aligned} \tag{2.102}$$

В связи тем, что тело изотропно и прямоугольная область

$$\Omega = \left\{ x : x_1 \in (0, 1), x_2 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} , \tag{2.103}$$

а также граничные условия (2.102) являются зеркально симметричными относительно оси x_1 , решение рассматриваемой задачи характеризуется специальными условиями четности:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= -u_1(x_1, -x_2), \quad u_2(x_1, x_2) = u_2(x_1, -x_2), \\ \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\sigma_{11}(x_1, -x_2), \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = -\sigma_{22}(x_1, -x_2), \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) &= \sigma_{12}(x_1, -x_2). \end{aligned} \tag{2.104}$$

В соответствии с формулой (2.104), можно проредить полиномиальные аппроксимации (2.36), (2.37) и зарезервировать только такие одночлены, которые приведены в таблице 2.6. Это означает, что мономы, которые отсутствуют в этой таблице не влияют на решения и могут быть исключены из уравнений (2.36) и (2.37). Такое прореживание значительно уменьшает размер системы в уравнении (2.97).

Таблица 2.6

Четность компонентов перемещений и напряжений относительно координаты x_2 в Примере 2.5.

	u_1	u_2	σ_{11}	σ_{12}	σ_{22}
Четность	нечет.	чет.	нечет.	чет.	нечет.
Мономы	$x_1^i x_2^{2j+1}$	$x_1^i x_2^{2j}$	$x_1^i x_2^{2j+1}$	$x_1^i x_2^{2j}$	$x_1^i x_2^{2j+1}$

Таблица 2.7

Число коэффициентов перемещений M_u и напряжений M_σ по сравнению с полиномиальными степенями N_σ в Примере 2.5.

N_σ	12	13	14	15	16	17	18	19	20
M_u	91	105	120	136	153	171	190	210	231
M_σ	20	25	30	36	42	49	56	64	72

Расчеты были выполнены с различными степенями полиномиального приближения (2.36), (2.37). Используемые степени N_σ и соответствующие окончательные размерности M_u и M_σ после прореживания, представлены в таблице 2.7.

Как можно видеть на Рис. 2.12, приближенное значение энергии напряжений W_σ (сплошная линия) монотонно убывает, в соответствии с экстремальными свойствами энергии (2.98), при увеличении размерности N . В отличие от этого, значение энергии $W(N) = W_\varepsilon(N)$ (штриховые кривые) монотонно растет с ростом N . Эти значения определяют абсолютные и относительные энергетические ошибки в соответствии с

$$\Phi(a^u, a^\sigma) = W_\sigma(a^\sigma) - W_\varepsilon(a^u), \quad \Delta_1 = 1 - \frac{W_\varepsilon(a^u)}{W_\sigma(a^\sigma)}$$

и двусторонние оценки действительной упругой энергии $W(u^*, \sigma^*)$, запасаемой телом, как и в формуле (2.99).

Некоторые интегральные характеристики полученной аппроксимации при $N_\sigma = 20$ приведены в таблице 2.8. Как видно, точность решения менее од-

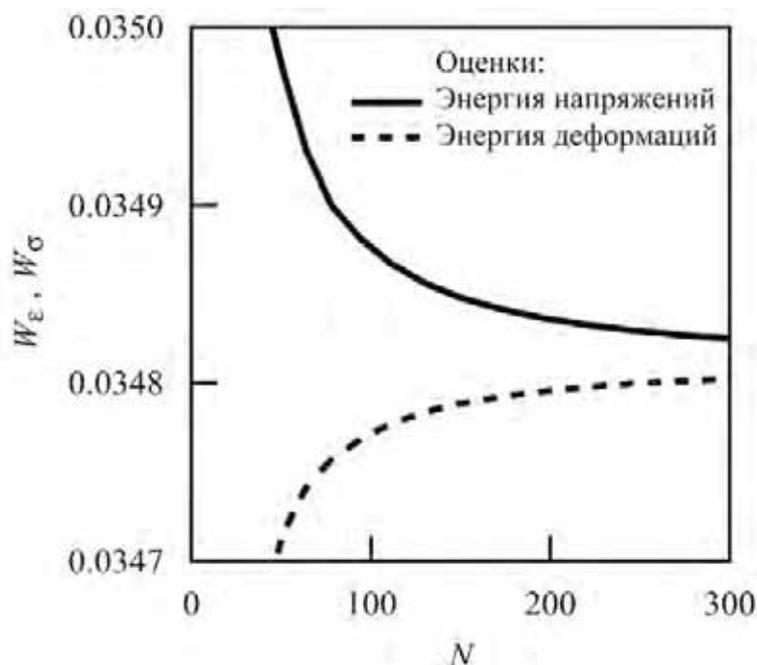


Рис. 2.12. Энергия деформации W_ϵ и энергия напряжений W_σ по сравнению с размерностью системы N в Примере 2.5.

Таблица 2.8

Параметры решения: системная размерность N , перемещение $u_2(1, 0)$, энергия напряжений W_σ , энергетическая ошибка Φ и относительная погрешность Δ_1 в Примере 2.5.

N	u_2	W_σ	Φ	$\Delta_1, \%$
303	0.0696	0.0348	$2.24 \cdot 10^{-5}$	0.0643

ной десятой процента обеспечивается в смысле критерия, предложенного в формуле (2.33).

Пример 2.6. Как и в предыдущем примере, рассмотрим однородную изотропную пластину (см. Рис. 2.2). Геометрические и упругие параметры выбраны теми же: $x_1^0 = x_2^0 = 1$, $E = 100$, $\nu = 0.3$. Степени полиномов \tilde{u}_i и $\tilde{\sigma}_{ij}$ в формулах (2.36), (2.37) связаны соотношением $N_u = N_\sigma + 1$, когда число N_σ изменяется.

Для иллюстрации эффективности обратных двусторонних оценок (2.101), следующие условия на внешних краях тела предполагаются в соответствии с теоремой 2.3. Стороны $x_1 = 0$ и $x_1 = x_1^0$ заземлены. Следующие перемещения

заданы для точек принадлежащим этим краям:

$$u_1(0, x_2) = u_1(1, x_2) = 0, \quad u_2(0, x_2) = -u_2(1, x_2) = u_2^0/2.$$

Другие стороны прямоугольника Ω свободны от нагрузок. Величина граничного перемещения $u_2^0 = 0.07$ была выбрана примерно равной смещению на середине стороны $x = \{1, 1/2\}^T$ в Примере 2.5 (см. таблицу 2.8). Как и в предыдущем примере, задача минимизации (2.95) распадается на две подсистемы линейных алгебраических уравнений (2.97).

Для использования симметрии в этой краевой задаче, начало системы Ox_1x_2 сдвигается к центральной точке пластины

$$O'' = \left\{ \frac{x_1^0}{2}, \frac{x_2^0}{2} \right\}^T.$$

В системе координат $O''x_1x_2$, граничные условия заданы

$$u_2|_{x_1=\pm\frac{1}{2}} = \pm\frac{u_2^0}{2}, \quad u_1|_{x_1=\pm\frac{1}{2}} = \sigma_{12}|_{x_2=\pm\frac{1}{2}} = \sigma_{22}|_{x_2=\pm\frac{1}{2}} = 0, \quad (2.105)$$

Прямоугольная область

$$\Omega = \left\{ x : x_1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), x_2 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (2.106)$$

в этой новой системы является симметричной относительно обеих координатных осей $x_{1,2}$, в то время как граничные условия в перемещениях из формулы (2.105) являются антисимметричные относительно оси x_1 и зеркально симметричны относительно оси x_2 . Действительные поля напряжений и перемещений должны подчиняться свойствам симметрии (2.104) и, одновременно,

следующим условиям четности относительно к оси координат x_1 :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u_1(-x_1, x_2), & u_2(x_1, x_2) &= -u_2(-x_1, x_2), \\ \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\sigma_{11}(-x_1, x_2), & \sigma_{22}(x_1, x_2) &= -\sigma_{22}(-x_1, x_2), \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) &= \sigma_{12}(-x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2.107)$$

С учетом свойств симметрии (2.104) и (2.107), только мономы, приведенные в таблице 2.9 для соответствующих полиномов $\tilde{u}(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$ в формулах (2.36), (2.37), могут быть зарезервированы в расчетах. Отметим, что размер про-реженной системы примерно в четыре раза меньше, чем размер исходной системы (2.97).

Таблица 2.9

Четность компонентов перемещений и напряжений относительно координат x_1 и x_2 в Примере 2.6.

	u_1	u_2	σ_{11}	σ_{12}	σ_{22}
Четность, x_1	чет.	нечет.	нечет.	чет.	нечет.
Четность, x_2	нечет.	чет.	нечет.	чет.	нечет.
Мономы	$x_1^{2i} x_2^{2j+1}$	$x_1^{2i+1} x_2^{2j}$	$x_1^{2i+1} x_2^{2j+1}$	$x_1^{2i} x_2^{2j}$	$x_1^{2i+1} x_2^{2j+1}$

Для оценки эффективности предложенных двусторонних оценок, расчеты были выполнены для различных степеней полиномов. В следствие симметрии системы, размерность N меняется только тогда, когда полином степени N_σ увеличивается на два.

Как показано на Рис. 2.13 в отличие от Рис. 2.12, энергия напряжений $W_\sigma(N) = W(N)$ (сплошная линия) является строго возрастающей функцией относительно размерности системы N в соответствии с формулой (2.101), в то время как энергия деформаций $W_\varepsilon(N)$ (пунктирная линия) – монотонно убывающая функция. Поведение этих величин позволяет ввести в рассмотрение

абсолютную и относительную энергетические ошибки, как

$$\Phi(a^u, a^\sigma) = W_\varepsilon(a^u) - W_\sigma(a^\sigma), \quad \Delta_2 = 1 - \frac{W_\sigma(a^\sigma)}{W_\varepsilon(a^u)}$$

которые могут быть использованы для оценки интегрального качества приближенных решений.

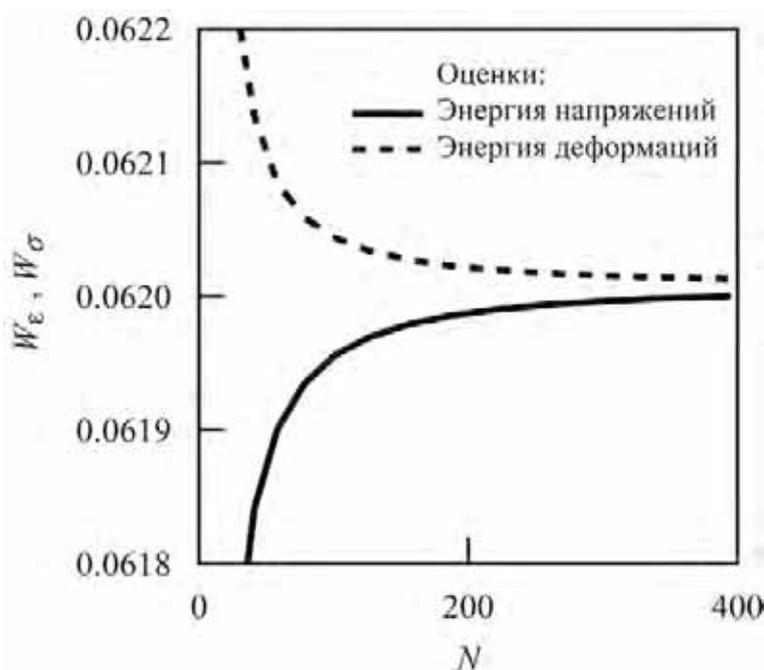


Рис. 2.13. Энергия деформаций W_ε и энергия напряжений W_σ как функции размерности системы N в Примере 2.6.

Некоторые из интегральных величин характеризующих результирующие аппроксимации при $N_\sigma = 32$, представлены в таблице 2.10. Стоит отметить, что симметрия задачи существенно влияет на достигаемую точность приближенного решения. Действительно, относительная энергетическая погрешность Δ_2 , полученная для задачи, которая симметрична относительно двух осей координат (см. Табл 2.10) в три раза меньше, чем соответствующий параметр Δ_1 (Табл. 2.8).

Таблица 2.10

Параметры решения: размерность N , энергия напряжений W_σ , энергетическая ошибка Φ и относительная погрешность Δ_2 в Примере 2.6.

N	W_σ	Φ	$\Delta_2, \%$
393	0.0620	$1.31 \cdot 10^{-5}$	0.0212

2.8. Тело на упругом основании

2.8.1. Вариационный принцип для функционала энергетической ошибки

Рассмотрим краевую задачу, где упругое основание, обсужденное в разделе 1.4., задано на некоторых частях $\Gamma_i^{(3)}$, $i = 1, 2, 3$ границы Γ ($\Gamma_1^{(3)} \cap \Gamma_2^{(3)} \cap \Gamma_3^{(3)} \neq \emptyset$), как в формуле (1.75):

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot (\sigma \cdot n + \kappa^{(i)}(x)u) = \bar{q}_i(x), \quad x \in \Gamma_i^{(3)}, \quad \kappa^{(i)}(x) > 0, \quad (2.108)$$

с

$$\bar{\Gamma}_i^{(1)} \cup \bar{\Gamma}_i^{(2)} \cup \bar{\Gamma}_i^{(3)} = \Gamma; \quad \Gamma_i^{(j)} \cap \Gamma_i^{(k)} = \emptyset, \quad j \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Задача минимизации при этих условиях заключается в нахождении перемещений $u^*(x)$ и напряжений $\sigma^*(x)$ в области Ω , занимаемым телом, при котором функционал энергетической ошибки Φ в формуле (2.83) при ограничениях (2.70), (2.71), (2.89) и (2.108) достигает своего минимального значения.

Можно показать, что декомпозиция этой задачи минимизации на две независимые подзадачи, одну в перемещениях, а другую в напряжениях, строго говоря, не представляется возможной. Действительно, функционал энергетической ошибки Φ после интегрирования упругой энергии W по частям имеет

вид

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \xi : C : \xi d\Omega \\
&= W_{\varepsilon}(u) - \int_{\Omega} f(x) \cdot u d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma \\
&\quad + W_{\sigma}(\sigma) - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \bar{u}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma + 2W^w(u, \sigma),
\end{aligned} \tag{2.109}$$

где W^w является упругой энергии Винклеровского основания, которая имеет вид

$$W^w = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma. \tag{2.110}$$

Сумма в формуле (2.110) явно зависит как от перемещений u так и от напряжений σ . Таким образом, не ясно, как этот член может быть разложен на две части по аналогии с задачами, обсуждавшимися в разделе 2.6..

Докажем, вариационный принцип, который называется принцип минимума энергетической ошибки.

Теорема 2.4. Среди всех возможных перемещений u и равновесных напряжений σ упругого тела, которые подчиняются граничным условиям (2.70), (2.71) и (2.108), действительные перемещения u^* и напряжения σ^* доставляют минимум функционалу энергетической ошибки Φ в соответствии с

$$\Phi[u^*, \sigma^*] = \min_{u, \sigma} \Phi[u, \sigma] = 0. \tag{2.111}$$

Доказательство. Выразим функционал Φ через действительные функции состояния u^* , σ^* и их вариации δu , $\delta \sigma$ в соответствии с

$$\Phi[u, \sigma] = \Phi[u^* + \delta u, \sigma^* + \delta \sigma] = \delta_u \Phi + \delta_{\sigma} \Phi + \delta^2 \Phi. \tag{2.112}$$

Здесь равенство $\Phi[u^*, \sigma^*] = 0$ для точного решения следует из уравнения (2.83).

Согласно необходимому условию минимума, первые вариации функционала (2.109)

$$\begin{aligned}\delta_u \Phi &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (C : \xi) \cdot \delta u \, d\Omega + \int_{\Gamma} n \cdot \xi \cdot \delta u \, d\Gamma, \\ \delta_{\sigma} \Phi &= - \int_{\Omega} \xi : \delta \sigma \, d\Omega.\end{aligned}\tag{2.113}$$

должны быть равны нулю.

Для того чтобы вывести в явном виде уравнения Лагранжа - Эйлера и естественные граничные условия для этой вариационной задачи, введем тензор функций напряжений χ составленный, например, из функций напряжений Максвелла [161] следующим образом

$$\chi = \text{diag} \{ \chi_1, \chi_2, \chi_3 \} .\tag{2.114}$$

Тогда равновесный тензор напряжений выражается через эти функции следующим образом

$$\sigma = \nabla \times (\nabla \times \chi)^T - \eta, \quad \eta = \text{diag} \left\{ \int f_1 dx_1, \int f_2 dx_2, \int f_3 dx_3 \right\} .\tag{2.115}$$

Здесь вспомогательный тензор $\eta(x)$ определяется с помощью интегралов от заданной объемной нагрузки $f(x)$. Подставляя напряжения из (2.115) в первые вариации $\delta_{\sigma} \Phi$ и интегрируя дважды по частям, получим первую вариацию относительно тензора функций напряжений χ :

$$\begin{aligned}\delta_{\sigma} \Phi = \delta_{\chi} \Phi &= - \int_{\Omega} \nabla \times (\nabla \times \xi)^T : \delta \chi \, d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} \left[(\nabla \times \xi)^T : \delta \chi - \xi : (\nabla \times \delta \chi) \right] d\Gamma.\end{aligned}\tag{2.116}$$

Таким образом, с учетом формул (2.113) и (2.116), необходимые условия стационарности могут быть выражены только через тензор Гука ξ как

$$\nabla \times (\nabla \times \xi)^T = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2.117)$$

$$\nabla \cdot (C : \xi) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2.118)$$

$$n \cdot (C : \xi) = 0, \quad x \in \Gamma_i^{(2)} \cup \Gamma_i^{(3)}; \quad (2.119)$$

$$\xi = (\nabla \times \xi)^T = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.120)$$

Условия совместности (1.48) в области Ω для тензора деформации $\varepsilon = C^{-1} : \sigma$ представлены формулой (2.117), как

$$\nabla \times (\nabla \times \xi)^T = \nabla \times (\nabla \times (\varepsilon^0 - \varepsilon))^T = \nabla \times (\nabla \times \varepsilon)^T.$$

Условия равновесия относительно геометрического тензора напряжений σ^0 и объемной силы f эквивалентны уравнению (2.118)

$$\nabla \cdot (C : \xi) = \nabla \cdot (C : (\varepsilon^0 - \varepsilon)) = \nabla \cdot (C : \varepsilon^0) - \nabla \cdot (C : \varepsilon) = \nabla \cdot \sigma^0 + f.$$

Наконец, формула (2.119) является граничным ограничением на тензор σ^0 и уравнение (2.120) отражает условия совместности для тензора ε на границе Γ .

Учтем, что вариации δu и $\delta \sigma$ на $\Gamma_i^{(3)}$, $i = 1, 2, 3$ связаны друг с другом через вариацию из формулы (2.108) в соответствии с

$$\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta \sigma \cdot n = -\kappa^{(i)}(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u \right), \quad x \in \Gamma_i^{(3)}. \quad (2.121)$$

Тогда вторая вариация $\delta^2 \Phi$ может быть представлена следующим образом

$$\delta^2 \Phi[\delta u, \delta \sigma] = W_u(\delta u) + W_\sigma(\delta \sigma) + 2W_u^w(\delta u) \geq 0, \quad \kappa_i > 0, \quad (2.122)$$

где W_u^w является энергией смещения упругого основания

$$W_u^w = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \frac{\kappa^{(i)}(x)}{2} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right)^2 d\Gamma. \quad (2.123)$$

Вследствие соответствующего вида граничных условий (2.108), эта величина совпадает с соответствующей энергией напряжений

$$W_\sigma^w = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \frac{1}{2\kappa^{(i)}(x)} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right)^2 d\Gamma = W_u^w. \quad (2.124)$$

Равенство $\delta^2\Phi = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда все вариации тензора деформации $\varepsilon^0(\delta u)$, тензора напряжений $\delta\sigma$, а также компоненты $\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \delta u$ вектора перемещений на $\Gamma_i^{(3)}$ при $i = 1, 2, 3$ равны нулю.

В результате условия Лагранжа – Эйлера эквивалентны системе уравнений теории упругости и вторая вариация является положительно определенной. \square

Аналогичные утверждения можно сформулировать для функционалов Φ_σ и Φ_ε , так как они эквивалентны функционалу Φ .

Пример 2.7. Рассмотрим двумерную краевую задачу, подобную описанной в примере 2.5, но для упругого тела покоящегося на Винклерском основании при $x \in \Gamma_2$ (см. Рис. 2.2). Системные и аппроксимационные параметры заданы следующим образом: $x_1^0 = x_2^0 = 1$, $q_0 = 1$, $E = 100$, $\nu = 0.3$, $N_u = N_\sigma + 1$.

Граничные условия зададим в виде

$$\begin{aligned}
 u_1|_{x_1=0} &= u_2|_{x_1=0} = 0, \\
 (\sigma_{22} + \kappa u_2)|_{x_2=x_2^0} &= 0, \\
 \sigma_{22}|_{x_2=0} &= \sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma_{12}|_{x_2=x_2^0} = \sigma_{11}|_{x_1=x_1^0} = 0, \\
 \sigma_{12}|_{x_1=x_1^0} &= q_0(x_2) = 6(x_2 - x_2^2).
 \end{aligned} \tag{2.125}$$

В численной реализации, коэффициент упругого основания выбран как $\kappa = 100$.

Для иллюстрации эффективности вариационного принципа (Теорема 2.4), расчеты были выполнены с различными степенями N_σ полиномиальных аппроксимаций (2.36), (2.37). После удовлетворения уравнений равновесия (2.76) и граничных условий (2.125), конечномерная задача минимизации (2.95) приводит к системе линейных алгебраических уравнений по аналогии с формулой (2.96).

Как видно на Рис. 2.14, приближенные значения энергии напряжений W_σ (сплошная линия) и энергии деформации W_ε (штрих-пунктирная кривая) монотонно уменьшаются, если размерность N возрастает, а упругая энергия $W(N)$ (штриховые кривые) является монотонно возрастающей функцией от N .

Стоит отметить, что функция $W_\varepsilon(N)$ показанная на Рис. 2.12 (Пример 2.5) является строго возрастающей функцией. Понятно, что наличие в постановке задачи упругого основания существенно влияет на решение. Тем не менее, функция $W_\sigma(N)$ может служить в качестве верхней границы точной энергии $W(u^*, \sigma^*)$, тогда как величина $W(N)$ – ее нижней границей, как в примере 2.5. Однако трудно сказать что-то определенное о поведении энергии деформации $W_\varepsilon(N)$, потому что это зависит от отношений между значениями упругих модулей (например, модуля Юнга E и коэффициента упругого основания

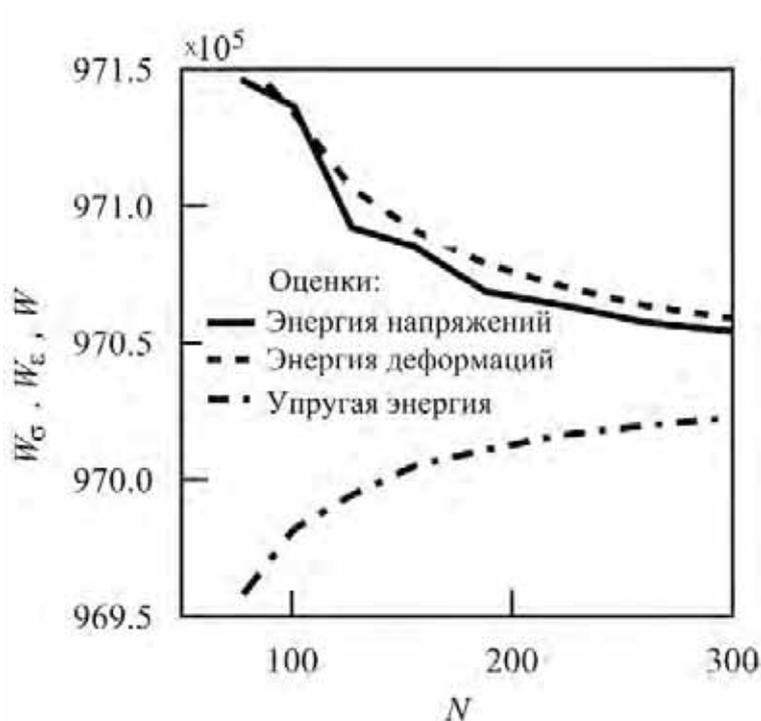


Рис. 2.14. Энергии напряжений, деформаций и упругая энергия как функции размерности системы N для задачи с Винклеровским основанием в Примере 2.7.

Таблица 2.11

Параметры решения: размерность N ; перемещение $u_2(1, 0)$; энергии W_σ , W_ϵ и W ; энергетическая ошибка Φ и относительная погрешность Δ в Примере 2.7.

N	u_2	W_σ	W_ϵ	W	Φ	$\Delta, \%$
302	0.0315	$9.7054 \cdot 10^{-3}$	$9.7059 \cdot 10^{-3}$	$9.7023 \cdot 10^{-3}$	$6.71 \cdot 10^{-6}$	0.0691

κ). Если $k \rightarrow 0$ или $k \rightarrow \infty$, то соответствующие граничные условия из формулы (2.125) превращаются в однородные:

$$\sigma_{22}|_{x_2=x_2^0} = 0, \quad u_2|_{x_2=x_2^0} = 0, \quad (2.126)$$

соответственно. В этом случае постановка задачи минимизации полностью соответствует условиям теоремы 2.2 и результирующая функция $W_\epsilon(N)$ должна быть строго возрастающей (см. Рис. 2.12). Некоторые интегральные характеристики приближенного решения при $N_\sigma = 14$ приведены в таблице 2.11.

2.8.2. Двусторонние оценки в задачах с Винклеровским основанием

Как было показано в разделах 2.5.–2.7., краевая задача в вариационной постановке (2.111) со смешанными граничными условиями (2.70) и (2.71) может быть разделена на две подзадачи относительно перемещений и напряжений, соответственно. Кроме того, двусторонние энергетические оценки были получены для определенного типа граничных функций $\bar{u}_i(x)$ и $\bar{q}_i(x)$. Но если линейные упругие условия (2.108) заданы на некоторой части границы тела, то интеграл энергетической ошибки Φ не может быть представлен в виде суммы двух независимых функционалов.

Покажем, что такого рода разложение возможно, если сделать дополнительные предположения. Для этого введем расширенный функционал

$$\begin{aligned} \Phi^w &= \Phi + \Xi^w, \\ \Xi^w &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \frac{1}{2\kappa^{(i)}(x)} \left\{ \bar{e}^{(i)}(x) \cdot \left(\kappa^{(i)}(x)u + \sigma \cdot n \right) - \bar{q}_i(x) \right\}^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Член Ξ^w в формуле (2.127) есть не что иное, как граничные условия Винклера (2.108), записанные в слабой (интегральной) форме.

Как и для задачи минимизации (2.83), может быть дана соответствующая формулировка и для функционала Φ^w : найти действительный вектор перемещений $u^*(x)$ и тензор напряжений $\sigma^*(x)$ минимизирующие функционал

$$\Phi^w[u^*, \sigma^*] = \min_{u, \sigma} \Phi^w[u, \sigma] = 0 \quad (2.128)$$

при ограничениях (2.70), (2.71), и (2.89).

Перепишем функционал ошибки Ξ^w в виде следующего разложения

$$\begin{aligned} \Xi^w &= W_u^w + W_\sigma^w - 2W^w \\ &- \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma \\ &- \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \bar{u}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma + C^w. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Здесь W_u^w , W_σ^w и W^w – энергии, определенные в формулах (2.110), (2.123) и (2.124), соответственно;

$$\bar{u}_i(x) = \frac{\bar{q}_i(x)}{\kappa^{(i)}(x)}, \quad x \in \Gamma_i^{(3)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.130)$$

являются граничными перемещениями на упругом основании;

$$C^w = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \frac{\bar{q}_i^2(x)}{2\kappa^{(i)}(x)} d\Gamma \quad (2.131)$$

является специальной константой.

С учетом формулы (2.84), функционал (2.127) может быть преобразован следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi &= W_\varepsilon[u] + W_u^w[u] + W_\sigma[\sigma] + W_\sigma^w[\sigma] - 2W[u, \sigma] - 2W^w[u, \sigma] \\ &- \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma \\ &- \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \bar{u}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma + C^w. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Проанализируем более детально сумму $W + W^w$ упругих энергий из формулы (2.132). Сначала проинтегрируем по частям энергию W в соответствии со

СВОЙСТВОМ 2.1:

$$2W = \int_{\Omega} f(x) \cdot u \, d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \bar{u}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma \\ + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(3)}} \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma$$

Тогда получается следующее соотношение

$$2W + 2W^w = \int_{\Omega} f(x) \cdot u \, d\Omega \\ + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)}} \bar{u}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma. \quad (2.133)$$

Раскладывая все выражения для энергий в формуле (2.132) и группируя члены зависящие от перемещений и напряжений, модифицированный функционал энергетической ошибки можно записать в виде

$$\Phi^w[u, \sigma] = \Pi^w[u] + \Pi_c^w[\sigma] + C^w. \quad (2.134)$$

с

$$\Pi^w[u] = W_{\varepsilon}[u] + W_u^w[u] - \int_{\Omega} f(x) \cdot u \, d\Omega \\ - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(2)} \cup \Gamma_i^{(3)}} \bar{q}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot u \right) d\Gamma \quad (2.135)$$

и

$$\Pi_c^w[\sigma] = W_{\sigma}[\sigma] + W_{\sigma}^w[\sigma] - \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i^{(1)} \cup \Gamma_i^{(3)}} \bar{u}_i(x) \left(\bar{e}^{(i)}(x) \cdot \sigma \cdot n \right) d\Gamma. \quad (2.136)$$

Кроме интегралов по границам $\Gamma_i^{(3)}$, определяемыми внешней нагрузкой

\bar{q}_i , функционал в перемещениях Π^w в формуле (2.135) совпадает с выражением для обобщенной полной потенциальной энергии (1.161), обсужденной в разделе 1.6. В то же время, функционал в напряжениях Π_c^w является полной дополнительной энергией, введенной формулой (1.168), исключая интегралы по границам $\Gamma_i^{(3)}$, которые определяются перемещениями \bar{u}_i , заданными в формуле (2.130). Другими словами, если $\bar{q}_i(x) \equiv 0$ и, следовательно, $\bar{u}_i(x) \equiv 0$ на $\Gamma_i^{(3)}$ для $i = 1, 2, 3$, то эти функционалы Π^w и Π_c^w совпадают с соответствующими потенциальной и дополнительной энергиями введенными в разделе 1.6.

В результате, действительное поле перемещений $u^*(x)$ для задачи минимизации (2.128) при ограничениях (2.70), (2.71), и (2.89) находится с помощью обобщенного принципа минимума полной потенциальной энергии (Теорема 1.5 с функционалом Π^w из уравнения (2.135)). Действительное поле напряжений $\sigma^*(x)$ получается на основе принципа минимума полной дополнительной энергии (теорема 1.7 с функционалом Π_c^w из уравнения (2.136)). Следующее равенство

$$\Phi^w[u^*, \sigma^*] = \Pi^w[u^*] + \Pi_c^w[\sigma^*] + C^w = 0. \quad (2.137)$$

справедливо в этом случае.

Таким же образом, как это было сделано в разделе 2.7., двусторонние оценки энергии можно получить, если

$$\bar{q}_i(x) \equiv 0 \quad (2.138)$$

для всех частей $\Gamma_i^{(3)}$. В частности, если перемещения на границе $\Gamma_i^{(1)}$ для $i = 1, 2, 3$ исчезают, то справедливы верхняя и нижняя границы точного значения упругой энергии, запасенной в теле и Винклеровским основанием

$$-\Pi^w(u) \leq W(u^*, \sigma^*) + W^w(u^*, \sigma^*) \leq \Pi_c^w(\sigma), \quad (2.139)$$

где $u(x)$ и $\sigma(x)$ – допустимые перемещения и напряжения при ограничениях (2.70), (2.71) и (2.89).

И наоборот, если уравнение (2.138) является справедливым и поверхностные нагрузки $\bar{q}_i(x)$ исчезают на $\Gamma_i^{(2)}$, то любые допустимые поля перемещений и напряжений также гарантируют следующие двусторонние энергетические оценки

$$-\Pi_c^w(\sigma) \leq W(u^*, \sigma^*) + W^w(u^*, \sigma^*) \leq \Pi^w(u). \quad (2.140)$$

Пример 2.8. Для демонстрации свойств функционала Φ^w , введенным формулой (2.127) краевая задача сформулированная в примере 2.7 снова рассматривается здесь с граничными условиями (2.125). Расчеты были выполнены с различными степенями полиномиального приближения (2.36), (2.37). В данном случае конечномерная задача минимизации

$$\Phi_4(a) = \Phi^w(\tilde{u}, \tilde{\sigma}) = a^T K a - 2(F)^T a \rightarrow \min_{a \in \mathcal{R}^N} \quad (2.141)$$

распадается на две независимые подсистемы по аналогии с формулой (2.97).

Так как следующие равенства

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(a^u) + W_u^w(a^u) &= W(a^u) + W^w(a^u), \\ \Pi^w(a^u) &= W_\varepsilon(a^u) + W_u^w(a^u) - 2W(a^u) - 2W^w(a^u), \\ \Pi_c^w(a^\sigma) &= W_\sigma(a^\sigma) + W_\sigma^w(a^\sigma) \end{aligned} \quad (2.142)$$

справедливы для решения a^u и a^σ задачи минимизации (2.141), величины $W_\sigma + W_\sigma^w$ и $W_\varepsilon + W_u^w$ дают нижнюю и верхнюю оценки точной энергии, запасенной совместно упругим телом и Винклеровским основанием в соответствии с

$$W_\varepsilon(a^u) + W_u^w(a^u) \leq W(u^*, \sigma^*) + W^w(u^*, \sigma^*) \leq W_\sigma(a^\sigma) + W_\sigma^w(a^\sigma). \quad (2.143)$$

Кроме того, можно определить абсолютную и относительную энергетическую ошибку, как

$$\begin{aligned} \Phi^w(a^u, a^\sigma) &= W_\sigma(a^\sigma) + W_\sigma^w(a^\sigma) - W_\varepsilon(a^u) - W_u^w(a^u), \\ \Delta_w &= 1 - \frac{W_\varepsilon(a^u) + W_u^w(a^u)}{W_\sigma(a^\sigma) + W_\sigma^w(a^\sigma)}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Как видно на Рис. 2.15, поведение энергий $W_\sigma + W_\sigma^w$ и $W_\varepsilon + W_u^w$ находятся в хорошем соответствии с энергетическими свойствами (2.143) и экстремальными характеристиками численного решения (2.142). Приближенное значение энергии напряжений $W_\sigma + W_\sigma^w$ (сплошная линия) для тела и упругого основания монотонно уменьшается, когда размерность N возрастает. Энергии перемещений $W_\varepsilon + W_u^w$ (пунктир) монотонно возрастающая функция размерности системы N .

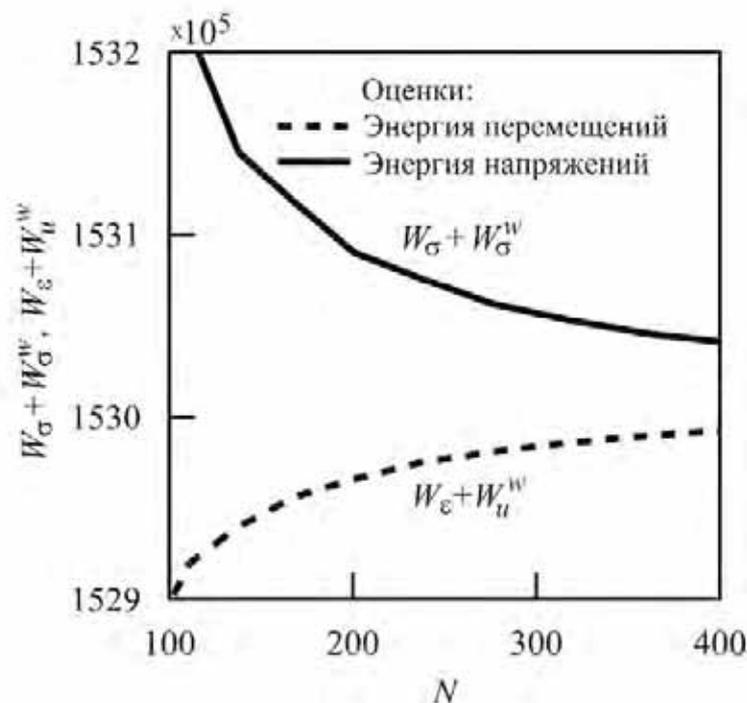


Рис. 2.15. Энергии перемещений $W_\varepsilon + W_u^w$ и энергии напряжений $W_\sigma + W_\sigma^w$ запасенная совместно упругим телом и основанием Винклера, как функции размерности системы N в Примере 2.8.

Некоторые характеристики численного решения при $N_\sigma = 16$ представлены в таблице 2.12. Можно показать, что точное значение совместной упругой

Таблица 2.12

Параметры решения : размерность N , перемещение $u_2(1, 0)$, энергии W_σ , $W_\sigma + W_\sigma^w$, $W_\varepsilon + W_u^w$, энергетическая ошибка Φ^w и относительная погрешность Δ_w в Примере 2.8.

N	u_2	W_σ	$W_\sigma + W_\sigma^w$	$W_\varepsilon + W_u^w$	Φ^w	$\Delta_w, \%$
411	0.0315	$9.7035 \cdot 10^{-3}$	0.015304	0.015299	$4.64 \cdot 10^{-6}$	0.03

энергии $W + W^w$ заключено в интервале энергий, даваемой формулой (2.143).

Сравнение результатов, представленных в таблицах 2.11 и 2.12 показывает хорошее совпадение результатов, полученных двумя вариационными подходами, обсуждавшихся в этом разделе.

Глава 3

Метод конечных элементов на основе интегро-дифференциального подхода

Эта глава посвящена вопросам, касающимся алгоритмов МКЭ, которые основаны на идеях МИДС. Стоит отметить, что огромное количество статей и книг, посвященных разработке различных стратегий МКЭ были опубликованы (см., например, [192]). Таким образом, здесь нет необходимости давать полный обзор существующих подходов МКЭ. Ограничимся лишь схематическим описанием способов приближения сплайнами искомых решений и приведем несколько примеров, иллюстрирующие особенности реализации метода конечных элементов в рамках вариационных постановок МИДС.

3.1. Кусочно полиномиальные аппроксимации

3.1.1. Двумерные C^0 полиномиальные сплайны

Рассмотрим упругое тело занимающее некоторую область Ω , которая представляет собой многоугольник с прямолинейными краями, как это показано на Рис. 1.4. Считается, что эта область делится воображаемыми границами на M треугольных элементов. Для удобства, выполняется регулярная триангуляция, в которой каждое ребро треугольника, либо лежит на границе Γ либо является общей границей ровно двух элементов в Ω . Внутренности всех треугольников в Ω попарно не связаны.

Задача состоит в том, чтобы приблизить неизвестную функцию специальным кусочно-полиномиальным сплайном $F(x_1, x_2)$, который может быть записан следующим образом

$$F(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^M F_i(x_1, x_2) \quad (3.1)$$

где $F_i(x_1, x_2)$ определяется полными двумерными полиномами степени N_i на треугольниках Δ_i , так что:

$$F_i(x_1, x_2) = \begin{cases} P_i^{(N_i)}(x_1, x_2), & \{x_1, x_2\} \in \Delta_i \\ 0, & \{x_1, x_2\} \notin \Delta_i \end{cases}. \quad (3.2)$$

Одно специальное условие накладывается на аппроксимации $F_i(x_1, x_2)$, а именно, функция $F(x_1, x_2)$ должна быть непрерывной в точках, которые принадлежат к межэлементным границам.

Чтобы обеспечить это условие, удобно использовать g -функций введенные формулой (1.233). Перепишем эти функции в следующем виде

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{x_2^{(23)}}{2S}(x_1 - x_{12}) - \frac{x_1^{(23)}}{2S}(x_2 - x_{22}), \\ g_2 &= \frac{x_2^{(31)}}{2S}(x_1 - x_{13}) - \frac{x_1^{(31)}}{2S}(x_2 - x_{23}), \\ g_3 &= \frac{x_2^{(12)}}{2S}(x_1 - x_{11}) - \frac{x_1^{(12)}}{2S}(x_2 - x_{21}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь x_{1j}, x_{2j} являются координатами вершин треугольника Δ_i ,

$$x_1^{(jk)} = x_{1j} - x_{1k}, \quad x_2^{(jk)} = x_{2j} - x_{2k}, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

– разница между соответствующими координатами узлов или проекций сторон треугольника на оси координат, S является площадью треугольной области.

Пусть параметры $N_i = N$ зафиксированы для всех треугольников. Тогда зададим функцию $P_i^{(N)}(x_1, x_2)$ следующим образом

$$P_i^{(N)}(x_1, x_2) = \sum_{j+k=0}^N a_{jk} g_1^j g_2^k g_3^{N-j-k}, \quad (3.5)$$

где a_{jk} – неизвестные вещественные коэффициенты, которые должны быть выбраны в соответствии с условиями непрерывности. Представление (3.5) определяет полный полином степени N (см., например, [26], [135]). Видно также, что если $N \geq 3$, то многочлены

$$g_1 g_2 g_3 \left(g_1^j g_2^k g_3^{N-j-k-3} \right), \quad j+k \leq 0, \dots, N-3 \quad (3.6)$$

тождественно равны нулю на сторонах треугольника и, следовательно, не влияют на условие непрерывности. Таким образом, представляется целесообразным разделить аппроксимацию (3.5) на две части в соответствии с

$$\begin{aligned} P_i^{(N)} &= P_{ic}^{(N)} + P_{i0}^{(N)}, \\ P_{ic}^{(N)} &= \sum_{j=1}^N \left(a_j g_2^j g_3^{N-j} + a_{j+N} g_3^j g_1^{N-j} + a_{j+2N} g_1^j g_2^{N-j} \right), \\ P_{i0}^{(N)} &= g_1 g_2 g_3 \sum_{j+k=0}^{N-3} d_{jk} g_1^j g_2^k g_3^{N-j-k-3}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь a_j , a_{j+N} , a_{j+2N} , d_{jk} – неизвестные параметры. Полином $P_{i0}^{(N)}$ называется внутренней функцией, а функция $P_{ic}^{(N)}$ является внешней, так как только соответствующие параметры a_j , $j = 1, \dots, 3N$ используются для обеспечения условий непрерывности для функции $F(x_1, x_2)$, определенной в формуле (3.1).

Теперь рассмотрим условия, которые должны выполняться, например, на общей стороне $A_1 A_2$ треугольников Δ_i и Δ_{i+1} (см. Рис. 3.1). На этой стороне, функция $P_i^{(N)}$ преобразуется в одномерный полином:

$$P_i^{(N)} \Big|_{g_3=0} = \left[a_{2N} g_1^N + \sum_{j=1}^N a_j g_2^j g_1^{N-j} \right]_{g_3=0}. \quad (3.8)$$

Предполагая, что $x_1^{(12)} \neq 0$, можно выразить координату x_2 из уравнения

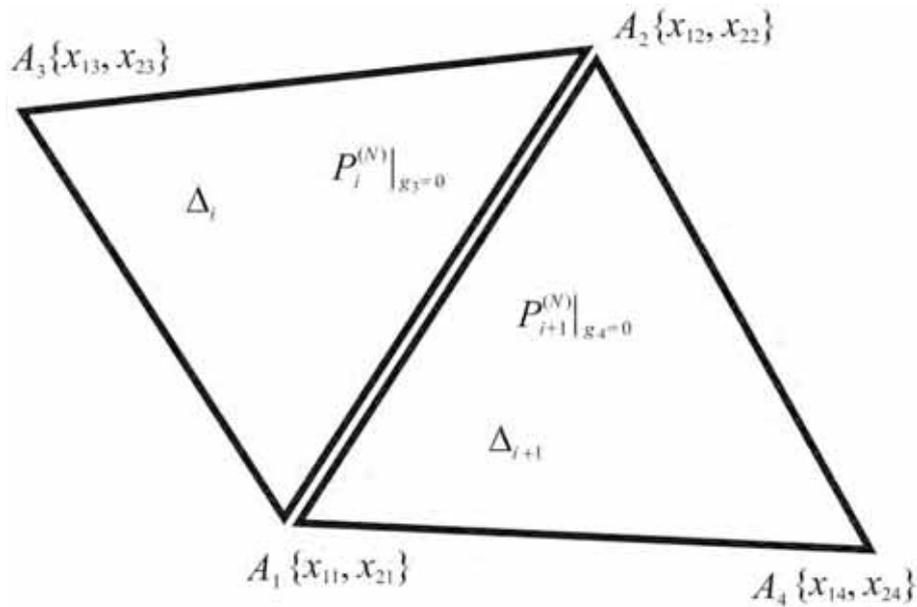


Рис. 3.1. Два треугольника Δ_i и Δ_{i+1} с общей гранью A_1A_2 .

$g_3 = 0$ следующим образом

$$x_2 = \frac{x_2^{(12)}}{x_1^{(12)}}(x_1 - x_{11}) + x_{21}. \quad (3.9)$$

После подстановки (3.9) в выражения для g_1 и g_2 из уравнения (3.3), получаем следующие равенства

$$g_1|_{g_3=0} = x_t, \quad g_2|_{g_3=0} = 1 - x_t, \quad x_t = \frac{x_1 - x_{12}}{x_1^{(12)}}. \quad (3.10)$$

С учетом формулы (3.10), полином (3.8) может быть переписан в соответствии с

$$P_i^{(N)}|_{g_1=0} = P_{i1}^{(N)} = \sum_{j=0}^N b_{j1} x_t^j (1 - x_t)^{N-j}, \quad (3.11)$$

где b_{j1} это новые обозначения для соответствующих параметров a_j . Как следует из (3.10), выражение (3.11) зависит только от координат узлов A_1 и A_2 (см. Рис. 3.1). Таким образом, функция формы $F_i(x_1, x_2)$ даваемые формулой (3.2) на другом треугольнике, содержащего сторону A_2A_3 может быть

представлена в соответствии с

$$P_{i2}^{(N)} = \sum_{j=0}^N b_{j2} x_t^j (1 - x_t)^{N-j}. \quad (3.12)$$

Следовательно, условие непрерывности для функций F_i и F_{i+1} на межэлементной стороне A_1A_2 эквивалентно следующим равенствам

$$b_{j1} = b_{j2}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (3.13)$$

Условия непрерывности для других внутренних сторон сетки могут быть получены аналогичным образом.

3.2. Гладкие полиномиальные сплайны

3.2.1. Треугольник Аргириса

Помимо непрерывных аппроксимаций, гладкие кусочно полиномиальные сплайны также применяются к решению задач теории упругости. Один из таких конечных элементов называется треугольником Аргириса с полным двумерным полиномом пятой степени [170]. Впервые аналитическое представление всех базисных функций для этого треугольника было дано в работе [150].

Можно выделить несколько причин, почему возникла идея построить функции формы для такого элемента в явном виде и применить их к описанию задач теории упругости, описываемых дифференциальными операторами второго порядка. Прежде всего, присутствуют некоторые алгоритмические и вычислительные трудности, чтобы найти эти функции. Следуя за Зенкевичем, необходимо решить 21 линейную систему, состоящие из 21 уравнений каждая, для всех треугольных элементов и применить процедуру численного интегрирования для вычисления матрицы жесткости.

Рассмотрим произвольный треугольник Δ_1 показанный на Рис. 3.2 с коор-

динатами $\{x_{1i}, x_{2i}\}$ его вершин A_i , $i = 1, 2, 3$ и определим конечный элемент с 21 степенью свободы. Предполагается, что значения функции $F(x_1, x_2)$, ее первых и вторых производных, которые отмечены на Рис. 3.2 крестиками и кружками, соответственно, приведены в каждом узле треугольника. Значения нормальных производных в середине сторон треугольника (стрелки на рисунке), также заданы. Представим функцию $F(x_1, x_2)$ из уравнения (3.1) на треугольнике Δ_1 в следующем виде

$$F(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{21} f_i \phi_i(x_1, x_2). \quad (3.14)$$

Здесь, функция формы $\phi_i(x_1, x_2)$, $i = 1, \dots, 21$, в формуле (3.14) являются полиномом пятого порядка, коэффициенты f_i – неизвестные параметры, которые определяют функцию F . Для того, чтобы явным образом найти функции $\phi_i(x_1, x_2)$, можно использовать g -функции, введенные в формуле (3.3).

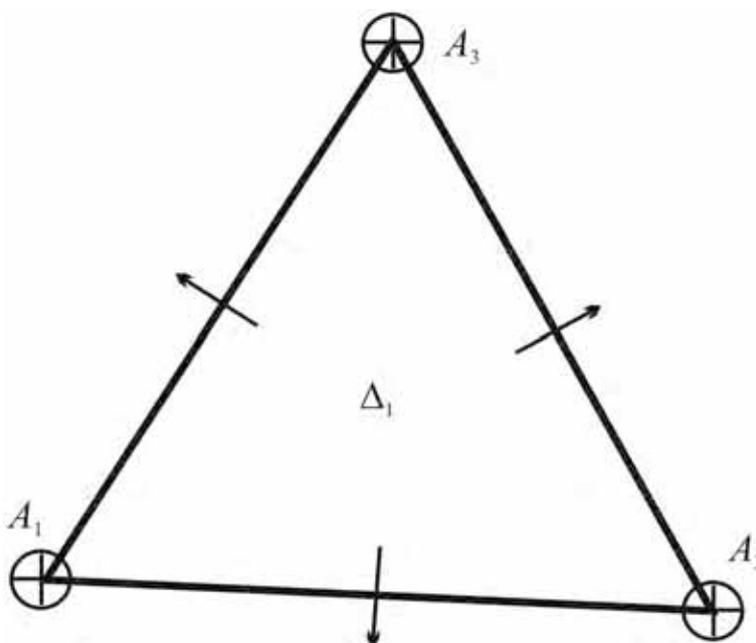


Рис. 3.2. Треугольник Аргириса

Предписанные условия для функции F в узлах элемента A_j при $j = 1, 2, 3$

Свойство 3.3. Рассмотрим, например, функцию

$$G_m^{(1)} = \sum_{j=j_0}^m b_j g_1^j(x_1, x_2), \quad 1 \leq j_0 \leq m,$$

где b_j – некоторые постоянные. Пусть $x_1^{(23)} \neq 0$ и $x_2^{(23)} \neq 0$. Если

$$\frac{\partial^k G_m^{(1)}}{\partial x_1^p \partial x_2^q} = 0, \quad p + q = k, \quad k < m,$$

для некоторых фиксированных значений p и q , то все производные от k -го порядка функции $G_m^{(1)}$ также равны нулю.

Доказательство. Чтобы доказать это свойство, выпишем эту производную в явном виде

$$\frac{\partial^k G_m^{(1)}}{\partial x_1^p \partial x_2^q} = (-1)^q \left(x_2^{(23)}\right)^p \left(x_1^{(23)}\right)^q \sum_{j=k}^m b_j \frac{j!}{(j-k)!} g_1^{j-k}(x_1, x_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=k}^m b_j g_1^{j-k}(x, y) = 0.$$

Кроме того, эта сумма не зависит от p и q . Аналогичные свойства справедливы также и для полиномиальных функций

$$G_m^{(2)} = \sum_{j=j_0}^m b_j g_2^j(x_1, x_2), \quad G_m^{(3)} = \sum_{j=j_0}^m b_j g_3^j(x_1, x_2).$$

□

Можно составить все базисные функции ϕ_i с помощью этих свойств. Прежде всего, найдем ϕ_{19} , ϕ_{20} , ϕ_{21} . Базисная функция ϕ_{19} , к примеру, может быть определена в следующем виде

$$\phi_{19} = b_{19} g_1 g_2^2 g_3^2 = b_{19} \tilde{\phi}_{19}. \quad (3.17)$$

Можно показать, что если ϕ_{19} подставить в уравнения (3.15) и (3.16) вместо функции F , то только одно из этих 21 условий не равно нулю, а именно,

$$\left. \frac{\partial \phi_{19}}{\partial n^{(1)}} \right|_{\substack{x_1 = \frac{1}{2}(x_{12} + x_{13}) \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_{22} + x_{23})}} \neq 0.$$

Принимая во внимание, что значение f_{19} для этой базисной функции должно быть равно единице, то следующее выражение получается для определения константы b_{19} :

$$b_{19} = 32 \frac{S}{L_{23}^2}. \quad (3.18)$$

Здесь L_{23} это длина стороны A_2A_3 . Функции ϕ_{20} , ϕ_{21} находятся циклической перестановкой индексов

$$\phi_{20} = 32 \frac{S}{L_{31}^2} g_2 g_3^2 g_1^2 = 32 \frac{S}{L_{31}^2} \tilde{\phi}_{20}; \quad \phi_{21} = 32 \frac{S}{L_{12}^2} g_3 g_1^2 g_2^2 = 32 \frac{S}{L_{12}^2} \tilde{\phi}_{21},$$

где L_{31} и L_{12} являются длинами сторон A_3A_1 и A_1A_2 , соответственно.

Зададим теперь функцию ϕ_1 в следующем виде

$$\begin{aligned} \phi_1 &= b_{1,1} g_1^3 + b_{1,2} g_1^4 + b_{1,3} g_1^5 + b_{1,4} g_2 g_3^2 g_1^2 + b_{1,5} g_3 g_1^2 g_2^2 \\ &= \tilde{\phi}_1 + b_{1,4} \tilde{\phi}_{20} + b_{1,5} \tilde{\phi}_{21}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отметим, что все узловые значения ϕ_1 в вершинах A_2 и A_3 и значение нормальной производной в средней точке стороны A_2A_3 равны нулю. Узловые условия в вершине A_1 имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \phi_1(x_{11}, x_{21}) &= 1, \\ \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1 = x_{11} \\ x_2 = x_{21}}} &= \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1 = x_{11} \\ x_2 = x_{21}}} = \dots = \left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_2^2} \right|_{\substack{x_1 = x_{11} \\ x_2 = x_{21}}} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Значения функций $\tilde{\phi}_{20}$ и $\tilde{\phi}_{21}$, а также всех их первых и вторых производных в вершине A_1 равны нулю. С помощью Свойства 3.3, выпишем следующую линейную систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ b_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

для нахождения коэффициентов $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{1,3}$. Тогда $\tilde{\phi}_1$ имеет следующий вид

$$\tilde{\phi}_1 = 10g_1^3 - 15g_1^4 + 6g_1^5. \quad (3.22)$$

Условия (3.16) определяют коэффициенты $b_{1,4}$ и $b_{1,5}$ в соответствии с

$$b_{1,4} = -30 \frac{x_1^{(23)} x_1^{(12)} + x_2^{(23)} x_2^{(12)}}{L_{12}^2}, \quad b_{1,5} = -30 \frac{x_1^{(23)} x_1^{(31)} + x_2^{(23)} x_2^{(31)}}{L_{31}^2}. \quad (3.23)$$

Для получения функции ϕ_2 , зададим ее в виде

$$\begin{aligned} \phi_2 &= (x_1 - x_{11})(b_{2,1}g_1^2 + b_{2,2}g_1^3) + b_{2,3}g_2g_3^2g_1^2 + b_{2,4}g_3g_1^2g_2^2 \\ &= \tilde{\phi}_2 + b_{2,3}\tilde{\phi}_{20} + b_{2,4}\tilde{\phi}_{21}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Узловые условия в вершине A_1 имеют вид

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=x_{11} \\ x_2=x_{21}}} = 1, \quad \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_{11} \\ x_2=x_{21}}} = \dots = \left. \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_2^2} \right|_{\substack{x_1=x_{11} \\ x_2=x_{21}}} = 0. \quad (3.25)$$

Выражение

$$\tilde{\phi}_2 = (x_1 - x_{11})(4g_1^3 - 3g_1^4) \quad (3.26)$$

получается из системы (3.25). Коэффициенты $b_{2,3}$ и $b_{2,4}$ находятся из условия

(3.16) в соответствии с

$$b_{2,3} = \frac{12x_1^{(23)}L_{12}^2 + 14x_2^{(12)}S}{L_{12}^2}, \quad b_{2,4} = -\frac{12x_1^{(23)}L_{31}^2 - 14x_2^{(31)}S}{L_{31}^2}. \quad (3.27)$$

Функция ϕ_3 может быть построена аналогично

$$\phi_3 = \tilde{\phi}_3 + \frac{12x_2^{(23)}L_{12}^2 - 14x_1^{(12)}S}{L_{12}^2}\tilde{\phi}_{19} - \frac{12x_2^{(23)}L_{31}^2 + 14x_1^{(31)}S}{L_{31}^2}\tilde{\phi}_{21}, \quad (3.28)$$

$$\tilde{\phi}_3 = (x_2 - x_{21})(4g_1^3 - 3g_1^4).$$

Для построения базисных функций соответствующих вторым производным уравнения (3.15), достаточно представить, например, функцию ϕ_4 в виде

$$\begin{aligned} \phi_4 &= b_{4,1}(x_1 - x_{11})^2g_1^3 + b_{4,3}g_2g_3^2g_1^2 + b_{4,4}g_3g_1^2g_2^2 \\ &= \tilde{\phi}_4 + b_{4,3}\tilde{\phi}_{20} + b_{4,4}\tilde{\phi}_{21}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Выполнив аналогичные преобразования, как и для функций ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , получены следующие выражения для функций ϕ_4 , ϕ_5 , ϕ_6 :

$$\phi_4 = \tilde{\phi}_4 - \frac{x_1^{(12)}(3x_1^{(23)}L_{12}^2 + 2x_2^{(12)}S)}{2L_{12}^2}\tilde{\phi}_{20} \quad (3.30)$$

$$- \frac{x_1^{(31)}(3x_1^{(23)}L_{31}^2 - 2x_2^{(31)}S)}{2L_{31}^2}\tilde{\phi}_{21}, \quad \tilde{\phi}_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_{11})^2g_1^3;$$

$$\begin{aligned} \phi_5 &= \tilde{\phi}_5 - \frac{(3x_1^{(23)}x_2^{(12)} + 4S)L_{12}^2 - 2(x_1^{(23)})^2S}{L_{12}^2}\tilde{\phi}_{20} \\ &- \frac{(3x_1^{(23)}x_2^{(12)} - 4S)L_{31}^2 + 2(x_1^{(31)})^2S}{L_{31}^2}\tilde{\phi}_{21}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\tilde{\phi}_5 = (x_1 - x_{11})(x_2 - x_{21})g_1^3;$$

$$\begin{aligned} \phi_6 &= \tilde{\phi}_6 - \frac{x_2^{(12)}(3x_2^{(23)}L_{12}^2 - 2x_1^{(12)}S)}{2L_{12}^2} \tilde{\phi}_{20} \\ &\quad - \frac{x_2^{(31)}(3x_2^{(23)}L_{31}^2 + 2x_1^{(31)}S)}{2L_{31}^2} \tilde{\phi}_{21}, \quad \tilde{\phi}_6 = \frac{1}{2}(x_2 - x_{21})^2 g_1^3. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Функции ϕ_7, \dots, ϕ_{18} находятся из уравнений (3.19), (3.22)–(3.24), (3.26)–(3.32) соответствующей циклической перестановкой индексов.

В общем, все функции формы ϕ_i можно представить в виде

$$\phi_i = a_{i,1}\tilde{\phi}_i + a_{i,2}\tilde{\phi}_{19} + a_{i,3}\tilde{\phi}_{20} + a_{i,4}\tilde{\phi}_{21}, \quad i = 1, \dots, 21, \quad (3.33)$$

где $a_{i,1} = 1$ при $i = 1, \dots, 18$ и $a_{i,1} = 0$ при $i = 19, \dots, 21$.

3.2.2. Матрица жесткости для треугольника Аргириса

Для построения матрицы жесткости этого элемента, например, в задачах плоского напряженного состояния для однородного материала, необходимо вычислить следующие интегралы

$$\begin{aligned} I_{x_1x_1}^{ij} &= \int_S \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} dS, & I_{x_1x_2}^{ij} &= \int_S \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} dS, \\ I_{x_2x_2}^{ij} &= \int_S \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_2} dS \end{aligned} \quad (3.34)$$

для $i, j = 1, \dots, 21$.

В соответствии с формулой (1.237), эти интегралы можно получить в явном виде. Согласно алгоритму 1.1, матрица жесткости $K^{(i)}$ для одного конечного элемента определяется как

$$K^{(i)} = \int_S \left(E^{(i)} \right)^T C E^{(i)} dS, \quad K^{(i)} \in R^{42 \times 42}, \quad E^{(i)} \in R^{3 \times 42}. \quad (3.35)$$

Здесь C – матрица модулей упругости, которая была введена, например, для однородного и изотропного материала формулой (1.247). По аналогии с фор-

мулой (1.245), матрица $E^{(i)}$ есть

$$E^{(i)} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_{21}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_{21}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_{21}}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_{21}}{\partial x_1} \end{array} \right\}. \quad (3.36)$$

После подстановки матриц (3.36) и (1.247) в формулу (3.35), элемент матрицы жесткости $K_{11}^{(i)}$ получается как

$$K_{11}^{(i)} = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_S \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right)^2 \right] dS. \quad (3.37)$$

Используя выражение (3.19) для базисной функции ϕ_1 в формуле (3.37), выражение для элемента $K_{11}^{(i)}$ может быть представлено как сумма интегралов:

$$\begin{aligned} K_{11}^{(i)} = & \frac{2G}{1 - \nu} \left(I_{x_1 x_1}^{1,1} + a_{1,2}^2 I_{x_1 x_1}^{20,20} + a_{1,4}^2 I_{x_1 x_1}^{21,21} \right. \\ & \left. + 2a_{1,2} I_{x_1 x_1}^{1,20} + 2a_{1,4} I_{x_1 x_1}^{1,21} + 2a_{1,2} a_{1,4} I_{x_1 x_1}^{20,21} \right) \\ & + G \left(I_{x_2 x_2}^{1,1} + a_{1,2}^2 I_{x_2 x_2}^{20,20} + a_{1,4}^2 I_{x_2 x_2}^{21,21} \right. \\ & \left. + 2a_{1,2} I_{x_2 x_2}^{1,20} + 2a_{1,4} I_{x_2 x_2}^{1,21} + 2a_{1,2} a_{1,4} I_{x_2 x_2}^{20,21} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Величины $I_{x_1 x_1}^{1,1}$, $I_{x_1 x_1}^{20,20}$, ... зависят только от узловых координат треугольника

и имеют аналитические представления

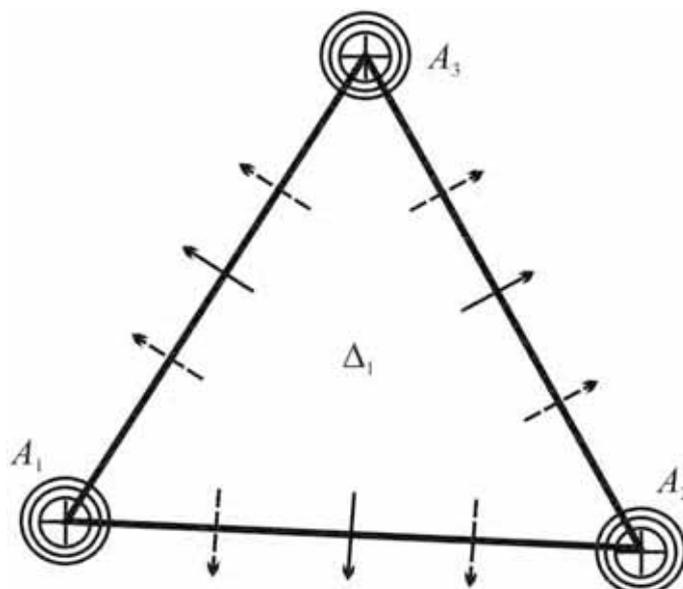
$$\begin{aligned}
 I_{x_1x_1}^{1,1} &= \frac{5}{7} \frac{\left(x_2^{(23)}\right)^2}{S}, & I_{x_1x_1}^{20,20} &= \frac{1}{18900} \frac{2 \left(x_2^{(12)}\right)^2 - x_2^{(23)} x_2^{(31)}}{S}, \\
 I_{x_1x_1}^{21,21} &= \frac{1}{18900} \frac{2 \left(x_2^{(31)}\right)^2 - x_2^{(12)} x_2^{(23)}}{S}, & I_{x_1x_1}^{1,20} &= -\frac{1}{504} \frac{\left(x_2^{(23)}\right)^2}{S}, \\
 I_{x_1x_1}^{1,21} &= -\frac{1}{504} \frac{\left(x_2^{(23)}\right)^2}{S}, & I_{x_1x_1}^{20,21} &= \frac{1}{75600} \frac{3 \left(x_2^{(23)}\right)^2 - 2x_2^{(12)} x_2^{(31)}}{S}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Другие интегралы $I_{x_kx_l}^{i,j}$, $i, j = 1, \dots, 21$ и $k, l = 1, 2$ получаются соответственно. Все элементы матрицы жесткости могут быть все получены подобным образом.

3.2.3. C^2 -аппроксимации для треугольного элемента

Используя подход, описанный в предыдущем пункте, можно аналитически построить полиномиальные аппроксимации, которые могут обеспечить непрерывность не только для функции и ее первых производных, но также и для вторых производных на межэлементных сторонах.

Как было показано в [204], C^2 приближение функции $F(x_1, x_2)$, введенной в уравнениях (3.1) и (3.2) может быть определено полиномами девятой степени (55 базисных функций) для любой регулярной триангуляции. Для этой цели, значения функции и всех ее производных до четвертого порядка включительно должны быть заданы в вершинах каждого треугольника, как это изображено на Рис. 3.3. Производные по нормали к стороне треугольника $\frac{\partial F}{\partial n}$ вычисленные, например, в середине сторон (показанные сплошными стрелками на Рис. 3.3), и вторые нормальные производные $\frac{\partial^2 F}{\partial n^2}$ в двух различных точках каждой стороны треугольника (пунктирные стрелки) должны быть также заданы.

Рис. 3.3. C^2 -треугольник.

Покажем схематически алгоритм построения этих базисных функций ϕ_i , $i = 1, \dots, 55$ и найдем одну из них, например, ϕ_1 в явном виде. Эта функция равна единице в вершине A_1 в то время как другие узловые условия являются однородными. Зададим ϕ_1 в следующем виде

$$\begin{aligned}
 \phi_1 = & b_{1,1}g_1^5 + b_{1,2}g_1^6 + b_{1,3}g_1^7 + b_{1,4}g_1^8 + b_{1,5}g_1^9 \\
 & + b_{1,6}g_2g_3^4g_1^4 + b_{1,7}g_3g_1^4g_2^4 + b_{1,8}g_1^4g_2^2g_3^3 \\
 & + b_{1,9}g_1^3g_2^2g_2^4 + b_{1,10}g_1^4g_2^3g_3^2 + b_{1,11}g_1^3g_2^4g_3^2.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Отметим, что значения функции и всех ее производных до четвертого порядка включительно в вершинах A_2 и A_3 , а также первые и вторые нормальные производные на границе A_2A_3 тождественно равны нулю в соответствии со

Свойством 3.2. Условия в вершине A_1 имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \phi_1(x_{11}, x_{21}) &= 1; \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_1=x_{11} \\ x_2=x_{21}}} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_1=x_{11} \\ x_2=x_{21}}} = \dots = \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x_2^4} \Big|_{\substack{x_1=x_{11} \\ x_2=x_{21}}} = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Как следствие Свойства 3.3, только пять линейно независимых уравнений вытекает из формулы (3.41) чтобы найти коэффициенты $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{1,3}$, $b_{1,4}$, $b_{1,5}$. После решения этой системы уравнений, часть функций ϕ_1 , соответствующие этим коэффициентам имеют следующий вид:

$$\tilde{\phi}_1 = 126g_1^5 - 420g_1^6 + 540g_1^7 - 315g_1^8 + 70g_1^9. \quad (3.42)$$

Параметры $b_{1,6}$ и $b_{1,7}$ получаются из условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial n^{(2)}} \Big|_{\substack{x_1=\frac{1}{2}(x_{13}+x_{11}) \\ x_2=\frac{1}{2}(x_{23}+x_{21})}} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial n^{(3)}} \Big|_{\substack{x_1=\frac{1}{2}(x_{11}+x_{12}) \\ x_2=\frac{1}{2}(x_{21}+x_{22})}} = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

как

$$b_{1,6} = \frac{630c_1}{L_{12}^2}, \quad b_{1,7} = \frac{630c_2}{L_{31}^2}. \quad (3.44)$$

Здесь параметры c_i для $i = 1, 2, 3$ есть

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1^{(23)} x_1^{(12)} + x_2^{(23)} x_2^{(12)}, \\ c_2 &= x_1^{(23)} x_1^{(31)} + x_2^{(23)} x_2^{(31)}, \\ c_3 &= x_1^{(12)} x_1^{(31)} + x_2^{(12)} x_2^{(31)}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Условия

$$\left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial (n^{(2)})^2} \right|_{\substack{x_1 = \frac{1}{3}(x_{13} + 2x_{11}) \\ x_2 = \frac{1}{3}(x_{23} + 2x_{21})}} = \left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial (n^{(2)})^2} \right|_{\substack{x_1 = \frac{1}{3}(2x_{13} + x_{11}) \\ x_2 = \frac{1}{3}(2x_{23} + x_{21})}} = 0 \quad (3.46)$$

заданные на стороне A_3A_1 составляют линейную алгебраическую систему относительно параметров $b_{1,8}$ и $b_{1,9}$, из которой следует, что

$$b_{1,8} = \frac{1260c_2(c_2 + 2c_3)}{L_{31}^4}, \quad b_{1,9} = \frac{1260c_2^2}{L_{31}^4}. \quad (3.47)$$

Геометрические константы $b_{1,10}$ и $b_{1,11}$ находятся из подобных условий на стороне A_1A_2 и равны

$$b_{1,10} = \frac{1260c_1^2}{L_{12}^4}, \quad b_{1,11} = \frac{1260c_1(c_1 + 2c_3)}{L_{12}^4}. \quad (3.48)$$

Другие 53 базисных функций можно найти соответственно.

Отметим, что полный двумерный полином девятой степени содержит 55 мономов. Последняя базисная функция, а именно:

$$\phi_{55} = g_1^3 g_2^3 g_3^3$$

не влияет на межэлементные условия и является внутренней функцией треугольника.

3.3. Конечно-элементная техника в задачах линейной упругости

3.3.1. Алгоритм МКЭ

В этом пункте, численные алгоритмы решения задач условной минимизации функционала энергетической ошибки Φ , введенного в разделе 2.2., обсуждаются в рамках двумерных линейных задач теории упругости. Алго-

ритмы основаны на кусочно-полиномиальной аппроксимациях неизвестных функций $u_k(x_1, x_2)$ и $\sigma_{kl}(x_1, x_2)$ ($k, l = 1, 2$). Предполагается что, упругое тело занимает область Ω с кусочно-линейной границей Γ . На каждой стороне многоугольника Ω заданы граничные условия (2.70) и (2.71), в которых функции \bar{u}_i и \bar{q}_i являются полиномами. Также предполагается, что объемные силы отсутствуют ($f(x_1, x_2) = 0$).

В соответствии с теоремой 2.1, задача теории упругости может быть разделена на две независимые подзадачи относительно перемещений и напряжений, как в формуле (2.97). Для численного решения этих подсистем, справедливы двусторонние оценки, введенные формулой (2.99). Поэтому, существуют два МКЭ алгоритма, один из которых предназначен для решения задачи в перемещениях, в то время как другой в напряжениях.

Для решения задачи в перемещениях, можно применить алгоритм, описанный в разделе 1.9., где вместо аппроксимаций неизвестных перемещений в формуле (1.238), функции

$$u_i = u_i^c + u_i^0,$$

$$u_i^c = \sum_{j=1}^{N_u} \left(u_i^{(j)} g_2^j g_3^{N_u-j} + u_i^{(j+N_u)} g_3^j g_1^{N_u-j} + u_i^{(j+2N_u)} g_1^j g_2^{N_u-j} \right), \quad (3.49)$$

$$u_i^0 = g_1 g_2 g_3 \sum_{j+l=0}^{N_u-3} u_i^{(jl)} g_1^j g_2^l g_3^{N_u-j-l-3}, \quad i = 1, 2,$$

вводятся в соответствии с формулой (3.7). В случае линейных аппроксимаций (1.238), непрерывность перемещений обеспечивается автоматически условиями (1.239). Для полиномов (3.49) необходимо использовать подход, описанный в разделе 3.1., чтобы гарантировать свойство непрерывности. Минимизируемым функционалом для этой задачи является полная потенциальная энергия Π , определенная формулой (1.150), или Π^w в (2.135) если принимаются во внимание Винклеровские условия (2.108). Таким образом, рассматриваемая

задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$K^u a^u + F^u = 0. \quad (3.50)$$

Здесь K^u является симметричной положительно определенной матрицей жесткости, a^u является вектором проектных параметров, состоящего из неопределенных коэффициентов $u_i^{(j)}$ и $u_i^{(jl)}$, F^u это вектор внешних сил и граничных перемещений соответственно.

Алгоритм метода конечных элементов, описанный в разделе 1.9. сохраняет основные черты классического подхода и для статических задач в напряжениях. Однако, аппроксимации напряжений для этих задач должны удовлетворять не только специальные межэлементные условия, но и уравнения равновесия (2.17) внутри каждого треугольника.

Компоненты σ_{ij} тензора напряжения σ определяются для каждого треугольника следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^c + \sigma_{ij}^0, \\ \sigma_{ij}^c &= \sum_{k=1}^{N_\sigma} \left(\sigma_{ij}^{(k)} g_2^k g_3^{N_\sigma-k} + \sigma_{ij}^{(k+N_\sigma)} g_3^k g_1^{N_\sigma-k} + \sigma_{ij}^{(k+2N_\sigma)} g_1^k g_2^{N_\sigma-k} \right), \\ \sigma_{ij}^0 &= g_1 g_2 g_3 \sum_{k+l=0}^{N_\sigma-3} \sigma_{ij}^{(kl)} g_1^k g_2^l g_3^{N_\sigma-k-l-3}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

После подстановки аппроксимаций (3.51) в формулу (2.17), уравнения равновесия удовлетворяются аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.3.

Межэлементные условия, например, для треугольников изображенных на Рис. 3.1, задаются в соответствии с

$$(\sigma_i + \sigma_{i+1}) \cdot n = 0, \quad g_3 = 0, \quad (3.52)$$

σ_i и σ_{i+1} являются полиномиальными тензорами напряжений, заданных на треугольниках Δ_i и Δ_{i+1} , соответственно.

После такого соединения, компоненты тензора напряжений не являются непрерывными функциями на внутренние стороны треугольника, потому что только два условия для трех компонентов напряжений выполняются на этих сторонах. Минимизируемым функционалом для этой задачи является общая дополнительная потенциальная энергия Π_c , введенная в формуле (1.167) или Π_c^w в формуле (2.136), если Винклеровские условия принимаются во внимание. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$K^\sigma a^\sigma + F^\sigma = 0. \quad (3.53)$$

Здесь K^σ является положительно определенной матрицей податливости, a^σ является вектором независимых параметров, состоящего из неопределенных коэффициентов $\sigma_{ij}^{(k)}$ и $\sigma_{ij}^{(kl)}$, F^σ есть вектор, образованный граничными перемещениями и внешней нагрузкой.

В связи с тем, что равновесие каждого элемента связано с равновесием тела в целом, матрица податливости K^σ может быть слишком заполненной, для того чтобы выполнять эффективные вычисления. Чтобы избежать вычислительных трудностей, сопровождающих такие матрицы, можно изменить квадратичный функционал Π_c следующим образом. Добавим неотрицательный член к полной дополнительной потенциальной энергии Π_c и составим новый функционал Π_c^s следующим образом

$$\Pi_c^s = \Pi_c + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{N_S} \int_{S_i} ((\sigma_k + \sigma_{k+1}) \cdot n) \cdot ((\sigma_k + \sigma_{k+1}) \cdot n) dS_i. \quad (3.54)$$

Здесь S_i является стороной, общей для двух треугольников, по которой выполняется интегрирование, N_S – число межэлементных сторон в конечно-

элементной сетке; $\beta > 0$ – весовой коэффициент. Матрица податливости K^σ определяется из условий минимума функционала Π_c^s .

Конечно, такая функциональная модификация выглядит как численный трюк. Тем не менее, можно дать строгое объяснение такому обобщению. Рассмотрим два элемента показанных на Рис. 3.1 и предположим, что условие (3.52) нарушается на смежных краях:

$$(\sigma_i + \sigma_{i+1}) \cdot n = \Delta\sigma \neq 0. \quad (3.55)$$

Введем следующий потенциал

$$\hat{\Xi}^S = \frac{\kappa}{2} \int_S \left(u + \frac{\Delta\sigma}{\kappa} \right)^2 dS \geq 0 \quad (3.56)$$

и добавим его к функционалу $\hat{\Phi}$, определенному в уравнениях (2.27) и (2.28), но вычисленному только по треугольникам Δ_i и Δ_{i+1} :

$$\hat{\Phi}^S = \hat{\Phi} + \hat{\Xi}^S \geq 0. \quad (3.57)$$

Здесь κ является мнимым коэффициентом жесткости. С учетом дисбаланса (3.55), уравнение (2.90) может быть переписано следующим образом

$$\hat{\Phi} = \hat{\Pi}[u] + \hat{\Pi}_c[\sigma] - \int_S \Delta\sigma u dS, \quad (3.58)$$

где $\hat{\Pi}$ и $\hat{\Pi}_c$ являются потенциальной и дополнительной энергиями для этих двух треугольников.

Если раскрыть формулу (3.56)

$$\hat{\Xi}^S = \frac{\kappa}{2} \int_S u^2 dS + \int_S \Delta\sigma u dS + \frac{1}{2\kappa} \int_S \Delta\sigma^2 dS,$$

то с учетом уравнения (3.58) функционал (3.57) имеет вид

$$\hat{\Phi}^S = \hat{\Pi}[u] + \hat{\Pi}_c[\sigma] + \frac{\kappa}{2} \int_S u^2 dS + \frac{1}{2\kappa} \int_S \Delta\sigma^2 dS. \quad (3.59)$$

Для сетки с произвольным числом треугольников, получается следующее выражение для функционала Φ^S

$$\begin{aligned} \Phi^S &= \Pi^S + \Pi_c^S, \quad \Pi^S = \Pi + \frac{1}{2\beta} \sum_{i=1}^{N_s} \int_{S_i} u^2 dS_i, \\ \Pi_c^S &= \Pi_c + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{N_s} \int_{S_i} \Delta\sigma^2 dS_i, \quad \beta = \frac{1}{\kappa}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

после объединения (3.59) для всех элементов. Здесь β – коэффициент податливости фиктивной пружины, $\Delta\sigma(x)$ является поверхностной функцией, обусловленной разрывом компонентов напряжений на межэлементных сторонах S_i сетки.

Так как потенциал

$$\Xi^S = \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^{N_s} \int_{S_i} \left(u + \frac{\Delta\sigma}{\kappa} \right)^2 dS_i \quad (3.61)$$

подобен, в некотором смысле, интегралу Ξ^w в формуле (2.127), задача минимизации функционала Φ^S находится в рамках всех условия теоремы 2.4. Таким образом, двусторонние оценки (2.139) и (2.140) справедливы и в этом случае.

Значение весового коэффициента β не должно существенно влиять на решение исходной задачи теории упругости и может быть выбрано в соответствии со следующим правилом:

$$\Phi(u^*, \sigma^*) \gg \frac{1}{2\beta} \sum_{i=1}^{N_s} \int_{S_i} (u^*)^2 dS_i + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{N_s} \int_{S_i} (\Delta\sigma^*)^2 dS_i. \quad (3.62)$$

Здесь u^* и σ^* являются приближенным решением вариационных задач

$$\Pi^S[u^*] = \min_u \Pi^S[u], \quad \Pi_c^S[\sigma^*] = \min_\sigma \Pi_c^S[\sigma] \quad (3.63)$$

для сплайнов u и σ из формул (3.49) и (3.51).

Пример 3.1. Прямоугольная упругая пластина имеет размеры $2l \times 2h$ и единичную толщину (см. Рис. 3.4). Напряженно-деформированное состояние пластины описывается двумерными уравнениями линейной упругости (плоское напряженное состояние). Начало декартовой системы координат Ox_1x_2 размещено в средней точке пластины и ось x_1 параллельна сторонам с длиной $2l$. Предполагается, что пластина состоит из двух различных изотропных материалов. Модуль Юнга равен E_1 при $x_1 < 0$ и E_2 при $x_1 > 0$. Коэффициент Пуассона ν является одинаковым для обоих материалов.

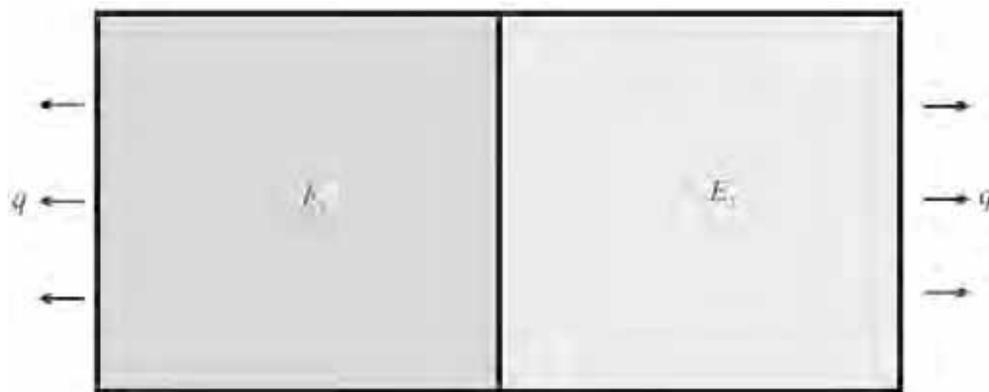


Рис. 3.4. Прямоугольная биматериальная пластина.

Пластина равномерно растягивается при $x_1 = \pm l$

$$\sigma_{11}(\pm l, x_2) = q = \text{const}, \quad \sigma_{12}(\pm l, x_2) = 0.$$

Другие стороны не нагружены:

$$\sigma_{12}(x_1, \pm h) = \sigma_{22}(x_1, \pm h) = 0.$$

В связи с симметрией относительно оси x_1 , можно рассматривать только

верхнюю часть тела ($x_2 \geq 0$, Рис. 3.6) с использованием следующих граничных условий:

$$u_2(x_1, 0) = \sigma_{12}(x_1, 0) = 0, \quad u_1(0, 0) = 0.$$

Для таких граничных условий, задача минимизации (2.32) функционала энергетической ошибки $\Phi[u, \sigma]$ эквивалентна двум отдельным подзадачам, для которых применимы двусторонние энергетические оценки (2.101).

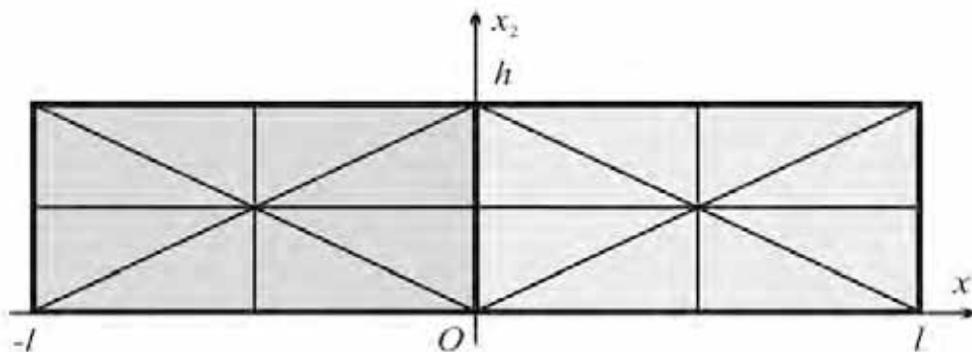


Рис. 3.5. Треугольная сетка, используемая для численных вычислений.

Используемая в этом примере триангуляция показана на Рис. 3.5. Для создания сетки, область

$$\Omega = \{x : |x_1| < l, 0 < x_2 < h\}$$

сначала делится на $2M \times M$ одинаковых прямоугольников, где $M > 0$ является параметром сетки. После этого каждый прямоугольник разделяется на два треугольника. Координаты узлов сетки есть

$$\begin{aligned} x_1^{(i,j)} &= -l + \frac{i}{M}l, \quad i = 0, 1, \dots, 2M; \\ x_2^{(i,j)} &= \frac{j}{M}h, \quad j = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Полиномиальная степень N_u , как другой параметр аппроксимации, задается для всех треугольных элементов и связан с N_σ соотношением $N_\sigma = N_u - 1$. Следующие безразмерных геометрические и материальные парамет-

ры были выбраны: длина пластины и ее ширина являются $l = 1$ и $h = 1$, соответственно, модули Юнга – $E_1 = 1/2$ и $E_2 = 1$; коэффициент Пуассона – $\nu = 0.3$; плотность внешней нагрузки – $q = 1$.

Расчеты были выполнены для различных степеней приближения $N_u = 3, 4, 5, 6$ и значений параметра сетки $M = 1, \dots, 16$. Лучшее полученное значение упругой энергии составляет $W^* = 1.4974343$.

Скорость уменьшения функционала энергетической ошибки Φ является важной характеристикой сходимости алгоритма. Монотонное уменьшение Φ по отношению к общему числу степеней свободы N показано на Рис. 3.6 в логарифмической шкале для различных степеней многочлена N_u . Отметим, что чем больше номер N_u , тем меньше значение функционала Φ (примерно при одинаковой размерности N).

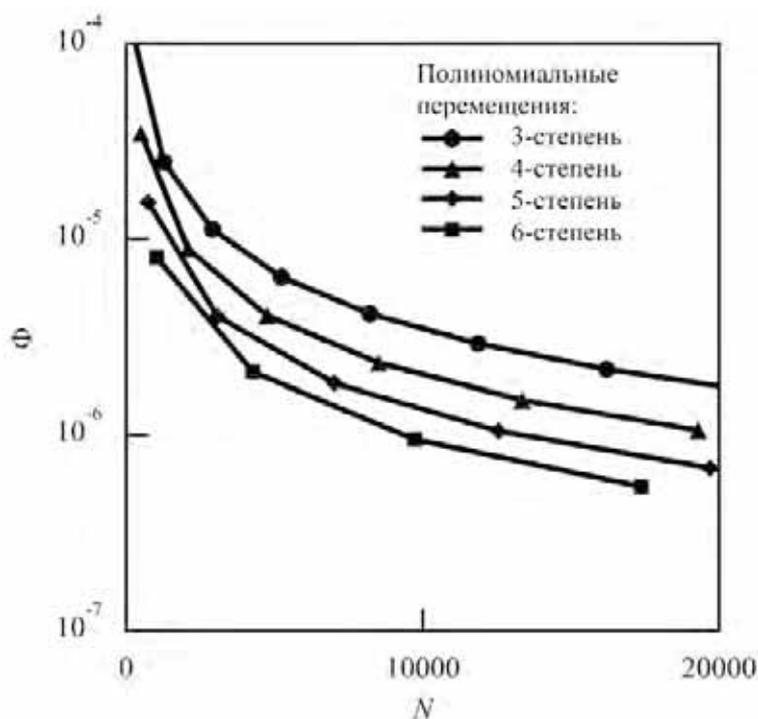


Рис. 3.6. Функционал энергетической ошибки Φ по сравнению с числом степеней свободы N при различных степенях полинома N_u для биматериальной пластины.

Двусторонние оценки упругой энергии W , запасаемой телом, в зависимости от числа степеней свободы N при $N_u = 5$ показаны на Рис. 3.7. Энергия деформации $W_\varepsilon(a^u) = W(a^u)$ строго возрастает с N и может рассматривать-

ся в качестве нижней границы для точного значения энергии, в то время как энергия напряжений $W_\sigma(a^\sigma)$ монотонно убывает и может служить в качестве верхней границы для W . Относительная погрешность энергии $\Delta = \Phi W_\sigma^{-1}$ достигает значений, которые меньше 10^{-7} при $N \approx 30000$.

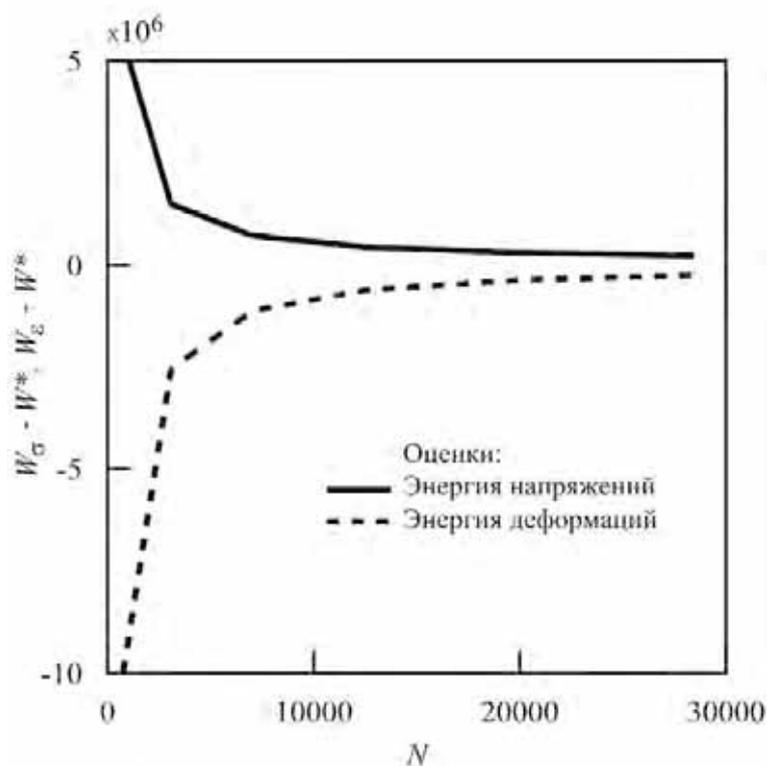


Рис. 3.7. Двусторонние оценки упругой энергии W запасенной в биматериальной пластине по сравнению с числом степеней свободы N при $N_u = 5$.

Плотность энергетической ошибки $\varphi(x_1, x_2)$, определенная в уравнении (2.28), как функция пространственных координат, изображена на Рис. 3.8 при $M = 6$ и $N_u = 5$. Ее можно рассматривать как локальную оценку качества приближенного решения. Эта функция близка к нулю всюду, за исключением малой окрестности одной граничной точки с координатами $x = \{0, 1\}^T$, которая принадлежит границе раздела материалов.

Пример 3.2. Рассмотрим прямоугольную изотропную упругую пластину, называемую защемленной балкой на упругом основании, с размерами $2l \times h$ и единичной толщиной (см. Рис. 3.9). Начало декартовой системы координат Ox_1x_2 помещено в средней точке стороны с длиной $2l$ и ось x_1

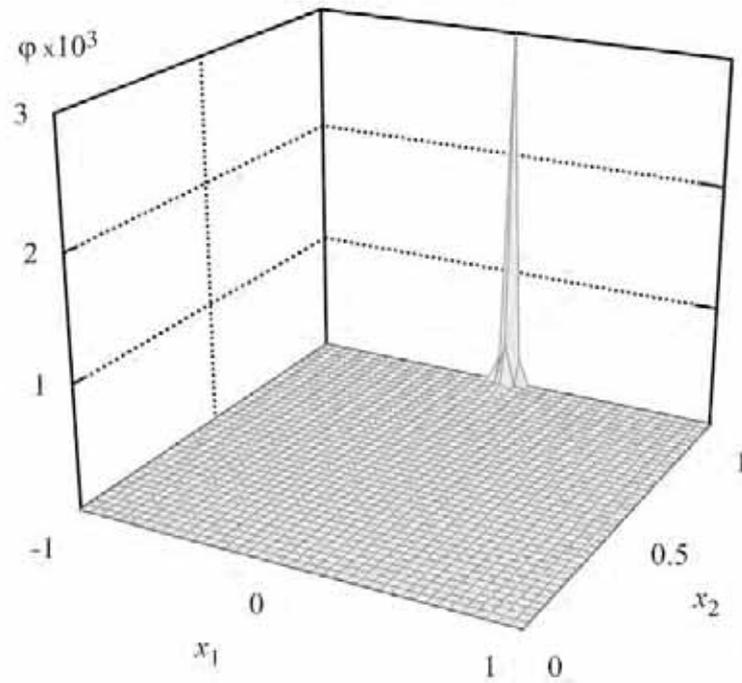


Рис. 3.8. Распределение плотности энергетической ошибки $\varphi(x_1, x_2)$ при $M = 6$, $N_u = 5$ для биматериальной пластины.

параллельна этому ребру (см. [196]).

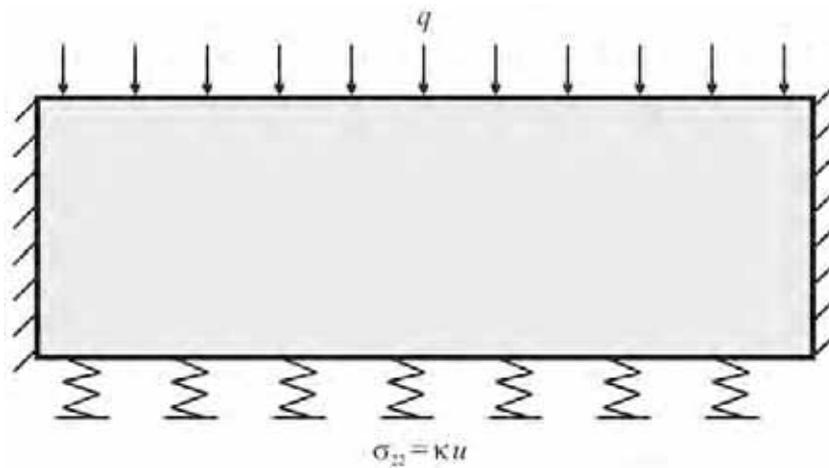


Рис. 3.9. Защемленная прямоугольная изотропная пластина на упругом основании.

Пластина нагружена при $x_2 = h$ равномерно распределенной нагрузкой

$$\sigma_{22}(x_1, h) = q = \text{const}, \quad \sigma_{12}(x_1, h) = 0.$$

Упругие перемещения фиксируются по краям при $x_1 = \pm l$:

$$u_1(\pm l, x_2) = u_2(\pm l, x_2) = 0$$

и упругое основание задано при $x_2 = 0$:

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \kappa u_2(x_1, 0), \quad \sigma_{12}(x_1, 0) = 0.$$

Из-за того, что задача симметрична относительно оси x_2 , можно рассматривать только, например, правую часть тела ($x_1 \geq 0$) при следующих граничных условиях

$$u_1(0, x_2) = \sigma_{12}(0, x_2) = 0.$$

Задача минимизации (2.32) решается одновременно относительно обеих переменных: перемещений и напряжений.

Конечно-элементной сетка, делящая область Ω на $3M \times 2M$ одинаковых прямоугольников, показана на Рис. 3.10. Координаты узлов сетки есть

$$x_1^{(i,j)} = \frac{i}{3M}l, \quad i = 0, 1, \dots, 3M;$$

$$x_2^{(i,j)} = \frac{j}{2M}h, \quad j = 0, 1, \dots, 2M.$$

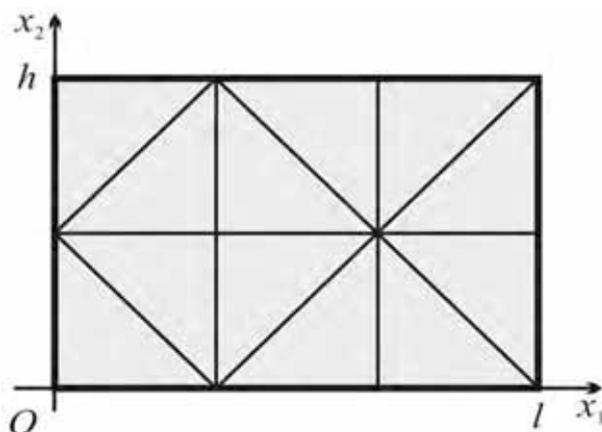


Рис. 3.10. Треугольная сетка, использованная для вычислений в Примере 3.2.

Полиномиальные степени N_u и N_σ связаны друг другом, как это определено в Примере 3.1. Следующие геометрические и материальные безразмерные параметры были выбраны: длина пластины и ее ширина $l = 5$ и $h = 1$, соответственно, модуль Юнга – $E = 1$; коэффициент Пуассона – $\nu = 0.3$; плотность внешней нагрузки – $q = 1$, модуль упругого основания – $\kappa = 0.1$.

Расчеты были выполнены с различным числами параметров сетки $M = 1, \dots, 8$. Лучшее полученное значение упругой энергии составляет $W^* = 10.186$.

Интегральная ошибка Φ в зависимости от числа степеней свободы N приведена на Рис. 3.11 для различных степеней N_u . Значение функционала Φ является строго убывающей функцией относительно обоих параметров N_u и N .

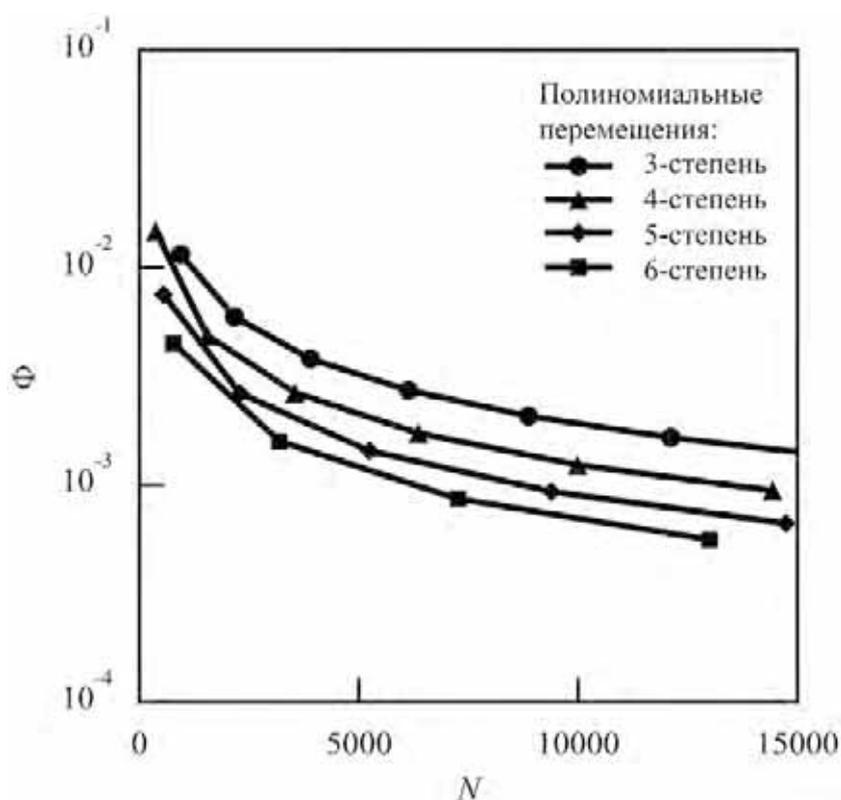


Рис. 3.11. Функционал энергетической ошибки Φ по сравнению с числом степеней свободы N для различных степеней N_u в Примере 3.2.

Приближения упругих энергий W_σ , W_ϵ и W как функции N при $N_u = 5$ показаны на Рис. 3.12. Видно, что для данной триангуляции и степени по-

линомов N_u неравенство $W \leq W_\sigma \leq W_u$ выполняется. При этом энергии W_σ и W являются строго возрастающими функциями N , в то время как $W_\sigma(N)$ монотонно убывает. Отметим, что упругая энергия W в Примере 2.7 строго убывает (см. Рис. 2.14). Как уже отмечалось в разделе 2.8., поведение этой энергии существенно зависит от соотношения между компонентами тензора упругих модулей C и коэффициента упругого основания κ .

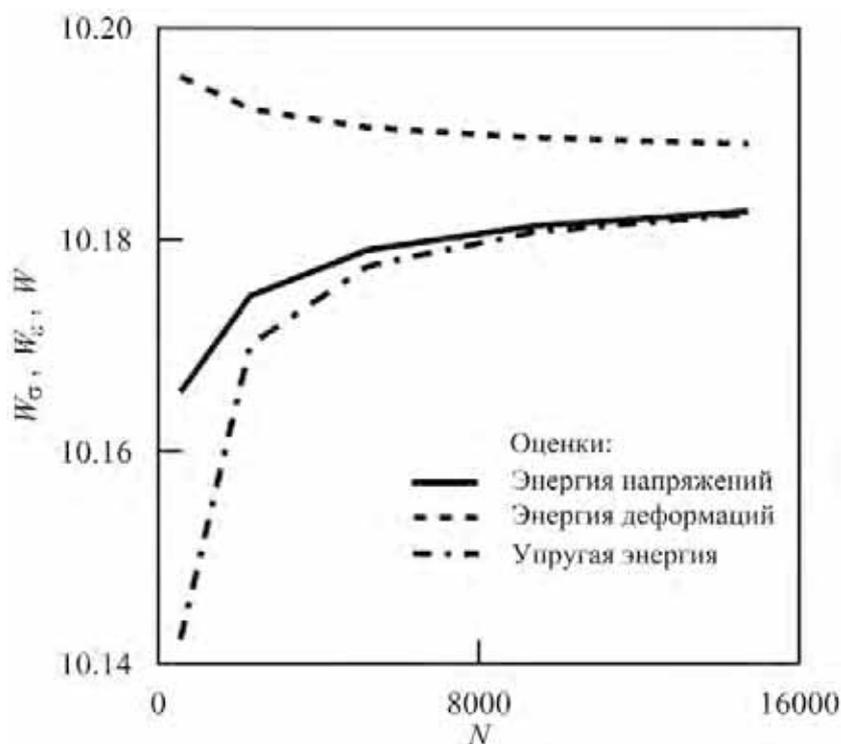


Рис. 3.12. Энергии W_σ , W_ϵ и W по сравнению с числом степеней свободы N при $N_u = 5$ для защемленной пластины на упругом основании.

Относительная погрешность Δ может служить в качестве интегральной оценки качества решения для вариационных задач при такой форме краевых ограничений. Ошибка Δ достигает значения, которое меньше 10^{-3} при $N \approx 15000$.

Распределение плотности энергетической ошибки $\varphi(x_1, x_2)$ представлена на Рис. 3.13 при $M = 4$ и $N_u = 5$. Аналогично Примеру 3.1, функция φ близка к нулю всюду, за исключением только малых окрестностей двух угловых точек с координатами $x^{(1)} = \{5, 0\}^T$ и $x^{(2)} = \{5, 1\}^T$.

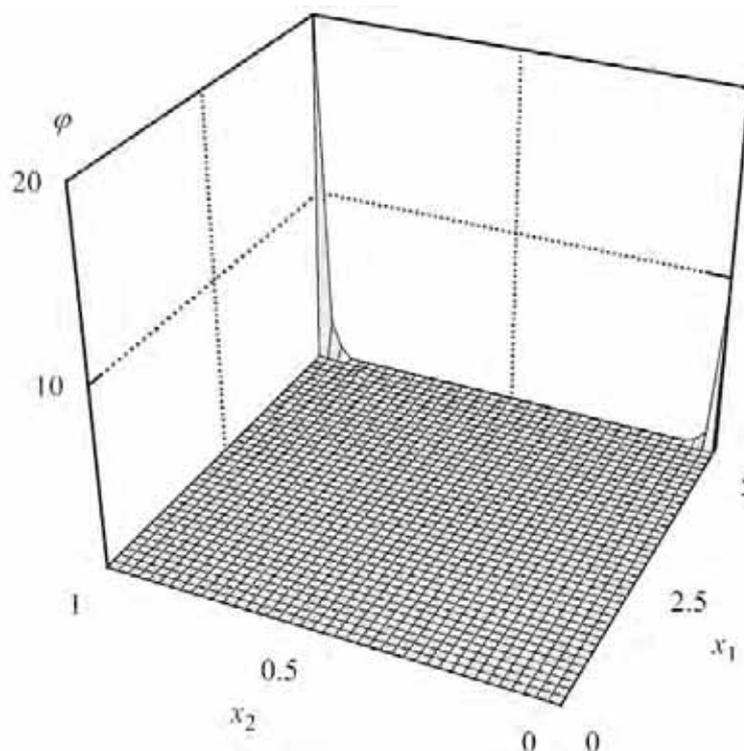


Рис. 3.13. Распределение плотности энергетической ошибки $\varphi(x_1, x_2)$ при $M = 4$ и $N_u = 5$ для защемленной пластины на упругом основании.

3.4. Уточнение и адаптация сетки

Одним из актуальных направлений в теории метода конечных элементов является разработка эффективных стратегий улучшения качества численного решения. Для этого используются методы уточнения и адаптации кусочно-полиномиальных аппроксимации неизвестных функций высокого порядка. Различные априорные и апостериорные эвристические критерии применяются для анализа характеристик решения [191, 194], но надежные оценки погрешностей для этих методов требуют применения современной математической техники.

Вариационные подходы, обсужденные в главе 2, а также реализация метода конечных элементов, разработанная на основе МИДС, позволяют предлагать различные стратегии адаптации и уточнения сеток [153]. Для этих целей могут быть использованы полученные интегральные и локальные ошибки. Некоторые из этих подходов показаны и обсуждены на примере упругой пла-

стины с трещиной.

Пример 3.3. Рассмотрим прямоугольную изотропную упругую пластину с размерами $4l \times 2h$ и единичной толщиной (см. Рис. 3.14). Тело содержит трещину, моделируемую прямолинейным разрезом, который расположен в середине пластины и ориентирован параллельно сторонам с длиной $4l$. Размер разреза равен $2l$. Пластина описывается линейными уравнениями упругости (плоское напряженное состояние). Начало декартовой системы координат Ox_1x_2 размещено на левом кончике трещины и ось x_1 параллельна сторонам с длиной $4l$.

Много работ было посвящено моделированию и анализу напряженно-деформированного состояния упругих конструкций с трещинами. Стоит отметить, публикаций Бирюкова и соавт. [17], Андреева и др. [5,6], развивающие интегральный подход к вычислению предельного равновесия для внутренних и краевых трещин с взаимодействующими поверхностями. Несколько исследований посвящено специальному классу задач, для нахождения соотношений, связывающих прочностные характеристики с вариациями геометрических параметров исследуемых тел (см., например, [177]).

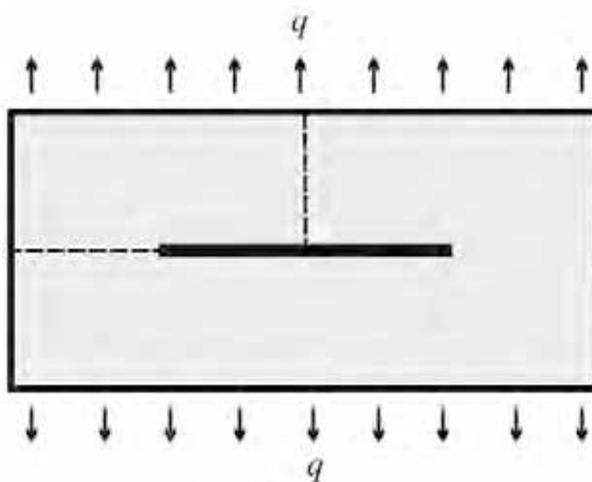


Рис. 3.14. Упругая пластина с трещиной.

Пластина однородно растянута при $x_2 = \pm h$ силами:

$$\sigma_{22}(x_1, \pm h) = q = \text{const}, \quad \sigma_{12}(x_1, \pm h) = 0.$$

Соответственно другие стороны пластины не нагружены

$$\sigma_{11}(-l, x_2) = \sigma_{12}(-l, x_2) = \sigma_{11}(3l, x_2) = \sigma_{12}(3l, x_2) = 0.$$

Стороны разреза также свободны от нагрузок:

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \sigma_{12}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (0, 2l).$$

В связи с симметрией задачи относительно оси x_1 и линии $x_1 = l$, только левая верхняя часть

$$\Omega = \{x : |x_1| < l, 0 < x_2 < h\}$$

пластины может рассматриваться с учетом следующих дополнительных граничных условий (см. Рис. 3.15):

$$u_1(l, x_2) = \sigma_{12}(l, x_2) = 0,$$

$$u_2(x_1, 0) = \sigma_{12}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (-l, 0).$$

Для таких граничных ограничений, задача минимизации (2.32) эквивалентна двум отдельным подзадачам, как в Примере 3.1, при этом двусторонние оценки энергии (2.101) остаются справедливыми.

В данном примере используются треугольные сетки, как показано на Рис. 3.16 и 3.17. Эти триангуляции топологически эквивалентны друг другу. Чтобы создать такую сетку, область Ω в первую очередь делится на $2M \times M$ прямоугольников, где $M > 0$ – параметр сетки. После этого каждый прямо-

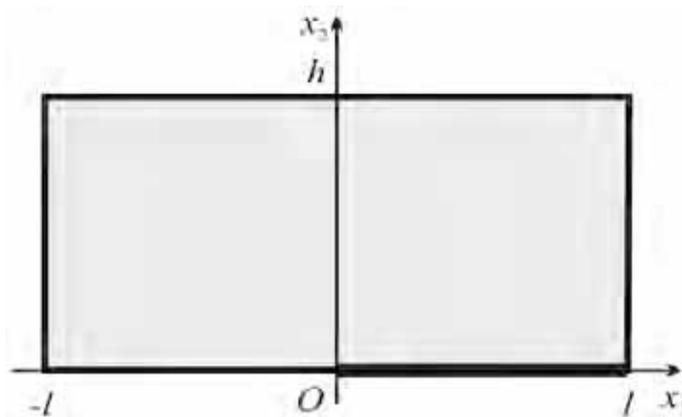


Рис. 3.15. Область Ω пластины с трещиной в Примере 3.3.

угольник разделен на два треугольника.

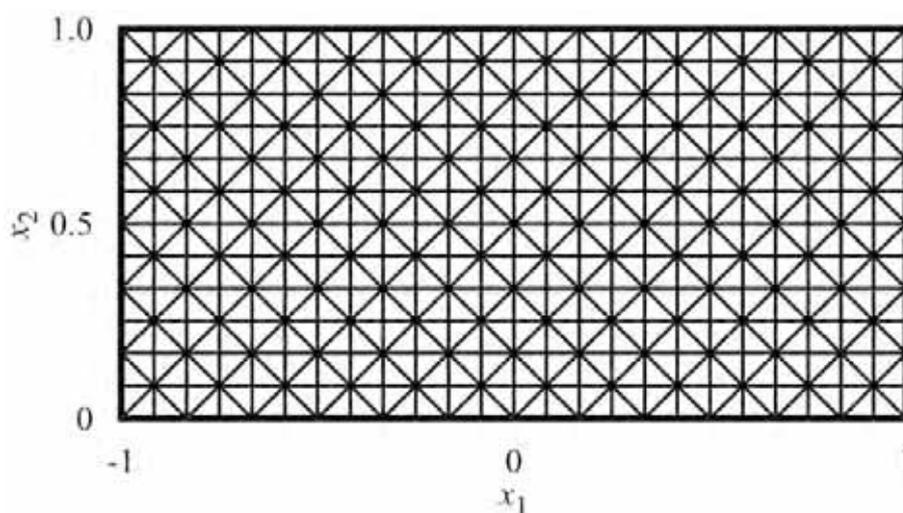


Рис. 3.16. Равномерная треугольная сетка в Примере 3.3.

Полиномиальная степень N_u , как аппроксимационный параметр задается одинаково для всех треугольных элементов и связан с N_σ через отношение $N_\sigma = N_u - 1$. Следующие безразмерные геометрические и материальные параметры были выбраны: длина пластины и ее ширина есть $l = 1$ и $h = 1$, соответственно, модуль Юнга – $E = 1$; коэффициент Пуассона равен $\nu = 0.3$; плотность внешней нагрузки – $q = 1$.

Расчеты были выполнены с различными степенями аппроксимации $N_u = 3, 4, 5, 6$ и различными значениями параметра сетки $M \leq 18$. Лучшее найденное значение упругой энергии составляет $W^* \approx 5.633$.

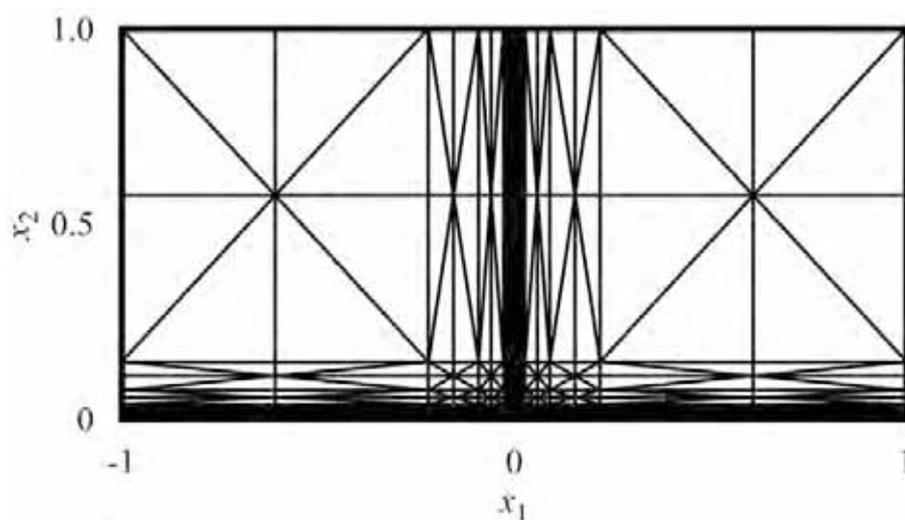


Рис. 3.17. Адаптированная треугольная сетка в Примере 3.3.

Во-первых, прокомментируем численные результаты, полученные с использованием однородной сетки (Рис. 3.16) для различных значений параметра M и степени полиномиальной аппроксимации N_u . Координаты узлов равномерной сетки в этом случае определяется формулой (3.64).

Равномерное и монотонное стремление к нулю нормированной функции $\Delta(N) = \Phi W_\sigma^{-1}$ показано на Рис. 3.18 для различных степеней N_u . Отметим, что значение функционала Φ уменьшается (довольно медленно), в то время как числа M (h -сходимость) и / или N_u (p -сходимость) растут.

Двусторонние оценки упругой энергии W , запасенной в теле, в зависимости от числа степеней свободы N при $N_u = 6$ показаны на Рис. 3.19. Энергия деформаций $W_\varepsilon(a^u) = W(a^u)$ монотонно возрастает и может рассматриваться в качестве нижней границы упругой энергии на точном решении, в то время как энергия напряжения $W_\sigma(a^\sigma)$ монотонно убывает и может служить в качестве верхней границы W . Относительная погрешность энергии Δ достигает значения, которое равно примерно 0.46% при $N \approx 40000$.

Распределение плотности энергетической ошибки $\varphi(x_1, x_2)$ представлена на Рис. 3.20 при $M = 12$ и $N_u = 6$. Видно, что функция φ близка к нулю всюду, за исключением лишь малой окрестности у вершины трещины с координатами $x = \{0, 0\}^T$. Максимальное значение распределения энергетической

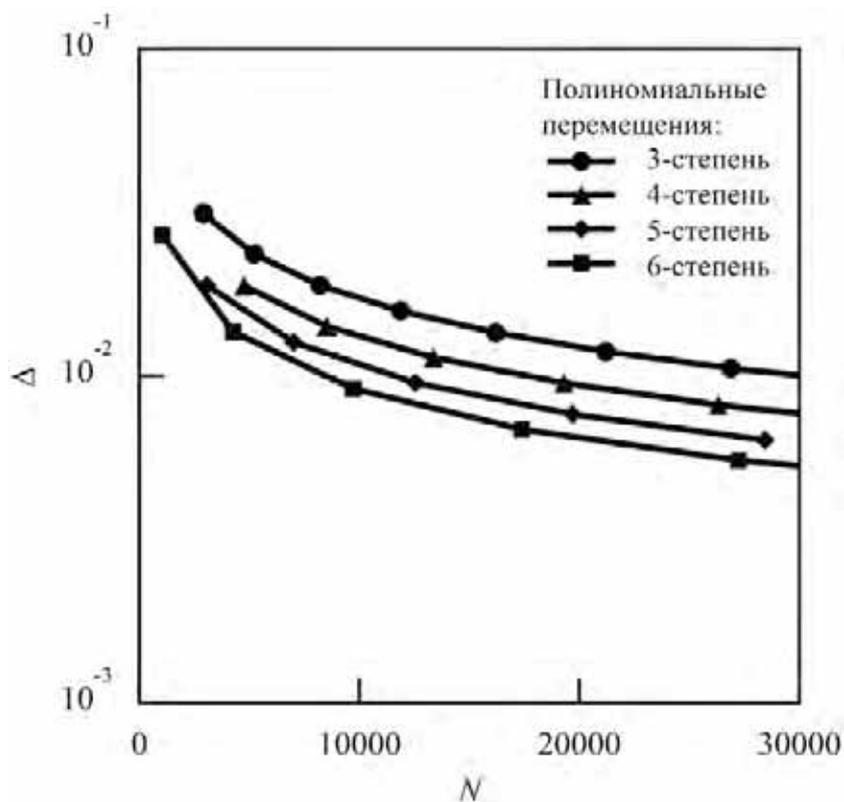


Рис. 3.18. Относительная энергетическая погрешность Δ по сравнению с числом степеней свободы N для различных степеней N_u (равномерная сетка).

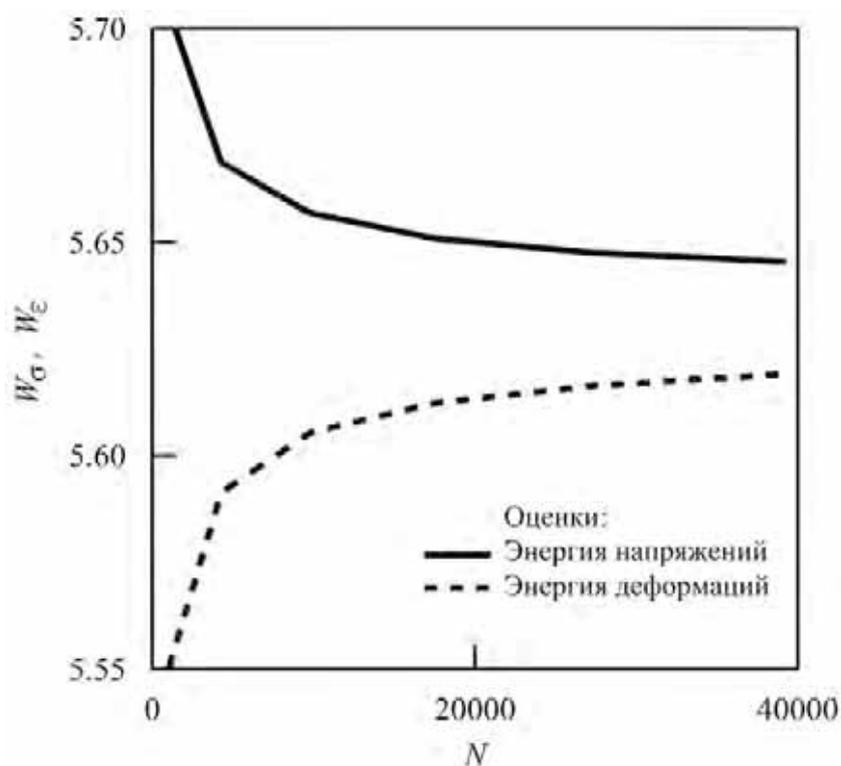


Рис. 3.19. Двусторонние оценки упругой энергии для различного числа степеней свободы N при $N_u = 6$ (равномерная сетка).

ческой ошибки φ , возникающее в этой точке, примерно равно $\varphi \approx 674$. Этот максимум не показан на Рис. 3.20 из-за своего достаточно высокого значения.

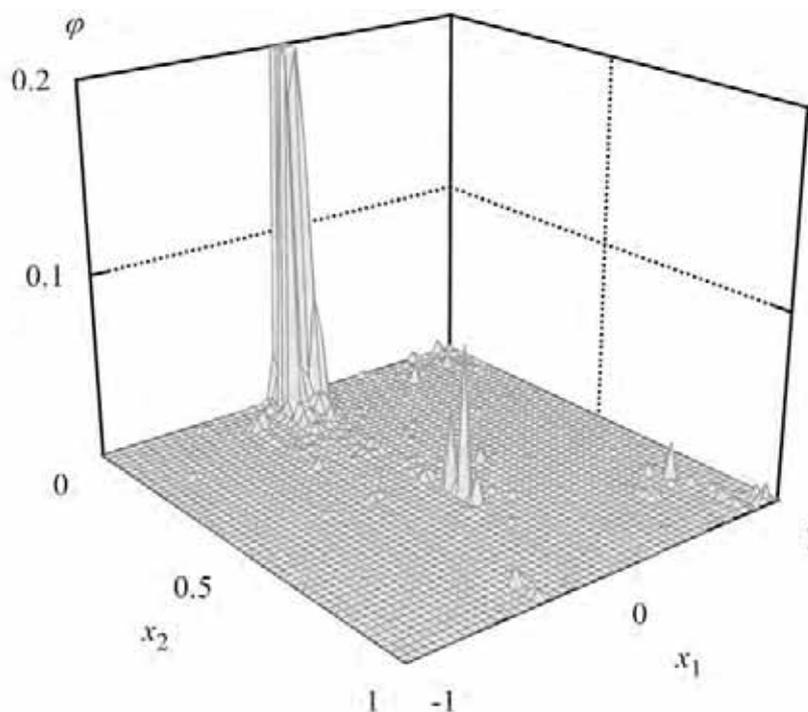


Рис. 3.20. Распределение плотности энергетической ошибки $\varphi(x_1, x_2)$ при $M = 12$, $N = 6$ (равномерная сетка).

В целях повышения точности приближенных решений, была сформирована адаптированная сетка (см. Рис. 3.17). Эта сетка получена из равномерной с тем же числом M соответствующим изменением расстояния между горизонтальными и вертикальными межэлементными линиями. Новые координаты $x_1^{(i,1)}$ при $i = 1, \dots, 2M - 1$ и $x_2^{(1,j)}$ при $j = 1, \dots, M - 1$ были выбраны таким образом, чтобы значения следующих интегралов

$$\Phi^{1,i} = \int_0^h \int_{x^{(i-1,1)}}^{x^{(i,1)}} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad i = 1, \dots, 2M$$

$$\Phi^{2,j} = \int_{x^{(1,j-1)}}^{x^{(1,j)}} \int_{-l}^l \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad j = 1, \dots, M$$

были приблизительно равны друг другу для всех i и j .

Новое распределение локальной ошибки $\varphi(x_1, x_2)$ представлено на

Рис. 3.21 при $M = 12$ и $N_u = 6$. Форма функции φ на этом рисунке подобна той, которая показана на Рис. 3.20. В отличие от случая равномерной сетки, область, где значение φ является особенно высокой значительно сужена. В это же время, максимальное значение φ возрастает и становится равным примерно $\varphi \approx 1406$.

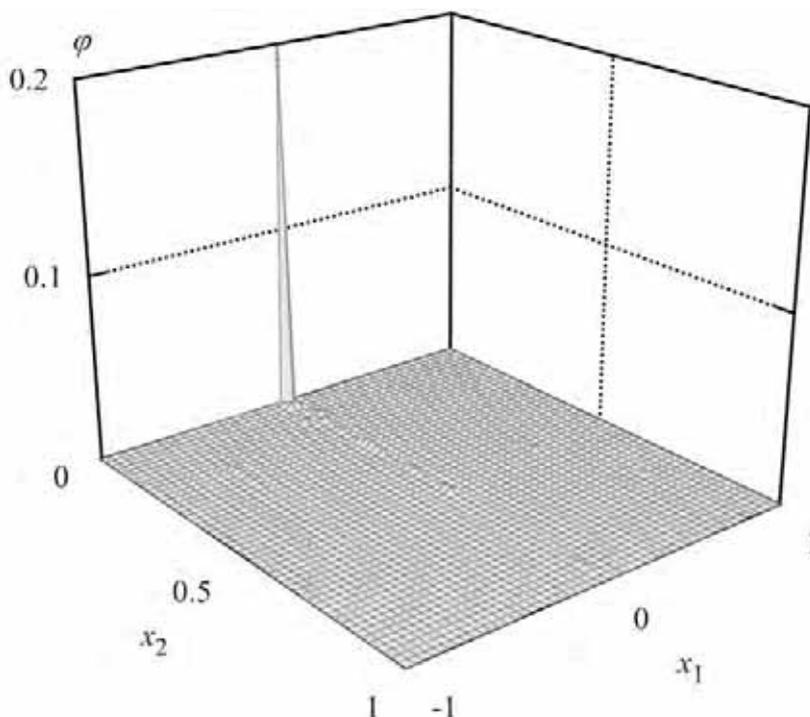


Рис. 3.21. Распределение плотности энергетической ошибки $\varphi(x_1, x_2)$ при $M = 12$, $N_u = 6$ (адаптированная сетка).

Поля напряжений показаны для адаптированной сетки на Рис. 3.22–3.24. Эти рисунки показывают, что компоненты σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} тензора напряжения σ выполняют граничные условия для этой задачи. Стоит отметить сложное поведение функций напряжений в окрестности вершины трещины. Все компоненты имеют разрывы в особой точке $x = \{0, 0\}^T$. Например, если $x_1 \rightarrow +0$, $x_2 = 0$, то граничное условие $\sigma_{22}(x_1, 0) = 0$ должно выполняться, в то время как σ_{22} стремится к бесконечности по другим направлениям. При численном моделировании, максимальное значение σ_{22} увеличивается, когда число степеней свободы N растет и достигает $\sigma_{22} \approx 26000$ при данных параметрах. Отметим, что наблюдаются заметные биения функций σ_{11} и σ_{12} и, дополни-

тельно, Σ_{12} меняет свой знак вблизи носика трещины.

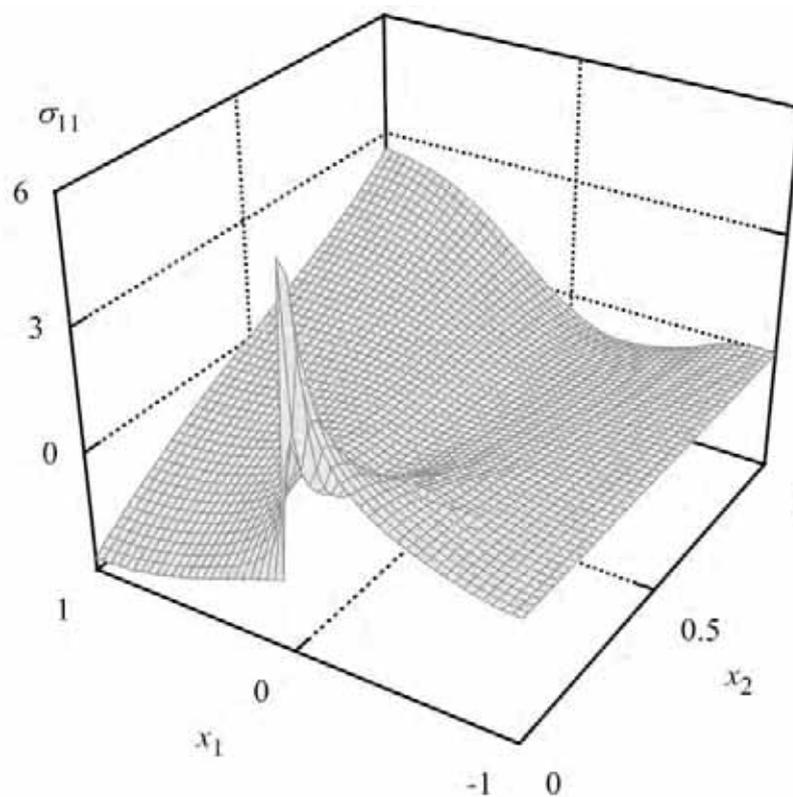


Рис. 3.22. Распределение компоненты напряжения σ_{11} .

Важными характеристиками качества численного решения являются значения компонент тензора ошибки напряжений ζ . Функции ζ_{11} , ζ_{22} и ζ_{12} , показаны на Рис. 3.25–3.27. Подобно локальной ошибке φ (см. Рис. 3.21), эти функции близки к нулю всюду, за исключением только малой окрестности вблизи носика трещины. Кроме того, можно наблюдать небольшие колебания напряжения ζ_{ij} во внутренней области Ω .

Существенной особенностью реализации метода конечных элементов, предложенных в этом разделе является скорость сходимости неизвестной функции относительно степени кусочно-полиномиальных аппроксимаций (p -сходимость). На рисунке 3.28 представлено монотонное уменьшение относительной погрешности Δ по сравнению с полиномиальной степенью N_u для адаптированной сетки.

На рисунке 3.29 скорость h -сходимости для равномерной сетки при $N_u = 6$ (верхняя кривая) и различных M сравнивается со скоростью p -сходимости

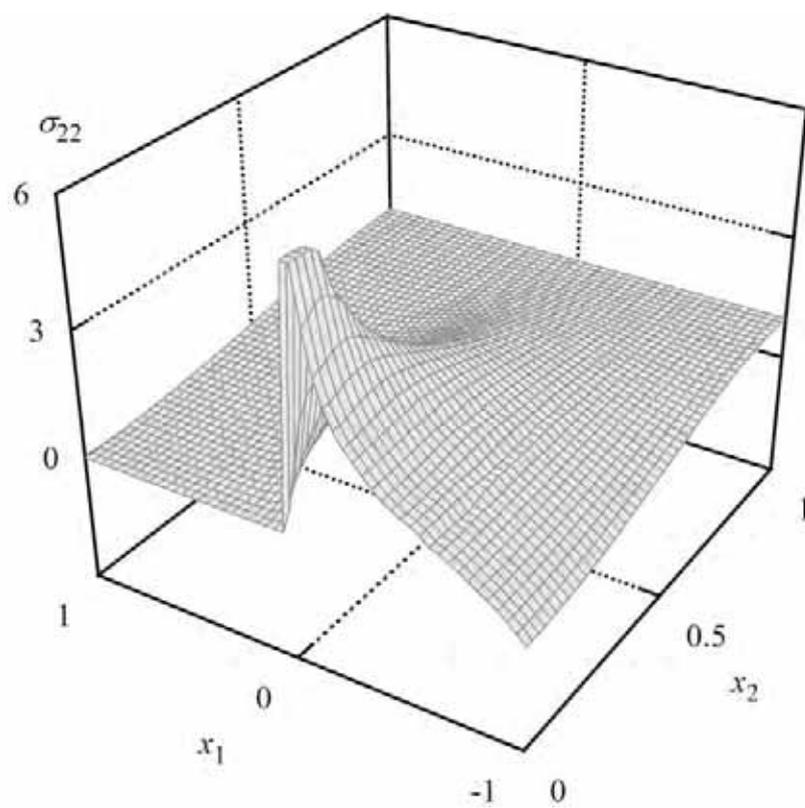


Рис. 3.23. Распределение компоненты напряжения σ_{22} .

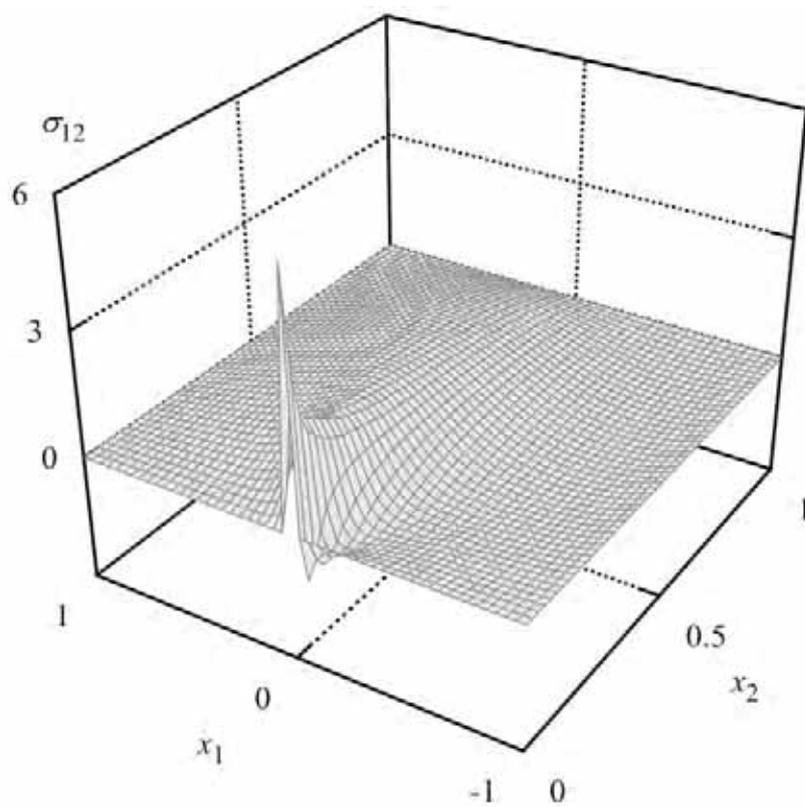


Рис. 3.24. Распределение компоненты напряжения σ_{12} .

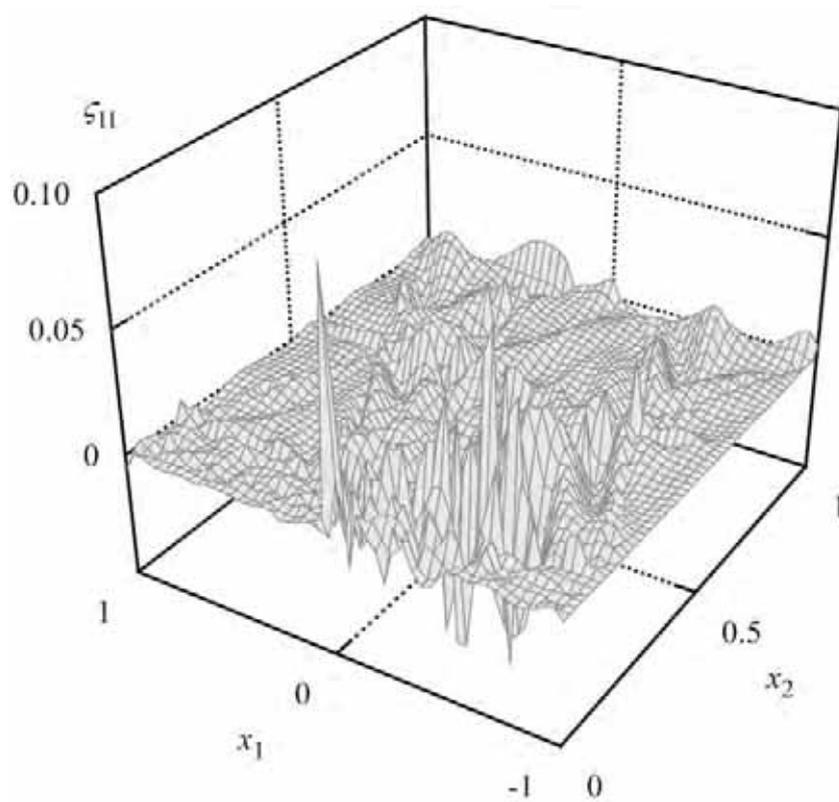


Рис. 3.25. Распределение компонент локальной ошибки напряжений ζ_{11} .

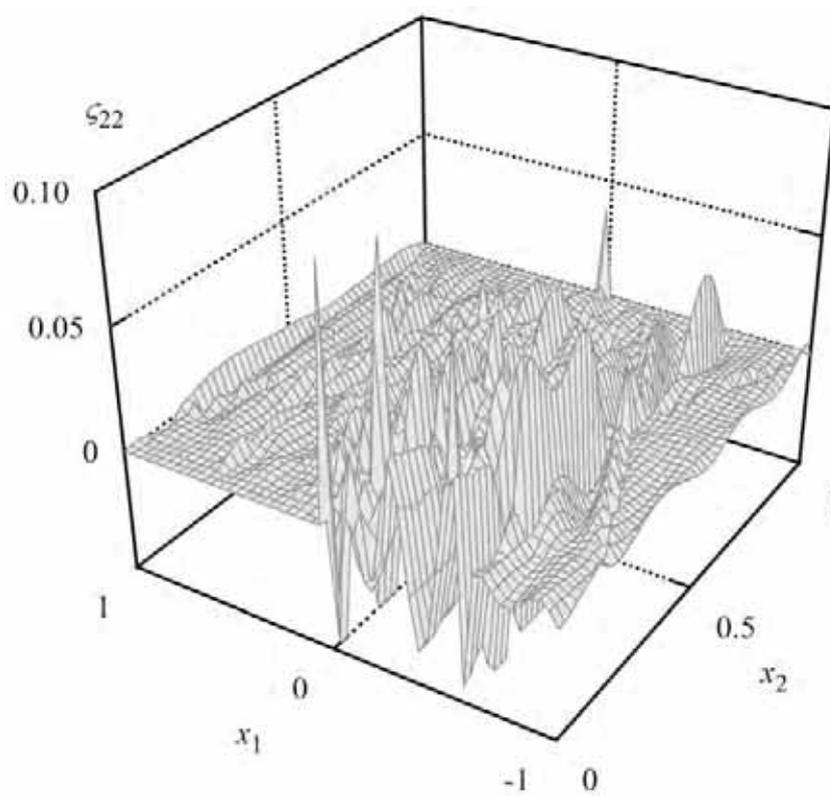


Рис. 3.26. Распределение компонент локальной ошибки напряжений ζ_{22} .

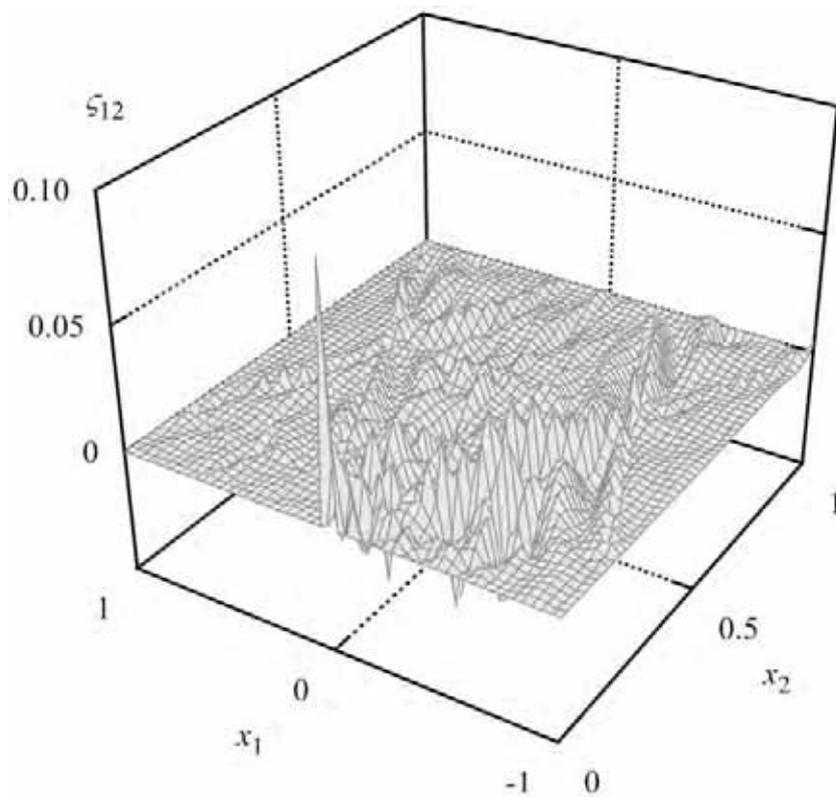


Рис. 3.27. Распределение компонент локальной ошибки напряжений ς_{12} .

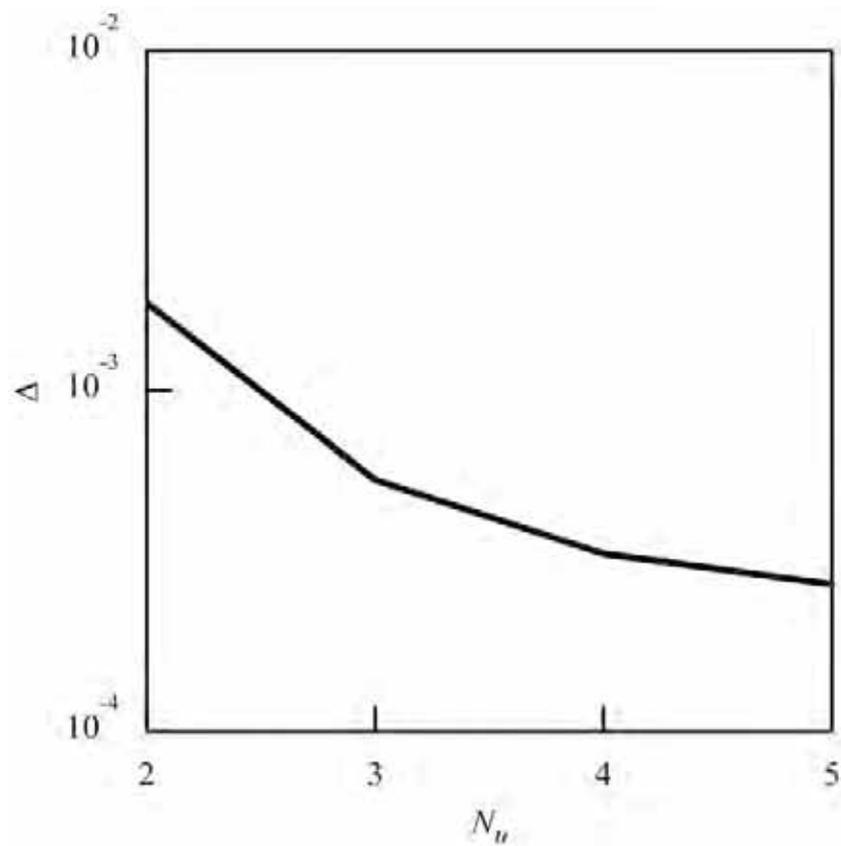


Рис. 3.28. Функция $\Delta(N_u)$ при $M = 12$ (p -сходимость, адаптированная сетка).

для адаптированных сеток при $M = 12$ и $N_u = 3, 4, 5, 6$. Как видно из этого графика техника адаптации сетки позволяет значительно повысить точность численных результатов на тех же размерностях МКЭ модели.

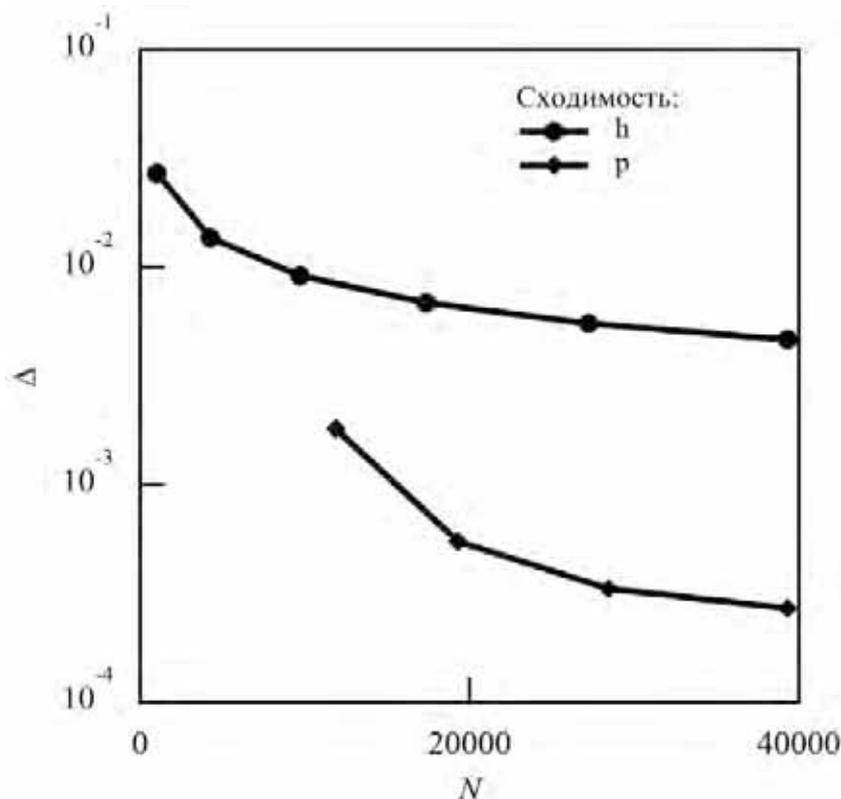


Рис. 3.29. Функция $\Delta(N)$ для равномерной и адаптированной сеток.

Двусторонняя сходимость упругой энергии $W(N)$ показана на Рис. 3.30 для равномерной сетки при фиксированной степени полинома $N_u = 6$ (пунктирные линии, см. также Рис. 3.19) и адаптированной сетки при фиксированном параметре $M = 12$ (сплошные линии). Представленные зависимости находятся в хорошем соответствии с теоретическими двусторонними оценками, приведенными в формуле (2.101). Относительная погрешность энергии Δ для адаптированных сеток достигает значения около 0.033% при $N \approx 40000$. Эта относительная интегральная ошибка в 14 раз меньше, чем, полученная с помощью равномерной сетки при тех же параметрах приближения M и N_u .

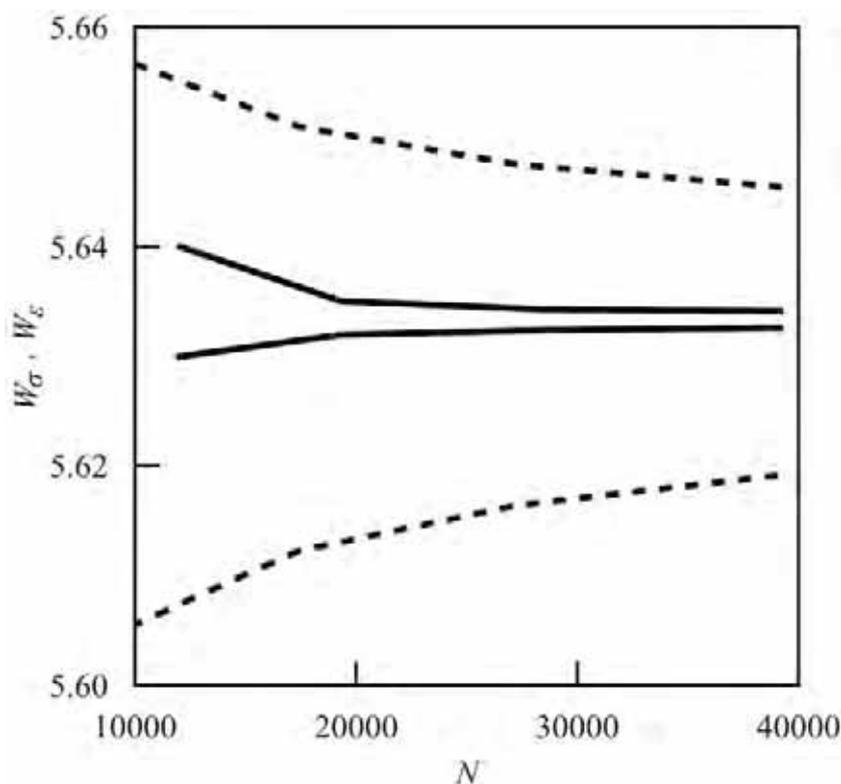


Рис. 3.30. Двусторонние оценки упругой энергии при различном числе степеней свободы N для равномерной (пунктирные линии) и адаптированной (сплошные линии) сеток.

Глава 4

Вариационный, асимптотический и проекционный подходы на основе полу-дискретных аппроксимаций

Для построения приближенного решения краевых задач механики деформируемого твердого тела, используются различные упрощенные модели, на основе которых поля напряжений и перемещений могут быть получены эффективно и с приемлемой точностью.

Для различных механических конструкций, их элементы, называемые балками или стержнями имеют специальную геометрическую особенность, что один из характерных размеров гораздо больше, чем два других. Различные балочные теории занимают особое место среди приближенных подходов в механике. Как уже упоминалось в разделе 1.5., простейшая модель, называемая балкой Эйлера-Бернулли, основана на предположении, что плоскость поперечного сечения, которая была нормальной к срединной линии до де-

формации остается плоской и нормальной к этой линии после деформации.

До сих пор различные уточненные теории, основанные на вариационных и асимптотических методах были разработаны с целью повышения точности моделирования для толстых, тонкостенных и композитных балок [95,174,203]. Полный обзор литературы выходит за рамки этой работы, но стоит процитировать некоторые последние работы в этой области [173].

Остальная часть работы, главы 4–5, фокусируется на различных достоверных подходах к моделированию балок и анализе качества получаемых приближенных решений. Данная глава посвящена подходу, при котором оригинальная двумерная задача теории упругости в частных производных аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Примеры использования такой техники можно найти в работах [4], [75] – [80]. Вариационная техника, обсуждавшаяся в предыдущих главах распространяется на случай полу-дискретных приближений вектора перемещений и тензора напряжений, включая, с одной стороны, полиномиальные разложения конечной размерности относительно одной координаты, и, с другой стороны, неизвестной функции относительно другой компоненты. Предлагаемый подход проиллюстрирован на статических и динамических балочных задачах.

4.1. Сведение задачи в частных производных к системе ОДУ

Балочная нотация и формулировка краевых задач В дальнейшем, формулировка линейной задачи теории упругости будет даваться в специальных обозначениях, которые обычно используются для описания балок. Пусть введена прямоугольная система координат Oxy . Рассмотрим плоское напряженное состояние упругого тела (балка), занимающего прямоугольную область

$$\Omega = \{x, y : x \in (-l, l), y \in (-h, h)\} \quad (4.1)$$

с размерами $2h \times 2l$ (см. Рис. 4.1). В данной нотации $2l$ является длиной балки, в то время как $2h$ является ее высотой. Начало декартовой системы находится в центральной точке прямоугольника. Ось x параллельна сторонам с длинами $2l$:

$$\Gamma_y^\pm = \{x, y : x \in (-l, l), y = \pm h\} . \quad (4.2)$$

Ось y коллинеарна сечениям концов балки:

$$\Gamma_x^\pm = \{x, y : x = \pm l, y \in (-h, h)\} . \quad (4.3)$$

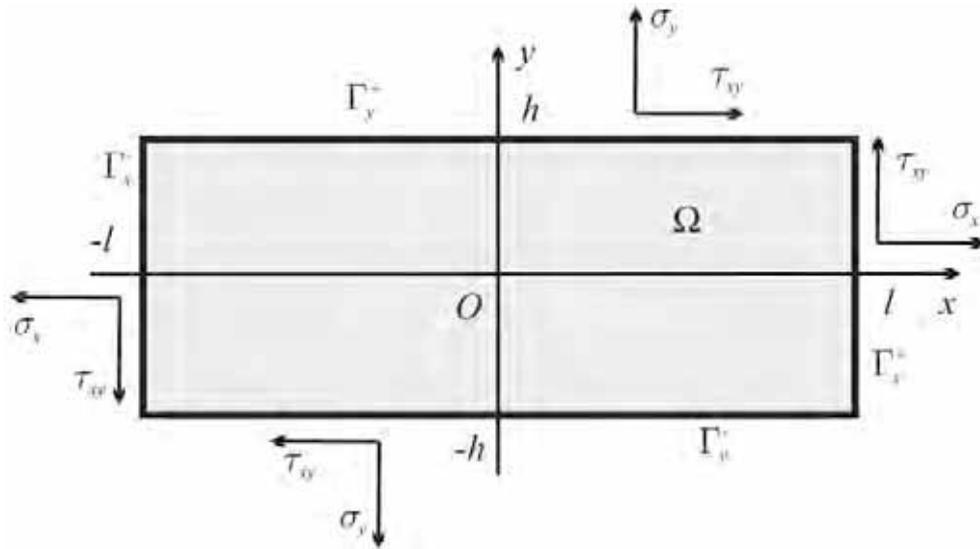


Рис. 4.1. Прямоугольная упругая балка.

Предполагается, что напряженно-деформированное состояние балки описывается двумерными уравнениями теории упругости, введенные в главе 1, но представленные здесь в новых обозначениях

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x(x, y) = 0 , \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y(x, y) = 0 ;$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) ; \quad (4.5)$$

$$\xi = \varepsilon^0(u, v) - C^{-1}(x, y) : \sigma = 0. \quad (4.6)$$

Здесь $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – неизвестные перемещения вдоль продольной x и боковой y координатных осей соответственно, ε_x^0 ; ε_y^0 и ε_{xy}^0 являются компонентами тензора деформации $\varepsilon^0(x, y)$; σ_x , σ_y и τ_{xy} являются компонентами тензора напряжения $\sigma(x, y)$; f_x и f_y являются заданными компонентами вектора объемной силы $f(x, y)$; $C(x, y)$ – тензор модулей упругости.

Предположим, что стороны балки Γ_y^\pm нагружены распределенными силами в соответствии с

$$\tau_{xy} = \pm p_x^\pm(x), \quad \sigma_y = \pm p_y^\pm(x), \quad y = \pm h. \quad (4.7)$$

На концевых краях балки Γ_x^\pm граничные условия могут быть предоставлены либо в напряжениях,

$$\sigma_x = \pm q_x^\pm(y), \quad \tau_{xy} = \pm q_y^\pm(y), \quad x = \pm l, \quad (4.8)$$

либо в перемещениях

$$u = 0, \quad v = 0, \quad x = \pm l. \quad (4.9)$$

Здесь $p_x^\pm(x)$, $p_y^\pm(x)$, $q_x^\pm(y)$, $q_y^\pm(y)$ являются компонентами внешней нагрузки.

Полу-дискретизация в перемещениях Для построения системы приближенных ОДУ, сначала применим принцип минимума потенциальной энергии, обсуждавшийся в разделе 1.6.. Потенциальная энергия $\Pi[u, v]$, определенная формулой (1.150), выражается в предложенной нотации следующим

образом

$$\Pi = \int_{-h}^h \int_{-l}^l [U - f_x(x, y)u - f_y(x, y)v] dx dy + \int_{\Gamma} J_b d\Gamma,$$

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon^0(u, v) : C(x, y) : \varepsilon^0(u, v),$$
(4.10)

$$J_b = \begin{cases} -p_x^{\pm}(x)u - p_y^{\pm}(x)v & x \in \Gamma_y^{\pm} \\ -\alpha^{\pm} (q_x^{\pm}(y)u + q_y^{\pm}(y)v) & x \in \Gamma_x^{\pm} \end{cases}.$$

где U – плотность энергии деформации и J_b является потенциалом граничных сил. Коэффициент α^{\pm} вводится так, что $\alpha^{\pm} = 1$ если заданы условия в напряжениях (4.8) на соответствующих концевых сечениях Γ_x^{\pm} или $\alpha^{\pm} = 0$ если нулевые смещения (4.9) там зафиксированы.

Зададим приближенные поля перемещений в Ω , как полиномиальные функции относительно координаты y :

$$\tilde{u} = \sum_{k=0}^{N_u} u^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}, \quad \tilde{v} = \sum_{k=0}^{N_v} v^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}.$$
(4.11)

Здесь N_u и N_v – степени полиномиальных аппроксимаций перемещений, $u^{(k)}$ и $v^{(k)}$ – неизвестные функции координаты x .

В соответствии с теоремой 1.3, допустимые перемещения (4.11) должны подчиняться однородным граничным условиям (4.9), если они присутствуют в постановке задачи. Другие условия (4.7) и (4.8) являются естественными и используются в интегральной форме.

После подстановки аппроксимаций (4.11) для u и v в формулу (4.10) и интегрируя по координате y , потенциальную энергию Π можно переписать в

виде

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{-l}^l A(x, a(x), a'(x)) dx + B^-(a(-l)) + B^+(a(l)), \\ A &= \int_{-h}^h [U(\tilde{u}, \tilde{v}) - f_x \tilde{u} - f_y \tilde{v}] dy \\ &\quad - p_x^+(x) \tilde{u}(x, h) - p_y^+(x) \tilde{v}(x, h) - p_x^-(x) \tilde{u}(x, -h) - p_y^-(x) \tilde{v}(x, -h), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$B^\pm = -\alpha^\pm \int_{-h}^h (q_x^\pm(y) \tilde{u} + q_y^\pm(y) \tilde{v}) dy, \quad a' = \frac{da}{dx}.$$

Здесь

$$a = \left\{ u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N_u)}, v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(N_v)} \right\}^T, \quad a(x) \in \mathcal{R}^{M_u},$$

является вектор-функцией проектных параметров с размерностью $M_u = N_u + N_v + 2$ на интервале $x \in (-l, l)$, состоящей из коэффициентов $u^{(i)}(x)$ и $v^{(j)}(x)$ аппроксимаций (4.10).

Функционал Π в формуле (4.12) квадратично зависит от вектора a и его первой производной a' . Задача минимизации (1.156), сформулированная в разделе 1.6., сводится к системе уравнений Лагранжа - Эйлера второго порядка

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial A(x, a, a')}{\partial a'} - \frac{\partial A(x, a, a')}{\partial a} = 0. \quad (4.13)$$

Общий дифференциальный порядок системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.13) равен $2M_u$. Либо существенные граничные ограничения (4.9) либо следующие естественные условия

$$\left[\pm \frac{\partial A}{\partial a'} + \frac{\partial B^\pm}{\partial a} \right]_{x=\pm l} = 0, \quad \alpha^\pm = 1 \quad (4.14)$$

должны быть добавлены к системе (4.13) в зависимости от типа граничных

ограничений, заданных при $x = \pm l$.

Если балка закреплена по крайней мере, на одном конце, т. е. $\alpha^+ \alpha^- = 0$, то дифференциальный порядок системы совпадает с полным числом граничных условий (4.9) или (4.14). В противном случае, уравнения (4.14) вырождаются в связи с глобальным балансом сил и моментов

$$\begin{aligned}
 P^+ - P^- + \int_{-h}^h \int_{-l}^l f_x dx dy + \int_{-l}^l (p_x^+ + p_x^-) dx &= 0, \\
 F^+ - F^- + \int_{-h}^h \int_{-l}^l f_y dx dy + \int_{-l}^l (p_y^+ + p_y^-) dx &= 0, \\
 M^+ - M^- + l(F^+ + F^-) + \int_{-h}^h \int_{-l}^l (f_y x - f_x y) dx dy \\
 + h \int_{-l}^l (p_x^- - p_x^+) dx + \int_{-l}^l x (p_y^- + p_y^+) dx &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Здесь, растягивающие силы P_{\pm} , сдвиговые силы F_{\pm} и изгибающие моменты M_{\pm} , заданные на концах балки $x = \pm l$ соответственно, введены в формуле (4.15) в соответствии с

$$\begin{aligned}
 P^{\pm} &= \pm \int_{-h}^h q_x^{\pm}(y) dy, \quad F^{\pm} = \pm \int_{-h}^h q_y^{\pm}(y) dy, \\
 M^{\pm} &= \mp \int_{-h}^h q_x^{\pm}(y) y dy.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Знаки сил и моментов выбраны так, как это показано на Рис. 1.2 по аналогии с моделью балки Бернулли. Эти величины должны быть заданы, если накладываются соответствующие граничные условия (4.8).

Условия (4.15) показывают, что существуют три независимые константы, которые используются в двумерном случае для определения положения и ориентации тела как целого в плоскости Oxy если $\alpha^+ \alpha^- = 1$.

Полу-дискретизация в напряжениях Принцип минимума дополнительной энергии, введенный в разделе 1.6. для напряжений, может быть использован для получения другой системы ОДУ, описывающей приближенное решение краевой задачи. Дополнительная энергия $\Pi_c[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$, введенная в формуле (1.167), задается для упругого тела при однородных условиях (4.9) в следующем виде

$$\Pi_c = \int_{-h}^h \int_{-l}^l U_c(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dx dy \quad (4.17)$$

с плотностью энергии напряжений

$$U_c = \frac{1}{2} \sigma : C^{-1}(x, y) : \sigma. \quad (4.18)$$

Аппроксимирующие поля напряжений имеют специальную структуру

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= \sum_{k=0}^{N_\sigma} \sigma_x^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}, \\ \tilde{\tau}_{xy} &= p_x^0(x) + p_x^1(x) \frac{y}{h} + \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} \tau_{xy}^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}, \\ \tilde{\sigma}_y &= p_y^0(x) + p_y^1(x) \frac{y}{h} + \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \sum_{k=0}^{N_\sigma} \sigma_y^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Здесь $\sigma_x^{(k)}$, $\tau_{xy}^{(k)}$ и $\sigma_y^{(k)}$ – неизвестные функции напряжений координаты x ; N_σ – соответствующая степень аппроксимации. Напряжения $\tilde{\tau}_{xy}(x, y)$ и $\tilde{\sigma}_y(x, y)$ подчиняются граничным условиям (4.7), если

$$\begin{aligned} p_x^0 &= \frac{1}{2} (p_x^+ - p_x^-), & p_y^0 &= \frac{1}{2} (p_y^+ - p_y^-), \\ p_x^1 &= \frac{1}{2} (p_x^+ + p_x^-), & p_y^1 &= \frac{1}{2} (p_y^+ + p_y^-). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ограничимся случаем, когда граничные нагрузки $q_x^\pm(y)$ и $q_y^\pm(y)$, заданные

на сторонах Γ_y^\pm являются полиномами в соответствии с

$$q_x^\pm = \sum_{k=0}^{N_\sigma} q_x^{(\pm k)} \frac{y^k}{h^k},$$

$$q_y^\pm = \pm p_x^0(\pm l) \pm p_x^1(\pm l) \frac{y}{h} + \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \sum_{k=0}^{N_\sigma-1} q_y^{(\pm k)} \frac{y^k}{h^k},$$
(4.21)

где условия совместности

$$q_y^+(h) = p_x^+(l), \quad q_y^+(-h) = -p_x^-(l),$$

$$q_y^-(h) = -p_x^+(-l), \quad q_y^-(-h) = p_x^-(-l)$$
(4.22)

учитываются для граничных напряжений в вершинах прямоугольника Ω .

Для таких граничных нагрузок, используя компоненты напряжений $\tilde{\sigma}_x(x, y)$ и $\tilde{\tau}_{xy}(x, y)$, можно точно удовлетворить граничные условия (4.8). Дополнительно предполагается, что объемные силы являются полиномами относительно y :

$$f_x = \sum_{k=0}^{N_\sigma} f_x^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}, \quad f_y = \sum_{k=0}^{N_\sigma+1} f_y^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k},$$
(4.23)

где $f_x^{(k)}(x)$ и $f_y^{(k)}(x)$ заданные функции.

Обратим теперь внимание на уравнения равновесия (4.4), которые являются существенными ограничениями на напряжения в принципе минимума полной дополнительной энергии. После подстановки приближения $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\tau}_{xy}$ и $\tilde{\sigma}_y$ из уравнений (4.19) в формулу (4.4) и учитывая, что условия равновесия выполняются при любых $y \in (-h, h)$, система ОДУ для $N_\sigma \geq 2$ относительно функций напряжений $\sigma_x^{(k)}$, $\tau_{xy}^{(k)}$, $\sigma_y^{(k)}$ собирается из всех коэффициентов при

мономах $y^k h^{-k}$:

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma_x^{(j)}}{dx} + \frac{j+1}{h} \left(\tau_{xy}^{(j+1)} - \tau_{xy}^{(j-1)} \right) \\ & = -\frac{p_x^{(j+1)}(x)}{h} - f_x^{(j)}(x), \quad j = 0, \dots, N_\sigma; \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\tau_{xy}^{(k)}}{dx} - \frac{d\tau_{xy}^{(k-2)}}{dx} + \frac{k+1}{h} \left(\sigma_y^{(k+1)} - \sigma_y^{(k-1)} \right) \\ & = -\frac{dp_x^k(x)}{dx} - \frac{p_y^{k+1}(x)}{h} - f_y^{(k)}(x), \quad k = 0, \dots, N_\sigma + 1. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Здесь, ради единообразия, введены следующие вспомогательные функции

$$\tau_{xy}^{(j)}(x) \equiv 0, \quad j < 0, \quad j \geq N_\sigma,$$

$$\sigma_y^{(j)}(x) \equiv 0, \quad j < 0, \quad j > N_\sigma,$$

$$p_x^j(x) = p_y^j(x) \equiv 0, \quad j < 0, \quad j > 1.$$

Можно показать, что все уравнения (4.25), за исключением, например, первого, то есть $k = 1, \dots, N_\sigma + 1$, могут быть разрешены относительно функций $\sigma_y^{(k-1)}(x)$. В свою очередь, уравнение (4.24) при $j = 2, \dots, N_\sigma$ решается алгебраически относительно $\tau_{xy}^{(j-1)}(x)$. После этого, только три дифференциальных уравнений остаются в соотношениях (4.24) и (4.25), которые зависят от коэффициентов $\tau_{xy}^{(0)}$, $\sigma_x^{(j)}$, $j = 0, \dots, N_\sigma$. Эти уравнения эквивалентны условиям равновесия в любом поперечном сечении балки и могут быть представлены в виде уравнений баланса сил

$$\int_{-h}^h \tilde{\sigma}_x(x, y) dy + \int_{-l}^x \int_{-h}^h f_x(x_1, y) dy dx_1 + \int_{-l}^x p_x^1(x) dx_1 = P^-, \quad (4.26)$$

$$\int_{-h}^h \tilde{\tau}_{xy}(x, y) dy + \int_{-l}^x \int_{-h}^h f_y(x_1, y) dy dx_1 + \int_{-l}^x p_y^1(x_1) dx_1 = F^-$$

и баланса моментов

$$\begin{aligned}
& - \int_{-h}^h y \tilde{\sigma}_x(x, y) dy + \int_{-h}^h (l+x) \tilde{\tau}_{xy}(x, y) dy \\
& + \int_{-l}^x \int_{-h}^h [(l+x_1) f_y(x_1, y) - y f_x(x_1, y)] dy dx_1 \\
& + \int_{-l}^x [(l+x_1) p_y^1(x_1) - 2h p_x^0(x_1)] dx_1 = M^-,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

вычисленного относительно точки $\{-l, 0\}$. Силы P^- , F^- и момент M^- были введены в формуле (4.16). Эти константы находятся из соответствующих граничных условий (4.8).

Глобальные соотношения равновесия (4.26) и (4.27) могут быть разрешены с помощью трех функций напряжений, например, $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_x^{(1)}$ и $\tau_{xy}^{(0)}$. Как результат, аппроксимации $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\tau}_{xy}$ и $\tilde{\sigma}_y$ в формуле (4.19) зависят от вектор-функции проектных параметров

$$b = \left\{ \sigma_x^{(2)}, \sigma_x^{(3)}, \dots, \sigma_x^{(N_\sigma)} \right\}^T, \quad b(x) \in \mathcal{R}^{N_\sigma-1}, \quad x \in (-l, l), \tag{4.28}$$

а также ее первой и второй производных b' , b'' .

В соответствии с теоремой 1.5, равновесные напряжения $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\tau}_{xy}$ и $\tilde{\sigma}_y$ должны подчиняться также условиям на напряжения (4.8), если они введены. Условия в перемещениях (4.9) в дополнительной вариационной задаче учитываются интегрально в соответствующем функционале.

Подставим эти приближения для σ_x , τ_{xy} и σ_y в формулу (4.17) и проинтегрируем его по координате y . Тогда полную дополнительную энергию Π_c

можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \int_{-l}^l A_c(x, b(x), b'(x), b''(x)) dx, \\ A_c &= \int_{-h}^h U_c(\tilde{\sigma}_x, \tilde{\tau}_{xy}, \tilde{\sigma}_y) dy, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где A_c является линейной плотностью энергии напряжений балки.

Таким образом, задача минимизации (1.166) может быть сведена к системе ОДУ Лагранжа - Эйлера четвертого порядка

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial A_c}{\partial b''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial A_c}{\partial b'} + \frac{\partial A_c}{\partial b} = 0 \quad (4.30)$$

при существенных граничных условиях (4.8) для $\alpha^\pm = 1$, которые можно переписать с учетом решений системы (4.24) и (4.25) следующим образом

$$\tilde{\sigma}_x(b) = \pm q_x^\pm(y), \quad \tilde{\tau}_{xy}(b') = \pm q_y^\pm(y), \quad x = \pm l. \quad (4.31)$$

Если $\alpha^\pm = 0$, то следующие естественные условия

$$\left[\frac{d}{dx} \frac{\partial A_c}{\partial b''} - \frac{\partial A_c}{\partial b'} \right]_{x=\pm l} = \frac{\partial A_c}{\partial b''} \Big|_{x=\pm l} = 0 \quad (4.32)$$

должны быть удовлетворены. Общий дифференциальный порядок $M_\sigma = 4(N_\sigma - 1)$ системы ОДУ (4.30) плюс количество констант, вытекающих из равновесия (4.26) и (4.27), всегда равен числу граничных ограничений (4.31) или естественных условий (4.32), налагаемых на вектор проектных параметров b при $x = \pm l$.

4.2. Анализ напряженно-деформированного состояния балки

Интегро-дифференциальный подход, описанный в главах 2-3 позволяет оценить качество численных решений $a^*(x)$ и $b^*(x)$ для аппроксимирующих

систем ОДУ (4.13) и (4.30) с соответствующими существенными ограничениями (4.9) или (4.31) и естественными условиями (4.14) или (4.32). Как было указано в разделе 2.6. (см. формулу (2.88)), значение неотрицательного функционала энергетической ошибки Φ может быть представлено для рассматриваемых граничных условий в виде суммы полной потенциальной и дополнительной энергий в уравнениях (4.12), (4.29) в соответствии с

$$\Phi[a, b] = \int_{-l}^l \varphi_x(x, a, a', b, b', b'') dx = \Pi[a] + \Pi_c[b] \geq 0. \quad (4.33)$$

Здесь плотность энергетической ошибки φ вводится как функция координаты x

$$\varphi_x = \int_{-h}^h \{U(\tilde{u}, \tilde{v}) + U_c(\tilde{\sigma}_x, \tilde{\tau}_{xy}, \tilde{\sigma}_y) - 2U_e(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\sigma}_x, \tilde{\tau}_{xy}, \tilde{\sigma}_y)\} dy \quad (4.34)$$

с плотностью энергетической ошибки

$$U_e = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon^0.$$

Относительная интегральная ошибка может быть задана

$$\Delta = \frac{\Phi[a, b]}{W_\sigma[b]}, \quad W_\sigma[b] = \Pi_c[b], \quad (4.35)$$

где энергия напряжения W_σ совпадает с полной дополнительной энергией Π_c в формуле (4.29) для этой статической задачи.

Кроме того, граничные условия (4.7), (4.8), (4.9) подпадают под действие теоремы 2.2 и двусторонние оценки энергии (2.99) могут быть представлены в следующем виде

$$W_\varepsilon[a^*] \leq W[u^*, v^*, \sigma^*] \leq W_\sigma[b^*] \quad (4.36)$$

с энергией деформации

$$W_\varepsilon[a] = \int_{-l}^l \int_{-h}^h U(\tilde{u}, \tilde{v}) dy dx. \quad (4.37)$$

Здесь u^* , v^* и σ^* отражают действительное состояние тела. С точностью до знака, интеграл (4.37) равен потенциальной энергии

$$W_\varepsilon[a^*] = -\Pi[a^*] \quad (4.38)$$

на приближенном решении. Такие задачи были опубликованы в [178], [184].

Пример 4.1. Рассмотрим консольную прямолинейную балку, жестко заделанную на одном конце $x = -l$ и нагруженную на другом $x = l$. Две другие стороны балки ($y = \pm h$) свободны от нагрузки. Граничные условия могут быть представлены как

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad y = \pm h, \quad (4.39)$$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = q_0(y), \quad x = l, \quad (4.40)$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad x = -l$$

с граничной нагрузкой

$$q_0(y) = \frac{6F_+}{8h} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right), \quad \int_{-h}^h q_0(y) dy = F_+,$$

где F_+ , введенная в (4.16), является поперечной силой при $x = l$. Объемные силы отсутствуют ($f_x(x, y) = f_y(x, y) \equiv 0$).

Упругий материал балки предполагается однородным и изотропным с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . В данной задаче рассматривается плоское напряженное состояние балки. В этом случае, определяющие соотношения, выраженные через тензор ошибки деформации ξ , имеют по-

КОМПОНЕНТНЫЙ ВИД

$$\begin{aligned}\xi_x &= \varepsilon_x^0(u, v) - \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = 0, \\ \xi_y &= \varepsilon_y^0(u, v) - \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = 0, \\ \xi_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0(u, v) - \frac{1 + \nu}{E}\tau_{xy} = 0.\end{aligned}\tag{4.41}$$

Здесь ε_x^0 , ε_y^0 , ε_{xy}^0 являются компонентами тензора деформаций Коши, представленные в формуле (4.5).

Напряженно-деформированное состояние балки описывается аппроксимациями перемещений \tilde{u} , \tilde{v} , определенными в формуле (4.10) с $N_v = N_u - 1$, и напряжений (4.19) в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_x &= \sum_{k=0}^{N_u} \sigma_x^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \sum_{k=0}^{N_u-1} \tau_{xy}^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}, \\ \tilde{\sigma}_y &= \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \sum_{k=0}^{N_u} \sigma_y^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Параметр N_u определяет общее число

$$N = M_u + M_\sigma = 3N_u$$

системных переменных, собранных в два независимых вектора a и b .

Оптимальную аппроксимацию перемещений \tilde{u} , \tilde{v} и тензора напряжений $\tilde{\sigma}$ для этой задачи теории упругости можно найти с помощью решения $a^*(x)$ и $b^*(x)$ уравнений Эйлера (4.13) и (4.30). Это решение удовлетворяет существенные условия (4.40), а также естественные условия (4.14) при $x = l$ и (4.32) при $x = -l$. Эти условия могут быть переписаны для этого примера,

как

$$\left[\frac{d}{dx} \frac{\partial A_c}{\partial b''} - \frac{\partial A_c}{\partial b'} \right]_{x=-l} = \frac{\partial A_c}{\partial b''} \Big|_{x=-l} = 0, \quad x = -l, \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial A}{\partial a'} \Big|_{x=l} = -\frac{\partial B^+}{\partial a}, \quad x = l,$$

где

$$A = \int_{-h}^h U(\tilde{u}, \tilde{v}) dy, \quad A_c = \int_{-h}^h U_c(\tilde{\sigma}) dy, \quad (4.44)$$

$$B^+ = - \int_{-h}^h q_0(y) \tilde{v}(l, y) dy,$$

$$U = \frac{G}{1-\nu} [(\varepsilon_x^0)^2 + (\varepsilon_y^0)^2 + 2\nu \varepsilon_x^0 \varepsilon_y^0 + 2(1-\nu)(\varepsilon_{xy}^0)^2],$$

$$U_c = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2].$$

Полный порядок дифференциальной системы ОДУ (4.13), (4.30) равен

$$N_d = 2M_u + 4M_\sigma = 8N_u - 2,$$

а число краевых условий в уравнениях (4.40) и (4.43) есть

$$N_b = 8N_u + 1.$$

С учетом тех трех неопределенных констант F_- , P_- и M_- , которые возникают в формуле (4.27), две независимые системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.13) и (4.30) могут быть составлены с совместным числом граничных условий.

Следующие безразмерные геометрические и материальные параметры были выбраны в данном примере: длина балки $2l = 10$ и ее высота $2h = 1$, модуль Юнга $E = 10^4$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, внешняя сила $F_+ = 1$. Расчеты были выполнены для различных степеней полинома N_u .

Для повышения эффективности алгоритма полу-дискретизации, описан-

Таблица 4.1

Четность компонентов перемещений и напряжений относительно координаты y для поперечной деформации балки.

	u	v	σ_x	τ_{xy}	σ_y
Четность по y	y^{2j+1}	y^{2j}	y^{2j+1}	y^{2j}	y^{2j+1}

ного в этом разделе, учитывают свойства симметрии краевой задачи. Как и в Примерах 2.1 и 2.5, граничные условия симметричны относительно оси x и, таким образом, решение имеет специфические характеристики четности, аналогичные приведенным в таблице 2.6. В частности, эта задача относится к изгибу балки или изгибных деформаций, которые также могут быть описаны с помощью модели Бернулли. Подходящие соотношения функций перемещений и напряжений представлены в таблице 4.1.

Как можно видеть на Рис. 4.2, приближенная энергия напряжений $W_\sigma(N_u)$ (сплошная линия) строго убывает, когда значения энергии деформаций $W_\varepsilon(N_u) = W(N_u)$ (пунктирная кривая) возрастает. Такое поведение находится в соответствии с теоремой 2.2.

Некоторые интегральные характеристики аппроксимации при $N_u = 9$ приведены в таблице 4.2. Точность решения, полученного на основе безразмерного отношения

$$\Delta_1 = 1 - \frac{W_\varepsilon[a^*]}{W_\sigma[b^*]},$$

введенное в разделе 2.7., приблизительно равна одной сотой процента. Перемещение этого двумерного прямолинейного упругого тела $v(5, 0)$ можно сравнить с боковым отклонением v_B полученного на основе уравнения балки, введенного формулой (1.112), с теми же самыми параметрами E , F_+ , h , l и моментом инерции поперечного сечения $J_B = \frac{1}{6}$. Тот факт, что перемещение упругого тела больше, чем соответствующее балочное, может быть связан с нарушением гипотезы Бернулли о плоских поперечных сечениях.

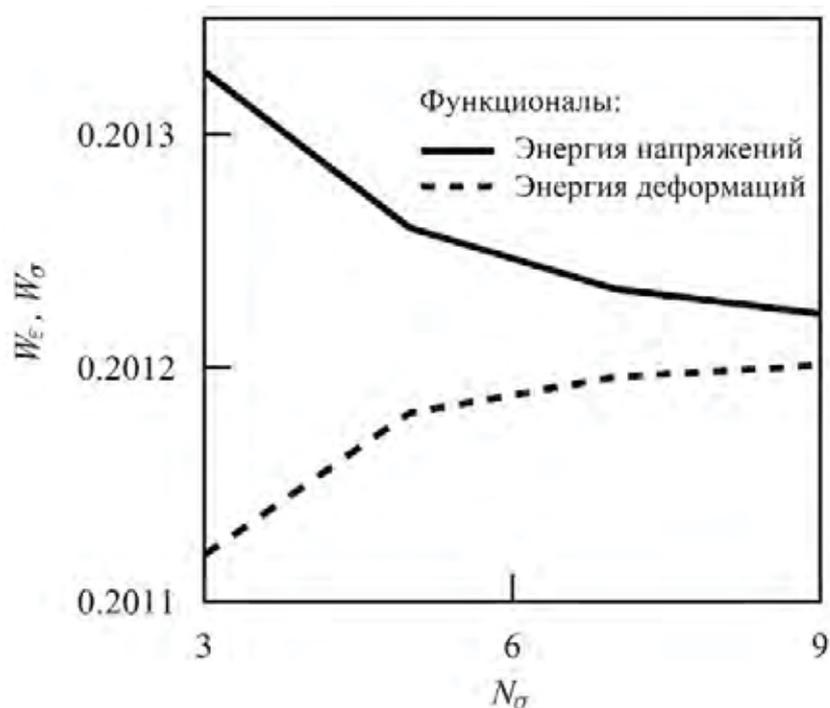


Рис. 4.2. Энергия деформации W_ϵ и энергия напряжений W_σ по сравнению с полиномиальной степенью N_u боковой координаты в Примере 4.1.

Таблица 4.2

Параметры решения : дифференциальный порядок N_d , перемещение балки v_B , перемещение $v(5, 0)$, энергия напряжений W_σ , энергетическая ошибка Φ и относительная погрешность Δ_1 в Примере 4.1.

N_d	v_B	v	W_σ	Φ	$\Delta_1, \%$
70	0.4000	0.4024	0.2012	2.19×10^{-5}	0.0109

4.3. Двумерные колебания упругой балки

Для динамических задач, общепринятая балочная теория рассматривает только движения срединной линии (продольное и поперечное смещения балки) [97]. Следующий шаг, чтобы расширить эту модель, был сделан Рэлеем [88]. Он предложил включить в динамические уравнения балки корректирующий член, определяемый поворотной инерцией поперечного сечения. Уточненные соотношения, учитывающие влияния деформаций сдвига на статические и динамические состояния балки, были введены Тимошенко [95]. В теории Тимошенко, поправочные коэффициенты используются, чтобы моди-

фицировать сдвиговую и крутильную жесткости балки и учесть депланацию формы поперечного сечения. Известны также несколько аналитических решений динамических задач для упругих балочных конструкций в рамках линейной теории упругости. См., например, решение о свободных колебаниях цилиндрического вала полученные Лявом [57].

Чтобы получить динамические уравнения для композитных пластин, основываясь на принципе возможных перемещений, полиномиальные функции, определяющие сдвиговые деформации и напряжения в трансверсальном направлении, были применены Редди [173]. Вариационный асимптотический метод, предложенный Бердичевским [14], был использован Ю и Ходгесом [202], чтобы разработать конечно-элементный подход, включающий анализ поперечных сечений для составных балочных конструкций. На основе кинематического предположения, что каждое сечение является бесконечно жестким в своей плоскости, но может свободно деформироваться из плоскости, модель балки для анизотропных материалов была предложена Баучау [115].

Теперь, применим интегро-дифференциальный подход и технику полудискретизации, описанную в предыдущем разделе, к задачам на собственные значения упругих колебаний, которые были сформулированы в разделе 1.4. (см., также, [180] – [182]). Пусть однородное и изотропное тело (балка), показанная на Рис. 4.1 занимает область (4.1) с границей (4.2), (4.3) и свободна от нагрузок:

$$\tau_{xy} = \sigma_y = 0, \quad y = \pm h, \quad (4.45)$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad x = \pm l. \quad (4.46)$$

Уравнения движения (1.84) при $f \equiv 0$ записаны в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho \omega^2 u &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho \omega^2 v &= 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Здесь ρ является объемной плотностью и ω является неизвестной собственной частотой, для которой существует нетривиальное решение задачи. Перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$ и компоненты $\sigma_x(u, v)$, $\tau_{xy}(u, v)$, $\sigma_y(u, v)$ тензора напряжения σ являются формами собственных колебаний, соответствующие этой частоте.

Приближенные собственные значения колебаний балки могут быть получены с использованием полу-дискретизации перемещений \tilde{u} и \tilde{v} из уравнения (4.10), например, на основе принципа Гамильтона сформулированного в разделе 1.7. (Теорема 1.9). Для получения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, линейная плотность кинетической энергии

$$K_x = \frac{\rho\omega^2}{2} \int_{-h}^h (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) dy \quad (4.48)$$

минус потенциальная энергия $A(\tilde{u}, \tilde{v})$, заданная в формуле (4.44), должны быть проварьированы относительно всех неизвестных функций $u^{(j)}$ и $v^{(k)}$ из уравнения (4.10) при $j = 0, \dots, N_u$ и $k = 0, \dots, N_v$. Уравнения, аналогичные (4.13) и (4.14), могут быть получены таким же образом, как описано в разделе 4.1.

Альтернативный подход, предложенный в главе 2 на примере упругих мембран, основан на интегро-дифференциальной формулировке задачи. Сформулируем следующую задачу минимизации: найти такие нетривиальные перемещения $u^*(x, y)$, $v^*(x, y)$ и тензор напряжения $\sigma^*(x, y)$, удовлетворяющие уравнениям равновесия (4.47), граничным условиям (4.45), (4.46) и минимизирующие функционал

$$\begin{aligned} \Phi[u^*, v^*, \sigma^*] &= \min_{u, v, \sigma} \Phi[u, v, \sigma] = 0, \\ \Phi &= \int_{-l}^l \varphi_x dx, \quad \varphi_x = \int_{-h}^h \varphi dy, \quad \varphi = \frac{1}{2} \xi : C : \xi \end{aligned} \quad (4.49)$$

при изопериметрическом условии

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \int_{-h}^h \sigma : C^{-1} : \sigma \, dydx = 1. \quad (4.50)$$

Разрешим уравнения равновесия (4.47) относительно компонентов перемещений следующим образом

$$u = -\frac{1}{\rho\omega^2} \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} \right), \quad v = -\frac{1}{\rho\omega^2} \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} \right). \quad (4.51)$$

Тогда тензор деформации ε^0 , введенный формулой (2.13), может быть выражен через тензор напряжений σ в соответствии с формулой (4.51)

$$\varepsilon^0(\sigma, \omega) = -\frac{1}{2\rho\omega^2} \left\{ \nabla (\nabla \cdot \sigma) + (\nabla (\nabla \cdot \sigma))^T \right\}. \quad (4.52)$$

После этого, тензор деформаций ε^0 может быть подставлен в тензор Гука ξ из уравнения (4.41) следующим образом

$$\xi(\sigma, \omega) = -\frac{1}{2\rho\omega^2} \left\{ \nabla (\nabla \cdot \sigma) + (\nabla (\nabla \cdot \sigma))^T \right\} - C^{-1} : \sigma. \quad (4.53)$$

Первая вариация функционала Φ должна быть равна нулю на решении:

$$\delta\Phi = \int_{-h}^h \int_{-l}^l \xi : (C : \delta\varepsilon^0 - \delta\sigma) \, dx dy = 0.$$

После интегрирования по частям и с учетом равновесных перемещений (4.51) и граничных условий в напряжениях (4.45), (4.46), этот функционал может

быть переписан следующим образом

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= \int_{-h}^h \int_{-l}^l \left[\frac{1}{\rho\omega^2} (\nabla \cdot \varsigma) \cdot \nabla \delta\sigma - \xi : \delta\sigma \right] dx dy \\
&+ \int_{-l}^l [\tau_{xy}^0(u, v)\delta u + \sigma_y^0(u, v)\delta v]_{y=-h}^{y=h} dx \\
&+ \int_{-h}^h [\sigma_x^0(u, v)\delta u + \tau_{xy}^0(u, v)\delta v]_{x=-l}^{x=l} dy .
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Здесь вариации перемещений δu и δv связаны с вариациями напряжений $\delta\sigma$ в соответствии с формулой (4.51), как

$$\delta u = -\frac{1}{\rho\omega^2} \left(\frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} \right), \quad \delta v = -\frac{1}{\rho\omega^2} \left(\frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} \right); \tag{4.55}$$

$\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ – компоненты геометрического тензора напряжений

$$\sigma^0(\sigma, \omega) = C : \varepsilon^0; \tag{4.56}$$

ς является тензором ошибки напряжений, выраженный через тензор ошибки деформаций ξ из уравнения (4.53) следующим образом

$$\varsigma(\sigma, \omega) = C : \xi. \tag{4.57}$$

Интегрируя по частям первое слагаемое двойного интеграла в формуле (4.54) и учитывая граничные условия (4.45) и (4.46), получаем выражение:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= \int_{-h}^h \int_{-l}^l \eta : \delta\sigma dx dy + \int_{-l}^l [\tau_{xy}^0\delta u + \sigma_y^0\delta v]_{y=-h}^{y=h} dx \\
&+ \int_{-h}^h [\sigma_x^0\delta u + \tau_{xy}^0\delta v]_{x=-l}^{x=l} dy .
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Здесь вспомогательный тензор второго ранга введен как

$$\eta(\sigma, \omega) = \frac{-1}{2\rho\omega^2} \left\{ \nabla (\nabla \cdot \varsigma) + (\nabla (\nabla \cdot \varsigma))^T \right\} - \xi. \quad (4.59)$$

С использованием формулы (4.55), первый граничный интеграл из уравнения (4.58) может быть преобразован соответствующим образом

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho\omega^2} \int_{-l}^l \left[\tau_{xy}^0 \left(\frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \sigma_y^0 \left(\frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} \right) \right]_{y=-h}^{y=h} dx \\ & = \frac{1}{\rho\omega^2} \int_{-l}^l \left[\frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial \sigma_y^0}{\partial x} \delta \tau_{xy} - \tau_{xy}^0 \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} - \sigma_y^0 \frac{\partial \delta \sigma_y}{\partial y} \right]_{y=-h}^{y=h} dx. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Согласно формуле (4.42), возьмем напряжения $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\tau}_{xy}$ и $\tilde{\sigma}_y$, удовлетворяющие граничным условиям на сторонах балки при $y = \pm h$, и введем в рассмотрение вектор a проектных параметров, как

$$a = \left\{ \sigma_x^{(0)}, \dots, \sigma_x^{(N_\sigma)}, \tau_{xy}^{(0)}, \dots, \tau_{xy}^{(N_\sigma-1)}, \sigma_y^{(0)}, \dots, \sigma_y^{(N_\sigma)} \right\}^T \quad (4.61)$$

с $a(x) \in \mathcal{R}^{M_\sigma}$. Размерность этого вектора есть

$$M_\sigma = 3N_\sigma + 2. \quad (4.62)$$

После подстановки аппроксимаций (4.42) в уравнения (4.58)–(4.60), получается следующее уравнение Эйлера функционала Φ относительно вектора a

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^h \tilde{\eta}(y, a) : \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial a} dy \\ & + \frac{1}{\rho\omega^2} \left[\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}^0}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y^0}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial a} - \tilde{\tau}_{xy}^0 \frac{\partial^2 \tilde{\tau}_{xy}}{\partial a \partial y} - \tilde{\sigma}_y^0 \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}_y}{\partial a \partial y} \right]_{y=-h}^{y=h} = 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Здесь $\tilde{\tau}_{xy}^0$, $\tilde{\sigma}_y^0$ являются компонентами аппроксимированного геометрического тензора напряжений $\tilde{\sigma}^0 = \sigma^0(\tilde{\sigma}, \omega)$ и $\tilde{\eta}(y, a) = \eta(\tilde{\sigma})$ является тензором определенного в формуле (4.59).

Соответствующие естественные граничные условия получаются из последнего интеграла в формуле (4.58), принимая во внимание формулы (4.42), (4.55) и (4.56), как

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \left[\tilde{\sigma}_x^0 \frac{\partial}{\partial a'} \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} \right]_{x=\pm l} dy &= 0, \\ \int_{-h}^h \left[\tilde{\tau}_{xy}^0 \frac{\partial}{\partial a'} \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} \right]_{x=\pm l} dy &= 0, \\ \int_{-h}^h \left[\tilde{\tau}_{xy}^0 \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}_y}{\partial a \partial y} \right]_{x=\pm l} dy &= 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Уравнения (4.64) являются линейно зависимыми из-за конечной размерности полиномов $\tilde{\sigma}_x^0(\pm l, y)$ и $\tilde{\tau}_{xy}^0(\pm l, y)$, выходящих на границу. Число независимых естественных граничных условий в формуле (4.64) равно сумме полиномиальных степеней функций $\tilde{\sigma}_x^0$ и $\tilde{\tau}_{xy}^0$:

$$M_n = 4N_\sigma + 6. \quad (4.65)$$

Чтобы составить совместную систему граничных условий, применим соответствующую проекционную технику. Тогда эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \tilde{\sigma}_x^0(y, a(x), \omega) y^j dy &= 0 \quad \text{at } x = \pm l, \quad j = 0, \dots, N_\sigma, \\ \int_{-h}^h \tilde{\tau}_{xy}^0(y, a(x), \omega) y^k dy &= 0 \quad \text{at } x = \pm l, \quad k = 0, \dots, N_\sigma + 1. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Отметим, что число уравнений равно размерности M_σ вектора проектных параметров a , заданного в формуле (4.62). Полный дифференциальный порядок уравнений Эйлера (4.63) совпадает с общим количеством естественных

условий, определяемых формулой (4.64) и

$$M_e = 4N_\sigma + 2 \quad (4.67)$$

существенные граничные условия выражаются через их проекции как

$$\int_{-h}^h \tilde{\sigma}_x(y, a(x), \omega) y^j dy = 0 \quad \text{at } x = \pm l, \quad j = 0, \dots, N_\sigma, \quad (4.68)$$

$$\int_{-h}^h \tilde{\tau}_{xy}(y, a(x), \omega) y^k dy = 0 \quad \text{at } x = \pm l, \quad k = 0, \dots, N_\sigma - 1.$$

Эти ограничения вытекают непосредственно из уравнения (4.46) и полиномиальное представление функций напряжений относительно переменной y . Полный дифференциальный порядок результирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.63) есть

$$N_d = 8N_\sigma + 8 \quad (4.69)$$

который совпадает с общим числом граничных условий (4.66) и (4.68).

Пример 4.2. Рассмотрим прямолинейную балку, которая показана на Рис. 4.1 с однородными граничными условиями (4.45), (4.46) и проанализируем ее первую собственную моду колебаний. Безразмерные параметры системы есть:

$$E = \rho = 1, \quad \nu = 0.3, \quad 2h = 1, \quad 2l = 10.$$

В следствии симметрии балки, движения тела разлагаются на два типа, а именно, изгибные и продольные колебания. Эта балка обладает свойствами, которые соответствуют изгибу балки, описанного в примере 4.1. Четность аппроксимаций напряжений и перемещений является такой же, как указано в таблице 4.1. Продольные движения описываются с учетом свойств симметрии соответствующих компонентов, приведенных в Таблице 4.3.

Таблица 4.3

Четность компонентов перемещений и напряжений относительно координаты y для продольной деформации балки.

	u	v	σ_x	τ_{xy}	σ_y
Четность по y	y^{2j+1}	y^{2j}	y^{2j+1}	y^{2j}	y^{2j+1}

Такое разложение позволяет уменьшить количество обыкновенных дифференциальных уравнений в формуле (4.63) и, следовательно, его полный дифференциальный порядок. Для поперечных колебаний эти цифры равны

$$M_\sigma = 3N + 3, \quad M_d = 8N + 10, \quad N_\sigma = 2N + 1. \quad (4.70)$$

в то время как эти параметры для продольных движений есть

$$M_\sigma = 3N + 2, \quad M_d = 8N + 6, \quad N_\sigma = 2N + 1. \quad (4.71)$$

Только первая мода колебаний, которая является продольной, рассмотрена в этом примере. Параметр аппроксимации $N = 1$ был фиксирован.

Как было показано, для чисто полиномиальной аппроксимации в разделе 2.4., интегро-дифференциальный подход дает комплексные собственные значения и формы колебаний. Результирующие приближения выбираются, как действительная часть $\operatorname{Re} \omega_1$ и $\operatorname{Re} \tilde{\sigma}$.

Напряжение σ_x , вычисленное в соответствии с изопериметрическим условием (4.50) ($W_\sigma = 1$) в средней точке балки и приближенная частота $\operatorname{Re} \omega_1$ приведены в Таблице 4.4. Разница в первых собственных числах $\omega_{B1} - \operatorname{Re} \omega_1$ показывает довольно хорошее соответствие между этой двумерной моделью и моделью тонкого стержня, описанной в разделе 1.5.. Мнимая часть собственной частоты может служить неявной оценкой качества решения. Как видно из этой таблицы, значения энергий $W_\varepsilon > 1$, $W_\sigma = 1$, $W < 1$ близки друг к другу и интегральная ошибка Φ являются относительно малой.

Таблица 4.4

Параметры решения: максимальное напряжение $\sigma_x(0, 0)$, приближенное значение собственной частоты $\text{Re } \omega_1$, ее отличие от частоты балки Бернулли $\omega_{B1} = \pi/l$, мнимая часть собственной частоты ω_1 , остаточная энергия $W_\varepsilon - W$ и энергия ошибки Φ в Примере 4.2.

σ_x	$\text{Re } \omega_1$	$\omega_{B1} - \text{Re } \omega_1$	$\text{Im } \omega_1$	$W_\varepsilon - W$	Φ
0.6325	0.3140	1.17×10^{-4}	5.75×10^{-5}	1.07×10^{-9}	1.34×10^{-9}

Распределение функции локальной ошибки $\varphi(x, y)$, заданной в (4.49), изображено на Рис. 4.3. Как видно из рисунка, эта функция довольно мала и достигает своей максимальной величины в угловых точках балки.

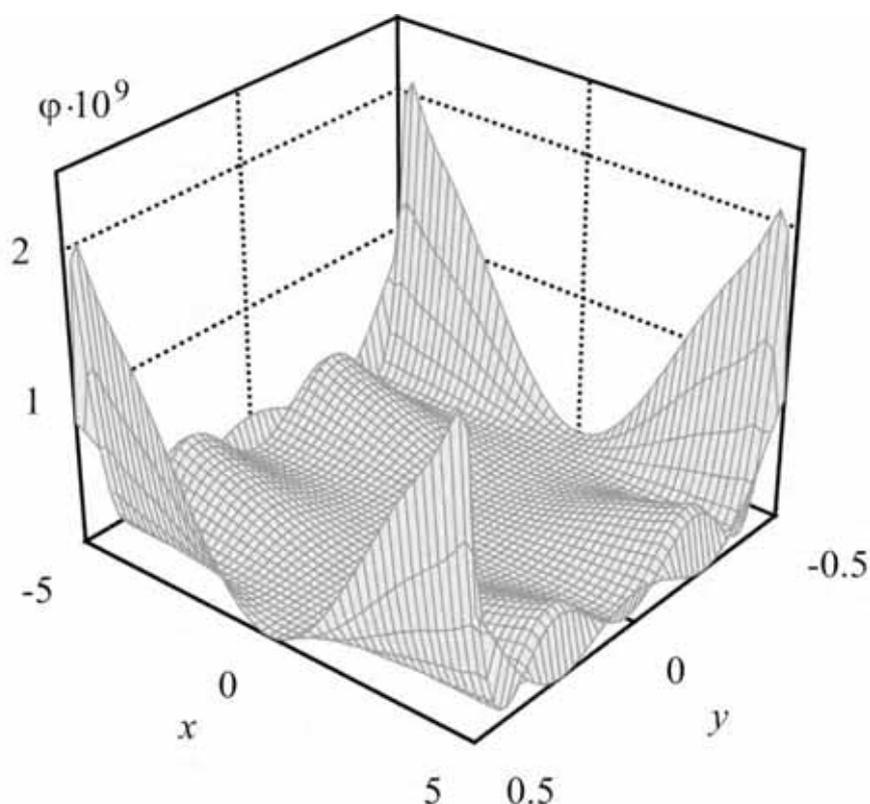


Рис. 4.3. Распределение энергетической ошибки φ по области Ω для первого собственной частоты колебаний балки в Примере 4.1.

4.4. Асимптотический подход

В асимптотическом подходе, рассматриваемом в этой главе, выводятся определяющие уравнения для упругих балок, используя метод, который

включает в себя разложение неизвестных функций перемещений и напряжений по малому параметру (соотношение размера поперечного сечения балки к его длине) [39]. Совместная система обыкновенных дифференциальных уравнений краевой задачи состоит из коэффициентов, выбранных соответствующим образом из полу-дискретных полиномиальных разложений соотношения между напряжениями и деформациями (асимптотические аппроксимации).

Привлекательность этого метода заключается в том, что дифференциальный порядок системы ОДУ в два раза меньше, чем соответствующий порядок в вариационном подходе. Кроме того, в рамках гипотезы плоских сечений можно получить явные выражения для полей напряжений, а также системы дифференциальных уравнений первого порядка для полей перемещений как для изотропной, так и анизотропной балки.

Классические вариационные принципы [18] и метод интегрирования дифференциальных соотношений [44, 154] приводят к различным приближенным уравнениям для нахождения напряженно-деформированных полей упругой балки. Соответствующие алгоритмы двумерного и трехмерного моделирования статических линейных задач, а также анализа свободных колебаний упругих балок, обсуждаются в этой главе.

4.4.1. Классический вариационный подход

Рассмотрим плоское однородное упругое тело (балку), занимающую прямоугольную область Ω с границей Γ (см. Рис. 4.4). Введем декартову систему координат Oxy с началом O , расположенном в средней точке левого края балки и осью x , перпендикулярную этому краю и направленную в противоположную сторону, как показано на Рис. 4.4. Пусть h и l являются высотой и длиной пластины, соответственно. Толщина пластины постоянна и равна единице ($b = 1$). Предполагается, что тело находится в плоском напряженно-деформированном состоянии, описываемом двумерной системой уравнений

теории упругости, заданной формулами (4.4)–(4.6).



Рис. 4.4. Прямоугольная балка.

Если длина балки l намного больше, чем ее высоты h , то напряженно-деформированное состояние этого тела приближенно описывается классическим уравнением балки. Например, уравнение поперечного изгиба балки было дано в уравнении (1.112) с балочной изгибной жесткостью EJ ($J = bh^3/12$).

Система уравнений (4.4)–(4.6) и граничные ограничения являются необходимыми условиями для принципа минимума полной потенциальной энергии, обсужденный в разделе 4.1.. Считается также, что функции перемещений описываются полу-дискретными приближениями (4.11).

На основе техники полу-дискретных аппроксимаций, получим несколько простых решений для системы (4.4)–(4.6) со следующими граничными условиями. Перемещения на левом краю балки равны нулю:

$$u(0, y) = v(0, y) = 0. \quad (4.72)$$

Стороны, параллельные оси x свободны от нагрузки, т.е.

$$\tau_{xy} \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = \sigma_y \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = 0. \quad (4.73)$$

Распределенные силы приложены к правому концевому сечению балки

$$\sigma_x(l, y) = q_x(y), \quad \tau_{xy}(l, y) = q_y(y). \quad (4.74)$$

Никаких объемных сил ($f_x(x, y) = f_y(x, y) \equiv 0$) не приложено к балке.

Пример 4.3. Предположим, что только сдвиговые напряжения приложены к балке в соответствии с

$$\sigma_x(l, y) = 0, \quad \tau_{xy}(l, y) = \frac{F}{hb} = \frac{F}{h}, \quad (4.75)$$

где F является величиной поперечной силы (см. Рис. 1.2). В нулевом приближении в уравнении (4.11) ($N_u = N_v = 0$) функции перемещений u и v зависят только от координаты x , т. е.

$$\tilde{u} = u^{(0)}(x), \quad \tilde{v} = v^{(0)}(x). \quad (4.76)$$

Система уравнений (4.13) в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} = 0. \quad (4.77)$$

С учетом граничных условий, решение системы (4.77) получается с

$$u = 0, \quad v = \frac{F}{Gh}x. \quad (4.78)$$

Решение (4.78) соответствует чистому сдвигу под действием касательного напряжения $\tau_{xy} = F/h$, но граничные условия (4.73) на краях балки $y = \pm h/2$ не выполняются.

Пример 4.4. Для $N_u = N_v = 1$ компоненты перемещений \tilde{u} и \tilde{v} являются линейными функциями y , которые могут быть представлены в виде

$$\tilde{u} = u^{(0)}(x) + \frac{y}{h}u^{(1)}(x), \quad \tilde{v} = v^{(0)}(x) + \frac{y}{h}v^{(1)}(x). \quad (4.79)$$

В этом случае уравнения (4.13) можно разделить на две независимые подси-

СТЕМЫ:

$$h \frac{d^2 u^{(0)}}{dx^2} + \nu \frac{dv^{(1)}}{dx} = 0, \quad (4.80)$$

$$(1 - \nu) h^2 \frac{d^2 v^{(1)}}{dx^2} - 24\nu h \frac{du^{(0)}}{dx} - 24v^{(1)} = 0;$$

$$h \frac{d^2 v^{(0)}}{dx^2} + \frac{du^{(1)}}{dx} = 0, \quad (4.81)$$

$$h^2 \frac{d^2 u^{(1)}}{dx^2} - 6(1 - \nu) h \frac{dv^{(0)}}{dx} - 6(1 - \nu) u^{(1)} = 0.$$

Система (4.80) описывает сжатие и растяжение балки, а уравнение (4.81) предназначено для изгиба. Отметим, что система ОДУ (4.81) может быть сведена к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка для неизвестной функции v_0 . Таким образом, эта система и балочное уравнений Бернулли имеют одинаковый дифференциальный порядок.

Рассмотрим уравнение (4.81) более подробно. В связи с граничными условиями (4.72), (4.73) и (4.75), боковое перемещение $v^{(0)}(x)$ имеет вид

$$v^{(0)}(x) = \frac{(1 - \nu^2)F}{EJ} \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2} + \frac{h^2 x}{6(1 - \nu)} \right]. \quad (4.82)$$

Решение уравнения изгиба (1.112) для консоли, нагруженной такой же поперечной силой дает следующее распределение бокового отклонения по длине балки:

$$v_c(x) = \frac{P_y}{EJ} \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2} \right]. \quad (4.83)$$

В отличие от классического решения Бернулли, функция в формуле (4.82) явно зависит от коэффициента Пуассона ν . Важно отметить, что производная от $v^{(0)}(x)$ на левом краю пластины не равна нулю,

$$\left. \frac{dv^{(0)}}{dx} \right|_{x=0} = \frac{F}{Gh}. \quad (4.84)$$

Для следующих безразмерных параметров: $l = 10$, $h = 1$, $E = 10^6$ и $F =$

1, $\nu = 0.3$ жесткостные характеристики балки для линейного приближения (4.79) и классического решения балки задаются

$$v^{(0)}(l) = 3.67 \cdot 10^{-3}, \quad \left. \frac{dv^{(0)}}{dx} \right|_{x=0} = 2.6 \cdot 10^{-6}, \quad v_c(l) = 4 \cdot 10^{-3}, \quad \left. \frac{dv_c}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

Рисунок 4.5 показывает боковое отклонение средней точки правого края балки $v_l = v^{(0)}(l)$ по сравнению с коэффициентом Пуассона ν (пунктирная кривая). Это смещение является квадратичной функцией

$$v_l = \frac{(2(1 - \nu)l^2 + h^2) lF}{h^3 G(\nu)}$$

от ν и монотонно убывает с ростом коэффициента Пуассона.

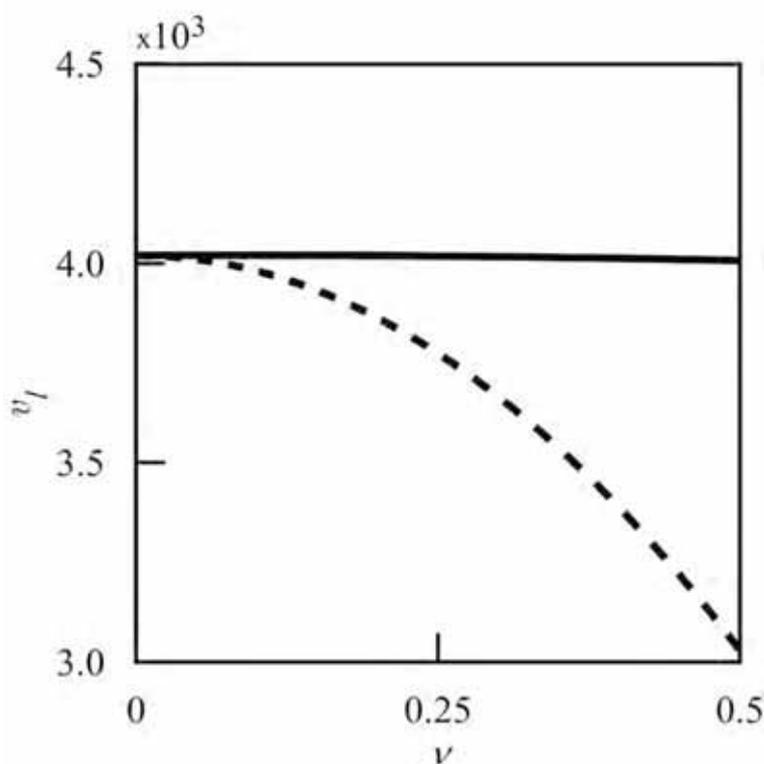


Рис. 4.5. Перемещение v_l как функция коэффициента Пуассона для линейного (пунктирная кривая) и квадратичного (сплошная линия) приближений.

Пример 4.5. Для квадратичного приближения $N_u = N_v = 2$, функции

перемещений u и v имеют вид

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)}(x) + \frac{y}{h}u^{(1)}(x) + \frac{y^2}{h^2}u^{(2)}(x), \\ v &= v^{(0)}(x) + \frac{y}{h}v^{(1)}(x) + \frac{y^2}{h^2}v^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Как и в линейном приближении уравнения Эйлера (4.13) делятся на две независимые подсистемы, одна из которых описывает растяжение, а другая изгиб. Как было показано в [42], такое разделение характерно для любого степени аппроксимации перемещений u и v . Функции $u^{(0)}$, $v^{(1)}$, $u^{(2)}$, $v^{(3)}$, ... определяют растяжение, а $v^{(0)}$, $u^{(1)}$, $v^{(2)}$, $u^{(3)}$, ... описывают изгиб балки. В этих последовательностях, коэффициенты $u^{(i)}$ с четными индексами соответствуют только переменные $v^{(j)}$ с нечетными номерами, и наоборот.

В случае изгиба, уравнения Эйлера можно представить в виде

$$\begin{aligned} 12h \frac{d^2v^{(0)}}{dx^2} + h \frac{d^2v^{(2)}}{dx^2} + 12 \frac{du^{(1)}}{dx} &= 0, \\ 2h^2 \frac{d^2u^{(1)}}{dx^2} + (5\nu - 1)h \frac{dv^{(2)}}{dx} - 12(1 - \nu) \left(\frac{dv^{(0)}}{dx} + u^{(1)} \right) &= 0, \\ 20(1 - \nu)h^2 \frac{d^2v^{(0)}}{dx^2} + 3(1 - \nu)h^2 \frac{d^2v^{(2)}}{dx^2} \\ - 20(5\nu - 1)h \frac{du^{(1)}}{dx} - 160v^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Система (4.86) может быть сведена к одному дифференциальному уравнению шестого порядка относительно неизвестной функции, например, $v^{(0)}$. Порядок системы ОДУ (4.13) увеличивается вместе со степенью аппроксимации перемещений. Например, для кубической аппроксимации, изгиб балки описывается уравнением восьмого порядка.

Решение системы (4.86) с учетом граничных условий (4.72), (4.75) является весьма громоздким, и поэтому оно не представлено. Кроме того, экс-

пониженные члены в этом решении имеют довольно большие значения, которые могут привести к определенным вычислительным трудностям. Например, при $lh^{-1} = 10$ и квадратичной аппроксимации, приходится оперировать с числами, которые имеют значение порядка 10^{120} .

Для параметров балки из Примера 4.4 и $\nu = 0.3$, жесткостные характеристики для квадратичного приближения (4.86) по сравнению с характеристиками классического решения балки задаются

$$v_l = 4.02 \cdot 10^{-3}, \quad \left. \frac{dv^{(0)}}{dx} \right|_{x=0} = 6.03 \cdot 10^{-4}, \quad v_c(l) = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Рисунок 4.5 (сплошная кривая) показывает вертикальное отклонение средней точки правого края балки v_l в зависимости от коэффициента Пуассона ν . По сравнению с линейной аппроксимацией, значение v_l при фиксированном ν увеличивается. Кроме того, зависимость $v_l(\nu)$ больше не является монотонной: функция $v_l(\nu)$ имеет максимум при $\nu \approx 0.1$.

4.4.2. Интегро-дифференциальный подход

4.4.3. Основные идеи асимптотического подхода

Подход к задачам линейной теории упругости на основе интегро-дифференциальных соотношений был представлен в главе 2. В этом методе, определяющие уравнения теории упругости имеют вид (см. Задачу 2.2 в разделе 2.2.)

$$\Phi_\varepsilon = \int_\Omega \xi : \xi d\Omega = 0, \quad \xi = \varepsilon^0 - C^{-1} : \sigma, \quad (4.87)$$

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad (4.88)$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (4.89)$$

В отличие от классической вариационной формулировки, здесь неизвестными функциями являются компоненты, как тензора напряжений, так и век-

тора перемещений. Как пример, эти компоненты могут быть аппроксимированы конечным рядом по степеням отношения

$$Y = \frac{y}{l} \quad (4.90)$$

в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=0}^2 \sigma_x^{(n)}(x) Y^n, & \tau_{xy} &= \sum_{n=0}^3 \tau_{xy}^{(n)}(x) Y^n, & \sigma_y &= \sum_{n=0}^4 \sigma_y^{(n)}(x) Y^n; \\ u &= \sum_{n=0}^3 u^{(n)}(x) Y^n, & v &= \sum_{n=0}^4 v^{(n)}(x) Y^n. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Такое представление было выбрано по двум причинам. Во-первых, коэффициенты в формуле (4.91) имеют размерность либо напряжения либо перемещения. Во-вторых, параметр разложения является малым для узкой балки, так как $h \ll l$.

В разложении (4.91), σ_x является линейной функцией от Y . Такой выбор аппроксимаций для τ_{xy} и σ_y оправдан тем, что производные от напряжений в уравнения равновесия (4.88) должны иметь такой же порядок разложения по малому параметру Y .

Подставим напряжения из формулы (4.91) в уравнения равновесия (4.88) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях Y , для того чтобы получить систему из пяти линейных дифференциальных уравнений (нет объемных сил, т. е. $f = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x^{(0)}}{dx} + \tau_{xy}^{(1)} &= 0, & \frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} + 2\tau_{xy}^{(2)} &= 0, \\ \frac{d\tau_{xy}^{(0)}}{dx} + \sigma_y^{(1)} &= 0, & \frac{d\tau_{xy}^{(1)}}{dx} + 2\sigma_y^{(2)} &= 0, & \frac{d\tau_{xy}^{(2)}}{dx} + 3\sigma_y^{(3)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением граничных условий вида

$$\tau_{xy}|_{y=\pm\frac{h}{2l}} = \sigma_y|_{y=\pm\frac{h}{2l}} = 0; \quad (4.93)$$

$$\int_{-\frac{h}{2l}}^{\frac{h}{2l}} \sigma_x(l, Y) l dY = P, \quad \int_{-\frac{h}{2l}}^{\frac{h}{2l}} \tau_{xy}(l, Y) l dY = F, \quad (4.94)$$

$$\int_{-\frac{h}{2l}}^{\frac{h}{2l}} \sigma_x(l, Y) l^2 Y dY = M;$$

$$u(0, Y) = v(0, Y) = 0. \quad (4.95)$$

Соотношения (4.93)–(4.95) соответствуют растяжению и изгибу консольной балки, свободный конец которой нагружен силами P , F и моментом M .

После того, как граничные условия (4.93) были удовлетворены, напряжения в разложении (4.91) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)} Y, \quad \tau_{xy} = \left(1 - \frac{4l^2 Y^2}{h^2}\right) \tau_{xy}^{(0)}, \\ \sigma_y &= \left(1 - \frac{4l^2 Y^2}{h^2}\right) \left(\sigma_y^{(0)}(x) + \sigma_y^{(1)}(x) Y\right). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Решая систему уравнений (4.92) со ссылкой на соотношения (4.96) и граничные условия (4.94) на правом краю балки, равновесные поля напряжений получаются как

$$\sigma_x = \frac{P}{h} + \frac{12y}{h^3} [F(x-l) + M], \quad \tau_{xy} = \frac{6F}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right), \quad \sigma_y = 0. \quad (4.97)$$

Тогда функционал в формуле (4.87) принимает вид

$$\Phi_\varepsilon = \int_{\Omega} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + 2\xi_{xy}^2) d\Omega \quad (4.98)$$

с

$$\begin{aligned}
\xi_x &= \frac{du^{(3)}}{dx}Y^3 + \frac{du^{(2)}}{dx}Y^2 + \left(\frac{du^{(1)}}{dx} - l \frac{F(x-l) + M}{EJ} \right) Y \\
&\quad + \frac{du^{(0)}}{dx} - \frac{P}{Eh}, \\
\xi_y &= \frac{4v^{(4)}}{l}Y^3 + \frac{3v^{(3)}}{l}Y^2 + \left(\frac{2v^{(2)}}{l} + \nu l \frac{F(x-l) + M}{EJ} \right) Y \\
&\quad + \frac{v^{(1)}}{l} - \frac{\nu P}{Eh}, \\
2\xi_{xy} &= \frac{dv^{(4)}}{dx}Y^4 + \frac{dv^{(3)}}{dx}Y^3 + \left(\frac{3u^{(3)}}{l} + \frac{dv^{(2)}}{dx} + \frac{(1+\nu)Fl^2}{EJ} \right) Y^2 \\
&\quad + \left(\frac{2u^{(2)}}{l} + \frac{dv^{(1)}}{dx} \right) Y + \frac{u^{(1)}}{l} + \frac{dv^{(0)}}{dx} - \frac{3(1+\nu)F}{Eh}.
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Задача минимизации функционала (4.98) сводится к решению системы второго порядка дифференциальных уравнений (уравнения Эйлера) относительно девяти неизвестных функций перемещений.

Перепишем тензор ошибки деформаций ξ , определенный в формуле (4.99), следующим образом:

$$\begin{aligned}
\xi_x &= \xi_1 Y^3 + \xi_2 Y^2 + \xi_3 Y + \xi_4, \\
\xi_y &= \xi_5 Y^3 + \xi_6 Y^2 + \xi_7 Y + \xi_8, \\
\xi_{xy} &= \xi_9 Y^4 + \xi_{10} Y^3 + \xi_{11} Y^2 + \xi_{12} Y + \xi_{13}.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Если бы все коэффициенты ξ_i , $i = 1, \dots, 13$, были равны нулю, функционал Φ достиг бы свой абсолютный минимум $\Phi = 0$. Это условие не может быть удовлетворено, в общем случае, так как число коэффициентов ξ_i превышает число неизвестных переменных. Для оценки оставшихся уравнений $\xi_i = 0$,

введем новый квадратичный функционал

$$J = \sum_{i=1}^{13} \int_0^l \xi_i^2 dx. \quad (4.101)$$

Можно показать, что минимизация функционала J сводится к независимой минимизации следующих интегралов:

$$J_1[u^{(0)}] = \int_0^l \xi_4^2 dx, \quad J_2[v^{(0)}, u^{(1)}] = \int_0^l (\xi_3^2 + \xi_{13}^2) dx, \quad (4.102)$$

$$J_3[v^{(1)}, u^{(2)}] = \int_0^l (\xi_2^2 + \xi_8^2 + \xi_{12}^2) dx,$$

$$J_4[v^{(2)}, u^{(3)}] = \int_0^l (\xi_1^2 + \xi_7^2 + \xi_{11}^2) dx, \quad (4.103)$$

$$J_5[v^{(3)}] = \int_0^l (\xi_6^2 + \xi_{10}^2) dx, \quad J_6[v^{(4)}] = \int_0^l (\xi_5^2 + \xi_9^2) dx.$$

Отметим, что функционалы J_1 и J_2 способны достичь своих абсолютных минимумов. Для этого необходимо решить систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \xi_4 &= \frac{du^{(0)}}{dx} - \frac{P}{Eh} = 0, \\ \xi_3 &= \frac{du^{(1)}}{dx} - \frac{F(x-l) + M}{EJ} l = 0, \\ 2\xi_{13} &= \frac{dv^{(0)}}{dx} + \frac{u^{(1)}}{l} - \frac{3(1+\nu)F}{Eh} = 0 \end{aligned} \quad (4.104)$$

относительно трех неизвестных функций перемещения $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, и $v^{(0)}$. Граничные условия для системы (4.104) следуют из (4.95) и имеют вид

$$u^{(0)}(0) = u^{(1)}(0) = v^{(0)}(0) = 0. \quad (4.105)$$

Функция $u^{(0)}$ определяет растяжение или сжатие срединной линии балки, а $v^{(0)}$ и $u^{(1)}$ описывают изгиб балки. Систему уравнений (4.104) можно назвать уравнениями упругой балки. В соответствии с гипотезами, сформулированными Дж. Бернулли [28], что прямые линии, которые были нормальными к срединной поверхности до деформации остаются прямыми и нормальными к срединной поверхности и не меняют свою длину после деформации, система (4.104) удовлетворяет всем этим гипотезам, за исключением утверждения, что прямые линии, которые были нормальными к срединной поверхности до деформации остаются нормальными к этой поверхности после деформации. Члены ξ_i , которые не были учтены в функционалах J_1 и J_2 отвечают за искажение поперечных сечений балки. Отметим, что эти условия не влияют на решение системы (4.104) для предписанных полей напряжений (4.97).

Решение системы (4.104), удовлетворяющее граничным условиям (4.105), определяет поле перемещений тела как

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{Mxy}{EJ} - \frac{Fxy(2l-x)}{2EJ} + \frac{Px}{Eh}, \\ v(x) &= \frac{Mx^2}{2EJ} + \frac{Fx^2(3l-x)}{6EJ} + \frac{3Fx}{2Gh}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

В отличие от классического балочного решения (4.83), боковые смещения v из уравнения (4.106) линейно зависят от коэффициента Пуассона ν если $M = 0$. Первая производная функции v на левом краю балки имеет вид

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \frac{3F}{2Gh}.$$

Для параметров балки и поперечной силы F , указанных в разделе 4.4., а также коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$, получены жесткостные характеристики пластины для аппроксимации (4.106) и классического балочного решения:

$$v(l) = 4.039 \cdot 10^{-3}, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = 6.04 \cdot 10^{-4}, \quad v_c(l) = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Для сравнения различных подходов к задаче изгиба упругой балки, зависимость бокового отклонения $v(l, 0)$ от коэффициента Пуассона ν рассматривается более подробно. Рисунок 4.6 представляет график $v(l, 0)$ по сравнению с ν . Эти кривые были получены с помощью трех различных методов. Пунктирная кривая соответствует квадратичной аппроксимации функций перемещений, которые были получены в разделе 4.4. на основе принципа минимума потенциальной энергии. Этот принцип был также использован для решения задачи линейной упругости. Соответствующий алгоритм построения численного решения, в которых u и v представлены полными полиномами фиксированной степени N_u относительно переменных x и y , был описан в Главе 2. Штрих-пунктирная кривая на Рис. 4.6 получена с помощью этого метода при $N_u = 16$. Решение, соответствующее формуле (4.106), показано на Рис. 4.6 сплошной кривой.

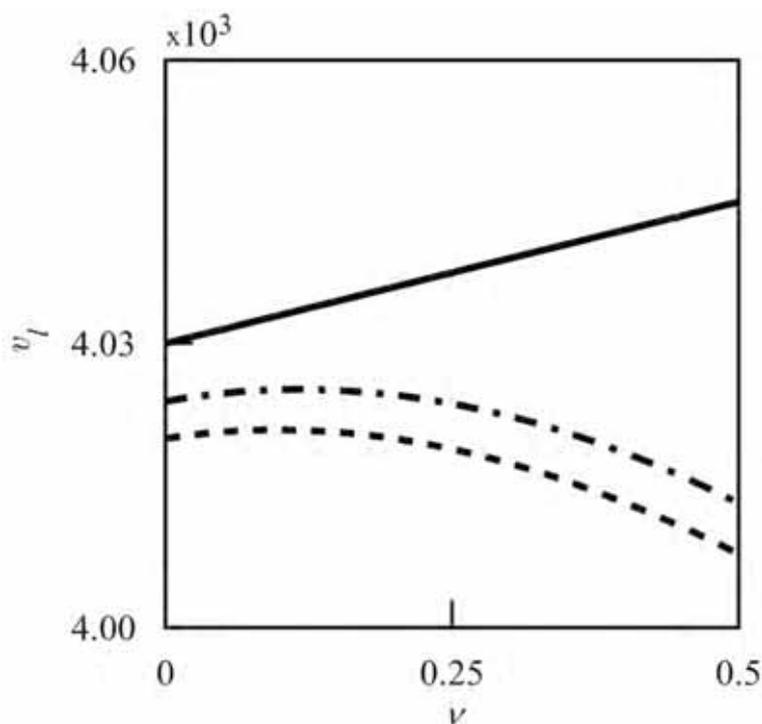


Рис. 4.6. Боковое смещение $v_l(\nu)$ по сравнению с коэффициентом Пуассона ν .

Кривые на Рис. 4.6 указывают на следующие особенности. Относительная погрешность вычислений перемещения v_l , полученные этими методами для произвольного $\nu \in [0, 0.5]$ не превышает 1 %. Максимальный разброс в зна-

чениях v_l наблюдается при $\nu = 0.5$ (несжимаемый материал). Пунктирную кривую можно рассматривать как нижнюю оценку и сплошную линию, как верхнюю оценку точного значения v_l . Кривая, соответствующая асимптотическому подходу является строго возрастающей функцией аргумента ν , в то время как штрих-пунктирная и штриховая кривые (вариационный подход) имеют максимум при определенных значениях коэффициента Пуассона ν .

4.4.4. Уравнения балки – общий случай нагружения

Пусть балка прямоугольного сечения, чье напряженно-деформированное состояние описывается уравнениями (4.4)–(4.6), жестко закреплена вдоль левого края (Рис. 4.4), т.е.

$$u(0, y) = v(0, y) = 0. \quad (4.107)$$

Верхняя и нижняя стороны балки нагружены силами в соответствии с

$$\tau_{xy} \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = \pm p_x^\pm(x), \quad \sigma_y \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = \pm p_y^\pm(x), \quad (4.108)$$

где $p_x^\pm(x)$ и $p_y^\pm(x)$ являются заданными функциями. Линейные комбинации $p_x^\pm(x)$ и $p_y^\pm(x)$ можно рассматривать как различные типы нагрузок распределенных вдоль балки. Например, $p_s = p_y^+ + p_y^-$ является сдвиговой нагрузкой, $p_t = p_y^+ - p_y^-$ является боковым сжатием или растяжением, $p_b = p_x^+ - p_x^-$ определяет распределенный изгибающий момент и $p_l = p_x^+ + p_x^-$ является распределенной продольной силой.

Рассмотрим два типа граничных условий на правом краю балки. Если заданы силы и момент из формулы (4.94), то задача является статически определимой и поля напряжений могут быть получены на основе уравнений

равновесия (4.4). Для граничных условий

$$u(l, y) = v(l, y) = 0, \quad (4.109)$$

задача является три раза статически неопределимой и поля напряжений могут быть определены с тремя неизвестными константами. Используя аппроксимации в формуле (4.91), решая уравнения равновесия (4.92) и удовлетворяя граничные условия (4.94), можно найти функции напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= -\frac{1}{h} \int p_l dx + c_3, & \tau_{xy}^{(0)} &= -\frac{3}{2h} \int p_s dx - \frac{p_b}{4} + c_2, \\ \sigma_x^{(1)} &= -\frac{12l}{h^3} \iint p_s dx dx - \frac{6l}{h^2} \int p_b dx + \frac{8lc_2 x}{h^2} + c_1, \\ \tau_{xy}^{(2)} &= -\frac{4l^2}{h^2} \tau_{xy}^{(0)} + \frac{2l^2 p_b}{h^2}, & \tau_{xy}^{(1)} &= \frac{lp_l}{h}, \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\sigma_y^{(0)} = \frac{p_t}{2} + \frac{h}{8} \frac{dp_l}{dx}, \quad \sigma_y^{(2)} = -\frac{4l^2}{h^2} \sigma_y^{(0)} + \frac{2l^2}{h^2} p_t,$$

$$\sigma_y^{(1)} = \frac{3lp_s}{2h} + \frac{l}{4} \frac{dp_b}{dx}, \quad \sigma_y^{(3)} = -\frac{4l^2}{h^2} \sigma_y^{(1)} + \frac{4l^3}{h^3} p_s.$$

Используя аппроксимацию в формуле (4.91) для перемещений, функции

ξ_x , ξ_y и ξ_{xy} могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned}
\xi_x &= \frac{du^{(0)}}{dx} - \frac{\sigma_x^{(0)} - \nu\sigma_y^{(0)}}{E} + \left(\frac{du^{(1)}}{dx} - \frac{\sigma_x^{(1)} - \nu\sigma_y^{(1)}}{E} \right) Y \\
&+ \left(\frac{du^{(2)}}{dx} + \frac{\nu\sigma_y^{(2)}}{E} \right) Y^2 + \left(\frac{du^{(3)}}{dx} + \frac{\nu\sigma_y^{(3)}}{E} \right) Y^3, \\
\xi_y &= \frac{v^{(1)}}{l} - \frac{\sigma_y^{(0)} - \nu\sigma_x^{(0)}}{E} + \left(\frac{2v^{(2)}}{l} - \frac{\sigma_y^{(1)} - \nu\sigma_x^{(1)}}{E} \right) Y \\
&+ \left(\frac{3v^{(3)}}{l} - \frac{\sigma_y^{(2)}}{E} \right) Y^2 + \left(\frac{4v^{(4)}}{l} - \frac{\sigma_y^{(3)}}{E} \right) Y^3, \\
\xi_{xy} &= \frac{u^{(1)}}{2l} + \frac{1}{2} \frac{dv_0}{dx} - \frac{\tau_{xy}^{(0)}}{2G} + \left(\frac{u^{(2)}}{l} + \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dx} - \frac{\tau_{xy}^{(1)}}{2G} \right) Y \\
&+ \left(\frac{3u^{(3)}}{2l} + \frac{1}{2} \frac{dv^{(2)}}{dx} - \frac{\tau_{xy}^{(2)}}{2G} \right) Y^2 + \frac{1}{2} \frac{dv^{(3)}}{dx} Y^3 + \frac{1}{2} \frac{dv^{(4)}}{dx} Y^4.
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Приняв гипотезу плоских сечений, обсуждавшуюся в этом разделе, можно написать уравнение равновесия балки в виде

$$\begin{aligned}
\frac{du^{(0)}}{dx} &= \frac{\sigma_x^{(0)}(x) - \nu\sigma_y^{(0)}(x)}{E}, \\
\frac{du^{(1)}}{dx} &= \frac{\sigma_x^{(1)}(x) - \nu\sigma_y^{(1)}(x)}{E}, \quad \frac{dv^{(0)}}{dx} + \frac{u^{(1)}}{l} = \frac{\tau_{xy}^{(0)}(x)}{G}.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Как видно из (4.112), уравнения балки представляют собой соотношения закона Гука для соответствующих компонентов в терминах аппроксимаций перемещений и напряжений (4.91). Таким образом, эти уравнения могут быть легко обобщены на случай анизотропной балки. Например, для ортотропного материала, ориентированного вдоль оси x , система дифференциальных

уравнений (4.112) преобразуется как

$$\begin{aligned}\frac{du^{(0)}}{dx} &= \frac{\sigma_x^{(0)}(x)}{E_1} - \frac{\nu_{12}\sigma_y^{(0)}(x)}{E_2}, \\ \frac{du^{(1)}}{dx} &= \frac{\sigma_x^{(1)}(x)}{E_1} - \frac{\nu_{12}\sigma_y^{(1)}(x)}{E_2}, \\ \frac{dv^{(0)}}{dx} + \frac{u^{(1)}}{l} &= \frac{\tau_{xy}^{(0)}(x)}{G_{12}}, \quad E_2\nu_{21} = E_1\nu_{12}.\end{aligned}\tag{4.113}$$

Здесь E_1 и E_2 являются модулями Юнга вдоль главных осей упругости (x и y), G_{12} – модуль сдвига, а ν_{12} и ν_{21} являются коэффициентами Пуассона.

Во всех следующих примерах этого раздела, кроме последнего, предполагается, что балка имеет длину $l = 10$, высоту $h = 1$ и толщину, равную высоте (квадратное сечение), модуль Юнга $E = 10^6$.

Пример 4.6. Рассмотрим консольную балку (см. Рис. 4.4), которая защемлена на одном краю ($u(0, y) = v(0, y) = 0$) и нагружена распределенной сдвиговой силой $p_s(x) = q = \text{const}$. Другие функции и константы, определяющие граничные условия равны нулю, т. е.

$$P = F = M = 0, \quad p_l(x) = p_b(x) = p_t(x) \equiv 0.$$

Равновесное поле напряжений однозначно определяется выражениями в формулах (4.91) и (4.110). Вертикальное смещение балки $v^{(0)}(x)$ находится из решения системы уравнений (4.113). Решение для однородного и изотропного тела дает

$$\begin{aligned}v^{(0)} &= v_c + \Delta v, \quad v_c = \frac{qx^2}{24EJ} (x^2 - 4lx + 6l^2), \\ \Delta v &= \frac{3qx}{4h} \left(\frac{\nu x}{E} + \frac{2l - x}{G} \right),\end{aligned}$$

где v_c является функцией, полученной на основе уравнения балки Бернулли. Если $q > 0$, то дополнительный член Δv является положительным для всех

$x > 0$. Для $q = 1$, классическое отклонение конца балки равно $v_c(l) = 0.015$ и дополнительное перемещение дается $\Delta v(l) = (1.5 + 2.25\nu) \cdot 10^{-4}$. Отметим, что отклонение конца балки является линейным выражением относительно коэффициента Пуассона. Значение $\Delta v(l)$, нормированное на полное перемещение для $\nu = 0.3$ составляет

$$\left. \frac{\Delta v(l) \cdot 100\%}{v_c(l) + \Delta v(l)} \right|_{\nu=0.3} \approx 1.43\%.$$

Пример 4.7. Пусть балка жестко зажата с обоих краев в соответствии с

$$u(0, y) = v(0, y) = u(l, y) = v(l, y) = 0$$

и нагружена распределенной перерезывающей силой $p_s(x) = q = \text{const}$. Другие функции, входящие в граничные условия равны нулю, т. е.

$$p_l(x) = p_b(x) = p_t(x) \equiv 0.$$

Боковое отклонение балки $v^{(0)}(x)$ для этих граничных условий имеет вид

$$v^{(0)} = v_c + \Delta v, \quad v_c = \frac{qx^2(l-x)^2}{24EJ}, \quad \Delta v = \frac{3qx(l-x)}{4Gh}.$$

Как и в Примере 4.6 для $q > 0$ дополнительный член Δv положителен для всех $x > 0$. При $q = 1$ смещение в середине балки составляет $v_c(0.5l) = 3.125 \cdot 10^{-4}$ и дополнительное смещение определяется $\Delta v(0.5l) = (1 + \nu) \cdot 3.75 \cdot 10^{-5}$. Значение $\Delta v^{(0)}(0.5l)$ при $\nu = 0.3$ определяется как

$$\left. \frac{\Delta v(0.5l) \cdot 100\%}{v_c(0.5l) + \Delta v(0.5l)} \right|_{\nu=0.3} \approx 13.49\%.$$

Отметим, что тип граничных условий существенно влияет на точность балочного решения.

Пример 4.8. Рассмотрим консольную ортотропную балку с квадрат-

ным сечением, которая закреплена вдоль одного края $u(0, y) = v(0, y) = 0$ и нагружается распределенной сдвиговой силой с $p_s(x) = q = \text{const}$. Другие функции и константы в граничных условиях равны нулю, как и в Примере 4.6. Параметры ортотропного материала выбраны следующим образом:

$$E_1 = 10^6, \quad E_2 = 4 \cdot 10^5, \quad G_{12} = 2 \cdot 10^5, \quad \nu_{12} = 0.12.$$

Ориентация главного модуля Юнга E_1 совпадает с осью x . Внешние размеры балки совпадают с размерами из Примера 4.6.

Боковое смещение $v^{(0)}(x)$ определяется из решения системы уравнений (4.113), которое дает

$$v^{(0)} = v_c + \Delta v, \quad v_c = \frac{qx^2}{24E_1J} (x^2 - 4lx + 6l^2),$$

$$\Delta v = \frac{3q(2l-x)}{4G_{12}h}x + \frac{3q\nu_{12}}{4E_2h}x^2,$$

где v_c является функцией смещения, полученной на основе изгибного уравнения балки для случая $E = E_1$. При $q > 0$ дополнительный член Δv положителен для всех $x > 0$. При $q = 1$ отклонения конца балки есть $v_c(l) = 0.015$. Дополнительное перемещение равно $\Delta v(l) = 3.975 \cdot 10^{-4}$; а его относительная величина составляет

$$\frac{\Delta v(l) \cdot 100\%}{v_c(l) + \Delta v(l)} \approx 2.58\%.$$

4.5. Колебания упругой балки

Несмотря на то, что опубликовано огромное количество работ описывающих динамическое поведение упругих тел и конструкций (см., например, [30], [32], [40], [41], [70], [75], [81], [82], [105], [116], [117], [122], [149], [155], [158], [169], [179], [181], [195]), остаются вопросы, связанные, прежде всего, с полнотой такого описания.

4.5.1. Формулировка задачи на собственные значения

Рассмотрим упругую прямоугольную балку единичной толщины с размерами $h \times l$. Начало декартовой системы координат Oxy помещено в средней точке стороны балки с высотой h . Ось x параллельна сторонам с длинами l (см. Рис. 4.4). Предполагается, что напряженно-деформированное состояние изотропной пластины описывается двумерными уравнениями линейной теории упругости по формулам (4.4)–(4.6). Предположим, что границы балки свободны от нагрузки. Тогда граничные условия задаются

$$\tau_{xy} = \sigma_y = 0, \quad y = \pm \frac{h}{2}, \quad (4.114)$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad x = 0, l. \quad (4.115)$$

Считается, что балка может колебаться (свободные малые упругие колебания) относительно ее положения равновесия и вектор объемной силы f определяется силами инерции, обусловленными движениями внутренних точек:

$$f_x = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad f_y = -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (4.116)$$

где ρ является объемной плотностью тела.

Когда длина балки l намного больше, чем ее высота h , напряженно-деформированное состояние пластины может быть описана приближенными уравнениями классической теории балки. В соответствии с формулами (1.96) и (1.120), уравнения для продольных и поперечных колебаний балки имеют вид

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (4.117)$$

соответственно, где EJ является жесткостью на изгиб и A это площадь поперечного сечения балки.

Чтобы определить собственные колебания пластины, метод разделения

переменных используются и неизвестные напряжения и перемещения выбираются как качество бесконечных рядов относительно $Y = l^{-1}y$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(x, y) &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_x^{(n)}(x) Y^n, \\
 \sigma_y(x, y) &= e^{i\omega t} (1 - \eta^{-2} Y^2) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_y^{(n)}(x) Y^n, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= e^{i\omega t} (1 - \eta^{-2} Y^2) \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{xy}^{(n)}(x) Y^n, \\
 u(x, y) &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(x) Y^n, \\
 v(x, y) &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} v^{(n)}(x) Y^n, \quad \eta = \frac{h}{2l},
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

где ω является неизвестной собственной частотой и $\eta = h/(2l)$ – геометрический параметр пластины.

В соответствии с интегро-дифференциальным подходом, краевая задача (4.4)–(4.6), (4.114), (4.115) может быть сведена, например, к минимизации функционала (4.87) при дифференциальных ограничениях (4.5), (4.6) и граничных условиях (4.114), (4.115).

С учетом разложения напряжений и перемещений (4.118), компоненты тензора ошибки деформаций ξ могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned}
 \xi_x &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{du^{(n)}}{dx} - \frac{\sigma_x^{(n)}}{E} + \nu \frac{1 - \eta^{-2} Y^2}{E} \sigma_y^{(n)} \right] Y^n, \\
 \xi_y &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n+1}{l} v^{(n+1)} - \frac{1 - \eta^{-2} Y^2}{E} \sigma_y^{(n)} + \frac{\nu}{E} \sigma_x^{(n)} \right] Y^n, \\
 \xi_{xy} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n+1}{l} u^{(n+1)} + \frac{dv_n}{dx} - \frac{1 - \eta^{-2} Y^2}{G} \tau_{xy}^{(n)} \right] Y^n.
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

Равенство интеграла Φ_ε в формуле (4.98) нулю означает, что функции

ξ_x , ξ_y , и ξ_{xy} равны нулю в области Ω занятой балкой везде за исключением, быть может, множества точек меры нуль [36]. Таким образом, предполагается, что все коэффициенты при степенях Y в соотношениях (4.119) должны быть равны нулю.

Подставляя (4.118) в уравнения равновесия, можно разрешить соотношение (4.4) относительно функций перемещений $u^{(k)}(x)$, $v^{(k)}(x)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ в соответствии с

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= -\frac{1}{\rho\omega^2} \left[\frac{d\sigma_x^{(k)}}{dx} + \frac{k+1}{l} \left(\tau_{xy}^{(k+1)} - \frac{1}{\eta^2} \tau_{xy}^{(k-1)} \right) \right] \\ v^{(k)} &= -\frac{1}{\rho\omega^2} \left[\frac{d\tau_{xy}^{(k)}}{dx} - \frac{1}{\eta^2} \frac{d\tau_{xy}^{(k-2)}}{dx} + \frac{k+1}{l} \left(\sigma_y^{(k+1)} - \frac{1}{\eta^2} \sigma_y^{(k-1)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Здесь введены вспомогательные функции

$$\tau_{xy}^{(-1)} = \tau_{xy}^{(-2)} = \sigma_y^{(-1)} = \sigma_y^{(-2)} \equiv 0$$

для однородности уравнений (4.120).

С учетом соотношений (4.119) и (4.120), компоненты тензора ошибки деформаций можно переписать в виде

$$\xi_x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_x^{(k)} Y^k, \quad \xi_y = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_y^{(k)} Y^k, \quad \xi_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{xy}^{(k)} Y^k, \quad (4.121)$$

где

$$\begin{aligned}
\xi_x^{(k)} &= -\frac{1}{\rho\omega^2} \left[\frac{d^2\sigma_x^{(k)}}{dx^2} + \frac{k+1}{l} \left(\frac{d\tau_{xy}^{(k+1)}}{dx} - \frac{1}{\eta^2} \frac{d\tau_{xy}^{(k-1)}}{dx} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\sigma_x^{(k)}}{E} + \frac{\nu\sigma_y^{(k)}}{E} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\nu\sigma_y^{(k-2)}}{E}, \\
\xi_y^{(k)} &= -\frac{k+1}{\rho\omega^2 l} \left[\frac{d\tau_{xy}^{(k+1)}}{dx} - \frac{1}{\eta^2} \frac{d\tau_{xy}^{(k-1)}}{dx} + \frac{k+2}{l} \left(\sigma_y^{(k+2)} - \frac{\sigma_y^{(k)}}{\eta^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\nu\sigma_x^{(k)}}{E} - \frac{\sigma_y^{(k)}}{E} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\sigma_y^{(k-2)}}{E}, \\
2\xi_{xy}^{(k)} &= -\frac{k+1}{\rho\omega^2 l} \left[\frac{d\sigma_x^{(k+1)}}{dx} + \frac{k+2}{l} \left(\tau_{xy}^{(k+2)} - \frac{\tau_{xy}^{(k)}}{\eta^2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{\rho\omega^2} \left[\frac{d^2\tau_{xy}^{(k)}}{dx^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{d^2\tau_{xy}^{(k-2)}}{dx^2} + \frac{k+1}{l} \left(\frac{d\sigma_y^{(k+1)}}{dx} - \frac{1}{\eta^2} \frac{d\sigma_y^{(k-1)}}{dx} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\tau_{xy}^{(k)}}{G} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\tau_{xy}^{(k-2)}}{G}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Анализируя структуру уравнений (4.122), можно выделить две подсистемы. Как было отмечено в разделе 4.3., это разложение является типичным для произвольной степени аппроксимаций напряжений и перемещений и возникает из-за симметрии балки относительно оси x . Функции $\sigma_x^{(2j)}$, $\sigma_y^{(2j)}$, $\tau_{xy}^{(2j+1)}$, $u^{(2j)}$, $v^{(2j+1)}$ при $j = 0, 1, \dots$ описывают растяжение и сжатие. В отличие от этого функции $\sigma_x^{(2j+1)}$, $\sigma_y^{(2j+1)}$, $\tau_{xy}^{(2j)}$, $u^{(2j+1)}$, $v^{(2j)}$ характеризуют изгиб балки. Кроме того, коэффициенты $\xi_x^{(2j)}$, $\xi_y^{(2j)}$, $\xi_{xy}^{(2j+1)}$ соответствуют продольным колебаниям, в то время как $\xi_x^{(2j+1)}$, $\xi_y^{(2j+1)}$, $\xi_{xy}^{(2j)}$ описывают боковые движения тела.

Для чтобы найти приближенное решение задачи (4.4)–(4.6), (4.114), (4.115), рассмотрим конечномерные представления напряжений и перемещений. Это означает, что функции $\sigma_x^{(j)}$, $\sigma_y^{(j)}$, $\tau_{xy}^{(j)}$ равны нулю при $j > N$, где N это максимальная степень разложения в формуле (4.118). Тогда число нену-

левых коэффициентов в уравнении (4.122) также конечно и равно $3(N + 3)$ ($k = 0, 1, \dots, N + 2$). Так как есть только $3(N + 1)$ неизвестных функций напряжений, то очевидно, что в общем не возможно разрешить систему $3(N + 3)$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi_x^{(k)} = 0, \quad \xi_y^{(k)} = 0, \quad \xi_{xy}^{(k)} = 0.$$

Чтобы приближенно решить эту переопределенную систему уравнений, можно применить различные методы оптимизации, например, с помощью вариационной формулировки, приведенной в разделе 4.3.. В данном разделе обсуждается подход, в котором только уравнения, соответствующие нижней степени разложения компонентов ошибки деформаций x_i^j , ξ_y и ξ_{xy} по переменной Y удовлетворяются. После этого, для того, чтобы найти приближенное решение интегро-дифференциальной задачи (4.87), (4.5), (4.6), (4.114), (4.115), используются неразрешенные ненулевые коэффициенты $\xi_x^{(j)}$, $\xi_y^{(j)}$ и $\xi_{xy}^{(j)}$ при $j = N + 1, N + 2$.

4.5.2. Продольные колебания балки

Конечномерная система ОДУ

$$\begin{aligned} \xi_x^{(0)} = 0, \quad \xi_y^{(0)} = 0, \\ \xi_x^{(2j)} = 0, \quad \xi_y^{(2j)} = 0, \quad \xi_{xy}^{(2j-1)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_1 + 1, \end{aligned} \tag{4.123}$$

и соответствующие граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(j)}(0) = \sigma_x^{(j)}(l) = 0, \\ \sigma_x^{(2j)}(0) = \sigma_x^{(2j)}(l) = \tau_{yx}^{(2j-1)}(0) = \tau_{yx}^{(2j-1)}(l) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_1, \end{aligned} \tag{4.124}$$

описывающие продольные колебания балки получаются из формул (4.115) и (4.122) с помощью декомпозиции неизвестных напряжений. Отметим, что все функции $\sigma_y^{(2j)}$ могут быть исключены из системы (4.123) через $\sigma_x^{(2j)}$, $\tau_{xy}^{(2j-1)}$ и их производные. Система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\xi_x^{(0)} = 0, \quad \xi_x^{(2k)} = 0, \quad \xi_{xy}^{(2k-1)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_1 \quad (4.125)$$

решается относительно $2N_1 + 1$ переменных $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_x^{(2k)}$, $\tau_{xy}^{(2k-1)}$ после учета явных выражений для $\sigma_y^{(2j)}$. Общее решение системы (4.125) при граничных условиях (4.124) может быть использовано для нахождения собственных значений ω . В дальнейшем система уравнений (4.125) совместно с граничными условиями (4.124) называется N_1 -ой аппроксимацией исходной задачи.

Пример 4.9. Рассмотрим нулевое приближение ($N_1 = 0$) для задачи о свободных продольных колебаниях балки. В этом случае только два уравнения из системы (4.123) необходимо принять во внимание:

$$\frac{E}{\rho\omega^2} \frac{d^2\sigma_x^{(0)}}{dx^2} + \sigma_x^{(0)} - \nu\sigma_y^{(0)} = 0, \quad \frac{8E}{\rho\omega^2} \frac{\sigma_y^{(0)}}{h^2} - \sigma_y^{(0)} + \nu\sigma_x^{(0)} = 0. \quad (4.126)$$

Уравнения (4.126) сводится к ОДУ второго порядка относительно неизвестной функции $\sigma_x^{(0)}$

$$\frac{d^2\sigma_x^{(0)}}{dx^2} + \lambda^2\sigma_x^{(0)} = 0, \quad (4.127)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 h^2} \left(1 - \frac{\omega^2 \nu^2}{\omega^2 - 8\omega_0^2} \right). \quad (4.128)$$

Здесь ω_0 является характерной частотой, определяемая соотношением

$$\omega_0^2 = \frac{E}{\rho h^2}. \quad (4.129)$$

Функция $\sigma_y^{(0)}$ определяется из второго уравнения (4.126)

$$\sigma_y^{(0)} = \chi \sigma_x^{(0)}, \quad \chi = \frac{\nu \omega^2}{\omega^2 - 8\omega_0^2}. \quad (4.130)$$

Граничные условия представлены в виде

$$\sigma_x^{(0)}(0) = \sigma_x^{(0)}(l) = 0. \quad (4.131)$$

В отличие от модели Бернулли, собственное значение λ в формуле (4.127) зависит нелинейно от собственной частоты ω , а также параметров ν , h и ω_0^2 . Отметим, что волновые числа $\lambda^2(\omega)$ положительны при $\omega \in (0, \omega_1) \cup (\omega_2, \infty)$ и отрицательное при $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$, где

$$\omega_1^2 = 8\omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \frac{8\omega_0^2}{1 - \nu^2}. \quad (4.132)$$

Можно показать, что существует только тривиальное решение задачи на собственные значения (4.127), (4.131) при $\lambda^2(\omega) \leq 0$. Если выполняется неравенство $\lambda^2(\omega) > 0$, тогда решение имеет вид

$$\sigma_x^{(0)} = c \sin(\lambda x). \quad (4.133)$$

Чтобы найти собственные значения ω , характеристическое уравнение можно представить в виде

$$\frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{1 - \chi(\omega)\nu} = \gamma m, \quad \gamma = \frac{\pi h}{l}, \quad m \in \mathcal{Z}. \quad (4.134)$$

Два положительных корня ω_+ и ω_- для уравнения (4.134) явно определены как функции $m \geq 0$:

$$\omega_{\pm}(m) = \omega_0 \sqrt{\frac{8 + \gamma^2 m^2 \pm \sqrt{64 + \gamma^2 m^2 [\gamma^2 m^2 - 16(1 - 2\nu^2)]}}{2(1 - \nu^2)}}. \quad (4.135)$$

Функции $\omega_{\pm}(m)$ монотонно возрастают, $\omega_{-}(0) = 0$, $\omega_{+}(0) = \omega_2$ и справедлива следующая асимптотическая формула

$$\omega_{-}|_{m \rightarrow \infty} \rightarrow \omega_1, \quad \omega_{+}|_{m \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\omega_0 \gamma m}{\sqrt{1 - \nu^2}}.$$

Рисунок 4.7 показывает собственные частоты $\omega_{\pm}(m)$ (сплошные линии) для следующих значений параметров: $\omega_0 = 1$, $\gamma = \pi/10$, $\nu = 0.3$. Критические значения $\omega = \omega_1 \approx 2.828$ и $\omega = \omega_2 \approx 2.965$ обозначены пунктирными линиями. Наклонная штрих-пунктирная линия соответствует классическому балочному решению при тех же параметрах.

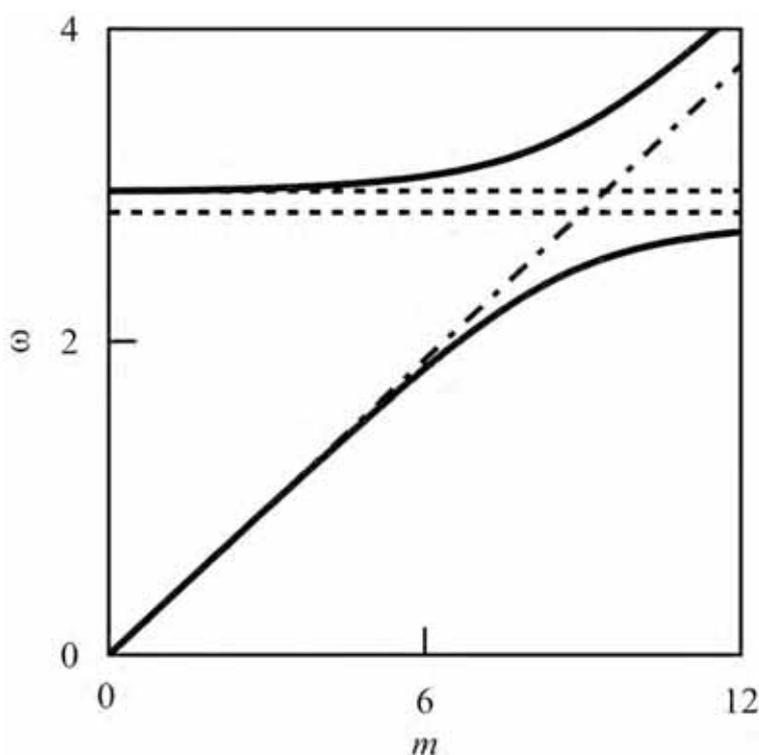


Рис. 4.7. Продольные собственные частоты ω как функции номера моды m .

Отношение амплитуд колебаний χ , введенное формулой (4.130), по сравнению с номером собственной частоты m показано на Рис. 4.8. Сплошная кривая соответствует нижней ветви $\omega_{-}(m)$ решения, а пунктирная кривая показывает верхнюю ветвь $\omega_{+}(m)$. Важной особенностью продольных движений является то, что выполняются следующие неравенства: $\chi \leq 0$ для нижней ветви и $\chi > 0$ для верхней ветви. Отметим, что максимальные зна-

чения функций $\sigma_x^{(0)}$ и $\sigma_y^{(0)}$ при $m = 9$ примерно равны друг другу для обеих корней уравнения (4.135).

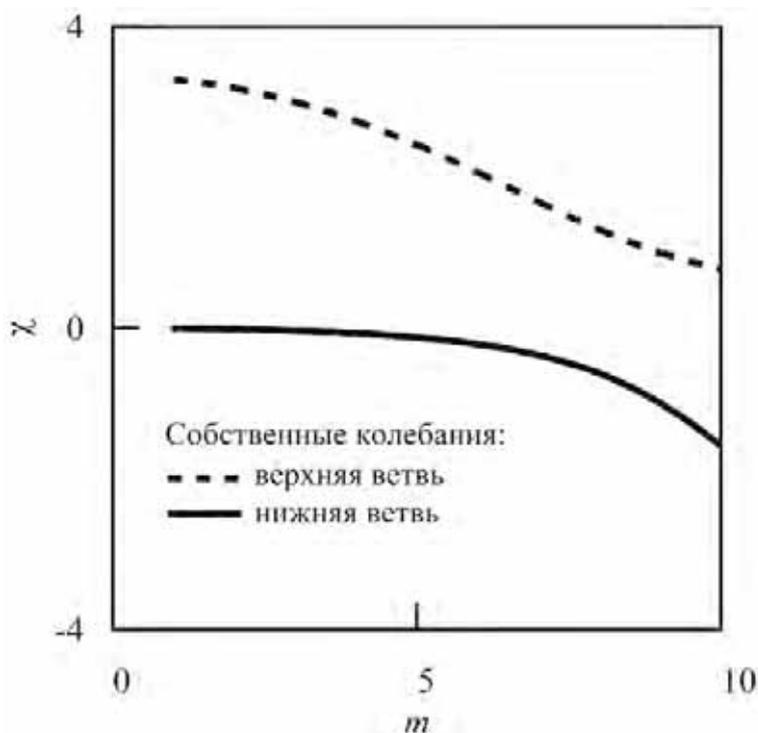


Рис. 4.8. Отношение χ продольных собственных напряжений как функция номера m .

Формы $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$ при различных значениях $\omega_{\pm}(m)$ и заданных параметрах балки приведены на Рис. 4.9 (нижняя ветвь ω_-) и Рис. 4.10 (верхняя ветвь решения ω_+). Пунктирная кривая на Рис. 4.9 соответствует напряжению $\sigma_x^{(0)}$, определенное в формуле (4.133), при $c = 1$ для первой формы колебаний $m = 1$ ($\omega_-(1) = 0.3140$). В этом случае отношение напряжений χ из уравнения (4.130) является сравнительно небольшой величиной ($|\chi| \ll 1$). Собственные функции $\sigma_x^{(0)}$ и $\sigma_y^{(0)}$ при $m = 9$ ($\omega_-(9) = 2.4803$) представлены сплошной и штрих-пунктирной кривыми, соответственно. На рисунке 4.10 собственные формы $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$ при $\omega_+(1) = 2.9667$ и $\sigma_x^{(0)} \approx \sigma_y^{(0)}$ при $\omega_+(9) = 3.3800$ показаны соответственно пунктирной, штрих-пунктирной и сплошной линиями.

Собственные формы балки для $\omega_-(1)$ и $\omega_+(1)$ показаны сплошными линиями на Рис. 4.11 и Рис. 4.12 соответственно. Недеформированная балка представлена на обоих рисунках пунктирными линиями.

Отметим, что если собственная частота принадлежит к нижней ветви ω_- ,

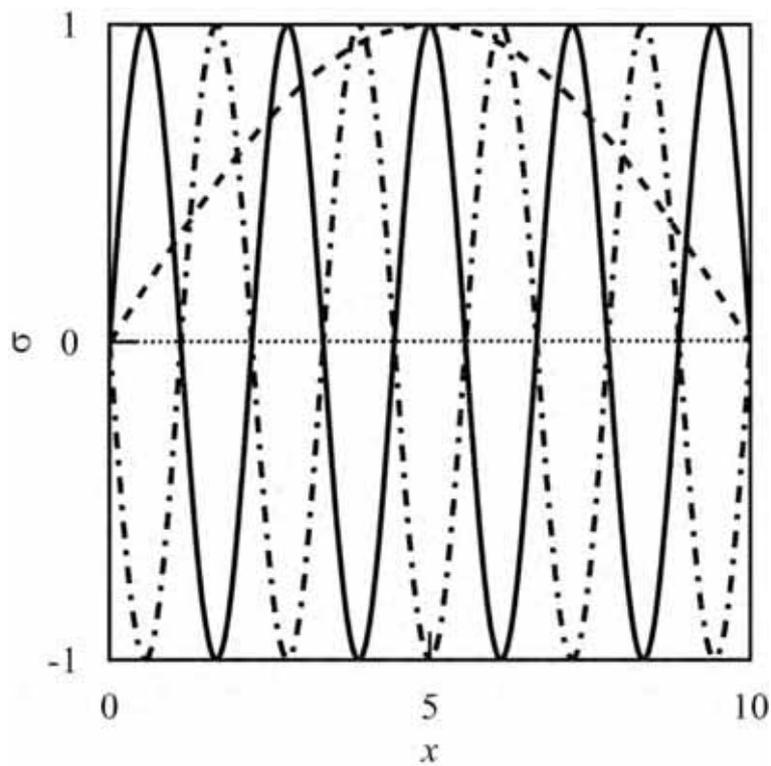


Рис. 4.9. Продольные напряжения $\sigma_x^{(0)}$ и $\sigma_y^{(0)}$ для нижней частотной ветви ω_- .

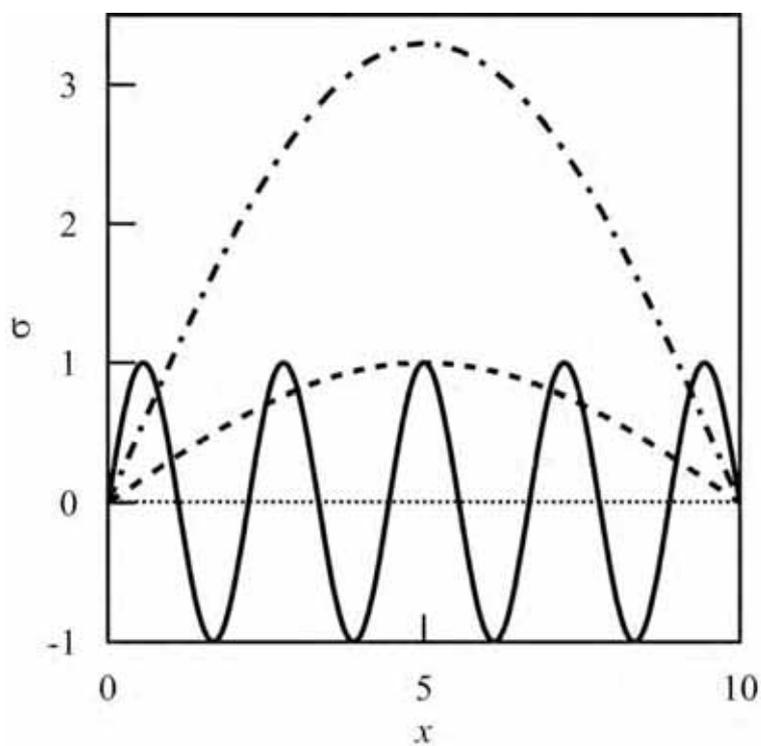
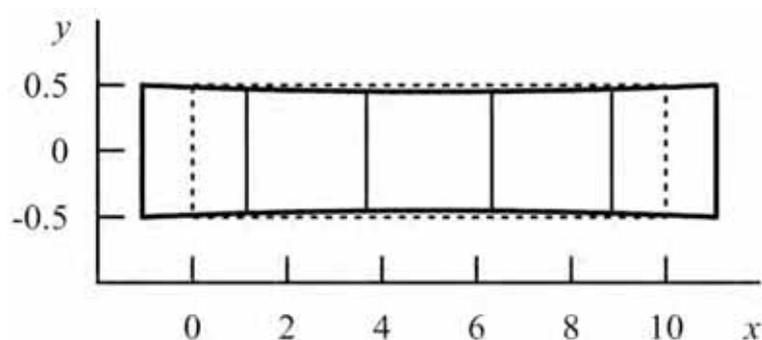
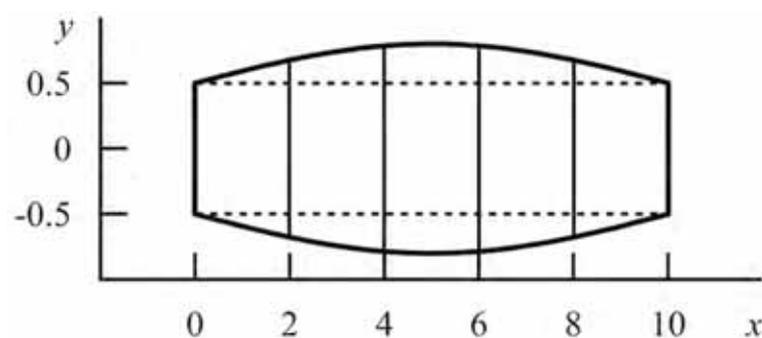


Рис. 4.10. Продольные напряжения $\sigma_x^{(0)}$ и $\sigma_y^{(0)}$ для верхней частотной ветви ω_+ .

Рис. 4.11. Продольные собственные формы для $\omega_-(1)$.Рис. 4.12. Продольные собственные формы для $\omega_+(1)$.

то вектор перемещения примерно коллинеарен оси x ($u \gg v$ при $m = 1$). В отличие от этого случая, колебания, соответствующие верхней ветви ω_+ (так называемые дышащие моды) характеризуются большими боковыми смещениями ($v \gg u$ при $m = 1$).

4.5.3. Поперечные колебания балки

Как и в случае продольных движений балки, конечномерная система ОДУ

$$\xi_x^{(2j+1)} = 0, \quad \xi_y^{(2j+1)} = 0, \quad \xi_{xy}^{(2j)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 + 1, \quad (4.136)$$

с граничными условиями

$$\sigma_x^{(2k+1)}(0) = \sigma_x^{(2k+1)}(l) = \tau_{xy}^{(2k)}(0) = \tau_{xy}^{(2k)}(l) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N_2, \quad (4.137)$$

получена для поперечных колебаний путем разложения неизвестных напряжений. Переменные $\sigma_y^{(2k+1)}$ явно выражаются из системы (4.136) через коэффициенты $\sigma_x^{(2k+1)}$, $\tau_{xy}^{(2k)}$ и их производные. Первые $2N_2 + 2$ уравнений второго порядка

$$\xi_x^{(2j+1)} = 0, \quad \xi_{xy}^{(2j)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad (4.138)$$

разрешаются относительно $2N_2 + 2$ неизвестных функций $\sigma_x^{(2k+1)}$ и $\tau_{xy}^{(2k)}$ с учетом явных выражений для $\sigma_y^{(2k+1)}$. Общее решение системы (4.136) совместно с граничными условиями (4.138) используются, чтобы найти собственные значения ω .

Пример 4.10. Если $N_2 = 0$ (нулевое приближение), то система уравнений в формуле (4.138) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_x^{(1)}}{dx^2} - \frac{8l}{h^2} \frac{d\tau_{xy}^{(0)}}{dx} + \frac{\rho\omega^2}{E} \left(\sigma_x^{(1)} - \nu\sigma_y^{(1)} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 \tau_{xy}^{(0)}}{dx^2} + \frac{1}{l} \left(\frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} + \frac{d\sigma_y^{(1)}}{dx} \right) + \left(\frac{\rho\omega^2}{G} - \frac{8}{h^2} \right) \tau_{xy}^{(0)} &= 0, \end{aligned} \quad (4.139)$$

где

$$\sigma_y^{(1)} = \frac{1}{\rho\omega^2 h^2 - 24E} \left[\rho\omega^2 h^2 \nu \sigma_x^{(1)} + 8El \frac{d\tau_{xy}^{(0)}}{dx} \right].$$

Выразим явно функцию $\tau_{xy}^{(0)}$ из системы (4.139) как

$$\tau_{xy}^{(0)} = C(\omega) \left(B_3(\omega) \frac{d^3 \sigma_x^{(1)}}{dx^3} + B_1(\omega) \frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} \right) \quad (4.140)$$

с

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{h^2}{24} \left(2(1 + \nu) - \frac{\omega^2}{2\omega_3^2} \right), \quad B_1 = 1 + \nu + \frac{1 - 2\nu\omega^2}{6\omega_3^2} - \frac{1 - \nu\omega^4}{12\omega_3^4}, \\ C &= \frac{3h^2\omega_3^4}{4(1 + \nu)l(\omega_3^2 - \omega^2)(6\omega_3^2 - \omega^2)}, \quad \omega_3^2 = \frac{4\omega_0^2}{1 + \nu}. \end{aligned}$$

Тогда получается одно ОДУ четвертого порядка:

$$A_4(\omega) \frac{d^4 \sigma_x^{(1)}}{dx^4} + A_2(\omega) \frac{d^2 \sigma_x^{(1)}}{dx^2} + A_0(\omega) \sigma_x^{(1)} = 0, \quad (4.141)$$

где

$$A_4 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_4^2}, \quad A_2 = \frac{4(1-\nu)\omega^2}{(1+\nu)h^2\omega_3^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{4\omega_3^2}\right) + \frac{12\omega^2}{h^2\omega_3^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{24\omega_0^2}\right)$$

$$A_0 = \frac{\rho\omega^2}{EJ} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_3^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_5^2}\right) \sigma_x^{(1)} = 0, \quad \omega_4^2 = 16\omega_0^2, \quad \omega_5^2 = \frac{24\omega_0^2}{1-\nu^2}.$$

Отметим, что знаменатель параметра $C(\omega)$ в формуле (4.140) равен нулю при $\omega = \omega_3$ и $\omega = \sqrt{6}\omega_3$. Эти случаи должны рассматриваться отдельно.

Граничные условия для уравнения (4.141) имеют вид

$$\sigma_x^{(1)}(0) = \sigma_x^{(1)}(l) = \tau_{xy}^{(0)}(0) = \tau_{xy}^{(0)}(l) = 0 \quad (4.142)$$

с функцией $\tau_{xy}^{(0)}$, заданной уравнением (4.140).

Корни $\kappa_j(\omega)$, $j = 1, 2, 3, 4$ биквадратного характеристического уравнения для уравнения (4.141) найдены аналитически:

$$\kappa^2 = -\frac{\omega \left(D_3\omega^3 + D_1\omega \pm \sqrt{D_6\omega^6 + D_4\omega^4 + D_2\omega^2 + D_0} \right)}{2(\omega^2 - 16\omega_0^2)\omega_0^2 h^2}. \quad (4.143)$$

с константами

$$D_3 = (1+\nu)(\nu-3), \quad D_1 = 32(2+\nu)\omega_0^2,$$

$$D_6 = (1+\nu)^4, \quad D_4 = -32(1+2\nu)(1+\nu)\omega_0^2,$$

$$D_2 = 256(6\nu^2 + 4\nu - 1)\omega_0^4, \quad D_0 = 3 \cdot 8^4 \omega_0^6.$$

Отметим, что всегда существуют два сопряженных комплексных корня

для любого ω . Рассмотрим следующие частотные зоны:

$$1) \omega \in (0, \omega_3), \quad 2) \omega \in (\omega_3, \omega_4), \quad 3) \omega \in (\omega_4, \omega_5), \quad 4) \omega \in (\omega_5, +\infty).$$

В первом и третьем интервалах, два других корня имеют действительные значения, а во второй и четвертой зонах эти корни чисто мнимые. Таким образом, для частот, которые относятся к первому и третьему интервалам, общее решение уравнения (4.141) имеет вид:

$$\sigma_x^{(1)} = c_1 \sin(|\kappa_1|x) + c_2 \cos(|\kappa_1|x) + c_3 \operatorname{sh}(|\kappa_2|x) + c_4 \operatorname{ch}(|\kappa_2|x), \quad (4.144)$$

но для других зон

$$\sigma_x^{(1)} = c_1 \sin(|\kappa_1|x) + c_2 \cos(|\kappa_1|x) + c_3 \sin(|\kappa_2|x) + c_4 \cos(|\kappa_2|x). \quad (4.145)$$

Здесь $|\kappa_1|$ и $|\kappa_2|$ это волновые числа.

Собственные числа ω найдены из условия существования нетривиальных решений либо уравнений (4.144) либо (4.145) при однородных граничных условиях (4.142).

Корреляция между корнями κ_j характеристического уравнения и собственными частотами ω представлена на Рис. 4.13 для безразмерных значений параметров $\omega_0 = 1$, $h = 1$ и $\nu = 0.3$. Зависимость частоты ω от значения волнового числа для чисто мнимых корней κ_j показана сплошными линиями. Штрих-пунктирные линии соответствуют вещественным корням. Критические значения $\omega = \omega_k$ ($k = 3, 4, 5$) обозначены точечными линиями. Пунктирная кривая характеризует решение классической задачи на собственные значения (второе уравнение из (4.117)).

Низшие частоты ($m \leq 12$) соответствуют решению (4.144) (первая зона). Для выбранных значений параметров системы, критическая частота примерно равна $\omega_3 \approx 1.75$. Стоит отметить, что число собственных значений,

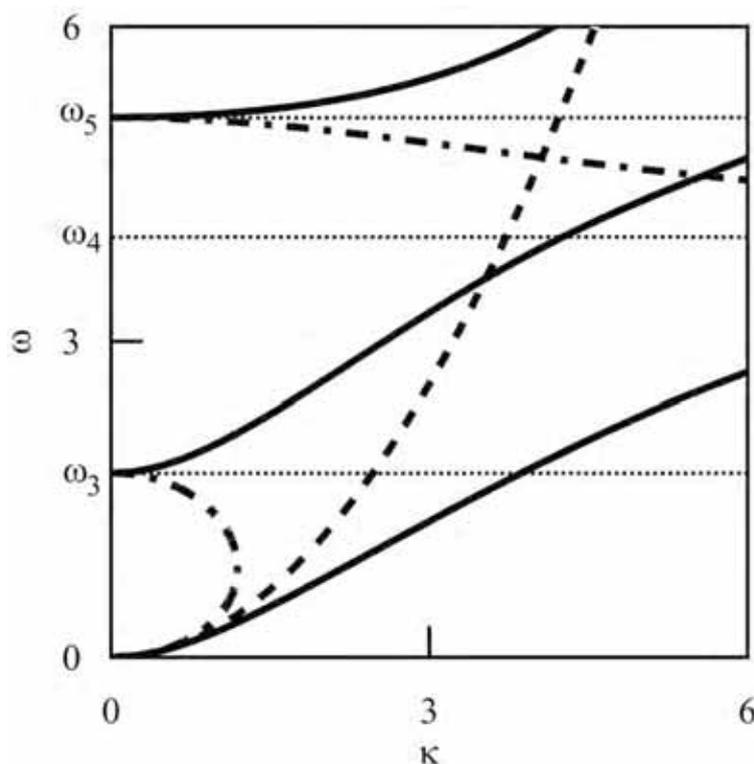


Рис. 4.13. Поперечные собственные частоты ω как функции волнового числа $|\kappa|$.

соответствующих решению (4.144), всегда конечно и растет, когда значение параметра $\eta = \frac{h}{2l}$ уменьшается.

Поведение собственных значений от номера моды представлено на Рис. 4.14 сплошной линией. Пунктирная кривая показывает классические частоты ω_c поперечных колебаний, получаемых в соответствии с балочной теории Эйлера-Бернулли (второе уравнение в (4.117)). Отметим, что классические собственные значения, как функция числа m , является квадратичной, в то время как эта зависимость полученных из МИДС является более или менее линейной.

Собственные формы $u(x, h/2)$ и $v(x, 0)$ определяются соотношениями (4.120) для различных значений, которые приведены на Рис. 4.15 ($\omega < \omega_3$). Перемещения $v(x, 0)$ срединной линии балки обозначены сплошными линиями на этом рисунке. Эти функции соответствуют собственным напряжениям $\sigma_x^{(1)}$, определенным решением (4.144) при $c_1 = 1$ для $m = 1$ и $m = 12$. Кривая с одним максимумом построена при $m = 1$, а многоэкстремальная кривая

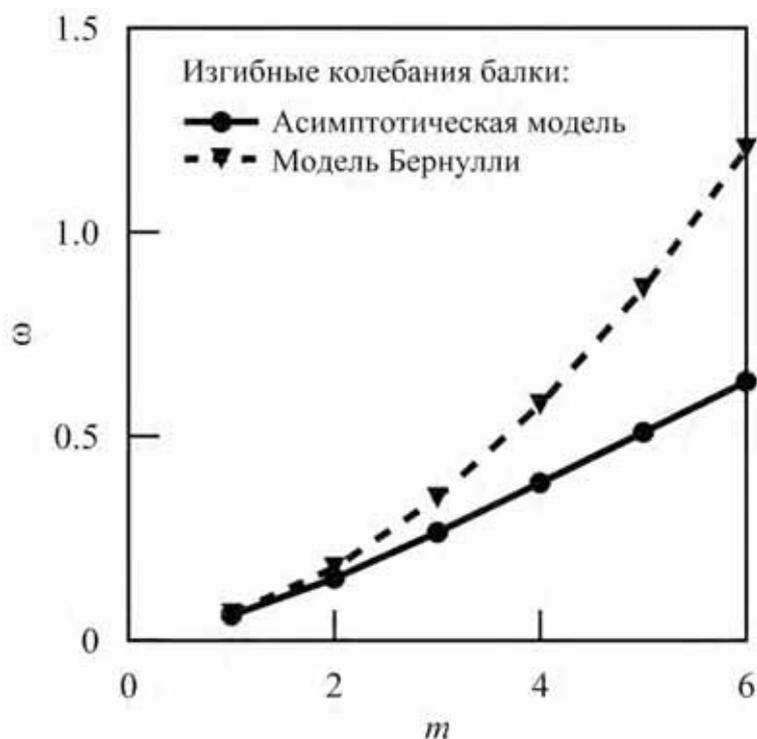


Рис. 4.14. Изгибные собственные частоты ω и ω_c как функции номера моды m .

соответствует случаю $m = 12$. Переменные $u(x, h/2)$ при $m = 1$ и $m = 12$ показаны пунктиром. Монотонная кривая соответствует $m = 1$.

Стоит отметить, что собственные формы при $m = 1$ характеризуются только изгибом (деформации сдвига практически отсутствуют), тогда как влияние деформации сдвига на собственные формы увеличивается, когда число M растет. При $m = 12$ функция $u(x, h/2)$ всюду положительна.

Форма балки резко изменяется, когда значение собственной частоты проходит через точку бифуркации ω_3 . На рисунке 4.16 собственные формы $u(x, h/2)$ (пунктирная кривая) и $v(x, 0)$ (сплошная линия) построены для второй частотной зоны ($\omega > \omega_3$ при $m = 13$).

Собственные формы поперечных колебаний балки для $\omega(1) \approx 0.061$ и $\omega(12) \approx 1.741$ изображенные на Рис. 4.17 и 4.18 соответственно. Форма колебаний балки показана сплошными линиями; недеформированная форма балки представлена пунктирными линиями. Важной особенностью боковых движений является то, что деформации сдвига существенно влияют на соб-

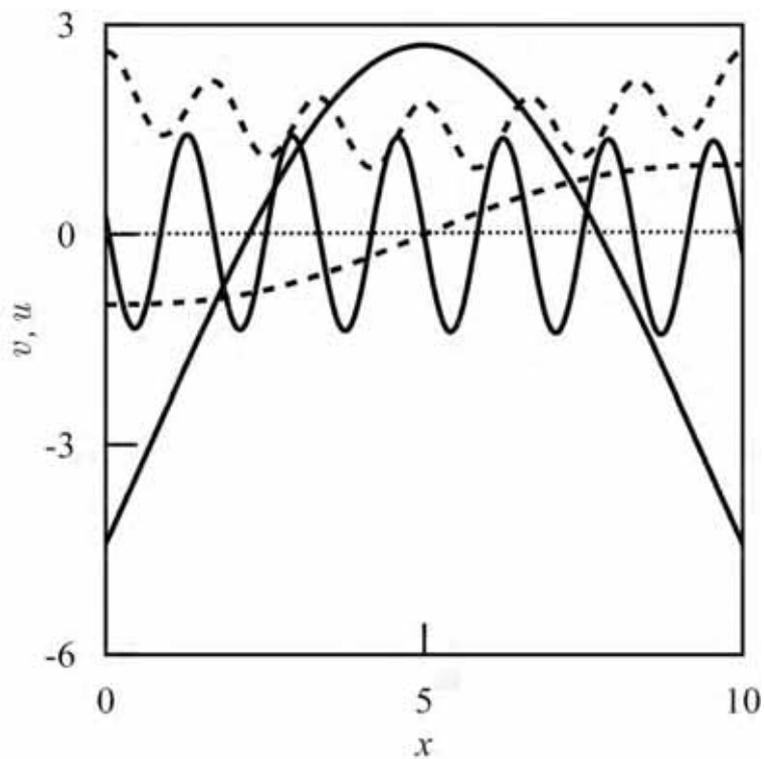


Рис. 4.15. Поперечные собственные формы u и v для $\omega < \omega_3$.

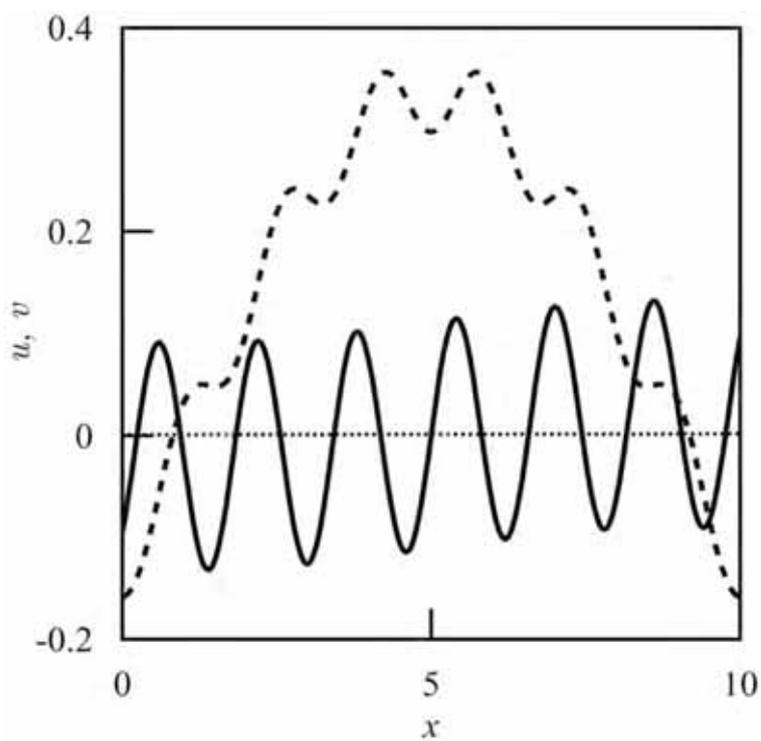


Рис. 4.16. Поперечные собственные формы u и v при $\omega > \omega_3$, $n = 13$.

Таблица 4.5

Собственные частоты ω и ω_c для поперечных колебаний при $\eta = 0.005$.

m	1	2	3	4	5	6
ω	0.000645	0.00178	0.00348	0.00573	0.00853	0.0118
ω_c	0.000646	0.00178	0.00349	0.00577	0.00862	0.0120
$\Delta\omega, \%$	0.0598	0.192	0.390	0.658	0.992	1.390

ственные формы колебаний балки для старших мод.

Из рисунка 4.18 видно, что все сечения балки (тонкие сплошные линии) имеют наклоны в одном направлении.

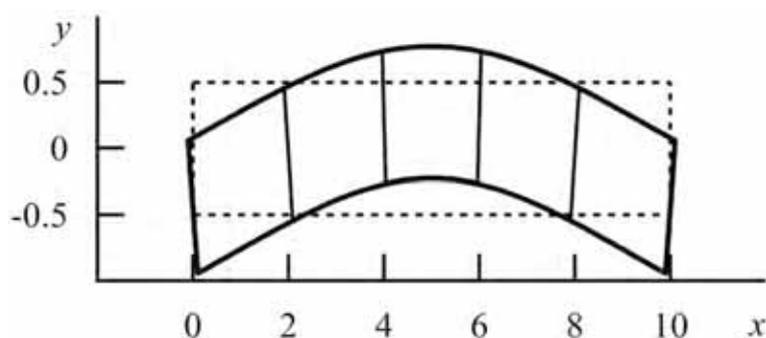


Рис. 4.17. Поперечные деформации балки для первой собственной частоты $\omega(1)$.

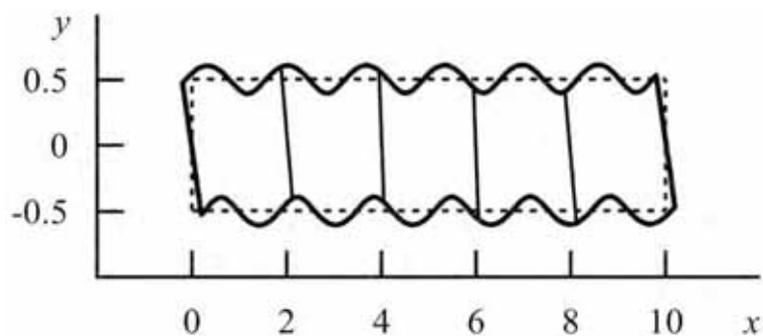


Рис. 4.18. Поперечные деформации балки для собственной частоты $\omega(12)$.

Отметим, что разница между собственными значениями, полученная из МИДС (ω) и классического подхода (ω_c), уменьшается вместе с параметром η . Соответствующие собственные значения балки ω и ω_c для естественных поперечных колебаний при значениях параметров $\omega_0 = 1$, $h = 1$, $l = 100$, $\nu = 0.3$ приведены в таблице 8.3.

4.6. Трехмерные задачи статики

Рассмотрим упругое тело (балку), изображенное на Рис. 4.19, которое занимает трехмерную область

$$\Omega = \{x, y, z : 0 < x < l, \quad |y| < h, \quad |z| < b\},$$

где l представляет собой длину тела и $2h \times 2b$ – размеры его прямоугольного сечения. Похожие задачи рассматривались рядом авторов (см., например, [31], [35], [50], [78]). Напряженно-деформированное состояние тела описывается системой уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon^0 - C^{-1} : \sigma = 0, \quad r = \nabla \cdot \sigma = 0; \\ \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z^0 = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{xz}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.146)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} q &= \sigma \cdot n = 0, \quad y = \pm h, \quad z = \pm b, \\ u &= v = w = 0, \quad x = 0, \\ q &= q_l, \quad x = l. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Здесь $q_l(y, z)$ – заданная вектор функция внешней нагрузки; r является равновесным вектором; u , v и w – смещения вдоль осей x , y и z , соответственно; ε_α и $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = x, y, z$ являются компонентами тензора деформации ε .

Задача заключается в том, чтобы найти перемещения u^* , v^* , w^* и тензор напряжений σ^* , которые удовлетворяют уравнениям (4.146) и граничным условиям (4.147). Асимптотический подход, рассматриваемый здесь, основан

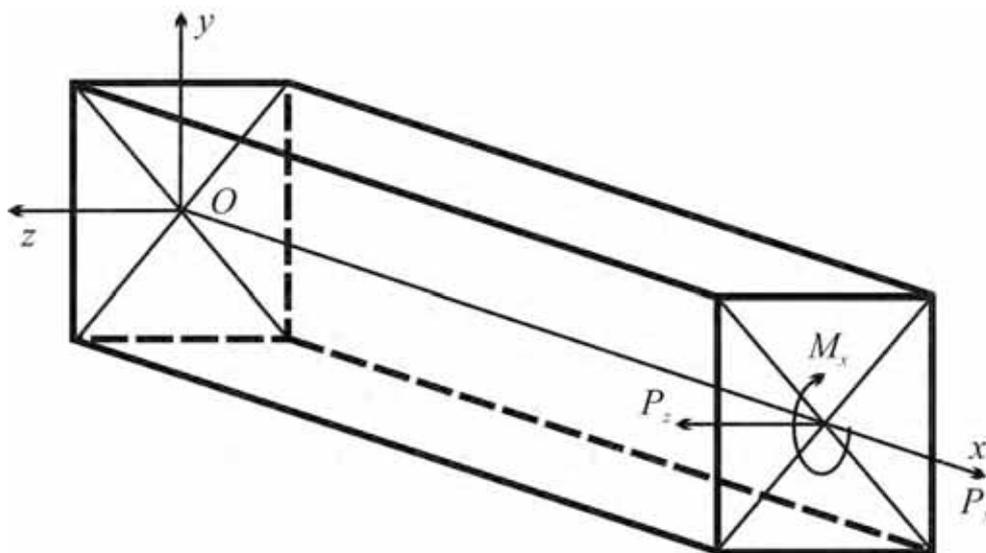


Рис. 4.19. Призматическая балка с прямоугольным поперечным сечением.

на МИДС и разложении функций перемещений и напряжений в степенной ряд по координатам y и z . Асимптотики решений трехмерных уравнений теории упругости для сжимаемых и несжимаемых тел представлены в [23]. После выполнения граничных условий на $y = \pm h$ и $z = \pm b$, аппроксимации u и σ конечной размерности могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i+j=0}^N u^{(i,j)} y^i z^j, & v &= \sum_{i+j=0}^N v^{(i,j)}(x) y^i z^j, \\
 w &= \sum_{i+j=0}^N w^{(i,j)}(x) y^i z^j; \\
 \sigma_x &= \sum_{i+j=0}^N \sigma_x^{(i,j)} y^i z^j, & \tau_{yz} &= \sum_{i+j=0}^N \tau_{yz}^{(i,j)} (h^2 - y^2)(b^2 - z^2) y^i z^j, \\
 \sigma_y &= \sum_{i+j=0}^N \sigma_y^{(i,j)} (h^2 - y^2) y^i z^j, & \sigma_z &= \sum_{i+j=0}^N \sigma_z^{(i,j)} (b^2 - z^2) y^i z^j, \\
 \tau_{xy} &= \sum_{i+j=0}^N \tau_{xy}^{(i,j)} (h^2 - y^2) y^i z^j, & \tau_{xz} &= \sum_{i+j=0}^N \tau_{xz}^{(i,j)} (b^2 - z^2) y^i z^j.
 \end{aligned} \tag{4.148}$$

Здесь $u^{(i,j)}$, $v^{(i,j)}$, $w^{(i,j)}$, $\sigma_\alpha^{(i,j)}$ и $\tau_{\alpha\beta}^{(i,j)}$ для $\alpha, \beta = x, y, z$ – неизвестные функции координаты x . Тогда, из уравнений (4.146) и (4.148) следует, что вектор r и

тензор ξ описываются конечными суммами

$$r = \sum_{k+m=0}^{N+3} r^{(k,m)} y^k z^m, \quad \xi = \sum_{k+m=0}^{N+4} \xi^{(k,m)} y^k z^m, \quad (4.149)$$

где $r^{(k,m)}$ и $\xi^{(k,m)}$ – линейные дифференциальные соотношения, выраженные через неизвестные функции из уравнения (4.148). Предполагается также, что вектор q_l является полиномом относительно координат y и z . Отметим, что граничные условия (4.147) должны быть совместны.

Размышления о структуре полиномиальных решений системы уравнений теории упругости в напряжениях можно найти в [24].

Алгоритм нахождения $u^{(i,j)}$, $v^{(i,j)}$, $w^{(i,j)}$, $\sigma_{\alpha}^{(i,j)}$ и $\tau_{\alpha\beta}^{(i,j)}$ состоит из последовательных шагов (см. [183]). На первом этапе, необходимо удовлетворить граничным условиям $q = 0$ на гранях $y = \pm h$ и $z = \pm b$. После этого система ОДУ состоит из:

$$r^{(k,m)} = 0, \quad \xi^{(k,m)} = 0, \quad k + m \leq N + 4 \quad (4.150)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} q^{(k,m)} &= \sigma^{(k,m)} \cdot n = 0, \quad y = \pm h, \quad z = \pm b, \\ u^{(k,m)} &= v^{(k,m)} = w^{(k,m)} = 0, \quad x = 0, \\ q^{(k,m)} &= q_l^{(k,m)}, \quad x = l, \quad q_l = \sum_{i+j=0}^M q_l^{(i,j)} y^i z^j, \end{aligned} \quad (4.151)$$

которые следуют из уравнений (4.147) и (4.148). Считается, что $N \geq M$.

Отметим, что конечномерная система (4.150) является переопределенной, так как число уравнений превышает число переменных. Для того, чтобы составить совместную краевую задачу, приравняем нулю все коэффициенты $r^{(k,m)}$ и необходимое количество $\xi^{(k,m)}$ при самых низких степенях полино-

Таблица 4.6

Свойства симметрии аппроксимируемых функции ($i = 2m, m = 1, 2, \dots$).

	Растяжение		Изгиб ось- y		Изгиб ось- z		Кручение	
	y^j, N	z^k, N	y^j, N	z^k, N	y^j, N	z^k, N	y^j, N	z^k, N
$u, r_x,$	чет.	чет.	чет.	нечет.	нечет.	чет.	нечет.	нечет.
$\sigma_\alpha, \xi_\alpha$	i	i	i	$i + 1$	$i + 1$	i	$i - 1$	$i - 1$
$v, r_y,$	нечет.	чет.	нечет.	нечет.	чет.	чет.	чет.	нечет.
τ_{xy}, ξ_{xy}	$i - 1$	$i - 2$	$i - 1$	$i - 1$	i	i	$i - 2$	$i - 1$
$w, r_z,$	чет.	нечет.	чет.	чет.	нечет.	нечет.	нечет.	чет.
τ_{xz}, ξ_{xz}	$i - 2$	$i - 1$	i	i	$i - 1$	$i - 1$	$i - 1$	$i - 2$
τ_{yz}, ξ_{yz}	нечет.	нечет.	нечет.	чет.	чет.	нечет.	чет.	чет.
	$i - 3$	$i - 3$	$i - 1$	$i - 2$	$i - 2$	$i - 1$	$i - 2$	$i - 2$

миальных разложений ξ в формуле (4.153). После решения этой приведенной системы и учета граничных условий (4.151), оставшиеся неопределенные слагаемые в (4.149) могут быть использованы для оценки качества получаемых приближенных полей перемещений и напряжений.

Анализируя систему уравнений (4.150) и граничные условия (4.151), можно показать, что существует четыре независимые подсистемы, описывающие состояние сжатия-растяжения, изгиб относительно осей y и z , а также кручение упругой балки. Такое разложение является типичным для любой полиномиальной аппроксимации перемещений и напряжений и обусловлена симметрией области Ω относительно координатных плоскостей xy и xz . Свойства симметрии (четные или нечетные степени координат y и z) и минимальная требуемая степень аппроксимации представлены в таблице 4.6 для различных напряженно-деформированных состояний балки. Здесь m является положительным целым числом, указывающее порядок задачи и индекс α означает буквы x, y, z . Соответствующие функции отсутствуют, если $N < 0$.

Пример 4.11. В качестве примера, рассмотрим однородную и изотропную консольную балку с квадратным сечением и размером $a = h$. Левый конец балки зажат в соответствии с формулой (4.147). Все боковые грани

свободны от нагрузки, объемные силы отсутствуют, а растягивающие напряжения $q_l = \{1, 0, 0\}^T$ равномерно распределены по концевому поперечному сечению при $x = l$. Это означает, что растягивающая сила $P_x = 4h$ приложена к свободному концу балки (см. Рис. 4.19).

Чтобы составить и решить совместную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определим степень приближения $N = 2m = 2$ для функции u в соответствии с таблицей 4.6. Тогда, конечномерные перемещения из уравнения (4.148) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} u &= u^{(0,0)}(x) + u^{(0,2)}(x)z^2 + u^{(2,0)}(x)y^2, \\ v &= v^{(1,0)}(x)y, \quad w = w^{(0,1)}(x)z. \end{aligned} \tag{4.152}$$

Компоненты тензора напряжения σ , точно удовлетворяющие однородные граничные условия на боковых гранях, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(0,0)}(x) + \sigma_x^{(2,0)}(x)y^2 + \sigma_x^{(0,2)}(x)z^2, \\ \sigma_y &= \left(\sigma_y^{(0,0)}(x) + \sigma_y^{(2,0)}(x)y^2 + \sigma_y^{(0,2)}(x)z^2 \right) (y^2 - h^2), \\ \sigma_z &= \left(\sigma_z^{(0,0)}(x) + \sigma_z^{(2,0)}(x)y^2 + \sigma_z^{(0,2)}(x)z^2 \right) (z^2 - h^2), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(1,0)}(x)y(y^2 - h^2), \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^{(1,0)}(x)z(z^2 - h^2). \end{aligned} \tag{4.153}$$

Учитывая формулу (4.153), уравнения равновесия из (4.146) можно пере-

писать в виде

$$\begin{aligned}
r_x &= \frac{d\sigma_x^{(0,0)}}{dx} - \tau_{xy}^{(0,1)}h^2 - \tau_{xz}^{(1,0)}h^2 \\
&+ \left(\frac{d\sigma_x^{(2,0)}}{dx} + 3\tau_{xy}^{(1,0)} \right) y^2 + \left(\frac{d\sigma_x^{(0,2)}}{dx} + 3\tau_{xz}^{(0,1)} \right) z^2 = 0, \\
r_y &= - \left(\frac{d\tau_{xy}^{(1,0)}}{dx} h^2 - 2\sigma_y^{(0,0)} + 2\sigma_y^{(2,0)}h^2 \right) y \\
&+ \left(\frac{d\tau_{xy}^{(1,0)}}{dx} + 4\sigma_y^{(2,0)} \right) y^3 + 2\sigma_y^{(0,2)}yz^2 = 0, \\
r_z &= - \left(\frac{d\tau_{xz}^{(0,1)}}{dx} h^2 - 2\sigma_z^{(0,0)} + 2\sigma_z^{(0,2)}h^2 \right) z \\
&+ 2\sigma_z^{(2,0)}y^2z + \left(\frac{d\tau_{xz}^{(0,1)}}{dx} + 4\sigma_z^{(0,2)} \right) z^3 = 0
\end{aligned} \tag{4.154}$$

Решение уравнения (4.154) находится из условия, что все коэффициенты при соответствующих степенях переменных y и z равны нулю. Все соотношения (4.154) кроме одного решаются алгебраически относительно неизвестных функций напряжений. В результате остается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, например,

$$\frac{d\sigma_x^{(0,0)}}{dx} + \frac{1}{3} \frac{d}{dx} \left(\sigma_x^{(0,2)} + \sigma_x^{(2,0)} \right) h^2 = 0. \tag{4.155}$$

С учетом формулы (4.154), компоненты тензора напряжений, введенные в

формуле (4.153), имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^{(0,0)} + \sigma_x^{(2,0)}y^2 + \sigma_x^{(0,2)}z^2, \quad \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_y &= \frac{1}{12} \frac{d^2\sigma_x^{(2,0)}}{dx^2}(y^2 - h^2)^2, \quad \sigma_z = \frac{1}{12} \frac{d^2\sigma_x^{(0,2)}}{dx^2}(z^2 - h^2)^2, \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{3} \frac{d\sigma_x^{(2,0)}}{dx}y(y^2 - h^2), \quad \tau_{xz} = -\frac{1}{3} \frac{d\sigma_x^{(0,2)}}{dx}z(z^2 - h^2).\end{aligned}\tag{4.156}$$

Для того чтобы удовлетворить определяющее соотношение из уравнения (4.146), следующие шесть уравнений покомпонентно составляются после учета формул (4.152) и (4.156):

$$\begin{aligned}\xi_x &= \xi_x^{(0,0)} + \xi_x^{(2,0)}y^2 + \xi_x^{(0,2)}z^2 + \xi_x^{(4,0)}y^4 + \xi_x^{(0,4)}z^4 = 0, \\ \xi_y &= \xi_y^{(0,0)} + \xi_y^{(2,0)}y^2 + \xi_y^{(0,2)}z^2 + \xi_y^{(4,0)}y^4 + \xi_y^{(0,4)}z^4 = 0, \\ \xi_z &= \xi_z^{(0,0)} + \xi_z^{(2,0)}y^2 + \xi_z^{(0,2)}z^2 + \xi_z^{(4,0)}y^4 + \xi_z^{(0,4)}z^4 = 0, \\ \xi_{xy} &= \xi_{xy}^{(1,0)}y + \xi_{xy}^{(3,0)}y^3 = 0, \quad \xi_{xz} = \xi_{xz}^{(0,1)}z + \xi_{xz}^{(0,3)}z^3 = 0, \\ \xi_{yz} &= 0\end{aligned}\tag{4.157}$$

с

$$\begin{aligned}\xi_y^{(4,0)} &= \frac{1}{12E} \frac{d^2\sigma_x^{(2,0)}}{dx^2}, \quad \xi_z^{(0,4)} = \frac{1}{12E} \frac{d^2\sigma_x^{(0,2)}}{dx^2}, \\ \xi_x^{(0,0)} &= -\frac{du^{(0,0)}}{dx} - \nu h^4 \left(\xi_y^{(4,0)} + \xi_z^{(0,4)} \right) + \frac{\sigma_x^{(0,0)}}{E}, \\ \xi_x^{(2,0)} &= -\frac{du^{(2,0)}}{dx} + 2\nu h^2 \xi_y^{(4,0)} + \frac{\sigma_x^{(2,0)}}{E}, \quad \xi_x^{(4,0)} = -\nu \xi_y^{(4,0)}, \\ \xi_x^{(0,2)} &= -\frac{du^{(0,2)}}{dx} + 2\nu h^2 \xi_z^{(0,4)} + \frac{\sigma_x^{(0,2)}}{E}, \quad \xi_x^{(0,4)} = -\nu \xi_z^{(0,4)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_y^{(0,0)} &= h^4 \xi_y^{(4,0)} - h^4 \nu \xi_z^{(0,4)} - \frac{\nu}{E} \sigma_x^{(0,0)} - v^{(1,0)}, & \xi_y^{(0,4)} &= -\nu \xi_z^{(0,4)}, \\
\xi_y^{(2,0)} &= -2h^2 \xi_y^{(4,0)} - \frac{\nu}{E} \sigma_x^{(2,0)}, & \xi_y^{(0,2)} &= 2h^2 \nu \xi_z^{(0,4)} - \frac{\nu}{E} \sigma_x^{(0,2)}, \\
\xi_z^{(0,0)} &= h^4 \xi_z^{(0,4)} - h^4 \nu \xi_y^{(4,0)} - \frac{\nu}{E} \sigma_x^{(0,0)} - w^{(0,1)}, & \xi_z^{(4,0)} &= -\nu \xi_y^{(4,0)}, \\
\xi_z^{(2,0)} &= 2h^2 \nu \xi_y^{(4,0)} - \frac{\nu}{E} \sigma_x^{(2,0)}, & \xi_z^{(0,2)} &= -2h^2 \xi_z^{(0,4)} - \frac{\nu}{E} \sigma_x^{(0,2)}; \\
\xi_{xy}^{(1,0)} &= -\frac{1}{2} \frac{dv^{(1,0)}}{dx} + \frac{h^2}{6G} \frac{d\sigma_x^{(2,0)}}{dx} - u^{(2,0)}, & \xi_{xy}^{(3,0)} &= -\frac{1}{6G} \frac{d\sigma_x^{(2,0)}}{dx}, \\
\xi_{xz}^{(0,1)} &= -\frac{1}{2} \frac{dw^{(0,1)}}{dx} + \frac{h^2}{6G} \frac{d\sigma_x^{(0,2)}}{dx} - u_1^{(0,2)}, & \xi_{xz}^{(0,3)} &= -\frac{1}{6G} \frac{d\sigma_x^{(0,2)}}{dx}.
\end{aligned}$$

Отметим, что только восемь неизвестных функций

$$\{\sigma_x^{(0,0)}, \sigma_x^{(2,0)}, \sigma_x^{(0,2)}, u^{(0,0)}, u^{(2,0)}, u^{(0,2)}, v^{(1,0)}, w^{(0,1)}\} \quad (4.158)$$

имеются в наличии для того, чтобы точно удовлетворить систему уравнений (4.157). В то же время, необходимо разрешить 19 выражений, т.е. коэффициенты при соответствующих степенях координат в уравнениях (4.157).

Чтобы составить совместную краевую задачу, выберем следующие коэффициенты при нижних степенях y и z в разложениях (4.157). Из выражения для компоненты ξ_x возьмем три коэффициента (нулевая и квадратичная степени)

$$\begin{aligned}
\frac{\nu h^4}{12E} \frac{d^2}{dx^2} \left(\sigma_x^{(2,0)} + \sigma_x^{(0,2)} \right) + \frac{du^{(0,0)}}{dx} - \frac{\sigma_x^{(0,0)}}{E} &= 0, \\
\frac{\nu h^2}{6E} \frac{d^2 \sigma_x^{(2,0)}}{dx^2} - \frac{du^{(2,0)}}{dx} + \frac{\sigma_x^{(2,0)}}{E} &= 0, \\
\frac{\nu h^2}{6E} \frac{d^2 \sigma_x^{(0,2)}}{dx^2} - \frac{du^{(0,2)}}{dx} + \frac{\sigma_x^{(0,2)}}{E} &= 0.
\end{aligned} \quad (4.159)$$

Из оставшихся компонентов тензора ξ , выбираются только коэффициенты

при нулевой и первой степени

$$\begin{aligned}
\frac{h^4}{12E} \frac{d^2}{dx^2} \left(\sigma_x^{(2,0)} - \nu \sigma_x^{(0,2)} \right) - \frac{\nu}{E} \sigma_x^{(0,0)} - u^{(1,0)} &= 0, \\
\frac{h^4}{12E} \frac{d^2}{dx^2} \left(\sigma_x^{(0,2)} - \nu \sigma_x^{(2,0)} \right) - \frac{\nu}{E} \sigma_x^{(0,0)} - w^{(0,1)} &= 0, \\
\frac{h^2}{6G} \frac{d\sigma_x^{(2,0)}}{dx} - u^{(2,0)} - \frac{1}{2} \frac{dv^{(1,0)}}{dx} &= 0, \\
\frac{h^2}{6G} \frac{d\sigma_x^{(0,2)}}{dx} - u^{(0,2)} - \frac{1}{2} \frac{dw^{(0,1)}}{dx} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.160}$$

Таким образом, есть 8 соотношений (4.155), (4.159), (4.160) для нахождения неизвестных функции (4.158).

Система уравнений (4.155), (4.159), (4.160) может быть сведена к пяти обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. Таким образом, необходимо задать 10 граничных условия на концах балки. Первые восемь граничных условий следуют из постановки задачи. Так как левый конец балки зажат, то

$$u^{(0,0)} = u^{(2,0)} = u^{(0,2)} = v^{(1,0)} = w^{(0,1)} = 0, \quad x = 0. \tag{4.161}$$

Условия равномерного растяжения на правом конце балки определяют функции нормальных напряжений в этой точке:

$$\sigma_x^{(0,0)} = 1, \quad \sigma_x^{(2,0)} = \sigma_x^{(0,2)} = 0, \quad x = l. \tag{4.162}$$

Остальные два условия (нулевые напряжения сдвига на свободном конце балки) следуют из формулы (4.156) в соответствии с

$$\frac{d\sigma_x^{(0,2)}}{dx} = \frac{d\sigma_x^{(2,0)}}{dx} = 0, \quad x = l. \tag{4.163}$$

В этом случае, система линейных дифференциальных уравнений (4.155), (4.159), (4.160) может быть сведена к одному уравнению десятого порядка относительно, например, функции $\sigma_x^{(0,0)}$ (ввиду громоздкости, это уравнения не приводится). Решение этого уравнения ищется в виде $\sigma_x^{(0,0)} = e^{\lambda x h^{-1}}$. Тогда, имеется следующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 ((1 + \nu)\lambda^4 + 4(2 - \nu)\lambda^2 - 24) ((1 + \nu)\lambda^4 - 4(2 + \nu)\lambda^2 + 24) = 0 \quad (4.164)$$

для определения неизвестных собственных значений λ . Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения для $\sigma_x^{(0,0)}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0,0)} = & C_1 + C_2 x \\ & + \sum_{j=0}^1 \left[C_{4j+3} \operatorname{sh} \left(\alpha_j \frac{x}{h} \right) \sin \left(\beta_j \frac{x}{h} \right) + C_{4j+4} \operatorname{sh} \left(\alpha_j \frac{x}{h} \right) \cos \left(\beta_j \frac{x}{h} \right) \right. \\ & \left. + C_{4j+5} \operatorname{ch} \left(\alpha_j \frac{x}{h} \right) \sin \left(\beta_j \frac{x}{h} \right) + C_{4j+6} \operatorname{ch} \left(\alpha_j \frac{x}{h} \right) \cos \left(\beta_j \frac{x}{h} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Здесь α_j и β_j – действительные и мнимые части корней характеристического уравнения (4.164) с

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \sqrt{\frac{2 + \nu + \sqrt{6 + 6\nu}}{1 + \nu}}, \quad \beta_0 = \sqrt{\frac{-2 - \nu + \sqrt{6 + 6\nu}}{1 + \nu}}, \\ \alpha_1 = \sqrt{\frac{2 - \nu + \sqrt{6 - 6\nu}}{1 - \nu}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{-2 + \nu + \sqrt{6 - 6\nu}}{1 - \nu}}. \end{aligned} \quad (4.166)$$

Неизвестные константы C_j , $j = 1, \dots, 10$ находятся из граничных условий (4.161)–(4.163).

Следующие механические и геометрические безразмерные параметры были выбраны: модуль Юнга $E = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, длина балки $l = 10$, размер поперечного сечения $h = b = 1$.

Для произвольного порядка аппроксимации m введенного в таблице 4.6, система ОДУ относительно функций перемещений и напряжений состоит из всех равновесных соотношений $r_x^{(2i,2j)} = r_y^{(2i+1,2j)} = r_z^{(2i,2j+1)} = 0$, $i + j \leq m$ ($3(m+1)(m+2)/2$ уравнений) и части определяющих соотношений из уравнения (4.150), соответствующих низшим степеням полиномиального разложения для тензора ξ .

Берутся следующие уравнения

$$\xi_x^{(2i,2j)} = 0, \quad i + j \leq m;$$

$$\xi_y^{(2i,2j)} = \xi_z^{(2i,2j)} = \xi_{xy}^{(2i+1,2j)} = \xi_{xz}^{(2i,2j+1)} = 0, \quad i + j \leq m - 1;$$

$$\xi_{yz}^{(2i+1,2j+1)} = 0, \quad i + j \leq m - 2.$$

Эта система уравнений вместе с граничными условиями (4.151), заданными на концах балки, позволяет корректно сформулировать краевую задачу для любого целого $M > 0$.

Приближенная краевая задача, соответствующая числу M , характеризуется следующими параметрами:

- общее число переменных – $(9m^2 + 15m + 8)/2$;
- число граничных условий на концах балки – $(m+1)(3m+2)$;
- количество определяющих соотношений в уравнении (4.150) равно $3m^2 + 12m + 8$.

Неудовлетворенные коэффициенты уравнения (4.150) (Общее количество $9m + 7$) используются для анализа качества численного решения на основе теоремы 2.1, приведенной в разделе 2.6..

Распределение функции напряжения σ_x вдоль оси балки x при $y = z = 0$ для $N = 8$ показано на Рис. 4.20 сплошной линией. Элементарное решение простого растяжения призматического стержня (однородное состояние $\sigma_x = \text{const}$, см. [95]) хорошо известно в линейной теории упругости. Как

можно видеть из Рис. 4.20, защемленный конец балки оказывает существенное влияние на распределение растягивающих напряжений вдоль балки. Это влияние распространяется на значительное расстояние (более 20 % от длины балки при заданных параметрах). В этой области распределения перемещений и напряжений заметно меняется в поперечном сечении.

Характерная деформация поперечного сечения балки при $x = 1$ изображена на Рис. 4.21. Следует отметить, что гипотеза Бернулли о плоских сечениях [28] существенно нарушается в окрестности зажатого сечения.

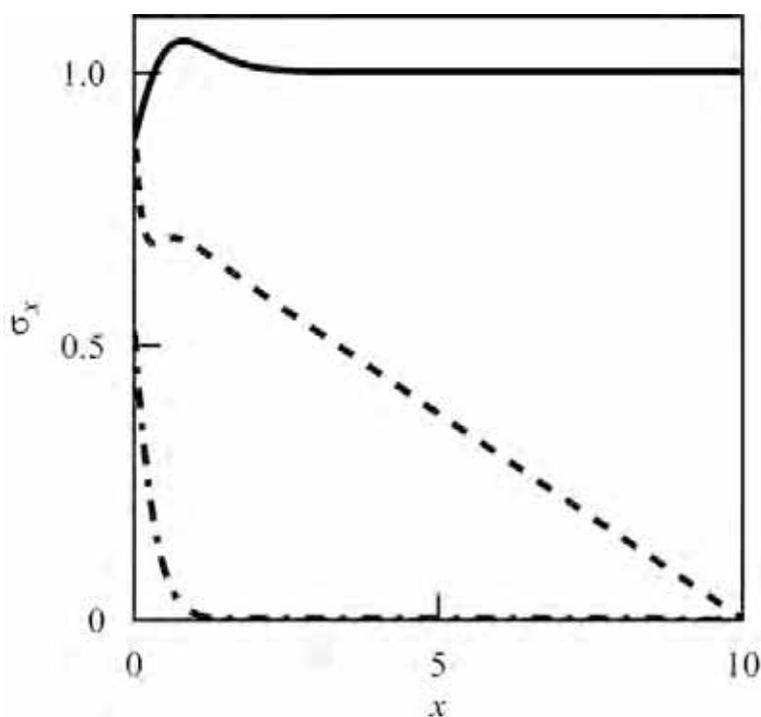


Рис. 4.20. Распределение нормальных напряжений при растяжении, $\sigma_x(x, 0, 0)$, изгибе, $\sigma_x(x, 0, h)$, и кручении $\sigma_x(x, 0, 0)$.

Важной характеристикой, которая может служить локальной мерой качества решения является пространственное распределение энергетической ошибки

$$\varphi = \frac{1}{2} \xi : C : \xi.$$

Значения этой функции в зажатом сечении показаны на Рис. 4.22. Стоит отметить, что φ близка к нулю почти всюду, за исключением узкого слоя вдоль границы поперечного сечения и достигает своего максимума в углах.

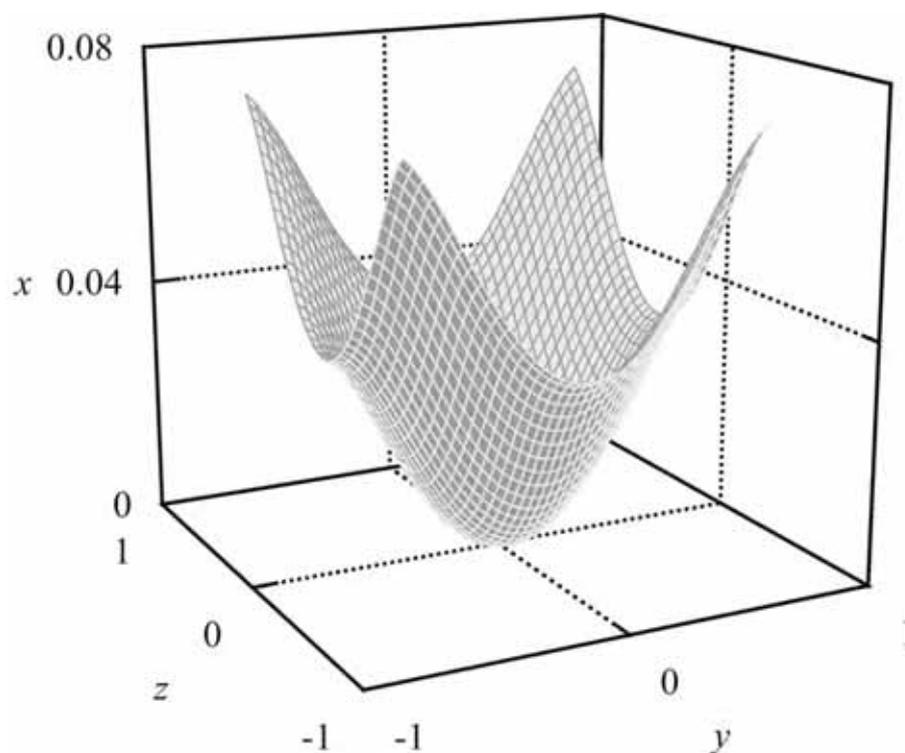


Рис. 4.21. Деформация поперечного сечения балки при $x = 1$.

Такой характер распределения локальной ошибки не противоречит современным представлениям о типе особенности в трехмерных задачах линейной упругости. Как показано, например, в [192], сингулярности напряженно-деформированного состояния тела могут возникать на некоторых граничных линиях и в некоторых точках.

Сходимость асимптотического подхода проиллюстрирована на Рис. 4.23, который показывает двусторонние оценки энергии

$$-\Pi(u) \leq W(u^*, \sigma^*) \leq \Pi_c(\sigma),$$

в зависимости от степени аппроксимации N продольного перемещения u .

Здесь введены обозначения

$$\Pi = W_\varepsilon - W, \quad \Pi_c = W_\sigma, \quad W = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma : \varepsilon^0 d\Omega,$$

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma : C^{-1} : \sigma d\Omega, \quad W_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_\Omega \varepsilon^0 : C : \varepsilon^0 d\Omega.$$

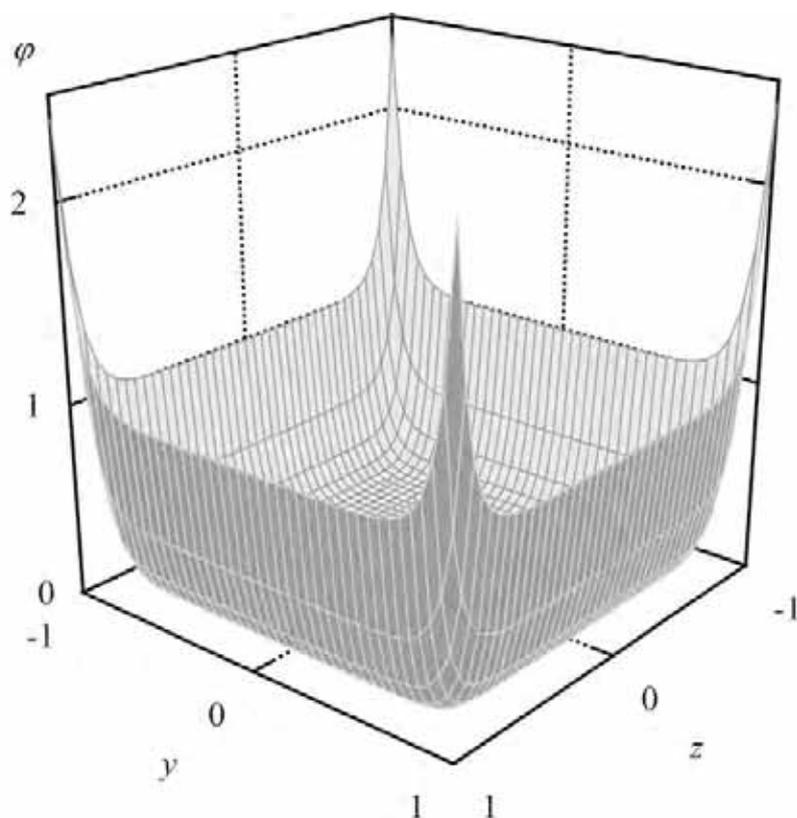


Рис. 4.22. Распределение локальной ошибки φ в зажатом сечении при $x = 0$.

Следующие энергетические характеристики приближенного решения были получены для $N = 8$: значение функционала $\Phi = \Pi + \Pi_c = 0.03$ (интегральное качество), величина потенциальной энергии $\Pi = -19.86$, относительная погрешность $\Delta = \Phi \Pi_c^{-1} = 0.08\%$.

Аналогично, совместные системы обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующие граничные условия могут быть получены для изгиба и кручения балки, используя свойства симметрии, представленные в таблице 4.6. Рассмотрим только изгиб балки относительно оси y и приложим сдвиговую нагрузку на свободный конец при $x = l$:

$$q_l = \left\{ 0, 0, \frac{3}{8}(1 - z^2) \right\}^T.$$

Характеристики решения были получены для приближенных параметров $N = 9$:

$$\Phi = 0.0369, \quad \Pi = 12.66, \quad \Delta = 0.29\%.$$

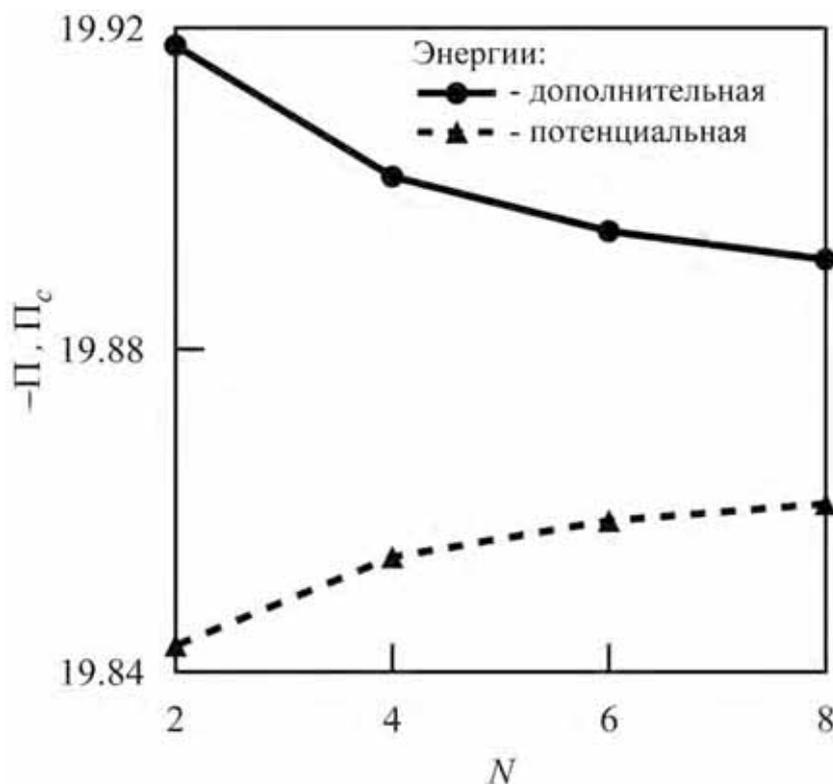


Рис. 4.23. Двусторонние оценки упругой энергии W , полной потенциальной Π и полной дополнительной Π_c энергий.

В случае кручения балки, напряжения, которые не вызывают никаких поперечных сил, приложены при $x = l$ следующим образом

$$q_l = \left\{ 0, \frac{9z(1-y^2)}{16}, -\frac{9y(1-z^2)}{16} \right\}^T$$

для создания крутящего момента на этой грани. Расчеты были проведены для различных полиномиальных степеней N . Решение, соответствующее $N = 10$ характеризуется следующими интегральными параметрами:

$$\Phi = 0.0041, \quad \Pi = 5.757, \quad \Delta = 0.07\%.$$

Нормальные компоненты $\sigma_x(x, 0, h)$ на боковой стороне для изгиба и $\sigma_x(x, 0, 0)$ в середине поперечного сечения при кручении, показаны на Рис. 4.20 пунктирной и штрих-пунктирной кривыми, соответственно.

Как можно видеть на Рис. 4.20 поля напряжений существенно изменяют-

ся вблизи зажатого конца во всех рассмотренных случаях. При этом, поля, рассчитанные далеко от внешнего сечения соответствуют тем, которые предсказывались классическими моделями балки. Такое поведение можно объяснить принципом Сен-Венана. Количественный анализ эффекта Сен-Венана может быть выполнен в рамках асимптотической модели.

На рисунке 4.24 представлены скорости сходимости численного процесса относительно порядка аппроксимации N для трех различных типов нагрузки балки, а именно, растяжение, изгиб и кручение. Для заданных параметров, функции $\Delta(N)$ строго убывают в этих случаях.

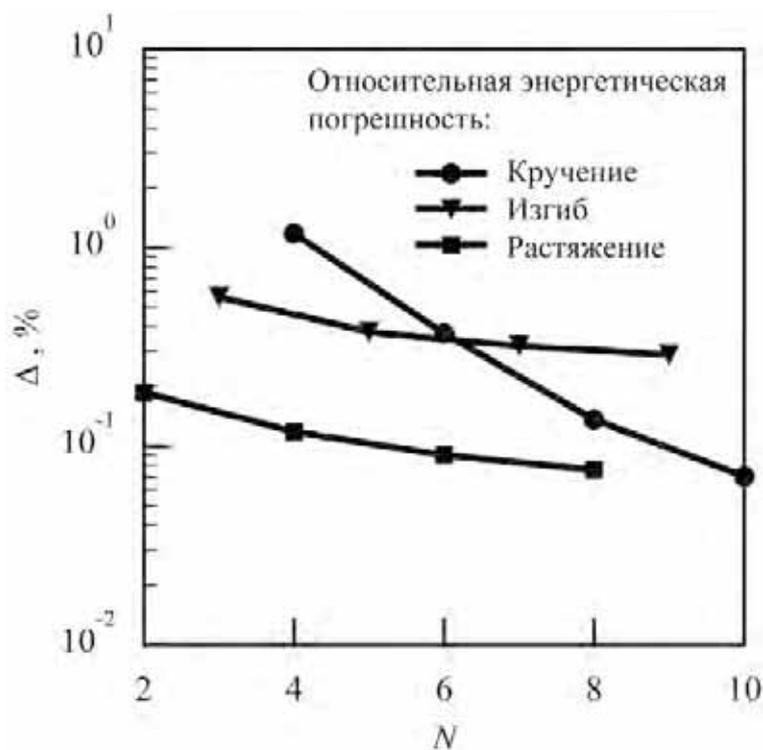


Рис. 4.24. Относительная погрешность энергии Δ для растяжения, изгиба и кручения.

Депланация u поперечного сечения при $x = 5$ в случае кручения показана на Рис. 4.25. Эта функция антисимметрична относительно не только осей y и z , но и диагоналей сечения [47]. Это означает, что депланация отсутствует вдоль линий $y = 0$, $z = 0$, $y = \pm z$. Из-за сложной формы полей перемещений, необходимо выбрать полиномиальную аппроксимацию, по крайней мере, четвертой степени, например, $u = h^{-4}\tilde{u}(x)yz(y^2 - z^2)$, чтобы воспроизвести

только характерные черты такого распределения. Тогда, возможно достичь приемлемую точность ($\Delta \approx 1\%$), как показано на Рис. 4.24.

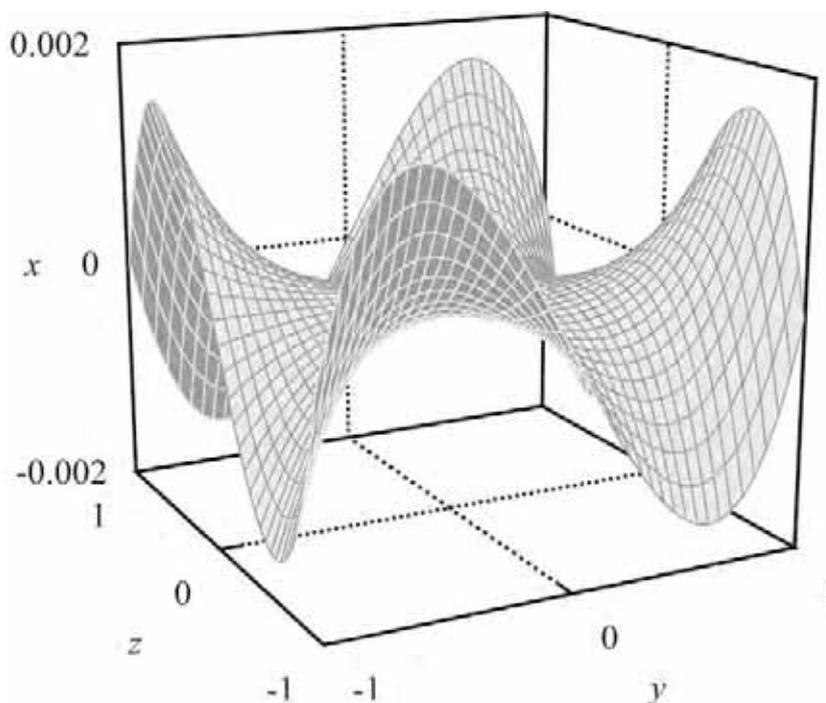


Рис. 4.25. Деформация u поперечного сечения при $x = 5$ в случае кручения балки.

4.7. Проекционная формулировка задач линейной упругости

Различные проекционные подходы, которые связаны с МИДС, могут также быть разработаны и эффективно применены для достоверного численного моделирования физических процессов. В отличие от вариационной техники, интегральные проекции определяющих соотношений на функциональном пространстве, выбранного специальным образом, используются для создания совместной системы уравнений. Модификация МИДС, которая основана на проекционной технике и полиномиальных представлениях неизвестных функций, была разработана в [171], чтобы определить профиль температуры и плотности теплового потока для одномерных задач теплообмена.

В этом разделе описывается вариант метода Петрова - Галеркина, в котором используются интегральные проекции тензора ошибки деформаций и

дискретизация допустимых полей напряжений и перемещений. Два численных проекционных алгоритма рассматриваются, чтобы построить либо алгебраическую либо ОДУ системы, которые гарантируют качество искомого решения. Методы решения таких систем можно найти в книгах [62], [63], [65], [86], [146], [192]. Так же обсуждается связь между проекционными, асимптотическими и вариационными подходами.

Вместо вариационной формулировки (2.70), (2.71), (2.76) и (2.83), приведенной в главе 2, проекционный подход может быть применен для разработки различных численных алгоритмов решения статических и динамических задач.

Для определенности рассмотрим плоское напряженное состояние, которое описывается уравнениями (4.4)–(4.9) для прямоугольного упругого тела (см. Рис. 4.1). В этом случае постановка задачи линейной упругости заключается в следующем: найти компоненты перемещений u^* и v^* , а также тензор напряжения σ^* , удовлетворяющий уравнению равновесия (4.4) и граничным условиям (4.7)–(4.9) такие, что выполняется следующее интегральное соотношение:

$$B[u^*, v^*, \sigma^*, \eta] = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}^2(\Omega),$$

$$B[u, v, \sigma, \eta] = \int_{-h}^h \int_{-l}^l \xi : \eta \, dx dy.$$
(4.167)

Здесь ξ является тензором ошибки напряжений, введенный в формуле (4.6), η , представляет собой тензор второго ранга, компоненты которого определяются на области Ω , занимаемой телом, заданной в формуле (4.1).

Как уже обсуждалось в разделе 1.9., основные идеи метода Петрова-Галеркина и его модификаций состоят в том, что неизвестные функции ищутся в некоторых конечномерных пробных пространствах и что в результирующие аппроксимации есть решение конечномерной системы уравнений. Эти уравнения в текущей реализации составляют как нулевые интегральные проекции тензора ошибки деформации ξ на тестовое тензорное пространство

$\eta(x, y)$.

Сначала, рассмотрим алгоритм, основанный на полиномиальных аппроксимациях перемещений и напряжений. Чтобы быть более конкретным, изучим статическое состояние однородной изотропной прямоугольной пластины. Начало O системы координат Oxy поместим в центр области Ω . Оси x и y параллельны сторонам тела с длинами $2l$ и $2h$, соответственно, как показано на Рис. 4.1.

Рассмотрим только следующие граничные условия

$$\tau_{xy} = \sigma_y = 0, \quad y = \pm h, \quad (4.168)$$

$$u = v = 0, \quad x = 0 \quad (4.169)$$

$$\sigma_x = q_x(y), \quad \tau_{xy} = q_y(y), \quad x = l.$$

Здесь компоненты q_x и q_y являются известными полиномами степени N_q . Внешняя нагрузка должна быть допустима, т. е. $q_y(h) = q_y(-h) = 0$. Объемные силы отсутствуют.

Алгоритм 4.1. Пусть поля перемещений и напряжений аппроксимируются полиномами, которые подчиняются всем граничным условиям (4.168) в (4.169)

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= (1 + X) \sum_{i+j=0}^{N_\sigma-1} u^{(ij)} X^i Y^j, \quad \tilde{v} = (1 + X) \sum_{i+j=0}^{N_\sigma-1} v^{(ij)} X^i Y^j, \\ \tilde{\sigma}_x &= q_x(Y) + (1 - X) \sum_{i+j=0}^{N_\sigma} \sigma_x^{(ij)} X^i Y^j, \\ \tilde{\tau}_{xy} &= q_y(Y) + (1 - X) (1 - Y^2) \sum_{i+j=0}^{N_\sigma-2} \tau_{xy}^{(ij)} X^i Y^j, \\ \tilde{\sigma}_y &= (1 - Y^2) \sum_{i+j=0}^{N_\sigma-1} \sigma_y^{(ij)} X^i Y^j. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Здесь безразмерные параметры

$$Y = \frac{y}{h}, \quad X = \frac{x}{l} \quad (4.171)$$

вводятся для более компактного представления, число $N_\sigma \geq N_q$ является порядком аппроксимации (4.170).

После выполнения уравнения равновесия (4.4), следующие интегральные проекции на полиномиальное пространство приравняются к нулю:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\xi}_x X^i Y^j dX dY = 0, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\xi}_y X^i Y^j dX dY = 0, \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\xi}_{xy} X^i Y^j dX dY = 0 \end{aligned} \quad (4.172)$$

для всех степеней i и j таких, что $0 \leq i+j \leq N_\sigma - 2$. В этом случае компоненты тензора ошибки деформации $\tilde{\xi}$ задаются следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_x = \frac{1}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} - \frac{\tilde{\sigma}_x}{E} + \frac{\nu \tilde{\sigma}_y}{E}, \quad \tilde{\xi}_y = \frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} - \frac{\tilde{\sigma}_y}{E} + \frac{\nu \tilde{\sigma}_x}{E}, \\ \tilde{\xi}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} \right) - \frac{\tilde{\tau}_{xy}}{2G}. \end{aligned} \quad (4.173)$$

Общее число неизвестных коэффициентов перемещений и равновесных напряжений в формуле (4.170) больше, чем число алгебраических уравнений (4.172). Но этих коэффициентов не достаточно, чтобы удовлетворить все проекции на следующем полиномиальном уровне для $i + j = N_\sigma - 1$. Отметим, что алгебраические уравнения относительно параметров, оставшихся после решения уравнения (4.172), могут быть составлены различными способами. Пусть эти неизвестные постоянные минимизируют энергетический функционал ошибки

$$\Phi = G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{1-\nu} \left(\tilde{\xi}_x^2 + 2\nu \tilde{\xi}_x \tilde{\xi}_y + \tilde{\xi}_y^2 \right) + 2\tilde{\xi}_{xy}^2 \right] dX dY = 0. \quad (4.174)$$

Теперь, перейдем к следующему алгоритму, который опирается на технику полу-дискретизации, рассмотренную в главе 4.

Алгоритм 4.2. Как было предложено в главе 4, поля перемещений и напряжений в Ω аппроксимируются полиномиальными функциями относительно переменной Y из уравнения (4.171):

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \sum_{k=0}^{N_u} u^{(k)}(x)Y^k, & \tilde{v} &= \sum_{k=0}^{N_u-1} v^{(k)}(x)Y^k; \\ \tilde{\sigma}_x &= \sum_{k=0}^{N_u} \sigma_x^{(k)}(x)Y^k, & \tilde{\tau}_{xy} &= (1 - Y^2) \sum_{k=0}^{N_u-1} \tau_{xy}^{(k)}(x)Y^k, \\ \tilde{\sigma}_y &= (1 - Y^2) \sum_{k=0}^{N_u} \sigma_y^{(k)}(x)Y^k.\end{aligned}\tag{4.175}$$

Коэффициентами в этих разложениях являются искомые функции пространственной координаты x . Эти полу-дискретные аппроксимации автоматически подчиняются граничным условиям (4.168).

В проекционном подходе, не нужно удовлетворять уравнение равновесия до решения определяющих соотношений, как в вариационном алгоритме в разделе 4.2.. Совместная система дифференциально-алгебраических уравнений может быть составлена одновременно. В частности, эта система состоит из $2N_u + 3$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_x^{(j)}}{dx} + (j + 1) \left(\tau_{xy}^{(j+1)} - \tau_{xy}^{(j-1)} \right) &= 0, \quad j = 0, \dots, N_u, \\ \frac{d\tau_{xy}^{(k)}}{dx} - \frac{d\tau_{xy}^{(k-2)}}{dx} + (k + 1) \left(\sigma_y^{(k+1)} - \sigma_y^{(k-1)} \right) &= 0 \\ k &= 0, \dots, N_u + 1,\end{aligned}\tag{4.176}$$

которые следуют из равновесия тела, и $2N_u + 1$ дифференциальных а также

$N_u - 1$ алгебраических проекций определяющих соотношений

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \tilde{\xi}_x Y^i dX &= 0, \quad i = 0, \dots, N_u, \\ \int_{-1}^1 \tilde{\xi}_{xy} Y^j dX &= 0, \quad j = 0, \dots, N_u - 1, \\ \int_{-1}^1 \tilde{\xi}_y Y^k dX &= 0, \quad k = 0, \dots, N_u - 2. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Здесь компоненты тензора ошибки деформаций ξ используются после подстановки аппроксимаций (4.175) в уравнение (4.173). В этом случае общее количество $N_t = 5N_u + 3$ уравнений (4.176) и (4.177) совпадает с размерностью вектора проектных параметров

$$\begin{aligned} a(x) &= \{a^u(x), a^\sigma(x)\}^T \in \mathcal{R}^{N_t}, \\ a^u &= \{u^{(0)}, \dots, u^{(N_u)}, v^{(0)}, \dots, v^{(N_u-1)}\}, \\ a^\sigma &= \{\sigma_x^{(0)}, \dots, \sigma_x^{(N_u)}, \tau_{xy}^{(0)}, \dots, \tau_{xy}^{(N_u-1)}, \sigma_x^{(0)}, \dots, \sigma_x^{(N_u)}\}^T. \end{aligned} \quad (4.178)$$

Дифференциальный порядок системы (4.176) и (4.177) равен $N_d = 4N_u + 2$.

Этот порядок согласуется с общим числом граничных условий

$$\begin{aligned} u^{(j)}(0) &= 0, \quad \sigma_x^{(j)}(l) = q_x^{(j)}, \quad j = 0, \dots, N_u, \\ v^{(k)}(0) &= 0, \quad \tau_{xy}^{(k)}(l) = q_y^{(k)}, \quad k = 0, \dots, N_u - 1, \end{aligned} \quad (4.179)$$

где $q_x^{(j)}$ и $q_y^{(k)}$ – коэффициенты полиномиальной внешней нагрузки

$$q_x = \sum_{i=0}^{N_u} q_x^{(i)}(x) Y^i, \quad q_y = (1 - Y^2) \sum_{i=0}^{N_u-1} q_y^{(i)}(x) Y^i. \quad (4.180)$$

Аппроксимированные поля перемещений и напряжений находятся как реше-

ние краевой задачи (4.176), (4.177), (4.179).

4.8. Проекции, вариации и асимптотики

Модификация метода Галеркина, рассмотренного в предыдущем разделе, имеет тесные связи с методами, которые основаны на вариационной технике, обсуждавшаяся в главах 2 и 4. В самом деле, сравним алгоритм минимизации функционала энергетической ошибки Φ , описанного в главе 2 (Задача 2.3), и Алгоритм 4.1. Для перемещений и напряжений (4.170), первая вариация функционала Φ в виде (4.174) может быть представлена следующим образом

$$\delta\Phi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\tilde{\xi}_x \delta\tilde{\zeta}_x + \tilde{\xi}_y \delta\tilde{\zeta}_y + 2\tilde{\xi}_{xy} \delta\tilde{\zeta}_{xy} \right) dX dY = 0 \quad (4.181)$$

с компонентами тензора ошибки напряжений

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_x &= \tilde{\sigma}_x - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\nu}{h} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} \right), \\ \tilde{\zeta}_y &= \tilde{\sigma}_y - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} + \frac{\nu}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \right), \\ \tilde{\zeta}_{xy} &= \tilde{\tau}_{xy} - G \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \frac{1}{l} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} \right). \end{aligned} \quad (4.182)$$

Пусть вектор проектных параметров $b = \{b_1, \dots, b_N\}^T \in \mathcal{R}^N$, составленный из независимых коэффициентов $u^{(ij)}$, $v^{(ij)}$, $\sigma_x^{(ij)}$, $\sigma_y^{(ij)}$, $\tau_{xy}^{(ij)}$, включен в Алгоритм 4.1. Тогда интегральное соотношение (4.181) эквивалентно системе интегральных проекций тензора ошибки деформаций $\tilde{\xi}$ на специальном тензорном полиномиальном пространстве:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\xi} : \vartheta_j(X, Y) dX dY = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.183)$$

где

$$\vartheta_j = \frac{\partial \tilde{\zeta}(X, Y, b)}{\partial b_j} \quad (4.184)$$

являются базисными тензорами в этом конечномерном пространстве.

Проекции выбранные таким образом, являются оптимальными. Это означает, что среди всех значений вектора b , решение системы (4.183) минимизирует функционал энергетической ошибки Φ .

С другой стороны, проекционный подход имеет прямое пересечение с асимптотическими алгоритмами, описанными в главе 4. Например, тензор ошибки напряжений $\tilde{\xi}$ в полиномиальной представлении (4.170) имеет вид

$$\tilde{\xi} = \sum_{i+j=0}^{N_\sigma+1} \xi^{(ij)}(b) X^i Y^j, \quad (4.185)$$

где $\xi^{(ij)}$ – линейные алгебраические выражения компонент вектора b_k .

Если проекции (4.172), используемые в Алгоритме 4.1, заменить на следующие уравнения

$$\xi^{(ij)} = 0, \quad 0 \leq i + j \leq N_\sigma - 2 \quad (4.186)$$

тогда получается модификация асимптотического подхода, изложенного в главе 4.

Более того, разложение (4.185) не является единственным и тензор $\tilde{\xi}$ дает возможность переписать его в эквивалентной форме

$$\tilde{\xi} = \sum_{i+j=0}^{N_\sigma+1} \tilde{\xi}^{(ij)} \psi^{(ij)}(X, Y). \quad (4.187)$$

Здесь $\psi^{(ij)}$ являются полиномиальными функциями, которые могут быть выбраны достаточно произвольно, в частности, в виде нормированных полиномов Лежандра

$$\psi^{(ij)}(X, Y) = L_i(X) L_j(Y), \quad (4.188)$$

где

$$L_m(z) = \frac{\sqrt{4m+2}}{2^{m+1}m!} \frac{d^m}{dz^m} (z^2 - 1)^m, \quad z \in [-1, 1]. \quad (4.189)$$

Благодаря ортогональным свойствам этих полиномов, асимптотическая система уравнений совпадает с проекционной

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\xi} \psi^{(ij)}(X, Y) dX dY = \tilde{\xi}^{(ij)} = 0, \quad 0 \leq i + j \leq N_\sigma - 2. \quad (4.190)$$

В свою очередь, все функции $\psi^{(ij)}$ для $i + j \leq N_\sigma - 2$ составляют базис для полных двумерных полиномов степени $N_\sigma - 2$. Это означает, что система алгебраических уравнений (4.190) эквивалентна системе интегральных проекций (4.172).

Пример 4.12. Для демонстрации свойств проекционных алгоритмов, введенных в предыдущем разделе, и сравнения их с вариационными и асимптотическими подходами, снова рассмотрим задачу изгиба прямолинейной балки (см. Рис. 4.1), исследованную в Примере 4.1.

Напомним параметры, которые были выбраны в том примере: размеры балки $l = 5$ и $2h = 1$ модуль Юнга $E = 10^4$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, граничные напряжения

$$q_x = 0, \quad q_y(y) = \frac{6}{8} (1 - Y^2). \quad (4.191)$$

Те же самые аппроксимации (4.170) были использованы в расчетах для проекционного, асимптотического и вариационного подходов, о которых говорилось выше. Скорости сходимости этих методов приведены на Рис. 4.26. Независимо от подхода, размерность приближенной системы одинакова для фиксированной степени N_σ . Как уже упоминалось в главе , только метод Ритца обеспечивает симметричность матрица такой системы. Естественно, что такой подход дает также минимальную относительную погрешностью $\Delta = \Phi \Pi_c^{-1}$, где Π_c является значением полной дополнительной энергии.

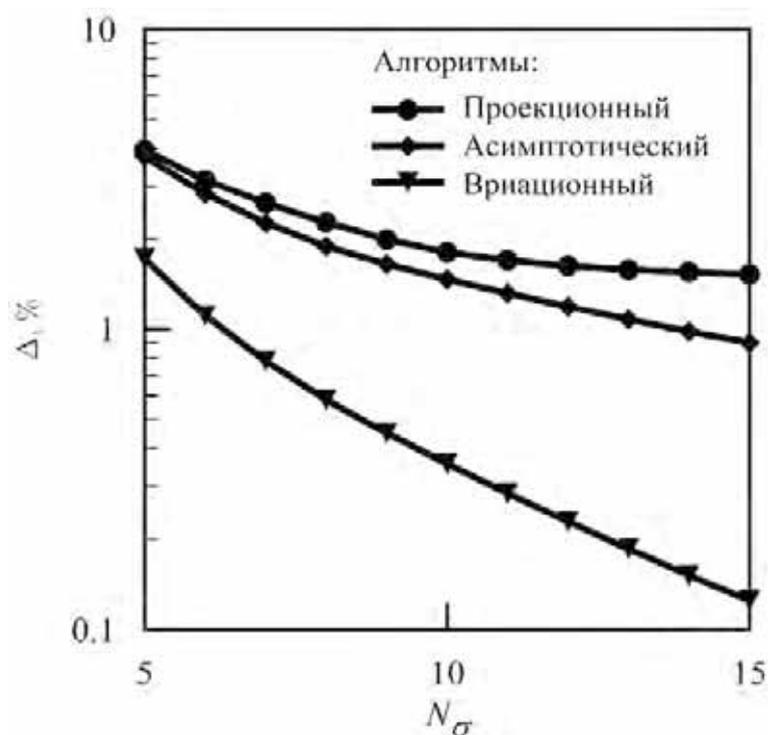


Рис. 4.26. Относительная погрешность Δ как функция полиномиальной степени N_σ напряжений в Примере 4.12 для проекционного, асимптотического и вариационного подходов.

Аналогичные рассуждения могут быть приведены, для того чтобы показать связь между Алгоритмом 4.2 и вариационным или асимптотическим методами, основанными на полу-дискретных приближениях. В этом случае основное различие между перечисленными подходами состоит в том, что дифференциальный порядок системы аппроксимирующих ОДУ для асимптотического и проекционного алгоритмов в два раза меньше, чем для вариационной. Таким образом, алгоритмы, основанные на вариационных принципах и полу-дискретизации могут быть не настолько эффективными, несмотря на их оптимальность.

Для адаптации Алгоритма 4.2, основанного на методе Галеркина, к асимптотическому, интегральные уравнения (4.177) заменяются следующими соот-

ношениями

$$\begin{aligned}\xi_x^{(i)} &= 0, \quad i = 0, \dots, N_u, \\ \xi_{xy}^{(j)} &= 0, \quad j = 0, \dots, N_u - 1, \\ \xi_y^{(k)} &= 0, \quad k = 0, \dots, N_\sigma - 2.\end{aligned}\tag{4.192}$$

используя разложения

$$\tilde{\xi} = \sum_{i=0}^{N_u+2} \xi^{(i)} \vartheta_i(Y).\tag{4.193}$$

Здесь, компоненты $\xi_x^{(i)}$, $\xi_y^{(i)}$ и $\xi_{xy}^{(i)}$ из тензора $\xi^{(i)}$ – дифференциальные или алгебраические выражения перемещений и напряжений, приведенные в формуле (4.175). Следует отметить, что система дифференциально алгебраических уравнений (4.192) совпадает с проекционной системой (4.177) если базис состоит из полиномов Лежандра $\vartheta_i = L_i(Y)$, определенных в уравнении (4.189). В следующем примере, ограничим себя случаем, когда $\vartheta_i = (Y - Y_0)^i$, где Y_0 является параметром разложения (4.193).

Пример 4.13. Проанализируем ту же самую краевую задачу, как и в Примере 4.12. Аппроксимация с порядками $N_u = 3, 5, 7, 9$ в формуле (4.175), была взята в численных расчетах в соответствии с соответствующими вариационным, асимптотическим и проекционным алгоритмами.

Стоит отметить высокую чувствительность точности решения, которое наблюдается в асимптотическом подходе, по отношению к координате Y_0 . Так, например, интеграл относительной погрешности $\Delta(Y_0)$ при $N_u = 5$ кардинально меняется

$$\Delta|_{Y=0} = 0.13\%, \quad \Delta|_{Y=0.1} = 0.08\%, \quad \Delta|_{Y=0.2} = 9.42\%, \quad \Delta|_{Y=0.3} > 632\%.$$

В отличие от асимптотической техники, проекционный алгоритм позволяет избежать этой неустойчивости из-за его однозначности в составлении аппроксимирующей системы ОДУ.

Как показано на рисунке 4.27 для всех трех методов, двусторонние оценки энергии обеспечиваются потенциальной и дополнительной энергиями в соответствии с теоремой 2.2. Для аппроксимаций (4.175) при любом порядке N_u , вариационный подход (сплошные линии) определенно дает, как минимизирующий энергетическую ошибку, лучший интервал оценки упругой энергии, запасенной в теле.

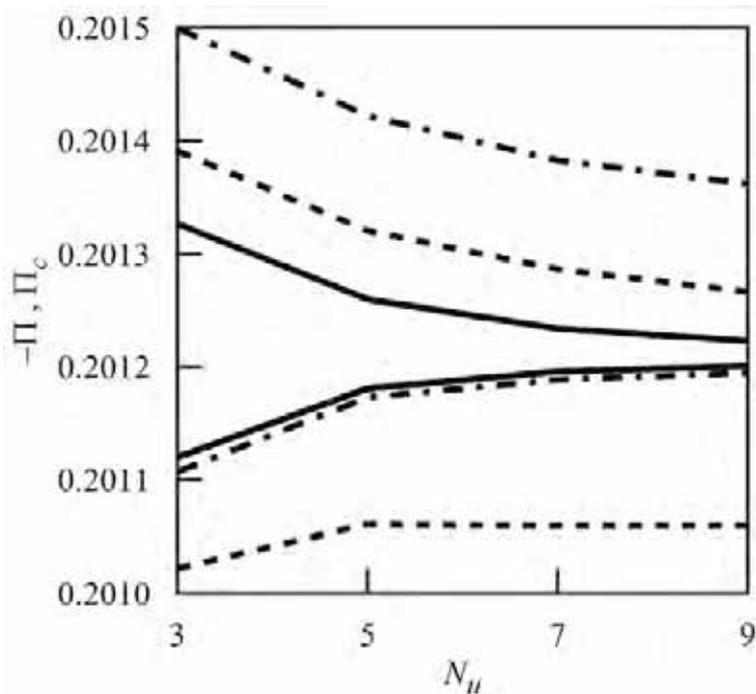


Рис. 4.27. Потенциальная энергия Π и дополнительная энергия Π_c как функция порядка аппроксимации N_u для проекционного (штрих-пунктирная линия), асимптотического (пунктирные линии, $Y_0 = 0$), и вариационного (сплошная линия) подходов в Примере 4.13.

Для других подходов, точность полученная при заданных параметрах примерно такая же, но численные оценки имеют различные верхнюю и нижнюю границы.

Качество решение улучшается одновременно с размерностью системы. Это видно на Рис. 4.28, где представлена относительная погрешность Δ . Дифференциальный порядок системы ОДУ, полученный в проекционном и асимптотическом подходах равен $N_d = 4N_u + 2$, в отличие от $2N_d$ в рамках вариационного алгоритма для той же степени N_u в формуле (4.175). Напри-

мер, проекционная система при $N_u = 7$ и вариационная при $N_u = 3$ имеют примерно одинаковые дифференциальный порядок и относительную ошибку. Таким образом, требуется дополнительный сравнительный анализ, чтобы оценить эффективность обеих схем.

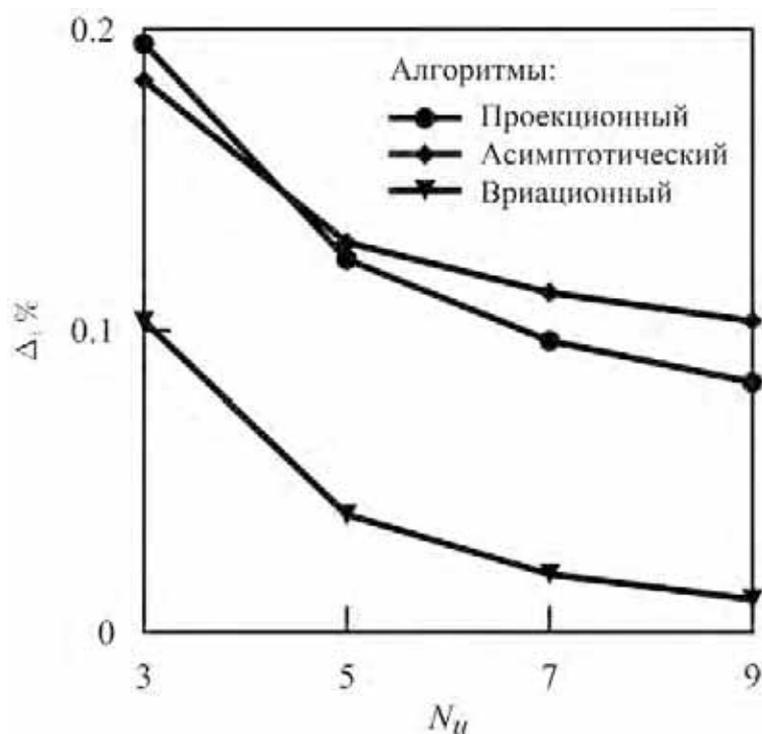


Рис. 4.28. Относительная энергетическая погрешность Δ как функция порядка аппроксимации N_u для проекционного, асимптотического ($Y_0 = 0$), и вариационного подходов в Примере 4.13.

Глава 5

Моделирование трехмерных задач статики и динамики

5.1. Проекционные алгоритмы

Рассмотрим длинное прямолинейное призматическое тело (балка) с треугольным поперечным сечением, как на Рис. 5.1. Начало декартовой системы координат помещено в центре масс одного из концевых сечений балки. Ось x направлена на другое концевое сечение вдоль балки, и, следовательно, оси y и z параллельны поперечным сечениям призмы. Предполагается, что балка сделана из однородного изотропного материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν .

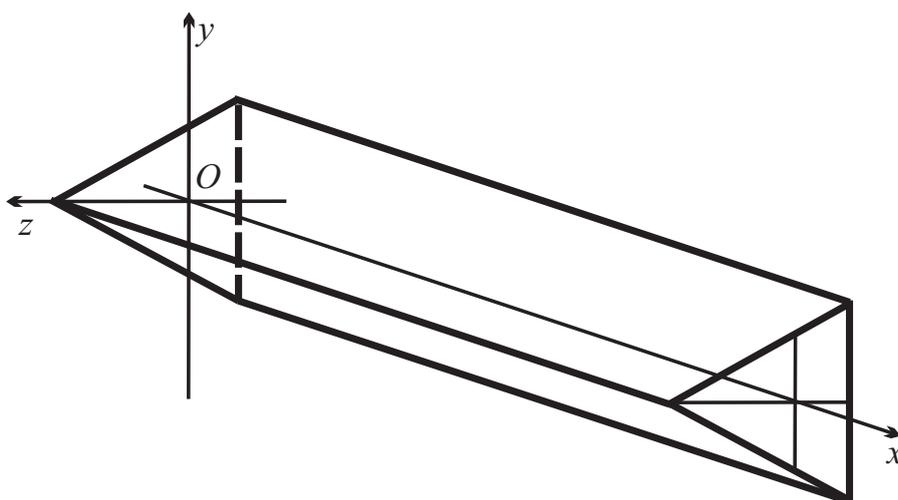


Рис. 5.1. Призматическая балка с треугольным сечением.

Выбор такого объекта исследования обусловлен следующими обстоятельствами. Прежде всего, такая упругая призма содержит специфические особенности, которые характерны для линейных задач теории упругости, связанные с различными типами граничных условий (жесткое защемление, и т.д.) и наличием угловых точек. Во-вторых, эта форма позволяет использовать полиномиальные разложения напряжений и перемещений для аппроксимаций деформированного состояния призмы. Еще одна причина состоит в том, что

такие элементы балки могут быть применены для создания структуры с более сложной формой поперечного сечения (например, тонкостенные балки) и использованы в алгоритмах метода конечных элементов.

Напряженно-деформированное состояние тела описывается системой уравнений в частных производных (4.146). Граничные ограничения могут быть разделены на две группы. Условия на боковых сторонах балки можно отнести к первой части. Эти отношения должны быть выполнены до составления аппроксимирующей системы ОДУ. Вторая группа состоит из условий на концах призмы, которые выполняются совместно с решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Хотя существует широкий спектр граничных факторов, только три типа граничных условий рассматривается в этой главе. А именно, предполагается, что перемещения, напряжения и упругое основание могут быть заданы на боковых гранях и основаниях призмы.

Рассмотрим сначала граничные условия, которые отнесены к первой группе. Предполагается, что смещение может быть задано на боковых гранях балки. Тогда эти условия записываются в виде

$$u = \bar{u}^{(i)}(x, y, z), \quad v = \bar{v}^{(i)}(x, y, z), \quad w = \bar{w}^{(i)}(x, y, z), \quad (5.1)$$

$$\{x, y, z\}^T \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, M_1.$$

Здесь $\bar{u}^{(i)}$, $\bar{v}^{(i)}$, $\bar{w}^{(i)}$ являются известными функциями, Γ_i это грани призмы, на которых заданы перемещения.

Если напряжения, специфицированы на некоторых гранях Γ_i , $M_1 < i \leq M_2 \leq 3$, то эти условия могут быть разделены на две подгруппы в связи с тем, что эти стороны параллельны оси x . Уравнения, которые связаны с касательными напряжениями τ_{xy} и τ_{xz} имеют вид

$$q_x^{(i)} = \tau_{xy} n_y^{(i)} + \tau_{xz} n_z^{(i)} = \bar{q}_x^{(i)}. \quad (5.2)$$

Другие соотношения объединяют компоненты σ_y , σ_z и τ_{yz} :

$$\begin{aligned} q_y^{(i)} &= \sigma_y n_y^{(i)} + \tau_{yz} n_z^{(i)} = \bar{q}_y^{(i)}, \\ q_z^{(i)} &= \tau_{yz} n_y^{(i)} + \sigma_z n_z^{(i)} = \bar{q}_z^{(i)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $\bar{q}_x^{(i)}$, $\bar{q}_y^{(i)}$, $\bar{q}_z^{(i)}$ являются заданными внешними нагрузками; $n_x^{(i)} = 0$, $n_y^{(i)}$, $n_z^{(i)}$ – компоненты векторов нормальных $n^{(i)}$ к граням призмы Γ_i .

С использованием уравнений (5.2) и (5.3), граничные условия третьей группы имеют вид

$$q_x^{(i)} + \kappa_x^{(i)} u = 0, \quad q_y^{(i)} + \kappa_y^{(i)} v = 0, \quad q_z^{(i)} + \kappa_z^{(i)} w = 0. \quad (5.4)$$

Здесь $\kappa_x^{(i)}$, $\kappa_y^{(i)}$, $\kappa_z^{(i)}$ являются коэффициентами упругого основания.

Следующие граничные условия также заданы на торцах призмы, аналогично уравнениям (5.1)–(5.4):

$$u = \bar{u}^{(0,l)}(y, z), \quad v = \bar{v}^{(0,l)}(y, z), \quad w = \bar{w}^{(0,l)}(y, z), \quad (5.5)$$

или

$$\sigma_x = \bar{q}_x^{(0,l)}(y, z), \quad \tau_{xy} = \bar{q}_y^{(0,l)}(y, z), \quad \tau_{xz} = \bar{q}_z^{(0,l)}(y, z), \quad (5.6)$$

или

$$\sigma_x + \kappa_x^{(0,l)} u = 0, \quad \tau_{xy} + \kappa_y^{(0,l)} v = 0, \quad \tau_{xz} + \kappa_z^{(0,l)} w = 0 \quad (5.7)$$

при $x = 0$ и $x = l$, соответственно. Здесь l – длина балки.

Аппроксимации полей перемещений и напряжений задаются в форме

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i+j=0}^{N_1} u^{(ij)}(x)y^i z^j, & v &= \sum_{i+j=0}^{N_2} v^{(ij)}(x)y^i z^j, \\
 w &= \sum_{i+j=0}^{N_3} w^{(ij)}(x)y^i z^j, & \sigma_x &= \sum_{i+j=0}^{N_4} \sigma_x^{(ij)}(x)y^i z^j, \\
 \tau_{xy} &= \sum_{i+j=0}^{N_5} \tau_{xy}^{(ij)}(x)y^i z^j, & \tau_{xz} &= \sum_{i+j=0}^{N_6} \tau_{xz}^{(ij)}(x)y^i z^j, \\
 \sigma_y &= \sum_{i+j=0}^{N_7} \sigma_y^{(ij)}(x)y^i z^j, & \sigma_z &= \sum_{i+j=0}^{N_8} \sigma_z^{(ij)}(x)y^i z^j, \\
 \tau_{yz} &= \sum_{i+j=0}^{N_9} \tau_{yz}^{(ij)}(x)y^i z^j.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Основной идеей при решении задачи (4.146), (5.1)–(5.7) является использование аппроксимаций (5.8) на основе проекционного подхода, описанного в предыдущей главе. Эти приближения должны удовлетворять точно граничным условиям (5.1)–(5.4) и уравнениям равновесия

$$\begin{aligned}
 r_x &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\
 r_y &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\
 r_z &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

После этого система ОДУ относительно неизвестных коэффициентов, введен-

ные в формуле (5.8), составляется из соответствующих соотношений Гука

$$\begin{aligned}
 \xi_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), \\
 \xi_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z), \quad \xi_z = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\sigma_z}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \\
 \xi_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\tau_{xy}}{2G}, \quad \xi_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\tau_{xz}}{2G}, \\
 \xi_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\tau_{yz}}{2G},
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Заметим, что выбор полиномиальных приближений (5.8) обозначает способ определения подпространства базисных функций, для которых интегральные проекции должны быть вычислены. Пространство полных полиномов степени $K \geq 0$

$$P_K = \left\{ \sum_{i+j=0}^K c_{ij} p_{ij}, \quad p_{ij} = y^i z^j, \quad c_{ij} \in \mathcal{R} \right\} \tag{5.11}$$

подходит для этой цели.

Дадим следующие два определения, которые будут полезны в дальнейшем. По аналогии с понятием полного полинома, обсужденного ранее, множество всех скалярных произведений

$$\int_S r(y, z) p_{ij}(y, z) dy dz, \quad 0 \leq i + j \leq K, \tag{5.12}$$

называется полной проекцией степени K в пространстве P_K для функции $r(y, z)$. Набор, который включает в себя полную проекцию степени $K - 1$ функции $r(y, z)$, а также некоторые, но не все проекции на подпространство

$$\tilde{P}_K = \left\{ \sum_{i=0}^K c_i p_{i, K-i}, \quad p_{i, K-i} = y^i z^{K-i}, \quad c_i \in \mathcal{R} \right\}, \tag{5.13}$$

назовем неполной проекцией степени K .

Для наших целей, полиномиальные приближения степени N_i , $i = 1, \dots, 9$ в формуле (5.10) должны обладать следующими особыми свойствами. Во-первых, необходимо, чтобы такое приближение было в состоянии удовлетворить уравнения равновесия (5.9) и граничные условия (5.1)–(5.4). Во-вторых, важно правильно выбрать соответствующие пространства полиномиальных тестовых функций (5.11) степеней $K_i > 0$ для $i = 1, \dots, 6$. Этот выбор должен гарантировать, что система дифференциально-алгебраических уравнений, которая является результатом полного или неполного проектирования функций ошибки напряжений $\{\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_{xy}, \xi_{xz}, \xi_{yz}\}$ на эти пространства, является совместной.

В численном алгоритме также желательно, чтобы структура этих систем не менялась с увеличением порядка аппроксимации. Отметим, что довольно сложная форма равновесия (5.9) и уравнений состояния (5.10), а также граничных условий (5.1)–(5.4) оказывает влияние на то, что, в общем случае, параметры полиномов N_i могут быть отличны друг от друга.

Ограничимся случаем, когда только граничные условия (5.1)–(5.3), (5.5) и (5.6) используются. После выполнения граничных условий на боковых гранях призмы, уравнения равновесия содержат \tilde{N}_d независимых функций напряжений $\{\sigma_x^{(kl)}(x), \tau_{xy}^{(kl)}(x), \tau_{xz}^{(kl)}(x)\}$ и их производных по пространственной координатой x . Кроме того, \tilde{N}_u независимых производных перемещений $\{u^{(ij)}, v^{(ij)}, w^{(ij)}\}$ включены в определяющие соотношения (5.10).

Для разработки эффективного алгоритма, дифференциальный порядок N_d получаемой системы должен быть выбран в соответствии с

$$N_d = 2 \min \{ \tilde{N}_d, \tilde{N}_u \} . \quad (5.14)$$

Условие (5.14) вносит некоторые трудности при составлении такой системы. Тем не менее, как будет показано ниже, эти трудности могут быть устрани-

ны путем выбора соответствующих функций перемещений и напряжений, а также соответствующих проекций уравнений состояния.

В этом алгоритме, степени аппроксимаций (5.8) сначала фиксируются и затем строятся, вообще говоря, неполные проекции функций $\{\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_{xy}, \xi_{xz}, \xi_{yz}\}$ на соответствующие полиномиальные подпространства. Конечно, практическая реализация этого алгоритма зависит от типа граничных условий. Для большей наглядности рассмотрим случай, когда призма нагружена только силами на боковых гранях в соответствии с условиями (5.2) и (5.3).

Без ограничения общности, предполагается, что уравнения граней призмы могут быть явно разрешены относительно, например, координаты z

$$\Gamma_i = \left\{ y = y^{(i)} = k_0^{(i)} + k_1^{(i)} z \right\}. \quad (5.15)$$

Это свойство всегда можно реализовать соответствующим вращением боковых осей координат относительно оси x . Здесь k_0^i и k_1^i являются действительными коэффициентами.

Чтобы удовлетворить точно граничные условия (5.2) и (5.3) с помощью приближения (5.8), внешние нагрузки задаются в полиномиальном виде:

$$\bar{q}_\alpha^{(i)} = \sum_{k+l}^{M_0} q_\alpha^{(ijk)}(x) y^j z^k, \quad \alpha = x, y, z. \quad (5.16)$$

Пусть

$$N_5 = N_6 = N_0 + 1 \geq M_0, \quad N_7 = N_8 = N_9 = N_0 + 2. \quad (5.17)$$

Тогда граничные условия (5.2) и (5.3) имеют вид

$$\begin{aligned}
q_x^{(i)} &= \sum_{j+k=0}^{N_0+1} \left(\tau_{xy}^{(jk)}(x)n_y^{(i)} + \tau_{xz}^{(jk)}n_z^{(i)} \right) \left(y^{(i)}(z) \right)^j z^k = \\
&\quad \sum_{j+k=0}^{M_0} q_x^{(ijk)} \left(y^{(i)}(z) \right)^j z^k, \\
q_y^{(i)} &= \sum_{j+k=0}^{N_0+2} \left(\sigma_y^{(jk)}(x)n_y^{(i)} + \tau_{yz}^{(jk)}n_z^{(i)} \right) \left(y^{(i)}(z) \right)^j z^k = \\
&\quad \sum_{j+k=0}^{M_0} q_y^{(ijk)} \left(y^{(i)}(z) \right)^j z^k, \\
q_z^{(i)} &= \sum_{j+k=0}^{N_0+2} \left(\tau_{yz}^{(jk)}(x)n_y^{(i)} + \sigma_{xz}^{(jk)}n_z^{(i)} \right) \left(y^{(i)}(z) \right)^j z^k = \\
&\quad \sum_{j+k=0}^{M_0} q_z^{(ijk)} \left(y^{(i)}(z) \right)^j z^k.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Стоит отметить, что внешние нагрузки $\bar{q}_y^{(i)}$ и $\bar{q}_z^{(i)}$ должны быть согласованы друг с другом, так как только три из четырех необходимых условий могут быть выполнены в вершинах сечения.

Алгоритм 5.1. На первом шаге, выбираются натуральное число $N_0 > 0$ и соответствующее полное подпространство полиномов P_{N_0} в соответствии с формулой (5.11). Пусть это число одновременно является и степенью $N_4 = N_0$ аппроксимацией компоненты напряжения σ_x в формуле (5.8).

Отметим, что дифференцирование линейной комбинации функций (5.8) относительно пространственной координаты x не изменяет степень полиномов. В отличие от этого, дифференцирование по y и z уменьшает степень полного полинома на единицу. Таким образом, порядок аппроксимаций для других функций напряжений из формулы (5.8) должен быть выбран в соответствии с формулой (5.17) для решения уравнений равновесия (5.9). Выра-

жения (5.10) показывают, что степени аппроксимаций перемещений должны быть выбраны как

$$N_1 \leq N_0, \quad N_2 = N_3 \leq N_0 + 1. \quad (5.19)$$

На втором этапе, выполняются граничные условия (5.18) на боковых гранях балки. Рассмотрим первое уравнение из (5.18). Так как эти граничные условия являются одномерными полиномами относительно пространственной координаты z , то необходимо выполнить $N_0 + 2$ условий на каждой стороне балки, или $3(N_0 + 2)$ в целом, относительно $\tau_{xy}^{(jk)}(x)$, $\tau_{xz}^{(jk)}(x)$ (линейные соотношения на каждый моном). Следовательно, аппроксимации функций напряжений τ_{xy} и τ_{xz} содержат только

$$\tilde{N}_\tau = (N_0 + 2)(N_0 + 3) - 3(N_0 + 2) \quad (5.20)$$

независимых коэффициентов $\tau_{xy}^{(jk)}(x)$, $\tau_{xz}^{(jk)}(x)$ после выполнения этих уравнений.

Вводя новые обозначения $\tilde{\tau}_i(x)$, $i = 1, \dots, \tilde{N}_\tau$ для остальных независимых коэффициентов $\tau_{xy}^{(jk)}(x)$ и $\tau_{xz}^{(jk)}(x)$, аппроксимации сдвиговых напряжений, которые удовлетворяют граничным условиям (5.18), могут быть представлены в виде

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{\tilde{N}_\tau} \tilde{\tau}_i(x) \begin{Bmatrix} \tilde{\vartheta}_i^{\tau_{xy}}(y, z) \\ \tilde{\vartheta}_i^{\tau_{xz}}(y, z) \end{Bmatrix}. \quad (5.21)$$

Здесь $\tilde{\vartheta}_i^{\tau_{xy}}(y, z)$ и $\tilde{\vartheta}_i^{\tau_{xz}}(y, z)$ являются базисными функциями, полученными в соответствии с этими граничными условиями.

После подобного разрешения второго и третьего соотношений в формуле (5.18), аппроксимации функций напряжений σ_y , σ_z , и τ_{yz} содержат

$$\tilde{N}_\sigma = \frac{3}{2}(N_0 + 3)(N_0 + 4) - 3(2N_0 + 5) \quad (5.22)$$

независимых коэффициентов $\sigma_y^{(jk)}(x)$, $\sigma_z^{(jk)}(x)$, $\tau_{yz}^{(jk)}(x)$. С помощью перенумерации этих коэффициентов аппроксимации напряжений могут быть представлены в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\tilde{N}_\sigma} \tilde{\sigma}_i(x) \begin{pmatrix} \tilde{\vartheta}_i^{\sigma_y}(y, z) \\ \tilde{\vartheta}_i^{\sigma_z}(y, z) \\ \tilde{\vartheta}_i^{\tau_{yz}}(y, z) \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Здесь $\tilde{\vartheta}_i^{\sigma_y}(y, z)$, $\tilde{\vartheta}_i^{\sigma_z}(y, z)$ и $\tilde{\vartheta}_i^{\tau_{yz}}(y, z)$ – новые базисные функции совместные с граничными условиями (5.18).

Выполнение уравнений равновесия предполагает равенство нулю всех проекций компонент вектора r_x , r_y , r_z в формуле (5.9) на полиномиальное пространство тестовых функций в соответствии с

$$\begin{aligned} Q_x^{(ij)} &= \int_S r_x p_{ij} dydz = 0, \quad i + j \leq N_0, \\ Q_y^{(ij)} &= \int_S r_y p_{ij} dydz = 0, \quad i + j \leq N_0 + 1, \\ Q_z^{(ij)} &= \int_S r_z p_{ij} dydz = 0, \quad i + j \leq N_0 + 1. \end{aligned} \quad (5.24)$$

С помощью тождественного преобразования, система (5.24) может быть сведена к системе

$$\frac{\tilde{N}_d}{2} = \tilde{N}_\tau + \frac{(N_0 + 1)(N_0 + 2)}{2} \quad (5.25)$$

обыкновенных дифференциальных уравнений с первыми производными $\tilde{\tau}_i(x)$, $i = 1, \dots, \tilde{N}_\tau$ и $\sigma_x^{(kl)}(x)$, $k + l \leq N_0$, а также

$$\tilde{N}_{yz} = 3(N_0 + 2) \quad (5.26)$$

алгебраическим уравнениям, которые являются линейными комбинациями

коэффициентов $\tilde{\sigma}_i(x)$, $i = 1, \dots, \tilde{N}_\sigma$.

Отметим, что только первая производная u относительно x представлена в выражение для компоненты ξ_x в формуле (5.10). Так как на функцию перемещения u не заданы граничные условия на боковых сторонах балки, то степень аппроксимации N_1 в формуле (5.8) может быть выбрана также и для функции напряжений σ_x , то есть $N_1 = N_0$. Таким образом, подпространством тестовых функций является пространство полных полиномов P_{N_0} . Тогда система уравнений, которая следует из соответствующего проектирования, имеет вид

$$Q_{xx}^{(ij)} = \int_S \xi_x p_{ij} dy dz = 0, \quad i + j \leq N_0. \quad (5.27)$$

Степени аппроксимации для функций перемещений v и w можно выбрать неоднозначно. Поэтому, здесь алгоритм раздваивается. Это связано с тем, что не возможно выделить полные полиномиальные подпространства, чьи размерности были в соответствие с общим числом \tilde{N}_τ функций сдвиговых напряжений $\tilde{\tau}_i$.

В рамках первого подхода, вычисляется полная проекция функции ξ_{xy} и ξ_{xz} при максимально допустимой степени. При этом, некоторые функции $\tilde{\tau}_i$ исключаются из рассмотрения. В другом подходе, все функции τ_i используются для вычисления проекций компонент ξ_{xy} и ξ_{xz} на построенное специальным образом полиномиальное пространство. В этом случае проекции являются неполными.

Алгоритм 5.2. Первоначально необходимо определить степень N^0 полных полиномиальных подпространств, чтобы спроектировать компоненты ξ_{xy} и ξ_{xz} . Этот параметр определяется как максимальное положительное число, для которого выполняется неравенство:

$$\tilde{N}_\tau \geq N_\tau, \quad N_\tau = (N^0 + 1)(N^0 + 2). \quad (5.28)$$

Чтобы уменьшить количество переменных $\tilde{\tau}_i(x)$, аппроксимация (5.21)

преобразуется следующим образом. Во-первых, вычисляется полная проекция функций τ_{xy} и τ_{xz} на подпространство P_{N^0} :

$$\int_S \tau_{xy} p_{jk} dy dz = 0, \quad \int_S \tau_{xz} p_{jk} dy dz = 0, \quad k + l \leq N^0. \quad (5.29)$$

После этого, решается система (5.29) относительно N_τ коэффициентов $\tilde{\tau}_i(x)$, выбранных произвольным образом.

В процессе составления совместной системы уравнений, необходимо решать недоопределенные системы алгебраических уравнений относительно $\tilde{\tau}_i(x)$. Если расчеты выполняются аналитически, то выбор переменных, для которых уравнения решаются не столь существенен. Но в приближенных вычислениях, следует применять специальный численный подход, например, на основе метода исключения Гаусса для уменьшения погрешности вычислений. В начале этого последовательного процесса, выбирается одно уравнение, которое содержит числовой коэффициент с максимальным абсолютным значением. После этого переменная с этим максимальным коэффициентом выражается из выбранного уравнения. Эта процедура совместно с соответствующими преобразованиями повторяется $N_\tau - 1$ раз.

Решая уравнения (5.29) и подставляя результат в уравнение (5.21), получаем следующее выражение

$$\begin{pmatrix} \tau_{xy}^O \\ \tau_{xz}^O \end{pmatrix} = \sum_{i=N_\tau+1}^{\tilde{N}_\tau} \tau_i(x) \begin{pmatrix} \vartheta_i^{\tau_{xy}}(y, z) \\ \vartheta_i^{\tau_{xz}}(y, z) \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Здесь $\tau_i(x)$, $i = N_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_\tau$ являются новыми коэффициентами, которые являются линейными комбинациями функций $\tilde{\tau}_j(x)$, $j = 1, \dots, \tilde{N}_\tau$; $\vartheta_i^{\tau_{xy}}(y, z)$ и $\vartheta_i^{\tau_{xz}}(y, z)$ являются новыми базисными функциями ортогональными полиномиальному пространству P_{N^0} .

Найдем представление напряжений τ_{xy} и τ_{xz} , эквивалентное формуле

(5.21), с помощью нового базиса, включающего $\vartheta_i^{\tau_{xy}}(y, z)$ и $\vartheta_i^{\tau_{xz}}(y, z)$. Для этого составим следующую систему уравнений

$$\int_S \tau_{xy} \vartheta_i^{\tau_{xy}}(y, z) + \tau_{xz} \vartheta_i^{\tau_{xz}}(y, z) dydz = 0, \quad i = N_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_\tau \quad (5.31)$$

и разрешим ее относительно некоторых коэффициентов $\tilde{\tau}_i(x)$ методом Гаусса.

После подстановки решения уравнения (5.31) в уравнение (5.21) и приводя подобные члены, получаем следующее выражение

$$\begin{pmatrix} \tau_{xy}^P \\ \tau_{xz}^P \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N_\tau} \tau_i(x) \begin{pmatrix} \vartheta_i^{\tau_{xy}}(y, z) \\ \vartheta_i^{\tau_{xz}}(y, z) \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Здесь по аналогии с формулой (5.30), $\tau_i(x)$ при $i = 1, \dots, N_\tau$ – новые коэффициенты; $\vartheta_i^{\tau_{xy}}(y, z)$ и $\vartheta_i^{\tau_{xz}}(y, z)$ являются новыми базисными компонентами, которые являются ортогональными к напряжениям τ_{xy}^O и τ_{xz}^O . Можно проверить, что полученные аппроксимации

$$\begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xy}^P \\ \tau_{xz}^P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xy}^O \\ \tau_{xz}^O \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

удовлетворяют граничным условиям (5.2).

Зафиксируем $N_2 = N_3 = N^0$ в аппроксимациях (5.8) и вычислим полную проекцию функции ξ_{xy} и ξ_{xz} в формуле (5.10) на пространство P_{N^0} . Тогда получается система, состоящая из N_τ обыкновенных дифференциальных уравнений с первыми производными коэффициентов $v^{(kl)}(x)$ и $w^{(kl)}(x)$:

$$Q_{xy}^{(jk)} = \int_S \xi_{xy} p_{jk} dydz = 0, \quad Q_{xz}^{(jk)} = \int_S \xi_{xz} p_{jk} dydz = 0 \quad (5.34)$$

для $j + k \leq N^0$.

В результате коэффициенты $\tau_i(x)$, $i = N_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_\tau$ не включены в со-

отношение (5.34). Эти переменные, как и их первые производные остаются только в формуле (5.24). Так как только одно из граничных условий на торцах призмы может быть удовлетворено с помощью каждой из этих функций, то они должны быть исключены из аппроксимации (5.33), т. е.

$$\tau_i(x) = 0, \quad i = N_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_\tau. \quad (5.35)$$

В следующих шагах алгоритма, находятся новые аппроксимации функций σ_y , σ_z , τ_{yz} ; определяются соответствующие полиномиальные подпространства, вычисляются проекции компонентов ξ_y , ξ_z , ξ_{yz} из уравнения (5.10) на это подпространство.

Во-первых, отметим, что компоненты ξ_y , ξ_z , ξ_{yz} тензора ошибки деформаций не содержат производных по координате x . Соответствующие соотношения, вытекающие из уравнения (5.10), могут быть удовлетворены через переменные $\tilde{\sigma}_i(x)$, которые не подвержены граничным условиям на концах бруса.

С учетом формул (5.20), (5.22), (5.26), (5.28) и (5.35), число из этих функций равно

$$N_{yz} = \frac{(N_0 + 2)(N_0 - 3)}{2} + (N^0 + 1)(N^0 + 2). \quad (5.36)$$

Тогда, степень N^1 полиномиального подпространства P_{N^1} , на которое проецируются функции ξ_y , ξ_z , ξ_{yz} , определяется через максимальное число N_σ , так что справедливо неравенство

$$N_{yz} \geq N_\sigma, \quad N_\sigma = \frac{3}{2}(N^1 + 1)(N^1 + 2). \quad (5.37)$$

После этого, выполняется ортогонализация функций (5.23) аналогично процедуре, описанной в предыдущей части этого алгоритма с формулами (5.29)–(5.33). Во-первых, вычислим все проекции функций σ_y , σ_z и τ_{yz}

на подпространство P_{N^1}

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_y p_{jk} dydz &= 0, & \int_S \sigma_z p_{jk} dydz &= 0, \\ \int_S \tau_{yz} p_{jk} dydz &= 0, & j + k &\leq N^1. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Затем, разрешим эту систему относительно некоторых из коэффициентов $\tilde{\sigma}_i(x)$, $i = 1, \dots, \tilde{N}_\sigma$.

После решения уравнения (5.38) преобразования (5.23), получаем следующее выражение

$$\begin{pmatrix} \sigma_y^O \\ \sigma_z^O \\ \tau_{yz}^O \end{pmatrix} = \sum_{i=N_\sigma+1}^{\tilde{N}_\sigma} \sigma_i(x) \begin{pmatrix} \vartheta_i^{\sigma_y}(y, z) \\ \vartheta_i^{\sigma_z}(y, z) \\ \vartheta_i^{\tau_{yz}}(y, z) \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Здесь $\sigma_i(x)$, $i = N_\sigma + 1, \dots, \tilde{N}_\sigma$ – новые переменные; $\vartheta_i^{\sigma_y}(y, z)$, $\vartheta_i^{\sigma_z}(y, z)$ и $\vartheta_i^{\tau_{yz}}(y, z)$ являются новыми базисными функциями ортогонального подпространства P_{N^1} .

Чтобы выразить функции σ_y , σ_z и τ_{yz} через новый базис, построена следующая система уравнений

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_y \vartheta_i^{\sigma_y}(y, z) + \sigma_z \vartheta_i^{\sigma_z}(y, z) + \tau_{yz} \vartheta_i^{\tau_{yz}}(y, z) dydz &= 0, \\ i &= N_\sigma + 1, \dots, \tilde{N}_\sigma. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Как и ранее, система (5.40) разрешается относительно некоторых параметров $\tilde{\sigma}_j(x)$, $j = 1, \dots, \tilde{N}_\sigma$.

Подставляя решение уравнения (5.40) в уравнение (5.23), получаем сле-

дующие поля напряжений :

$$\begin{pmatrix} \sigma_y^P \\ \sigma_z^P \\ \tau_{yz}^P \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N_\sigma} \sigma_i(x) \begin{pmatrix} \vartheta_i^{\sigma_y}(y, z) \\ \vartheta_i^{\sigma_z}(y, z) \\ \vartheta_i^{\tau_{yz}}(y, z) \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Здесь $\sigma_i(x)$, $i = 1, \dots, N_\sigma$ – новые коэффициенты напряжений; $\vartheta_i^{\sigma_y}(y, z)$, $\vartheta_i^{\sigma_z}(y, z)$, $\vartheta_i^{\tau_{yz}}(y, z)$ – новые базисные функции, которые ортогональны подпространству (5.39). Важно также, что аппроксимации

$$\begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_y^P \\ \sigma_z^P \\ \tau_{yz}^P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_y^O \\ \sigma_y^O \\ \tau_{yz}^O \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

точно удовлетворяют граничным условиям (5.3).

Первые уравнения $Q_x^{(jk)} = 0$ в формуле (5.24) могут быть явно разрешены относительно первых производных функций напряжений следующим образом

$$\frac{d\sigma_x^{(jk)}}{dx} = f_x^{(jk)}(\tau_1(x), \dots, \tau_{N_\tau}(x)) + X^{(jk)}(x), \quad j + k \leq N_0. \quad (5.43)$$

Здесь $f_x^{(jk)}$ являются линейными комбинациями коэффициентов τ_m и функции $X^{(jk)}(x)$ следуют из представления внешней нагрузки $\bar{q}_x^{(i)}$ в формуле (5.16) с $i = 1, 2, 3$. Общее количество соотношений (5.43), которые являются частью искомой системы уравнений, равно

$$N_x^e = \frac{(N_0 + 1)(N_0 + 2)}{2}. \quad (5.44)$$

Аналогично, некоторые отношения $Q_y^{(jk)} = 0$ и $Q_z^{(ij)} = 0$ в формуле (5.24) разрешаются относительно дифференциальных членов касательных напряжений:

$$\frac{d\tau_i}{dx} = f_{yz}^{(i)}(\sigma_1(x), \dots, \sigma_{\tilde{N}_\sigma}(x)) + Y^{(i)}(x), \quad i = 1, \dots, N_\tau. \quad (5.45)$$

Здесь $f_{yz}^{(i)}$ являются линейными комбинациями коэффициентов σ_m ; соответствующие функции $Y^{(i)}(x)$ являются результатом выражения для внешних нагрузок $\bar{q}_\alpha^{(i)}$ с $\alpha = x, y, z$ и $i = 1, 2, 3$.

Приняв во внимание формулу (5.45), остальные уравнения в формуле (5.24), число которых равно $(N_0 + 2)(N_0 + 3) - N_\tau$, являются линейными соотношениями, связанными с коэффициентами $\sigma_i(x)$, $i = 1, \dots, \tilde{N}_\sigma$. Другая часть алгебраических уравнений получается из проекции функций ξ_y , ξ_z и ξ_{yz} на пространство P_{N^1} :

$$\begin{aligned} Q_{yy}^{(jk)} &= \int_S \xi_y p_{jk} dy dz = 0, & Q_{zz}^{(jk)} &= \int_S \xi_z p_{jk} dy dz = 0, \\ Q_{yz}^{(jk)} &= \int_S \xi_{yz} p_{jk} dy dz = 0, & j + k &\leq N^1. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Отметим, что число алгебраических уравнений меньше, чем число коэффициентов $\sigma_i(x)$. Для того, чтобы завершить формирование системы алгебраических уравнений и выразить все компоненты $\sigma_i(x)$ через переменные v , w , σ_x , разрешим все полученные алгебраические уравнения уравнений (5.24) и (5.46) относительно некоторых из коэффициентов $\sigma_i(x)$. Это решение может быть представлено в следующем виде

$$\sigma_j^0(x) = \sum_{k=1}^{N_\sigma^0} c_{jk} \sigma_k^0(x) + f_j + Z_j(x), \quad j = N_\sigma^0 + 1, \dots, \tilde{N}_\sigma. \quad (5.47)$$

Здесь

$$N_\sigma^0 = \tilde{N}_\sigma - N_\sigma - (N_0 + 2)(N_0 + 3) + N_\tau \quad (5.48)$$

– количество лишних коэффициентов $\sigma_i(x)$, перенумерованных в соответствии с

$$\sigma_j^0(x) = \sigma_{k(j)}(x), \quad j, k = 1, \dots, \tilde{N}_\sigma; \quad (5.49)$$

c_{jk} являются вещественными коэффициентами; f_j являются линейными комбинациями всех дифференциальных переменных $v^{(im)}$, $w^{(im)}$, $\sigma_x^{(im)}$, введенные в формуле (5.8); Z_j – функции, задаваемые внешними нагрузками. Тогда, с учетом формулы (5.47), соотношение (5.42) можно переписать следующим образом

$$\begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N_\sigma^0} \sigma_i^0(x) \begin{pmatrix} \bar{\vartheta}_i^{\sigma_y}(y, z) \\ \bar{\vartheta}_i^{\sigma_z}(y, z) \\ \bar{\vartheta}_i^{\tau_{yz}}(y, z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{yy} \\ f_{zz} \\ f_{yz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{yy} \\ Y_{zz} \\ Y_{yz} \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Подставляя (5.50) в выражения для ξ_y , ξ_z и ξ_{yz} , получим отсутствующие алгебраических уравнений для определения функции $\sigma_i(x)$

$$\int_S (\xi_y \bar{\vartheta}_i^{\sigma_y}(y, z) + \xi_z \bar{\vartheta}_i^{\sigma_z} + \xi_{yz} \bar{\vartheta}_i^{\tau_{yz}}) dydz = 0, \quad i = 1, \dots, N_\sigma^0. \quad (5.51)$$

Системы дифференциальных уравнений (5.27) и (5.34) могут быть разрешены относительно первых производных от соответствующих переменных $u^{(jk)}$ при $j+k \leq N_0$, $v^{(jk)}$ и $w^{(jk)}$ при $j+k \leq N^0$. Это можно сделать, принимая во внимание решение алгебраической системы, которая собрана из уравнений (5.24), (5.46) и (5.51) относительно переменных $\sigma_i(x)$.

Все независимые переменные

$$\sigma_x^{(k,l)}(x), \quad u^{(k,l)}(x), \quad k+l \leq N_0;$$

$$\tau_i(x), \quad i = 1, \dots, N_\tau; \quad v^{(kl)}(x), \quad w^{(kl)}(x), \quad k+l \leq N^0$$

могут быть собраны в вектор $a(x) \in \mathcal{R}^{N_d}$ проектных параметров с размерностью

$$N_d = (N_0 + 1)(N_0 + 2) + 2(N^0 + 1)(N^0 + 2). \quad (5.52)$$

После составления дифференциальных уравнений, эта система может быть записана в векторной форме

$$R = \left(I \frac{d}{dx} + K \right) a + F(x) = 0. \quad (5.53)$$

Здесь $K \in \mathcal{R}^{N_d \times N_d}$ является квадратичной матрицей, состоящей из элементов

$$K_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial a_j}, \quad (5.54)$$

$I \in \mathcal{R}^{N_d \times N_d}$ является единичной матрицей, $F(x) \in \mathcal{R}^{N_d}$ это вектор внешней нагрузки на боковых сторонах балки.

Алгоритм 5.3. В отличие от Алгоритма 5.2, аппроксимации функций напряжений τ_{xy} и τ_{xz} не меняются после удовлетворения граничных условий (5.2) на боковых сторонах призмы. Вместо этого, степени аппроксимации для перемещений v и w повышаются на единицу: $N_2 = N_3 = N^0 + 1$. Таким образом, процедура составления системы ОДУ будет изменена.

Как и в Алгоритме 5.2, ортогонализации функций τ_{xy} , τ_{xz} выполняется на первом этапе в соответствии с формулами (5.29)–(5.33). Система полиномиальных функций из формулы (5.33)

$$P_\tau = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_\tau} c_i \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_i^{\tau_{xy}}(y, z) \\ \vartheta_i^{\tau_{xz}}(y, z) \end{array} \right\}. \quad (5.55)$$

выбирается в качестве базиса пространства, на которое проецируются функции ξ_{xy} и ξ_{xz} .

Используя базис в соотношении (5.55), проведем ортогонализацию функ-

ций v и w . Для этой цели, полная проекция этих функций на пространстве P_τ вычисляется по следующей формуле

$$\int_S v \vartheta_i^{\tau xy}(y, z) dy dz + \int_S w \vartheta_i^{\tau xz}(y, z) dy dz = 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{N}_\tau. \quad (5.56)$$

Затем эта система разрешается относительно \tilde{N}_τ переменных из $v^{(jk)}(x)$ и $w^{(jk)}(x)$, $k + l \leq N^0 + 1$.

После решения системы (5.56) и соответствующего приведения подобных в уравнении (5.8), получается следующее выражение:

$$\begin{Bmatrix} v^O \\ w^O \end{Bmatrix} = \sum_{i=\tilde{N}_\tau+1}^{\tilde{N}_u} u_{yz}^{(i)}(x) \begin{Bmatrix} \vartheta_i^{u_y}(y, z) \\ \vartheta_i^{u_z}(y, z) \end{Bmatrix}. \quad (5.57)$$

Здесь новые коэффициенты $u_{yz}^{(i)}(x)$, $i = \tilde{N}_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_u$ являются линейными комбинациями функций $v^{(jk)}(x)$, $w^{(jk)}(x)$; $\vartheta_i^{u_y}(y, z)$ и $\vartheta_i^{u_z}(y, z)$ являются новыми базисными функциями ортогональными полиномиальному вектору P_τ ; $\tilde{N}_u = (N^0 + 2)(N^0 + 3)$ – число коэффициентов в аппроксимациях v и w .

Чтобы найти представления перемещений v и w эквивалентные тем, которые представлены в формуле (5.8), составим следующую систему уравнений с помощью новых базисных функций $\vartheta_i^{u_y}(y, z)$ и $\vartheta_i^{u_z}(y, z)$:

$$\int_S v \vartheta_i^{u_y}(y, z) + w \vartheta_i^{u_z}(y, z) dy dz = 0, \quad i = \tilde{N}_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_u. \quad (5.58)$$

Как и для уравнения (5.56), разрешим систему (5.58) относительно некоторых коэффициентов $v^{(k,l)}(x)$, $w^{(k,l)}(x)$. После подстановки решения системы (5.58) в аппроксимации (5.8) и группируя подобные члены, получим следую-

щее соотношение

$$\begin{pmatrix} v^P \\ w^P \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_\tau} u_{yz}^{(i)}(x) \begin{pmatrix} \vartheta_i^{u_y}(y, z) \\ \vartheta_i^{u_z}(y, z) \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

Здесь $u_{yz}^{(i)}(x)$, $i = 1, \dots, \tilde{N}_\tau$ – новые переменные; базисные функции $\vartheta_i^{u_y}(y, z)$ и $\vartheta_i^{u_z}(y, z)$ для $i = 1, \dots, \tilde{N}_\tau$ ортогональны полиномам $\vartheta_j^{u_y}(y, z)$ и $\vartheta_j^{u_z}(y, z)$ в формуле (5.57) для $j = \tilde{N}_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_u$. В результате, новые аппроксимации для функций перемещений v и w могут быть представлены в соответствии с

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^P \\ w^P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^O \\ w^O \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Тогда, \tilde{N}_τ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами $u_{yz}^{(i)}(x)$ получается путем вычисления всех проекций функций ξ_{xy} и ξ_{xz} на соответствующее подпространство

$$\int_S (\xi_{xy} \vartheta_i^{u_y} + \xi_{xz} \vartheta_i^{u_z}) dydz = 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{N}_\tau. \quad (5.61)$$

Соотношения (5.61) не содержат коэффициенты

$$u_{yz}^j(x), \quad j = \tilde{N}_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_u.$$

Следовательно, эти функции должны быть исключены из рассмотрения, т. е.

$$u_{yz}^i(x) = 0, \quad i = \tilde{N}_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_u. \quad (5.62)$$

При вычислении алгебраических проекций для ξ_y , ξ_z и ξ_{yz} , Алгоритм 5.3 совпадает с Алгоритмом 5.2. При этом, размерность вектора проектных па-

раметров $a(x)$ равна

$$N_d = (N_0 + 1)(N_0 + 2) + 2\tilde{N}_\tau. \quad (5.63)$$

Для получения общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, подобной (5.53), необходимо решить задачу на собственные значения

$$K + \lambda I = 0, \quad (5.64)$$

которая получается после подстановки векторов

$$a = a^{(i)} e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \dots, N_d,$$

в уравнение (5.53). Здесь λ_i и $a^{(i)}$ – собственные значения и собственные векторы, для которых система (5.53) имеет нетривиальные решения. Определитель системы (5.64) имеет следующую структуру:

$$\det(K + \lambda E) = \lambda^{12} P_{N_d-12}(\lambda) = 0. \quad (5.65)$$

Здесь P_{N_d-12} является полиномом степени $N_d - 12$ относительно параметра λ . Корень $\lambda = 0$ с кратностью 12 отражает полиномиальную часть общего решения, в то время как корни уравнения

$$P_{N_d-12}(\lambda) = 0 \quad (5.66)$$

формируют решение, состоящее из экспоненциальных членов. Отметим, что решения уравнения (5.66) в общем случае являются комплексными величинами.

5.2. Консольная балка с треугольным сечением

Продemonстрируем эффективность Алгоритмов 5.2 и 5.3 на примере следующей модельной задачи. Рассмотрим прямолинейную балку (см. Рис. 5.1) длиной $l = 10$, имеющее поперечное сечение в форме равнобедренного треугольника с основанием $b = 1$ параллельного оси y и высотой $h = 1$, ориентированной вдоль оси z . Начало декартовой системы координат поместим в центр масс сечения призмы. Считается, что боковые грани балки свободны от нагрузок, т.е. $\bar{q}_x^{(i)} = \bar{q}_y^{(i)} = \bar{q}_z^{(i)} = 0$ для $i = 1, 2, 3$ в формуле (5.2). Балка сделана из однородного изотропного материала с $E = 1$ и $\nu = 0.3$.

Зададим, например, следующие степени аппроксимаций $N_4 = N_0 = 2$, $N_5 = N_6 = 2$ и $N_7 = N_8 = N_9 = 3$ для функции напряжений в формуле (5.8). Если используется Алгоритм 5.2, то из уравнений (5.20), (5.28) и (5.52) следует, что

$$\tilde{N}_\tau = 8, \quad N^0 = 1, \quad N_\tau = 6, \quad N_d = 24. \quad (5.67)$$

Для Алгоритма 5.3, система ОДУ характеризуется следующими параметрами

$$N_\tau = 8, \quad N_d = 28. \quad (5.68)$$

Расчеты были выполнены при разных степенях полиномиальных аппроксимаций $N_0 = 2, 3, 4$. В этом случае максимальный порядок систем обыкновенных дифференциальных уравнений был равен $N_d = 70$ и $N_d = 78$ для Алгоритмов 5.2 и 5.3 соответственно.

Предполагается, что один из концов балки жестко зашцеилен:

$$u = v = w = 0, \quad x = 0. \quad (5.69)$$

Другой конец ($x = l$) подвержен воздействию различных факторов:

- растягивающей силы

$$F_x = \int_S \sigma_x dS; \quad (5.70)$$

- перерезывающей силы

$$F_y = \int_S \tau_{xy} dS, \quad F_z = \int_S \tau_{xz} dS; \quad (5.71)$$

- изгибающему моменту

$$M_z = \int_S \sigma_x y dS, \quad M_y = \int_S \sigma_x z dS; \quad (5.72)$$

- крутящему моменту

$$M_x = \int_S (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dS. \quad (5.73)$$

Численное моделирование было проведено для четырех различных задач:

Задача 5.1. Растяжение консольной балки обусловлено следующей внешней нагрузкой

$$F_x = 1, \quad F_y = F_z = M_x = M_y = M_z = 0. \quad (5.74)$$

Задача 5.2. Изгиб балки относительно оси y обеспечивается поперечной силой

$$F_y = 1, \quad F_x = F_z = M_x = M_y = M_z = 0 \quad (5.75)$$

Задача 5.3. Изгиб балки относительно оси z задан в виде

$$F_z = 1, \quad F_x = F_y = M_x = M_y = M_z = 0. \quad (5.76)$$

Задача 5.4. Кручение балки относительно оси x дается

$$M_x = 1, \quad F_x = F_y = F_z = M_y = M_z = 0. \quad (5.77)$$

Двусторонняя сходимость алгоритмов, описанных в этой главе, показана

на Рис. 5.2 для задачи 5.1. Энергетические оценки получены Алгоритмом 5.3 показаны сплошными линиями на этом рисунке. Пунктирные линии соответствуют Алгоритму 5.2. Аналогичные зависимости были получены и для задач 5.2–5.4.

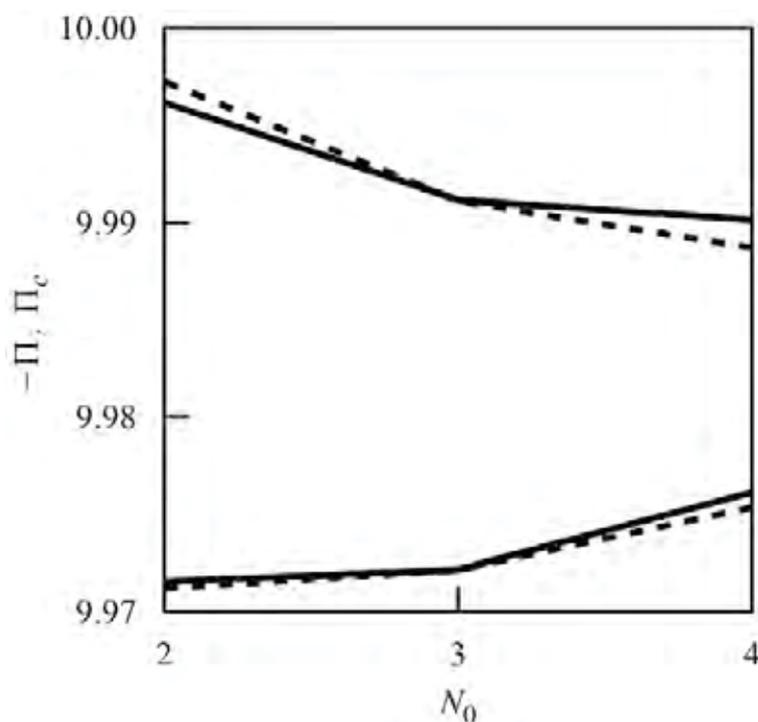


Рис. 5.2. Двусторонние оценки качества решения потенциальной энергией Π (нижние линии) и дополнительной энергией Π_c (верхние линии) для задачи 5.4.

Стоит отметить, что оба алгоритма находятся в хорошем соответствии друг с другом. В то же время, относительная погрешность $\Delta = \Phi\Pi_c^{-1}$ меньше чем на один процент была достигнута для Задач 5.1–5.4 при $N_0 = 4$ (см. Рис. 5.3). Лучшее решение было получено для Задачи 5.1. При этом, поведение функции $\Delta(N_0)$ для Задач 5.2–5.4 примерно то же самое. Их характерной особенностью является то, что величина относительной ошибки при $N_0 = 2$ превышает 15% для этих задач. Это можно объяснить довольно сложным напряженно-деформированным состоянием балки, обусловленное изгибом или кручением. Чтобы проиллюстрировать этот факт, на Рис. 5.4 изображена депланация сечения при $x = 5$ для Задачи 5.4.

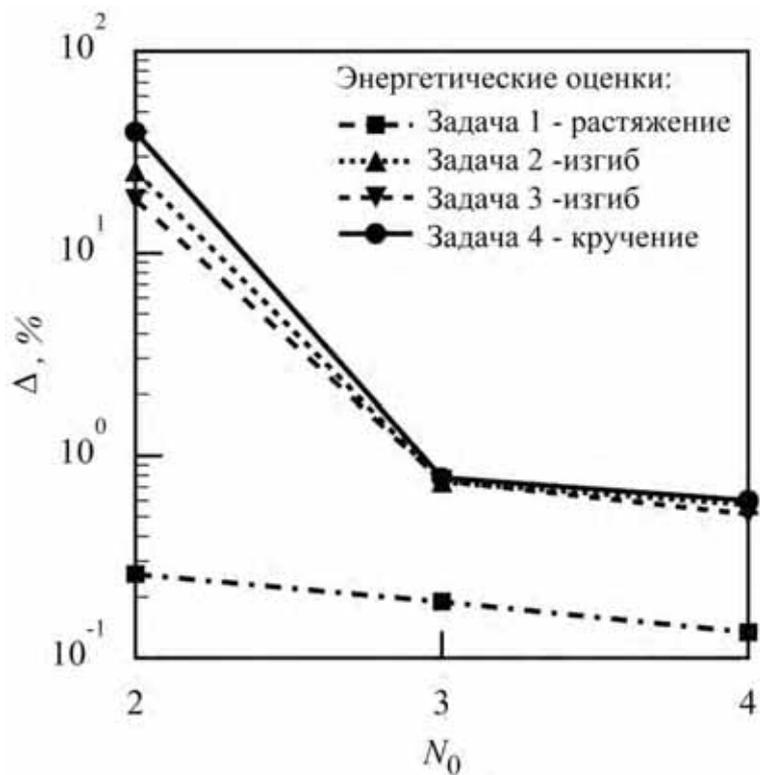


Рис. 5.3. Относительная погрешность энергии $\Delta(N_0)$.

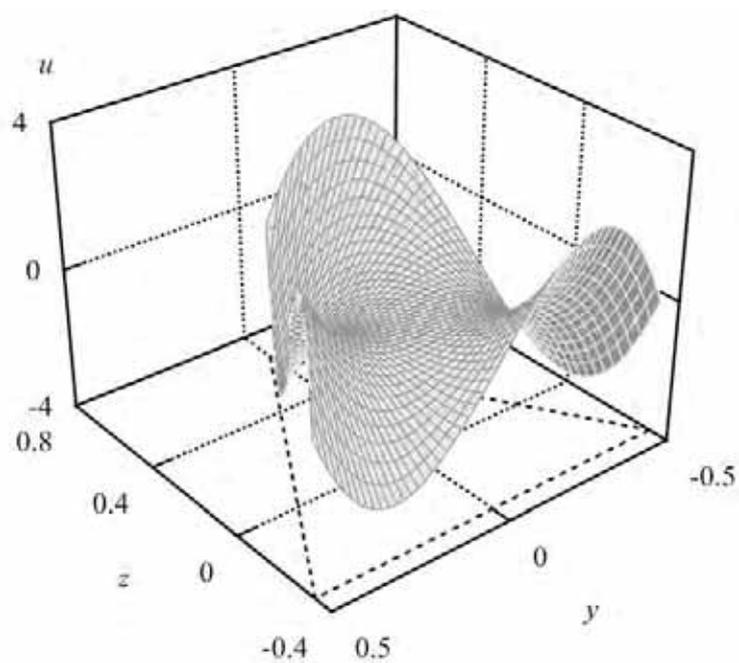


Рис. 5.4. Деформация сечения при $x = 5$ для Задачи 5.4.

Качественное распределение локальных ошибок

$$\varphi = \frac{1}{2}\xi : C : \xi \quad (5.78)$$

представлено на Рис. 5.5 на заземленном конце балки для Задачи 5.1. Отметим, что значения этой функции внутри треугольника близки к нулю, за исключением узкой области вблизи краев и углов сечения.

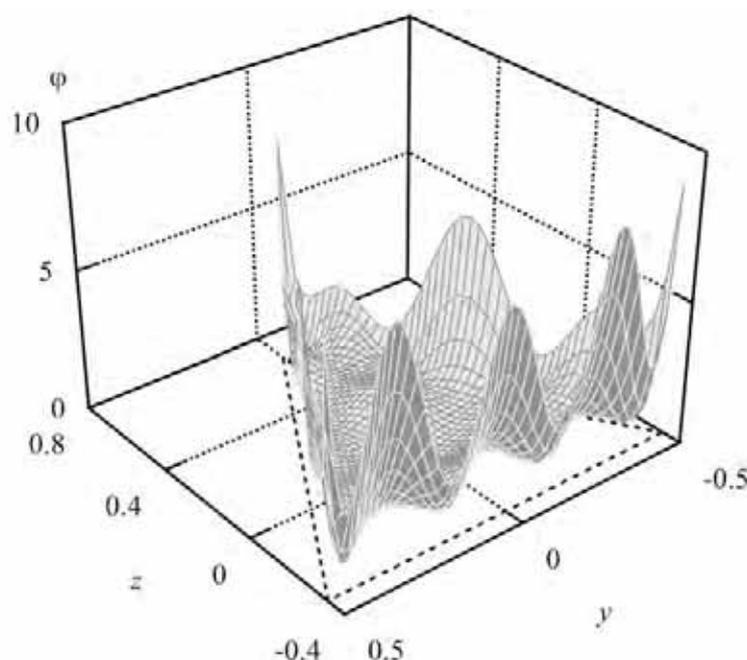


Рис. 5.5. Распределение энергетической ошибки $\varphi(0, y, z)$ для Задачи 5.1.

Влияние граничных условий на решение задач теории упругости является важным аспектом при достоверном моделировании балки. Особенности решения, связанные с таким влиянием, могут быть качественно объяснены принципом Сен-Венана. Но количественные оценки краевых эффектов могут быть даны только на основе детального анализа трехмерного напряженно-деформированного состояния.

Например, минимальное абсолютное значение

$$\mu = \min_{m \leq N_d} |Re(\lambda_m)|, \quad \lambda_m \neq 0$$

позволяет оценить примерно характерную длину l_S , на которой заметен концевой эффект. Здесь λ_m являются корнями уравнения (5.66). Параметр l_S определяется из условия, что амплитуда экспоненциальной функции, которая соответствует собственному λ_m , уменьшается, например, в 100 раз:

$$e^{\mu l_S} - 0.01 = 0. \quad (5.79)$$

Величина μ равна $\mu = 4.66$ при заданных параметрах балки. Тогда решение уравнения (5.79) приблизительно равно

$$l_S \approx 1. \quad (5.80)$$

Рисунок 5.6 показывает распределения нормальных напряжений σ_x вдоль оси x . Напряжения были вычислены в точках поперечного сечения, которые даются координатами $y = \frac{1}{2}$ и $z = -\frac{1}{3}$ (штрих-пунктирная кривая), $y = -\frac{1}{2}$ и $z = -\frac{1}{3}$ (пунктирная кривая), $y = 0$ и $z = -\frac{1}{3}$ (штриховая кривая), $y = \frac{1}{2}$ и $z = -\frac{1}{3}$ (сплошная линия) для Задач 5.1–5.4 соответственно. Чтобы представить все кривые на одном рисунке нормальные напряжения $\sigma_x(x)$ были умножены на коэффициент 100 для Задач 5.1 и 5.4. Как было оценено в формуле (5.80), заметные возмущения поля напряжений происходит ближе к концу сечения на расстоянии меньше единицы. Эта длина соответствует параметру l_S , определяемого формулой (5.74).

Отметим, что возмущение напряженного состояния может возникнуть не только у зажатой части балки. Аналогичные явления могут быть вызваны и определенным видом нагрузки. Как видно на рисунке 5.6 для Задачи 5.4, нормальные напряжения $\sigma_x(x)$, вычисленные возле правого края балки, имеют заметные изменения на расстоянии, которое не превышает l_S .

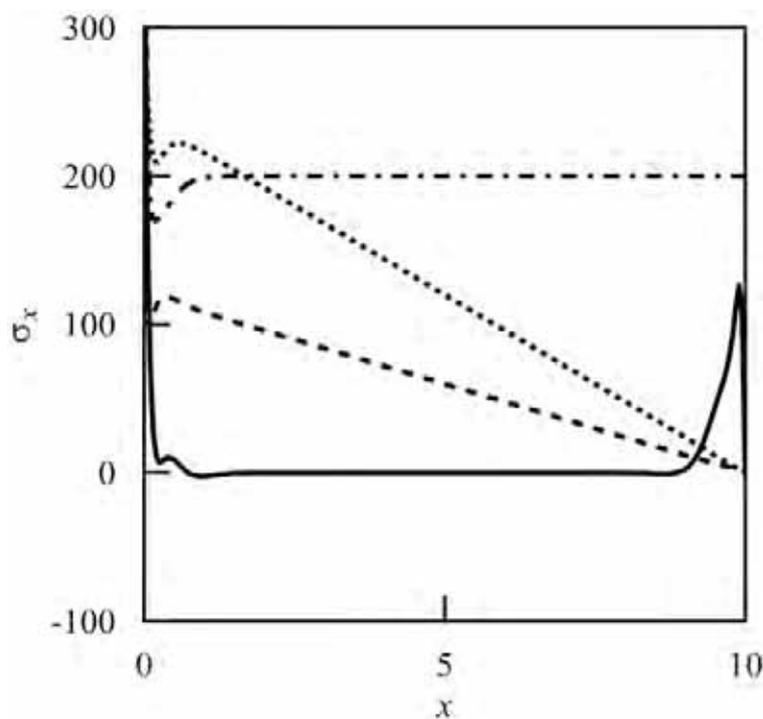


Рис. 5.6. Типичное распределение нормальных напряжений σ_x вдоль длины балки для Задач 5.1–5.4.

5.3. Проекционная модель балки

До сих пор не был рассмотрен случай, когда $N_0 = 1$. Отметим, что в этом случае никакого решения задач 5.1–5.4 не может быть получено на основе Алгоритма 5.2. При применении Алгоритма 5.3, определитель в уравнении (5.65) можно представить в виде

$$\det(K + \lambda E) = c\lambda^{12},$$

где c – некоторая вещественная постоянная. Иными словами, результирующие перемещения и напряжения описывается только полиномиальными функциями.

Так как полиномы всегда присутствуют в аппроксимациях при любой степени N_0 , представляется важным отдельно изучить такой тип общего решения. В дальнейшем, полиномиальная часть приближения будем называть проекционным решением балки.

Отметим, что такие полиномы могут быть выделены при любой степени N_0 и всегда зависят от 12 неопределенных постоянных. Поэтому, естественно сформулировать новую краевую задачу только для проекционного решения балки.

Во-первых, необходимо зафиксировать положение балки как твердое тело в трехмерном пространстве. Чтобы это сделать, определим следующие интегральные перемещения

$$\int_S u(x_0, y, z) dS = \int_S v(x_0, y, z) dS = \int_S w(x_0, y, z) dS = 0. \quad (5.81)$$

Нулевые интегральные углы поворота должны быть также заданы

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dS = \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) dS = 0 \quad (5.82)$$

при $x = x_0$. Точка x_0 , в которой условия (5.81) и (5.82) заданы, может быть выбрана произвольно. Например, если эта точка принадлежит концевому сечению, то можно предположить, что это консольная балка.

Как и в случае условий на перемещения, шесть факторов нагрузки, а именно, силы и моменты, в соответствии с формулами (5.70)–(5.73), могут быть интегрально удовлетворены в некоторой другой точке x_1 .

Если боковые стороны балки свободны от нагрузки, т.е.

$$\bar{q}_x^{(i)} = \bar{q}_y^{(i)} = \bar{q}_z^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

в формуле (5.2), то в соответствии с приближениями (5.8) решение имеет

следующую структуру функций напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(kl)} &= c_{xx,1}^{(kl)} + c_{xx,2}^{(kl)}x, & \sigma_y^{(kl)} &= c_{yy,1}^{(kl)} + c_{yy,2}^{(kl)}x, \\ \sigma_z^{(kl)} &= c_{zz,1}^{(kl)} + c_{zz,2}^{(kl)}x, \\ \tau_{xy}^{(kl)} &= c_{xy,1}^{(kl)}, & \tau_{xz}^{(kl)} &= c_{xz,1}^{(kl)}, & \tau_{yz}^{(kl)} &= c_{yz,1}^{(kl)} + c_{yz,2}^{(kl)}x\end{aligned}\tag{5.83}$$

и функций перемещений

$$\begin{aligned}u^{(kl)} &= c_{u,1}^{(kl)} + c_{u,2}^{(kl)}x + c_{u,3}^{(kl)}x^2, \\ v^{(kl)} &= c_{v,1}^{(kl)} + c_{v,2}^{(kl)}x + c_{v,3}^{(kl)}x^2 + c_{v,4}^{(kl)}x^3, \\ w^{(kl)} &= c_{w,1}^{(kl)} + c_{w,2}^{(kl)}x + c_{w,3}^{(kl)}x^2 + c_{w,4}^{(kl)}x^3.\end{aligned}\tag{5.84}$$

Здесь буквой c с верхними и нижними индексами обозначены некоторые константы, зависящие от граничных условий.

Чтобы сравнить различные модели, перемещения $v(x, 0, 0)$ вблизи зажатого конца балки для Задачи 5.2 (изгиб консоли под действием перерезывающей силы) показаны на Рис. 5.7. На этом графике, кривая, отмеченная точками, соответствует проекционной модели балки, изучаемой в этом разделе с $x_0 = 0$, сплошная кривая представляет решение, полученное на основе Алгоритма 5.3 при $N_0 = 3$; пунктирная кривая – перемещения балки Бернулли, которое имеет вид

$$v_c(x) = \frac{x^2(3l - x)}{6EI}.\tag{5.85}$$

Следует отметить, что все три полиномиальные решения примерно одинаковы в точках, которые расположены далеко от заземленного конца балки ($x > l_S$). Разница между решениями рядом с заземленной частью весьма мала и может быть интерпретирована как некоторые нарушения граничных перемещений.

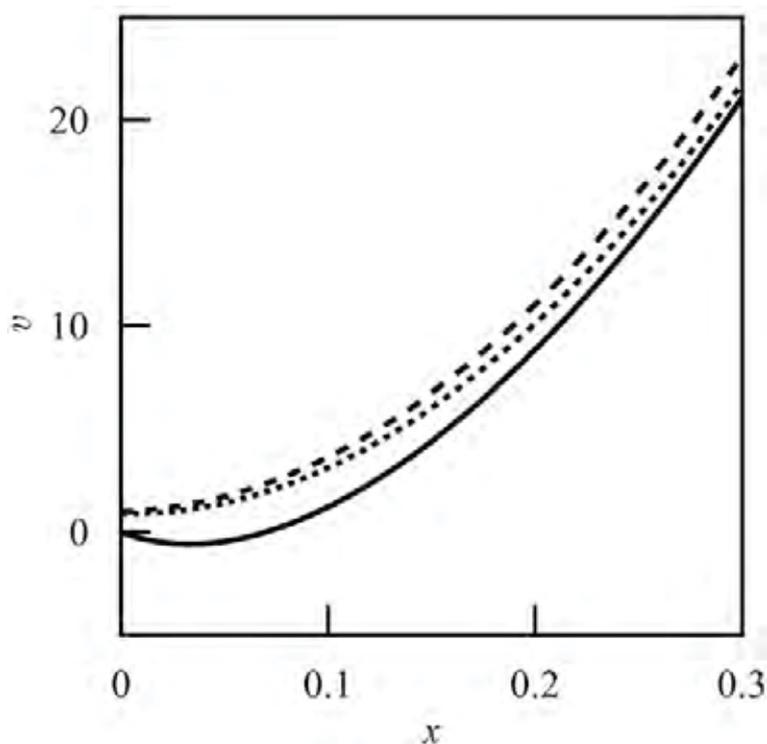


Рис. 5.7. Перемещения $v(x, 0, 0)$ для разных моделей.

5.4. Интегральные характеристики балки с треугольным поперечным сечением

Как было показано в предыдущем разделе, балочное уравнение Бернулли точно описывает изгиб консольной балки. То же самое можно сказать и об уравнении кручения балки. Этот раздел посвящен вопросам, как эффективно определять центр изгиба и крутильную жесткость прямолинейной балки с треугольным сечением в соответствии с проекционными алгоритмами, обсуждавшимися в этой главе.

Рассмотрим снова консольную балку с геометрическими и механическими параметрами, приведенными в разделе 5.2.. Пусть тело нагружено на свободном конце поперечной силой $F_y = 1$ и неизвестным моментом M_x . Другие компоненты нагрузки равны нулю:

$$F_x = F_z = M_y = M_z = 0.$$

Зафиксируем порядок аппроксимации N_0 и решим выше поставленную задачу в рамках проекционной модели балки, обсуждавшейся в разделе 5.3.. Тогда, величину крутящего момента M_x можно найти из условия, что закручивание балки не происходит:

$$\theta(x) = \frac{1}{2S} \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) dS \equiv 0, \quad (5.86)$$

где $\theta(x)$ является интегральным углом закручивания поперечного сечения. Можно показать, что уравнение (5.86) сводится к линейному алгебраическому соотношению относительно неизвестного момента M_x . Действительно, если точка приложения силы смещается вдоль оси z на расстояние

$$z_b = \frac{M_x}{F_y} = M_x, \quad (5.87)$$

где крутящий момент

$$M_x^b = \int_S (\tau_{xy}(z - z_b) - \tau_{xz}y) dS$$

равен нулю, то кручение отсутствует в этой балочной модели.

С помощью аналогичных расчетов, можно найти координату y_b , для которой не существует интегрального поворота сечения, если приложенная касательная сила параллельна оси z . Результирующая точка с координатами $y = y_b$ и $z = z_b$ имеет большое значение. Если силы, действующие перпендикулярно оси x приложены в этой точке, то эта сила не вызывает вращения элементов поперечного сечения и эта точка называется центром изгиба балки.

Если сечение балки имеет две оси симметрии, изгиб центр совпадает с барицентром этого поперечного сечения. Когда есть только одна ось симметрии, то центр изгиба должен лежать на этой оси.

Координаты $y = y_b$ и $z = z_b$ были найдены на основе проекционной модели балки для различных степеней $N_0 = 1, \dots, 5$. На Рис. 5.8 показана координата

z_b как функция числа N_0 . Стоит отметить, что значение z_b довольно точно определяется в рамках этой модели при $N_0 \geq 3$. Если точное местоположение центра изгиба не так важно для практических целей, то его координаты могут быть получены из простейшей модели ($N_0 = 1$). В этом случае положение этой точки находится с относительной погрешностью менее 3%.

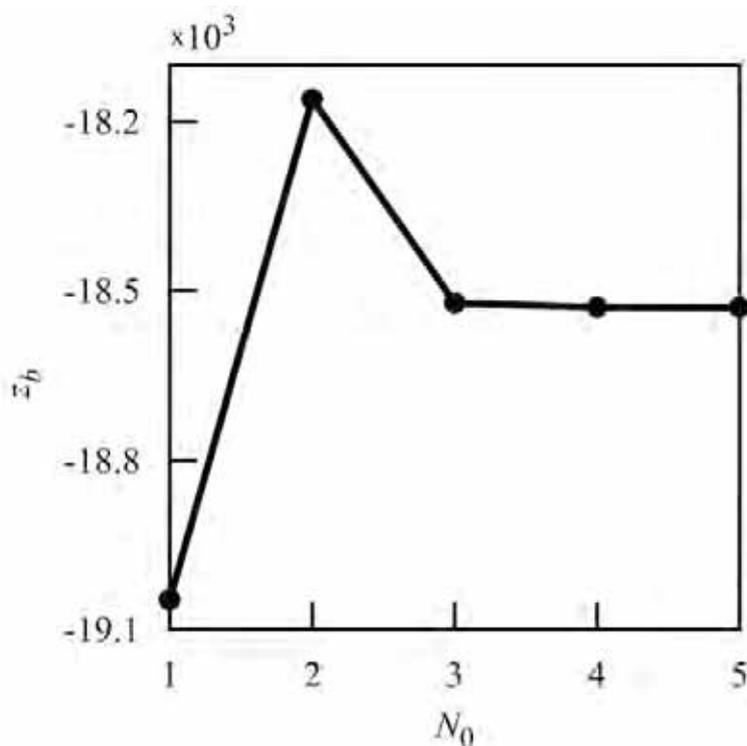


Рис. 5.8. Координата центра изгиба z_b по сравнению с порядком аппроксимации N_0 .

Еще одной важной характеристикой, которая используется в простейших уравнениях кручения

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M_x}{\kappa_t}, \quad \kappa_t = kGJ_\rho \quad (5.88)$$

является крутильная жесткость. Здесь $\theta(x)$ является углом кручения балки относительно оси x , J_ρ – полярный момент инерции, G – модуль сдвига, k является коэффициентом, зависящем от формы поперечного сечения. Величина κ_t называется жесткостью на кручение и ее обратная величина

$$\beta_t = \frac{1}{kGJ_\rho} \quad (5.89)$$

называется крутильной податливостью.

Известно (см., например, [95]), что для определения крутильной жесткости балки нужно решить уравнение Пуассона. Для балок со сложной формой поперечного сечения эта задача не кажется слишком простой.

В рамках проекционной модели балки, процедура определения крутильной жесткости заключается в следующем. Во-первых, задача 5.4, сформулированная в разделе 5.2. решается в полиномах при заданной степени N_0 . После этого крутильная податливость находится из следующего уравнения

$$\beta_t = \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad M_x = 1.$$

Расчеты были проведены для различных значений параметра $N_0 = 1, \dots, 5$. Зависимость крутильной податливости β_t для балки с треугольным сечением от N_0 показана на Рис. 5.9. Эта модель балки при $N_0 \geq 2$ дает довольно точные значения крутильной податливости β_t . Интересно отметить, что величина β_t соответствует значению коэффициента $k = 1$ при $N_0 = 1$.

5.5. Интегральные проекции в задаче на собственные значения

Рассмотрим длинную прямолинейную призму (балка) с треугольным сечением (см. Рис. 5.1). Предполагается, также как и ранее в этой главе, что балка сделана из однородного изотропного материала с объемной плотностью ρ , модулем Юнга E , и коэффициентом Пуассона ν .

Упругие колебания балки описывается системой (4.146), за исключением векторного равновесия, которое должно быть записано покомпонентно в следующем виде

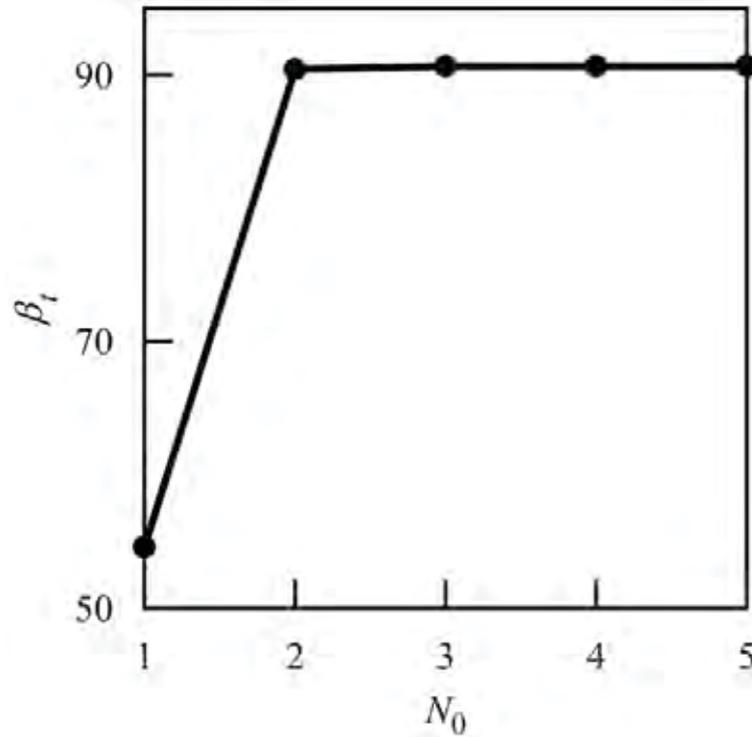


Рис. 5.9. Крутильная податливость β_t для балки с треугольным сечением как функция степени аппроксимации N_0 .

$$\begin{aligned}
 r_x &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u = 0, \\
 r_y &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \omega^2 v = 0, \\
 r_z &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \omega^2 w = 0.
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

В этом разделе будут рассмотрены только свободные балки. Это означает, что перемещения не заданы на гранях призмы. Граничные условия в напряжениях (5.2), (5.3) и (5.6), заданные на боковых сторонах и концах балки можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 q_x^{(i)} &= \tau_{xy} n_y^{(i)} + \tau_{xz} n_z^{(i)} = 0, \\
 q_y^{(i)} &= \sigma_y n_y^{(i)} + \tau_{yz} n_z^{(i)} = 0, \\
 q_z^{(i)} &= \tau_{yz} n_y^{(i)} + \sigma_{xz} n_z^{(i)} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

для Γ_i , $i = 1, 2, 3$ и

$$\begin{aligned}\sigma_x(0, y, z) = \tau_{xy}(0, y, z) = \tau_{xz}(0, y, z) = 0, \\ \sigma_x(l, y, z) = \tau_{xy}(l, y, z) = \tau_{xz}(l, y, z) = 0,\end{aligned}\tag{5.92}$$

соответственно. Предполагается также, что аппроксимация перемещений и напряжений дается формулой (5.8).

Как следует из структуры формул (5.90) и (5.8), условия равновесия могут быть выполнены в соответствии, например, с Алгоритмом 5.1. Таким образом, при составлении аппроксимирующих обыкновенных дифференциальных уравнений на основе проекционного подхода, можно использовать все алгоритмы, рассмотренные в этой главе с незначительными изменениями. Однако, так как перемещения не заданы на границе тела, то нет необходимости исключать некоторые неизвестные функции $v^{(ij)}(x)$, $w^{(ij)}(x)$ в аппроксимациях компонентов перемещений, как предлагается, например, в алгоритме 5.3. Следовательно, эти функции можно использовать, чтобы удовлетворять некоторым дополнительным интегральным нулевыми проекциями уравнений состояния.

Алгоритм 5.4. Опишем схематично модифицированный алгоритм для этой динамической задачи на основе Алгоритмов 5.2 и 5.3, чтобы составить управляющую систему уравнений.

Шаг 1. На этом шаге, выполняется последовательность операций, которая полностью соответствует Алгоритму 5.1. А именно, степени аппроксимаций перемещений и напряжений определяются в соответствии с формулами (5.14) и (5.17). После этого, удовлетворяются однородные граничные условия на боковых сторонах призмы и строятся соответствующие аппроксимации функций напряжений (5.21) и (5.23).

Шаг 2. Во-первых, алгебраическая система уравнений выделяется из формулы (5.24) и решается относительно некоторых функций $\tilde{\sigma}_i$, $i =$

$1, \dots, \tilde{N}_\sigma$, введенных в формуле (5.23). Дифференциальные уравнения, полученные из (5.24), добавляются к подсистеме (5.27). Тогда значение параметра N^0 определяется из уравнения (5.28) и осуществляется ортогонализация аппроксимаций для τ_{xy} и τ_{xz} в соответствии с формулами (5.29)–(5.33).

Шаг 3. Вычисляются полные проекции функций ξ_y , ξ_z и ξ_{yz} , определенные в формуле (5.10), на соответствующие полиномиальные подпространства. Эти уравнения решаются относительно всех остальных коэффициентов $\tilde{\sigma}_i(x)$ и части функций $v^{(ij)}(x)$, $w^{(ij)}(x)$ из аппроксимаций (5.8).

Шаг 4. Наконец, нулевые проекции компонент ξ_{xy} и ξ_{xz} на подпространство P_{N_0+1} добавляются к системе ОДУ.

Рассмотрим последний шаг более подробно. Часть дифференциальных уравнений получается из следующих условий

$$Q_{xy}^{(jk)} = \int_S \xi_{xy} p_{jk} dy dz = 0, \quad Q_{xz}^{(jk)} = \int_S \xi_{xz} p_{jk} dy dz = 0, \quad j + k \leq N^0. \quad (5.93)$$

В этом случае соотношение (5.93) не содержит функций τ_{xy}^O и τ_{xz}^O из формулы (5.30), так как они являются ортогональными подпространству P_{N^0} .

Чтобы учесть эти переменные, выполняется частичная ортогонализация следующих мономов

$$p_i = y^i z^{N^0+1-i}, \quad i = 0, \dots, N^0 + 1. \quad (5.94)$$

Введем полиномы

$$b_y = \sum_{i=0}^{N^0+1} c_y^{(i)} p_i(y, z), \quad b_z = \sum_{i=0}^{N^0+1} c_z^{(i)} p_i(y, z), \quad (5.95)$$

где $c_y^{(i)}$ и $c_z^{(i)}$ – неопределенные константы. Чтобы определить, какие линейные комбинации функций из формулы (5.94) ортогональны компонентам τ_{xy}^O и

τ_{xz}^O из уравнения (5.30), составим следующую систему уравнений

$$\int_S b_y \vartheta_i^{\tau_{xy}} dydz = 0, \quad \int_S b_z \vartheta_i^{\tau_{xz}} dydz = 0, \quad i = N_\tau + 1, \dots, \tilde{N}_\tau. \quad (5.96)$$

Подставляя решение системы (5.96) в уравнение (5.95) и выполняя соответствующие преобразования, получим следующие выражения

$$b_y^O = \sum_{i=0}^{N_p^0} c_y^{(0i)} p_y^{(0i)}(y, z), \quad b_z^O = \sum_{i=0}^{N_p^0} c_z^{(0i)} p_z^{(0i)}(y, z), \quad (5.97)$$

где $p_y^{(0i)}$ и $p_z^{(0i)}$ являются новыми базисными функциями, ортогональные функциям τ_{xy}^O и τ_{xz}^O . Размерность N_p^0 этих полиномов вводится в формулу (5.97) в соответствии с

$$N_p^0 = N_\tau + N^0 + 2 - \tilde{N}_\tau.$$

Базисные функции $p_y^{(1i)}(y, z)$ и $p_z^{(1i)}(y, z)$ для $i = 1, \dots, \tilde{N}_\tau - N_\tau$, которые дают нетривиальные проекции на напряжения τ_{xy}^O и τ_{xz}^O , определяются аналогично из системы линейных уравнений

$$\int_S b_y p_y^{(0i)} dydz = 0, \quad \int_S b_z p_z^{(0i)} dydz = 0, \quad i = 1, \dots, N_p^0. \quad (5.98)$$

Тогда дополнительные обыкновенные дифференциальные уравнения получаются следующим образом

$$\int_S \left(\xi_{xy} p_y^{(1i)} + \xi_{xz} p_z^{(1i)} \right) dydz = 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{N}_\tau - N_\tau. \quad (5.99)$$

Точно так же, как это было сделано в этой главе, общее решение строится для полученной системы уравнений

$$I \frac{da}{dx} + K(\omega) a = 0, \quad (5.100)$$

где $a(x) \in \mathcal{R}^{N_d}$ есть вектор проектных параметров. В этом случае характеристическое уравнение принимает вид

$$\det (K(\omega) + \lambda I) = P_{N_d}(\lambda) = 0 , \quad (5.101)$$

где N_d является дифференциальным порядком системы. В отличие от статического случая уравнение (5.101) не содержит нулевой корень $\lambda(\omega) = 0$ при $\omega \neq 0$. Иными словами, общее решение задачи на собственные значения является линейной комбинацией только экспоненциальных функций.

Собственные частоты ω_i для $i = 1, \dots, N_d$ и соответствующие формы напряжений и перемещений находятся из условия, что определитель D алгебраической системы, которая получается после подстановки общего решения системы (5.100) в граничные условия (5.92), равен нулю.

5.6. Естественные колебания балки с треугольным поперечным сечением

Рассмотрим прямолинейную балку, показанную на Рис. 5.1 с параметрами, приведенными в разделе 5.2.. В силу симметрии относительно оси z , управляющая система уравнений может быть разложена на две независимые подсистемы таким образом, как описано в главе 4. При этом одна из подсистем описывает изгибно-крутильные (bt) и крутильно-изгибные (tb) движения балки. Эта система включает только четные функции компонент σ_x относительно переменной z . Другая подсистема описывает изгибно-продольные (bl) и продольно-изгибные (lb) колебания балки. Она включает в себя только нечетные функции σ_x из формулы (5.8).

Объединение изгиба либо с растяжением либо с кручением вызвано асимметрией поперечного сечения балки относительно оси y . В этом случае собственные колебания не могут быть разделены на четыре независимых типа: продольные, изгибные, крутильные движения, как это предполагалось в таб-

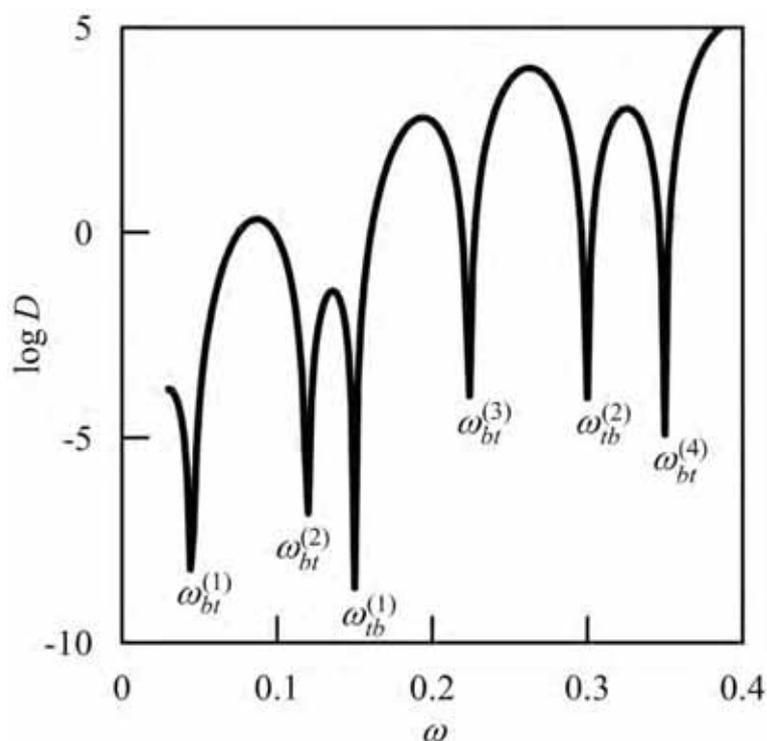


Рис. 5.10. Определитель системы D в зависимости от частоты ω для изгибно-крутильных ($\omega_{bt}^{(i)}$) и крутильно-изгибных ($\omega_{tb}^{(i)}$) движений.

лице 4.6. Тем не менее, только один из типов полей перемещений и напряжений, описанных в этой таблице, вносит наибольший вклад в соответствующие собственные формы колебаний. Это является причиной, чтобы ввести классификацию собственных частот и форм двумя буквами (сокращение соответствующих полей). Первая буква обозначает доминирующую форму.

Проанализируем определитель D граничной системы следующий из формулы (5.92). Его поведение как функция от частоты ω для этих двух подсистем представлена на Рис. 5.10 и 5.11 в логарифмическом масштабе. Собственные частоты отмечены символами $\omega_{bt}^{(i)}$, $\omega_{tb}^{(i)}$, $\omega_{bl}^{(i)}$, $\omega_{lb}^{(i)}$, которым соответствуют соответствующие типы движений балки.

Численные значения собственных частот для соответствующих мод, полученные в соответствии с Алгоритмом 5.4 при $N_0 = 3$, приведены в таблице 5.1.

Скорость сходимости приближенных собственных значений к их точным значениям является важной характеристикой эффективности алгоритма. Рисунок 5.12 показывает изменение величины первой изгибно-крутильной соб-

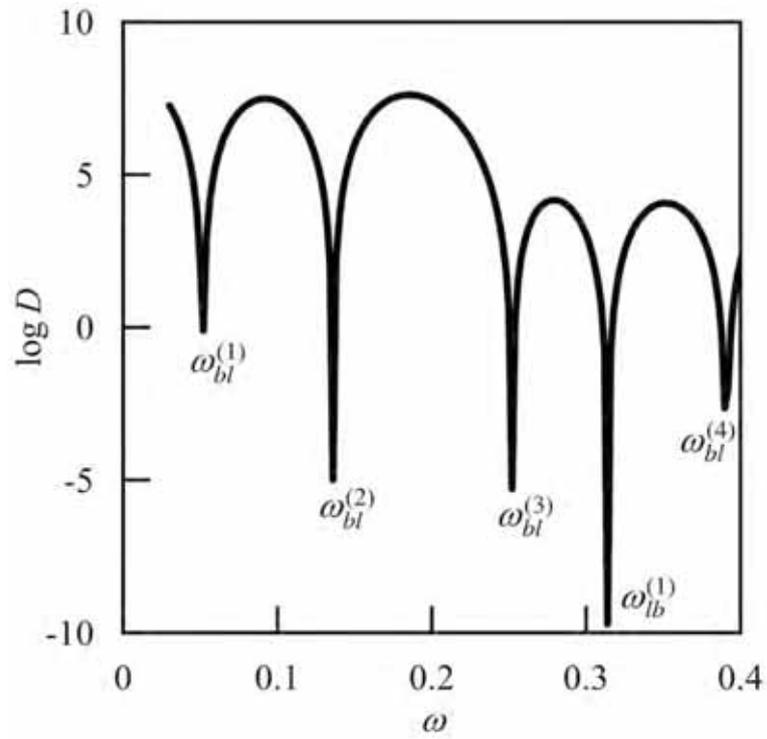


Рис. 5.11. Определитель системы D в зависимости от частоты ω для изгино-продольных ($\omega_{bl}^{(i)}$) и продольно-изгибных ($\omega_{lb}^{(i)}$) движений балки.

Таблица 5.1

Собственные частоты для балки с треугольным сечением.

i	1	2	3	4
$\omega_{bt}^{(i)}$	0.0448	0.1194	0.2250	0.3535
$\omega_{tb}^{(i)}$	0.1498	0.2995	—	—
$\omega_{bl}^{(i)}$	0.0515	0.1359	0.2521	0.3908
$\omega_{lb}^{(i)}$	0.3140	—	—	—

ственной частоты $\omega_{bt}^{(1)}$ как функции степени приближения N_0 . Следует отметить, что значение $\omega_{bt}^{(1)}$ уменьшается с ростом N_0 и частоты, вычисленные при $N_0 = 3$ и $N_0 = 4$ отличаются друг от друга лишь в шестом знаке после запятой.

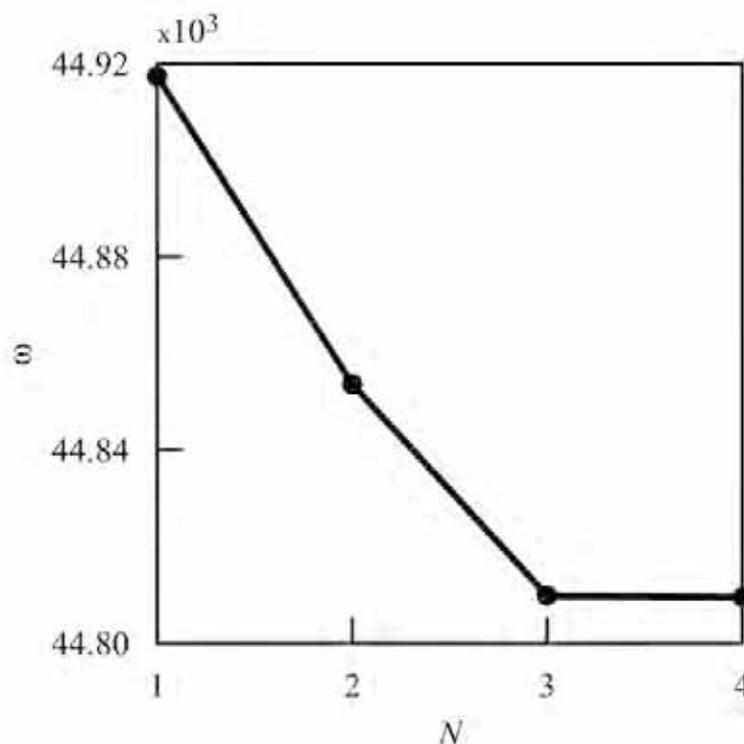


Рис. 5.12. Собственная частота $\omega_{bt}^{(1)}$ как функция степени аппроксимации N_0 .

Другой характеристикой эффективности численного алгоритма является относительная погрешностью Δ , которая может быть определена следующим образом:

$$\Delta = \frac{\Phi}{W_\sigma} \cdot 100\%. \quad (5.102)$$

Здесь Φ – функционал энергетической ошибки в формуле (4.77), W_σ является энергией напряжений, выраженная через тензор σ в соответствии с

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : C^{-1} : \sigma d\Omega \geq 0. \quad (5.103)$$

Так как оба квадратичных функционала Φ и W_σ однородно зависят только от одной неопределенной константы в собственных формах, отношение

этих величин (5.102) не зависит от этой постоянной. Следовательно, Δ является параметром, который однозначно отражает качество приближенных решений.

Зависимость ошибки Δ от параметра аппроксимации N_0 представлена на Рис. 5.13 в логарифмическом масштабе для $\omega_{bt}^{(1)}$. Этот график показывает, что величина Δ быстро убывает с увеличением степени приближения и достигает значения равного $\Delta = 10^{-4} \%$ при $N_0 = 4$.

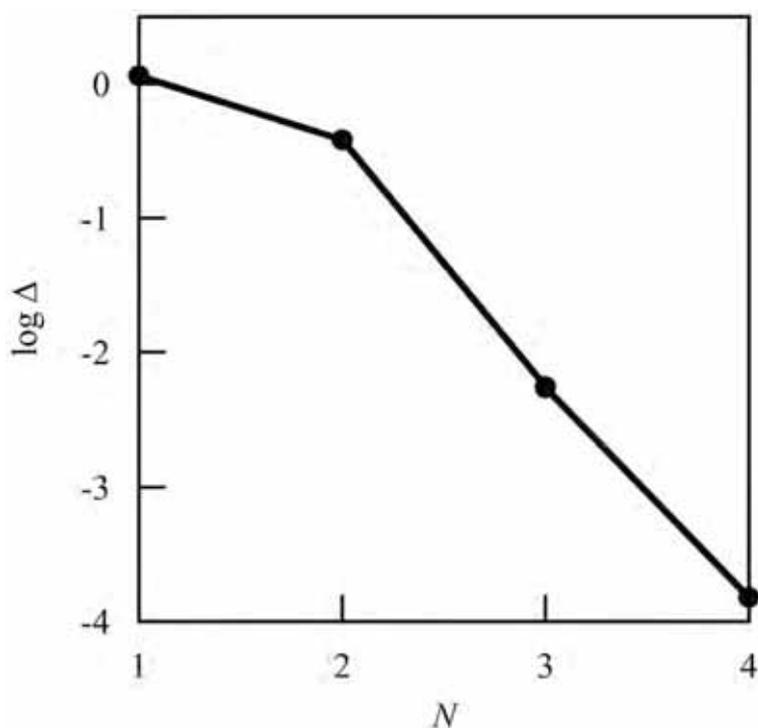


Рис. 5.13. Относительная погрешность $\log \Delta$ по сравнению со степенью аппроксимации N_0 при $\omega_{bt}^{(1)}$.

Распределение энергетической ошибки

$$\varphi_x(x) = \int_S \varphi(x, y, z) dS \quad (5.104)$$

вдоль длины балки может служить локальной характеристикой приближенного решения. Здесь плотность энергетической ошибки $\varphi(x, y, z)$ определяется формулой (5.78) и интегрирование выполняется по площади поперечного сечения балки S . Функция $\varphi_x(x)$ показана на Рис. 5.14 для первой изгибно-

крутильной частоты $\omega_{bt}^{(1)}$ при $N_0 = 3$. Видно, что тригонометрические функции, которые присутствуют в общем решении, существенно влияют на форму этой ошибки.

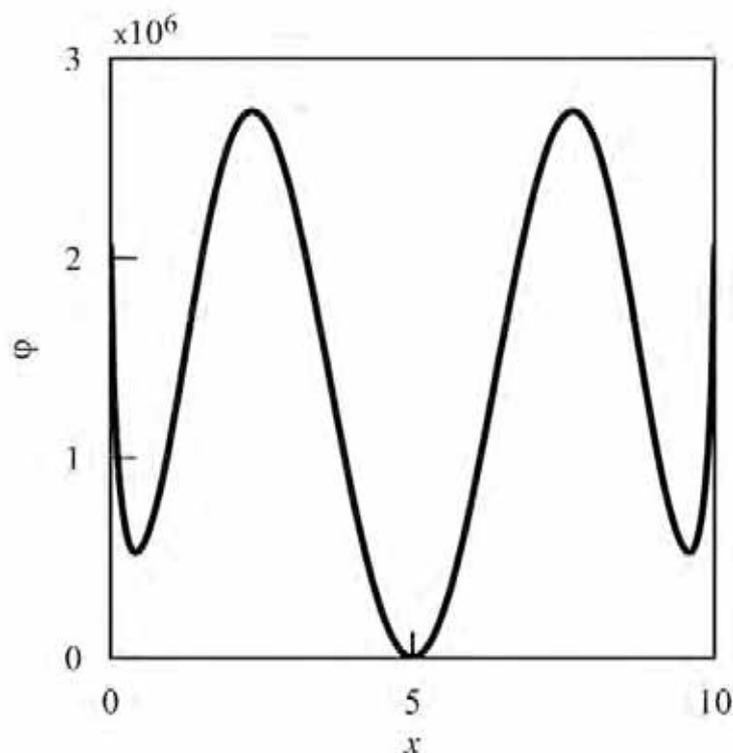


Рис. 5.14. Распределение линейной плотности ошибки $\varphi_x(x)$ вдоль длины балки для $\omega = \omega_{bt}^{(1)}$ при $N_0 = 3$.

Функция $\varphi(x_0, y, z)$, вычисленная при $x_0 = l/2$, показана на Рис. 5.15. Ее характерной особенностью в динамическом, также как и в статическом случае (см. Рис. 5.5) является то, что значения этой функции близки к нулю почти всюду, за исключением узкой области вблизи краев и углов сечения.

Собственные частоты, представленные в таблице 5.1, можно сравнить с собственными частотами, которые получаются из классических уравнений балки (модель Эйлера - Бернулли):

$$EJ_z \frac{d^4 v_c}{dx^4} - S\rho\omega_z^2 v_c = 0$$

$$EJ_y \frac{d^4 w_c}{dx^4} - S\rho\omega_y^2 w_c = 0.$$
(5.105)

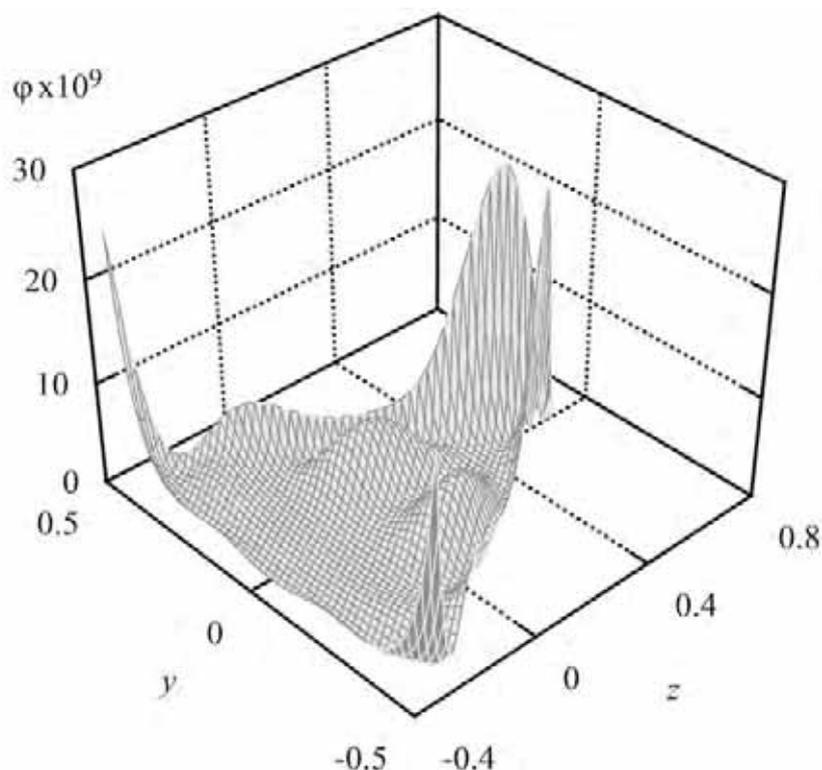


Рис. 5.15. Плотность энергетической ошибки $\varphi(x_0, y, z)$ в поперечном сечении балки при $x_0 = l/2$.

Здесь поперечные смещения средней линии балки v_c и w_c направлены вдоль координатных осей y и z , соответственно, ω_y и ω_z – неизвестные частоты; EJ_y и EJ_z изгибные жесткости относительно соответствующих осей, которые равны

$$EJ_y = \frac{1}{36}, \quad EJ_z = \frac{1}{48}$$

при заданных параметрах.

Следующие частотные соотношения

$$\frac{\omega_y^{(1)} - \omega_{bl}^{(1)}}{\omega_y^{(1)}} = 2.2, \quad \frac{\omega_z^{(1)} - \omega_{bt}^{(1)}}{\omega_z^{(1)}} = 1.9\% \quad (5.106)$$

получены для первых классических изгибных частот $\omega_y^{(1)}$ и $\omega_z^{(1)}$ относительно $\omega_{bl}^{(1)}$ и $\omega_{bt}^{(1)}$. Можно сделать вывод, принимая во внимание формулу (5.106), что проекционная и классическая модели балки находятся в хорошем соответствии друг с другом. Тем не менее, эта разница стремительно растет, когда

серийный номер собственной частоты m растет так, что даже при $m = 3$ различие составляет около 20%. Этот факт отражен на рисунке 5.16.

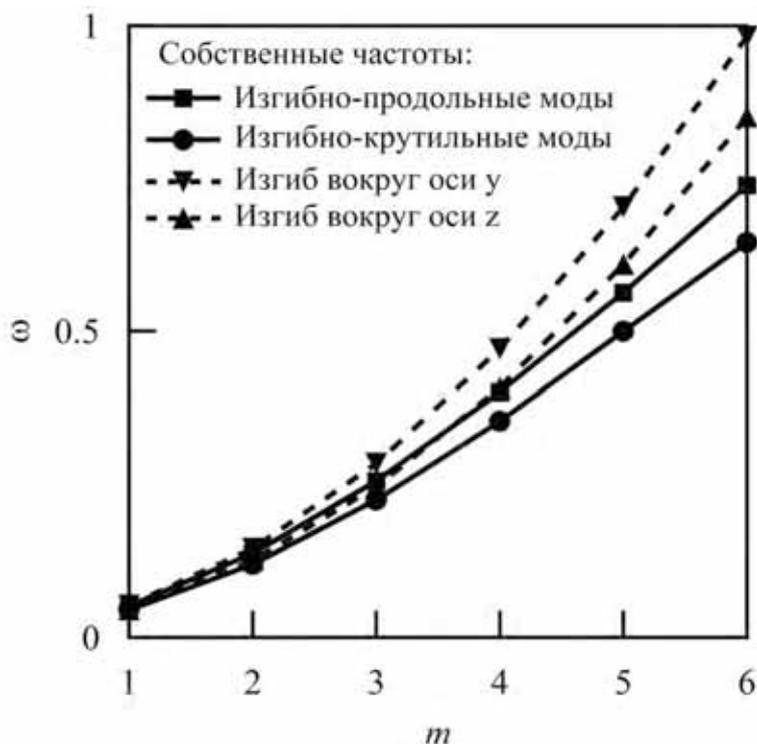


Рис. 5.16. Классические собственные частоты $\omega_y^{(m)}$, $\omega_z^{(m)}$ (пунктирные линии), а также изгибно-крутильная $\omega_{bt}^{(m)}$ и изгибно-продольная $\omega_{bl}^{(m)}$ собственные частоты (сплошные линии) по сравнению с их серийным номером M .

Характерной особенностью этих зависимостей является то, что следующие неравенства

$$\omega_y^{(m)} > \omega_z^{(m)}, \quad \omega_{bl}^{(m)} > \omega_{bt}^{(m)}$$

всегда справедливы при заданных параметрах балки. Однако, даже если $m > 3$ следующее неравенство $\omega_y^{(m)} > \omega_{bt}^{(m)}$ справедливо. Это свойство можно объяснить тем, что модель Эйлера - Бернулли переоценивает собственные частоты трехмерного упругого тела. Например, эта модель не учитывает инерцию вращения балки, а также движений, связанных с деформацией поперечного сечения.

Первая продольно-изгибная форма собственных колебаний с частотой $\omega_{lb}^{(1)}$ показана на Рис. 5.17. В отличие от формы продольных колебаний, соответствующей модели Эйлера - Бернулли, собственная продольно-изгибная фор-

ма характеризуется не только продольными смещениями $u_0(x)$, но и поперечными смещениями $w_0(x)$. Здесь u_0 и w_0 являются следующими интегральными характеристиками

$$u_0(x) = \frac{1}{S} \int_S u(x, y, z) dS, \quad w_0(x) = \frac{1}{S} \int_S w(x, y, z) dS, \quad (5.107)$$

Амплитуды $u_0(x)$ и $w_0(x)$ вычисленные при $N_0 = 3$ можно сравнить с помощью следующего отношения

$$\beta_1 = \frac{\max |u_0|}{\max |w_0|} = 48674. \quad (5.108)$$

Это величина показывает, что связь между продольным и поперечным колебаниям является довольно слабой и ею можно пренебречь при определенных допущениях. Для лучшей визуализации, обе формы помещены на одной фигуре и смасштабированы соответствующим образом с использованием множителя β_1 .

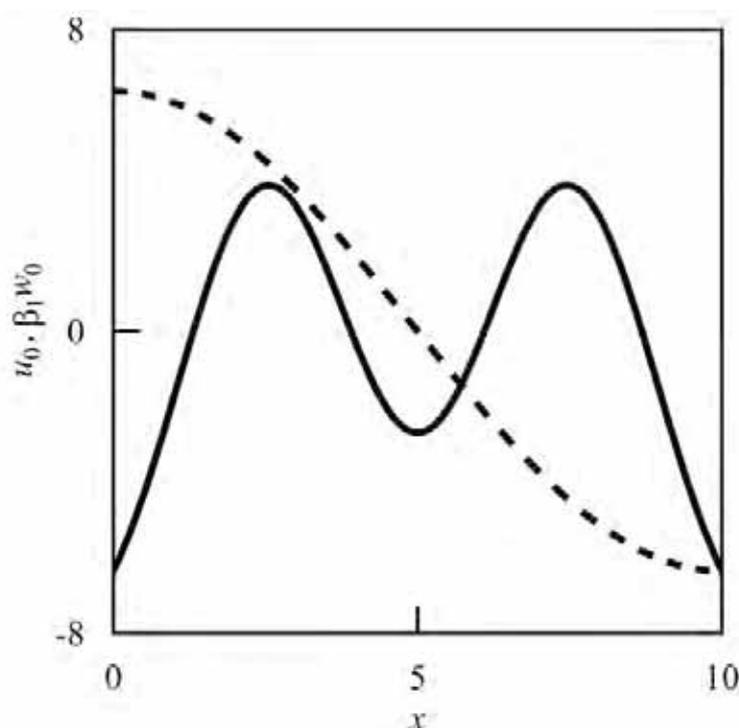


Рис. 5.17. Изгибно-продольная собственная форма: боковые (сплошная линия) и продольные (пунктирная кривая) смещения для частоты $\omega_{lb}^{(1)}$.

Первая форма изгибно-продольных колебаний, соответствующих частоте $\omega_{bl}^{(1)}$ показана на Рис. 5.18. Эта форма включает не только компоненты изгиба w_0 , как следует из классических представлений, но, кроме того, продольные смещения u_0 . При этом поперечные отклонения доминируют над продольными перемещениями. Обратное амплитудное отношение

$$\beta_2 = \frac{\max |w_0|}{\max |u_0|} = 68900. \quad (5.109)$$

при $\omega_{bl}^{(1)}$ является довольно большим, в отличие от продольных изгибных колебаний при $\omega_{lb}^{(1)}$. С учетом формулы (5.109), влиянием продольных перемещений можно пренебречь в большинстве случаев.

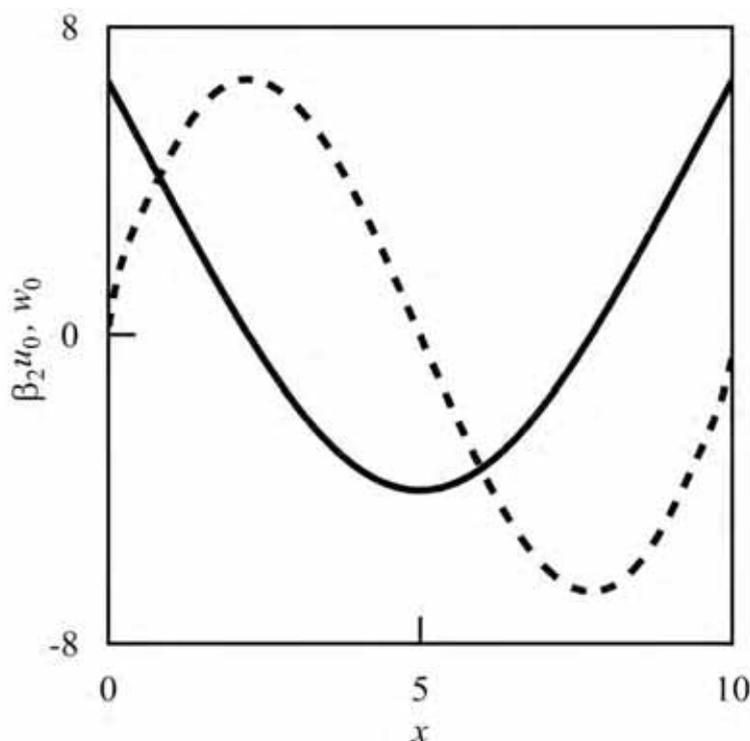


Рис. 5.18. Изгибно-продольная собственная форма: боковые (сплошная линия) и продольные (пунктирная кривая) смещения, соответствующие частоте $\omega_{bl}^{(1)}$.

Амплитудные соотношения существенно меняются при крутильно-изгибных и изгибно-крутильных колебаниях. Первая собственная форма крутильно-изгибных колебаний показана на Рис. 5.19. Для сравнения изгиб-

ных и крутильных движений, введем следующие функции

$$\vartheta = h\theta(x), \quad \theta(x) = \frac{1}{2S} \int_S \left(\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \right) dS \quad (5.110)$$

и

$$v_0(x) = \frac{1}{S} \int_S v(x, y, z) dS \quad (5.111)$$

(пунктирная и сплошная линии на Рис. 5.19, соответственно). Здесь $v_0(x)$ является интегральным поперечным перемещением; $\theta(x)$ является средним углом поворота поперечного сечения относительно оси x . Функция $\vartheta(x)$ является доминирующей для данного типа натуральных движений. Тем не менее, отношение амплитуд

$$\beta_3 = \frac{\max |\vartheta|}{\max |v_0|} \approx 214 \quad (5.112)$$

не столь велико, как в двух предыдущих случаях. Следовательно, в некоторых случаях не следует пренебрегать поперечными смещениями.

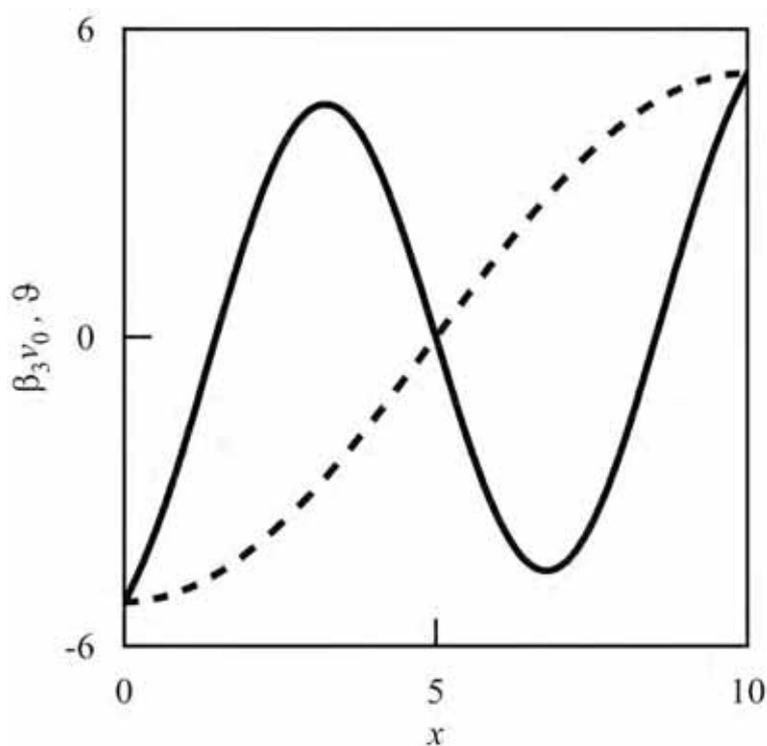


Рис. 5.19. Крутильно-изгибная собственная форма, соответствующая собственной частоте $\omega_{tb}^{(1)}$.

Первая изгибно-крутильная форма собственных колебаний балки показана на Рис. 5.20. Этот тип движений может быть охарактеризован интегральным поперечным смещением $v_0(x)$ (сплошная линия). Тем не менее, отношение амплитуд

$$\beta_4 = \frac{\max |v_0|}{\max |\vartheta|} \approx 288 \quad (5.113)$$

не так велико, чтобы пренебрегать деформациями сдвига $\vartheta(x)$ (пунктирная кривая на Рис. 5.20).

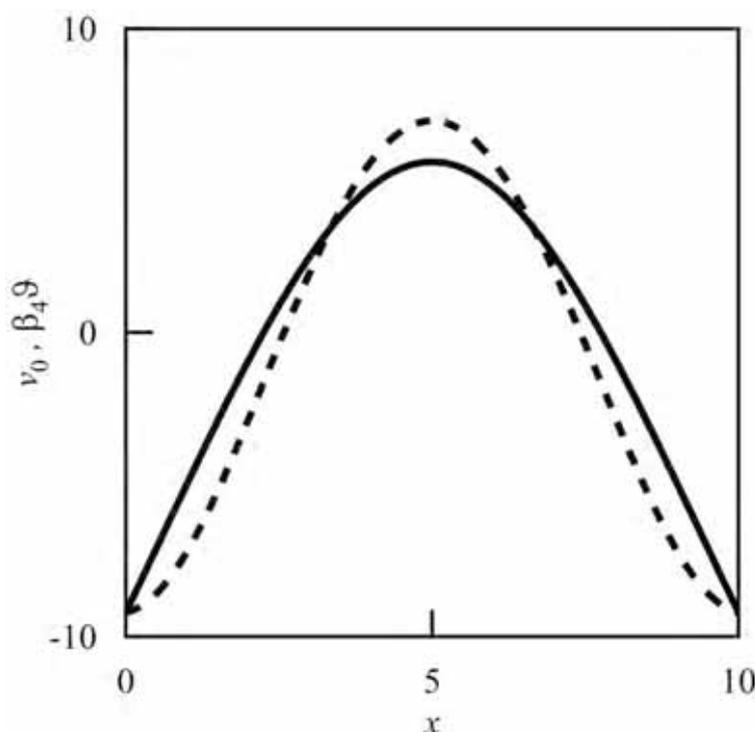


Рис. 5.20. Изгибно-крутильная собственная форма, соответствующая собственной частоте $\omega_{bt}^{(1)}$.

Отметим, что если номер собственного значения m растет, то значение амплитудного отношения уменьшается. Таким образом, эта величина равна

$$\frac{\max |v_0|}{\max |\vartheta|} \approx 11 \quad (5.114)$$

для шестой изгибно-крутильной частоты ($\omega_{bt}^{(6)} = 0.6455$). Деформированная форма балки, соответствующая собственной частоте $\omega_{bt}^{(6)}$, схематически представлена на Рис. 5.21. На этом рисунке показано пять характерных сечений

с координатами $x = 0, 2.7, 5, 7.3, 10$, а также вливающие кривые краев призмы. Как видно на этом рисунке сечения имеют заметные деформации в своей плоскости и, кроме того, весьма существенно поворачиваются вокруг оси z (это особенно заметно для концевых поперечных сечений).

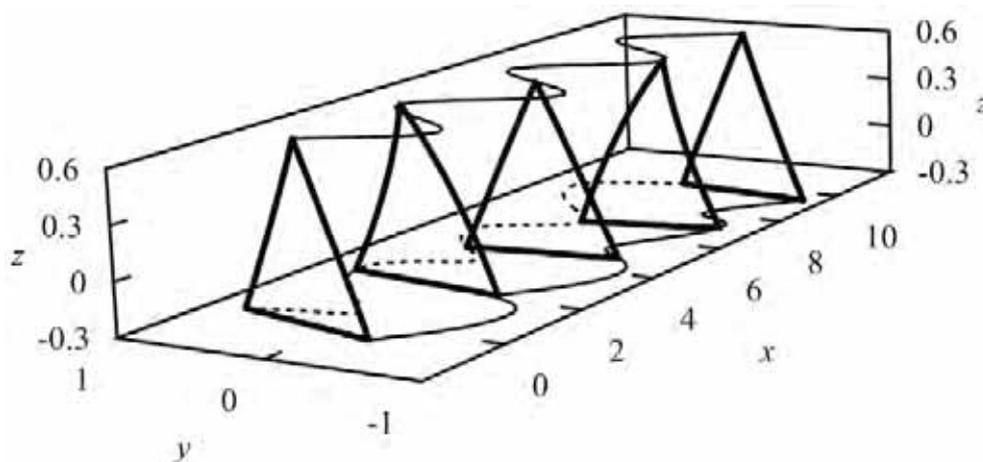


Рис. 5.21. Деформированная форма балки, соответствующая изгибно-крутильной собственной частоте $\omega_{bt}^{(6)}$.

Поперечное сечение, деформированное в своей плоскости показано на Рис. 5.22 при $x = 7.3$. Можно отметить, что гипотеза Бернулли о прямых линиях значительно нарушается. Это особенно заметно для высоты треугольника, показанной на рисунке пунктирной кривой.

Стоит отметить, что гипотеза Бернулли о плоских поперечных сечениях балки также нарушена. Распределение функции перемещений $u(x, y, z)$ при $x = 7.3$ и депланация поперечного сечения показаны на Рис. 5.23. Таким образом, значительная деформация поперечного сечения балки в своей плоскости и его депланация приводят к тому, что собственные частоты, получающиеся из уравнения модели Эйлера-Бернулли, существенно отличаются от частот, найденных проекционным подходом в рамках линейной теории упругости. Кроме того, эта разница увеличивается с ростом номера N собственной частоты. Следует отметить, что для достаточно длинных балок ($l/h > 100$) классическая теория позволяет получить несколько собственных частот с высокой степенью достоверности. Однако это довольно трудная задача, чтобы

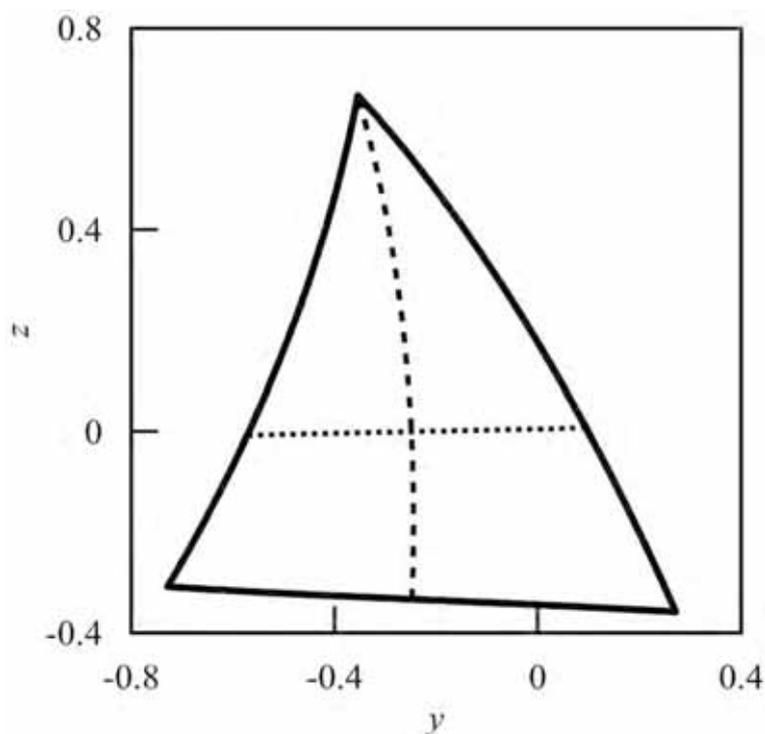


Рис. 5.22. Деформированная форма поперечного сечения балки при $x = 7.3$ для изгибно-крутильной собственной частоты $\omega_{bt}^{(6)}$.

априори определить количество таких частот .

5.7. Вынужденные колебания балки с треугольным сечением

Влияние асимметрии поперечного сечения на собственные частоты и формы колебаний балки были обсуждены в предыдущем разделе. Также было отмечено, что собственные движения таких балок не могут быть разделены на чисто продольные, изгибные или крутильные. Из-за этой асимметрии такие движения оказываются связанными друг с другом.

В приложениях, также довольно важно исследовать колебания, возникающие при нагружении балок периодическими силами с частотами, близкими к собственным частотам. Рассмотрим снова прямолинейную балку с треугольным сечением. Механические и геометрические параметры берутся такими же, как и в разделе 5.2.. Предполагается, что боковая поверхность балки свободна от нагрузки и только два типа периодического нагружения торцов балки заданы.

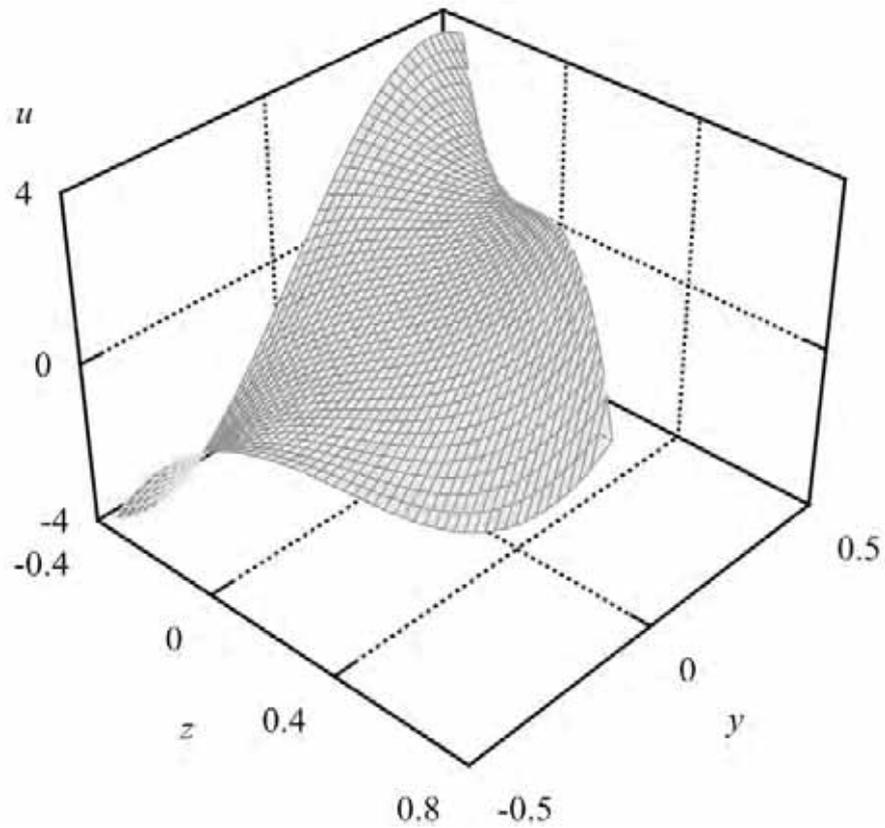


Рис. 5.23. Деформация поперечного сечения балки при $x = 7.3$ для изгибно-крутильной собственной частоты $\omega_{bt}^{(6)}$.

Для первого типа считается, что вынужденные движения балки возбуждаются только изгибающим моментом

$$\tilde{M}_z^0(t) = \pm M_z(0) \cos \omega_f t, \quad \tilde{M}_z^l(t) = M_z(l) \cos \omega_f t. \quad (5.115)$$

Другие типы нагрузок отсутствуют

$$F_x(0) = F_x(l) = F_y(0) = F_y(l) = F_z(0) = F_z(l) = 0, \quad (5.116)$$

$$M_x(0) = M_x(l) = M_y(0) = M_y(l) = 0.$$

Другой тип нагрузки балки характеризуется только крутящим моментом

$$\tilde{M}_x^0(t) = \pm M_x(0) \cos \omega_f t, \quad \tilde{M}_x^l(t) = M_x(l) \cos \omega_f t \quad (5.117)$$

при ограничениях

$$F_x(0) = F_x(l) = F_y(0) = F_y(l) = F_z(0) = F_z(l) = 0, \quad (5.118)$$

$$M_y(0) = M_y(l) = M_z(0) = M_z(l) = 0.$$

Здесь интегральные силы и моменты имеют следующий вид

$$F_x(x) = \int_S \sigma_x dS, \quad F_y(x) = \int_S \tau_{xy} dS, \quad F_z(x) = \int_S \tau_{xz} dS,$$

$$M_x(x) = \int_S (z\tau_{xy} - y\tau_{xz}) dS, \quad M_y(x) = \int_S z\sigma_x dS, \quad (5.119)$$

$$M_z(x) = \int_S y\sigma_x dS;$$

ω_f это частота внешнего возбуждения. Выберем два значения

$$\omega_f^0 = 0.0448 \approx \omega_{bt}^{(1)}, \quad \omega_f^1 = 0.1498 \approx \omega_{tb}^{(1)}, \quad (5.120)$$

которые близки к резонансным частотам, полученным в разделе 5.6..

Во-первых, рассмотрим случай, когда балка нагружена только крутящим моментом в соответствии с условием (5.117) с амплитудами

$$M_x(0) = M_x(l) = 1$$

и частотой ω_f^0 . Это значение близко к первой изгибно-крутильной частоте собственных колебаний балки. В соответствии с классической теорией балки, такая нагрузка должна возбуждать только малые повороты поперечных сечений относительно оси x и не вызывать резонансного скручивания балки. Форма стационарных колебаний для данной нагрузки показана на Рис. 5.24. Пунктирная кривая соответствует функции $\vartheta(x)$ (кручение балки). Сплошная кривая представляет изгиб балки (интегральное боковое смещение $v_0(x)$). В этом случае отношение амплитуд соответствует формуле (5.113).

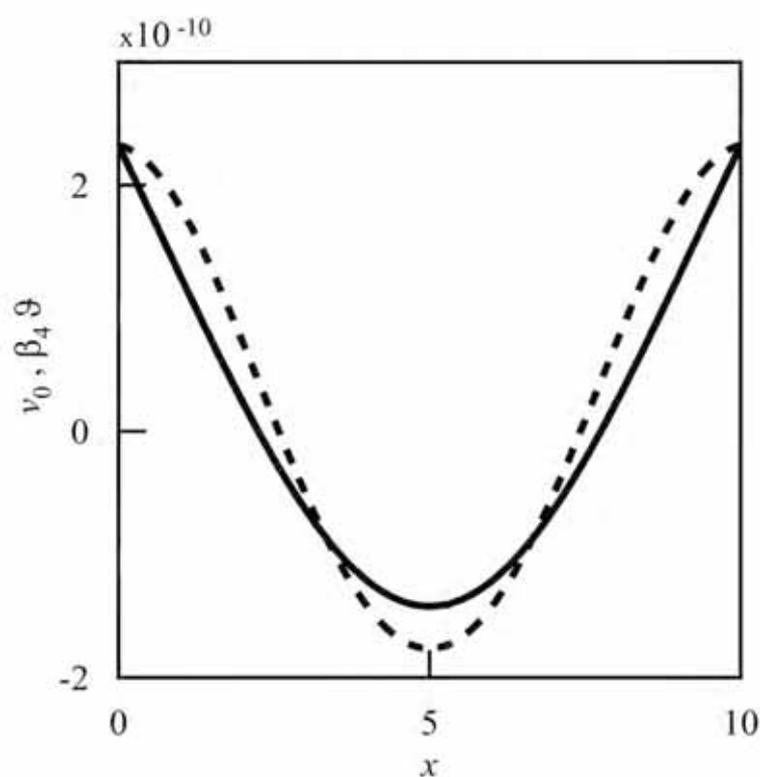


Рис. 5.24. Стационарная форма колебаний балки при ω_f^0 .

Отметим, что весьма ограниченными периодическими поворотами балки возбуждаются большие изгибные колебания. В этом случае балку с треугольным сечением можно рассматривать как механический усилитель (редуктор), который передает значительную часть энергии крутильных колебаний в изгибные. Конечно, этот вывод соответствует идеальному случаю. На самом деле, такие внешние и внутренние факторы, как трение, вязкость и т.д. могут существенно влиять на этот процесс. Однако, это явление можно наблюдать экспериментально для упругих конструкций с высокой добротностью.

Если колебания призмы возбуждаются асимметричным моментом

$$M_x(0) = -M_x(l) = 1$$

то никаких резонансных явлений не наблюдается. Это может быть объяснено тем, что первая форма естественных изгибно-крутильных колебаний балки является симметричной относительно средней точки балки ($x = 5$). Асиммет-

ричный внешний момент может привести, например, к большим амплитудам второй формы, соответствующей $\omega_{bt}^{(2)}$.

Для колебаний, возбуждаемых изгибающим моментом, приведенным в формуле (5.117), эффект аналогичен предыдущему случаю. В связи с антисимметрией первой крутильно-изгибной моды колебаний балки относительно ее средней точки при $x = \frac{l}{2}$, установившиеся колебания, соответствующие этой форме, реализуются при действии изгибающих моментов

$$M_z(0) = -M_z(l) = 1$$

с частотой ω_f^1 . Рисунок 5.25 показывает форму установившихся колебаний при заданных внешних нагрузках. В то же время, отношение амплитуд соответствует формуле (5.112).

В отличие от предыдущего случая, балка передает значительную часть изгибной энергии в крутильные движения. При симметричной нагрузке $M_z(0) = M_z(l) = 1$ резонансный эффект отсутствует. Резонансные явления балки при этом виде нагружения могут происходить только при крутильно-изгибной собственной частоте с четным номером.

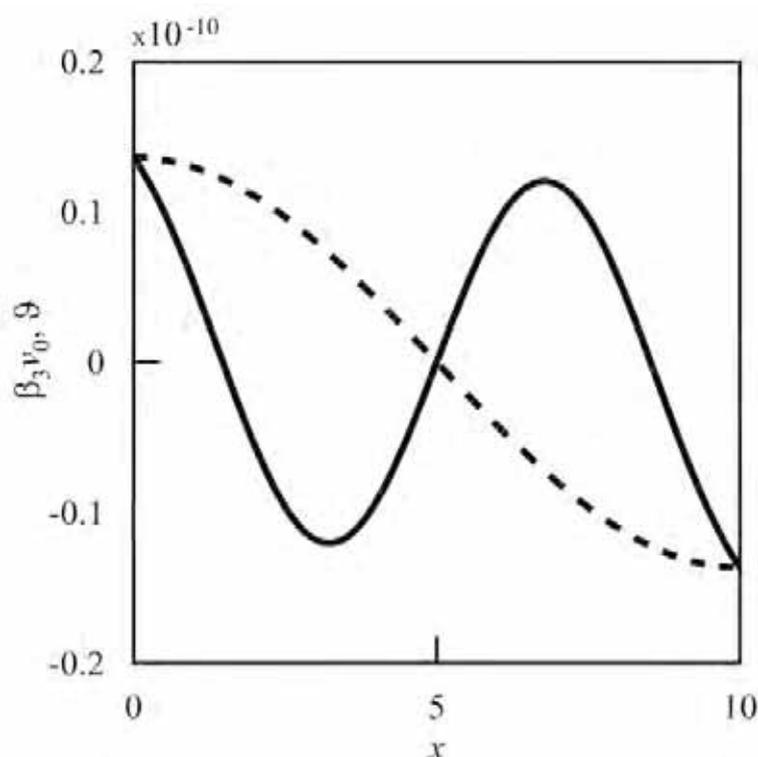


Рис. 5.25. Стационарная форма колебаний при внешней частоте ω_f^1 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель работы заключалась в исследовании интегро-дифференциальных постановок задач линейной теории упругости, разработке вариационных и проекционных подходов к решению таких задач, построению двусторонних энергетических оценок качества приближенных решений.

В диссертации даны новые вариационные постановки краевых и спектральных задач линейной теории упругости, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, а также смешанными граничными условиями. Полученные интегро-дифференциальные формулировки сводятся к нахождению минимума квадратичных функционалов состояния системы при заданных дифференциальных ограничениях.

Выведены необходимые условия стационарности рассмотренных функционалов. Показано, что условия стационарности этих функционалов совместно с уравнениями равновесия и граничными условиями эквивалентны полной

системе уравнений линейной теории упругости.

Выявлена связь предложенных вариационных постановок с классическими вариационными принципами минимума полной потенциальной и дополнительной энергий. При этом, интегро-дифференциальные формулировки часто позволяют разделить задачу на две независимые подзадачи в перемещениях и в напряжениях, соответственно.

Получены явные двусторонние оценки запасаемой упругой энергии для различных типов граничных условий.

Разработан адаптивный алгоритм решения задач упругости с использованием кусочно-полиномиальной аппроксимации высоких порядков кинематически допустимых перемещений и равновесных напряжений для произвольной триангуляции области. Обсуждены различные стратегии уточнения и адаптации сетки, разработанные на основе явных локальных и интегральных двусторонних энергетических оценок приближенного решения.

Разработаны вариационные, асимптотические и проекционные подходы на основе полу-дискретных аппроксимаций вектора перемещений и тензора напряжений, включая, с одной стороны, полиномиальные разложения конечной размерности относительно некоторых координатных компонентов и, с другой стороны, неизвестные функции относительно оставшейся компоненты. Представлены соответствующие алгоритмы для двух-и трехмерного моделирования статических задач, а также анализа свободных колебаний упругих балок.

На основе проекционного подхода разработан численный алгоритм решения пространственных статических задач для упругих балок с несимметричным поперечным сечением. Предложенный подход позволяет также эффективно вычислять такие геометрические и механические характеристики, как изгибная и крутильная жесткость, координаты центра изгиба. Количественно оценено влияние формы поперечного сечения и граничных условий (эффект Сен-Венана) на деформации балки.

Подход, разработанный на основе проекционной техники, распространен

на трехмерные динамические задачи. Проведен частотно-волновой анализ свободных и вынужденных колебаний балки. Характерные особенности собственных частот и форм проиллюстрированы на примере комбинированных крутильных, продольных и поперечных колебаний балок с треугольным сечением. Обсуждены спектральные характеристики балок и их специальные резонансные свойства связанные с отсутствием симметрии.

Список литературы

1. Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев, С.В. Нестеров. Собственные колебания тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 4. С. 129-142.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Собственные колебания однородной эллиптической мембраны // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 179-190.
3. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986, Стр. 336.
4. Амосов А.А., С.И. Жаворонок. К проблеме редукции плоской задачи теории упругости и последовательности одномерных краевых задач// Механика композитных материалов и конструкций, 1997, №1, с.69-80.
5. Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Равновесие криволинейных разрезов с учетом образования областей налегания, скольжения и сцепления берегов трещины. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2000. № 3. С. 137.
6. Эволюция равновесного состояния гладких криволинейных трещин со взаимодействующими с трением поверхностями в процессе нагружения. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 1. С. 135–149.
7. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М. : Наука, 1980, 255 с.
8. Баничук Н. В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986.
9. Баничук Н. В. , Иванова С. Ю., Шаранюк А. В. Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. М.: Наука, 1989 г.
10. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982, 448 с.
11. Белл Ф. Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2-х ч., М.: Наука, 1984.

12. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. — 367 с.
13. Беляев Н.М. Сопротивление материалов (14-е издание). М.: Наука, 1965
14. В.Л. Бердичевский Вариационные принципы механики сплошной среды, М.:Наука, Москва, 1983.
15. Бережной Д.В., Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. Исследования качества уравнений геометрически нелинейной теории упругости при малых деформациях и произвольных перемещениях // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 6. С. 31-47.
16. Берендеев Н.Н., Жидков А.В., Любимов А.К. Экспериментально-расчетная методика определения собственных частот конструкции. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 1. С. 144-151.
17. Бирюков А.П., Гольдштейн Г.В., Рабинович М.Л. Задача о двух трещинах на параллельных границах раздела в слоистой упругой среде // Известия АН СССР. МТТ. 1985, №4.- С.79-88.
18. К. Васидзу Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
19. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, М., "Наука 1981.
20. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. Физматгиз, 1960.
21. Галлагер Р. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1984. - 428 с.
22. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц М.: Наука, 1966 576 стр.
23. Георгиевский Д.В. Асимптотики решений трехмерных уравнений теории упругости для сжимаемых и несжимаемых тел // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 122-130.
24. Георгиевский Д.В. Структура полиномиальных решений системы уравнений теории упругости в напряжениях // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 5. С. 44-51.

25. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989
26. Григорьев М. И., Малоземов В. Н., Сергеев А. Н., “Полиномы Бернштейна и составные кривых Безье”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:11 (2006), 1962–1971
27. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001. - 575 с.
28. Л.Г. Доннел Балки, пластины и оболочки / Пер. с англ.-М.: Наука, 1982. 567 с.
29. Жилин П. А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 101 с.
30. Жилин П.А., Ильичева Т.П. Спектры и формы колебаний прямоугольного параллелепипеда, полученные на основе трехмерной теории упругости и теории пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. 2. С. 94 - 103.
31. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Кручение упругого консольного стержня моментом, приложенным на свободном торце. СПб.: Изд. СПбГТУ. 1993. 32 с.
32. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. - 328 с.
33. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред - М.: Недра, 1974.
34. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
35. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209-292.
36. Костин Г.В., Саурин В.В. Интегродифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Доклады АН. 2005. Т. 404. № 5. С. 628–631.

37. Костин Г.В., Саурин В.В. Итегро-дифференциальная постановка и вариационный метод решения задач линейной теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сборник. Н-Новгород. 2005. Вып. 67. С. 190–198.
38. Костин Г.В., Саурин В.В. Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Доклады АН. 2006. Т. 408. № 6. С. 750–753.
39. Костин Г.В., Саурин В.В. Вариационные подходы в теории балок // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 84–98.
40. Костин Г.В., Саурин В.В. О свободных колебаниях балок // Доклады АН. 2006. Т. 411 . № 5 . С. 617–621.
41. Костин Г.В., Саурин В.В. Метод интегродифференциальный соотношений в задаче о собственных колебаниях балки. Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сборник. Н-Новгород. 2006. Вып. 68. С. 139–149.
42. Костин Г.В., Саурин В.В. Асимптотический подход к задаче о свободных колебаниях балки // ПММ. 2007. Том 71. Вып. 4. С. 670–680.
43. Костин Г.В., Саурин В.В. Метод интегродифференциальных соотношений в линейной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 36–49.
44. Костин Г.В., Саурин В.В. Асимптотический подход к анализу напряженно-деформированного состояния упругих тел // Доклады АН. 2008. Т. 423. № 6. С. 753–757.
45. Костин Г.В., Саурин В.В. Вариационные подходы к решению начально-краевых задач динамики линейных упругих систем // ПММ. 2009. Том 73. Вып. 6. С. 934–953.
46. Костин Г.В., Саурин В.В. Метод интегродифференциальных соотношений для анализа собственных колебаний мембран // ПММ. 2009. Том 73. Вып. 3. С. 459–473.

47. Костин Г.В., Саурин В.В. Моделирование и анализ собственных колебаний упругой призматической балки на основе проекционного подхода // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 6. С. 995-1010.
48. Крауч С. Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твёрдого тела, М.: Мир, 1987. - 328 с.
49. Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошных сред. М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2008. 320 с.
50. Кукуджанов В.Н., Шнейдерман Д.Н. Решение пространственных задач теории упругости для тел вращения с нерегулярной границей // Известия РАН. МТТ, №6, 2000, с. 15-24
51. Р.Курант, Д.Гильберт Методы математической физики, т.1 525 стр. М.-л.: ГТТИ, 1933.
52. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М., "Наука 1973.
53. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости, М., "Наука 1965.
54. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела. // Изв. АН СССР МТТ, 1978, №6, с. 29-34.
55. Ломакин Е.В. О единственности решения задач теории упругости для изотропного разномодульного тела. Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 2, с. 42-45.
56. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970
57. А. Ляв, Математическая теория упругости, пер. с англ., М. – Л., 1935
58. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 138-154.
59. Любимов А. К. Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды. Издательство Нижегородского университета, 2006.

60. Малков В. П. Анализ закона Гука: Лекции по анизотропной упругости / В. П. Малков . – Нижний Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 1992 . – 72 с.
61. Малков В. П. Энергоемкость механических систем. Изд-во Нижегород. ун-та, 1995. - 257 с.
62. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974
63. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965, 383 с.
64. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
65. Н. Ф. Морозов. Избранные вопросы двумерной теории упругости. Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
66. Ф.М. Морс, Г. Фешбах Методы теоретической физики. М.: Физматлит, 1958
67. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.:Наука, 1966.
68. Назаров С.А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Новосибирск: Научная книга, 2002. 408 с.
69. Немировский Ю. В., Горыкин Ю. В. Уточнение теории балки Тимошенко с помощью решения пространственной теории упругости. // Труды НГАСУ, т.5, № 1 (53), 2012 с.79-86.
70. Нестеров С.В. Изгибные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 159-165.
71. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.872 с.
72. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Гос. союз. издат. судостроительной пром., 1958
73. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976

74. Паймушин В.Н. Исследование уравнений теории упругости и пластичности при произвольных перемещениях и деформациях // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 67-80.
75. Паймушин В.Н., Полякова Т.В. О малых свободных колебаниях полосы // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 1. С. 72-82.
76. Паймушин В.Н. Точные и приближенные аналитические решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями, основанные на тригонометрических базисных функциях // Механика композитных материалов. 2005. Т. 41. № 4. С. 461-488.
77. Паймушин В.Н. Точные аналитические решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной пластины со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2006. № 8. С. 54-62.
78. Паймушин В.Н., Полякова Т.В. Точные аналитические решения трехмерной задачи о свободных колебаниях ортотропного прямоугольного параллелепипеда со свободными гранями // Механика композитных материалов и конструкций. 2006. Т. 12. № 3. С. 317-336.
79. Паймушин В.Н., Полякова Т.В. Точные и приближенные уравнения статики и динамики стержня-полосы и обобщенные классические модели // Механика композитных материалов и конструкций. РАН. Институт прикладной механики. 2008. Т. 14. № 1. С. 126-156.
80. Паймушин В.Н., Иванов В.А., Полякова Т.В. Исследование напряженно-деформированного состояния стержня-полосы на основе уравнений плоской задачи теории упругости и нового варианта уточненной теории стержней // Механика композитных материалов и конструкций. РАН. Институт прикладной механики. 2008. Т. 14. № 3. С. 373-388.
81. Пальмов, В. А. Колебания упруго-пластических тел. М. : Наука, 1976 . – 328 с.

82. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем, М.: Наука, 1967, 420 с.
83. Победря Б.Е. О статической задаче в напряжениях // Вести. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 3. С. 61-67.
84. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
85. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988
86. Полянин А. Д., Манжиров А. В.. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003.
87. К. Ректорис Вариационные методы в математической физике и технике. // Мир, 1985.
88. Стрэтт Дж.В. (Лорд Релей) Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1945. 500 с.
89. Саурин В.В. О вариационных подходах в линейной теории упругости // Доклады АН. 2007. Т. 415. № 4. С. 486–490.
90. Светлицкий В. А. Строительная механика машин. Механика стержней. В 2 томах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
91. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979, 392 с.
92. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М. : из-во Мир , 1977г. , 351 стр.
93. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. - 512 с.
94. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
95. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 379 с.
96. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.

97. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле.- М.: Наука, 1967.- 444с.
98. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. Изд. 2-е, перераб. и доп., М.: Машиностроение, 1970. - 734 с.
99. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974.
100. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988. 343 с.
101. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции. М.: Мир, 1983. - 486 с.
102. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989, 655 с.
103. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., "Наука 1966.
104. R. A. Adams Sobolev Spaces, Boston, MA: Academic Press, ISBN 978-0-12-044150-1, 1975.
105. L. D. Akulenko, S. V. Nesterov High Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications, Chapman & Hall // CRC Press, Boca Raton, 2004.
106. Argyris J. H., Kelsey S. The matrix force method of structural analysis and some new applications. London : H.M.S.O, 1957.
107. J. H. Argyris Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, V. 4 Progress in Aeronautical Sciences, New York, 1964.
108. K. Atkinson, W. Han Theoretical Numerical Analysis: a Functional Analysis Framework, Springer, V. 4 Texts in Applied Mathematics, Stuttgart, 2009.
109. S.N. Atluri, T. Zhu A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, Computational Mechanics, Springer pp. 117–127, 1999.
110. S.N. Atluri, S. Shen The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods. CMES, vol.3, no.1, pp.11-51, 2002.

111. I. Babuska and T. Strouboulis The Finite Element Method and its Reliability, Oxford University Press, New York, 2001.
112. Babuska I Courant element: before and after. In: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol 164. Marcel Dekker, New York, pp37–51, 1994.
113. Barber J.R. Intermediate Mechanics of Materials 2 Edition. Springer, 2010. 618 p. ISBN:9400702949
114. Barber J.R. Elasticity, Springer, Dordrecht, 3rd edn. 534pp., 2010.
115. O. A. Bauchau A beam theory for anisotropic materials, Journal of Applied Mechanics, V. 107, pp. 416–422, 1985.
116. Bauchau O.A., Craig J.I. Structural Analysis. With Applications to Aerospace Structures. Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, New York, 2009/
117. Beards C. F., Eng C. Structural Vibration: Analysis and Damping. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996.
118. T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu Element-free Galerkin method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 37, pp. 229–256, 1994.
119. P. B. Bochev, M. D. Gunzburger Least-Squares Finite Element Methods, Springer, V. 166 Applied Mathematical Sciences, New York, 2009.
120. A. Borovkov, V. Palmov, N. Banichuk, E. Stein, V. Saurin, F. Barthold, Yu. Misnik Macro-failure criterion for the theory of laminated composite structures with free edge delaminations. Computers and Structures, V. 76, N. 1, pp. 195–204, 2000.
121. A. Borovkov, V. Palmov, N. Banichuk, V. Saurin, F. Barthold, E. Stein Macro-failure criterion and optimization of composite structures with edge delaminations. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, V. 1, N. 1, p. 91, 2000.
122. Borwein J. M., Zhu Q. J. Techniques of Variational. Analysis. An Introduction. Springer. Berlin Heidelberg NewYork. HongKong London, 2005.

123. Bartsch T. Topological Methods for Variational Problems with Symmetries, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin Heidelberg, V. 1560. 1993.
124. Burns J. A., Rubio D., Troparevsky M. I. Sensitivity computations for elliptic equations with interfaces, Sixth International Conference on Mathematical Problems in Engineering and Aerospace Sciences, Camb. Sci. Publ., Cambridge, 2007, pp. 99–107.
125. A. L. Cauchy Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques, Bulletin de la Société Philomathique, V. 26, N. 3, pp. 1–13, 1823.
126. A. L. Cauchy De la pression ou tension dans un corps solide, Exercices de Mathématique, V. 2, pp. 42–56, 1827.
127. Clough, R. W., Original Formulation of the Finite Element Method, Finite Elements in Analysis and Design 7, pp. 89-101, 1991.
128. R. Courant Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibration, Bulletin of American Math Society, V. 49, pp. 1–23, 1943.
129. T. A. Cruse Numerical solutions in three-dimensional elastostatics, International Journal of Solids and Structures, V. 5, pp. 1259–1274, 1969.
130. Ciarlet P. An Introduction to Differential Geometry, with Applications to Elasticity, Springer, Dordrecht, 2005.
131. Ding H., Chen W., Zhang L. , Elasticity of transversely isotropic materials, Series: Solid mechanics and its applications, 126, Springer-Verlag, New York 2006. 11.
132. A.C. Eringen Microcontinuum Field Theories: Foundations and Solids, Springer, V.2, New York, 1999.
133. L. Euler Principes généraux du mouvement des fluides, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, V. 11, pp. 274–315, 1757.
134. L. Euler Genuina principia doctrinae de statu aequilibrum et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, V.15, pp. 274–315, 1771.

135. G. Farin *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, San Diego, 1997.
136. Gdoutos E.E. *Fracture mechanics : an introduction*. 2nd ed. - Dordrecht : Springer ; Norwell, MA : Distributed in North, Central and South America by Springer, 2005.
137. G. Green *On the propagation of light in crystallized media*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, V. 7, pp. 293–311, 1839.
138. M. E. Gurtin, W. O. *An axiomatic foundations for continuum thermodynamics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer-Verlag pp. 83–117, 1967.
139. Hartmann F., Katz C. *Structural Analysis with Finite Elements*. Springer Berlin Heidelberg New York. 2004. 484 pp.
140. J.-H. He *Generalized variational principles for thermopiezoelectricity*, Computers and Structures, V. 81, N. 21, pp. 2079–2085, 2003.
141. J.-H. He *A family of variational principles for linear micromorphic elasticity*, Archive of Applied Mechanics, V. 72, N. 4–5, pp. 248–256, 2002.
142. Heinz H. Bauschke, E. Matousova, and S. Reich. *Projection and proximal point methods: convergence results and counterexamples*. Nonlinear Anal., 56:715–738, 2004.
143. J. S. Hesthaven, T. Warburton *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis and Applications*, Springer-Verlag, V. 54 Springer Texts in Applied Mathematics, New York, 2008.
144. R. Hooke *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*, .R. for John Martyn, London, 1676.
145. A. Hrennikoff *Solution of problems in elasticity by the framework method*, Journal of Applied Mechanics, V. 8, pp. 169–175, 1941.
146. Hsu S.-B. *Ordinary Differential Equations. With Applications*. Series on Applied Mathematics. World Scientific Publishing Company, Incorporated, 2005.

147. M. A. Jaswon, A. R. Ponter An integral equation solution of the torsion problem, Proceedings of the Royal Society of London, V. A 273, pp. 237–246, 1963.
148. G. Kirchhoff "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, Journal für die reine und angewandte Mathematik, V. 40, pp. 51–88, 1850.
149. G. V. Kostin, V. V. Saurin Analysis of triangle membrane vibration by FEM and Ritz method with smooth piecewise polynomial basis functions, ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, V. 81, N. 4, pp. 873–874, 2001.
150. Kostin G.V., Saurin V.V. Analytical Derivation of Basis Functions for Argyris Triangle. Zeitschrift für angewandte mathematik und mechanik (ZAMM), 81(Suppl. 4), 2001. P. 871–872
151. G. V. Kostin, V. V. Saurin The method of integrodifferential relations for linear elasticity problems, Archive of Applied Mechanics, V. 76, N. 7–8, pp. 391–402, 2006.
152. Kostin,G.V., Saurin,V.V.: A variational formulation in fracture mechanics. Proc. of the IFC Interquadrennial Conference, July 07–12, 2007, Moscow, Russia.
153. G. V. Kostin, V. V. Saurin A variational formulation in fracture mechanics, International Journal of Fracture, V. 150, N. 1–2, pp. 195–211, 2008.
154. G. V. Kostin, V. V. Saurin Asymptotic approach to free beam vibration analysis, Journal of Aerospace Engineering, V. 22, N. 4, pp. 456–459, 2009.
155. Kostin G.V., Saurin V.V. Variational approach to static and dynamic elasticity problems. In Kounadis, A. N. and Gdoutos, E. E. (Eds.) Recent Advances in Mechanics. Springer, 2011. P. 131-158.
156. Kostin G.V., Saurin V.V. Integrodifferential Relations in Linear Elasticity. Series:De Gruyter Studies in Mathematical Physics 10, De Gruyter, 2012.

157. A. S. Kravchuk, P. J. Neittaanmaki Variational and quasi-variational inequalities in mechanics, Springer, Dordrecht, 2007.
158. Kressner D. Numerical Methods for General and Structured Eigenvalue Problems. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
159. Krommer A. R., Ueberhuber C. W. Numerical Integration on Advanced Computer Systems. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1991, 334 pp.
160. Kwon T.H. Introduction to Finite Element Method. Department of Mechanical Engineering Pohang University of Science & Technology, 2005. - 227 p.
161. H.L. Langhaar, M. Stippes Three-dimensional stress functions, Journal of the Franklin Institute, V. 258, N. 5, pp. 371–382, 1954.
162. R. J. LeVeque Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems, SIAM, Philadelphia, 2007.
163. M. Levinson On Bickford's consistent higher order beam theory, Mechanics Research Communications, V. 12, N. 1, pp. 1–9, 1985.
164. D. McHenry A lattice analogy for the solution of plane stress problems, Journal of Institution of Civil Engineers, V. 21, N. 2, pp. 59–82, 1943.
165. Mindlin R. D., Eshel N. N., On first strain-gradient theories in linear elasticity, Int. Jour. Solids and Structures, 4, 1, pp. 75-95, 1968.
166. Mordukhovich B. S. Variational Analysis and Generalized Differentiation I Basic Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
167. W. Noll The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics, The Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics, eds. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, North-Holland, Amsterdam, pp. 266–281, 1959.

168. Itskov M. Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers with Applications to Continuum Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
169. Ohayon R., Soizes C. Structural Acoustics and Vibration. Mechanical Models Variational Formulations and Discretization. Academic press Ltd., 1998.
170. M. Okabe Full-explicit interpolation formulas for the Argyris triangle, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 106, N. 3, pp. 381–394, 1993.
171. A. Rauh, G. V. Kostin, H. Aschemann, V. V. Saurin, V. Naumov Verification and Experimental Validation of Flatness-Based Control for Distributed Heating Systems, International Review of Mechanical Engineering, V. 4, N. 2, pp. 188–200, 2010.
172. J. N. Reddy An Introduction to the Finite Element Method, International Review of Mechanical Engineering, McGraw-Hill Education, 2005.
173. J. N. Reddy Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, CRC Press, Boca Raton, 2004.
174. E. Reissner The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, Journal of Applied Mechanics, V. 12, N. 2, pp. A69–A77, 1945.
175. Repin S. I. A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations. Series:Radon Series on Computational and Applied Mathematics. De Gruyter, 2008.
176. F. J. Rizzo An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quarterly of Applied Mathematics, V. 25, N. 8, pp. 426–430, 2007.
177. V.V. Saurin Shape design sensitivity analysis for fracture conditions. Computers and Structures, V. 76, N. 1, pp. 399–405, 2000.

178. V.V. Saurin, G.V. Kostin: Variational Approaches in the Beam Theory. PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2006. V. 6. Issue 1. 77th GAMM Annual Meeting, Berlin. P. 261–262. DOI: 10.1002/pamm.200610111
179. Saurin V.V., Kostin G.V.: A new approach to analysis of free beam vibrations. PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2007. V. 7. Issue 1. Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics (ICIAM07) and 78th GAMM Annual Meeting, Zurich. P. 4040031–4040032. DOI: 10.1002/pamm.200700525.
180. Saurin, V.V., Kostin, G.V.: An integrodifferential approach for free beam vibrations. Proc. of the Int. Summer School-Conf. APM. June–July 2007, St. Petersburg, Russia.
181. Saurin, V.V., Kostin, G.V.: Free beam vibration analysis based on the method of integrodifferential relations. Proc. of 3rd IFAC Workshop PSYCO'07, August 29–31, 2007, St. Petersburg, Russia. Periodic Control Systems, V. 3, Part 1
182. Saurin, V.V., Kostin, G.V.: Modeling and analysis of free beam vibrations Proc. of the 9th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, DSTA-2007, December 17-20, Lodz, Poland. pp. 227–232. ISBN 978-83-924382-8-9
183. Saurin V.V., Kostin G.V.: An asymptotic approach to analysis of 3D beam stress-strain elastic states. PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2008. V. 8. Issue 1. 79th GAMM Annual Meeting, Bremen. P. 10335–10336. DOI 10.1002/pamm.200810335.
184. Saurin V.V., Kostin G.V.: Reliable modeling to analyze free beam vibrations // In “Advances in Mechanics: Dynamics and Control: Proceedings of the 14th International Workshop on Dynamics and Control” / [ed. by F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin] Moscow: Nauka, 2008. P. 274–280. ISBN 978-5-02-036667-1

185. Saurin V.V., Kostin G.V.: Variational approach to static and dynamic elasticity problems // In the Proceedings of P.S. Theocaris Symposium on Recent Advance in Mechanics (September 17–19, 2009, Athens, Greece)/ [ed. by N.A. Koumadis, E.E. Gdoutos] Athens: Pericles S. Theocaris Foundation, 2009. P. 21–22. ISBN 978-960-98938-0-0
186. V. V. Saurin, G. V. Kostin, A. Rauh, H. Aschemann Adaptive control strategies in heat transfer problems with parameter uncertainties based on a projective approach, Modeling, Design, and Simulation of Systems with Uncertainties, eds. A. Rauh and E. Auer, 309–332, 2011.
187. V. V. Saurin, G. V. Kostin, A. Rauh, H. Aschemann Variational approach to adaptive control design for distributed heating systems under disturbances, International Review of Mechanical Engineering, V. 5, N. 2, pp. 244–256, 2011.
188. Schmidt A. G. Siebert K. G. Design of adaptive finite element software: The finite element toolbox ALBERTA, Springer LNCSE Series 42, 2005.
189. C. Schwab *p*- and *hp*- Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics, Oxford University Press, Numerical Mathematics and Scientific Computation, New York, 1998.
190. R.T. Shield Variational principles for some nonstandard elastic problems, Journal of Applied Mechanics, V. 54, N. 4, pp. 768–771, 1987.
191. E. Stein (Ed.) Error-Controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics, John Wiley, New York, 2002.
192. E. Stein, R. De Borst, T.J.R. Hughes (Eds.) Encyclopedia of Computational Mechanics, John Wiley, V. 1, Fundamentals, Chichester, 2004.
193. A. Strang Linear Algebra and its Applications, Brooks Cole, 2006.
194. T. Strouboulis, I. Babuška, S. K. Gangaraj, K. Copps, D. K. Datta A posteriori estimation of the error in the error estimate, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 176, N. 1–4, pp. 387–418, 1999.

195. Thorby D. Structural Dynamics and Vibration in Practice. An Engineering Handbook. Elsevier Ltd.,2008.
196. Tomme I.-B. T. Beams on Elastic Foundation. The Simplified Continuum Approach. Author(s): : LV (LIX), Fascicle: 4, 2009. pp. 37-46.
197. C. Truesdell, R. A. Toupin Handbuch der Physik, Springer-Verlag, V. III/1, The classical field theories, Berlin, 1960.
198. C. Truesdell, W. Noll Handbuch der Physik, Springer-Verlag, V. III/3, The non-linear field theories of mechanics, Berlin, 1965.
199. M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp Stiffness and deflection analysis of complex structures, Journal of Aeronautical Sciences, V. 23, N. 9, pp. 805–824, 1956.
200. K. Washizu A note on the conditions of compatibility, Journal of Mathematics and Physics, V. 36, N. 4, pp. 306–312, 1958.
201. Yang B. Stress, Strain, and Structural Dynamics An Interactive Handbook of Formulas, Solutions, and MATLAB Toolboxes. Elsevier Inc. 2005.
202. W. Yu, D. H. Hodges Generalized Timoshenko theory of the variational asymptotic beam sectional analysis, Journal of the American Helicopter Society, V. 50, N. 1, pp. 46–55, 2005.
203. W. Yu, D. H. Hodges, V. V. Volovoi, E. D. Fuchs A generalized Vlasov theory for composite beams, Thin-Walled Structures, V. 43, N. 9, pp. 1493–1511, 2005.
204. A. Ženišek Curved triangular finite C^m -elements, Applications of Mathematics, V. 23, N. 5, pp. 346–377, 1978.
205. W. P. Ziemer Curved triangular finite C^m -elements, Applications of Mathematics, V. 23, N. 5, pp. 346–377, 1978.