

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

УСТИНОВ КОНСТАНТИН БОРИСОВИЧ

МЕХАНИКА УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМ С
ПОКРЫТИЯМИ И ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ СЛОЯМИ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2015

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	8
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОКРЫТИЙ, И ПРОМЕЖУТОЧНЫХ СЛОЕВ	23
ГЛАВА 2. ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ОТСЛОЕНИЕ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ ОБЛАСТЕЙ	39
2.1. Общая постановка задачи об отслоении слоя от полуплоскости при различии их упругих свойств	39
2.2. Упрощения, приводящие к разделению задачи на две скалярные. Задача о сдвиговой трещине.....	45
2.2.1. Постановка задачи о сдвиговой трещине	45
2.2.2. Решение задачи Римана	47
2.2.3. Некоторые вспомогательные функции	47
2.2.4. Альтернативное решение задачи Римана. Определение параметра эффективной заделки	51
2.2.5. Определение параметров разрушения	56
2.3. Дальнейшие упрощения. Задача о стрингере. Ограничения на применимость решения.....	58
2.3.1. Задача о стрингере. Постановка.....	58
2.3.2. Решение задачи о стрингере.....	59
2.3.3. Определение параметров разрушения в задаче о стрингере	61
2.4. Задача о трещине нормального отрыва. Балочное приближение	62
2.4.1. Формулировка задачи. Математическая постановка. Общее решение.....	62
2.4.2. Вычисление коэффициентов упругой заделки.....	68
2.4.3. Определение параметров разрушения	72
2.4.4. Приближенное решение для определения параметров упругой заделки	78
2.5. Краткие выводы по главе.....	81

ГЛАВА 3. ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ОТСЛОЕНИЕ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ. МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА	83
3.1. Постановка задачи	83
3.2. Решение задачи Римана для $\eta' = 0$	91
3.3. Разложение факторизующих функций вблизи нуля	95
3.4. Разложение решения матричной задачи Римана вблизи плюс бесконечности	100
3.5. Разложение решения вблизи плюс нуля	102
3.6. Определение векторного полинома	104
3.7. Определение КИН	106
3.8. Разложение решения вблизи минус нуля	111
3.9. Вычисление параметров эффективной упругой заделки	112
3.10. Вычисление параметров эффективной упругой заделки из сравнения скоростей высвобождения упругой энергии	115
3.11. Матрица коэффициентов эффективной упругой заделки; сравнение с численными данными	120
3.12. Краткие выводы по главе	126
ГЛАВА 4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ОТСЛОЕНИЯ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ	128
4.1. Предварительные замечания и дополнительные результаты: влияние анизотропии, интерполяция численных данных	128
4.1.1. Учет анизотропии и слоистости	128
4.1.2. Интерполяция численных данных	130
4.2. Оценка влияния податливости основания на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия	133
4.2.1. Постановка задачи	133
4.2.2. Модель простой упругой заделки	136
4.2.3. Модель обобщенной упругой заделки	139
4.2.4. Модель пластины на упругом основании	145

4.2.5. Модифицированная модель пластины на упругом основании с учетом сжимающих напряжений	150
4.2.6. Асимптотические оценки для критического напряжения	151
4.2.7. Численное моделирование	153
4.2.8. Результаты и обсуждение	155
4.3. Влияние кривизны и податливости основания на скорость высвобождения энергии.....	158
4.3.1. Вычисление прогиба покрытия, имеющего начальную кривизну по одной оси при условии упругой заделки.....	158
4.3.2. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль торца (усредненной по изогнутому фронту)	165
4.3.3. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейного фронта	168
4.3.4. Приближенная модель, не учитывающая вклад перерезывающих сил и нормального смещения в точке заделки	172
4.3.5. Результаты расчетов скорости высвобождения энергии при граничных условиях податливой заделки	174
4.3.6. Анализ результатов и выводы.....	182
4.4. Приложение результатов к описанию работы кантилевера АСМ .	183
4.4.1. Основные соотношения модели.....	183
4.4.2. Балочная модель прямоугольного кантилевера; уточненные граничные условия.	186
4.4.3. Численное определение коэффициента упругой заделки.	189
4.4.4. Влияние упругости заделки на угол наклона свободного конца кантилевера. Интерпретация результатов измерений.	193
4.5. Краткие выводы по главе.....	194
ГЛАВА 5. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКИХ СЛОЕВ И ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗДЕЛА БЕЗ ОТСЛОЕНИЯ. МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНОЙ УПРУГОСТИ.....	197

5.1. Описание механического поведения тонкого слоя в рамках теории поверхностной упругости. Обобщение модели поверхностной упругости	197
5.1.1. Определение поверхностных величин. Кинематика поверхности. Определяющие соотношения на поверхности. Обобщение уравнения Шаттлворса для описания поверхностных взаимодействий.....	197
5.1.2. Модель поверхностного слоя как предел слоя конечной толщины, обладающего постоянными свойствами	206
5.1.3. Тонкий слой между изотропными материалами.....	219
5.1.4. Модель поверхностного слоя как предела слоя конечной толщины, обладающего постоянными свойствами при наличии собственных деформаций	220
5.1.5. Постановка граничных условий на поверхности раздела.....	225
5.1.6. О различных формах записи уравнения Шаттлворса.....	228
5.1.7. Поправки, вносимые поверхностными эффектами в величину изгиба плиты под действием всестороннего сжатия.....	232
5.2. Случай искривленной границы.....	236
5.2.1. Модель искривленной границы раздела как предела слоя конечной толщины, обладающего постоянными свойствами	236
5.2.2. Замечания о выполнении уравнения Лапласа-Юнга	246
5.2.3. Замечания и обсуждение	249
5.3. Связь моделей тонких слоев при наличии и при отсутствии отслоений. Соотношения между параметрами моделей.	250
5.4. Краткие выводы по главе.....	252
ГЛАВА 6. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице	255
6.1. Задача о шарообразном включении в бесконечной среде в гидростатическом внешнем поле	255
6.1.1. Основные уравнения	255

6.1.2. Задача о шаровом включении при наличии промежуточного слоя конечной толщины	258
6.1.3. Задача о шаровом включении при наличии промежуточного слоя в постановке традиционной поверхностной упругости	259
6.1.4. Задача о шарообразном включении при наличии собственных сферически симметричных деформаций во включении и в поверхностном слое.....	260
6.2. Задача о шарообразном включении в бесконечной среде в произвольном однородном поле и при произвольных однородных собственных деформациях включения и поверхности раздела.....	264
6.2.1. Соотношения для сред внутри и вне включения	265
6.2.2. Соотношения на поверхности раздела.....	268
6.2.2.1. Кинематика поверхности.....	269
6.2.2.2. Статика поверхности	270
6.2.2.3. Определяющие соотношения для поверхности	272
6.2.3. Тензор Эшелби. Нахождение поля смещений внутри и вне сферического включения при наличии в нем одноосных собственных деформаций	276
6.2.4. Компоненты тензора Эшелби	280
6.2.5. Задача об упругой неоднородности при заданной нагрузке вдали. Тензоры концентрации напряжений.....	282
6.2.6. Оценка роли поверхностных эффектов.....	292
6.2.7. Замечания о связи использованных определяющих соотношений для поверхности с определяющими соотношениями Гертца-Мердока.....	295
6.3. Краткие выводы по главе.....	298
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	300
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Вывод связи между производной от скачка смещения и напряжениями на границе слоя и полуплоскости	303
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Решение матричной задачи Римана для рассматриваемого частного случая.....	311

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Граничные условия типа обобщенной упругой заделки для линейного уравнения изгиба балки; оценка вклада различных членов	316
ЛИТЕРАТУРА	320

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность

С покрытиями и тонкими промежуточными слоями встречаются в органической и неорганической природе при исследованиях в разных областях знания. Подобные структуры широко используются в технике на самых разных масштабных уровнях: от многослойной брони до тонких покрытий в оптике и микроэлектронике. Все более актуальными становятся проблемы адекватного описания механического поведения покрытий и промежуточных слоев, в том числе многослойных, в связи с уменьшением размеров используемых устройств, в первую очередь микроэлектронных и микромеханических. В биологии примерами являются тканевые покровы, клеточные мембраны, в кристаллохимии – граничные области кристаллов, в физике металлов – оксидные пленки и др.

Широкий круг задач связан с деформированием и разрушением тонких поверхностных пленок и покрытий, испытывающих действие остаточных напряжений, или, что то же самое – собственных деформаций. Одной из основных причин, вызывающих собственные деформации является изменение температуры при различных коэффициентах теплового расширения покрытия и подложки. Данное явление наблюдается для широкого круга пар материалов, образующих основание (подложку) и покрытие; примерами являются керамические покрытия на металле, металлические покрытия на полимерах. Собственные деформации приводят к таким нежелательным эффектам как гофрирование поверхности и отслоение покрытия. Последнее наблюдается при пониженной адгезионной прочности на границе раздела. Ситуация осложняется тем, что иногда для предотвращения растрескивания покрытия создаются с таким расчетом, чтобы в рабочем диапазоне температур они испытывали сжатие, избыток которого и способен привести к образованию складок и отслоений. Всё это

вызывает необходимость серьёзного и детального исследования явления для создания технологий и условий использования, предотвращающих подобные нежелательные эффекты. Отслоения также исследуются в связи с экспериментальным изучением адгезии.

Кроме вопросов, непосредственно связанных с работой покрытий, тонкие слои исследуются в связи с описанием свойств материалов при уменьшении размеров вплоть до нанометрового, поскольку именно наличием подобных слоев, со свойствами, отличающимися от свойств контактирующих фаз, могут быть объяснены зависимости свойств материала от характерного размера структуры.

Степень разработанности темы исследования

Вопросам исследования и моделирования отслоения покрытий и потери устойчивости отслоившихся участков покрытий посвящено большое количество работ. Решение обычно получают с использованием балочного (пластиночного) приближения в предположении жесткого защемления краев балки, а в трехмерном случае – пластины. Более точные решения были получены с использованием в качестве граничных условий не жесткой, а упругой заделки. Сами же коэффициенты упругой заделки находились путем численного решения системы интегральных уравнений (при некоторых упрощающих предположениях) для различных значений параметров модели, либо методом конечных элементов. Использование подобных решений не всегда удобно. В этой связи возникает потребность в получении аналитических решений, позволяющих получать обобщения и легче проводить параметрический анализ.

Проблеме вычисления эффективных свойств материалов при наличии промежуточного слоя между контактирующими фазами уделяется достаточно много внимания. Вместе с тем, задача достаточно сложна, поэтому возникает потребность в пусть приближенных, но обозримых и удобных для анализа аналитических решениях. Одним из путей решения

является использование поверхностной теории упругости, получившей широкое распространение для описания механического поведения нанообъектов. В рамках такой обобщенной теории, классическая теория упругости используется при рассмотрении основного объема материала, а для поверхностей и границ раздела вводятся нестандартные свойства, причем сами поверхности описываются как двумерные объекты. Существуют различные варианты описания механического поведения таких поверхностей, в частности для очень мягких и жестких поверхностей, однако общей теории, описывающей все многообразие, до сих пор не создано.

Цели и задачи

Цель диссертации - разработка подхода к исследованию механического поведения тонких покрытий, и промежуточных слоев; выявление на основе этого подхода основных закономерностей их деформирования и разрушения посредством образования отслоений.

Эта цель предполагает решение следующих задач:

- Разработка аналитически-численного подхода к решению задач об отслоении тонких покрытий. Сведение задачи к задачам изгиба пластин, определение вида граничных условий.
- Разработка метода получения параметров, входящих в граничные условия, - коэффициентов эквивалентной упругой заделки. Вычисление коэффициентов путем решения краевых задач о контакте полуплоскости и полосы.
- Выявление основных закономерностей отслоения и потери устойчивости отслоившихся покрытий;
- Выявление основных закономерностей деформирования тонких слоев на внешних и внутренних границах без отслоения, построение теории поверхностной упругости общего вида, чем теория Шаттлворса.

Научная новизна.

Представлен подход к решению задач об отслоении тонких покрытий, заключающийся в рассмотрении отслоившегося участка покрытия с

помощью одного из вариантов теории пластин, граничные условия для которых ставятся исходя из рассмотрения задачи о контакте полубесконечного отслоения с основанием, решаемой аналитически.

Сформулирован и решен ряд задач о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы. В частности, впервые показано, что в подобных задачах представляет интерес не только асимптотика поведения решения вблизи точки смены граничных условий (вблизи вершины трещины), но и противоположная асимптотика – вдали от вершины, нахождение которой позволяет получить эффективные граничные условия для эквивалентных пластин, моделирующих участки полосы вне непосредственного контакта с основанием. Данные асимптотики были получены путем решения краевых задач.

Впервые показано, что при выписывании указанных эквивалентных условий в общем случае следует учитывать влияние главного момента и всех компонент главного вектора действующих в заделке усилий на компоненты вектора смещения и поворот точки упругой заделки эквивалентной пластины, моделирующей не контактирующие с полуплоскостью участки полосы. Таким образом, впервые введена в рассмотрение расширенная (3x3) матрица коэффициентов упругой заделки, и рассчитаны ее коэффициенты для ряда случаев.

Путем факторизации матрицы-функции с ненулевым индексом получено обобщение решения однородной задачи Златина-Храпкова об отслоении полосы от полуплоскости на случай различных (хотя и связанных дополнительным условием) упругих констант.

Выявлены закономерности механического поведения отслоений.

Дана новая, более общая, чем ранее (Шаттлворсом) замкнутая система уравнений поверхностной (интерфейсной) теории упругости в терминах поверхностных величин, определенных как интегралы от избытка соответствующих объемных величин по нормали к поверхности.

Представлено обобщение данной теории для случая наличия собственных деформаций.

Дано описание механического поведения тела с включением с учетом влияния поверхностных эффектов. Построено обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной однородными собственными деформациями внутри включения и заданными напряжениями вдали от него, при учете наряду с поверхностной упругостью поверхностных остаточных напряжений.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Предложен подход, позволяющий моделировать механическое поведение покрытий, промежуточных слоев и отслоений. Установлены закономерности деформирования, роста и потери устойчивости отслоений при термическом и механическом воздействии, которые могут быть использованы при создании систем с покрытиями в микро- и наноэлектронике.

Полученные решения задач теории упругости о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы имеют самостоятельное теоретическое значение, как расширяющие применение метода Храпкова для решения матричной задачи Винера-Хопфа. Решения этих задач имеют также и самостоятельное практическое значение, состоящее в том, что с их помощью находятся эффективные граничные условия для эквивалентных пластин (балок), моделирующих участки полосы вне непосредственного контакта с остальной частью конструкции. Данные решения находят применение не только для расчета параметров отслоений покрытий, но и в других областях, таких как описание работы кантилеверов атомно-силовых микроскопов, в строительной механике.

Полученные в работе обобщения теории поверхностной упругости позволяют описать механическое поведение микро- и нанокомпозитов, а также других объектов, хотя бы один из характерных размеров которого становится сопоставим с молекулярным.

Методология и методы исследования.

При решении поставленных задач использовались методы механики деформируемого твердого тела. Для решения задач, связанных с отслоением покрытий, последние рассматривались с помощью теории пластин, особое внимание при этом уделялось формулировке граничных условий, которые рассматривались в виде обобщенной упругой заделки. Для определения коэффициентов матрицы упругой заделки решен ряд задач теории упругости в различных вариантах постановки для полосы, контактирующей с полуплоскостью вдоль части границы. В наиболее общем виде это приводило к матричной задаче Римана (матричной задаче Винера-Хопфа), для которой получено решение методами теории функции комплексного переменного.

При построении модели поверхностной упругости и решения задач, связанных с наличием промежуточного слоя, использованы методы теории упругости и методы математического анализа, методы асимптотических разложений и др.

Положения, выносимые на защиту.

Подход к решению задач об отслоении покрытий, заключающийся в рассмотрении отслоившегося участка покрытия с помощью одного из вариантов теории пластин, граничные условия для которых ставятся исходя из рассмотрения задачи о контакте полубесконечного отслоения с основанием, решаемой аналитически.

Формулировка и решение ряда задач о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы. Нахождение

асимптотик смещения вдали от вершины трещины на границе раздела, с целью получения эффективных граничных условий для эквивалентных пластин, моделирующих отслоившиеся участки полосы. Обобщение решения однородной задачи Златина-Храпкова об отслоении полосы от полуплоскости на случай различных упругих свойств (при нулевом втором параметре Дундурса), полученное путем факторизации матрицы-функции с ненулевым индексом.

Нахождение эффективных граничных условий для эквивалентных пластин, моделирующих участки полосы вне непосредственного контакта с остальной частью механической системы. Описание свойств эффективной упругой заделки для эквивалентной пластины с помощью расширенной (3x3) матрицы упругих коэффициентов. Нахождение данных коэффициентов для ряда случаев.

Закономерности деформирования и потери устойчивости отслоений при термическом и механическом нагружении.

Замкнутая, более общая, чем система Шаттлворса, система уравнений поверхностной теории упругости (для внешних и внутренних поверхностей) в терминах поверхностных величин, определенных как интегралы от избытка соответствующих объемных величин по нормали к поверхности. Обобщение данной теории для случая наличия собственных деформаций.

Обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной однородными собственными деформациями внутри включения и заданными напряжениями вдали от него, при учете наряду с поверхностной упругостью поверхностных остаточных напряжений.

Достоверность результатов обусловлена строгостью постановки задач, построением ряда точных решений в рамках сформулированных моделей, сравнением частных случаев с известными результатами, полученными

другими авторами, а так же сравнением с численными решениями, полученными как автором диссертации, так и другими авторами.

Апробация результатов исследования.

Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК России [1]-[13]. Результаты подтверждаются также другим публикациями в журналах, препринтах, научных сборниках и трудах конференций [14]-[48]. Основные результаты (математические постановки и решения задач и анализ результатов), выносимые на защиту и опубликованные в указанных работах, получены автором диссертации. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на российских и международных профильных научных конференциях [17]-[38], семинаре «Механика деформирования и разрушения материалов и конструкций» под руководством чл. корр. РАН Гольдштейна Р.В.; семинаре имени академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН под руководством академика РАН Журавлева В.Ф. и академика РАН Климова Д.М.; семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина под руководством В.М.Александрова, А.В. Манжирова, В.Н. Кукуджанова; семинаре академика Морозова Н.Ф., ИПМаш РАН; междисциплинарном семинаре «Методы многомасштабного моделирования и их приложения» под руководством академика РАН Е.И. Моисеева, проф. С.А. Лурье, проф. С.Я. Степанова.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, трех приложений и списка литературы.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель исследования, положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость, представлена структура диссертации.

В первой главе подробно проанализированы литературные данные, посвященные исследованию вопросов, связанных с механическим поведением покрытий и тонких поверхностных и промежуточных слоев. Особо выделены два направления исследований, первое из которых связано с отслоением покрытий и потери устойчивости отслоившихся покрытий, а второе - с моделированием работы тонких покрытий и промежуточных слоев без отслоений.

Представлена постановка основных задач и обоснован выбор объектов исследования. Выбраны два основных направления исследований: математическое моделирование механического поведения тонких слоев без отслоения и моделирование поведения отслоившихся покрытий.

Сформулирован общий подход к решению задач об отслоении покрытий, заключающийся в рассмотрении отслоившегося участка покрытия с помощью одного из вариантов теории пластин, граничные условия для которых ставятся исходя из рассмотрения задачи о контакте полубесконечного отслоения с основанием, решаемой аналитически.

Вторая глава посвящена формулированию и решению задач о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы, получению эффективных граничных условий для эквивалентных пластин, моделирующих отслоившиеся участки покрытия путем решения краевых задач о контакте полуплоскости и полосы из другого материала.

В п.2.1 рассматривается общая постановка плоской задачи о полубесконечной трещине, проходящей по границе раздела полуплоскости и полосы из другого материала. На основе соотношений теории упругости выписана связь между нормальными и касательными напряжениями на линии контакта материалов и производными от скачков смещения, и после применения преобразования Лапласа, задача сведена к матричной задаче Римана (матричной задаче Винера-Хопфа).

В п.2.2. сформулировано предположение о возможности пренебрежения влияния касательных напряжений на нормальные смещения и нормальных напряжений на касательные смещения, позволяющее свести матричную задачу к двум скалярным (для трещины сдвига, и трещины отрыва), и продемонстрировано, что такое предположение приводит к результатам, по крайней мере, не худшим по сравнению с результатами, получаемыми на основе широко распространенного балочного или стержневого приближения, в рамках которых полоса заменяется одномерным объектом – балкой (для задачи об отрыве), либо стержнем (для задачи о сдвиге). Далее дается решение одной из скалярных задач - задачи о сдвиге и находится асимптотика смещений вдали от вершины трещины. Ведущий член оказывается, соответствующим смещению стержня, а следующий – искомой величине эффективной упругой заделки – связи между действующей силой и смещением эквивалентного слою стержня.

В п.2.3. получено решение задачи в упрощенной постановке, когда верхний слой заменяется одномерным объектом стержнем-стрингером. Кроме того, для обоих вариантов задачи получены асимптотики вблизи начала координат, соответствующие коэффициентам интенсивности напряжений (КИН). Для задачи о стержне-стрингере он совпадает с известными результатами.

В п.2.4. получено решение задачи о нормальном отрыве также в упрощенной постановке, когда верхний слой заменяется одномерным объектом – пластиной. В отличие от других случаев, здесь применялось преобразование Фурье. После факторизации коэффициента задачи, найдены асимптотики, соответствующие поведению решения вдали от начала координат и найдены искомые коэффициенты эффективной упругой заделки – связи между действующей силой и моментом и смещением и начальным углом поворота эквивалентной слою пластины. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами численных расчетов.

Также были получены выражения для КИН. Были рассмотрены приближенные модели, типа пластина на упругом основании, в котором полуплоскость заменялась винклеровским слоем.

Третья глава посвящена решению матричной задачи, сформулированной в п.2.1. В настоящее время общее решение указанной задачи неизвестно. Факторизация может быть осуществлена лишь для матриц частного вида. Выделен класс сочетаний упругих постоянных материалов, для которых возможно осуществить факторизацию матричного коэффициента известными методами. Данная факторизация проведена, что привело к обобщению решения задачи Златина и Храпкова о параллельной границе полубесконечной трещине на случай различных упругих постоянных слоя и полуплоскости (хотя и подчиняющихся дополнительному условию).

Из полученного решения найдены асимптотики, соответствующие поведению решения вдали от вершины трещины и найдены искомые коэффициенты эффективной упругой заделки – связи между действующей силой и моментом и смещением и начальным углом поворота эквивалентной слою пластины. Полученная матрица коэффициентов - расширенная матрица жесткости.

Также получены выражения для КИН. Полученные формулы являются обобщением формул Златина и Храпкова и переходят в них для случая полосы и полуплоскости с одинаковыми упругими свойствами.

В данной главе также получены асимптотики ряда полученных формул для больших и малых отличий упругих модулей слоя и полуплоскости, формулы для скоростей высвобождения энергии.

В **четвертой главе** в рамках сформулированного подхода излагаются приложения результатов глав 2 и 3, главным образом, к задачам отслоения тонких покрытий. В п.4.1. излагаются обобщения результатов для определения коэффициентов матрицы жесткости для анизотропных и

многослойных подложек и покрытий. Приводятся результаты интерполяции численных данных Ю и Хатчинсона для двух коэффициентов, в том числе и для диапазона параметров, лежащего вне пределов применимости полученных асимптотик.

В п.4.2. дается оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия. Рассматривается упругая подложка, моделируемая полуплоскостью, к границе которой примыкает покрытие, моделируемое упругой полосой (пластиной) с отличающимися свойствами. Между пластиной и полуплоскостью имеется полный контакт всюду, за исключением некоторого участка, вдоль которого имеется отслоение. Предполагается, что пластина подвержена действию собственных деформаций растяжения, следствием которых является появление сжимающих напряжений, действующих вдоль пластины. Решается задача отыскания критического значения напряжений, при которых происходит потеря устойчивости, величина которого представляется как произведение соответствующей величины, рассчитанной для пластины в условиях жесткой заделки на некоторый коэффициент. Для определения данного коэффициента используется одна из нескольких моделей: модель простой упругой заделки, модель обобщенной упругой заделки, модель балки на упругом основании.

В п.4.3 в приближении теории пластин, имеющих малую начальную кривизну, исследовано совместное влияние кривизны и податливости подложки на параметры отслоения. Для покрытия, отслаивающегося от цилиндрической поверхности, посчитаны скорости высвобождения энергии при развитии вытянутого вдоль образующей отслоения как вдоль, так и по нормали к образующей. Показано, что для достаточно мягких подложек существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться вдоль образующей (вдоль узкого фронта).

В п.4.4. излагается применение балочных моделей при рассмотренных граничных условиях для описания работы кантилеверов атомно-силовых микроскопов (АСМ). Рассматривается модельная задача определения параметров эффективной упругой заделки кантилевера. Полученное значение согласуется с полученными ранее теоретическими оценками. Рассмотрено влияние параметров заделки на интерпретацию результатов измерений. Показано, что влияние упругости контакта (обычно рассматриваемого как жесткого) кантилевера с массивной частью может быть существенным при интерпретации результатов, связанных с измерением тангенциальных сил взаимодействия зонда с исследуемой поверхностью.

Пятая глава посвящена исследованию деформирования тонких поверхностных и промежуточных слоев без отслоения. В п.5.1 дается обоснование и вывод обобщенной теории поверхностной упругости при классическом определении поверхностной плотности произвольной величины в некоторой точке поверхности как интеграла от избытка объемной плотности соответствующей величины по нормали к поверхности, проведенной через рассматриваемую точку.

Из рассмотрения вариации плотности энергии на границе раздела сред в случае изотропии поверхностного слоя в своей плоскости получена система определяющих уравнений границе раздела. Два обычно рассматриваемых варианта описания поверхностных эффектов – уравнения Шаттлворса, и уравнение винклеровского слоя (уравнение пружин) – получаются отсюда как частные случаи. Рассмотрен частный случай поверхностного слоя как слоя конечной толщины, обладающего постоянными свойствами.

Полученные результаты обобщены на случай наличия собственных деформаций в контактирующих слоях по обе стороны границы раздела, а также в промежуточном слое.

Рассмотрена задача изгиба двуслойной пластины под воздействием давления, приложенного к обеим сторонам. Показано, что ее прогиб, описываемый в рамках рассматриваемого подхода, не может быть адекватно описан в рамках традиционной теории поверхностных напряжений.

В п.5.2. показано, что предложенная модель поверхностной упругости обобщается на случай криволинейной поверхности. На примере задачи о составной сфере, нагружаемой центрально симметрично, показано, что определяющие соотношения (полученные обобщенные соотношения Шаттлворса) и уравнения равновесия на поверхности (уравнения Лапласа-Юнга) сохраняют свой вид (с точностью до главного члена разложения по отношению толщины слоя к радиусу его кривизны).

В п.5.3 представлена связь параметров рассмотренной модели с параметрами балочной модели, описанной в Гл. 4.

Шестая глава посвящена обобщению решения задачи Эшелби для учета влияния поверхностных напряжений и поверхностной упругости на границе раздела. В п.6.1 рассмотрены задачи о шаровом включении в бесконечной среде под действием гидростатического внешнего поля и однородных сферически симметричных собственных деформаций включения и поверхности (поверхностного слоя).

В п.6.2 рассмотрен общий случай собственных деформаций (произвольных однородных, и независимых для включения и поверхности, обладающей специфическими свойствами) и произвольных однородных внешних напряжений для определяющих уравнений частного вида на поверхности раздела. Дано обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной однородными собственными деформациями внутри включения и заданными напряжениями вдали от него, при учете наряду с поверхностной упругостью поверхностных остаточных напряжений. Найдены выражения внутреннего и внешнего тензоров Эшелби и тензоров

концентрации напряжений при учете указанных двух типов поверхностных эффектов. Выявлен характер неоднородности полей деформаций и зависимости от диаметра включения (масштабный эффект), проявляющихся на нанометровых масштабах. Показано, что при определенных условиях (для ряда кубических кристаллов) влияние остаточных напряжений превосходит эффект поверхностной упругости.

По каждой главе представлены краткие выводы.

В **Заключении** изложены основные результаты диссертации.

Количество страниц в диссертации – 344, в том числе иллюстраций – 28 и таблиц - 2. Список литературы содержит 234 наименований.

Благодарности

Выражаю искреннюю признательность члену-корреспонденту РАН Р.В. Гольдштейну, инициировавшему исследования по теме диссертации и оказывавшему автору поддержку в ходе написания диссертации.

Также хочу поблагодарить профессора В.А. Городцова за научное сотрудничество; профессора Е.И. Шифрина, за конструктивные замечания при обсуждении результатов, послужившие улучшению текста.

Также выражаю признательность научным сотрудникам ИПМех РАН А.В. Ченцову и П.С. Шушпанникову за неоднократно оказанную помощь по вопросам, связанным с выполнением работы и подготовкой диссертации.

Хочу поблагодарить заместителя директора ИПМех РАН В.И. Карева, заведующего лабораторией Геомеханики Ю.Ф. Коваленко, всех сотрудников лаборатории и всех членов моей семьи за моральную помощь и поддержку.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОКРЫТИЙ, И ПРОМЕЖУТОЧНЫХ СЛОЕВ

При моделировании процессов деформирования и разрушения тонких покрытий, слоев и границ раздела материалов возникает необходимость описания достаточно тонких структур. При этом можно выделить как минимум два аспекта:

- характерные размеры подобных структур, как правило, существенно отличаются в различных направлениях;
- при уменьшении размеров рассматриваемых структур их минимальные размеры становятся сопоставимыми с молекулярными, что может приводить к необходимости внесения соответствующих корректировок при постановке механических задач.

При рассмотрении состояния вопроса в области исследования, особое внимание будет привлечено именно к этим аспектам.

Существует широкий круг задач, связанных с деформированием и разрушением тонких поверхностных пленок и покрытий. Вопросы, связанные с отслоением покрытий, вызывают в последнее время повышенный интерес в связи с приложениями в механике, а также при рассмотрении объектов в микро- и нанoeлектронике, биологии, медицине. Поверхностные пленки и покрытия часто испытывают действие остаточных напряжений, или, что то же самое – собственных деформаций. Одной из основных причин, вызывающих собственные деформации, является изменение температуры при различных коэффициентах теплового расширения покрытия и подложки. Данное явление наблюдается для широкого круга пар материалов, образующих подложку и покрытие;

примерами являются керамические покрытия на металле, металлические покрытия на полимерах. Подобные пары используются в различных изделиях и конструкциях, таких как термоизоляторы, просветления в оптических приборах и др. В качестве конкретных примеров можно привести оксидные слои (Al_2O_3 на сплавах Ni-Cr-Al и Fe-Cr-Al) в термоизоляторах [49], покрытия для термозащиты и защиты от коррозии [50, 51, 52], прозрачные покрытия на оптических полимерах [53], алмазоподобные покрытия для улучшения износостойкости [54].

Собственные деформации приводят к таким эффектам как образование складок и гофрирование поверхности [55, 56, 57], а также к отслаиванию участков покрытия [54]. Последнее наблюдается при пониженной адгезионной прочности на границе раздела [58]. Подобные явления являются, как правило, нежелательными. Ситуация осложняется тем, что иногда для предотвращения растрескивания покрытия создаются с таким расчетом, чтобы в рабочем диапазоне температур они испытывали сжатие [59]. Однако именно избыток этого сжатия и способен привести к образованию складок на поверхности покрытия и его отслоение. Всё это вызывает необходимость серьёзного и детального исследования явления для создания технологий и условий использования, предотвращающих подобные нежелательные эффекты.

Кроме вопросов, непосредственно связанных с работой покрытий, отслоения исследуются в связи с экспериментальным изучением адгезии. Начиная с работы Обреимова [60], в которой исследовался плоский отдир тонкого слоя, в дальнейшем большое число работ [61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72] посвящалась исследованию различных конфигураций, в том числе осесимметричных, типа «пузыря» – “blister tests”. Вопросы деформирования тонких слоев возникают в связи с исследованием механического поведения многослойных конструкций [73, 74, 75].

Экспериментальным исследованиям явлений, связанных с потерей устойчивости покрытий, в том числе с отслоением, посвящены работы [54, 55, 56, 57, 76, 77, 78]. Теоретическое исследование вопросов, связанных со смятием покрытий вследствие потери устойчивости посвящены работы П.Е. Товстика и соавторов [79, 80, 81, 82], Дж. Хатчинсона и соавторов [83, 84, 85, 86], Б. Одоли и А. Будо [87-89]. Данные работы посвящены исследованию наиболее энергетически выгодных форм потери устойчивости, как в линейной, так и в нелинейной постановке, как для напряжений, соответствующих потери устойчивости, так и для напряжений, намного превосходящих данный предел.

При относительно низкой адгезионной прочности покрытия могут отслаиваться. Для описания процесса отслоения используют методы механики разрушения. При этом возникает необходимость рассматривать распространение трещин по границам раздела, а также рассматривать процессы потери устойчивости отслоившихся участков.

Вопросам исследования и моделирования отслоения покрытий и потери устойчивости отслоившихся участков покрытий посвящено большое количество работ. На уровне отдельных атомарных слоев вопросы потери устойчивости и нелинейного деформирования обычно решают применением методов молекулярной динамики, напр., [90, 91]. На макроуровне – применением методов теории континуальной механики, напр., [59, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98]. Обзоры работ можно найти в [95, 59]. Решение подобных задач часто проводят с использованием балочного (пластиночного) приближения в предположении жесткого защемления краев балки, а в трехмерном случае – пластины (см., например, [60, 93, 92]). При этом предполагается, что данный тип граничных условий соответствует жестким подложкам. Так в работе [92] в частности решена задача о потере устойчивости отслоившегося участка покрытия в случае жесткой подложки с прямолинейной поверхностью. Найдено критическое напряжение потери

устойчивости, величина выпучивания, скорости высвобождения энергии вдоль и поперек фронта распространения отслоения, а также коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} на границе отслоения. Отслоившийся участок рассматривался в виде заземленной по краям пластины.

Использование теории изгиба для решения задач, связанных с отслоением покрытий, представляется крайне привлекательным, поскольку различные варианты теории изгиба (уравнения Бернулли-Эйлера для поперечного изгиба балок, уравнения Софи-Жермен для слабого изгиба пластин, уравнения фон Кармана для продольно-поперечного изгиба, уравнения Муштари-Донелла-Власова для изгиба с учетом малой начальной кривизны) дают один, а для некоторых случаев и два, точных члена разложения решения по малому параметру [99-102] – отношения толщины пластины к характерному размеру в плане. Хотя строгие доказательства указанной асимптотической точности существуют не для всех классов задач и типов граничных условий, весь более чем столетний опыт использования теории изгиба на практике свидетельствует о жизнеспособности данных теорий.

При использовании теорий изгиба и оценке точности полученных решений необходимо помнить, что не только определяющие уравнения, но и граничные условия должны записываться с необходимой точностью. Так при использовании линейных уравнений поперечного изгиба, обеспечивающих два точных члена разложения, для обеспечения данной точности граничные условия должны записываться с той же точностью.

Вместе с тем известно, что условие жесткой заделки при моделировании отслоения пластиной при равенстве упругих свойств отслоившегося участка и массива выполняются лишь с точностью до одного члена отношения размеров в плане к толщине [17, 1, 2]. Если данной точности недостаточно, необходимо использовать более точное условие

упругой заделки, т.е. предположение пропорциональности угла наклона пластины в точке начала отслоения изгибающему моменту, действующему в данном сечении. Еще более общим видом граничных условий являются условия обобщенной упругой заделки, т.е. условия линейной зависимости величин производной прогиба и тангенциального смещения в точке заделки от продольной силы и изгибающего момента, действующих в точке заделки. Однако как показано в работах [17, 1, 2], несмотря на то, что учет всех четырех коэффициентов может быть полезен для увеличения точности расчетов, только указанный коэффициент пропорциональности поворота моменту дает поправку, не выходящую за пределы точности даваемой теорией пластин.

При различии упругих свойств покрытия и подложки погрешность, вносимая использованием условия жесткой заделки, растет с уменьшением жесткости подложки [96]. Более того, детальные исследования показывают, что даже для идеально жестких подложек условия жесткой заделки вносит некоторую погрешность [96]. Этот на первый взгляд парадоксальный эффект связан с тем, что крепление покрытия происходит по грани поверхности, а не по торцу, что при отсутствии закрепления противоположной грани приводит к повороту сечения при приложении момента.

Тем не менее, на основании результатов численного счета авторы [95, 59] полагают, что даже для подложек, в три раза более мягких по сравнению с покрытием, приближение жесткой заделки дает не слишком заметную ошибку. К данному утверждению следует относиться с осторожностью, поскольку в работе [95] не исследовалось влияние длины отслоения, существование которого подтверждается результатами других работ [96, 21, 39]. На наличие ненулевого угла наклона отслаиваемого покрытия в точке контакта с основанием указывалось также в работе [103].

Начальная кривизна оснований (подложек) является еще одним фактором, существенно влияющим на процесс отслоения покрытий. Влияние

данного фактора исследовалось в частности в работах [98, 59]. Однако в данных работах основания рассматривались как жесткие. Исследование совместного влияния начальной кривизны и податливости основания является одной из задач исследования.

Эффект жесткости подложки рассматривался в работах [95, 96, 97, 2, 21]. При этом в работах [97, 95] влияние относительной жесткости подложки на параметры отслоения (напряжение потери устойчивости, величина выпучивания) рассматривались без учета влияния на эти параметры ширины отслоения. В работе [96] проводился анализ совместного влияния относительной жесткости подложки и отношения ширины отслоения к ее толщине на величину напряжения потери устойчивости. При этом отслоение по-прежнему моделировалось участком пластины, граничные условия для которой записывались в виде условий, которые можно охарактеризовать как условия обобщенной упругой заделки, т.е. условия пропорциональности величин производной прогиба и тангенциального смещения в точке заделки продольной силе и изгибающему моменту, действующим в точке заделки. Сами же коэффициенты упругой заделки находились путем численного решения системы интегральных уравнений [104] в зависимости от двух названных параметров. Использование данного решения не всегда удобно, поэтому возникает потребность в получении аналитического решения.

Аналитические решения задач определения коэффициентов упругой заделки могут быть получены из решений задач об интерфейсных трещинах параллельных свободной границе. Задачам распространения трещин по границам раздела посвящена весьма обширная литература. Начиная с работ [60, 65, 67, 68, 69] тема привлекала внимание исследователей. Из более поздних работ следует отметить [92]. Большое место задачам роста трещин на границах раздела уделено в книге М.А. Грекова [105], в том числе задачам о трещине в структуре, состоящей из полуплоскости и полосы из другого материала. Там же можно найти литературные обзоры. В случае отслоения

покрытий задача осложняется наличием близлежащей свободной поверхности, а в случае достаточно тонких подложек – наличием двух близлежащих поверхностей. В первом случае задача обычно формулируется как отслоение полосы от полуплоскости (или слоя от полупространства в трехмерном случае), а во втором – как расслоение (расщепление) полосы.

Решению задачи об отслоении полосы от полуплоскости в различных вариантах постановки посвящена достаточно обширная литература [92, 105, 106-126]. Задачи решались в различных постановках как аналитически, так и полуаналитически, а также численно.

Однако аналитические решения, доведенные до квадратур, ограничиваются случаем полубесконечных трещин и либо одинаковых упругих свойств материалов полуплоскости и полосы (Работы Златина и Храпкова [106-109]), либо введением дополнительных упрощений, таких как рассмотрения отслаиваемой полосы как балки (в случае изгиба, например, [116]), либо стержня-стрингера (в случае сдвига, например, [110]).

При такой постановке задачи путем применения интегральных преобразований (Лапласа, либо Фурье) сводились к задаче Римана, ключевым моментом решения которой являлась факторизация некоторой функции [127]. После чего извлекалась асимптотика поведения полей напряжений и деформаций вблизи вершины трещины. Для возможности осуществления этой процедуры и проводилась замена отслаивающейся полосы одномерным объектом: балки – для случая нормального отрыва, либо стержня – для случая сдвигового отслоения. В противном случае (без подобных упрощений) задача Римана становится матричной, и пути получения аналитического решения для такой задачи в общем случае неизвестны.

В работах Златина и Храпкова [106-109] было получено точное решение задачи отслоения полубесконечного слоя от полуплоскости для

случая их одинаковых упругих свойств. Получение решения путем сведения задачи к матричной задаче Римана с последующей факторизацией матричного ядра оказалось возможным благодаря специфическому виду получившегося ядра, удовлетворяющего специальным дополнительным условиям [128-136].

Кроме точных аналитических решений для ряда задач эффективным путем решения является использование приближенных и численных методов факторизации матриц-функций. Такие методы были развиты в работах И.И. Воровича и В.А. Бабешко [137, 138, 139].

Одной из целей настоящей диссертации является решение задач об отслоениях и извлечение из полученных решений достаточно простых аналитических формул, описывающих процесс отслоения. Здесь необходимо некоторое поясняющее замечание.

В большинстве случаев авторов цитированных работ интересовало поведение решения вблизи вершины трещины – вычисление коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Однако интерес к задаче не исчерпывается вычислением КИНа. Так в задачах об отслоении покрытий и потери устойчивости большое значение имеет поведение поля смещений вдали от вершины трещины. При наличии ненулевых главных вектора и момента действующих усилий в отслоившемся участке покрытия, ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины будут, очевидно, соответствовать смещением балки (пластины), подверженной действию указанных главных вектора и момента при некоторых граничных условиях. Как отмечалось, эти граничные условия отнюдь не являются условиями жесткой заделки в месте вершины трещины. Они представляют собой условия обобщенной упругой заделки, т.е. условия пропорциональности смещений и угла поворота в точке заделки действующим компонентам главного вектора и момента нагрузки. Коэффициенты упругой заделки для ряда случаев были посчитаны численно [97], либо путем численного решения

системы интегральных уравнений (также записанных при некоторых упрощающих предположениях) [96].

Однако наличие простых аналитических выражений существенно упрощает исследование конкретных конфигураций и параметрический анализ. Кроме того, наличие точных, пусть и асимптотических решений, полезно для тарировки новых численных алгоритмов. На основании аналитических решений также легче строить обобщения, например для случаев анизотропии подложек и покрытия, наличия в них слоистой структуры. Данные обобщения представлены в четвертой главе.

На основе сказанного, сформулируем подход к решению задач об отслоениях. Отслоившиеся участки покрытия будут моделироваться в рамках теории изгиба пластин, а граничные условия ставятся на основе аналитических решений об отслоении от основания полубесконечных пластин.

Таким образом, в качестве одной из задач, поставленных в настоящей работе, является получение аналитических решений и простых аналитических формул для записи граничных условий типа упругой заделки для эффективной балки-стрингера, т.е. вычисление коэффициентов упругой заделки, связывающих компоненты главного вектора и изгибающего момента и начальные смещения, и начальный угол поворота в точке заделки эффективной балки-стрингера, моделирующего отслоение.

Следует также подчеркнуть, что решения, позволяющее более точно описать граничные условия для балок и стержней, имеют важное значение не только для описания поведения отслоений, но и в других областях механики, таких как строительная механика, сопротивление материалов, описание работы кантилеверов атомно-силовых микроскопов и др. Также отметим, что подобные решения используются и для других практических задач, в

частности для определения напряжений в пластинах, усиленных ребрами жесткости [110, 112, 113, 140, 137, 138].

Перейдем к рассмотрению второго аспекта – уменьшению как минимум одного из размеров рассматриваемых структур.

По мере уменьшения размеров деформируемых тел вплоть до нанометрового диапазона начинают экспериментально проявляться масштабные эффекты их физических свойств. Для ряда свойств такая зависимость хорошо объяснима в рамках существующих представлений. Так зависимость теплопроводности от размера структурного элемента на малых масштабах для диэлектриков связана с длиной свободного пробега фонона и при низких температурах определяется размерами структуры или расстояниями между дефектами [141]. Изменение прочностных свойств пластических материалов с уменьшением размера зерна связано с характерной длиной движения дислокации (Закон Холла-Петча [142, 143]). При хрупком разрушении прочность возрастает с уменьшением размера начального дефекта (теория разрушения, берущая начало с работ Гриффитса [144]). Однако для других свойств, таких как упругость, описание эффектов, связанных с уменьшением размера структуры в рамках классической теории невозможно, поскольку в классической теории упругости отсутствуют какие-либо характеристики среды с размерностью длины. Описание наблюдаемого масштабного эффекта механического поведения таких нанобъектов, как нанотрубки, наносулы (нанопроволоки), нановключения, тонкие пленки, атомные кластеры, nanoостровки и др. требует того или иного обобщения теории упругости.

Масштабный эффект, проявляющийся при деформационных процессах, может быть связан с невозможностью использования приближения сплошной среды при наноразмерах, т.е. с важностью на таких масштабах дискретного атомного строения материала. Решающее значение могут иметь при этом отличительные особенности атомного строения приповерхностных

слоев и зон у границ раздела. Роль этих относительно узких областей может становиться существенной, когда число приповерхностных атомов перестанет быть очень малым по сравнению с числом атомов в остальном объеме материала.

Многочисленные теоретические исследования с использованием квантово-механического и молекулярного моделирования, принимающие во внимание атомную структуру материалов, и экспериментальные работы подтвердили наличие масштабного эффекта для нанообъектов при размерах от долей до десятка нанометров [90, 91]. Такое поведение демонстрируют, в частности, упрощенные дискретные модели пленок (например, [145]), и модели обобщенной упругости нанотрубок, построенные на базе молекулярного численного моделирования (например, [146]).

Для дисперсных композитов масштабный эффект проявляется в зависимости характеристик от размера включений. Данный эффект невозможно описать в рамках классической теории упругости. Зависимость свойств от размера включений, наблюдаемая в композитах тонкодисперсной структуры (например [147]), при размерах частиц порядка нескольких десятков нанометров и менее, может быть объяснена наличием между матрицей и включениями промежуточного слоя («промежуточной фазы»), со свойствами, отличающимися как от включений, так и от матрицы (напр. [148, 149]).

Происхождение промежуточного слоя вызвано тем, что молекулы в нем находятся в состоянии, отличающимся от состояния молекул, находящихся вдали от границы. Природа данного различия может быть различной: в случае композитов на основе неорганических соединений она может быть вызвана разностью параметров кристаллических решеток и различием сил Ван-дер-ваальсового взаимодействия фаз, в случае композитов на основе органических соединений – особого состояния макромолекул в пограничном слое. Толщина данного слоя обычно составляет

единицы межмолекулярных расстояний, т.е. единицы или первые десятки ангстрем, и для композитов с частицами порядка микрон и более суммарный объем фазы промежуточного слоя слишком мал, чтобы оказывать какое-либо существенное влияние на эффективные свойства. Для композитов, в состав которых входят органические соединения, толщина промежуточного слоя, по-прежнему сопоставимая с размерами молекул, может быть выше и составлять десятки нанометров и более. Поскольку площадь контакта включений и матрицы растет с уменьшением размера включений, влияние размера включений на свойства композита становится существенным при переходе от частиц включения микро- к наноуровню.

Проблема вычисления распределения напряжений и эффективных свойств композитов сама по себе достаточно сложна, ее исследованию посвящено большое количество работ (например, [150-154]). Наличие промежуточного слоя еще более осложняет проблему. Один из подходов состоит в решении полной задачи о деформировании трехфазного объекта. Однако будучи строгим, данный путь ведет к значительным трудностям (например, [155]). Кроме того, задача осложняется тем, что свойства промежуточного слоя правильнее представлять не постоянными, а переменными по его толщине (напр.[156]). Один из путей решения задачи основан на замене включения, окруженного промежуточным слоем, однородным включением, дающим такой же отклик на внешнее воздействие, как и исходное неоднородное включение, альтернативный подход состоит в использовании моделей обобщенной (поверхностной) упругости [145, 157, 158, 4]. Первый из названных подходов, использованный впервые, по-видимому, в работе Канауна и Кудрявцевой [159], применялся затем в различных вариантах [160, 161]. Аналогичный подход для композитов со включениями несферической формы при наличии слоя промежуточной фазы был применен в работах Гольдштейна и Устинова [162, 163, 164, 165]. Использованный подход, основанный на тех же идеях, что и

дифференциальная схема расчёта эффективных характеристик [166, 167], хотя и является приближенным, позволяет существенно упростить вычисления и, для ряда случаев, получить достаточно простые аналитические решения.

Весьма общее решение задачи о сферическом включении, окруженном многослойными оболочками при наличии собственных деформаций как в центральной сфере, так и в оболочках, а также при наличии внешних однородных напряжений было получено в [168, 169], во втором случае учитывался вклад поверхностных напряжений. Более удобная для вычисления упрощенная схема, использующая технологию метода трех фаз, была предложена Лурье и Соляевым [170], в которой упругие характеристики промежуточного слоя брались из решения одномерной задачи.

В работах [171, 172, 173] для описания тонких структур на наномасштабе были развиты подходы на основе адгезионного взаимодействия.

В последние годы получило широкое распространение применение для описания механического поведения нанообъектов такой обобщенной теории упругости, которая использует классическую теорию при рассмотрении основного объема материала, и лишь для поверхностей и границ раздела вводятся нестандартные свойства [174, 175, 176, 177, 178, 179]. Для описания аномальной поверхностной упругости при этом применяются поверхностные определяющие соотношения, дополняющие обычный закон Гука для объема материала, а уравнения равновесия дополняются поверхностным аналогом – уравнениями Лапласа-Юнга. Данное представление получило широкое распространение. Здесь следует отметить работы В.В. Еремеева, Н.Ф. Морозова и соавторов [180-186]. М.А. Грековым и соавторами был развит математический аппарат, позволяющий сводить двумерные задачи теории

упругости с дополнительными условиями на границе указанного типа к гиперинтегральным уравнениям [187, 188, 189, 190].

Здесь следует подчеркнуть, что исторически теория поверхностных явлений развивалась для жидкостей, для которых роль поверхностных явлений проявляется явственней даже на макроуровне. При возникновении потребности учета поверхностных явлений в твердых телах, основные положения теории поверхностных явлений были перенесены почти автоматически, хотя некоторые особенности, присущие твердому телу обсуждались и принимались во внимание [176], а также цитированные выше работы. Основное отличие состоит в следующем. В жидкостях, а также при контакте жидкостей с твердыми телами на молекулярном уровне взаимодействие осуществляется за счет ван-дер-ваальсовых сил, относительно слабых и относительно дальнедействующих. Знание этого позволяет с единых позиций и на основании минимального набора опытных данных объяснить как явления поверхностного натяжения, так и явления контактного взаимодействия жидкостей с твердыми телами (смачивание и капиллярные явления). В твердых телах взаимодействия между атомами гораздо более разнообразны и осуществляются за счет различных типов взаимодействия (ковалентного, ионного, металлического), среди которых ван-дер-ваальсово не является преобладающим. Явления, связанные с проявлением поверхностной энергии и поверхностной упругости, обуславливаются всем разнообразием существующих взаимодействий, в то время как явления контактного взаимодействия по-прежнему обуславливаются ван-дер-ваальсовым взаимодействием (ситуация может осложняться наличием поверхностных зарядов). В указанной связи в твердых телах уже невозможно описать все многообразие поверхностных явлений на основании столь малого количества исходных данных и предположений. Кроме того, в твердых телах за счет высоких потенциальных барьеров гораздо легче и чаще реализуются метастабильные состояния – т.е.

состояния, не соответствующему глобальному минимуму свободной энергии для текущих условий. Одной из целей диссертации является выявление отличий природы поверхностных явлений в твердых телах и жидкостях и адекватное описание этих явлений, а также оценка роли поверхностных явлений (поверхностной упругости) для наночастиц.

Одним из положений традиционной поверхностной упругости для твердых тел [174-177], являющихся, по всей видимости, наследием теории поверхностных явлений для жидкости, является рассмотрение зависимости поверхностных напряжений лишь от деформаций, действующих в плоскости, касательной к поверхности. Однако на влияние давления (нормального напряжения) на величину поверхностной энергии (и как следствие поверхностных напряжений) неоднократно указывалось, например, в работах [191, 192]. Тем не менее, этот известный экспериментальный факт не получил должного внимания при построении теории поверхностной упругости для твердого тела. Если для свободных поверхностей наблюдаемые механические эффекты достаточно хорошо описываются с помощью традиционных подходов поверхностной упругости, то при наличии рассмотрении внутренних границ раздела твердых фаз существующие теории нуждаются в модификации.

К еще одному недостатку современной теории поверхностной упругости можно отнести разрыв (отсутствие перехода) между поверхностной упругостью типа Гертнера - Мердока [174-177] или Шаттлворса [179], описывающей поведение относительно жестких поверхностей, и поверхностной упругости винклеровского типа [193-196], описывающей поведение относительно мягких поверхностей. Отсюда следует задача построения общей теории, устраняющей данный разрыв. Вариант такой теории будет рассмотрен в Главе 5.

Относительно просто может быть получена теоретическая оценка роли особенностей поверхностной упругости наночастиц на примере задачи

Эшелби [197, 198]. Она представляет собой задачу определения напряженно-деформированного состояния упругой безграничной среды с шаровым включением из другого материала, подверженного однородной собственной деформации. Собственная деформация при этом может быть обязана тепловому расширению, фазовому превращению, несовместности атомных решеток материалов матрицы и включения, остаточному напряжению, пластическому течению, двойникованию и т.п. Аналитическое решение задачи Эшелби с учетом дополнительных поверхностных деформаций, описываемых двумерным законом Гука с обобщенными поверхностными модулями упругости, было подробно разобрано в работах [157, 158]. Однако в этих работах не принимался во внимание такой важный фактор как поверхностные остаточные напряжения. Данный фактор будет учитываться в Главах 5, 6.

ГЛАВА 2. ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ОТСЛОЕНИЕ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ ОБЛАСТЕЙ

2.1. Общая постановка задачи об отслоении слоя от полуплоскости при различии их упругих свойств

Рассматривается однородная изотропная упругая полуплоскость $y < 0$, к которой вдоль линии $y=0$, $x < 0$ (Рисунок 2.1) присоединена полоса $0 < y < 1$ из другого материала.

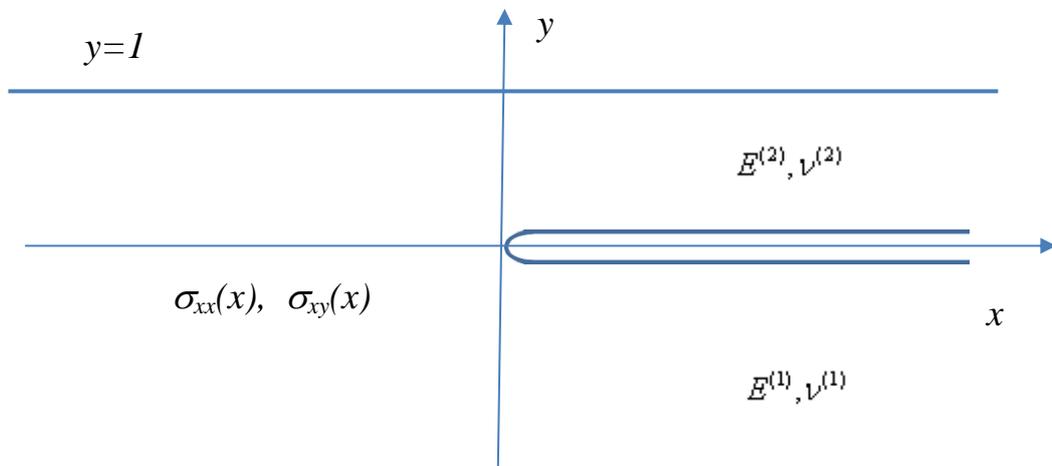


Рисунок 2.1. Отслоение слоя от полуплоскости. Геометрия задачи.

В постановке плоской деформации рассматривается однородная задача: предполагается, что все поверхности свободны от напряжений,

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \text{при } y=1, \text{ и при } y=0, \quad x > 0 \quad (2.1.1)$$

а нагрузка с эквивалентными главным вектором (T, N) и моментом M приложена на бесконечности, так что

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{-\infty}^0 x \sigma_{yy}(x, 0) dx, \\
 N &= \int_{-\infty}^0 \sigma_{yy}(x, 0) dx, \\
 -T &= \int_{-\infty}^0 \sigma_{xy}(x, 0) dx
 \end{aligned}
 \tag{2.1.2}$$

Все величины, относящиеся к полуплоскости $y < 0$, будут обозначаться индексом 1, все величины, относящиеся к полосе $0 < y < 1$, - индексом 2. Модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов полуплоскости и полосы обозначим $E^{(i)}, \nu^{(i)}$, $i = 1, 2$, соответственно. С обычными модулями Юнга $E_0^{(i)}$ и коэффициентами Пуассона $\nu_0^{(i)}$ они связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
 E^{(i)} &= \frac{E_0^{(i)}}{(1 - \nu_0^{(i)})(1 + \nu_0^{(i)})} \\
 \nu^{(i)} &= \frac{\nu_0^{(i)}}{1 - \nu_0^{(i)}}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

Условия сопряжения на границе имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}^{(1)} &= \sigma_{yy}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \\
 u^{(1)} &= u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{при } y = 0, \quad x < 0
 \tag{2.1.4}$$

Здесь u, v - компоненты вектора смещения, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ - компоненты тензора напряжений.

В окрестности нуля поле напряжений должно быть интегрируемо.

$$\begin{cases} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = O(-x^{-\nu}), \quad \nu < 1 \quad (2.1.5)$$

Из механики разрушение известно, что это поле имеет корневую особенность

$$\begin{cases} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{-2\pi x}} \begin{cases} K_I \\ K_{II} \end{cases} + O(\sqrt{-x}) \quad (2.1.6)$$

Однако для построения решения можно довольствоваться условием (2.1.5), а условие (2.1.6) получится из решения.

В случае различных значений упругих постоянных здесь могут присутствовать осциллирующие члены. Однако в рассмотренных ниже задачах осцилляции не возникают. Данное соотношение будет использовано в дальнейшем.

Воспользуемся результатами работы [109], в которой дается связь между образами двустороннего преобразования Лапласа от производной компонент вектора смещения

$$g_x^{(i)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u^{(i)}(x, 0) e^{-px} dx$$

$$g_y^{(i)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} v^{(i)}(x, 0) e^{-px} dx \quad (2.1.7)$$

и напряжениями

$$q_x(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(x, 0) e^{-px} dx$$

(2.1.8)

$$q_y(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(x, 0) e^{-px} dx$$

для полуплоскости $y \leq 0$

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_x^{(1)}(p) = i \operatorname{sgn}\left(\frac{p}{i}\right) q_x(p) + \frac{1-\nu^{(1)}}{2} q_y(p)$$

$p \in L$ (2.1.9)

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_y^{(1)}(p) = -\frac{1-\nu^{(1)}}{2} q_x(p) + i \operatorname{sgn}\left(\frac{p}{i}\right) q_y(p)$$

где L - мнимая ось; и для полосы $0 \leq y \leq 1$ (при поставленных граничных условиях свободной внешней границы $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$, при $y=1$). Вывод данных выражений дан в Приложении 1

$$\frac{E^{(2)}}{2} g_x^{(2)}(p) = \frac{\sin p \cos p - p}{d} q_x(p) + \frac{p^2}{d} q_y(p) + \frac{1-\nu^{(2)}}{2} q_y(p)$$

(2.1.10)

$$\frac{E^{(2)}}{2} g_y^{(2)}(p) = -\frac{1-\nu^{(2)}}{2} q_x(p) - \frac{p^2}{d} q_x(p) + \frac{\sin p \cos p + p}{d} q_y(p)$$

$$d = \sin^2 p - p^2$$

(2.1.11)

Рассмотрим преобразование Лапласа от следующих величин

$$F_+(p) = \frac{E^{(2)}}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{array}{l} v^{(2)}(x, 0) - v^{(1)}(x, 0) \\ u^{(2)}(x, 0) - u^{(1)}(x, 0) \end{array} \right\} e^{-px} dx$$

(2.1.12)

$$F_-(p) = \int_{-\infty}^0 \begin{Bmatrix} \sigma_{yy}(x,0) \\ \sigma_{xy}(x,0) \end{Bmatrix} e^{-px} dx \quad (2.1.13)$$

Здесь использовано равенства нулю скачка смещения для отрицательной полуоси и равенства нулю напряжений для положительной полуоси. На основании (2.1.4) подынтегральное выражение (2.1.12) тождественно равно нулю для $x < 0$, и, следовательно, $F_+(p)$ аналитична в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} p > 0$). Аналогично, согласно (2.1.1), подынтегральное выражение (2.1.13) равно нулю для $x > 0$, и, следовательно, $F_-(p)$ аналитична в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} p < 0$). Здесь, аналогично [106-109], предполагается выполнение условия убывания напряжений на бесконечности для полуплоскости $y \leq 0$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ и полосы $0 \leq y \leq 1$ при $x \rightarrow +\infty$. В окрестности нуля выполняются условия (2.1.6). При $x \rightarrow -\infty$ смещения могут расти как полином третьей степени (что соответствует ненулевой поперечной силе на бесконечности), следовательно, в Лаплас-образе $F_-(p)$ возможно появление полюса в нуле до третьего порядка включительно.

Комбинируя (2.1.7)-(2.1.13), получаем уравнение матричной задачи Римана, аналогичное [106-109]

$$F_+(p) = K(p)F_-(p) \quad (2.1.14)$$

где

$$K(p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, p \in L \quad (2.1.15)$$

$$a_{11} = (\sin p \cos p + p) / d - i \eta \operatorname{sgn}(p / i)$$

$$a_{12} = -a_{21} = -p^2 / d - \eta' / 2 \quad (2.1.16)$$

$$a_{22} = (\sin p \cos p - p) / d - i \eta \operatorname{sgn}(p / i)$$

$$\eta = E^{(2)} / E^{(1)} \quad (2.1.17)$$

$$\eta' = 1 - \nu^{(2)} - \eta(1 - \nu^{(1)}) \quad (2.1.18)$$

Основная сложность состоит в факторизации матричного коэффициента $K(p)$, т.е. представление его в виде

$$K(p) = X_+(p) X_-^{-1}(p) \quad (2.1.19)$$

где функции $X_{\pm}(p)$ аналитичны в правой и левой полуплоскости комплексного переменного p . Для случая одинаковых упругих постоянных это было проделано в работах [106-109]. Для более широкого класса $\eta' = 0, \eta \neq 0$ решение получено ниже (Гл. 3).

2.2. Упрощения, приводящие к разделению задачи на две скалярные. Задача о сдвиговой трещине

2.2.1. Постановка задачи о сдвиговой трещине

Положив в (2.1.15) $a_{12} = -a_{21} = 0$, что соответствует возможности пренебречь влиянием перекрестных членов, матричная задача распадается на две скалярные задачи. В настоящем пункте рассматривается одна из этих скалярных задач, соответствующая продольным смещениям и сдвиговым напряжениям на границе, а именно

$$F_+(p) = K(p)F_-(p), \quad p \in L \quad (2.2.1)$$

$$F_+(p) = \frac{E^{(2)}}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u^{(2)}(x,0) - u^{(1)}(x,0)] e^{-px} dx \quad (2.2.2)$$

$$F_-(p) = \int_{-\infty}^0 \sigma_{xy}(x,0) e^{-px} dx \quad (2.2.3)$$

$$K(p) = (\sin p \cos p - p) / d - i\eta \operatorname{sgn}(p/i) \quad (2.2.4)$$

Как будет показано ниже, использование такого приближения дает результаты лучше совпадающие с точным решением по сравнению с широко используемым [110-113] стержневым приближением.

Аналог (2.1.19) становится теперь скалярным уравнением:

$$K(p) = \Lambda_-^{-1}(p) \Lambda_+(p) \quad (2.2.5)$$

После нахождения $\Lambda_{\pm}(p)$, окончательное решение дается с помощью теоремы Лиувилля

$$\begin{aligned} F_+(p) &= \Lambda_+(p)\Pi(p), \quad \operatorname{Re}(p) > 0 \\ F_-(p) &= \Lambda_-(p)\Pi(p), \quad \operatorname{Re}(p) < 0 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Здесь $\Pi(p)$ - функция, подлежащая определению. Поскольку индекс (в определении [109]) коэффициента краевой задачи, определяемой уравнением (2.2.4) равен минус единице, данная функция может содержать тишь одну константу, и имеет вид

$$\Pi(p) = \Pi_0 p^n \tag{2.2.7}$$

Здесь n - целая постоянная, определяемая характером поведения решения в нуле либо на бесконечности, Π_0 - постоянная, определяемая из граничных условий.

Второе из уравнений (2.1.2) и условия (2.1.6) для интересующих нас величин после трансформации принимают, соответственно, вид

$$F_-(p) = T + o(1), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow 0- \tag{2.2.8}$$

$$F_+(p) = \frac{1}{\sqrt{-2p}} K_{II} + O(p^{-3/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow -\infty \tag{2.2.9}$$

Данные условия будут использованы для определения $\Pi(p)$.

2.2.2. Решение задачи Римана

Уравнения (2.2.4), (2.2.5) могут быть записаны в виде (здесь L - мнимая ось)

$$\Lambda_{-}^{-1}(p)\Lambda_{+}(p) = -ctg p G_1(p), \quad p \in L \quad (2.2.10)$$

$$G_1(p) = -tg p \left[\frac{\sin p \cos p - p}{\sin^2 p - p^2} - i\eta \operatorname{sgn}(p/i) \right], \quad p \in L \quad (2.2.11)$$

Применением стандартного приема факторизации арктангенса через Гамма-функцию, решение (2.2.10) может быть выражено следующим образом

$$\Lambda_{+}(p) = \frac{\Gamma(1 + p/\pi)}{\Gamma(1/2 + p/\pi)} J_{+}(p), \quad (2.2.12)$$

$$\Lambda_{-}(p) = \frac{\Gamma(1/2 - p/\pi)}{\Gamma(-p/\pi)} J_{-}(p)$$

$$J_{\pm}(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\operatorname{th} s \left(\frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} - \eta \operatorname{sgn} s \right) \right] \frac{ds}{is - p} \right\} \quad (2.2.13)$$

2.2.3. Некоторые вспомогательные функции

Подынтегральная функция (2.2.13) имеет в нуле разрыв первой производной. Данный разрыв соответствует появлению в разложениях вблизи нуля факторизующих функций членов вида $\eta p \ln \eta p$. Представляется удобным выделить некоторую функцию (умножить и разделить на нее

функцию (2.2.11)), терпящую подобный разрыв, для которой факторизация выполнима. В качестве такой вспомогательной функции возьмем

$$\varphi_1 \equiv \frac{1+b|p/i|}{\sqrt{1-b^2 p^2}} = \frac{\Phi_{1+}(p)}{\Phi_{1-}(p)} \quad p \in L \quad (2.2.14)$$

$$\Phi_{1\pm}(p) = \Phi_{N\pm}(p)\Phi_{D\pm}(p) \quad (2.2.15)$$

$$\frac{\Phi_{N+}(p)}{\Phi_{N-}(p)} = 1+b|p/i| \quad (2.2.16)$$

$$\frac{\Phi_{D+}(p)}{\Phi_{D-}(p)} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2 p^2}} \quad (2.2.17)$$

Здесь b - коэффициент при разрыве производной в нуле.

Знаменатель (2.2.14) при этом факторизуется элементарно

$$\Phi_{D\pm}(p) = (1 \pm bp)^{\mp 1/2} \quad (2.2.18)$$

Факторизация числителя (2.2.14) может быть осуществлена [199, 200] путем последовательного логарифмирования и дифференцирования выражения (2.2.14)

$$\frac{\Phi'_{N+}(p)}{\Phi_{N+}(p)} - \frac{\Phi'_{N-}(p)}{\Phi_{N-}(p)} = \frac{-ib \operatorname{sgn}(p/i)}{1+b|p/i|} \quad (2.2.19)$$

Данная процедура для Фурье образов подобной функции проделывалась в работах [201, 202]. Разрыв производных в нуле

$\frac{\Phi'_{N+}(p)}{\Phi_{N+}(p)}, \frac{\Phi'_{N-}(p)}{\Phi_{N-}(p)}$ не мешает вычислению интересующих величин с

помощью интегралов типа Коши

$$\frac{\Phi'_{N_{\pm}}(p)}{\Phi_{N_{\pm}}(p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{-ib \operatorname{sgn}(z/i)}{1+b|z/i|} \frac{dz}{z-p} \quad (2.2.20)$$

Вычисляя интегралы в (2.2.20) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Phi'_{N_+}(p)}{\Phi_{N_+}(p)} &= b \frac{\pi b p - 2 \ln(bp)}{2\pi(b^2 p^2 + 1)} \\ \frac{\Phi'_{N_-}(p)}{\Phi_{N_-}(p)} &= -b \frac{\pi b p + 2 \ln(-bp)}{2\pi(b^2 p^2 + 1)} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

и решая получившиеся дифференциальные уравнения имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{N_+}(p) &= \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{bp} \frac{\pi \zeta / 2 - \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) \\ \Phi_{N_-}(p) &= \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{bp} \frac{\pi \zeta / 2 + \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Здесь логарифм определяется так, чтобы разрез для $\Phi_{N_{\pm}}(p)$ проходил в левой (правой) полуплоскости, соответственно. Интегралы в (2.2.22) можно выразить через комбинации специальных функций – дилогарифмов ($\operatorname{Li}_2(x)$)

$$\begin{aligned} \Phi_{N_+}(p) &= (1 + b^2 p^2)^{1/4} \exp \frac{-i}{2\pi} \left[\ln(bp) (\ln(1 - ibp) - \ln(1 + ibp)) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Li}_2(ibp) - \operatorname{Li}_2(-ibp) \right] \\ \Phi_{N_-}(p) &= (1 + b^2 p^2)^{-1/4} \exp \frac{-i}{2\pi} \left[\ln(-bp) (\ln(1 - ibp) - \ln(1 + ibp)) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Li}_2(ibp) - \operatorname{Li}_2(-ibp) \right] \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Подставляя (2.2.22) и (2.2.18) в (2.2.15) окончательно получаем

$$\Phi_{1\pm}(p) = (1 \pm bp)^{\mp 1/2} \exp\left(\pm \frac{1}{\pi} \int_0^{bp} \frac{\pi \zeta / 2 \mp \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) \quad (2.2.24)$$

или через специальные функции

$$\begin{aligned} \Phi_{1\pm}(p) &= (1 \pm bp)^{\mp 1/2} (1 + b^2 p^2)^{\pm 1/4} \times \\ &\times \exp \frac{-i}{2\pi} \left[\ln(\pm bp) (\ln(1 - ibp) - \ln(1 + ibp)) + \text{Li}_2(ibp) - \text{Li}_2(-ibp) \right] \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Следует заметить, что, в конце концов, не важно, каким образом были получены соотношения (2.2.24), (2.2.25); существенно то, что выражения ими определяемые являются аналитическими функциями справа и слева от мнимой оси (за исключением начала координат, где они имеют логарифмические особенности), соответственно, и то, что они обращают (2.2.14) в тождество. Оба эти утверждения проверяются непосредственно.

В дальнейшем нам понадобятся как сами выражения (2.2.24), так и их производные. Выпишем необходимые комбинации

$$\begin{aligned} \frac{\Phi'_{1+}(p)}{\Phi_{1+}(p)} &= b \frac{\pi bp - 2 \ln(bp)}{2\pi(b^2 p^2 + 1)} - \frac{b}{2(1 - bp)} \\ \frac{\Phi'_{1-}(p)}{\Phi_{1-}(p)} &= -b \frac{\pi bp + 2 \ln(-bp)}{2\pi(b^2 p^2 + 1)} - \frac{b}{2(1 + bp)} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Вблизи нуля справедливы следующие разложения

$$\frac{\Phi'_{1+}(p)}{\Phi_{1+}(p)} = - \left[\frac{1}{2} + \frac{\ln(bp)}{\pi} \right] b + O(p)$$

$$\frac{\Phi'_{1-}(p)}{\Phi_{1-}(p)} = - \left[\frac{1}{2} + \frac{\ln(-bp)}{\pi} \right] b + O(p) \quad (2.2.27)$$

Для функции $\Phi_{N+}(p)$:

$$\Phi_{N+}(p) = 1 + \frac{bp}{\pi} [1 - \ln bp] + \frac{b^2 p^2}{2} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1 - \ln bp}{\pi} \right)^2 \right] + O(p^2) \quad (2.2.28)$$

2.2.4. Альтернативное решение задачи Римана. Определение параметра эффективной заделки

Домножая и деля правую часть (2.2.11) на φ_1 , определяемую (2.2.14), полагая $b = \eta/2$ – именно это значение обеспечивает устранение разрыва производной в (2.2.11) – выражение (2.2.10) преобразуем к виду

$$\Lambda_-^{-1}(p) \Lambda_+(p) = -ctg p \frac{1 + \frac{\eta}{2} \left| \frac{p}{i} \right|}{\sqrt{1 - \frac{\eta^2 p^2}{4}}} G_2(p), \quad p \in L \quad (2.2.29)$$

$$G_2(p) = -tg p \frac{\sqrt{1 - \frac{\eta^2 p^2}{4}}}{1 + \frac{\eta}{2} \left| \frac{p}{i} \right|} \left[\frac{\sin p \cos p - p}{\sin^2 p - p^2} - i \eta \operatorname{sgn}(p/i) \right], \quad (2.2.30)$$

Тогда вместо (2.2.12), (2.2.13) имеем

$$\Lambda_+(p) = \frac{\Gamma(1/2 + p/\pi)}{\Gamma(1 + p/\pi)} \left(1 + \frac{\eta p}{2} \right)^{-1/2} \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\eta p/2} \frac{\pi \zeta / 2 - \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta \right) J_{2+}(p) \quad (2.2.31)$$

$$\Lambda_-(p) = \frac{\Gamma(1/2 - p/\pi)}{\Gamma(-p/\pi)} \left(1 - \frac{\eta p}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{\eta p/2 + \ln \zeta} \frac{\pi \zeta / 2 + \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) J_{2-}(p) \quad (2.2.32)$$

$$J_{2\pm}(p) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{\eta^2 s^2}{4}}}{1 + \frac{\eta s}{2}} \operatorname{th} s \left(\frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \operatorname{sgn} s \right) \right] \frac{ds}{is - p}\right\} \quad (2.2.33)$$

Данные выражения удобны для получения асимптотических разложений вблизи $p = 0$.

$$\Lambda_-(p) = i \frac{p}{\sqrt{2\pi}} + O(p^2) \quad (2.2.34)$$

$$\Lambda_+(p) = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 + \left(\frac{4\ln 2}{\pi} + \delta_1 + \frac{\eta}{2\pi} - \frac{\eta}{4} - \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{\eta p}{2} \right) p + \right.$$

$$\left[\frac{29}{180} + \frac{3\eta^2}{32} - \frac{2\ln 2}{3\pi} + \frac{2\delta_1 \ln 2}{\pi} + \left(\frac{2\ln 2}{\pi} \right)^2 + \frac{\eta^2}{8\pi} \left(\ln \frac{\eta p}{2} - 1 \right) + \right. \quad (2.2.35)$$

$$\left. \frac{\eta^2}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\eta p}{2} - 1 \right)^2 - \frac{\eta}{2\pi} \left(\delta_1 + \frac{2\ln 2}{\pi} \right) \left(\ln \frac{\eta p}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} \right) \right] p^2 + O(p^3 \ln^3 p)$$

Здесь

$$\delta_1(\eta) = \frac{d \ln J_{2+}(p)}{dp} \Big|_{p=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{ds} \ln \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{\eta^2 s^2}{4}}}{1 + \frac{\eta s}{2}} \operatorname{th} s \left(\frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \right) \right] \frac{ds}{s} \quad (2.2.36)$$

Интегрирование последнего выражения по частям с учетом свойств интеграла Коши [203, 204] дает

$$\delta_1(\eta) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \ln \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{\eta^2 s^2}{4}}}{2 \left(1 + \frac{\eta s}{2}\right)} \operatorname{th} s \left(\frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \right) \right] \frac{ds}{s^2} \quad (2.2.37)$$

Обе формы (2.2.36), (2.2.37) не представляют сложности для численного интегрирования. Однако для анализа последнее выражение полезно преобразовать, разбив на три интеграла, первые два из которых вычисляются в замкнутой форме

$$\delta_1(\eta) = \delta_2(\eta) + \delta_3(\eta) + \delta_4(\eta) / 4 \quad (2.2.38)$$

$$\delta_2(\eta) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \ln \sqrt{1 + \frac{\eta^2 s^2}{4}} \frac{ds}{s^2} = \frac{\eta}{4} \quad (2.2.39)$$

$$\delta_3(\eta) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \ln \left[\frac{\operatorname{th} s}{s} \right] \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{\pi_0} \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{\operatorname{sh} s} - \frac{1}{s} \right] \frac{ds}{s} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{2 \ln 2}{\pi} \quad (2.2.40)$$

$$\delta_4(\eta) = \frac{4}{\pi_0} \int_0^\infty \ln \left[\frac{s}{2 + \eta s} \left(\frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \right) \right] \frac{ds}{s^2} \quad (2.2.41)$$

Последний интеграл стремится к нулю при $\eta \rightarrow \infty$. Для произвольных η он остается ограниченным, достигая максимума в нуле $\delta_4(0) \approx 0.83772$.

Зависимость $\delta_4(\eta)$ представлена на Рисунке 2.2.

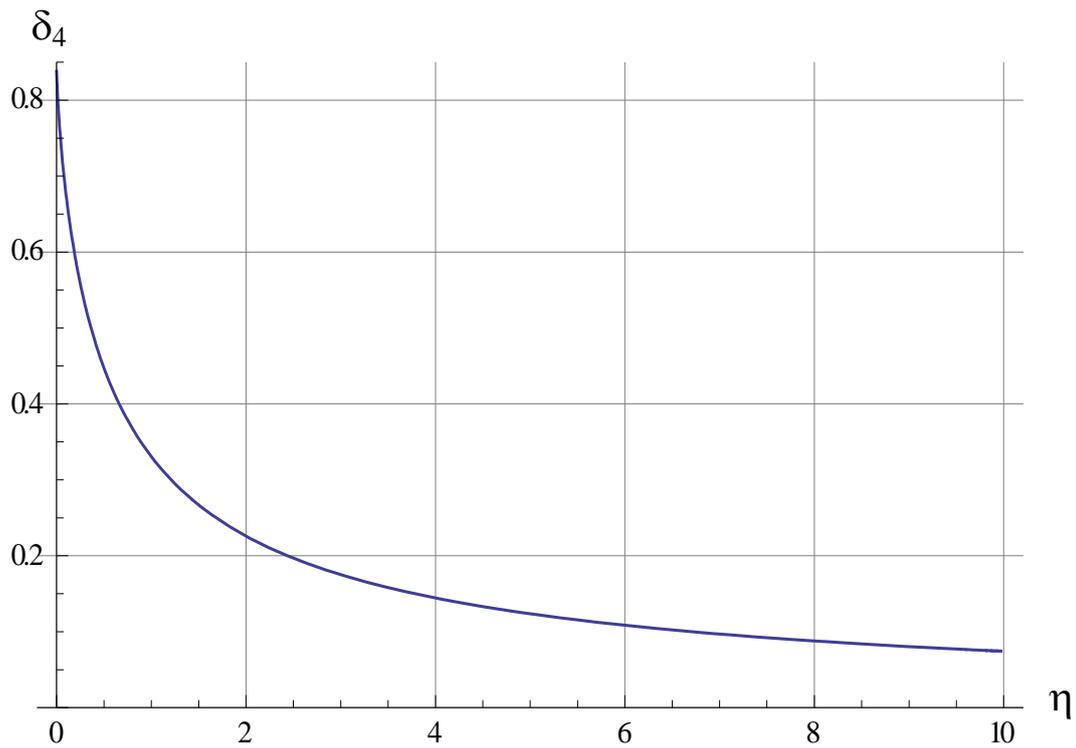


Рисунок 2.2. Зависимость параметра δ_4 от отношения модулей покрытия и основания

Из (2.2.34) на основании (2.2.6) находим

$$\Pi(p) = -i\sqrt{2\pi T}p^{-1} \quad (2.2.42)$$

Подстановка (2.2.42) и (2.2.35) в (2.2.6) и разложение для $p \rightarrow 0$ дает

$$\begin{aligned}
F_+(p) = & 2T \left\{ \frac{1}{p} + \left(\frac{2\ln 2}{\pi} + \delta_1 + \frac{\eta}{2\pi} - \frac{\eta}{4} - \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{\eta p}{2} \right) + \right. \\
& \left[\frac{29}{180} + \frac{3\eta^2}{32} - \frac{2\ln 2}{3\pi} + \frac{2\delta_1 \ln 2}{\pi} + \left(\frac{2\ln 2}{\pi} \right)^2 + \frac{\eta^2}{8\pi} \left(\ln \frac{\eta p}{2} - 1 \right) + \right. \\
& \left. \left. \frac{\eta^2}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\eta p}{2} - 1 \right)^2 - \frac{\eta}{2\pi} \left(\delta_1 + \frac{2\ln 2}{\pi} \right) \left(\ln \frac{\eta p}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} \right) \right] p \right\} + O(p^2 \ln^3 p)
\end{aligned} \tag{2.2.43}$$

Выражение (2.2.43) есть асимптотика образа Лапласа от производной скачка смещения. На основании свойств преобразования Лапласа (например [205]) образ самого смещения получается делением его на p . Члены разложения высшего порядка могут быть получены дальнейшим домножением на p произвольное число раз, применением обратного преобразования Лапласа с последующим дифференцированием оригинала такое же число раз. Ограничиваясь двумя членами, с учетом (2.2.2), окончательно получаем для $x \rightarrow \infty$

$$E^{(2)}u = 4Tx + K_{uT}T \tag{2.2.44}$$

$$\begin{aligned}
K_{uT} = & \frac{2\eta}{\pi} \left(\ln \frac{2x}{\eta} + \gamma + 1 - \frac{\pi}{2} \right) + 4 \left(\delta_1 + \frac{2\ln 2}{\pi} \right) + \\
& + \frac{\eta^2}{\pi^2 x} \left(\ln \frac{2x}{\eta} + \gamma + 1 - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2\eta}{\pi x} \left(\delta_1 + \frac{2\ln 2}{\pi} \right) + O\left(\frac{\ln^2 x}{x^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.2.45}$$

Здесь $\gamma \approx 0.5772$ – постоянная Эйлера. В формуле (2.2.44) первый член соответствует смещению эффективного стержня (коэффициент 4 появляется за счет того, что сила приложена не по его центру и вызывает изгиб, сопровождающийся дополнительным смещением нижнего края стержня на величину $3T/E^{(2)}$). Оставшийся член, деленный на T , может

рассматриваться как искомый коэффициент упругой заделки. С учетом формул (2.2.38)-(2.2.41), формула (2.2.45) может быть записана в более простом виде

$$\begin{aligned}
 K_{uT} &= \frac{2\eta}{\pi} \left(\ln \frac{2x}{\eta} + \gamma + 1 \right) + \delta_4 + \frac{\eta^2}{\pi^2 x} \left(\ln \frac{2x}{\eta} + \gamma + 1 \right) + \frac{\eta \delta_4}{2\pi x} + O\left(\frac{\ln^2 x}{x^2} \right) = \\
 &= \left[\frac{2\eta}{\pi} \left(\ln \frac{2x}{\eta} + \gamma + 1 \right) + \delta_4 \right] \left(1 + \frac{\eta}{2\pi x} \right) + O\left(\frac{\ln^2 x}{x^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.46}$$

Из сравнения первого и второго членов формулы (2.2.46) видно, что ведущий член разложения (2.2.46) является асимптотикой при выполнении условия

$$x/\eta \gg 1/2\pi
 \tag{2.2.47}$$

2.2.5. Определение параметров разрушения

При $p \rightarrow -\infty$ для (2.2.32) справедливо следующее асимптотическое разложение

$$\Lambda_-(p) = i \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{\pi(1+\eta)}} + o(\sqrt{-p})
 \tag{2.2.48}$$

Подстановка (2.2.48) и (2.2.42) в (2.2.6) и разложение для больших отрицательных $p \rightarrow -\infty$ дает

$$F_-(p) = \frac{T}{\sqrt{-p}} \sqrt{\frac{2}{(1+\eta)}} + o(-p^{-1/2})
 \tag{2.2.49}$$

Последнее выражение немедленно дает асимптотику напряжений при $x \rightarrow -0$

$$\sigma_{xy} = \frac{T}{\sqrt{\pi|x|}} \sqrt{\frac{2}{(1+\eta)}} + o(|x|^{-1/2}) \quad (2.2.50)$$

Отсюда КИН

$$K_{II} = \frac{2T}{\sqrt{(1+\eta)}} \quad (2.2.51)$$

С другой стороны, из первого члена (2.2.44) находим изменение упругой энергии системы при продвижении трещины, которое есть J интеграл

$$J = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} T \frac{4T}{E^{(2)}} x \right) = \frac{2T^2}{E^{(2)}} \quad (2.2.52)$$

Сравнение (2.2.51) и (2.2.52) показывает, что связь между параметрами разрушения имеет традиционный вид [68, 69]

$$J = K_{II}^2 \frac{1+\eta}{2E^{(2)}} = K_{II}^2 \frac{E^{(1)} + E^{(2)}}{2E^{(1)}E^{(2)}} \quad (2.2.53)$$

Из сравнения с точным решением для случая одинаковых модулей слоя и полуплоскости [109] видно, что решение в рассматриваемой постановке дает точное значение для скорости высвобождения энергии, но неверное значение для КИН (для точного решения присутствуют обе моды). Последнее заложено уже в самой постановке задачи, при которой а priori нормальные напряжения на продолжении трещины полагались равными нулю.

Сравнение с численными результатами будет дано в главе 3.

2.3. Дальнейшие упрощения. Задача о стрингере. Ограничения на применимость решения.

2.3.1. Задача о стрингере. Постановка

Представляется привлекательным заменить слой одномерным объектом – стрингером (стержнем), смещения которого однородны по толщине и соответствуют смещениям средней линии полосы [110, 112]. Для продольной деформации стрингера на основании закона Гука имеем

$$E^{(2)} \frac{du}{dx} = \sigma_{xx}(x) \quad (2.3.1)$$

Заменяя в уравнении равновесия

$$\frac{d\sigma_{xx}(x)}{dx} + \frac{d\sigma_{xy}(x)}{dy} = 0 \quad (2.3.2)$$

производную во втором члене разностью напряжений

$$\frac{d\sigma_{xy}(x)}{dy} = \frac{\sigma_{xy}(x,1) - \sigma_{xy}(x,0)}{1} \quad (2.3.3)$$

и учитывая, что верхняя поверхность полосы свободна от напряжений $\sigma_{xy}(x,1) = 0$, подставляя (2.3.1), получаем уравнение стрингера

$$E^{(2)} \frac{d^2u(x)}{dx^2} = \sigma_{xy}(x) \quad (2.3.4)$$

После применение двустороннего преобразования Лапласа данное уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{E^{(2)}}{2} g_y^{(2)}(p) = \frac{1}{2p} q_y(p) \quad (2.3.5)$$

При подобной постановке данным уравнением следует заменить второе из уравнений (2.1.10). Прodelывая выкладки, аналогичные выкладкам предыдущего пункта, приходим к скалярной задаче Римана (2.2.1)-(2.2.3), для которой

$$K(p) = \frac{1}{2p} - i\eta \operatorname{sgn}(p/i) \quad (2.3.6)$$

Уже отсюда видно отличие от более точной постановки (2.2.4): главный член разложения (2.2.4) вблизи нуля дает $2/p$, что в четыре раза отличается от значения, даваемого с использованием приближения стрингера (2.3.6).

2.3.2. Решение задачи о стрингере

Аналогично (2.2.29) коэффициент (2.3.6) можно факторизовать следующим образом

$$K(p) = \frac{1}{2p} \left(1 + 2\eta \left| \frac{p}{i} \right| \right) = \Lambda_-^{-1}(p) \Lambda_+(p), \quad p \in L \quad (2.3.7)$$

На основании результатов п. 2.2.3

$$\Lambda_{\pm}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(\pm \frac{1}{\pi} \int_0^{2\eta p} \frac{\pi \zeta / 2 \mp \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta \right) \quad (2.3.8)$$

Данные выражения удобны для получения асимптотических разложений при $p \rightarrow 0$.

$$\Lambda_-(p) = \sqrt{2}p + O(p^2) \quad (2.3.9)$$

$$\Lambda_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{2\eta}{\pi} p(1 - \ln 2\eta p) \right\} + O(p^2 \ln^2 p) \quad (2.3.10)$$

Из (2.3.9) на основании (2.2.6) находим

$$\Pi(p) = \frac{T}{\sqrt{2}p} \quad (2.3.11)$$

Подстановка (2.3.11) и (2.3.10) в (2.2.6) и разложение результата подстановки для малых p дает

$$F_+(p) = \frac{T}{2} \left\{ 1 + \frac{2\eta}{\pi} p(1 - \ln 2\eta p) \right\} + O(p^2 \ln^2 p) \quad (2.3.12)$$

Выражение (2.3.12) есть асимптотика образа Лапласа от производной скачка смещения. На основании свойств преобразования Лапласа (например [205]) образ самого смещения получается делением его на p . Выполняя обратное преобразование Лапласа, получаем для $x \rightarrow \infty$

$$E^{(2)}u = Tx + K_{ur}T \quad (2.3.13)$$

$$K_{ur} = \frac{2\eta}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2\eta} + \gamma + 1 \right) + O\left(\frac{\ln x}{x} \right) \quad (2.3.14)$$

Данное выражение в точности совпадает с выражением, извлекаемым из решения Койтера [110], полученного путем приведения исходной задачи к задаче Карлемана (о сдвиге), решенной с помощью последовательного применения преобразований Меллина и Лапласа. Из сравнения (2.3.14) с

более точным решением (2.2.46) видно, что отличия имеются уже в главном члене асимптотики. Следовательно, приближение стрингера для вычисления смещений является достаточно грубым.

2.3.3. Определение параметров разрушения в задаче о стрингере

При $p \rightarrow -\infty$ для (2.3.8) справедливо следующее асимптотическое разложение

$$\Lambda_-(p) = \sqrt{\frac{-p}{\eta}} + o(\sqrt{p}) \quad (2.3.15)$$

Подстановка (2.3.15) и (2.3.11) в (2.2.6) и разложение для $p \rightarrow -\infty$ дает

$$F_-(p) = \frac{T}{\sqrt{-2\eta p}} + o(p^{-1/2}) \quad (2.3.16)$$

Последнее выражение немедленно дает асимптотику напряжений при $x \rightarrow 0$

$$\sigma_{xy} = \frac{T}{\sqrt{2\pi\eta|x|}} + o(x^{-1/2}) \quad (2.3.17)$$

Отсюда КИН

$$K_{II} = \frac{T}{\sqrt{\eta}} \quad (2.3.18)$$

Что весьма существенно отличается решения (2.2.51), соответствующего постановке, более приближенной к реальности.

С другой стороны, из первого члена (2.3.13) находим изменение упругой энергии системы при продвижении трещины, которое есть J интеграл

$$J = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} T \frac{T}{E^{(2)}} x \right) = \frac{T^2}{2E^{(2)}} \quad (2.3.19)$$

Сравнение (2.3.18) и (2.3.19) показывает, что для рассматриваемого случая, связь между параметрами разрушения имеет вид, отличающийся от классического [68, 69]

$$J = K_{II}^2 \frac{\eta}{2E^{(2)}} = \frac{K_{II}^2}{2E^{(1)}} \quad (2.3.20)$$

2.4. Задача о трещине нормального отрыва. Балочное приближение

2.4.1. Формулировка задачи. Математическая постановка.

Общее решение

Рассматривается система, состоящая из полуплоскости $z < 0$ и полосы $0 < z < h$, которая находится в полном контакте с полуплоскостью вдоль участка границы $x > 0$, вдоль участка границы $x < 0$ контакт отсутствует. К левой части полосы приложена система нормальных нагрузок с эквивалентным главным вектором N и главным моментом M .

Полоса моделируется пластиной. Использование пластиночного приближения оправдывает учет приложенной нагрузки только посредством

главного вектора и главного момента. Дополнительное упрощающее предположение состоит в возможности пренебрежения действием касательных напряжений вдоль границы контакта. Данное упрощение позволяет избежать рассмотрения задачи с разрывом двух граничных условий. Основная задача состоит в нахождении связи главных вектора и момента с прогибом и его производной в месте заделки, соответствующем точке смены вида граничных условий (нахождение констант эквивалентной упругой заделки).

Уравнения, связывающие смещения и напряжения границы полуплоскости суть

$$D \frac{\partial^4 u^{(2)}}{\partial x^4} = q = -\sigma(x) \quad (2.4.1)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi \beta_E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{(1)'}(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (2.4.2)$$

Здесь β_E – постоянная, характеризующая податливость полуплоскости. Здесь и далее, по-прежнему, рассматривается плоская деформация. Для изотропной полуплоскости в предположении отсутствия касательных напряжений

$$\beta_E = \frac{2}{E^{(1)}}. \quad (2.4.3)$$

В случае анизотропии

$$\beta_E = \left\{ \beta_{22} \left[\beta_{66} + 2 \left(\beta_{12} + \sqrt{\beta_{11} \beta_{22}} \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.4.4)$$

где β_{ij} – компоненты матрицы податливости анизотропного тела [206].

Изгибная жесткость определяется выражением $D = \frac{E^{(2)} h^3}{12}$. $E^{(1)}, E^{(2)}$ – по-

прежнему, модули Юнга для плоской деформации для полуплоскости и полосы, моделируемой балкой (пластиной), соответственно. С обычными модулями они связаны соотношениями (2.1.3). Здесь подчеркнута, что $u^{(2)}$, $u^{(1)}$ - соответствуют балке (пластине) и полуплоскости соответственно, причем $u^{(1)} = u^{(2)}$ для $x \geq 0$. Математически, сформулированная задача аналогична упрощённому варианту задачи, рассмотренной в [207]. Однако для нахождения интересующих величин излагаемый путь решения представляется более простым по сравнению с их извлечением из более общего решения [207] путем предельных переходов, выполнение которых сопряжено с рядом математических трудностей.

Выполним преобразование Фурье, введя следующие обозначения

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) e^{i\alpha x} dx \\ \sigma_+(\alpha) &= \int_0^{\infty} \sigma(x) e^{i\alpha x} dx \\ \sigma_-(\alpha) &= \int_{-\infty}^0 \sigma(x) e^{i\alpha x} dx\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

Согласно условию задачи

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= \sigma_+(\alpha) \\ \sigma_-(\alpha) &= 0\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

Для четвертой производной смещения Фурье-образы имеют вид

$$V(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{(2)''''}(x) e^{i\alpha x} dx$$

$$V_+(\alpha) = \int_0^{\infty} u^{(2)''''}(x) e^{i\alpha x} dx \quad (2.4.7)$$

$$V_-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 u^{(2)''''}(x) e^{i\alpha x} dx$$

Преобразование Фурье от (2.4.2) с учетом правила дифференцирования оригинала дает

$$V(\alpha) = \beta |\alpha|^3 \sigma(\alpha) \quad (2.4.8)$$

Или с учетом (2.4.5)–(2.4.7)

$$V_+(\alpha) + V_-(\alpha) = \beta |\alpha|^3 \sigma_+(\alpha) \quad (2.4.9)$$

Поскольку уравнение (2.4.1) линейно, справедливо соотношение

$$DV_+(\alpha) + \sigma_+(\alpha) = 0, \quad (2.4.10)$$

подстановка которого в (2.4.9) дает однородное уравнение Винера-Хопфа (однородное уравнение задачи Римана)

$$V_-(\alpha) = G(\alpha) \sigma_+(\alpha) \quad (2.4.11)$$

$$G(\alpha) = \frac{1}{D} + \beta_E |\alpha|^3 = \beta_E (a^3 + |\alpha|^3) \quad (2.4.12)$$

$$a = (\beta_E D)^{-1/3} \quad (2.4.13)$$

Данное уравнение необходимо дополнить условиями поведения функции в ключевых точках – в нуле и на бесконечности. Из требования

убывания напряжения в полосе на бесконечности следует условие ограниченности трансформанты напряжений в нуле

$$\sigma_+(\alpha) = O(1), \alpha \rightarrow 0 \quad (2.4.14)$$

Из требования интегрируемости напряжений в нуле (ограниченности энергии) вытекает условие

$$\sigma_+(\alpha) = O(\alpha^{-\nu}), \nu < 1, \alpha \rightarrow \infty \quad (2.4.15)$$

Ключевым моментом решения задачи является факторизация коэффициента $G(\alpha)$, т.е. его представления в виде

$$G(\alpha) = H_-(\alpha) / H_+(\alpha) \quad (2.4.16)$$

где $H_{\pm}(\alpha)$ – граничные значения функций, регулярных в верхней и нижней комплексных полуплоскостях, соответственно. Это можно сделать следующим образом, используя последовательность действий, указанную в [199], и аналогично тому, как это делалось в [207, 208, 209]. Последовательное логарифмирование и дифференцирование равенства (2.4.16) по α дает

$$\frac{\alpha^2 \operatorname{sgn} \alpha}{a^3 + |\alpha|^3} = \frac{d}{d\alpha} \ln H_-(\alpha) - \frac{d}{d\alpha} \ln H_+(\alpha) \quad (2.4.17)$$

Откуда на основании формул Сохоцкого-Племеля

$$\frac{d}{d\alpha} \ln H_{\pm}(\alpha) = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 \operatorname{sgn} t dt}{(a^3 + |t|^3)(t - \alpha)} \quad (2.4.18)$$

Здесь $\text{Im}(\alpha) > 0$ для $H_+(\alpha)$ и $\text{Im}(\alpha) < 0$ для $H_-(\alpha)$. Разбивая в (2.4.18) интеграл на две части $t < 0$ и $t > 0$, с учетом того, что

$$\ln(-\alpha) = \ln(\alpha) - i\pi$$

для $H_+(\alpha)$, получаем

$$\frac{d}{d\alpha} \ln H_+(\alpha) = \frac{ia}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + a^2} + \frac{1}{\alpha^2 - a\alpha + a^2} \right) - \frac{3\alpha^2}{2(\alpha^3 + a^3)} - \frac{3i\alpha^2 a^3 \ln \alpha / a}{\pi(\alpha^6 - a^6)} \quad (2.4.19)$$

Интегрирование (2.4.19) дает

$$H_+(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^3 + a^3}} \exp \left[\frac{2i}{3} \left(\arctan \frac{2\alpha + a}{a\sqrt{3}} + \arctan \frac{2\alpha - a}{a\sqrt{3}} \right) \right] \exp \left(\frac{3i}{\pi} \int_0^{\alpha/a} \frac{\tau^2 \ln \tau}{\tau^6 - 1} d\tau \right) \quad (2.4.20)$$

Здесь в последнем множителе осуществлена подстановка $ta = \tau$. Предполагается, что разрез логарифма проходит вдоль отрицательной действительной полуоси и $\ln 1 = 0$.

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики (2.4.20) для $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$. Во втором случае, с учетом того, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^2 \ln \tau}{\tau^6 - 1} d\tau = \frac{\pi^2}{36}$$

имеем

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_+(\alpha) = \alpha^{-3/2} e^{i3\pi/4} \quad (2.4.21)$$

Разложение (2.4.20) для $\alpha \rightarrow 0$ имеет вид

$$H_+(\alpha) = a^{-3/2} \left[1 + \frac{2i}{a\sqrt{3}} \alpha - \frac{2}{3a^2} \alpha^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{4i}{9\sqrt{3}} + \frac{3i}{\pi} \ln \frac{\alpha}{a} \right) \frac{\alpha^3}{a^3} + O(\alpha^4 \ln \alpha) \right] \quad (2.4.22)$$

Решение задачи (2.4.11) есть

$$\sigma_+(\alpha) = \Pi_n H_+ \quad (2.4.23)$$

Здесь Π_n - рациональная функция. Поскольку напряжения при $x \rightarrow 0$ должны быть интегрируемы, $\sigma_+(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$ должна быть ограничена. Из условия характера убывания (2.4.21) следует, что Π_n на бесконечности может возрастать не быстрее линейной функции. Далее будет показано, что Π_n не может иметь особенностей в нуле, следовательно, наиболее общий вид для Π_n есть полином первой степени.

$$\Pi_n = a^{3/2} D(A + iB\alpha) \quad (2.4.24)$$

Здесь коэффициент перед скобкой введен для удобства дальнейших преобразований.

2.4.2. Вычисление коэффициентов упругой заделки

Связь напряжений со смещениями в образах Фурье имеет вид

$$-u'''_0 + i\alpha u''_0 + \alpha^2 u'_0 - i\alpha^3 u_0 + \alpha^4 u_+(\alpha) + \frac{1}{D} \sigma_+(\alpha) = 0 \quad (2.4.25)$$

Преобразовывая (2.4.25) для малых α с учетом (2.4.22), имеем

$$u_+(\alpha) = \frac{-(A+iB\alpha) \left[1 + \frac{2i}{a\sqrt{3}}\alpha - \frac{2}{3a^2}\alpha^2 + O(\alpha^3 \ln \alpha) \right] + u'''_0 - i\alpha u''_0 - \alpha^2 u'_0 + i\alpha^3 u_0}{\alpha^4} \quad (2.4.26)$$

Если главный вектор приложенных к балке (пластине) сил равен нулю, то смещения должны оставаться ограниченными на бесконечности, и в образе $u_+(\alpha)$ должна отсутствовать особенность вида α^{-1} при $\alpha \rightarrow 0$. При наличии ненулевого главного вектора должна оставаться ограниченной производная смещения по координате x , следовательно, образ $u_+(\alpha)$ не должен иметь особенностей в нуле вида α^{-2} . Данные условия дают необходимую связь между коэффициентами $u'''_0, u''_0, u'_0, u_0, A, B$.

Приравнявая к нулю коэффициенты при $\alpha^j, j=0...3$, с учетом (2.4.13), имеем для $N=0$

$$A = u'''_0 = 0 \quad (2.4.27)$$

$$B = -u''_0$$

$$u'_0 = -\frac{2}{a\sqrt{3}}u''_0 = -\frac{2(\beta_E D)^{1/3}}{\sqrt{3}}u''_0 = -\frac{2h}{\sqrt{3}\sqrt[3]{6}}\sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}}u''_0 \approx -0.636h\sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}}u''_0 \quad (2.4.28)$$

$$u_0 = \frac{2}{3a^2}u''_0 = \frac{2(\beta D)^{2/3}}{3}u''_0 = 2^{1/3}3^{-5/3}h^2\left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}\right)^{2/3}u''_0 \approx 0.202h^2\left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}\right)^{2/3}u''_0 \quad (2.4.29)$$

Аналогично, для $N \neq 0$, приравнявая к нулю коэффициенты при $\alpha^j, j=0...2$, имеем

$$A = u'''_0, \quad B = -u''_0 - \frac{2}{a\sqrt{3}}u'''_0 \quad (2.4.30)$$

$$u'_0 = -\frac{2}{a\sqrt{3}}u''_0 - \frac{2}{3a^2}u'''_0 \quad (2.4.31)$$

При наличии ненулевого главного вектора усилий, приложенных к балке, смещения вдали от начала координат перестают быть ограничены (имеют логарифмический рост). Тем не менее, возможно посчитать разность смещения между началом координат и произвольно выбранной точкой вдали от начала координат. Выбрав смещение этой, удаленной, точки за нуль, смещение начала координат (точки заделки) оказывается пропорциональным приложенной силе и зависящим от расстояния до выбранной удаленной точки. В задачах об отслоениях конечной толщины, в качестве расстояния от начала отслоения до этой точки логично принять половину ширины отслоения b . Таким образом, вычисляя еще один член разложения (2.4.26), получаем оценку для коэффициента пропорциональности между перерезывающей силой и смещением в точке заделки (или между третьей производной от прогиба и величиной смещения в точке заделки) для балки конечной длины.

$$u_0 = \frac{2}{3a^2}u''_0 + \frac{1}{\pi a^3} \left[\frac{1}{3} + \gamma + \frac{8\sqrt{3}\pi}{27} + \ln ab \right] u'''_0 \approx \quad (2.4.32)$$

$$0.202h^2 \left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \right)^{2/3} u''_0 + h^3 \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \left[0.166 + 0.0177 \ln \frac{E^{(1)}}{E^{(2)}} b^3 \right]$$

Здесь $\gamma \approx 0.577216$ - постоянная Эйлера.

Интересно отметить, что на основании асимптотических решений [17, 1], получаемых из анализа точного решения [106-109] без применения пластиночного приближения и с полным учетом действия как нормальных, так и касательных напряжений, в случае идентичности материалов пластины и подложки получается следующее значение: $d = 0.620$. Разница между

численным значением d согласно данной модели и асимптотически точным решением согласно (2.4.28) $d = 0.636$ составляет менее 3%.

Сравнение коэффициента упругой заделки (2.4.28) с результатами [96], полученными численным решением точных интегральных уравнений, представлено на Рисунке 2.3. Результаты вычисления коэффициента, связывающего смещение точки заделки от некоторой точки, находящейся на расстоянии x , от отношения упругих модулей балки и основания представлены на рисунке 2.4.

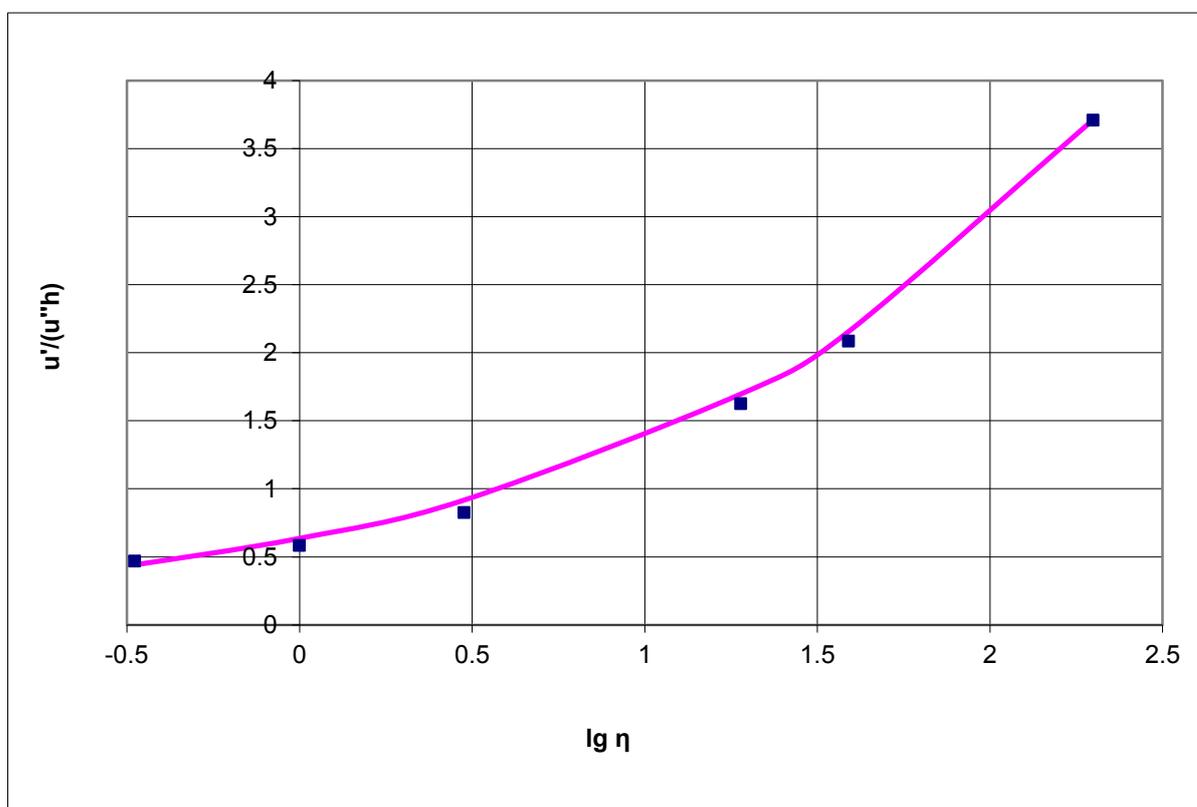


Рисунок 2.3. Зависимость коэффициента упругой заделки для угла наклона от отношения модулей упругости балки, моделирующей отслоившееся покрытие, и основания. Сплошная линия – согласно формуле (2.4.28); точки – согласно численным результатам [96].

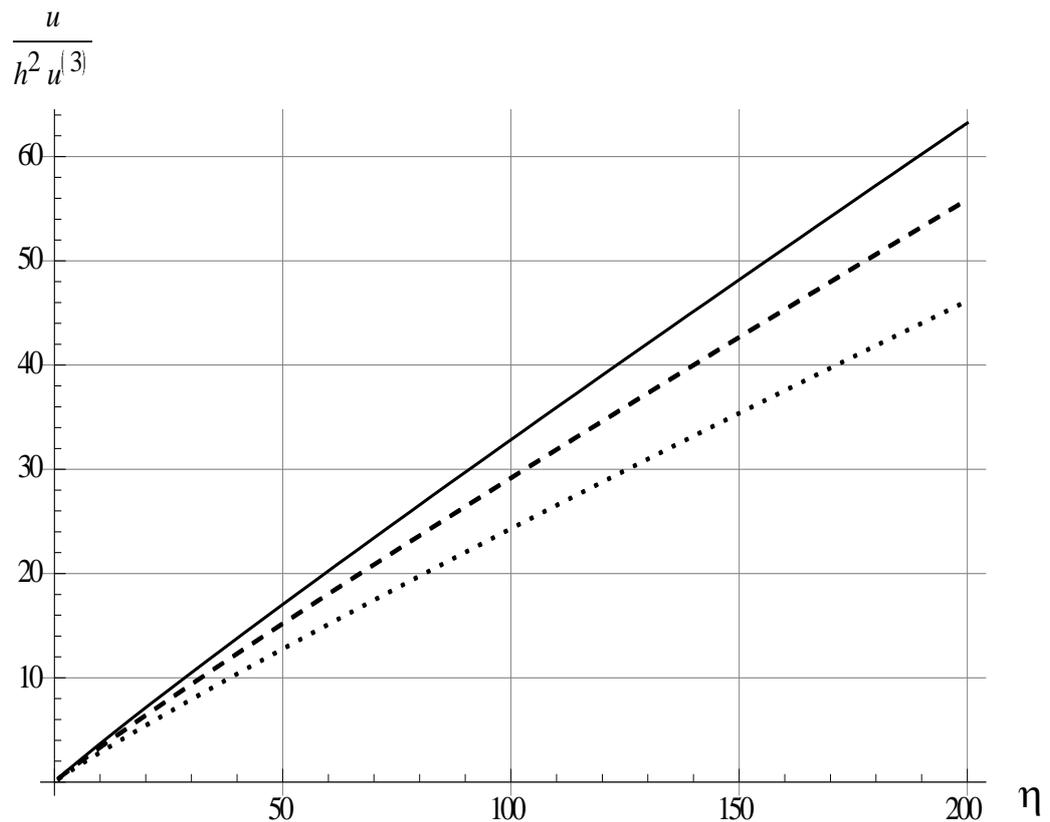


Рисунок 2.4. Зависимость коэффициента упругой заделки для нормального смещения от отношения модулей упругости балки, моделирующей отслоившееся покрытие, и основания. Сплошная линия – расстояние до точки отсчета смещения – $100h$, пунктирная – $50h$, точечная – $20h$.

2.4.3. Определение параметров разрушения

Рассматриваемая задача относится к классу задач о трещинах на границе раздела, для которых связь между скоростью высвобождения энергии J и коэффициентами интенсивности напряжений K_I, K_{II} определяется выражением [68, 69]

$$J = \frac{1 - \beta_E^2}{E_{ef}} (K_I^2 + K_{II}^2);$$

$$\frac{1}{E_{ef}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_0^{(1)2}}{E_0^{(1)}} + \frac{1 - \nu_0^{(2)2}}{E_0^{(2)}} \right); \quad (2.4.33)$$

$$\beta_\mu = \frac{1}{2} \frac{\mu^{(2)} (1 - 2\nu_0^{(2)}) - \mu^{(1)} (1 - 2\nu_0^{(1)})}{\mu^{(2)} (1 - \nu_0^{(2)}) + \mu^{(1)} (1 - \nu_0^{(1)})}$$

Здесь $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ - модули сдвига полуплоскости и полосы, моделируемой балкой (пластиной).

Однако следует иметь ввиду, что выражение (2.4.33) было получено для задачи о полном контакте, т.е. когда на продолжении линии трещины присутствуют как нормальные, так и касательные напряжения, причем благодаря наличию перекрестного влияния (влияния касательных нагрузок на нормальные смещения и влияния нормальных нагрузок на касательные смещения), вызванного различием упругих параметров, касательные напряжения на продолжении линии трещины присутствуют даже при отсутствии прикладываемой касательной нагрузки. Это, в общем случае, вызывает появление осциллирующих членов. Однако в рассматриваемой задаче ситуация иная. Для определения связи между скоростью высвобождения энергии и коэффициентом интенсивности напряжений рассмотрим вспомогательную задачу. Упругая полуплоскость $z > 0$ с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона $E^{(2)}, \nu^{(2)}$ находится в контакте с упругой полуплоскостью $z < 0$ с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона $E^{(1)}, \nu^{(1)}$ вдоль участка границы $x > 0$, вдоль участка границы $x < 0$ контакт отсутствует. При этом предполагается, что вдоль **всей** границы $z = 0$ касательные напряжения отсутствуют. Связь между нормальными напряжениями и производными нормального смещения для верхней и

нижней полуплоскости, обозначенными индексами 2 и 1, соответственно, имеет вид

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{(1)'}(\xi)}{\xi - x} d\xi,$$

$$\sigma(x) = -\frac{1}{\pi \beta_u} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{(2)'}(\xi)}{\xi - x} d\xi,$$

$$\beta_{(1)} = \frac{2}{E^{(1)}},$$

$$\beta_{(2)} = \frac{2}{E^{(2)}} \tag{2.4.34}$$

Поскольку для $x > 0$ по условию задачи $u^{(1)'} = u^{(2)'}$ для Фурье образов имеем

$$\Delta v'_-(\alpha) = \frac{\beta_{ef}}{|\alpha|} \sigma_+(\alpha) \tag{2.4.35}$$

$$\beta_{ef} = 2 \left(\frac{1}{E^{(1)}} + \frac{1}{E^{(2)}} \right) \tag{2.4.36}$$

Из структуры (2.4.35) видно, что данная задача полностью эквивалентна задаче о трещине нормального отрыва в однородной среде с формальной заменой $\frac{1}{E} \equiv \frac{1 - \nu_0^2}{E_0}$ на

$$\frac{1}{E_{ef}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_0^{(1)2}}{E_0^{(1)}} + \frac{1 - \nu_0^{(2)2}}{E_0^{(2)}} \right).$$

При этом, поскольку связь между J и K_I может быть получена через связь напряжений и перемещений на линии $z = 0$, эта связь может быть

получена из классической формулы Ирвина с помощью указанной замены, а именно

$$J = \frac{K_I^2}{E_{ef}} \quad (2.4.37)$$

Данная формула, как и предполагалось, действительно, отличается от формулы (2.4.33). Причина данного отличия, а также отсутствия осцилляций и перекрестных членов в напряжениях, состоит в том, что в рассматриваемой задаче касательные напряжения вдоль продолжения трещины а priori принимались равными нулю.

Отметим, что кроме роли данного рассмотрения как относящегося к упрощённой модели, оно может иметь и самостоятельное значение, как относящееся к задаче о разрыве контакта двух сред при допущении (идеального) скольжения и наличия сил, удерживающих контактирующие среды в контакте, например, при наличии смачивающей жидкости между контактирующими поверхностями.

Определим теперь собственно параметры разрушения для основной рассматриваемой задачи.

Для определения скорости высвобождения энергии с ростом трещины рассмотрим вспомогательную задачу о нагружении системы перерезывающей силой P и моментом M' в точке $x = -L$. Момент в точке $x = 0$ будет $M = M' + PL$. Смещение пластины (прогиб), согласно (2.4.30) есть

$$u(x) = \frac{M}{2D} x^2 + \frac{P}{6D} x^3 - \left(\frac{2M}{\sqrt{3}aD} + \frac{2P}{3a^2D} \right) x \quad (2.4.38)$$

Скорость высвобождения энергии при этом можно посчитать как половину изменения работы внешних сил на указанных перемещениях

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2} \frac{d}{dl} [-M u'(l) + Pu(l)] = \frac{M^2}{2D} + \frac{2MP}{\sqrt{3aD}} + \frac{P^2}{3a^2D} = \\
&= \frac{6}{Eh^3} \left[M^2 + \frac{4MP}{\sqrt{3a}} + \frac{2P^2}{3a^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.4.39}$$

Коэффициент интенсивности напряжений можно найти отсюда посредством (2.4.37), способом, подобным рассмотренному в [210, 17, 1].

Существует другой путь получения скорости высвобождения энергии непосредственно из асимптотики Фурье-образа на бесконечности (2.4.20), (2.4.23), (2.4.24). Последовательная подстановка (2.4.30) в (2.4.24) и (2.4.23) с использованием (2.4.21) дает асимпотику образа напряжений на бесконечности

$$\begin{aligned}
\sigma_+(\alpha) &= \alpha^{-1/2} e^{i3\pi/4} \sqrt{\pi} \left(\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \right) \left(M + \frac{2}{a\sqrt{3}} N \right) = \\
&= \alpha^{-1/2} e^{i3\pi/4} \sqrt{\pi} \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} h^{-3/2} \sqrt{\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}}} \right) \left(M + \frac{h}{\sqrt[3]{6}} \sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}} N \right)
\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

Здесь последнее равенство справедливо для изотропных сред, $M = Du''_0$, $N = Du'''_0$. Используя теорему Абеля [199], находим асимпотику оригинала напряжений в нуле. Напряжения имеют корневую особенность. Коэффициент интенсивности напряжений при этом оказывается равным

$$\begin{aligned}
K_I &= \sqrt{2} a^{3/2} \left(M + \frac{2}{a\sqrt{3}} N \right) = \\
&= 2\sqrt{3} h^{-3/2} \sqrt{\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}}} M + 2^{2/3} 3^{1/6} h^{-1/2} \left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \right)^{1/6} N
\end{aligned} \tag{2.4.41}$$

и зависящим от отношения модулей. Подстановка (2.4.41) в (2.4.37) дает

$$J = \frac{6(E^{(1)} + E^{(2)})}{E^{(2)2}h^3} \left[M^2 + \frac{4MP}{\sqrt{3}a} + \frac{4P^2}{3a^2} \right] \quad (2.4.42)$$

Сравнение (2.4.42) и (2.4.39) показывает, что их совпадение наблюдается лишь при $\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}} \rightarrow 0$ для первых двух членов в квадратных скобках. Последнее объяснимо, если учесть, что при нагружении пластин (а также балок) сосредоточенными силами и моментами $M \sim PL$ выражение в квадратных скобках может быть представлено как разложение по малому параметру $\varepsilon = \frac{h}{L} \sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}}$ вида $M^2(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)$. Поскольку же само пластиночное (балочное) приближение при корректном соблюдении граничных условий дает лишь два верных главных члена разложения по параметру h/L , то, вообще говоря, некорректно требовать соблюдения равенств (2.4.42) и (2.4.39) с точностью до трех членов подобного разложения.

Следует заметить, что при уменьшении относительной жесткости балки (пластины) $\frac{E^{(1)}}{E^{(2)}}$ расхождение между результатами, даваемыми формулами (2.4.42) и (2.4.39) увеличивается, причем это расхождение, по-видимому, заложено уже в формуле (2.4.41). Так, в случае равенства модулей $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} = 1$ отличие (2.4.41) от точного решения [106] двукратное. По-видимому, полученное решение (и, как следствие, формулы для коэффициентов интенсивности напряжений), в отличие от формул для коэффициентов заделки, не слишком точно вблизи вершины трещины отслоения по причине грубости пластиночного (балочного) приближения при рассмотрении явления, масштаб которого меньше толщины балки.

2.4.4. Приближенное решение для определения параметров упругой заделки

Интересно также сравнить полученное решение с решением, получаемым с помощью модели, в рамках которой упругое основание моделируется упругим основанием (винклеровским слоем). Уравнение для смещения пластины (слоя) при $x > 0$ имеет вид

$$D \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} + g u(x) = 0 \quad (2.4.43)$$

Здесь g - эффективная жесткость основания, определяемая из решения задачи о полуплоскости с заданным распределением нормальных смещений. Решение, убывающее на бесконечности, имеет вид

$$u = C_1 \exp\left(-\sqrt[4]{g/4D}x\right) \cos \sqrt[4]{g/4D}x + C_2 \exp\left(-\sqrt[4]{g/4D}x\right) \sin \sqrt[4]{g/4D}x \quad (2.4.44)$$

Отсюда получаем зависимость между смещением и его производной в нуле от второй и третьей производной смещений (свойства эффективной упругой заделки)

$$\begin{aligned} u'_0 &= -\sqrt[4]{4D/g} u''_0 - \sqrt{D/g} u'''_0 \\ u_0 &= \sqrt{D/g} u''_0 + (4D/g)^{3/4} / 2 u'''_0 \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

Следует обратить внимание на то, что смещения в этом случае, в отличие от более точного решения, рассмотренного выше, остаются ограниченными.

Величина g оказывается существенно зависящей от характерных расстояний, на которых изменяются граничные условия. Так, для синусоидальных смещений с длиной волны λ согласно [87] имеем

$$g = \frac{\pi E_s^*}{\lambda}; \quad E_s^* = E^{(1)} \frac{1 - \nu^{(1)}}{(1 + \nu^{(1)})(3/4 - \nu^{(1)})} \quad (2.4.46)$$

Здесь $E_s^*, \nu^{(1)}$ - приведенный модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала полуплоскости, соответственно. Данное выражение получено в предположении отсутствия горизонтальных смещений на поверхности. Аналогичное выражение для случая отсутствия касательных напряжений отличается от приведенного лишь коэффициентом, зависящим от коэффициента Пуассона материала полуплоскости.

$$g = \frac{\pi E^{(1)}}{\lambda}; \quad (2.4.47)$$

Строго говоря, ни одно из этих предположений не выполняется, и они могут лишь служить в качестве оценок. В дальнейшем будем использовать второе из указанных значений, т.е. выражение (2.4.47).

Предположив равенство пространственной частоты $2\pi/\lambda$ пространственной частоте периодической составляющей смещения (2.4.44)

$$\lambda = 2\pi / \sqrt[4]{g/4D} \quad (2.4.48)$$

и подставив получившееся выражение в (2.4.47), (2.4.45) получаем

$$u'_0 = -\frac{2h}{\sqrt[3]{12}} \sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}} u''_0 - \frac{2h^2}{12^{2/3}} \left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}\right)^{2/3} u'''_0 \approx$$

$$-0.87h \sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}} u''_0 - 0.38h^2 \left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}\right)^{2/3} u'''_0 \quad (2.4.49)$$

$$u_0 = \frac{2h^2}{12^{2/3}} \left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}\right)^{2/3} u''_0 + \frac{h^3}{3} \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} u'''_0$$

Видно, что при сохранении вида зависимости численные выражения полученных коэффициентов отличаются от более точных значений (2.4.28) более чем на 35%.

Для более точного совпадения значений коэффициентов можно в соотношение для эффективной длины упругой волны ввести поправочный коэффициент k_λ , заменив формулу (2.4.48) соотношением

$$\lambda = 2\pi k_\lambda / \sqrt[4]{g/4D} \quad (2.4.50)$$

Проделав выкладки, аналогичные (2.4.49), получаем

$$u'_0 = -2^{1/3} 3^{-1/3} k_\lambda^{1/3} h \sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}} u''_0 - \frac{2k_\lambda^{2/3} h^2}{12^{2/3}} \left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}\right)^{2/3} u'''_0 \quad (2.4.51)$$

$$u_0 = \frac{2k_\lambda^{2/3} h^2}{12^{2/3}} \left(\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}\right)^{2/3} u''_0 + \frac{h^3}{3} k_\lambda \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} u'''_0$$

Предположение равенства пространственной частоты $2\pi/\lambda$ абсолютной величине комплексного показателя в (2.4.44), т.е. корню квадратному из суммы квадратов показателя экспоненты и частоты приводит к значению $k_\lambda = 1/\sqrt{2}$, дает значение для коэффициента упругой заделки $0.778h \sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}}$ по-прежнему значительно (на 22%) отличающегося от более точного значения (2.4.28). Для совпадения коэффициентов упругой заделки, рассчитываемых по формулам (2.4.28) и (2.4.51) необходимо положить

$$k_\lambda = 2/3^{3/2} \approx 0.385. \quad (2.4.52)$$

Интересно, что при этом значении получаются совпадения всех коэффициентов заделки, кроме, конечно, коэффициента пропорциональности смещения приложенной силе, бесконечного для решения (2.4.28).

2.5. Краткие выводы по главе

Рассмотрен ряд краевых задач о полубесконечной трещине, проходящей вдоль границы, отделяющей тонкую упругую полосу от упругой полуплоскости из материала с отличающимися свойствами.

Сформулирована задача о полубесконечной трещине, проходящей вдоль границы раздела, отделяющего тонкий упругий слой от упругой полуплоскости из материала с отличающимися свойствами. Следуя [106-109] путем применения двухстороннего преобразования Лапласа задача сведена к матричной задаче Римана.

В предположении пренебрежимости влияния нормальных напряжений на тангенциальные смещения, путем отбрасывания перекрестных членов задача сведена к двум однородным задачам Римана – для сдвига и нормального отрыва. Дано решение первой из указанных задач. Путем факторизации получены асимптотические выражения для смещений берегов трещины вдали от ее вершины. Показано, что ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины соответствуют смещением стержня при граничных условиях типа упругой заделки, т.е. пропорциональности смещения в точке заделки действующему усилию. Выписаны два члена асимптотического разложения коэффициента упругой заделки для тонких слоев. Получена асимптотика поля напряжений вблизи вершины трещины, имеющего корневую особенность при отсутствии осциллирующих членов. Посчитан коэффициент интенсивности напряжений. Отсутствие осциллирующих членов следует непосредственно из постановки задачи – пренебрежении перекрестным влиянием нормальных и касательных напряжений и смещений на продолжении трещины.

Для скалярной задачи о сдвиге также получено решение с использованием дополнительного упрощения, состоящего в замене отслаиваемой полосы стержнем (стрингером) все сечения которого остаются прямолинейными и нормальными к горизонтальной поверхности раздела. Показано, что как коэффициенты интенсивности напряжений, так и эффективные условия упругой заделки, рассчитанные согласно такой модели, существенно отличаются от результатов, рассчитанных на основе рассмотренной более точной матричной модели.

Для скалярной задачи об отрыве получено решение с использованием дополнительного упрощения, состоящего в замене отслаиваемой полосы балкой, описываемой линейной теорией изгиба.

Полученные решения будут использованы для решения задач об отслоении покрытий в Главе 4 на основании подхода, сформулированного в Главе 1.

ГЛАВА 3. ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ОТСЛОЕНИЕ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ. МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

3.1. Постановка задачи

Задача была по существу сформулирована в п. 2.1. Однако для удобства сравнения результатов с имеющимися [106-109] для частного случая удобнее развернуть трещину в направлении отрицательной оси. Для этого рассмотрим однородную изотропную упругую полуплоскость $y < 0$, к которой вдоль линии $y = 0, x > 0$ (Рисунок. 3.1) присоединена полоса $0 < y < 1$ из другого материала. В постановке плоской деформации рассматривается однородная задача: все поверхности предполагаются свободными от напряжений,

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \text{при } y = 1, \text{ и } y = 0, x < 0 \quad (3.1.1)$$

а нагрузка с эквивалентными главным вектором (T, N) и моментом M приложена на бесконечности, так что

$$M = -\int_0^{\infty} x \sigma_{yy} dx, \quad N = \int_0^{\infty} \sigma_{yy} dx, \quad T = \int_0^{\infty} \sigma_{xy} dx \quad (3.1.2)$$

Величины, относящиеся к полуплоскости, будут по-прежнему обозначаться индексом 1; величины, относящиеся к полосе $0 < y < 1$, - индексом 2. Модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов полуплоскости и полосы для условий плоской деформации обозначим $E^{(i)}, \nu^{(i)}, i = 1, 2$, соответственно. С обычными модулями Юнга $E_0^{(i)}$ и коэффициентами Пуассона $\nu_0^{(i)}$ они связаны соотношениями (2.1.3)

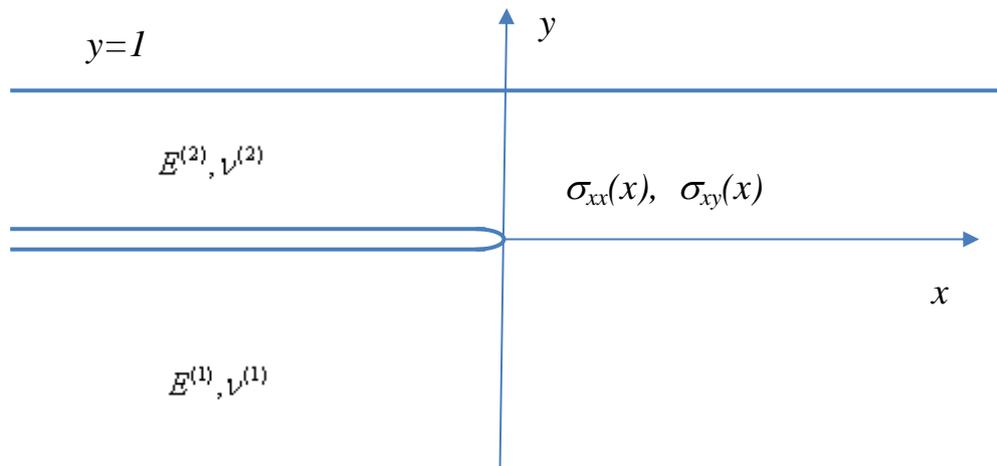


Рисунок 3.1. Отслоение слоя от полуплоскости. Измененная геометрия задачи.

Условия сопряжения на границе имеют вид

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}$$

$$\text{при } y=0, \quad x > 0 \quad (3.1.3)$$

Здесь u, v , $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ - компоненты вектора смещения и тензора напряжений.

В окрестности нуля поле напряжений может иметь интегрируемую особенность. Из теории разрушения известно, что при отсутствии сосредоточенных усилий в вершине трещины (в нуле в нашем случае) эта особенность корневая

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} + O(\sqrt{x}) \quad (3.1.4)$$

В случае различных значений упругих постоянных здесь могут появиться также осциллирующие члены. Однако наличие осцилляции не меняет показателя $\frac{1}{2}$ в (3.1.4). Аналогичный характер (корневая особенность) имеет асимптотика поля деформаций, а следовательно и производных смещения.

Воспользуемся результатами работы [109], в которой дается связь между образами двустороннего преобразования Лапласа от производной компонент вектора смещения на мнимой оси ($p \in L$, L - мнимая ось)

$$g_x^{(i)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u^{(i)}(x, 0) e^{-px} dx, \quad (3.1.5)$$

$$g_y^{(i)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} v^{(i)}(x, 0) e^{-px} dx$$

и напряжениями

$$q_x(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(x, 0) e^{-px} dx, \quad (3.1.6)$$

$$q_y(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(x, 0) e^{-px} dx$$

для полуплоскости $y \leq 0$

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_x^{(1)}(p) = i \operatorname{sgn}\left(\frac{p}{i}\right) q_x(p) + \frac{1-\nu^{(1)}}{2} q_y(p) \quad p \in L \quad (3.1.7)$$

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_y^{(1)}(p) = -\frac{1-\nu^{(1)}}{2} q_x(p) + i \operatorname{sgn}\left(\frac{p}{i}\right) q_y(p)$$

и для полосы $0 \leq y \leq 1$ (при поставленных граничных условиях свободной внешней границы $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$, при $y = 1$). Вывод данных выражений дан в Приложении 1.

$$\frac{E^{(2)}}{2} g_x^{(2)}(p) = \frac{\sin p \cos p - p}{d} q_x(p) + \frac{p^2}{d} q_y(p) + \frac{1 - \nu^{(2)}}{2} q_y(p) \quad p \in L \quad (3.1.8)$$

$$\frac{E^{(2)}}{2} g_y^{(2)}(p) = -\frac{1 - \nu^{(2)}}{2} q_x(p) - \frac{p^2}{d} q_x(p) + \frac{\sin p \cos p + p}{d} q_y(p)$$

$$d = \sin^2 p - p^2 \quad (3.1.9)$$

Рассмотрим преобразование Лапласа от следующих величин

$$F_-(p) = \frac{E^{(2)}}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{array}{l} v^{(2)}(x, 0) - v^{(1)}(x, 0) \\ u^{(2)}(x, 0) - u^{(1)}(x, 0) \end{array} \right\} e^{-px} dx \quad (3.1.10)$$

$$F_+(p) = \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yy}(x, 0) \\ \sigma_{xy}(x, 0) \end{array} \right\} e^{-px} dx \quad (3.1.11)$$

На основании (3.1.3), подынтегральное выражение (3.1.10) тождественно равно нулю для $x > 0$, и, следовательно, $F_-(p)$ аналитична в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} p < 0$). Аналогично, согласно (3.1.1), подынтегральное выражение (3.1.11) равно нулю для $x < 0$, и, следовательно, $F_+(p)$ аналитична в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} p > 0$). Здесь, аналогично [106-109], предполагается выполнение условия убывания напряжений на бесконечности для полуплоскости $y \leq 0$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ и полосы $0 \leq y \leq 1$ при $x \rightarrow +\infty$. В окрестности нуля выполняются условия (3.1.4). При $x \rightarrow -\infty$ смещения могут расти как полином третьей степени (что соответствует ненулевой поперечной силе на бесконечности), следовательно в Лаплас-образе $F_-(p)$ возможно появление полюса в нуле до третьего порядка включительно.

$$F_-(p) = O(p^{-3}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow -0 \quad (3.1.12)$$

Комбинируя (3.1.5)-(3.1.11) получаем уравнение матричной задачи Римана, аналогичное [106-109]

$$F_-(p) = K(p)F_+(p),$$

$$K(p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, p \in L \quad (3.1.13)$$

$$a_{11} = (\sin p \cos p + p) / d - i\eta \operatorname{sgn}(p/i)$$

$$a_{12} = -a_{21} = -p^2 / d - \eta' / 2 \quad (3.1.14)$$

$$a_{22} = (\sin p \cos p - p) / d - i\eta \operatorname{sgn}(p/i)$$

$$\eta = E^{(2)} / E^{(1)},$$

$$\eta' = 1 - \nu^{(2)} - \eta(1 - \nu^{(1)}) \quad (3.1.15)$$

Здесь p принадлежит мнимой оси.

Основная сложность задачи состоит в факторизации матричного коэффициента $K(p)$, т.е. представление его в виде

$$K(p) = X_-^{-1}(p)X_+(p) \quad (3.1.16)$$

где матрицы-функции $X_{\pm}(p)$ аналитичны в правой и левой полуплоскости комплексного переменного p , и $\det X_{\pm}(p) \neq 0$ в соответствующих плоскостях вплоть до границы. В настоящее время общее решение указанной задачи неизвестно. Факторизация может быть осуществлена лишь для матриц частного вида [128-136]. Одной из форм представления матриц данного вида является следующая [106-109]

$$K(p) = b(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c(p) \begin{pmatrix} l(p) & m(p) \\ n(p) & -l(p) \end{pmatrix} \quad (3.1.17)$$

где $b(p)$, $c(p)$ - произвольные функции, $l(p), m(p), n(p)$ - полиномы, а на функцию $\ln K(p)$ накладываются некоторые ограничения. В частности в [106-109] была решена задача для $\eta = 1, \eta' = 0$, что соответствует совпадению упругих свойств полуплоскости и полосы.

Выполнение условия

$$\eta' = 1 - \nu^{(2)} - \eta(1 - \nu^{(1)}) = 0 \quad (3.1.18)$$

существенно для сохранения вида матричного коэффициента задачи Римана, необходимого для разрешимости задачи методами [106-109]. Вместе с тем, обобщение задачи для η отличных от единицы, не приводит к нарушению необходимого вида матричного коэффициента, а лишь усложняет выкладки.

Действительно, метод Г.И. Чеботарева [129] (аналогичный метод был использован ранее Хайнсом [128]) позволяет факторизовать матрицы вида, определяемого формулой (3.1.17). Из (3.1.14) видно, что появление множителя η при некоторых слагаемых в компонентах матрицы не приводит к потере матрицей вида (3.1.17), в то время как появление членов, содержащих η' - приводит.

Замечание. Как показано в работах Моисеева [132] и Антипова и Моисеева [133], а также в работе Даниэля [130] и Абрахамса [134], использованная процедура представления матрицы в форме (3.1.17) эффективна лишь для полиномов $l(p), m(p), n(p)$ степени не выше второй. Однако в рассматриваемом случае данной проблемы не возникает (полином остается второй степени).

Заметим, что условие (3.1.18) не является столь уж обременительным, поскольку для плоской деформации, во все формулы входят модифицированные (2.1.3) модули Юнга и коэффициенты Пуассона

(изменяющиеся в пределах $0 \leq \nu^{(i)} < 1$), и для любых отношений модулей η всегда можно подобрать соотношение коэффициентов Пуассона, удовлетворяющих (3.1.18), причем неединственным образом. Для мягких подложек ($\eta \rightarrow \infty$) условие (3.1.18) выполняется, в частности, для несжимаемых материалов $\nu^{(2)} = \nu^{(1)} = 1$, или с учетом (2.1.3): $\nu_0^{(2)} = \nu_0^{(1)} = 1/2$. Для жестких подложек ($\eta \rightarrow 0$) - достаточно несжимаемости материала полосы.

Кроме того, решение задачи для $\eta' = 0$ может рассматриваться как *приближенное* решение задачи для произвольных соотношений упругих модулей, и произвольных коэффициентов Пуассона полуплоскости и полосы. Причем рассматриваемое приближение не слишком плохо. Действительно, согласно определению (3.1.15) условие $\eta' = 0$ (3.1.18) есть не что иное, как равенство нулю второго параметра Дундурса, определяемого как, например [211, 96]:

$$\beta_D = \frac{1}{2} \frac{\mu^{(1)}(1 - 2\nu^{(2)}) - \mu^{(2)}(1 - 2\nu^{(1)})}{\mu^{(1)}(1 - 2\nu^{(2)}) - \mu^{(2)}(1 - 2\nu^{(1)})} \quad (3.1.19)$$

Здесь $\mu^{(i)}$, $i = 1, 2$ - модули сдвига полуплоскости и полосы. Авторы [92] полагают, что для рассматриваемых задач влияние β_D обычно пренебрежимо, и для практических расчетов может полагаться равным нулю, *ibidem*.

После нахождения $X_{\pm}(p)$, окончательное решение задачи дается с помощью теоремы Лиувилля

$$\begin{aligned} F_+(p) &= X_+^{-1}(p)\Pi_1(p), \quad \operatorname{Re}(p) > 0 \\ F_-(p) &= X_-^{-1}(p)\Pi_1(p), \quad \operatorname{Re}(p) < 0 \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Здесь $\Pi_1(p)$ - векторная функция, аналитичная всюду, за исключением возможно нуля и бесконечности, подлежащая определению исходя из поведения искомого решения в ключевых точках – в нуле и на бесконечности.

Условия (3.1.2), (3.1.4) после трансформации принимают, соответственно, вид

$$F_+(p) = \begin{cases} N + Mp + o(p) \\ T + o(1) \end{cases}, \quad \operatorname{Re} p \rightarrow 0+ \quad (3.1.21)$$

$$F_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \begin{cases} K_I \\ K_{II} \end{cases} + O(p^{-3/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty \quad (3.1.22)$$

Для $F_-(p)$, на бесконечности оценка следует из поведения поля производных смещения вблизи вершины трещины

$$F_-(p) = O(p^{-1/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow -\infty \quad (3.1.23)$$

Вблизи нуля согласно (3.1.12)

$$F_-(p) = O(p^{-3}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow -0 \quad (3.1.24)$$

Данные условия будут использованы для определения $\Pi_1(p)$.

В рассмотренной постановке задача отличается от рассмотренной в [106-109] наличием коэффициента η не влияющего на процедуру получения решения..

3.2. Решение задачи Римана для $\eta' = 0$

Матрицы $X_{\pm}^{\pm 1}(t)$ могут быть представлены в виде аналогичном [106-109] (в оригинале [106-109] имеется опечатка - пропущены степени у $\Lambda_{\pm}(p)$). Изложение используемого метода представлено в Приложении 2.

$$X_{+}^{\pm 1}(p) = \Lambda_{+}^{\pm 1}(p) [I \operatorname{ch}(\varphi \beta_{+}) \pm B(p) \operatorname{sh}(\varphi \beta_{+})] \quad (3.2.1)$$

$$X_{-}^{\pm 1}(p) = \Lambda_{-}^{\pm 1}(p) [I \operatorname{ch}(\varphi \beta_{-}) \pm B(p) \operatorname{sh}(\varphi \beta_{-})]$$

Здесь I – единичная матрица,

$$B(p) = \varphi^{-1}(p) \begin{pmatrix} 1 & -p \\ p & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(p) = \sqrt{1-p^2} \quad (3.2.2)$$

Функции $\Lambda_{\pm}(p), \beta_{\pm}(p)$ являются решениями скалярных задач Римана

$$\Lambda_{-}^{-1}(p) \Lambda_{+}(p) = \Delta^{1/2}(p), \quad p \in L \quad (3.2.3)$$

$$\beta_{+}(p) - \beta_{-}(p) = \varphi^{-1}(p) \varepsilon(p), \quad p \in L \quad (3.2.4)$$

Здесь определитель $\Delta(p)$ и показатель $\varepsilon(p)$ матрицы $K(p)$ определяются как

$$\Delta(p) = \lambda_1(p) \lambda_2(p) \quad (3.2.5)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_1(p)}{\lambda_2(p)} \quad (3.2.6)$$

Собственные числа $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ матрицы $K(p)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\lambda_1(p) &= -2ctg^3 p A(p/i), \\ \lambda_2(p) &= 2ctg p B(p/i)\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}2A(s) &= \eta |th^3 s| + th s \left(th s + s\sqrt{1+s^2} ch^{-2} s \right) / (1-s^2 sh^{-2} s) \\ 2B(s) &= \eta |th s| + \left(1 - s\sqrt{1+s^2} sh^{-1} ch^{-1} s \right) / (1-s^2 sh^{-2} s)\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

Таким образом, исследуемая задача отличается от задачи, решенной в [106-109] наличием множителей η при первых членах в правых частях формул (3.2.8).

С учетом (3.2.5)-(3.2.7) скалярные задачи Римана могут быть записаны в виде

$$\Lambda_-^{-1}(p)\Lambda_+(p) = 2i ctg^2 p \sqrt{A(p/i)B(p/i)}, \quad p \in L \tag{3.2.9}$$

$$\beta_+(p) - \beta_-(p) = \varphi^{-1}(p) \frac{1}{2} \ln \left(-ctg^2 p \frac{A(p/i)}{B(p/i)} \right), \quad p \in L \tag{3.2.10}$$

Необходимое поведение функций $\Lambda_{\pm}(p)$ в нуле и на бесконечности определяется, в конечном счете, необходимым поведением решения (3.1.21)-(3.1.24).

Функции $\beta_{\pm}(p)$ должны убывать на бесконечности, не медленнее чем $O(p^{-1})$ и не иметь полюсов в нуле (логарифмические особенности

допустимы), в противном случае возникает экспоненциальный рост функций, определяемых (3.2.1).

Решение задачи (3.2.3) или (3.2.9) запишем в виде, аналогичном данному в работах [106-109], факторизовав тангенс через гамма-функцию стандартным образом [199]

$$-\operatorname{ctg}(\pi p) = \frac{\Psi_{0+}}{\Psi_{0-}}, \quad \Psi_{0+} = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1/2+p)}, \quad \Psi_{0-} = \frac{\Gamma(1/2-p)}{\Gamma(-p)} \quad (3.2.11)$$

Оставшаяся часть удовлетворяет всюду условию Гёльдера и может быть выражена через интегралы типа Коши. Таким образом, результат факторизации (3.2.9) по теореме Лиувилля имеет вид

$$\Lambda_+(p) = \frac{\pi \Gamma^2(1+p/\pi)}{\Gamma^2(1/2+p/\pi)} J_+(p) \Pi_2(p), \quad (3.2.12)$$

$$\Lambda_-(p) = \frac{p^2 \Gamma^2(1/2-p/\pi)}{2\pi i \Gamma^2(1-p/\pi)} J_-(p) \Pi_2(p)$$

$$J_{\pm}(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [A(s)B(s)] \frac{ds}{is-p} \right\} \quad (3.2.13)$$

где функция $\Pi_2(p)$, аналитическая всюду, за исключением быть может нуля и бесконечности определяется поведением решения (3.1.21)-(3.1.24). Однако в ее определении нет необходимости, поскольку после подстановок (3.2.12) в (3.2.1), а затем в (3.1.20) в окончательное выражение войдет произведение

$$\Pi_1(p) \Pi_2^{-1}(p) = \Pi(p), \quad (3.2.14)$$

которое и будет определять поведение в опорных точках. Поэтому без нарушения общности здесь и далее можно положить

$$\Pi_2(p) = 1 \quad (3.2.15)$$

Решение задачи (3.2.4) также запишем в виде, аналогичном данному в работах [106-109], в виде

$$\beta_+(p) = \beta_{0+}(p) + \beta_{s+}(p),$$

$$\beta_-(p) = \beta_{0-}(p) + \beta_{s-}(p) + \beta_{T-}(p) \quad (3.2.16)$$

Вспомогательные функции $\beta_{s\pm}(p)$, $\beta_{T-}(p)$

$$\beta_{s+}(p) = \frac{1}{4} \int_L \frac{dt}{\varphi(t)(t-p)} = -\frac{\ln(p + i\sqrt{1-p^2})}{2\sqrt{1-p^2}}, \quad (3.2.17)$$

$$\beta_{s-}(p) = -\beta_{s+}(-p)$$

$$\beta_{T-}(p) = -\frac{1}{2} \int_L \frac{\operatorname{sgn}(t/i) dt}{\varphi(t)(t-p)} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \ln \frac{\sqrt{1-p^2}-1}{p} \quad (3.2.18)$$

введены таким образом, чтобы правая часть выражения

$$\beta_{0+}(p) - \beta_{0-}(p) = \varphi^{-1}(p)\varepsilon(p) - \beta_{s+}(p) + \beta_{s-}(p) + \beta_{T-}(p), \quad p \in L \quad (3.2.19)$$

удовлетворяла бы условиям Гёльдера всюду на мнимой оси. Тогда решение задачи (3.2.19) есть

$$\beta_{0\pm}(p) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+s^2}+1} \right] \frac{ds}{is-p} + \Pi_3(p) \quad (3.2.20)$$

Здесь $\Pi_3(p)$ - функция, аналитическая всюду, за исключением быть может нуля и бесконечности, обеспечивающая необходимое поведение решения в

этих точках. Ее необходимо положить равной нулю, поскольку в противном случае возникает экспоненциальный рост функций, определяемых (3.2.1), в нуле либо на бесконечности, соответственно.

В формуле (3.2.20) исправлена опечатка работы [107] (отсутствующая в [106]), состоящая в отсутствии минуса в показателе степени. Информация о порядке ведения функций $\beta_{S\pm}(p)$, $\beta_{T-}(p)$ содержится в работах [106-109]. Однако наиболее существенным является то, что введенные, не так уж важно в силу каких соображений, функции (3.2.16)-(3.2.20) являются решением задачи (3.2.4), что можно проверить непосредственно (аналитичность в соответствующих областях и обращение в тождество выражения (3.2.4)).

Посредством формул настоящего параграфа матричная задача факторизации (3.1.16) является решенной. Для решения задачи (3.1.13) остается определить векторную функцию $\Pi_1(p)$, входящую в (3.1.20). Для этого, а также для получения асимптотических выражений для напряжений и смещений, понадобятся асимптотические разложения интегралов (3.2.13), (3.2.20) и их комбинаций.

3.3. Разложение факторизующих функций вблизи нуля

Выражение (3.2.9) можно представить в виде (умножив и разделив правую часть выражения (3.2.9) на $\frac{1+\eta|p/i|}{\sqrt{1-\eta^2 p^2}}$).

$$\Lambda_-^{-1}(p)\Lambda_+(p) = 2i \operatorname{ctg}^2 p \frac{1+\eta|p/i|}{\sqrt{1-\eta^2 p^2}} \left[\frac{\sqrt{1-\eta^2 p^2}}{1+\eta|p/i|} \sqrt{A(p/i)B(p/i)} \right], \quad p \in L \quad (3.3.1)$$

Тогда с учетом (2.2.24) выражения (3.2.12) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 \Lambda_+(p) &= \sqrt{\frac{1+\eta}{2}} \frac{\pi \Gamma^2(1+p/\pi)}{\Gamma^2(1/2+p/\pi)} (1+\eta p)^{-1/2} \times \\
 &\exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\eta p} \frac{\pi \zeta / 2 - \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) J_+^a(p) \Pi_2(p) \\
 \Lambda_-(p) &= \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \frac{p^2 \Gamma^2(1/2-p/\pi)}{2\pi i \Gamma^2(1-p/\pi)} (1-\eta p)^{1/2} \times \\
 &\exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{\eta p} \frac{\pi \zeta / 2 + \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) J_-^a(p) \Pi_2(p) \\
 J_{\pm}^a(p) &= \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{2}{1+\eta} \frac{\sqrt{1+\eta^2 s^2}}{1+\eta|s|} \sqrt{A(s)B(s)} \right] \frac{ds}{is-p}\right\} \quad (3.3.2)
 \end{aligned}$$

Данные выражения удобны для получения асимптотических разложений вблизи $p=0$. Внеинтегральные сомножители раскладываются в ряд непосредственно. Процедура разложения интеграла типа Коши также достаточно стандартна [203, 204]. Для получения предельных значений $J_{\pm}^a(0)$ можно воспользоваться уравнениями Сохоцкого-Племеля и симметрией ядра (распространив интегрирование снова на всю ось), для получения первой производной предельного значения – еще и правилом дифференцирования подобных интегралов:

$$F'(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f'(t) \frac{dt}{t-p} \quad (3.3.3)$$

В результате получим следующие разложения

$$\Lambda_+(p)\Pi_2^{-1}(p) = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{4\ln 2}{\pi} + \delta_5 - \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{\pi} - \frac{\eta}{\pi} \ln \eta p \right) p \right] + O(p^2) \quad (3.3.4)$$

$$\Lambda_-(p)\Pi_2^{-1}(p) = \frac{p^2}{i\sqrt{2}\sqrt[4]{3}} \times \left[1 + \left(\frac{4\ln 2}{\pi} + \delta_5 + \frac{\eta}{\pi} - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{\pi} \ln(-\eta p) \right) p \right] + O(p^2) \quad (3.3.5)$$

$$\delta_5(\eta) = \frac{d \ln J_+^a(p)}{dp} \Big|_{p=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{ds} \ln \left[\frac{2}{1+\eta} \sqrt{A(s)B(s)} \frac{\sqrt{1+\eta^2 s^2}}{1+\eta s} \right] \frac{ds}{s} \quad (3.3.6)$$

Аналогично для показателя $\beta_{0\pm}(p)$ выражение (3.2.20) представимо в виде

$$\beta_{0\pm}(p) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[\frac{\sqrt{A(s)}}{\sqrt{B(s)}} \frac{s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+s^2}+1} \right] - \ln \frac{\sqrt{1+\eta^2 s^2}}{1+\eta|s|} \right\} \frac{ds}{is-p} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1+\eta|s|}{\sqrt{1+\eta^2 s^2}} \frac{ds}{is-p} \quad (3.3.7)$$

Подстановка сюда прологарифмированных выражений (2.2.24), (2.2.25) дает

$$\beta_{0\pm}(p) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[\frac{\sqrt{A(s)}}{\sqrt{B(s)}} \frac{s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+s^2}+1} \right] - \ln \frac{\sqrt{1+\eta^2 s^2}}{1+\eta|s|} \right\} \frac{ds}{is-p} \pm \frac{1}{2} \ln(1 \pm \eta p) \mp \frac{1}{4} \ln(1 + \eta^2 p^2) + \quad (3.3.8)$$

$$\frac{i}{2\pi} \left[\ln(\pm \eta p) (\ln(1 - i\eta p) - \ln(1 + i\eta p)) + \operatorname{Li}_2(i\eta p) - \operatorname{Li}_2(-i\eta p) \right]$$

Вблизи нуля справедливы следующие разложения (получаемые аналогично разложениям для Λ_{\pm}):

$$\exp[\pm\varphi\beta_{0+}(p)] = 3^{\pm 1/4} \left[1 \pm \left(\frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{\pi} + \frac{\eta}{\pi} \ln \eta p + \delta_6 \right) p \right] + O(p^2) \quad (3.3.9)$$

$$\exp[\pm\varphi\beta_{0-}(p)] = 3^{\mp 1/4} \left[1 \pm \left(\frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{\pi} + \frac{\eta}{\pi} \ln(-\eta p) + \delta_6 \right) p \right] + O(p^2) \quad (3.3.10)$$

$$\delta_6(\eta) = \left. \frac{d \ln \beta_+(p)}{dp} \right|_{p=0} =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \left\{ (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[\frac{\sqrt{A(s)}}{\sqrt{B(s)}} \frac{s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+s^2}+1} \right] - \ln \frac{\sqrt{1+\eta^2 s^2}}{1+\eta|s|} \right\} \frac{ds}{s} \quad (3.3.11)$$

Из формул (2.2.35)-(3.3.11) следует

$$\Lambda_+(p) \exp[\varphi\beta_{0+}(p)] = \sqrt{\frac{3}{2}} [1 + \delta p] + O(p^2) \quad (3.3.12)$$

$$\delta(\eta) = \frac{4 \ln 2}{\pi} + \delta_5(\eta) + \delta_6(\eta) =$$

$$= \frac{4 \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \ln \sqrt{A(s)B(s)} + (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[\frac{\sqrt{A(s)}}{\sqrt{B(s)}} \frac{s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+s^2}+1} \right] \right\} \frac{ds}{s} \quad (3.3.13)$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду, близкому представленному в [106-109]

$$\delta(\eta) = \frac{4 \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \left\{ \left[\ln \frac{A(s)}{\theta(s)} + (\sqrt{1+s^2} - 1) \ln \sqrt{A(s)B(s)} \right] \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \right\} \frac{ds}{s} \quad (3.3.14)$$

$$\theta(s) = \frac{\sqrt{1+s^2} + 1}{s} \operatorname{th} s \quad (3.3.15)$$

Данное выражение отличается от соответствующего выражения [106-109] отсутствием знаменателя $\sqrt{1+s^2}$ в коэффициенте перед вторым логарифмом. По-видимому, это опечатка, поскольку численное значение вычисленного в этих работах интеграла соответствует формуле (3.3.14). Кроме того в [107] отсутствует символ первого логарифма, что является явной опечаткой.

Интегрируя по частям, интегралы (3.3.6), (3.3.11), (3.3.14) можно представить в виде

$$\delta_5(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \ln \left[\sqrt{A(s)B(s)} \frac{\sqrt{1+\eta^2 s^2}}{1+\eta s} \right] - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \frac{ds}{s^2} \quad (3.3.16)$$

$$\delta_6(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+s^2} + 1} \right] - \ln \frac{\sqrt{1+\eta^2 s^2}}{1+\eta s} - \ln \sqrt{3} \right\} \frac{ds}{s^2} \quad (3.3.17)$$

$$\delta(\eta) = \frac{4 \ln 2}{\pi} +$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[\ln \frac{A(s)}{\theta(s)} + (\sqrt{1+s^2} - 1) \ln \sqrt{A(s)B(s)} \right] \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} - \ln \frac{3}{2} \right\} \frac{ds}{s^2} \quad (3.3.18)$$

Обе формы не представляют сложности для численного счета. Для $\eta = 1$, имеем

$$\delta_5 = 0.0460935, \quad \delta_6 = -0.308655, \quad \delta = 0.619982 \quad (3.3.19)$$

Следует заметить, что для вычислений интересующих асимптотик компонент смещений количество выписанных членов разложения в

формулах (3.3.5), (3.3.10) недостаточно. Однако выражения для них слишком громоздки, чтобы быть выписаны. В соответствующем месте будут выписаны комбинации, необходимые для дальнейших вычислений.

3.4. Разложение решения матричной задачи Римана вблизи плюс бесконечности

По свойствам интегралов типа Коши (например [109]) поведение $\beta_{0+}(p)$ из (3.2.20) при больших p определяется как

$$\beta_{0+}(p) = \frac{q(\eta)}{p} + \frac{q''}{2p^2} + o(p^{-2}),$$

$$q(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+s^2+1}} \right] ds \quad (3.4.1)$$

Здесь $q''=1$, однако в окончательные результаты значение данного параметра не входит. Для $\eta=1$ имеем $q \approx -0.1235$.

С учетом (3.2.2) для больших p справедливы оценки

$$\operatorname{ch} \varphi \beta_{0+}(p) = \cos q - \frac{\sin q}{2p} + O(p^{-2})$$

$$\operatorname{sh} \varphi \beta_{0+}(p) = i \sin q + i \frac{\cos q}{2p} + O(p^{-2}) \quad (3.4.2)$$

Разложение второй формулы (3.2.1) по большим p с учетом (3.4.2) дает

$$X_+^{-1}(p) = p^{-1/2}G + p^{-3/2}H + O(p^{-5/2}) \quad (3.4.3)$$

$$G = QR, \quad Q = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix},$$

$$R = \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

В дальнейшем, для конкретизации выражения векторной функции $\Pi(p)$ в формуле (3.1.20) существенным является вырожденность матрицы R (а следовательно и G). Факт вырожденности проверяется непосредственно. Для вектора

$$C_0 = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (3.4.5)$$

$$RC_0 = GC_0 = 0 \quad (3.4.6)$$

Выражение для матрицы H из формулы (3.4.3) получается удержанием еще одного члена в разложении для $X_+^{-1}(p)$

$$H = \left(q' - \frac{\pi}{4} \right) QR + Q'R + \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \left\{ \frac{\cos q - i \sin q}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + i \frac{\cos q + i \sin q}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.4.7)$$

$$q'(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\ln \sqrt{A(s)B(s)} - \ln \frac{\eta+1}{2} \right) ds \quad (3.4.8)$$

$$q'(1) \approx 0.138263$$

Для дальнейших выкладок матрицу H удобно представить в виде суммы вырожденной и невырожденной матриц, причем вырожденное слагаемое должно давать ноль при умножении на вектор C_0 , определяемый формулой (3.4.5). Данное представление получается соответствующей группировкой членов

$$H = H_0 R + Q S_0 \quad (3.4.9)$$

Здесь

$$S_0 = \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$Q' = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin q & -\cos q \\ \cos q & \sin q \end{pmatrix} \quad (3.4.10)$$

$$H_0 = \left(q' - \frac{\pi}{4} \right) Q + \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos q - \sin q & -\frac{1}{2} \sin q \\ \frac{1}{2} \sin q & -\frac{1}{2} \cos q + \sin q \end{pmatrix} + Q'$$

В дальнейших выкладках последние два выражения не участвуют, однако они приведены здесь для понимания вывода выражения для S_0 .

3.5. Разложение решения вблизи плюс нуля

Подстановка (3.2.12)-(3.2.20) с учетом результатов двух последних параграфов в первую формулу (3.2.1) с последующим разложением по малым p дает

$$X_+(p) = X_+(0) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + O(p) \quad (3.5.1)$$

В аналоге для данного выражения работы [107] имеется опечатка, заключающаяся в отсутствии символа радикала в знаменателе.

Аналогичная подстановка и разложение для второй формулы (3.2.1) дает

$$X_+^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{i}{2} + \delta \right) e^{i\pi/4} & -\frac{1}{2}(1+i) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i \right) \\ \frac{1}{2}(1+i) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i \right) & (i-1) \left(\frac{4 \ln 2}{\pi} - \frac{2\eta \ln \eta p}{\pi} - \eta + \delta_5 - \delta_6 - \frac{i}{2} \right) \end{pmatrix} p + O(p^2) \quad (3.5.2)$$

Здесь удержано два члена разложения. В дальнейших выкладках из второго члена (3.5.2) используется только первая строка, в которую не входят логарифмические члены (в подынтегральном выражении в δ разрывы производных слагаемых компенсируются). Поэтому, для определения КИН (как это и делалось в [106-109]), нет необходимости выделения логарифмических членов. Выражение (3.5.2) записывается как

$$X_+^{-1}(p) = \begin{pmatrix} D_0 + p D^* + o(p) \\ o(1) \end{pmatrix} \quad (3.5.3)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^* = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{i}{2} + \delta \right) e^{i\pi/4} \quad -\frac{1}{2}(1+i) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i \right) \right) \quad (3.5.4)$$

3.6. Определение векторного полинома

Матрица $X_+^{-1}(p)$ согласно (3.5.2) вблизи нуля ограничена и не вырождена. Следовательно, согласно (3.1.20), (3.1.21), функция $\Pi(p)$ вблизи нуля ограничена и не может содержать отрицательных степеней p (этим фактом и определяется, что $\Pi(p)$ - полином, а не функция, содержащая также отрицательные степени p). С другой стороны, ограничение максимальной степени $\Pi(p)$ диктуется оценкой (3.1.22). Очевидно, что согласно (3.1.20), (3.4.3), полином $\Pi(p)$ может содержать произвольную векторную константу. Кроме того, вырожденность матрицы G (3.4.6) допускает присутствие в полиноме $\Pi(p)$ линейного по p члена пропорционального C_0 (3.4.5). Линейный по p член разложения матрицы $X_+^{-1}(p)$ уже не вырожден (3.4.3), (3.4.9), поэтому присутствие в $\Pi(p)$ членов со степенями выше первой привело бы к нарушению условия (3.1.22). Итак, наиболее общей формой полинома $\Pi(p)$ является

$$\Pi(p) = A_0 + b p C_0 \quad (3.6.1)$$

Здесь A_0, b векторный и скалярный коэффициенты, подлежащие определению. Подстановка (3.6.1), (3.4.3) в первое выражение (3.1.20) с учетом (3.4.6) дает

$$F_+(p) = p^{-1/2} (GA_0 + bHC_0) + O(p^{-3/2}) \quad (3.6.2)$$

С учетом (3.4.4), (3.4.9), (3.4.6) данное выражение преобразуется к виду

$$F_+(p) = p^{-1/2} Q(RA_0 + bS_0C_0) + O(p^{-3/2}) \quad (3.6.3)$$

С другой стороны подстановка (3.6.1), (3.5.1) в первое выражение (3.1.20) дает

$$A_0 = X_+(0) \begin{pmatrix} N \\ T \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N\sqrt{3} \\ Ti \end{pmatrix} \quad (3.6.4)$$

Подстановка (3.6.1), (3.5.2) в первое выражение (3.1.20) дает

$$\begin{Bmatrix} N + Mp + o(p) \\ T + o(1) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 + pD^* + o(p) \\ o(1) \end{pmatrix} (A_0 + b p C_0) \quad (3.6.5)$$

Приравнивая в (3.6.5) слагаемые, содержащие p , получаем

$$M = bD_0C_0 + D^*A_0 \quad (3.6.6)$$

Откуда с учетом (3.4.5), (3.5.4), (3.6.4)

$$b = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ M - D^* X_+(0) \begin{pmatrix} N \\ T \end{pmatrix} \right\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ M - D^* X_+(0) \begin{pmatrix} N \\ T \end{pmatrix} \right\} \quad (3.6.7)$$

Согласно (3.5.4), (3.5.1)

$$D^* X_+(0) = \begin{pmatrix} -\delta - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (3.6.8)$$

Подстановка (3.6.4) и результата подстановки последовательно в (3.6.8), (3.6.7) и в (3.6.1) окончательно дает

$$\Pi(p) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N\sqrt{3} \\ Ti \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-i\pi/4} \left\{ M + \left(\delta + \frac{i}{2} \right) N + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}} \right) T \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} p \quad (3.6.9)$$

3.7. Определение КИН

Определение КИН представляет в данной задаче наибольший интерес с точки зрения механики разрушения.

Сравнение (3.1.22) и (3.6.3) с учетом (3.4.4), (3.4.5), (3.4.10), (3.6.4), (3.6.7), (3.6.8) дает связь КИН с силовыми факторами

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = k_M M + \left(k_T - \frac{1}{2} k_M \right) T + k_N N \quad (3.7.1)$$

Здесь введены обозначения

$$k_M = \sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \begin{pmatrix} \cos q - \sin q \\ -\cos q - \sin q \end{pmatrix}$$

$$k_T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \begin{pmatrix} \cos q + \sin q \\ \cos q - \sin q \end{pmatrix}$$

$$k_N = \delta k_M + \sqrt{3} k_T \quad (3.7.2)$$

Полагая

$$\pi/4 - q = \omega,$$

формулы (3.7.2) представимы в виде, аналогичном [212, 92] с точностью до обозначений

$$k_M = \sqrt{\frac{12}{1+\eta}} \begin{pmatrix} \sin \omega \\ -\cos \omega \end{pmatrix}$$
$$k_T = \sqrt{\frac{1}{1+\eta}} \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix} \quad (3.7.3)$$

Однако в формулах указанных работ отсутствуют члены, содержащие k_N .

Формулы (2.2.50) -(3.7.2), являются обобщением соответствующих формул [106-109] и переходят в них для случая полосы и полуплоскости с одинаковыми упругими свойствами $\eta = 1$. $q(1) = -0.1235$, $\delta(1) = 0.619982$.

$$k_M \approx \begin{pmatrix} 1.932 \\ -1.506 \end{pmatrix}, \quad k_T = \begin{pmatrix} 0.4346 \\ 0.5578 \end{pmatrix}, \quad k_N = \begin{pmatrix} 1.951 \\ 0.032 \end{pmatrix} \quad (3.7.4)$$

что совпадает со значениями [106-109] и [212, 92] (для последних – без учета влияния поперечной силы).

Может показаться, что для абсолютно жесткой полуплоскости $\eta = 0$, $E^{(2)} > 0$ полученное решение должно перейти в решение для верхней части симметрично расщепляемой однородной полосы. Однако это не так, поскольку для жесткой полуплоскости накладывается запрет на обе компоненты смещения, в то время как для симметричной полосы – только на одну.

Для малых η асимптотическое разложение для q получается разложением (3.4.1) в ряд и почленным интегрированием

$$q(\eta) = q_0 + q_1\eta + q_2\eta^2 + q_3\eta^3 + q_4\eta^4 + O(\eta^5) \quad (3.7.5)$$

$$q_0 = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[\frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2s + 2s\sqrt{1+s^2}}{\operatorname{sh} 2s - 2s\sqrt{1+s^2}}} \frac{s}{\sqrt{1+s^2} + 1}} \right] ds \approx -0.0087845 \quad (3.7.6)$$

$$q_1 = -\frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{s}{1+2s^2 + \operatorname{ch} 2s} ds \approx -0.171421 \quad (3.7.7)$$

$$q_2 = -\frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{s \operatorname{sh} 2s}{(1+2s^2 + \operatorname{ch} 2s)^2} ds \approx 0.0933817 \quad (3.7.8)$$

$$q_3 = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{s(-3+8s^2+8s^4+3\operatorname{ch} 4s)}{(1+2s^2 + \operatorname{ch} 2s)^3} ds \approx -0.0636191 \quad (3.7.9)$$

$$q_4 = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{s \operatorname{sh} 2s(-1+8s^2+8s^4+\operatorname{ch} 4s)}{(1+2s^2 + \operatorname{ch} 2s)^4} ds \approx 0.048049 \quad (3.7.10)$$

Данное разложение дает хорошую сходимость для $\eta \leq 0.5$ (Рисунок 3.26).

Для больших η справедливо разложение

$$q(\eta) = q_I + q_{II}\eta^{-1/3} + o(\eta^{-1/3}) \quad (3.7.11)$$

$$q_I = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[\frac{s}{\sqrt{1+s^2} + 1} \right] ds \approx -0.785398, \quad q_{II} \approx 1.04$$

Зависимость $q(\eta)$ вместе с данными [92] представлены на Рисунке 3.2а – для малых η , (б) – для умеренных η ; сплошная линия – полученное решение (3.4.1); точки – решение [92], прерывистая (б) – асимптотика (3.7.11); точечная, прерывистая и штрихпунктирная (б) – два, три, пять членов асимптотики (3.7.5), соответственно. Небольшое расхождение с результатами [92] для малых η вызвано, по-видимому, неточностью снятия значений, представленных в [92] графически.

На основании обобщения формулы Ирвина [68, 69] следует, что поток стекающей в вершину трещины энергии равен

$$J = \frac{E^{(1)} + E^{(2)}}{2E^{(1)}E^{(2)}}(K_I^2 + K_{II}^2) = \frac{1+\eta}{2E^{(2)}}(K_I^2 + K_{II}^2) = \frac{1}{E^{(2)}} \left\{ 6 \left(M - \frac{T}{2} + \delta N \right)^2 + \frac{1}{2} (T + \sqrt{3}N)^2 \right\} \quad (3.7.12)$$

При вычислении эффективных параметров заделки удобнее вычислять момент относительно центра полосы. Такой «балочный» момент отличается от рассмотренного ранее поправкой на момент, создаваемый продольной силой

$$M_b = M - \frac{T}{2} \quad (3.7.13)$$

Соответственно формулы (3.7.1), (3.7.12) перепишутся в виде

$$\begin{cases} K_I \\ K_{II} \end{cases} = k_M M_b + k_T T + k_N N, \quad (3.7.14)$$

$$J = \frac{1}{E^{(2)}} \left\{ 6(M_b + \delta N)^2 + \frac{1}{2}(T + \sqrt{3}N)^2 \right\}$$

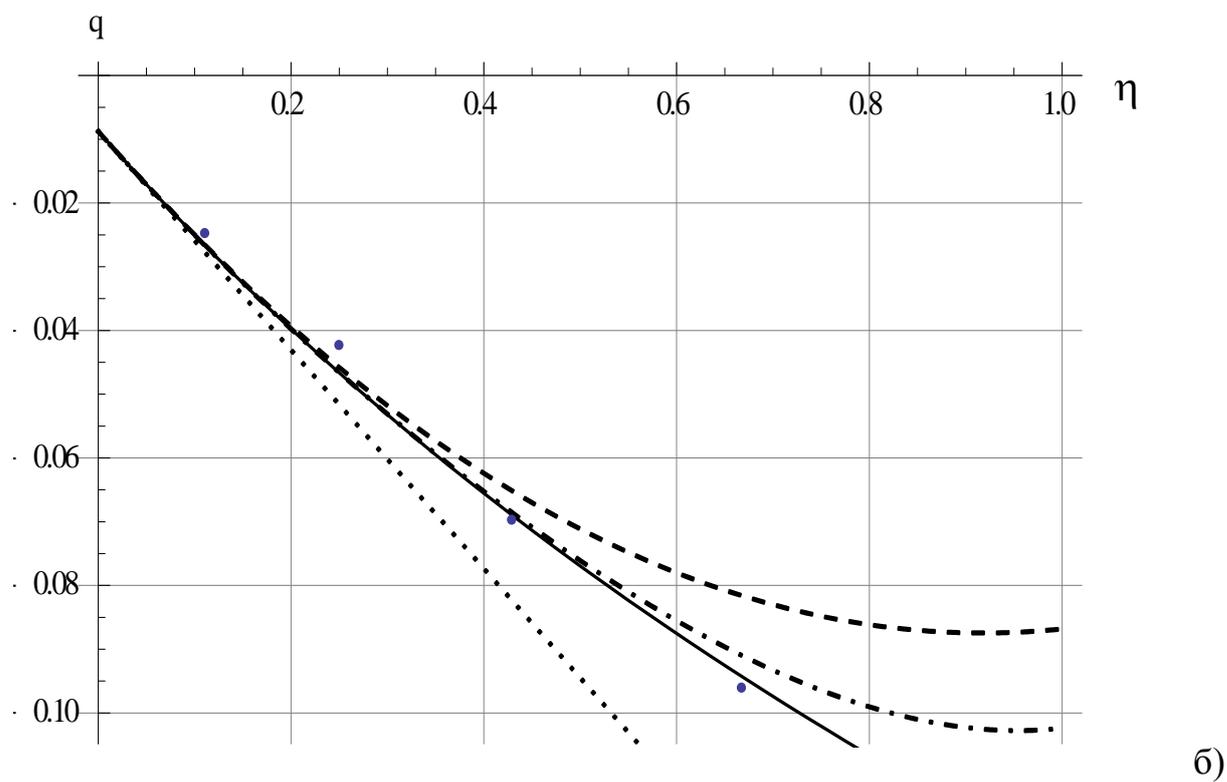
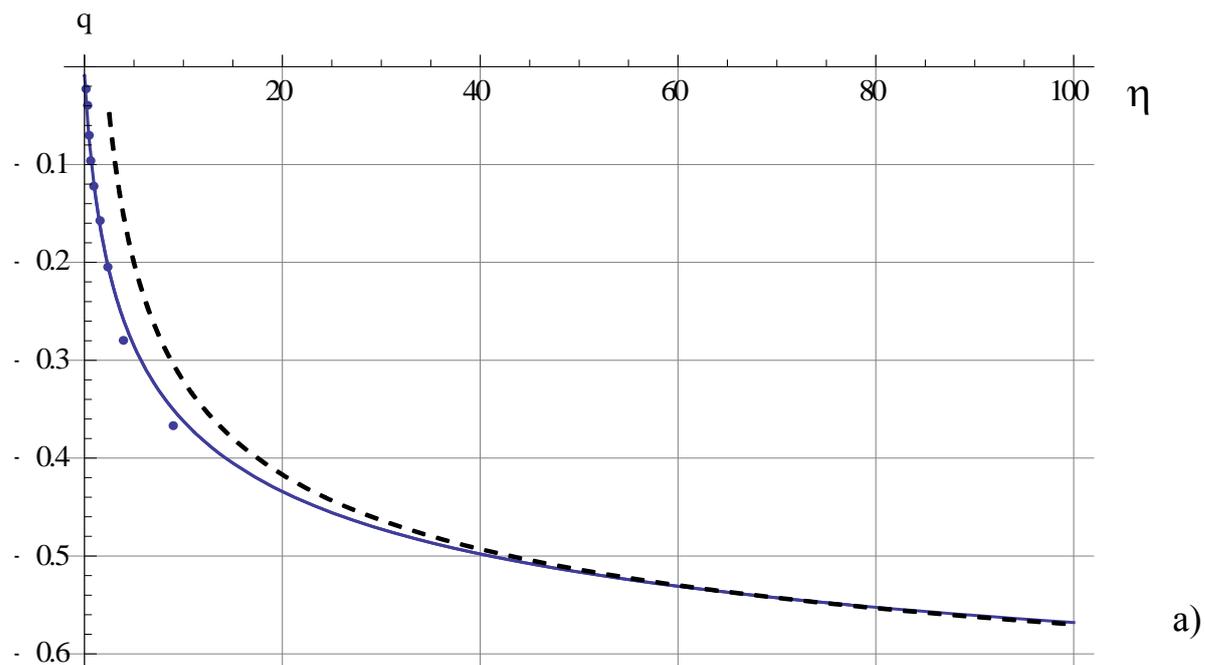


Рисунок 3.2. Значение $q(\eta)$ в зависимости от отношения модулей; (а) – для малых η , (б) – для умеренных η ; сплошная линия – полученное решение (3.4.1); точки – решение [92], прерывистая (а) – асимптотика (3.7.11); точечная, прерывистая и штрихпунктирная (б) – два, три, пять членов асимптотики (3.7.5), соответственно.

3.8. Разложение решения вблизи минуса нуля

Подстановка (3.2.1), (3.6.9) во второе выражение (2.2.6) с учетом результатов п. 3.3 дает

$$F_-(p) = \sum_{n=-3}^0 G_-^{(n)} p^{-n} + O(p) \quad (3.8.1)$$

Здесь

$$G_-^{(-3)} = \begin{pmatrix} -6N \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_-^{(-2)} = \begin{pmatrix} -6M_b \\ -3N \end{pmatrix} \quad (3.8.2)$$

$$G_-^{(-1)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 24\delta M_b + 2\sqrt{3}T + (11 + 12\delta^2 + 3\ln 3 + 12(\beta''_{0-} + J''_{0-}))N \\ -12M_b + 2T \end{pmatrix}$$

$$G_-^{(0)} = \begin{pmatrix} g_{1M}M_b + g_{1N}N + g_{1T}T \\ g_{2M}M_b + g_{2N}N + g_{2T}T \end{pmatrix}$$

$$g_{1M} = \frac{5 - 12\delta^2 + 3\ln 3 + 12(J''_{0-} + \beta''_{0-})}{4},$$

$$g_{2M} = 3\delta - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad g_{1T} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$$

$$g_{2T} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{4\ln 2}{\pi} + \delta_5 - \delta_6 + \eta - \frac{2\eta}{\pi} + \frac{2\eta \ln(-\eta p)}{\pi} \right)$$

$$g_{1N} = -\frac{9}{2}\delta - 2\delta^3 + \frac{12\ln 2}{\pi} + \frac{24\zeta(3)}{\pi^3} + 3 \left(\delta_1 - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta \ln(-\eta p)}{\pi} \right) + (J'''_{0-} + \beta'''_{0-})$$

$$g_{2N} = \frac{5 - 4\sqrt{3}\delta + 12\delta^2 + 3\ln 3 + 12(J''_{0-} + \beta''_{0-})}{8}$$

Здесь $\zeta(p)$ – Дзета-функция Римана $\zeta(3) \approx 1.2021$; $J''_{0-}, \beta''_{0-}, J'''_{0-}, \beta'''_{0-}$ – вторые и третьи производные соответствующих функций, вычисляемые на основе стандартных процедур для интегралов типа Коши [203, 204].

3.9. Вычисление параметров эффективной упругой заделки

Согласно определению (3.1.10) выражение (3.8.1) представляет собой трансформанту Лапласа от асимптотики производной половины скачка смещений. В соответствии со свойствами преобразования Лапласа (напр. [205]) трансформанта разности между смещениями на бесконечности и смещениями в нуле определяется делением трансформанты производной на p

$$\int_{-\infty}^0 \left\{ \begin{array}{l} v^{(2)}(x, 0) - v^{(1)}(x, 0) \\ u^{(2)}(x, 0) - u^{(1)}(x, 0) \end{array} \right\} e^{-px} dx = \frac{2}{E} \sum_{n=-3}^0 G_-^{(n)} p^{-n-1} + O(p) \quad (3.9.1)$$

Асимптотики смещений вычисляются отсюда с помощью обратного преобразования Лапласа

$$E \left\{ \begin{array}{l} v^{(2)}(x, 0) - v^{(1)}(x, 0) \\ u^{(2)}(x, 0) - u^{(1)}(x, 0) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{n=-3}^0 2G_-^{(n)} p^{-n-1} e^{px} + o(1) \quad (3.9.2)$$

Здесь L – контур, проходящий параллельно мнимой оси плоскости комплексной переменной p и расположенный между мнимой осью и ближайшей особой точкой. Этот контур может быть деформирован в

соответствии с правилами интегрирования в комплексной плоскости [203, 204]. Находя оригинал по изображению, можно видеть, что скачек смещений согласно (3.8.2)-(3.9.2) представляет собой сумму полинома третьей степени и функции, содержащей логарифмы. Полином соответствует балочному приближению, причем наличие членов нулевой и первой степени по x (минус первой и минус второй степени по p для трансформанты) свидетельствует о том, что граничные условия для эквивалентной балки отнюдь не являются условиями жесткой заделки в месте вершины трещины, а соответствует условиям обобщенной упругой заделки, т.е. пропорциональности смещений и угла поворота в точке заделки действующим компонентам главных вектора и момента нагрузки. Наличие членов, содержащих логарифмы, соответствует смещениям полуплоскости; при вычислении параметров эффективной балки эти члены также могут быть учтены в качестве граничных условий.

Члены разложения вертикального смещения v , содержащие $G_-^{(-3)}$, $G_-^{(-2)}$ (3.8.2), соответствуют классическим членам для прогиба балки под действием силы и момента. Наличие члена разложения горизонтального смещения u , присутствующего в $G_-^{(-2)}$, объясняется тем, что формулы (3.8.1) -(3.9.2) соответствуют нижней границе полосы (балки), горизонтальное же смещение центральной оси балки отличается на величину произведения поворота в данной точке на половину толщины полосы. Вычисленное с учетом сказанного горизонтальное смещение оси балки (полосы) оказывается лишенным квадратичного члена и определяется как

$$-Eu = Tx + K_{uT}T + K_{uM}M + K_{uN}N \quad (3.9.3)$$

В выражении (3.9.3) первый член соответствует деформации стержня, а последующие определяют эффективные условия его упругой заделки.

Аналогично для вертикального смещения и его производной для членов, непосредственно не связанных с изгибом,

$$E v = E v_b - K_{vM} M + K_{vT} T + K_{vN} N \quad (3.9.4)$$

$$E v' = E v'_b + K_{v'M} M + K_{v'T} T + K_{v'N} N \quad (3.9.5)$$

Здесь

$$K_{uT} = \frac{4 \ln 2}{\pi} + \delta_5 - \delta_6 + \eta + \frac{2\eta}{\pi} \left(\ln \frac{x}{\eta} + \gamma - 1 \right) \quad (3.9.6)$$

$\gamma \approx 0.577216$ - постоянная Эйлера.

$$K_{uM} = K_{v'T} = \sqrt{3} \quad (3.9.7)$$

$$K_{v'M} = 12\delta \quad (3.9.8)$$

Для избежания трудностей (хотя и преодолимых), связанных с вычислением старших производных функций, входящих в выражения для остальных членов, воспользуемся симметрией коэффициентов получаемой матрицы коэффициентов упругой заделки. Симметричные части оказываются независимыми от старших производных

$$K_{uN} = K_{vT} = 1 + \sqrt{3}\delta \quad (3.9.9)$$

$$K_{vM} = K_{v'N} = \frac{3}{2} + 6\delta^2 \quad (3.9.10)$$

Выражение для K_{vN} может быть получено из (3.8.2), однако оно слишком громоздко (в дальнейшем будет использоваться выражение (2.4.32), полученное из решения скалярной задачи). Коэффициенты $K_{uT}, K_{uM} = K_{v'T}, K_{v'M}$ образуют симметричную матрицу коэффициентов упругой заделки, рассмотренную в работе [96], где они были вычислены путем численного решения системы интегральных уравнений.

Остальные рассчитанные коэффициенты составляют расширенную матрицу податливости. В задаче отслоении покрытия от прямолинейной подложки поперечные силы не возникают, и данные коэффициенты роли не играют. Однако они могут быть важны для других задач, например для случая искривленной подложки, а также для задач об отслоении, вызванном действием нормальных (перерезывающих) сил, например, для задачи определения адгезии методом «пузыря» (“blister test”) [72].

3.10. Вычисление параметров эффективной упругой заделки из сравнения скоростей высвобождения упругой энергии

Часть коэффициентов можно посчитать исходя из сравнения скорости высвобождения энергии, посчитанной через КИН (3.7.14) и через работу сил при деформировании эффективной балки. Для $K_{v'M}$ это было сделано в [18].

Рассмотрим эффективную балку-стержень, для которой поперечные деформации (прогиб) определяются уравнением оси балки (для случая отсутствия распределенной нагрузки)

$$E^{(2)} I v''''(x) = 0, \quad (3.10.1)$$

а продольные деформации – уравнением стрингера

$$E^{(2)} \frac{du}{dx} = \sigma_{xx}(x), \quad (3.10.2)$$

упруго закрепленную с одного конца и подверженную действию силы с компонентами P, T и моментом M_L на другом (Рисунок 3.3).

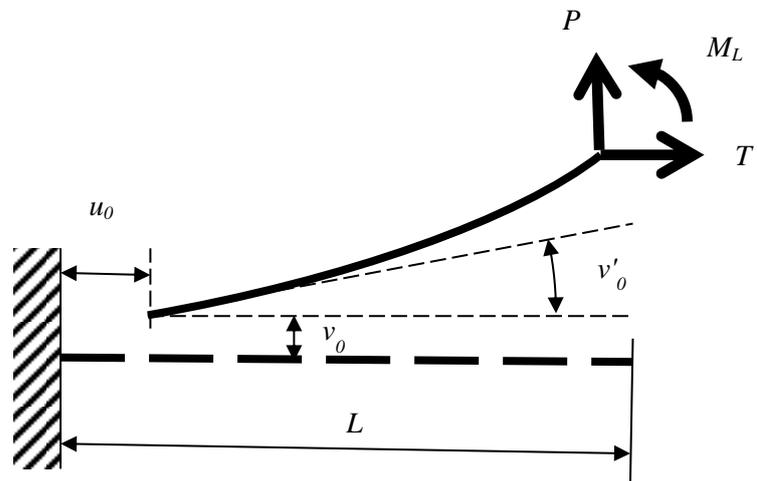


Рисунок 3.3. Модельный пример для определения констант упругой заделки из сравнения скоростей высвобождения энергии на уровне эффективной балки и через КИН.

Под действием сил и момента в месте заделки возникают начальные смещения u_0 , v_0 и начальный угол поворота v'_0 , которые согласно рассматриваемой модели зависят только от главного вектора и изгибающего

момента, действующих в точке заделки, причем линейным образом (здесь учтено, что в точке заделки продольная и поперечная силы остаются без изменений, а полный изгибающий момент возрастает на величину момента, создаваемого поперечной силой, LP).

$$E^{(2)} \begin{pmatrix} u_0 \\ v'_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{uT} & K_{uM} & K_{uN} \\ K_{v'T} & K_{v'M} & K_{v'N} \\ K_{vT} & K_{vM} & K_{vN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ M_L + LP \\ P \end{pmatrix} \quad (3.10.3)$$

Решение уравнений (3.10.1), (3.10.2) с граничными условиями (3.10.3) и условиями на правом конце

$$E^{(2)} I \begin{pmatrix} v''(L) \\ v'''(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_L \\ -P \end{pmatrix} \quad (3.10.4)$$

есть

$$E^{(2)} u(x) = K_{uT} T + K_{uM} (M_L + LP) + K_{uN} P + \frac{T}{S} x$$

$$E^{(2)} v(x) = K_{v'T} T + K_{v'M} (M_L + LP) + K_{vN} P + K_{v'T} T x +$$

$$K_{v'M} (M_L + LP) x + K_{v'N} P x + \quad (3.10.5)$$

$$+ \frac{M_L}{I} \frac{x^2}{2} - \frac{P}{I} \frac{x^3}{6} + \frac{PL}{I} \frac{x^2}{2}$$

Здесь S - площадь сечения.

Из теоремы взаимности работ Бетти для указанной модели немедленно следует симметрия матрицы (3.10.3). Действительно, согласно (3.10.5), работа силы P на перемещении $v(L)$, вызванном действием момента M_L должна быть равна работе момента M_L на угле поворота $v'(L)$, вызванном действием силы P

$$\left(K_{vM} M_L + K_{v'M} M_L L + \frac{M_L L^2}{I} \frac{L^2}{2} \right) P = \left(K_{v'M} PL + K_{v'N} P - \frac{P L^2}{I} \frac{L^2}{2} + \frac{PL^2}{I} \right) M_L \quad (3.10.6)$$

Аналогично, согласно (3.10.5), работа силы T на перемещении $u(L)$, вызванном действием момента M_L , должна быть равна работе момента M_L на угле поворота $v'(L)$, вызванном действием силы T ,

$$K_{uM} M_L T = K_{v'T} T M_L \quad (3.10.7)$$

И, наконец, работа силы T на перемещении $u(L)$, вызванном действием силы P , должна быть равна работе силы P на перемещении $v(L)$, вызванном действием силы T ,

$$(K_{uM} LP + K_{uN} P) T = (K_{v'T} T + K_{v'T} TL) P \quad (3.10.8)$$

Из уравнений (3.10.6)-(3.10.8) следует симметрия матрицы (3.10.3). Отметим, однако, что если бы в качестве уравнений балки-стержня были взяты уравнения более сложного вида, результат мог быть иным. Например,

если добавить в правую часть второго уравнения (3.10.5) член $\frac{E^{(2)} P}{\mu S} x$, где μ

- модуль сдвига (что соответствует модели «балка Тимошенко»), а S -

площадь сечения, то член $\frac{P}{\mu S}$ появится в скобке правой части уравнения

(3.10.6), что приведет к условию $K_{vM} = K_{v'N} + \frac{E^{(2)}}{\mu S}$, приводящему к потере

указанной симметрии. Следовательно, симметрия матрицы податливости не является следствием только теоремы Бетти, и для ее сохранения необходимо выполнение дополнительных условий. Показанный пример иллюстрирует возможность потери симметрии матрицы податливости при непротиворечивости модели, в частности при выполнении теоремы

взаимности. Заметим, что в [97] выражения для (нерасширенной) матрицы податливости, полученные численным методом, были несимметричными, а в работе [96] уже говорилось о необходимости симметричности матрицы, и полученные значения были симметричными.

Рассмотрим работу внешних сил W , равную вследствие консервативности упругой системы ее упругой энергии, от действия продольной и поперечной силы и момента. Согласно (3.10.5), по теореме Клапейрона

$$2E^{(2)}W = \frac{T^2}{S}L + K_{v'T}TPL + 2K_{v'M}M_LPL + K_{v'M}P^2L^2 + K_{v'N}P^2L + \frac{M_L P}{I}L^2 + \frac{P^2}{I}\frac{L^3}{3} + \frac{M_L^2}{I}L + O(L)^0 \quad (3.10.9)$$

Здесь $O(L)^0$ - члены не зависящие от L , т.е. постоянные.

Вычисляя скорость высвобождения энергии при увеличении длины балки-стержня, т.е. вычисляя производную по L , получаем

$$2E^{(2)}\frac{dW}{dL} = \frac{T^2}{S} + K_{v'T}TP + 2K_{v'M}M_LP + 2K_{v'M}P^2L + K_{v'N}P^2 + 2\frac{M_L P}{I}L + \frac{P^2}{I}L^2 + \frac{M_L^2}{I} \quad (3.10.10)$$

С учетом симметрии коэффициентов матрицы (3.10.3), а также того, что толщина слоя (балки-стержня) и площадь его сечения принимаются единичными (при этом момент инерции $I = 1/12$), получаем

$$E^{(2)}\frac{dW}{dL} = 6M_b^2 + \frac{T^2}{2} + \frac{K_{v'T}TN}{2} + K_{v'M}M_bN + \frac{K_{v'N}N^2}{2} \quad (3.10.11)$$

Здесь также учтено, что сила реакции опоры в месте заделки N есть сила P .

Сравнение (3.10.11) и (3.7.14) дает

$$K_{v'M} = 12\delta, \quad K_{uM} = K_{v'T} = \sqrt{3}, \quad K_{v'N} = \frac{3}{2} + 6\delta^2$$

что совпадает с результатами (3.9.7), (3.9.8), (3.9.10).

3.11. Матрица коэффициентов эффективной упругой заделки; сравнение с численными данными

Окончательно, полученное выражение для расширенной матрицы коэффициентов упругой заделки записывается следующим образом

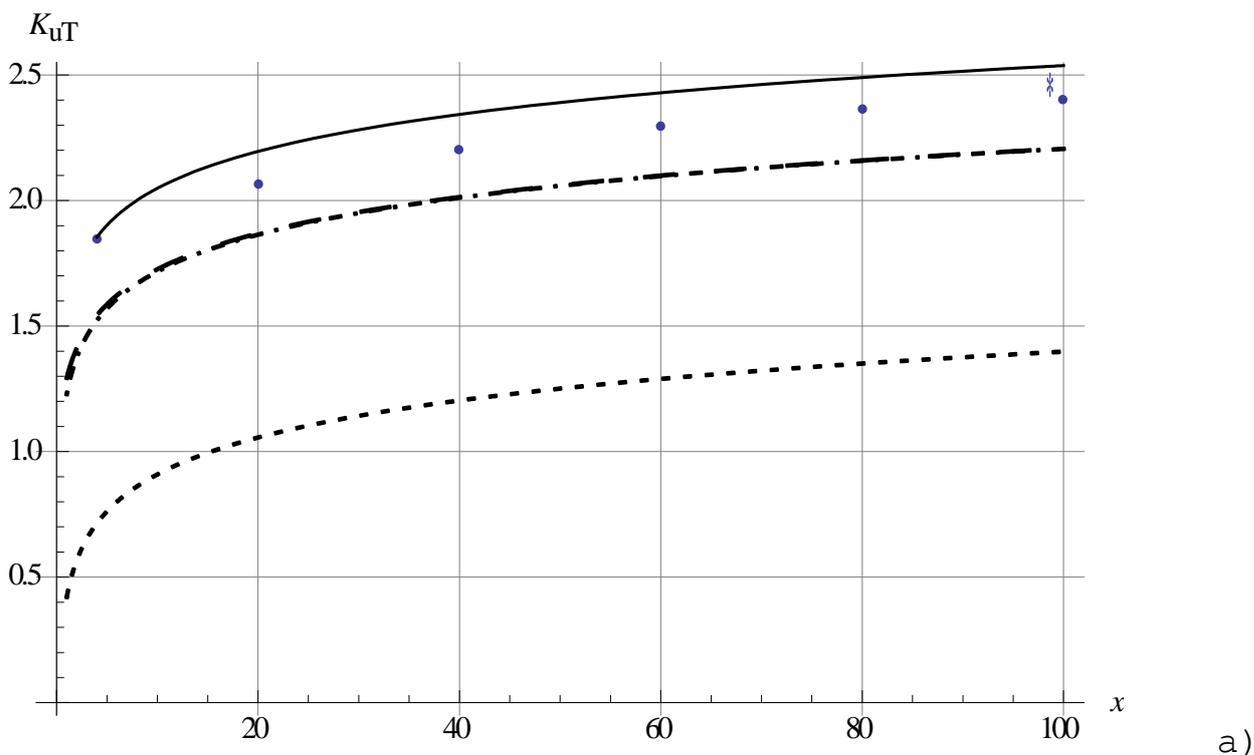
$$E^{(2)} \begin{pmatrix} u_0 \\ v'_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{uT} & \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3}\delta \\ \sqrt{3} & 12\delta & \frac{3}{2} + 6\delta^2 \\ 1 + \sqrt{3}\delta & \frac{3}{2} + 6\delta^2 & K_{vN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ M_b \\ P \end{pmatrix} \quad (3.11.1)$$

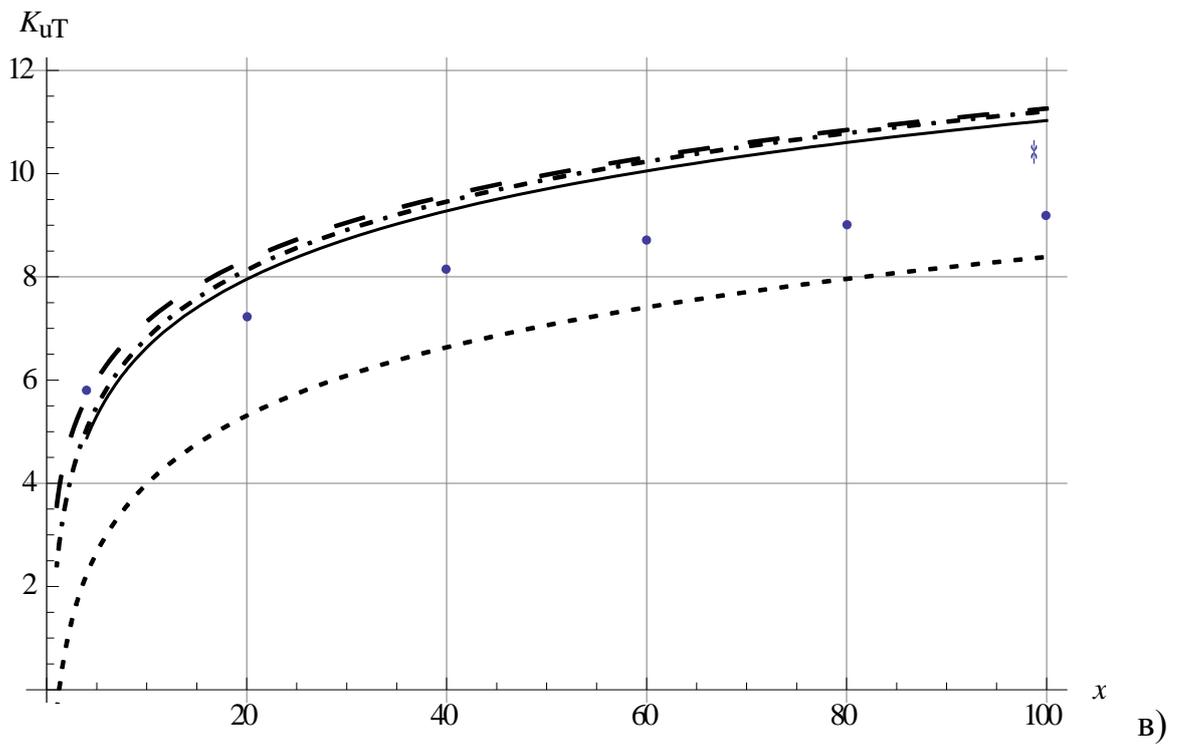
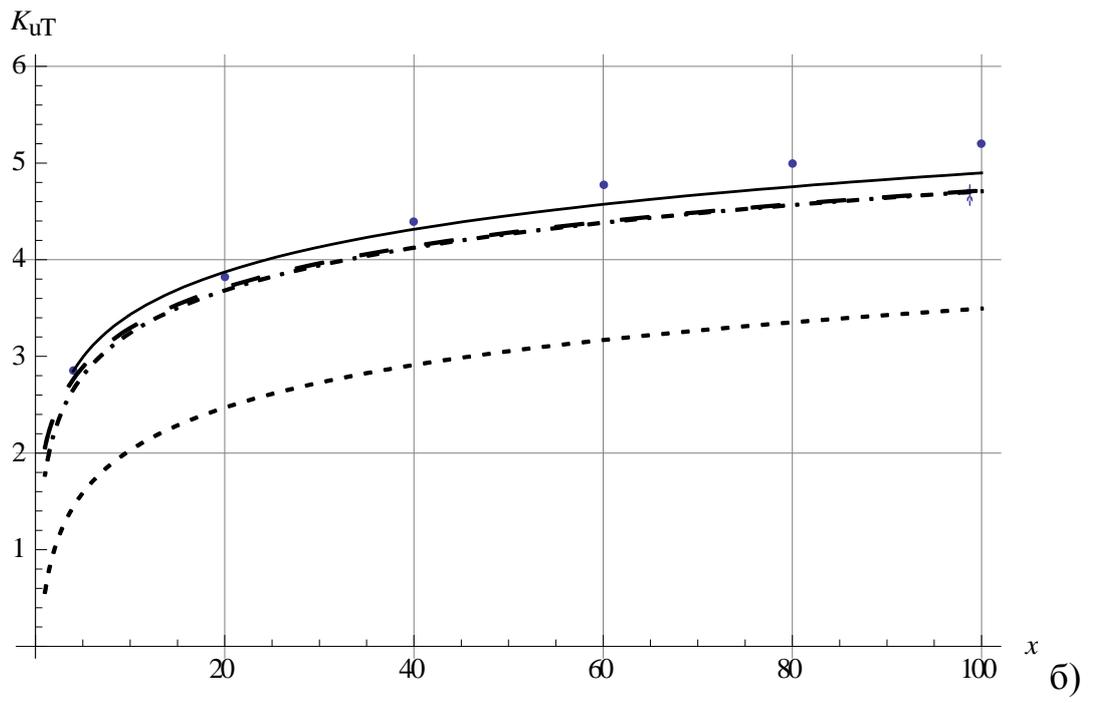
Здесь K_{uT} определяется формулой (3.9.6). Выражение для K_{vN} может быть получено из (3.8.2), однако оно слишком громоздко. Вычисляя следующие члены разложения полученного решения при $p \rightarrow -0$, можно уточнить полученные коэффициенты.

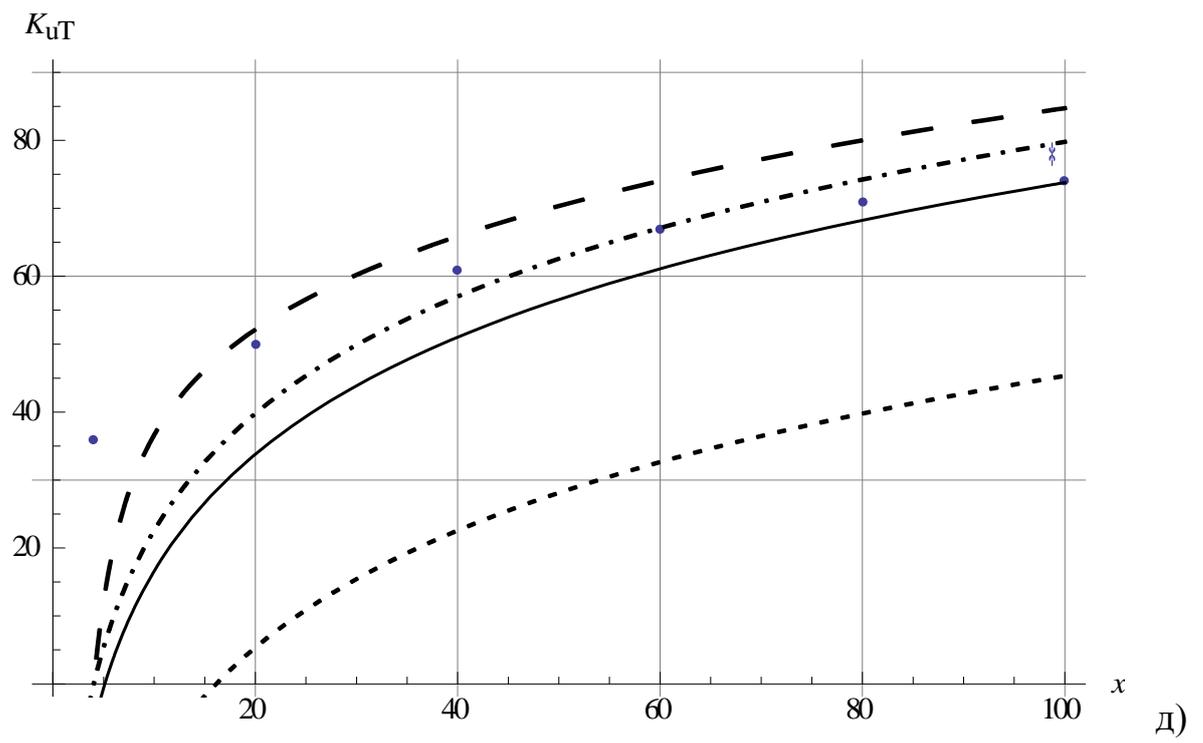
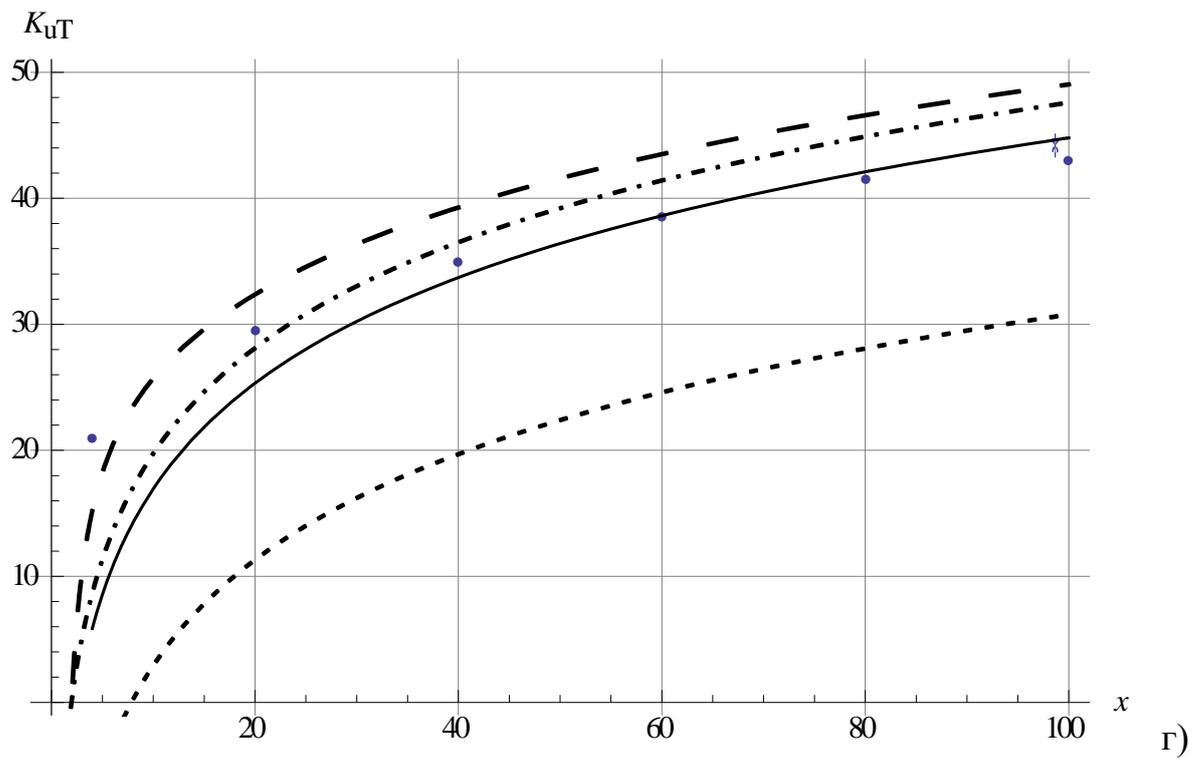
Все три посчитанные коэффициента основной (нерасширенной) матрицы податливости K_{uT} , $K_{uM} = K_{v'T}$, $K_{v'M}$ согласуются с численными результатами [96, 97]. Значение K_{uT} в зависимости от длины отслоения представлено на Рисунке 3.4: сплошная линия – полученное решение (3.9.6); прерывистая и штрих-пунктирная линии – один и два члена асимптотики, полученной при пренебрежении перекрестным влиянием изгиба и сдвига (2.2.46); точечная – главный член асимптотики приближения стрингера

(2.3.14); точки – численное решение [96], звездочки – численное решение [97]. а) $\eta = 1/3$, б) $\eta = 1$, в) $\eta = 3$, г) $\eta = 19$, д) $\eta = 39$, е) $\eta = 199$.

Из представленных данных видно, что для не слишком больших относительных жесткостей η , определяемых (2.2.47), полученные асимптотические оценки хорошо согласуются с результатами численных расчетов. Для больших η и малых x (при нарушении условия (2.2.47)) кривые уходят в отрицательную область, что свидетельствует о неприменимости асимптотических решений для подобных соотношений параметров. Из приведенных графиков также видно, что расхождение между результатами численных расчетов и результатами расчетов на основании стрингерного приближения существенны для всего диапазона расчетных параметров.







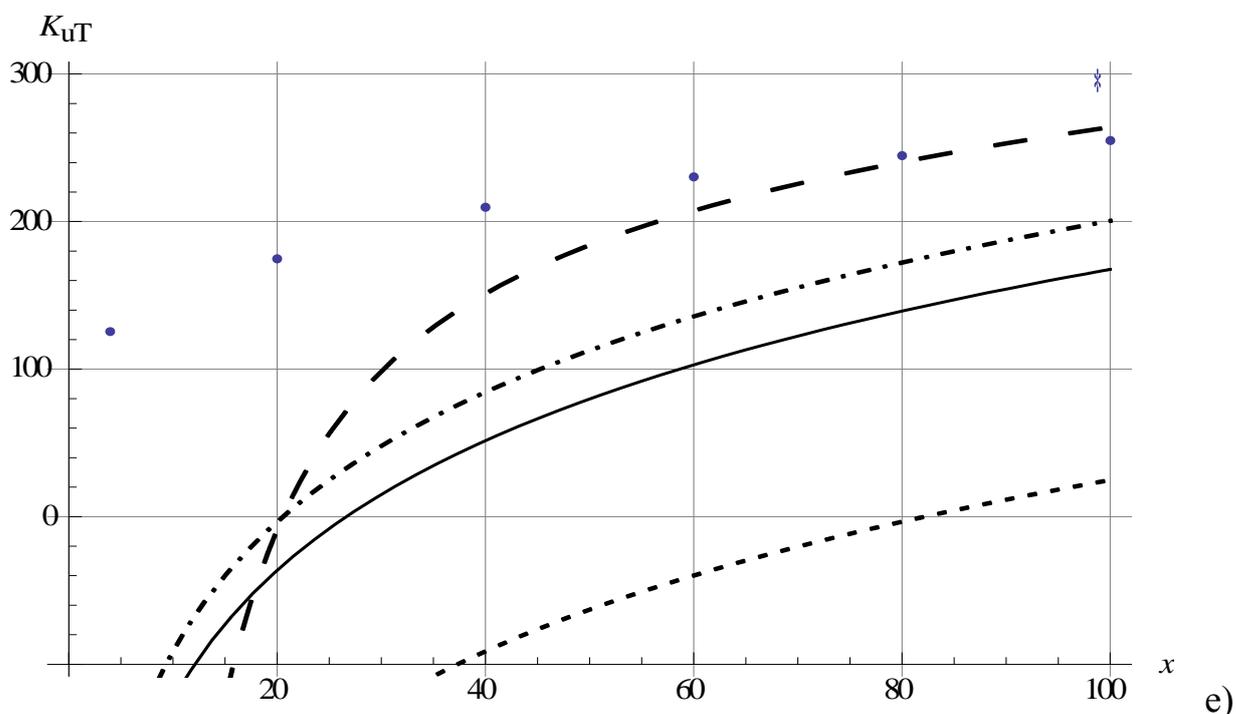


Рисунок. 3.4. Значение K_{uT} в зависимости от длины отслоения: сплошная линия – полученное решение (3.9.6); прерывистая и штрихпунктирная линии – один и два члена асимптотики, полученной при пренебрежении перекрестным влиянием изгиба и сдвига (2.2.46); точечная – главный член асимптотики приближения стрингера (2.3.14); точки – численное решение [96], звездочки – численное решение [97]. а) $\eta = 1/3$, б) $\eta = 1$, в) $\eta = 3$, г) $\eta = 19$, д) $\eta = 39$, е) $\eta = 199$.

Значение K_{vM} в зависимости от отношения модулей представлено на Рисунке 3.5: сплошная линия – полученное решение; пунктирная – решение с использованием балочного приближения (2.4.28), точки – численное решение [96], звездочки – численное решение [97]. Для $K_{uM} = K_{vT}$ являющегося константой, сравнение с данными [96], представленными графически, показывает полное совпадение в пределах точности определения толщины линии на графике, представленном в [96].

Для остальных коэффициентов, по-видимому, нет данных для сравнения. Для коэффициента $K_{vM} = K_{vN}$ сравнение с результатами, полученными на основе представления слоя балкой (2.4.29), представлены на Рисунке 3.6: сплошная линия – полученное решение; пунктирная – решение с использованием балочного приближения (2.4.29).

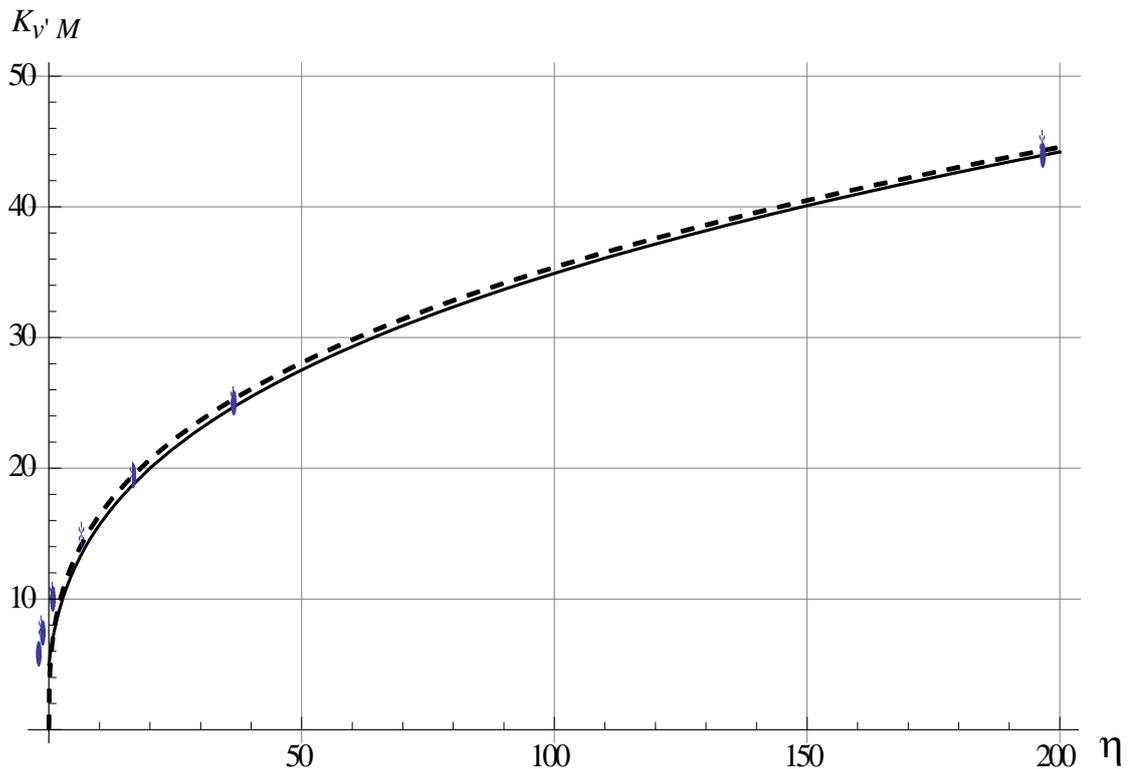


Рисунок. 3.5. Значение K_{vM} в зависимости от отношения модулей: сплошная линия – решение (3.11.1); пунктирная – решение с использованием балочного приближения (2.4.28), точки – численное решение [96], звездочки – численное решение [97].

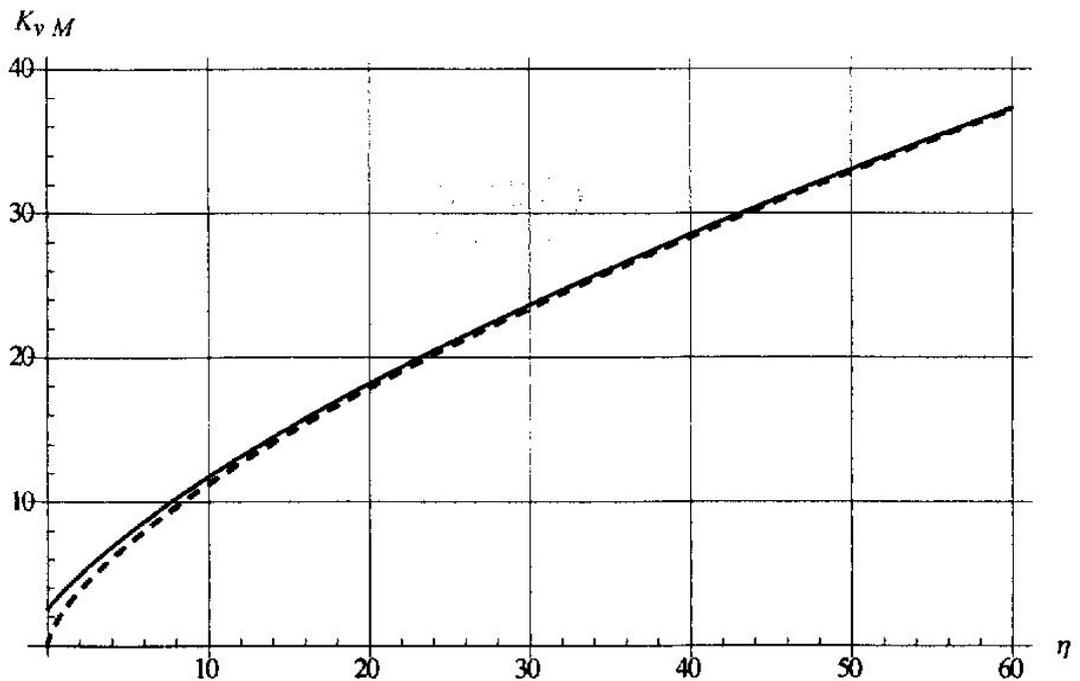


Рисунок. 3.6. Значение K_{vM} в зависимости от отношения модулей: сплошная линия – решение (3.11.1); пунктирная – решение с использованием балочного приближения (2.4.29).

3.12. Краткие выводы по главе

Получено и исследовано решение однородной задачи о полубесконечной трещине, проходящей вдоль границы раздела, отделяющего тонкий упругий слой от упругой полуплоскости из материала с отличающимися свойствами. Следуя [106-109] путем применения двухстороннего преобразования Лапласа задача сведена к матричной задаче Римана. Выделен класс сочетаний упругих постоянных материалов, для которых возможно осуществить факторизацию матричного коэффициента. Данная факторизация выполнена, что привело к обобщению решения задачи

[106-109] на случай различных упругих постоянных слоя и полуплоскости (хотя и подчиняющихся дополнительному условию). Получены асимптотические выражения для смещений берегов трещины вдали от ее вершины. Показано, что ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины соответствуют смещением балки (пластины) при граничных условиях типа обобщенной упругой заделки, т.е. условиях пропорциональности смещений и угла поворота в точке заделки действующим компонентам главных вектора и момента нагрузки. Получены выражения для компонент матрицы коэффициентов упругой заделки.

Получена асимптотика поля напряжений вблизи вершины трещины, имеющего корневую особенность при отсутствии осциллирующих членов. Посчитан коэффициент интенсивности напряжений.

Проведено сравнение полученного решения с решениями, полученными в упрощенной постановке (Глава 2) и с численными решениями. Ввиду хорошего соответствия результатов, полученных на основе балочной модели, и результатов, полученных на основе решения матричной задачи, решения для задачи в промежуточной постановке (о нормальном отрыве полосы от полуплоскости при пренебрежении влиянием перекрестных членов) не приводится.

Полученные решения будут использованы для решения задач об отслоении покрытий в Главе 4 на основании подхода, сформулированного в Главе 1.

ГЛАВА 4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ОТСЛОЕНИЯ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ

4.1. Предварительные замечания и дополнительные результаты: влияние анизотропии, интерполяция численных данных

4.1.1. Учет анизотропии и слоистости

Полученные формулы для компонент матрицы упругой заделки могут быть обобщены на случай анизотропных (ортотропных) подложек и покрытий. В случае моделирования отслаивающейся полосы балкой либо стержнем, такого рода обобщения не требуют никаких дополнительных упрощающих предположений. В случае анизотропной подложки формулы п.2.4 остаются справедливыми с заменой упругих констант (2.4.3) на (2.4.4).

Для анизотропных (ортотропных) покрытий под упругим модулем $E^{(2)}$ следует понимать модуль в продольном направлении $E_{22}^{(2)}$.

Для многослойных подложек и покрытий, в случае если толщины индивидуальных слоев много меньше суммарной толщины отслаивающегося покрытия, данные слоистые структуры могут быть описаны как эффективная однородная анизотропная среда [213, 214].

Значения эффективных модулей для покрытия вычисляются усреднением по индивидуальным слоям, формирующим покрытие

$$E^{(1)} = \frac{\sum E_i h_i}{\sum h_i} \quad (4.1.1)$$

Здесь E_i , h_i упругие модули (в продольном направлении в случае ортотропии) и толщины индивидуальных слоев.

Аналогично, для многослойных подложек эффективные упругие постоянные рассчитываются следующим образом

$$\begin{aligned} c_{11}^{(1)} &= \frac{\sum c_i^{11} h_i}{\sum h_i} & c_{12}^{(1)} &= \frac{\sum c_i^{12} h_i}{\sum h_i} \\ c_{22}^{(1)} &= \frac{\sum h_i / c_i^{22}}{\sum h_i} & c_{66}^{(1)} &= \frac{\sum h_i / c_i^{66}}{\sum h_i} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Коэффициенты матрицы податливости β_{ij} , которые необходимо подставить в (2.4.4) находятся с помощью (4.1.2) посредством следующих формул

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{c_{22}^*}{c_{11}^* c_{22}^* - c_{12}^{*2}} \\ \beta_{22} &= \frac{c_{11}^*}{c_{11}^* c_{22}^* - c_{12}^{*2}} \\ \beta_{66} &= c_{66}^{*-1} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Следует отметить, что вышеприведенные формулы описывают эффективные свойства многослойных сред как в случае отслоения всего пакета слоев, так и прохождения трещины между отдельными слоями пакета. Различие определяется положением трещины (какие из слоев следует относить к отслоению, а какие к подложке).

4.1.2. Интерполяция численных данных

Согласно модели обобщенной упругой заделки с расширенной матрицей коэффициентов заделки продольные и поперечные смещения $u(0)$, $w(b)$ и угол поворота $w'(0)$ балки (пластины) в точке заделки являются линейными функциями от продольной и поперечной силы F, N и изгибающего момента M , действующих в точке заделки (здесь и далее опущен индекс b у изгибающего момента)

$$E^{(2)} \begin{pmatrix} u(0) \\ h w'(0) \\ w(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ h^{-1}M \\ N \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

Определенные таким образом величины отличаются от соответствующих коэффициентов (3.11.1) тем, что они не нормированы на толщину отслоения, т.е. не предполагается $h=1$.

В работах [104, 96] значения коэффициентов матрицы податливости a_{11}, a_{12}, a_{22} были получены численно. В Главах 2 и 3 были получены асимптотические формулы при некоторых дополнительных предположениях. Пристальный взгляд на численные результаты [104, 96] для коэффициента матрицы податливости a_{11} позволяет сделать вывод, что после подходящей нормировки переменных все точки с достаточно хорошей точностью ложатся на единую кривую (Рисунок 4.1.).

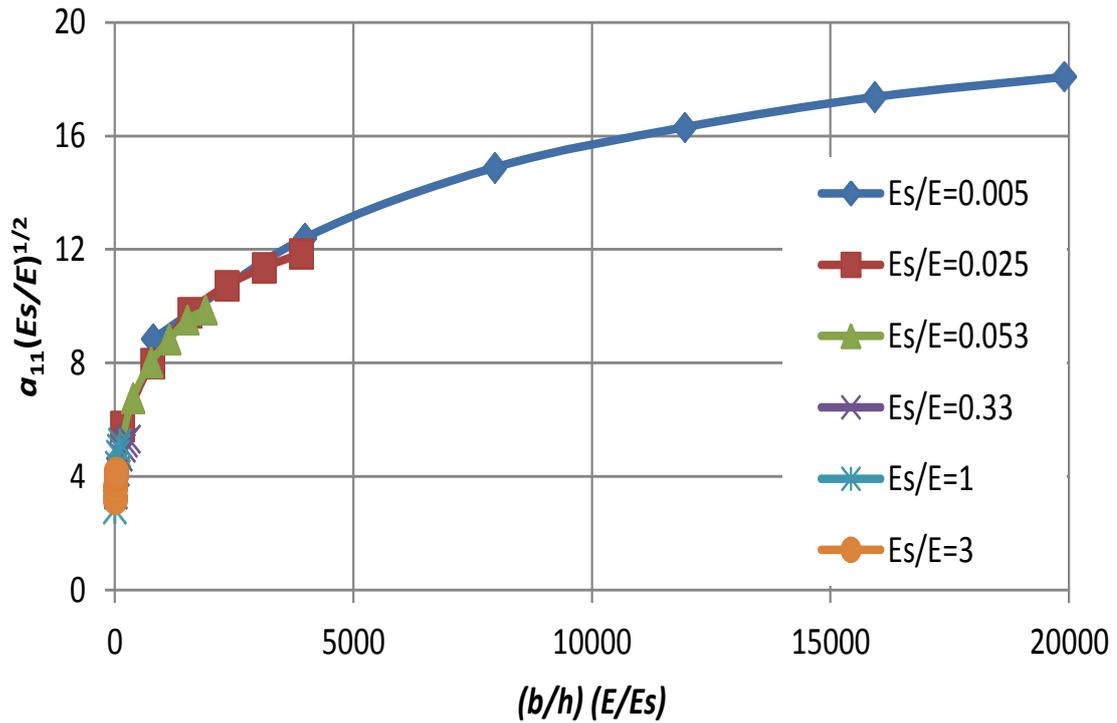


Рисунок. 4.1. Единая кривая для коэффициента упругой заделки a_{11} , полученная на основе численных данных [96].

Данная кривая может быть аппроксимирована одной из следующих (эмпирических) формул

$$a_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{\eta} + \frac{3}{2} \left[\frac{b}{h} (\eta)^3 \right]^{1/4}$$

$$a_{11} = \frac{3}{2} \left[\frac{b}{h} (\eta)^3 \right]^{1/4}$$

$$a_{11} = 3 \left[\left(\frac{b}{h} \eta \right)^{1/5} - 1 \right] \sqrt{\eta} \quad (4.1.5)$$

$$a_{11} = \sqrt{\eta} \left[4 \left(\frac{b}{h} \eta \right)^{1/6} - 3 \right]$$

Первая из данных формул будет использована в дальнейшем.

Для коэффициента a_{12} данные численных расчетов [96] также могут быть аппроксимированы формулой

$$a_{12} = \sqrt{3} + 0.27 \left(\frac{h}{b} \eta \right)^{2/3} \quad (4.1.6)$$

Здесь свободный член выбран из условия совпадения с асимптотическим выражением (3.11.1) для больших b/h , а структура аппроксимации выбрана соответствующей решению, полученному в Главе 4.

Сравнение результатов, посчитанных по формуле (4.1.6), с данными [96] представлена на Рисунке 4.2.

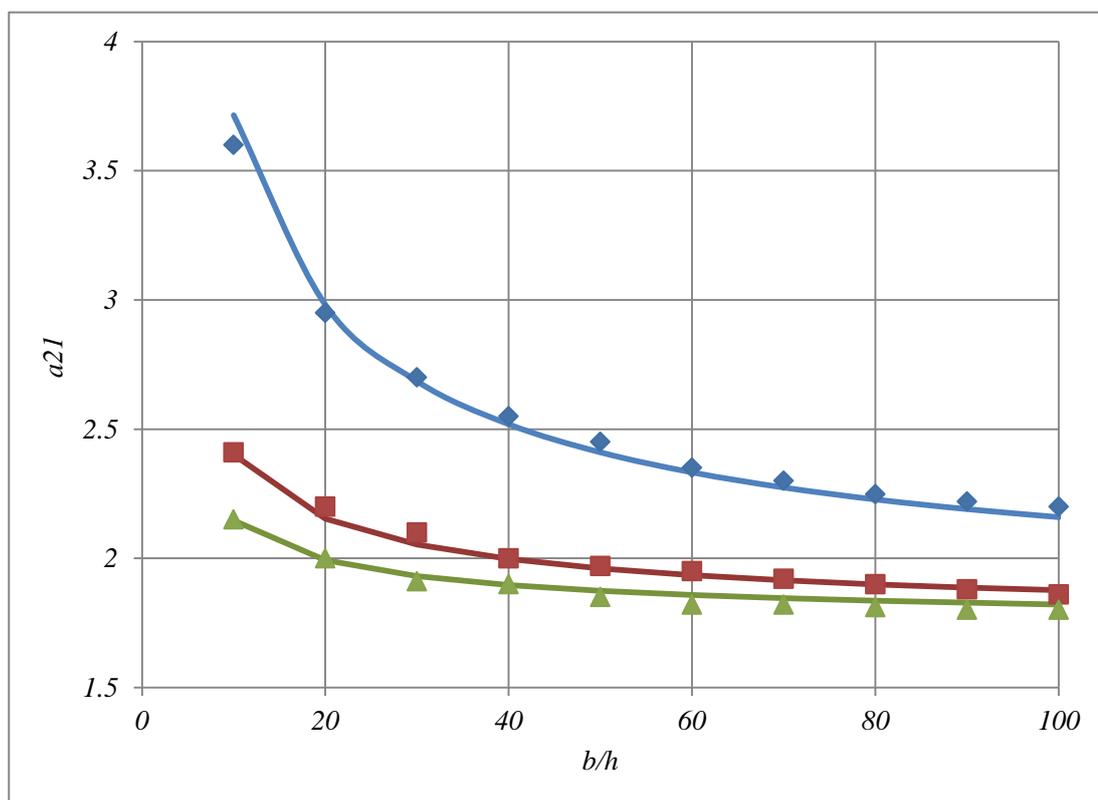


Рисунок. 4.2. Зависимость коэффициента упругой заделки a_{12} , от отношения длины отслоения к его толщине: Точки – численные данные [96], линии – зависимости согласно формуле (4.1.6); синяя линия $\eta = 199$, коричневая – $\eta = 39$, зеленая – $\eta = 19$.

4.2. Оценка влияния податливости основания на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия

4.2.1. Постановка задачи

Согласно общему подходу к решению задач об отслоении, сформулированному в Главе 1, рассмотрим упругую подложку, моделируемую полуплоскостью, к границе которой примыкает покрытие, моделируемое упругой полосой (пластиной) толщины h с отличающимися свойствами. Модули Юнга и коэффициенты Пуассона покрытия и подложки – $E^{(1)}, \nu^{(1)}, E^{(2)}, \nu^{(2)}$, соответственно. Между покрытием, моделируемым полосой, и основанием, моделируемым полуплоскостью, имеется полный контакт всюду, за исключением участка длины $2b$, вдоль которого имеется отслоение. Система декартовых координат выбрана так, чтобы ось x была параллельна границе полуплоскости, ось y - направлена вдоль ее внешней нормали. Начало координат выбрано совпадающим с центром отслоения и лежащим в срединном сечении полосы до ее изгиба вследствие потери устойчивости. Таким образом, полуплоскость занимает область $y < -h/2$, полоса – $-h/2 < y < h/2$, разрез – $-b < y < b, y = -h/2$. Предполагается, что полоса подвержена действию собственных деформаций растяжения, следствием которых является появление сжимающих напряжений σ_0 , действующих вдоль пластины. Данный тип напряженно-деформированного состояния может возникнуть, например, при нагреве рассматриваемой конструкции, если коэффициент теплового расширения материала покрытия выше, чем коэффициент теплового расширения материала основания. При

достижении напряжениями σ_0 некоторого критического значения происходит потеря устойчивости системой, отслоившаяся часть покрытия изгибается, а центр отслоения смещается относительно своего первоначального положения на величину δ . Геометрия рассматриваемой области в недеформированном и деформированном состоянии и связанная с ней система координат представлены на Рисунке 4.3. Задача состоит в отыскании критического значения напряжений σ_0 , при которых происходит потеря устойчивости.

Поставленная задача решалась в работе [95] методом конечных элементов (МКЭ). При этом величина критического напряжения σ^{cr} представлялась как произведение соответствующей величины, рассчитанной для пластины в условиях жесткой заделки (σ_0^{cr}), на некоторый коэффициент γ_σ , вычисляемый методом конечных элементов

$$\sigma^{cr} = \sigma_0^{cr} \gamma_\sigma \quad (4.2.1)$$

Величина σ_0^{cr} может быть посчитана элементарными методами. Так для жестко заземленной пластины длины $2b_0$ критическое напряжение определяется как [215]:

$$\sigma_0^{cr} = \frac{\pi^2 h^2 E^{(2)}}{12b_0^2}, \quad E^{(2)} = \frac{E_0^{(2)}}{1 - \nu_0^{(2)2}} \quad (4.2.2)$$

Далее, оценка для коэффициента γ_σ будет получена на основе элементарной теории пластин; рассмотрены два варианта постановки задачи: 1) участок отслоения рассматривается как пластина с граничными условиями типа упругой заделки 2) для участков примыкания слоя к подложке принимается условие упругого основания.

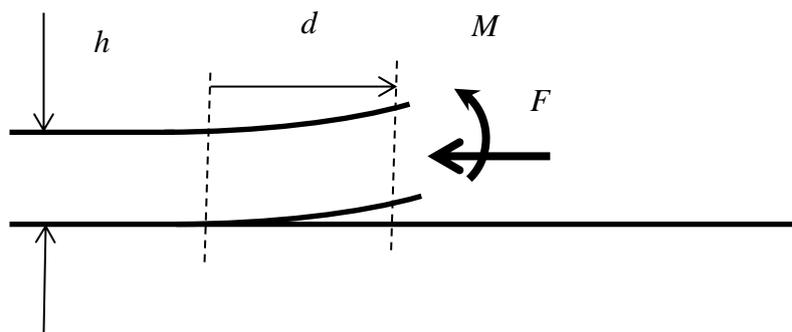
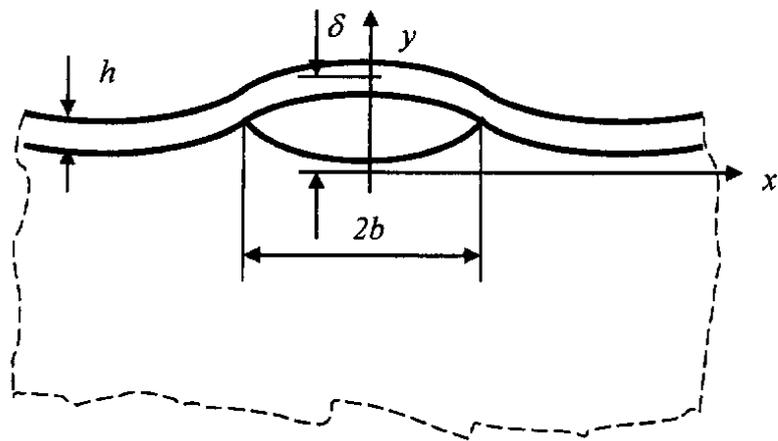
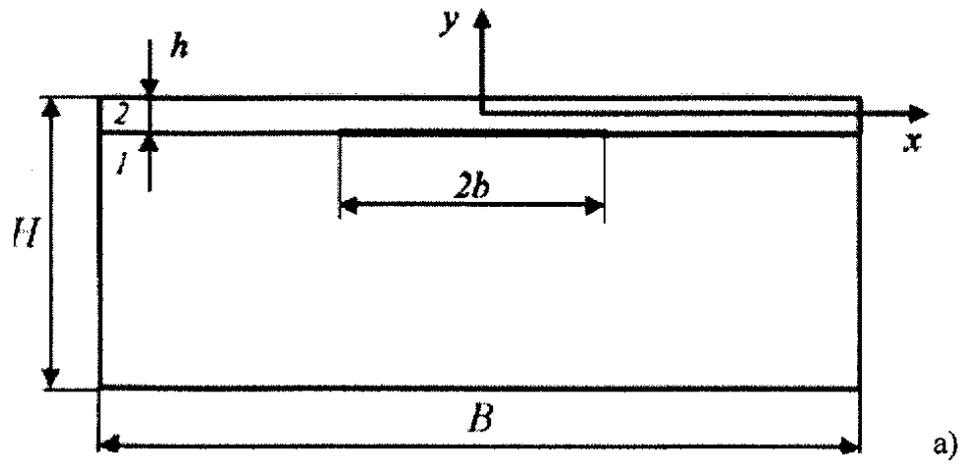


Рисунок 4.3. Геометрия области в задаче об отслоении а) до деформирования; б) после деформирования в) область вблизи вершины трещины отслоения; 1 – полуплоскость, 2 - полоса.

4.2.2. Модель простой упругой заделки

Рассмотрим модель, в рамках которой участок отслоения рассматривается как пластина с граничными условиями типа упругой заделки (упругого шарнира). При этом остальная часть пластины не рассматривается. Итак, для участка $|x| < b$ прогиб пластины, представляющей слой, определяется из уравнения

$$E^{(2)} \frac{h^3}{12} u^{IV}(x) + \sigma h u''(x) = 0 \quad (4.2.3)$$

Здесь σ - сжимающее напряжение в сечении слоя, вообще говоря, отличное от σ_0 . Отличие σ от σ_0 есть следствие релаксации обусловленной искривлением участка пластины и, как следствие, изменением его длины. Общее решение уравнения (4.2.3), симметричное относительно оси $x = 0$, имеет вид

$$u_1(x) = A_1 \cos kx + A_2, \quad |x| < b \quad (4.2.4)$$

$$k = \sqrt{\frac{12\sigma^{cr}}{E^{(2)}h^2}} \quad (4.2.5)$$

Здесь константы A_i подлежат определению из граничных условий. В точке $x = b$ запишем условие упругой заделки

$$u_1'(x)|_{x=b} = dh u_1''(x)|_{x=b} \quad (4.2.6)$$

В силу симметрии относительно оси $x=0$ условие в точке $x=-b$ не используется. Здесь dh - есть коэффициент пропорциональности между углом наклона в заделке и второй производной от смещения пластины (пропорциональной, в свою очередь, действующему в данном сечении моменту); d - безразмерный коэффициент, который не может быть определен в рамках теории пластин. Появление в (4.2.6) толщины пластины h вызвано необходимостью согласования размерности: данный параметр является единственным параметром задачи соответствующей размерности (жесткость упругой заделки в данной теории не может зависеть от размера пластины b , поскольку эта величина является внешним параметром). Подробнее об обосновании моделей упругой заделки см. Приложение, а также [17, 2].

Подстановка значений производных прогиба (4.2.4) в граничное условие (4.2.6) дает

$$\tan kb + kb \frac{dh}{b} = 0 \quad (4.2.7)$$

Различные варианты для коэффициента упругой заделки d были получены в п. 2.4 и п. 3.11 (здесь и далее предполагается, что толщина подложки достаточно большая, чтобы можно было использовать формулы, полученные для подложки в виде полуплоскости). Полученные выражения отличаются несильно. Согласно более простому выражению (2.4.28) оно записывается в виде

$$d = d_0 \sqrt[3]{\eta};$$

$$\eta = \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}; \quad (4.2.8)$$

$$d_0 = 2^{2/3} 3^{-5/6} \approx 0.636$$

Здесь

$$E^{(i)} = \frac{E_0^{(i)}}{(1-\nu_0^{(i)})(1+\nu_0^{(i)})}, \quad i = 1, 2 \quad (4.2.9)$$

для изотропного основания. Для анизотропного основания следует пользоваться формулой, вытекающей из (2.4.4)

$$E^{(1)} = 2 \left\{ \beta_{22} \left[\beta_{66} + 2 \left(\beta_{12} + \sqrt{\beta_{11}\beta_{22}} \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.2.10)$$

где β_{ij} - компоненты матрицы податливости [206].

Для условий жесткой заделки

$$k_0 = \frac{\pi}{b} \quad (4.2.11)$$

С учетом (4.2.5) и (4.2.1), получаем уравнение для определения γ_σ

$$\operatorname{tg} \pi \sqrt{\gamma_\sigma} + d_0 \beta \pi \sqrt{\gamma_\sigma} = 0 \quad (4.2.12)$$

Здесь

$$\beta = \frac{h}{b} \sqrt[3]{\eta} \quad (4.2.13)$$

Отсюда видно, что в рамках рассматриваемой модели отличие критического напряжения от напряжения, посчитанного из условий абсолютно жесткой заделки, определяется не по отдельности упругими и геометрическими параметрами модели, а их комбинацией – единым безразмерным параметром, названным β .

Зависимость γ_σ от β как решение уравнения (4.2.12) представлена на Рисунке 4.4 и Рисунке 4.5 (сплошная линия). Как и следовало ожидать для двух предельных случаев, жесткой заделки ($\beta \rightarrow 0$) и опоры ($\beta \rightarrow \infty$), значения γ_σ стремятся к значениям, соответствующим классическим решениям, $\gamma_\sigma = 1$ и $\gamma_\sigma = 1/4$, соответственно.

4.2.3. Модель обобщенной упругой заделки

Согласно модели обобщенной упругой заделки (с нерасширенной матрицей) продольное смещение u_0 и угол поворота $\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0}$ балки (пластины) в точке заделки пропорциональны продольной силе F и изгибающему моменту M , действующим в точке заделки (4.1.4)

$$E^{(2)}u_0 = a_{11}F + a_{12}h^{-1}M$$

$$E^{(2)} \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = a_{21}h^{-1}F + a_{22}h^{-2}M$$

$$a_{12} = a_{21}$$

Для обоснования возможности использования решения для бесконечной полосы в качестве граничных условий для балки приведем следующие соображения. Вблизи обеих вершин трещин выделим по короткому сегменту отделившейся части покрытия длины d . Сила и момент, которые приходятся на единицу длины и действуют на края пленки, равны F и M , в показанном случае их величины считаются

положительными. Для любого достаточно большого d горизонтальное смещение и поворот свободного конца сегмента справа ($b - d < x < b$) удовлетворяют следующему условию:

$$u|_{x=b-d} - u|_{x=b} = \frac{Fd}{(\bar{E}_f h)} \quad (4.2.14)$$

$$\theta|_{x=b-d} - \theta|_{x=b} = \frac{12Md}{(\bar{E}_f h^3)}$$

которое, собственно, и оправдывает использование решения однородных задач для бесконечной полосы, скрепленной вдоль полубесконечного интервала с полуплоскостью, в качестве граничных условий в задачах об отслоениях конечной длины. Условия (4.2.14) приведены в работе [96] для $d > h/4$ без доказательства, видимо ввиду их очевидности. Справедливость соотношений (4.2.14) следует из возможности рассмотрения задачи о полосе, конечной (либо бесконечной) длины, нагруженной по торцу (торцам), как суперпозицию двух решений:

- решения о полосе, нагруженной вдоль торцов специальным образом распределенной нагрузкой с главным вектором и главным моментом, эквивалентным исходным, таким образом, чтобы данные распределения соответствовали решениям задачи о балке (пластине);
- решения о полосе, нагруженной вдоль торцов самоуравновешенной нагрузкой.

Решение первой задачи дает в точности сумму двух слагаемых, первое из которых определяется выражением (4.2.14), а второе представляет собой поправку на перерезывающую силу [215, 99], решение второй задачи – поле напряжений и смещений, убывающее от торцов по экспоненциальному закону (там же).

Данные рассуждения оправдывают рассмотрение сегмента отслоения как пластины, испытывающей равномерное растяжение и чистый изгиб, пропорционально силе F и моменту M , соответственно с эффективным смещением и поворотом в точке крепления $u|_{x=b}$ и $\theta|_{x=b}$.

Хотя, как показано в Приложении, условие простой упругой заделки является асимптотически верным, а вклад от других членов, определяемых (4.1.4) выходит за пределы линейной балочной теории, учет дополнительных членов может быть полезен для практических целей.

Непосредственное использование условий (4.1.4) для уравнения (4.2.3) невозможно ввиду присутствия неизвестной величины – продольной силы F . Ситуация, однако, может быть исправлена путем решения уравнения (4.2.3) совместно с уравнением для продольного растяжения, что и было проделано в [96], где для данных граничных условий было получено следующее уравнение (в выписанном ниже уравнении восстановлен пропущенный в [96] коэффициент b/h в знаменателе последнего члена).

$$\frac{12b}{\pi h \sqrt{\gamma_\sigma}} \operatorname{tg} \pi \sqrt{\gamma_\sigma} + a_{22} - \frac{a_{12}^2}{b/h + a_{11}} = 0 \quad (4.2.15)$$

Элементы матрицы упругих коэффициентов a_{ij} были посчитаны в [104, 96] численно. Асимптотические выражения для них получены в Главах 2 и 3.

Уравнение (4.2.15) отличается от уравнения (4.2.3) только наличием последнего члена, который обычно мал по сравнению с предпоследним. Тем не менее, его учет приводит к небольшому, но систематическому отклонению от результатов, получаемых из решения уравнения (4.2.3).

Существенным является еще и то, что при использовании уравнения (4.2.3) все параметры сворачиваются в единый безразмерный комплекс β , а при использовании уравнения (4.2.15) указанные малые отклонения уже зависят от отношения модулей и отношения длины отслоения к его толщине по отдельности.

В общем случае, в дополнение к продольной силе и моменту, в основании балки (пластины) моделирующей отслоение, может появляться

также поперечная (перерезывающая) сила N . Таким образом, граничные условия (4.1.4) обобщаются и приобретают вид (4.1.4)

$$E^{(2)}u_0 = a_{11}F + a_{12}h^{-1}M + a_{13}N$$

$$E^{(2)}\left.\frac{w}{dx}\right|_{x=0} = a_{21}h^{-1}F + a_{22}h^{-2}M + a_{23}h^{-1}N$$

(4.2.16)

$$E^{(2)}w_0 = a_{31}F + a_{32}h^{-1}M + a_{33}N$$

Здесь матрица a_{ij} может быть названа расширенной матрицей упругой заделки (коэффициенты, рассмотренные выше (3.11.1) получаются отсюда, если положить $h=1$). Хотя в исследуемом случае выпучивания отслоившегося от плоского основания вследствие потери устойчивости покрытия перерезывающая сила не возникает, рассмотрение расширенной матрицы упругих коэффициентов может быть полезно при решении других задач, например для решения задач об отслоении покрытий от криволинейных оснований (п.4.3), или задач об отдире покрытий прикладываемой внешней силой. Изменение геометрии отслоения и действующие силовые факторы, соответствующие модели обобщенной упругой заделки, представлены на Рисунке 4.4.

Выражения для a_{12} , a_{13} , a_{22} , a_{23} для модели отслоения полосы от полуплоскости на основании (3.11.1) примем в виде

$$a_{12} = \sqrt{3}$$

$$a_{22} = 12\delta$$

$$a_{13} = 1 + \sqrt{3}\delta$$

(4.2.17)

$$a_{23} = \frac{3}{2} + 6\delta^2$$

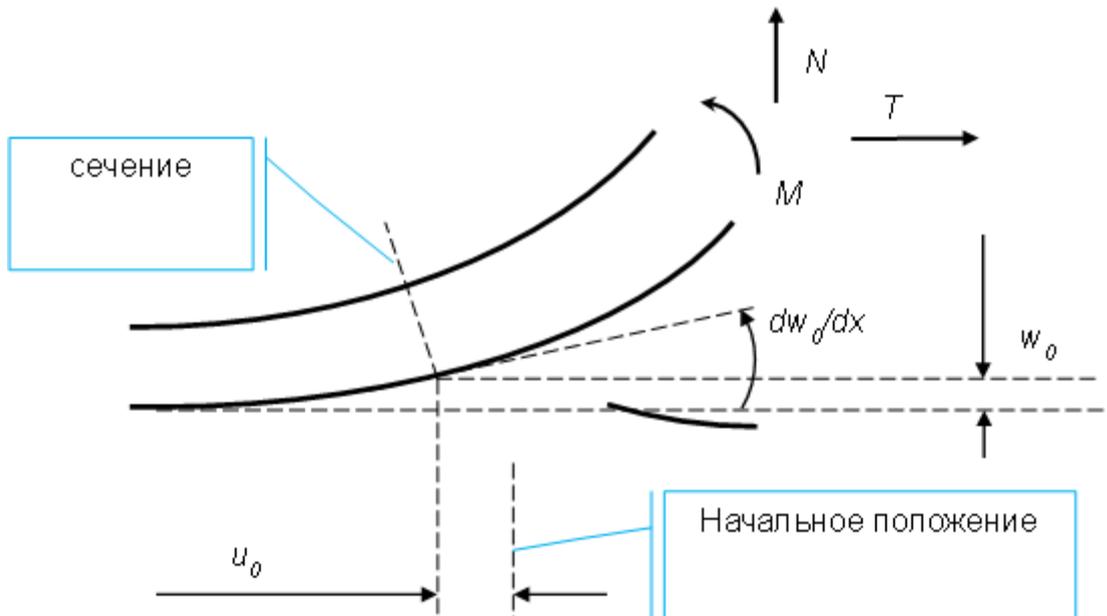


Рисунок 4.4. Обобщенная упругая заделка.

где δ определяется (3.3.13). С другой стороны, для модели отслоения балки от полуплоскости выражения для a_{22} , a_{23} согласно (2.4.28), (2.4.29) имеют вид

$$a_{22} = 12 \times 2^{2/3} 3^{-5/6} \eta^{1/3} \approx 12 \times 0.635 \eta^{1/3}$$

$$a_{23} = 2^{7/3} 3^{-2/3} \eta^{2/3} \approx 2.42 \eta^{1/3} \quad (4.2.18)$$

Согласно численным расчетам (Рисунок 3.5) величины a_{22} для больших η , посчитанные по обеим моделям практически совпадают. Аналогичная ситуация имеет место для a_{23} (Рисунок 3.6). Этот факт наводит на мысль сопоставить второе и четвертое выражения (4.2.17) и выражения (4.2.18) для получения приближенного выражения значения δ для жестких покрытий, т.е. для больших η

$$\delta = 2^{2/3} 3^{-5/6} \eta^{1/3} \approx 0.635 \eta^{1/3} \quad (4.2.19)$$

Отметим, что данное выражение остается справедливым как при сопоставлении значений a_{22} , так и при сопоставлении значений a_{23} . Подстановка данного выражения в (4.2.17) дает

$$\begin{aligned} a_{12} &= \sqrt{3} \\ a_{22} &= 12 \times 2^{2/3} 3^{-5/6} \eta^{1/3} \\ a_{13} &= 1 + \sqrt{3} \times 2^{2/3} 3^{-5/6} \eta^{1/3} \\ a_{23} &= \frac{3}{2} + 2^{7/3} 3^{-2/3} \eta^{2/3} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Так же были получены два варианта решений для коэффициента a_{11} . Однако область применимости полученных асимптотик для данной компоненты матрицы податливости не столь широка как для других и не покрывает всего диапазона практически важных случаев. Поэтому воспользуемся полученной интерполяционной формулой – первой из формул (4.1.5). Для a_{12} можно пользоваться уточненной формулой (4.1.6). Выражение для a_{33} легче всего получить из скалярной задачи о балке (2.4.32)

$$a_{33} = \frac{\eta}{6\pi} \left[\frac{1}{3} + \gamma + \frac{8\sqrt{3}\pi}{27} + \ln \left(\sqrt[3]{\frac{6b}{\eta h}} \right) \right] \quad (4.2.21)$$

Таким образом, получены все коэффициенты расширенной матрицы податливости.

Подстановка первой из формул (4.1.5), определяющих a_{11} , и формул (4.1.6) и (4.2.20), определяющих a_{12} и a_{22} , в уравнение (4.2.15) дает

$$\tan \pi \sqrt{\gamma_\sigma} + \pi \sqrt{\gamma_\sigma} d_0 \beta \left[1 - \frac{\left[\sqrt{3} + 0.27 \left(\frac{h}{b} \eta \right)^{2/3} \right]^2}{6d_0 \left(2\beta^{-1} \eta^{2/3} + \eta^{5/6} + 3\beta^{-1/4} \eta^{7/6} \right)} \right] = 0 \quad (4.2.22)$$

что является аналогом зависимости (4.2.12). Здесь β по-прежнему определяется выражением (4.2.13).

Зависимость γ_σ от β как решение уравнения (4.2.22) представлена на Рисунке 4.5.

4.2.4. Модель пластины на упругом основании

Использование модели пластины на упругом основании является распространенным подходом для решения задач о взаимодействии жесткого слоя с более мягкой подложкой.

Элементарное аналитическое решение поставленной задачи получено в рамках классической теории тонких пластин следующим образом. Прогиб пластины, представляющей слой, определяется из уравнения

$$E^* \frac{h^3}{12} w^{IV}(x) + \sigma(x) h w''(x) + g w(x) = 0 \quad (4.2.23)$$

Здесь g - эффективная жесткость упругого основания; $\sigma(x)$ - сжимающее напряжение в сечении слоя, вообще говоря, отличное от σ_0 . Отличие σ от σ_0 есть следствие релаксации, обусловленной искривлением участка пластины и, как следствие, изменением его длины. Для участка $-b < y < b$ $g = 0$, $\sigma(x) = \sigma^{cr} = const$ общее решение уравнения (4.2.23) имеет вид (4.2.4), в котором константы A_i подлежат определению из граничных условий.

Для участков контакта прогиб определяется из решения задачи о полуплоскости с заданным распределением нормальных смещений. При этом согласно (2.4.47) величина g оказывается существенно зависящей от характерных расстояний изменения граничных условий.

Заметим, что постановка задачи о потере устойчивости рассматриваемой структуры имеет наибольший смысл при напряжениях, не превышающих напряжения глобальной потери устойчивости подобной структуры при отсутствии отслоений. Поэтому, в первом приближении, для участков $|x| > b$ пренебрежем вторым членом в уравнении (4.2.23), связанным с действием продольных напряжений (влияние соответствующих поправок будет рассмотрено ниже). В силу симметрии задачи относительно оси ординат, рассмотрим только область $x > b$. Общее решение уравнения (4.2.23) не возрастающее на бесконечности при этом имеет вид

$$w_2(x) = A_3 e^{-\alpha(x-b)} \cos \alpha(x-b) + A_4 e^{-\alpha(x-b)} \sin \alpha(x-b), \quad x > b \quad (4.2.24)$$

$$4\alpha^4 = \frac{12g}{E^{(2)}h^3} \quad (4.2.25)$$

Константы A_i в выражениях (4.2.4) и (4.2.24) находятся из условий сопряжения смещения и его производных в точке $x = b$

$$w_1(b) = w_2(b)$$

$$w_1'(x)|_{x=b} = w_2'(x)|_{x=b}$$

$$w_1''(x)|_{x=b} = w_2''(x)|_{x=b}$$

$$w_1'''(x)|_{x=b} = w_2'''(x)|_{x=b}$$

(4.2.26)

Подстановка значений прогиба и его производных, выраженных из общих решений (4.2.4) и (4.2.24) в граничные условия (4.2.26), дает систему четырех однородных линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных A_i , нетривиальное решение которой существует при равенстве нулю определителя данной системы. После упрощения, условие равенства нулю определителя системы (4.2.26) принимает вид

$$\tan kb + \frac{2\alpha k}{2\alpha^2 - k^2} = 0 \quad (4.2.27)$$

Данное уравнение после подстановки в него (4.2.5) и (4.2.25) есть уравнение для определения критического напряжения потери устойчивости. Поскольку критическое напряжение соответствует началу потери устойчивости, т.е. началу искривления пластины в месте отслоения, текущее напряжение σ равно начальному напряжению σ_0 . С учетом (4.2.11), а также уравнений (4.2.5) и (4.2.25), и (4.2.1) уравнение (4.2.27) записывается как

$$\tan \pi \sqrt{\gamma_\sigma} + \frac{\pi \sqrt{\gamma_\sigma} 2\alpha b}{2(\alpha b)^2 - \pi^2 \gamma_\sigma} = 0 \quad (4.2.28)$$

Выражение для эффективной жесткости подложки (2.4.47) было найдено в предположении периодичности нагрузки. Однако выражение для смещения (4.2.24) содержит как периодическую, так и непериодическую

составляющие. Из соображений размерности длина периодического множителя (4.2.24) и длина волны λ связаны. Положив длину волны в (2.4.47) равной длине волны периодического множителя (4.2.24), получим выражение (2.4.48), которое для изотропных пластин примет вид

$$\lambda = 2\pi / \sqrt[4]{3g / E^{(2)}h^3} \quad (4.2.29)$$

Далее получаем из (4.2.25) следующее уравнение для α

$$4\alpha^4 = \frac{12E^{(1)}}{E^{(2)}h^3} \frac{\pi}{\lambda} = \frac{12E^{(1)}}{E^{(2)}h^3} \frac{\alpha}{2} \quad (4.2.30)$$

Откуда

$$\alpha = \frac{1}{h} \sqrt[3]{\frac{3E^{(1)}}{2E^{(2)}}}; \quad (4.2.31)$$

С учетом (4.2.31) единственный параметр $1/\alpha b$, входящий в формулу (4.2.28) представляется в виде

$$\frac{1}{\alpha b} = d_1 \frac{h}{b} \sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}} = d_1 \beta; \quad (4.2.32)$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.874$$

Следует обратить внимание, что вид полученной зависимости и полученный численный коэффициент в точности совпадают с коэффициентом пропорциональности между углом поворота пластины в точке заделки и действующим в данной точке изгибающим моментом (2.4.49)

Сравнение решения (4.2.28) с решением (4.2.12) при стремлении β к нулю, что соответствует увеличению жесткости подложек, показывает, что посчитанное в рамках рассматриваемой модели значение параметра $1/\alpha b$ несколько завышено (совпадение наблюдалось бы при $d_1 = d_0$). Сравнение с результатами численных расчетов (см. ниже) свидетельствуют о том же.

Для более точного совпадения значений коэффициентов d_1, d_0 можно в соотношение для эффективной длины упругой волны ввести поправочный коэффициент k_λ , (2.4.50). Тогда согласно (2.4.51) получаем

$$\frac{1}{\alpha b} = d_2 \frac{h}{b} \sqrt[3]{\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}} = d_2 \beta; \quad (4.2.33)$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3} k_\lambda^{1/3}}$$

Данное выражение может быть получено также непосредственно из (2.4.51) после подстановки в него выражения для первой и второй производной смещения.

Для совпадения параметров $d_2 = d_0 \approx 0.636$ согласно (2.4.52) необходимо положить $k_\lambda = 2/3^{3/2} \approx 0.385$.

Подстановка (4.2.33) в (4.2.28) дает

$$\tan \pi \sqrt{\gamma_\sigma} + \frac{\pi \sqrt{\gamma_\sigma} d_2 \beta}{1 - \pi^2 \gamma_\sigma (d_2 \beta)^2 / 2} = 0 \quad (4.2.34)$$

Зависимость γ_σ от β при условии $d_2 = d_0$ представлена на Рисунке 4.5 (пунктирная линия, длинные штрихи). Данная зависимость не отличается качественно от предыдущей (4.2.12).

4.2.5. Модифицированная модель пластины на упругом основании с учетом сжимающих напряжений

Полученное решение может быть модифицировано с учетом влияния сжимающих напряжений на прогиб пластины в областях ее контакта с подложкой. Так, полагая для областей контакта $|x| > b$ в уравнении (4.2.23) действующее напряжение равно приложенному $\sigma = \sigma_0$, получаем вместо решения (4.2.24) решение вида

$$w_2(x) = A_3 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 - k^2}(x-b)} \cos \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 - k^2}(x-b) + A_4 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 - k^2}(x-b)} \sin \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 - k^2}(x-b) \quad (4.2.35)$$

$$x > b$$

После чего, подставляя в граничные условия (4.2.26) значение $w_2(x)$, соответствующее (4.2.35), после упрощения получаем вместо (4.2.28) следующее условие существования нетривиального решения

$$\tan \pi\sqrt{\gamma_\sigma} + \pi\sqrt{\gamma_\sigma} \frac{\sqrt{4(\alpha b)^2 - \pi^2\gamma_\sigma}}{2(\alpha b)^2 - \pi^2\gamma_\sigma} = 0 \quad (4.2.36)$$

Данное решение не отличается качественно от решения (4.2.28). Подстановка (4.2.33) в (4.2.36) дает

$$\tan \pi\sqrt{\gamma_\sigma} + \pi\sqrt{\gamma_\sigma} d_2\beta \frac{\sqrt{4 - \pi^2\gamma_\sigma (d_2\beta)^2}}{2 - \pi^2\gamma_\sigma (d_2\beta)^2} = 0 \quad (4.2.37)$$

Зависимость γ_σ от β при условии $d_2 = d_0$ для данной модели представлена на Рисунке 4.5. (пунктирная линия, короткие штрихи).

4.2.6. Асимптотические оценки для критического напряжения

Для случая малого отличия γ_σ от единицы, что соответствует малым β , асимптотическое решение уравнения (4.2.12) можно получить, осуществив подстановку

$$\sqrt{\gamma_\sigma} = 1 + a_1 x^m + a_2 x^n + \dots \quad \text{где } x = d_0 \beta \quad (4.2.38)$$

После чего разложением по степеням x и приравниванием нулю коэффициентов при одинаковых степенях x находятся коэффициенты a_1, a_2 , а также степени m, n для которых решение существует. Соответствующее решение имеет вид

$$\gamma_\sigma = 1 - 2x + 3x^2 + O(x^3) \quad (4.2.39)$$

Окончательное выражение для критического напряжения при этом обретает вид

$$\sigma^{cr} = \frac{\pi^2 h^2 E^{(2)}}{12b^2} \left(1 - 2d_0 \beta + 3(d_0 \beta)^2 + \dots \right) \quad (4.2.40)$$

Разложение для другого крайнего случая – малого отличия γ_σ от $1/4$, соответствующего большим β – можно получить, осуществив подстановку

$$\sqrt{\gamma_\sigma} = 1/2 + a_1 y^m + a_2 y^n + a_3 y^p + \dots \quad \text{где } y = \frac{1}{d_0 \beta} \quad (4.2.41)$$

После чего разложением по степеням y и приравниванием нулю коэффициентов при одинаковых степенях y находятся коэффициенты a_i , а также степени m, n, \dots , при которых решение существует. Соответствующее решение имеет вид

$$\gamma_\sigma = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{d_0 \beta} - \frac{4}{\pi^4} \frac{1}{(d_0 \beta)^2} + \left(\frac{32}{\pi^6} - \frac{8}{3\pi^4} \right) \frac{1}{(d_0 \beta)^3} + \dots \quad (4.2.42)$$

Окончательное выражение для критического напряжения при этом приобретает вид

$$\sigma^{cr} = \frac{\pi^2 h^2 E^{(2)}}{12b^2} \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{d_0 \beta} - \frac{4}{\pi^4} \frac{1}{(d_0 \beta)^2} + \left(\frac{32}{\pi^6} - \frac{8}{3\pi^4} \right) \frac{1}{(d_0 \beta)^3} + \dots \right] \quad (4.2.43)$$

Следует иметь в виду, что разложение (4.2.40) формально справедливо для $\beta \ll 1$, т.е. согласно (4.2.13) для $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \ll \left(\frac{b}{h} \right)^3$ - не слишком мягких подложек. Разложение (4.2.43) формально справедливо для $\beta \gg 1$, т.е. согласно (4.2.13) для $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \gg \left(\frac{b}{h} \right)^3$. Однако следует помнить, что применение пластин оправдано для $\frac{b}{h} \gg 1$. Т.е. для справедливости разложения (4.2.43) должно выполняться условие $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} \gg \left(\frac{b}{h} \right)^3 \gg 1$ - подложка должна быть чрезвычайно мягкой.

Аналогичное разложение получается и для γ_σ , подчиняющегося уравнению (4.2.22). Однако ввиду эмпирического характера уравнения (4.1.5)

получаемое разложение уже не может рассматриваться как строгое асимптотическое. Тем не менее, подставляя (4.2.38) в (4.2.22) и раскладывая в ряд по малым β , находим коэффициенты a_k , а также показатели m, n, p, \dots для которых решение существует. Решение с точностью до $o(\beta^2)$, т.е. до той степени, до которой оно ещё сохраняет асимптотический, а не приближенный характер, имеет вид

$$\sigma^{cr} = \frac{\pi^2 h^2 E^{(2)}}{12b^2} \left(1 - 2d_0\beta + \left(3d_0^2 + \frac{1}{2\eta^{2/3}} \right) \beta^2 + \dots \right) \quad (4.2.44)$$

Результаты расчетов, согласно данной формуле представлены на Рисунке 4.6.

4.2.7. Численное моделирование

Также были проделаны расчеты методом конечных элементов (МКЭ). МКЭ расчеты проводились на регулярных сетках, разбивающих половину расчетной области (в силу симметрии) на 19600 8-узловых прямоугольных элементов (всего 59401 узлов) со сгущением сетки вблизи точки отслоения. Покрытие моделировалось 20 рядами элементов. Ширина расчетной области выбрана превосходящей длину отслоения в 20 раз, высота расчетной области выбрана превышающей толщину покрытия в 100-400 раз. Для каждого отношения толщины покрытия к длине отслоения (1/20, 1/40, 1/80) и каждого отношения модуля подложки к модулю покрытия (1/1, 1/100) в постановке больших деформаций проводился пошаговый расчет зависимости величины

выпучивания от температуры (непосредственно связанной со сжимающими напряжениями в слое) следующим образом.

На первом шаге расчета с целью выведения системы из положения равновесия к отслоившемуся участку покрытия прикладывается нормальное напряжение, играющее роль возмущения.

На втором шаге задается температура, создающая внутреннее напряжение заведомо превосходящее критическое. При этом благодаря наличию возмущения, система переходит в положение, соответствующее потере устойчивости.

На третьем шаге возмущающее напряжение снимается, но поскольку система уже прежде потеряла устойчивость и перешла в состояние устойчивого равновесия, снятие возмущающих напряжений не в состоянии вернуть систему в невозмущенное состояние.

Наконец на четвертом шаге осуществляется пошаговое охлаждение, при котором собственно и вычисляется зависимость величины выпучивания от температуры.

Для каждой комбинации параметров определялась величина критического напряжения описанным выше образом. Полученные в ходе МКЭ моделирования результаты (Рисунок 4.5) подтверждают полученные ранее аналитические результаты.

4.2.8. Результаты и обсуждение

Зависимость γ_σ от β представлена на Рисунках 4.5 и 4.6 для различных рассмотренных моделей. Как и следовало ожидать, для двух предельных случаев, жесткой заделки ($\beta \rightarrow 0$) и опоры ($\beta \rightarrow \infty$), значения γ_σ стремятся к значениям, соответствующим классическим решениям, $\gamma_\sigma = 1$ и $\gamma_\sigma = 1/4$, соответственно.

Следует подчеркнуть, что для модели обобщенной упругой заделки при достаточно больших относительных жесткостях покрытий $\eta \geq 10$ соответствующие линии не отличимы от линии, соответствующей решению согласно модели простой упругой заделки (4.2.22). Следовательно, для определения критического напряжения потери устойчивости модель обобщенной упругой заделки может быть полезна только при рассмотрении достаточно мягких покрытий на достаточно жестких основаниях.

Модели типа «пластина на упругом основании» дают качественно ту же картину, что и модель упругой заделки. Из представленных графиков видно, что оба варианта модели не дают улучшения по сравнению с вариантом упругой заделки: сравнение вариантов свидетельствует в пользу модели упругой заделки.

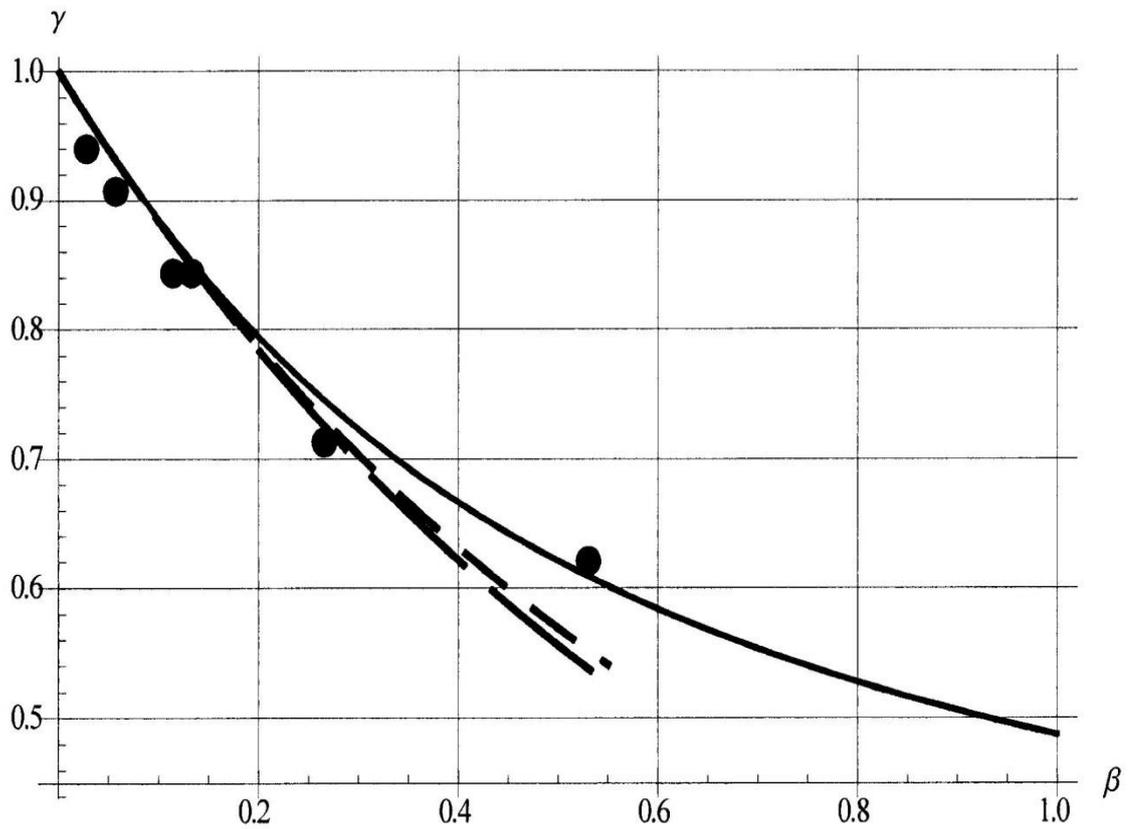


Рисунок 4.5. Зависимость γ_σ от β при $d_2 = d_0$. Сплошная линия – решение, согласно модели о пластине с граничными условиями типа «упругая заделка»; пунктирная линия (длинные штрихи) – согласно модели «пластина на упругом основании без учета влияния сжимающих напряжений»; пунктирная линия (короткие штрихи) – то же, с учетом влияния сжимающих напряжений; точками показаны результаты численных расчетов.

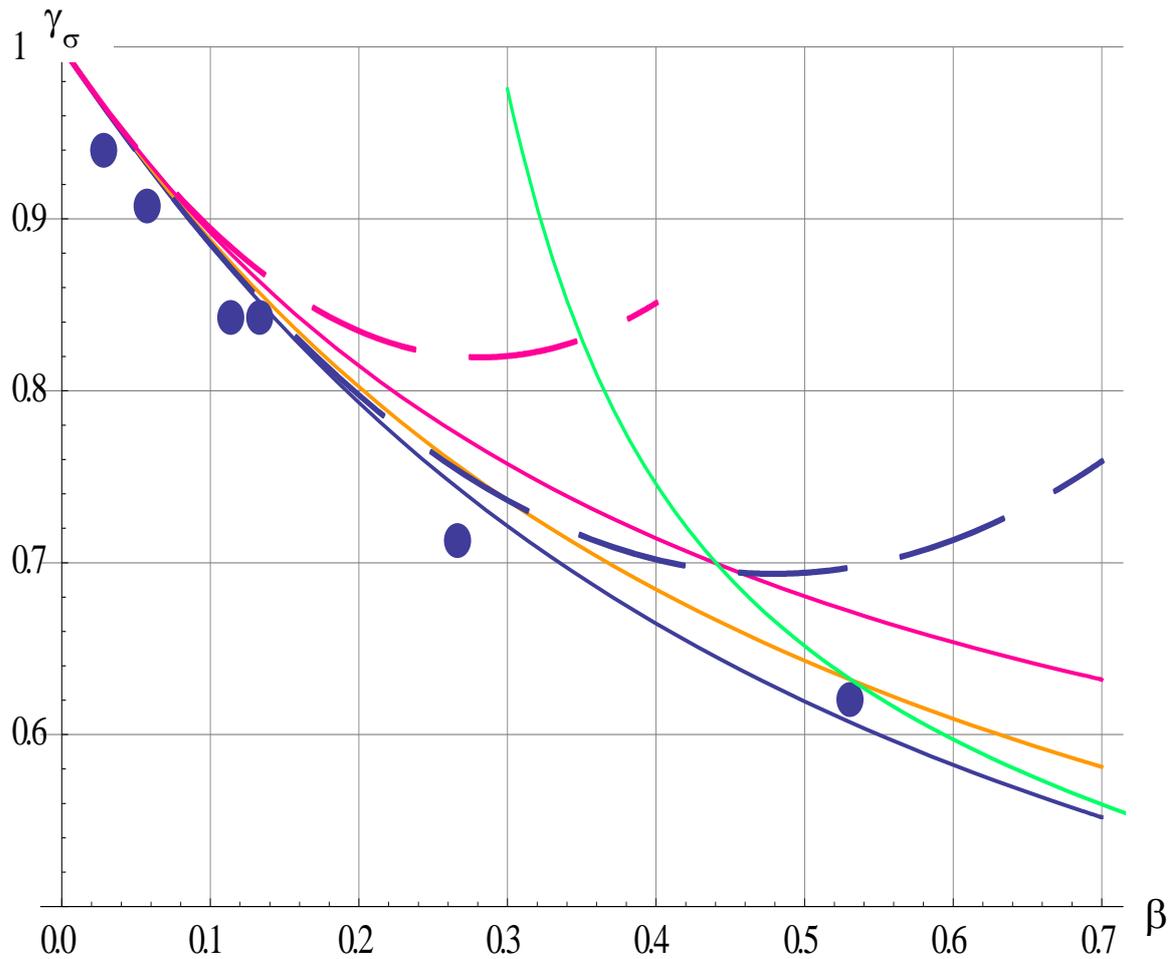


Рисунок 4.6. Зависимость γ_σ от β при $d_2 = d_0$. Сплошная синяя линия – решение, согласно модели о пластине с граничными условиями типа «упругая заделка»; сплошная желтая линия – согласно модели «обобщенная упругая заделка» для $\eta = 1$; сплошная красная линия – согласно модели «обобщенная упругая заделка» для $\eta = 1/3$; пунктирная синяя линия – два члена асимптотики (4.2.44) согласно модели «обобщенная упругая заделка» для $\eta = 10$; пунктирная красная линия – два члена асимптотики (4.2.44) согласно модели «обобщенная упругая заделка» для $\eta = 1/3$; зеленая линия – асимптотика для $\beta \gg 1$ (4.2.43); точками показаны результаты численных расчетов.

4.3. Влияние кривизны и податливости основания на скорость высвобождения энергии

4.3.1. Вычисление прогиба покрытия, имеющего начальную кривизну по одной оси при условии упругой заделки

Рассмотрим деформирование покрытия, представляющего собой в недеформированном состоянии тонкую цилиндрическую пленку радиуса R и толщины h . Смещение в центре поверхности имеет тангенциальные компоненты $u_a(x_1, x_2)$ и нормальные компоненты $w(x_1, x_2)$, где $x_1 = x$ – осевая координата и $x_2 = y$ – окружная координата. Дифференциальное уравнение изгибаемой по образующей цилиндрической поверхности в случае малой начальной кривизны имеет вид (совпадающий с видом уравнения Муштари-Доннела-Власова – дифференциального уравнения изогнутой оси балки в случае малой начальной кривизны) [216, 217]:

$$Dw'''' + Tw'' - T/R = 0, \quad (4.3.1)$$

с дополнительным условием независимости T от y .

$$T' = 0, \quad (4.3.2)$$

Здесь штрих обозначает производную по координате: $(\quad)' = d(\quad)/dy$; T – величина сжимающей силы вдоль оси в участке покрытия после отслоения; $1/R$ – кривизна подложки; R – радиус кривизны.

Два из четырех граничных условий следуют из симметрии задачи:

$$w'(0) = 0, \quad w'''(0) = 0, \quad (4.3.3)$$

Здесь b – полуширина выпучивания.

Еще два граничных условия соответствуют условию обобщенной упругой заделки, т.е. пропорциональности продольного и нормального смещения и угла поворота в точке заделки действующим в этой точке продольной и поперечной силам и изгибающему моменту (4.2.16).

$$E^{(2)} \begin{pmatrix} u(b) \\ -hw'(b) \\ w(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ h^{-1}M \\ N \end{pmatrix} \quad (4.3.4)$$

Здесь F, N, M - эффективные продольная и поперечная (перерезывающая) силы и изгибающий момент, действующие в точке заделки; a_{ij} - расширенная матрица коэффициентов упругой заделки.

Следует подчеркнуть, что F не равна T , а определяется разностью усилия, после отслоения T и усилия, действовавшего до образования отслоения σh

$$\sigma h - T = -F \quad (4.3.5)$$

Здесь σ - сжимающие напряжения, действовавшие в покрытии до отслоения $\sigma > 0, T > 0, F < 0$.

Более строго, учитывая наличие кривизны изгибаемой поверхности, следовало записать (Рисунок 4.7)

$$\sigma h - T \cos \theta = -F \quad (4.3.6)$$

Однако с учетом того, что

$$\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta = \frac{b}{R} \ll 1 \quad (4.3.7)$$

косинус в выражении (4.3.6) мало отличается от единицы

$\left(\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{R} \right)^2 + \dots \right)$, что и оправдывает применение формулы (4.3.5).

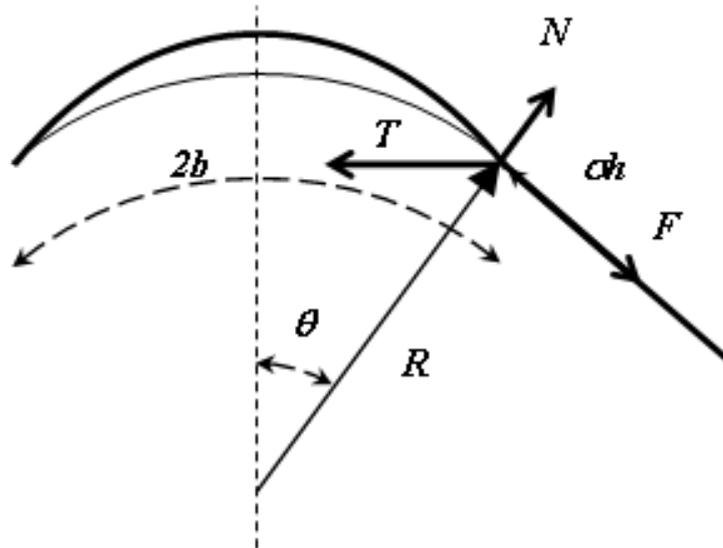


Рисунок 4.7. Отслоение покрытия от криволинейного основания; конфигурация.

Под силой N следует также понимать разницу между проекцией усилия T на нормаль к поверхности и усилием, действовавшим до отслоения, равным $\sigma h \frac{b}{R}$ (справедливость данного выражения следует из уравнения равновесия в цилиндрических координатах)

$$N = T \sin \theta - \sigma h \sin \theta = -F \frac{b}{R} \quad (4.3.8)$$

С учетом выражения для перерезывающей силы (4.3.8) граничные условия (4.3.4) можно записать в виде

$$E^{(2)} \begin{pmatrix} u(b) \\ -hw'(b) \\ w(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{13} \frac{b}{R} & a_{12} \\ a_{12} - a_{23} \frac{b}{R} & a_{22} \\ a_{13} - a_{33} \frac{b}{R} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ h^{-1}M \end{pmatrix} \quad (4.3.9)$$

Принимая данную модель, два оставшихся граничных условия для уравнения (4.3.1) запишем в виде:

$$w(b) = w_b,$$

$$w''(b) = M / D,$$

$$D = \frac{E_0^{(2)} h^3}{12(1 - \nu_0^{(2)2})} \quad (4.3.10)$$

Здесь D - изгибная жесткость покрытия; E_0 и ν_0 - модуль Юнга и коэффициент Пуассона пленки, соответственно. Заметим, что изгибающий момент M и смещение в точке заделки w_b здесь еще не определены.

Решение уравнения (4.3.1) с граничными условиями (4.3.3), (4.3.10) есть:

$$w(y) = w_b + \frac{y^2 - b^2}{2R} + \left(\frac{M}{T} - \frac{D}{RT} \right) \left(1 - \frac{\cos(\lambda y / b)}{\cos \lambda} \right) \quad (4.3.11)$$

Здесь λ определяется выражением

$$\lambda = b \sqrt{\frac{T}{D}}, \quad (4.3.12)$$

Прогиб в центре выпучивания:

$$w(y) = w_b - \frac{b^2}{2R} + \left(\frac{M}{T} - \frac{D}{RT} \right) \left(1 - \frac{1}{\cos \lambda} \right) \quad (4.3.13)$$

В уравнении (4.3.11) M, T, w_b по-прежнему еще не определены (также не определена λ , которая выражается через T). Для их определения необходимы три условия. Используем связь между деформациями и смещениями для слабоизогнутой балки (например, [216, 217])

$$\varepsilon_{yy} = \frac{du}{dy} + \frac{w}{R} + \frac{w'^2}{2} \quad (4.3.14)$$

и закон Гука для добавочных напряжений:

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{F}{E^{(2)} h} = \frac{-T + \sigma h}{E^{(2)} h}, \quad E^{(2)} = \frac{E_0^{(2)}}{1 - \nu_0^{(2) 2}} \quad (4.3.15)$$

Комбинация (4.3.14)-(4.3.15) дает:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{F}{E^{(2)} h} - \frac{w}{R} - \frac{w'^2}{2} \quad (4.3.16)$$

Интегрирование данного выражения от 0 до b дает разность тангенциального смещения в точках b и 0. Поскольку в силу симметрии тангенциальное смещение в нуле равно нулю

$$u(0) = 0,$$

то:

$$u_b = -\frac{F}{E^{(2)} h} b - \int_0^b \left(\frac{w}{R} + \frac{w'^2}{2} \right) dy \quad (4.3.17)$$

После подстановки сюда (4.3.13) и интегрирования, получаем:

$$u_b = -w_b \frac{b}{R} - \frac{F}{E^{(2)}} \frac{b}{h} - \frac{1}{\cos^2 \lambda} \left[-\frac{b^3(1 + \cos 2\lambda)}{12R^2} + \frac{(D - MR)^2}{8R^2 T^2 b} \lambda(2\lambda - \sin 2\lambda) \right] \quad (4.3.18)$$

Для удобства дальнейшего анализа введем безразмерные величины:

$$f = F / \sigma h \quad (4.3.19)$$

$$n = N / \sigma h \quad (4.3.20)$$

$$m = M / \sigma h^2 \quad (4.3.21)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^{(2)}} \quad (4.3.22)$$

откуда с учетом (4.3.5):

$$T = (f + 1) \sigma h \quad (4.3.23)$$

Также удобно выразить λ через безразмерные параметры

$$\lambda = \pi \eta_b \sqrt{1 + f} \quad , \quad (4.3.24)$$

Здесь η_b - отношение полуширины отслоения, к критической полуширине, соответствующей потере устойчивости отслоения от прямолинейной границы в предположении граничных условий типа жесткой заделки

$$\eta_b = b / b_0 \quad , \quad (4.3.25)$$

$$b_0 = h \frac{\pi}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{E^{(2)}}{\sigma}} \quad (4.3.26)$$

В терминах определенных таким образом безразмерных величин выражение (4.3.18) запишется следующим образом:

$$\frac{u_b}{h} = -\frac{w_b}{h} \frac{b}{R} - f \varepsilon \frac{b}{h} + \frac{1}{\cos^2 \lambda} \left[-\frac{b^2}{R^2} \frac{b}{h} \frac{(1 + \cos 2\lambda)}{12} + \frac{(D - MR)^2}{8R^2 T^2 b h} \lambda (2\lambda - \sin 2\lambda) \right] \quad (4.3.27)$$

Единственный коэффициент в формуле (4.3.27), зависящий от размерных параметров, выражается через безразмерные параметры следующим образом:

$$\frac{(D - MR)^2}{R^2 T^2 b h} = \left(\frac{b}{R} \right)^2 \left(\frac{b}{h} \right) \frac{1}{\lambda^4} - \frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{b}{R} \right) \frac{m}{1 + f} + \frac{m^2}{(1 + f)^2} \left(\frac{h}{b} \right) \quad (4.3.28)$$

Подстановка (4.3.27), (4.3.28) в первое из граничных условий (4.3.4) дает

$$\begin{aligned} & \frac{w_b}{h} \frac{b}{R} + \left(\frac{b_0}{h} \eta_b + a_{11} - a_{13} \frac{b}{R} \right) f \varepsilon + a_{12} m \varepsilon - \frac{1}{6} \left(\frac{b_0}{R} \right)^2 \frac{b_0}{h} \eta_b^3 + \\ & \left[\left(\frac{b_0}{R} \right)^2 \frac{b_0}{h} \frac{\eta_b^3}{\lambda^4} - \frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{b_0}{R} \right) \eta_b \frac{m}{1 + f} + \frac{m^2}{(1 + f)^2} \frac{b_0}{h} \eta_b \right] \frac{\lambda (2\lambda - \sin 2\lambda)}{8 \cos^2 \lambda} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

При $\frac{b}{R} \rightarrow 0$ последнее выражение сводится к следующему

$$\begin{aligned} & \frac{w_b}{h} \frac{b}{R} + \left(\frac{b_0}{h} \eta_b + a_{11} - a_{13} \frac{b}{R} \right) f \varepsilon + \\ & a_{12} m \varepsilon + \frac{1}{\cos^2 \lambda} \frac{\lambda (2\lambda - \sin 2\lambda)}{8 \eta_b} \frac{m^2}{(1 + f)^2} \frac{h}{b_0} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Второе уравнение получим из второго условия (4.3.4):

$$-\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} = - \left[\frac{b}{R} + \frac{MR - D}{R \sqrt{DT}} \operatorname{tg} \lambda \right] = \left(a_{12} - a_{23} \frac{b}{R} \right) f \varepsilon + a_{22} m \varepsilon \quad (4.3.31)$$

Данное уравнение преобразуем к виду:

$$-\frac{b_0}{R}\eta_b + \left[\frac{b_0}{R} \frac{\eta_b}{\lambda} - \frac{m}{1+f} \frac{h}{b_0} \frac{\lambda}{\eta_b} \right] \operatorname{tg} \lambda = \left(a_{12} - a_{23} \frac{b}{R} \right) f \varepsilon + a_{22} m \varepsilon \quad (4.3.32)$$

Третье условие получаем из третьего уравнения (4.3.9)

$$E w_b = \left(a_{13} - a_{33} \frac{b}{R} \right) F + a_{23} h^{-1} M \quad (4.3.33)$$

Перейдя к безразмерным переменным, получаем

$$\frac{w_b}{h} = \left(a_{13} - a_{33} \frac{b}{R} \right) f \varepsilon + a_{23} m \varepsilon \quad (4.3.34)$$

Уравнения (4.3.29), (4.3.32) и (4.3.34) образуют систему для определения трех переменных m , f и w_b .

4.3.2. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль торца (усредненной по изогнутому фронту)

Рассмотрим отслоение, вытянутое вдоль образующей цилиндра (Рисунок 4.8). Для такого отслоения возможно распространение как вдоль прямолинейного, так и вдоль криволинейного фронтов. Отслоения, вытянутые вдоль диаметра, менее энергетически выгодны [98] и здесь не рассматриваются.

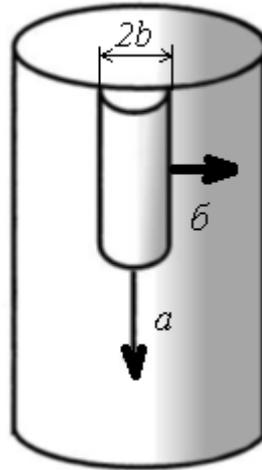


Рисунок 4.8. Распространение вытянутого вдоль образующей цилиндра отслоения; а) вдоль прямолинейного фронта; б) вдоль криволинейного фронта.

Скорость высвобождения энергии при распространении отслоения в направлении криволинейного фронта может быть посчитана как высвобождающаяся упругая энергия единицы длины отслоившегося участка, поделенная на его ширину $2b$. Эта энергия состоит из энергии, высвободившейся из изгибаемого участка покрытия ΔU_1 , и энергии, высвободившейся из основания ΔU_2 . Первую из данных величин можно посчитать как разницу упругой энергии отслоившегося участка до и после отслоения

$$\Delta U_1 = \frac{(\sigma h)^2 b}{E^{(2)} h} - \frac{T^2 b}{E^{(2)} h} - D \int_0^b [w''(y)]^2 dy \quad (4.3.35)$$

Здесь в правой части первый член – энергия сжатия до потери устойчивости, второй – энергия сжатия после потери устойчивости, третий – энергия, связанная с изгибом.

Вторую величину легче посчитать через работу сил, прикладываемых к неотслоившимся участкам подложки

$$\Delta U_2 = (\sigma h + T)[-u(b)] - M[-w'(b)] \quad (4.3.36)$$

Удельная упругая энергия покрытия до потери устойчивости есть

$$G_0 = \frac{1 - \nu_0^{(2)2}}{2} \frac{\sigma^2 h}{E_0^{(2)}} \quad (4.3.37)$$

Подставляя значение для смещения $w(y)$ из формулы (4.3.11), а значения кинематических величин, входящих в (4.3.36) из формулы (4.3.4), и переходя к безразмерным переменным получаем

$$\begin{aligned} \frac{G_{ss}}{G_0} &= \frac{\Delta U_1 + \Delta U_2}{2bG_0} = \\ &= \left[1 - (1+f)^2\right] \left[1 + \left(a_{11} - a_{13} \frac{b}{R}\right) \frac{h}{b}\right] - 2 \left(a_{12} - a_{23} \frac{b}{R}\right) \frac{h}{b} m(1+f) - a_{22} \frac{h}{b} m^2 - \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \lambda} \left\{ \frac{\cos 2\lambda}{24\varepsilon^2} \frac{h^2}{R^2} - \frac{5 \sin 2\lambda}{48\lambda\varepsilon^2} \frac{h^2}{R^2} - \frac{h}{R} \frac{m}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda}\right) + \left(\frac{1}{12\varepsilon^2} \frac{h^2}{R^2} + 6m^2\right) \left(1 + \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda}\right) \right\}$$

Данное выражение отличается от соответствующего выражения [96] последним членом (связанным с изгибом), а также наличием зависимости от перерезающей силы посредством коэффициентов a_{13}, a_{23} и переходит в него при $R/h \rightarrow \infty, a_{13} \rightarrow 0, a_{23} \rightarrow 0$.

Для сравнения, скорость высвобождения энергии (отнесенная к энергии покрытия до потери устойчивости) для той же конфигурации и граничных условий жесткого защемления имеет вид [92]

$$\frac{G_{ss}}{G_0} = \left(1 - \left(\frac{b_0}{b} \right)^2 \right)^2 \quad (4.3.39)$$

4.3.3. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейного фронта

Скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейного фронта, подобно тому, как это делалось для отслоения от плоской поверхности авторами работы [96], можно вычислить двумя способами: через коэффициенты интенсивности напряжений и через непосредственное вычисление изменения упругой энергии при увеличении длины отслоения.

Значение скорости высвобождения энергии в балочном приближении имеет вид

$$G = \frac{1}{2E^{(2)}} \left(12 \frac{M^2}{h^3} + \frac{F^2}{h} \right) \quad (4.3.40)$$

Удельная упругая энергия покрытия до потери устойчивости определяется выражением (4.3.37).

Введем в рассмотрение относительную скорость высвобождения энергии и выразим ее через безразмерные величины

$$\frac{G}{G_0} = \frac{1}{\sigma^2} \left(12 \frac{M}{h^4} + \frac{F}{h^2} \right) = 12m^2 + f^2 \quad (4.3.41)$$

Для сравнения, относительная скорость высвобождения энергии, посчитанная для условий жесткой заделки, имеет вид [92]

$$\frac{G}{G_0} = \left(1 - \left(\frac{b_0}{b}\right)^2\right) \left(1 + 3\left(\frac{b_0}{b}\right)^2\right) \quad (4.3.42)$$

Формула (4.3.41) учитывает лишь упругую энергию, высвобождающуюся из покрытия. Кроме нее высвобождается упругая энергия, накопленная в подложке. При достаточно жестких подложках и больших по сравнению с толщиной покрытия длинах отслоения этой энергией можно пренебречь. Однако в противном случае ее вклад становится существенным. В общем случае скорость высвобождения энергии благодаря росту интерфейсной трещины выражается как [69]

$$G = \frac{1 - \beta_E^2}{E_{ef}} (K_I^2 + K_{II}^2); \quad (4.3.43)$$

Здесь

$$\frac{1}{E_{ef}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E^{(2)}} + \frac{1}{E^{(1)}} \right); \quad (4.3.44)$$

$$\beta_\mu = \frac{1}{2} \frac{\mu^{(2)}(1 - 2\nu_0^{(2)}) - \mu^{(1)}(1 - 2\nu_0^{(1)})}{\mu^{(2)}(1 - 2\nu_0^{(2)}) + \mu^{(1)}(1 - 2\nu_0^{(1)})}$$

Здесь $E^{(1)}, \mu^{(1)}, \nu_0^{(1)}$ – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона основания, соответственно. Величины с верхним индексом 2 соответствуют покрытию. В свою очередь, выражения для коэффициентов интенсивности напряжений K_I, K_{II} были получены [96] в виде

$$\sqrt{h} \begin{pmatrix} K_{II} \\ K_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 2\sqrt{3}h^{-1}M \end{pmatrix} \quad (4.3.45)$$

где коэффициенты c_{ij} были получены путем численного решения системы интегральных уравнений. Решение (4.3.45) было получено для $\beta_\mu = 0$ и отсутствия поперечных к линии отслоения сил. Подстановка (4.3.45) в (4.3.43) для $\beta_\mu = 0$ после перехода к безразмерным величинам дает

$$G / G_0 = (c_{11}^2 + c_{21}^2) f^2 + 12(c_{12}^2 + c_{22}^2) m^2 + 4\sqrt{3}(c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22}) mf \quad (4.3.46)$$

Анализ численных данных [96] показывает, что с достаточно хорошей степенью точности выполняются соотношения

$$c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1 \quad (4.3.47)$$

$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0$$

Для оставшегося комплекса переменных достаточно хорошим приближением может служить следующая аппроксимационная формула

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 + 0.412 \left(\eta \frac{h}{b_0} \frac{1}{\eta_b} \right)^{2/3}, \quad E^{(1)} = \frac{E_0^{(1)}}{1 - \nu_0^{(1)2}} \quad (4.3.48)$$

Подстановка (4.3.47), (4.3.48) в (4.3.46) дает

$$G / G_0 = \left[1 + 0.412 \left(\frac{h}{b_0} \frac{\eta}{\eta_b} \right)^{2/3} \right] f^2 + 12m^2 \quad (4.3.49)$$

Данная формула может использоваться как уточнение для (4.3.41), второй член в квадратных скобках учитывает поправку за счет конечной длины отслоения.

В данной формуле по-прежнему не учитывается влияние перерезывающей силы на скорость высвобождения энергии. В главах 2 и 3 данный учет был выполнен для случая полубесконечного отслоения. В

используемых обозначениях относительная скорость высвобождения энергии записывается следующим образом

$$G / G_0 = (f + \sqrt{3}n)^2 + 12(m + \delta n)^2 \quad (4.3.50)$$

где для δ использована аппроксимация (4.2.19):

$$\delta = 0.635 \left(\frac{E^*}{E_s^*} \right)^{1/3} \quad (4.3.51)$$

Суммируя поправки за счет конечности длины отслоения (4.3.49) и перерезывающей силы (4.3.50), выражение для относительной скорости высвобождения энергии запишем следующим образом

$$\frac{G}{G_0} = (f + \sqrt{3}n)^2 + 0.412 \left(\frac{E^*}{E_s^*} \frac{h}{b_0} \frac{1}{\eta} \right)^{2/3} f^2 + 12(m + \delta n)^2 \quad (4.3.52)$$

Второй путь вычисления скорости высвобождения энергии состоит в непосредственном вычислении изменения упругой энергии при увеличении длины отслоения

$$\frac{G}{G_0} = \frac{d}{db} \frac{\Delta U_1 + \Delta U_2}{2G_0} = \frac{d}{db} \left[b \frac{G_{ss}}{G_0} \right] = b \frac{d}{db} \left[\frac{G_{ss}}{G_0} \right] + \frac{G_{ss}}{G_0} \quad (4.3.53)$$

где $\frac{G_{ss}}{G_0}$ определяется (4.3.38)..

Значения скорости высвобождения энергии, рассчитанные по формулам (4.3.50) – для криволинейного фронта, и (4.3.52), (4.3.53) – для прямолинейного, начинают различаться с одновременным увеличением относительной жесткости покрытия и увеличением действующих напряжений. Аналогичный эффект отмечался в работе [96] для покрытий на плоских основаниях. В качестве наиболее вероятной причины для данного

расхождения предполагалось нестрогое совместное использование результатов, полученных на основе линейной теории упругости для основания и нелинейной теории для отслоения. Дополнительно указывалось на приближенный (хотя предположительно достаточно близкий к точному) характер полученных значений для коэффициентов податливости и коэффициентов интенсивности напряжений. Второй метод расчета (по энергии) представляется более строгим и будет использоваться в дальнейшем.

4.3.4. Приближенная модель, не учитывающая вклад перерезывающих сил и нормального смещения в точке заделки

Положив в системе уравнений (4.3.29), (4.3.32) и (4.3.34) $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$, приходим к системе, в рамках которой пренебрегается влиянием перерезывающей силы и нормального к поверхности смещения в точке заделки. Ввиду малости перерезывающей силы по сравнению с продольной (вследствие малости кривизны) согласно (4.3.8), такое представление оправдано для малых отношений ширины отслоения к радиусу кривизны.

$$\left(\frac{b_0}{h}\eta + a_{11}\right)f\varepsilon + a_{12}m\varepsilon - \frac{1}{6}\left(\frac{b_0}{R}\right)^2\frac{b_0}{h}\eta^3 + \left[\left(\frac{b_0}{R}\right)^2\frac{b_0}{h}\frac{\eta^3}{\lambda^4} - \frac{2}{\lambda^2}\left(\frac{b_0}{R}\right)\eta\frac{m}{1+f} + \frac{m^2}{(1+f)^2}\frac{b_0}{h}\eta\right]\frac{\lambda(2\lambda - \sin 2\lambda)}{8\cos^2\lambda} = 0 \quad (4.3.54)$$

$$-\frac{b_0}{R}\eta + \left[\frac{b_0}{R} \frac{\eta}{\lambda} - \frac{m}{1+f} \frac{h}{b_0} \frac{\lambda}{\eta} \right] \operatorname{tg} \lambda = a_{12} f \varepsilon + a_{22} m \varepsilon \quad (4.3.55)$$

Формула для скорости высвобождения энергии вдоль криволинейного фронта (4.3.38) преобразуется к виду

$$\frac{G_{ss}}{G_0} = \frac{\Delta U_1 + \Delta U_2}{2bG_0} = \left[1 - (1+f)^2 \right] \left[1 + a_{11} \frac{h}{b} \right] - 2a_{12} \frac{h}{b} m(1+f) - a_{22} \frac{h}{b} m^2 -$$

$$\frac{1}{\cos^2 \lambda} \left\{ \frac{\cos 2\lambda}{24\varepsilon^2} \frac{h^2}{R^2} - \frac{5 \sin 2\lambda}{48\lambda\varepsilon^2} \frac{h^2}{R^2} - \frac{h}{R} \frac{m}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda} \right) + \left(\frac{1}{12\varepsilon^2} \frac{h^2}{R^2} + 6m^2 \right) \left(1 + \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda} \right) \right\} \quad (4.3.56)$$

а формула для скорости высвобождения энергии вдоль прямолинейного фронта (4.3.52) к виду

$$G / G_0 = \left[1 + 0.412 \left(\frac{E^*}{E_s^*} \frac{h}{b_0} \frac{1}{\eta} \right)^{2/3} \right] f^2 + 12m^2 \quad (4.3.57)$$

Формулы (4.3.41) и (4.3.53) остаются без изменений (во второй из них под $\frac{G_{ss}}{G_0}$ очевидно следует понимать величину, определяемую формулой (4.3.56))

4.3.5. Результаты расчетов скорости высвобождения энергии при граничных условиях податливой заделки

Зависимость относительной скорости высвобождения энергии от отношения полуширины отслоения к полуширине отслоения, соответствующего моменту потери устойчивости для прямолинейного отслоения, показано на Рисунках 4.9-4-12. На Рисунке 4.9 представлены результаты расчетов согласно различным моделям для различных отношений упругих модулей покрытия и основания: а) $\frac{E^*}{E_s^*} = 1$, б) $\frac{E^*}{E_s^*} = 3$, в) $\frac{E^*}{E_s^*} = 19$, г)

$\frac{E^*}{E_s^*} = 199$. Всюду $\frac{b_0}{R} = 0.02$, $\varepsilon = 0.01$. Пунктирные линии соответствуют отслоению вдоль криволинейного фронта (4.3.38). Сплошные и штрихпунктирные линии соответствуют отслоению вдоль прямолинейного фронта согласно формулам (4.3.53), (4.3.52), соответственно. Точечные линии соответствуют результатам расчета согласно упрощенной модели, для которой положено $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ (формулы (4.3.56) для криволинейного фронта и (4.3.53), (4.3.56) – для прямолинейного).

На рисунке 4.10 представлены аналогичные зависимости для большей кривизны: $\varepsilon = 0.01$, $\frac{E^*}{E_s^*} = 199$, $\frac{b_0}{R} = 0.05$ (а), $\frac{b_0}{R} = -0.05$ (б).

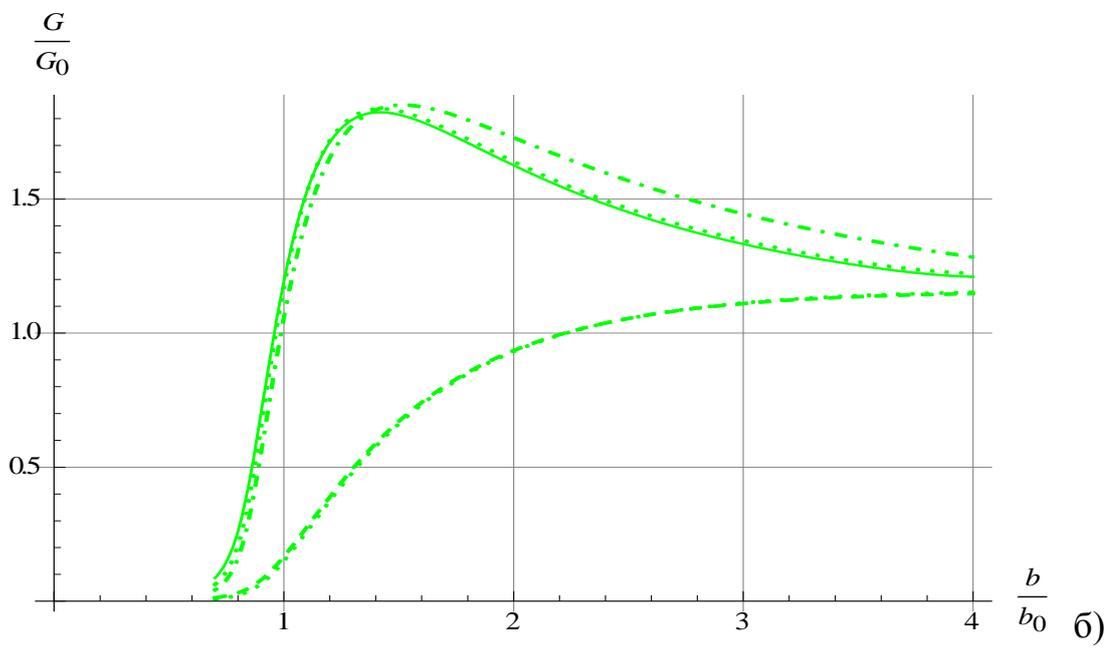
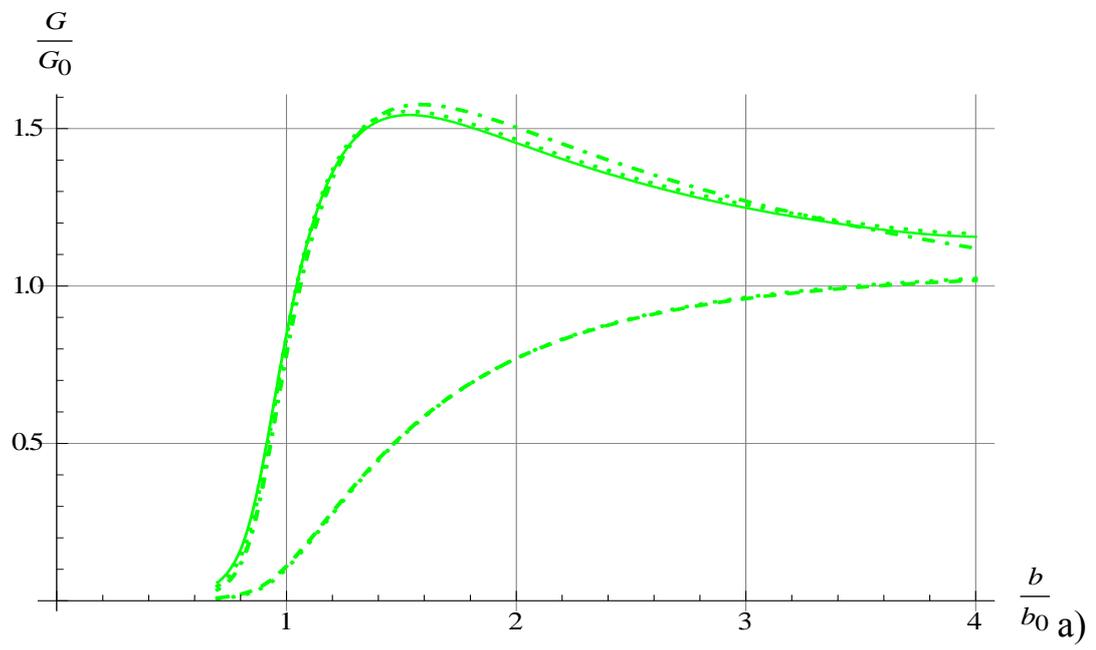
Из представления (4.3.53) видно, что кривые, соответствующие отслоениям вдоль прямолинейной и криволинейной границы, должны пересекаться в точке максимума последней. Это условие должно соблюдаться независимо от конкретного вида зависимости скорости высвобождения энергии от длины отслоения. Для дальнейшего анализа будем использовать формулу (4.3.53), автоматически обеспечивающую выполнение данного условия. Из представленных графиков видно, что

различие в результатах, даваемых более точной и упрощенной моделями, становится существенным при увеличении относительной податливости подложки и увеличении отношения ширины отслоения к радиусу кривизны подложки.

На рисунке 4.11 представлены аналогичные зависимости для различных отношений длины отслоения, соответствующего потери устойчивости прямолинейного отслоения от горизонтального основания к радиусу кривизны (отрицательные радиусы соответствуют вогнутости). Всюду $\varepsilon = 0.01$. Сплошные линии соответствуют распространению отслоения вдоль прямолинейного фронта, пунктирные – вдоль криволинейного. Зеленые линии соответствуют $\frac{b_0}{R} = 0.02$, синие - $\frac{b_0}{R} = 0$, красные - $\frac{b_0}{R} = -0.02$; а) $\frac{E^*}{E_s^*} = 1$, б) $\frac{E^*}{E_s^*} = 3$, в) $\frac{E^*}{E_s^*} = 19$, г) $\frac{E^*}{E_s^*} = 199$.

На рисунке 4.12 представлены аналогичные зависимости для $\varepsilon = 0.001$:

а) $\frac{E^*}{E_s^*} = 19$, б) $\frac{E^*}{E_s^*} = 199$.



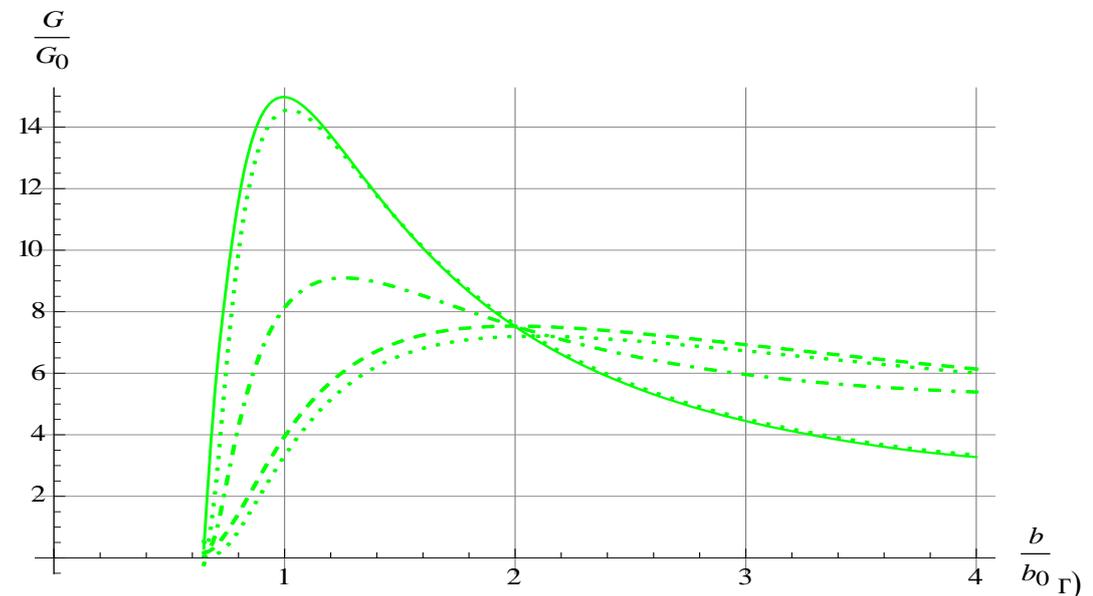
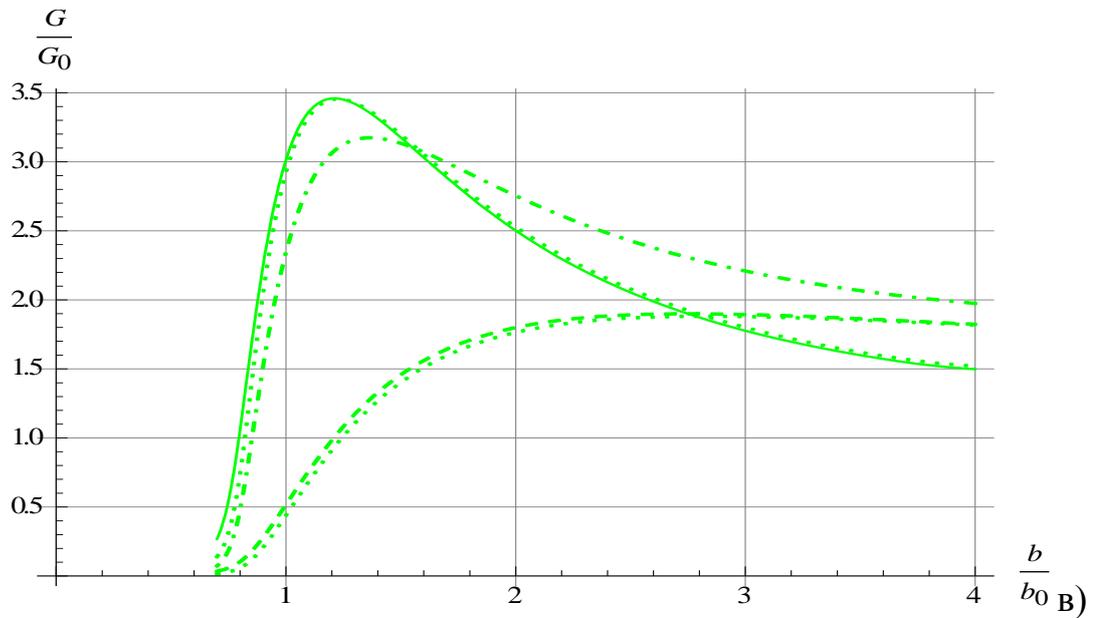


Рисунок 4.9. Зависимости относительной скорости высвобождения энергии от отношения полуширины отслоения к полуширине отслоения, соответствующего моменту потери устойчивости для прямолинейного отслоения, согласно различным моделям для различных отношений упругих модулей покрытия и основания: а) $\frac{E^*}{E_s^*} = 1$, б) $\frac{E^*}{E_s^*} = 3$, в)

$\frac{E^*}{E_s^*} = 19$, г) $\frac{E^*}{E_s^*} = 199$. Всюду $\frac{b_0}{R} = 0.02$, $\varepsilon = 0.01$. Пунктирные линии соответствуют отслоению вдоль криволинейного фронта (4.3.38). Сплошные и штрихпунктирные линии соответствуют отслоению вдоль прямолинейного фронта согласно формулам (4.3.53), (4.3.52), соответственно. Точечные линии соответствуют результатам расчета согласно упрощенной модели, для которой положено $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ (формулы (4.3.56) для криволинейного фронта и (4.3.53), (4.3.56) – для прямолинейного).

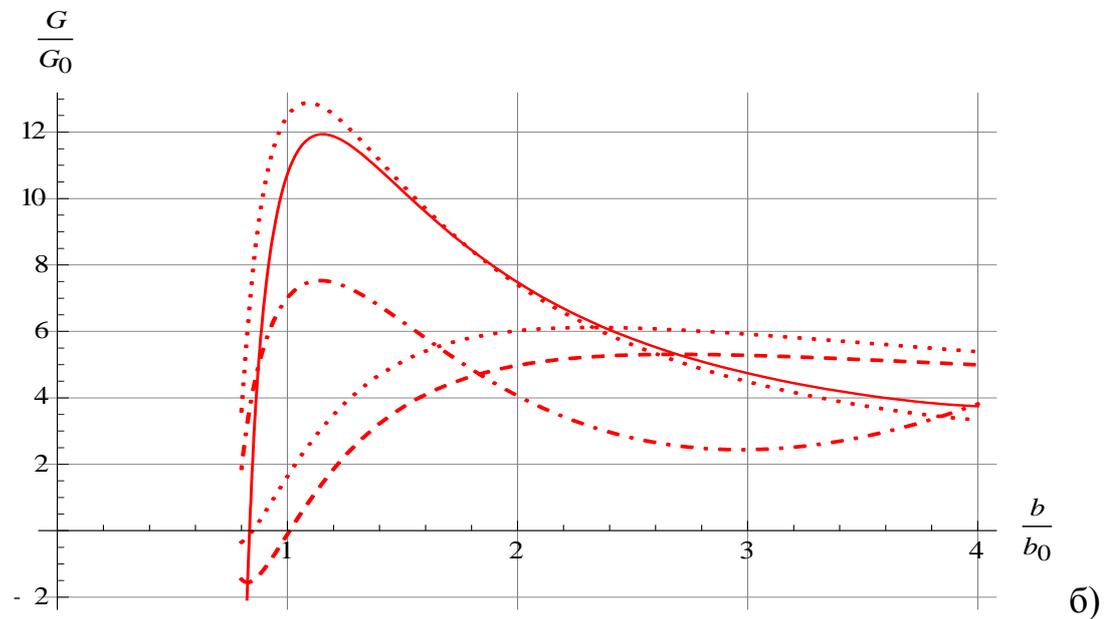
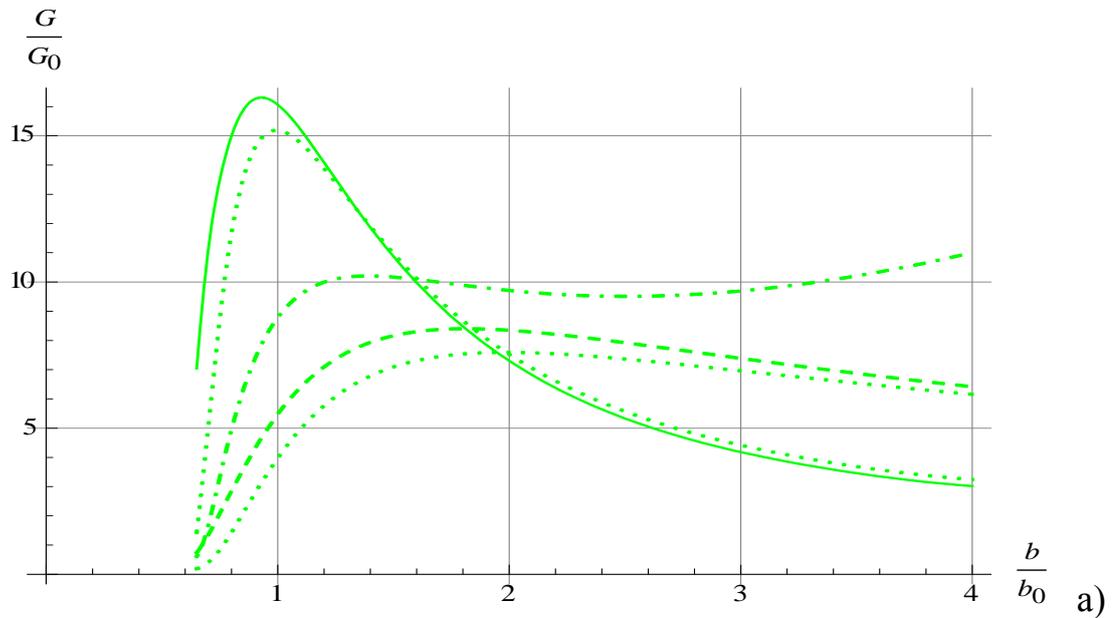
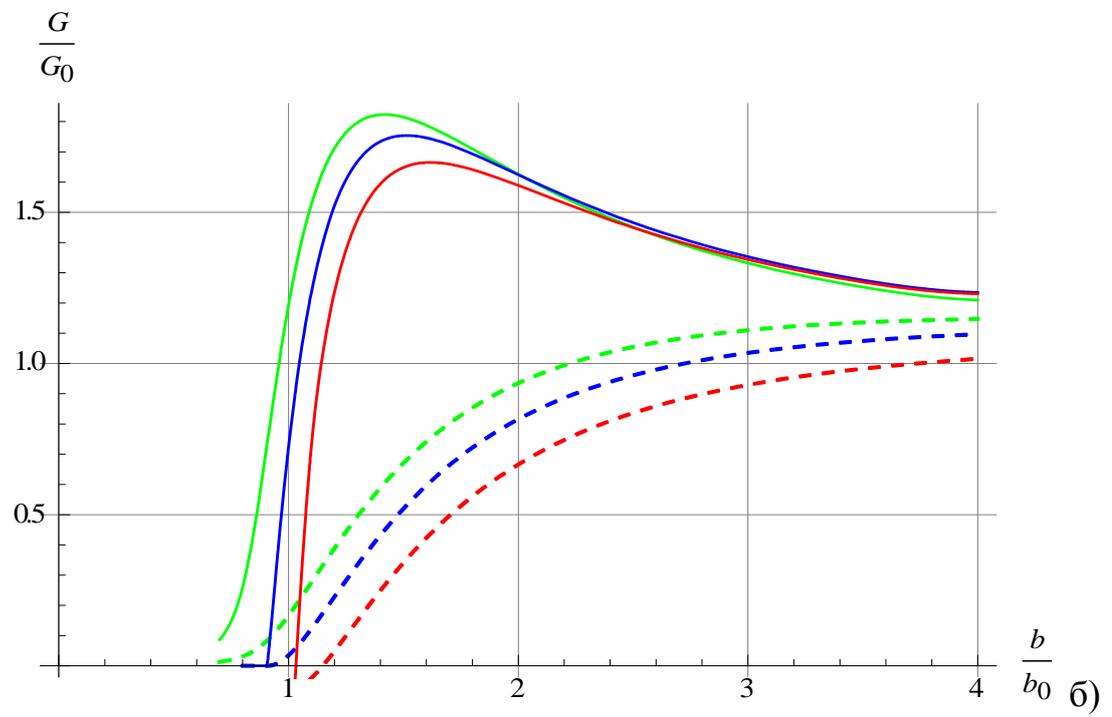
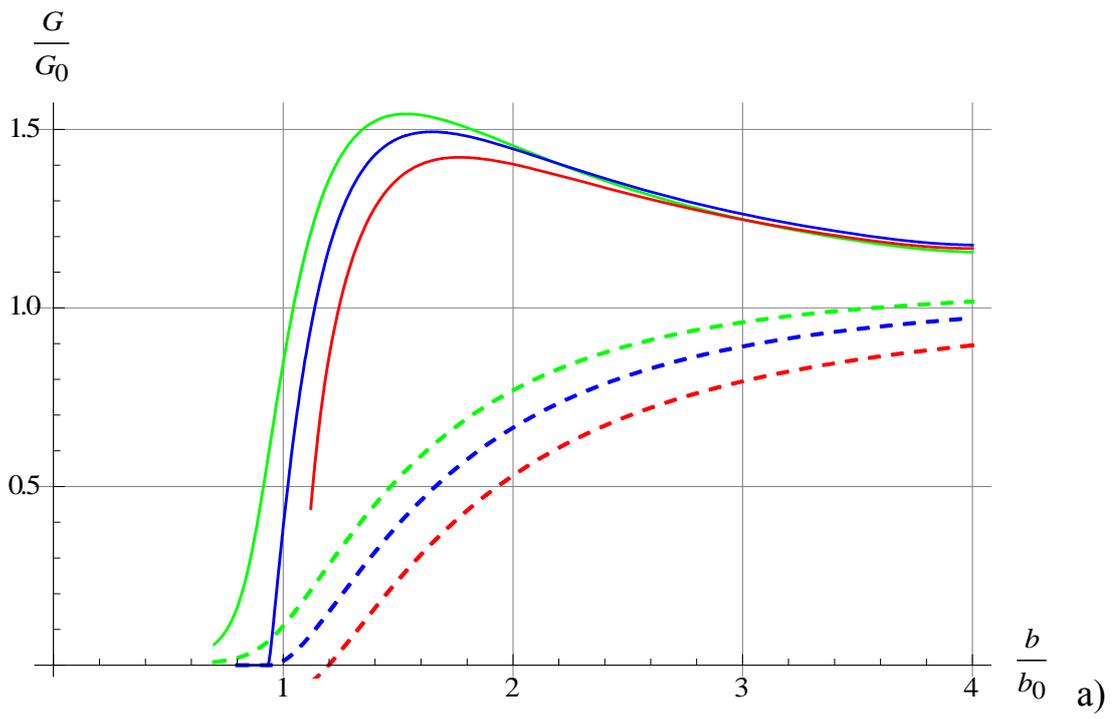


Рисунок 4.10. Зависимости относительной скорости высвобождения энергии от отношения полуширины отслоения к полуширине отслоения, соответствующего моменту потери устойчивости для прямолинейного отслоения, согласно различным моделям для различных отношений упругих модулей покрытия и основания: а) $\frac{b_0}{R} = 0.05$, б)

$\frac{b_0}{R} = -0.05$. Всюду $\frac{E^*}{E_s} = 199$, $\varepsilon = 0.01$. Пунктирные линии соответствуют отслоению

вдоль криволинейного фронта (4.3.38). Сплошные и штрихпунктирные линии соответствуют отслоению вдоль прямолинейного фронта согласно формулам (4.3.53), (4.3.52), соответственно. Точечные линии соответствуют результатам расчета согласно упрощенной модели, для которой положено $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ (формулы (4.3.56) для криволинейного фронта и (4.3.53), (4.3.56) – для прямолинейного).



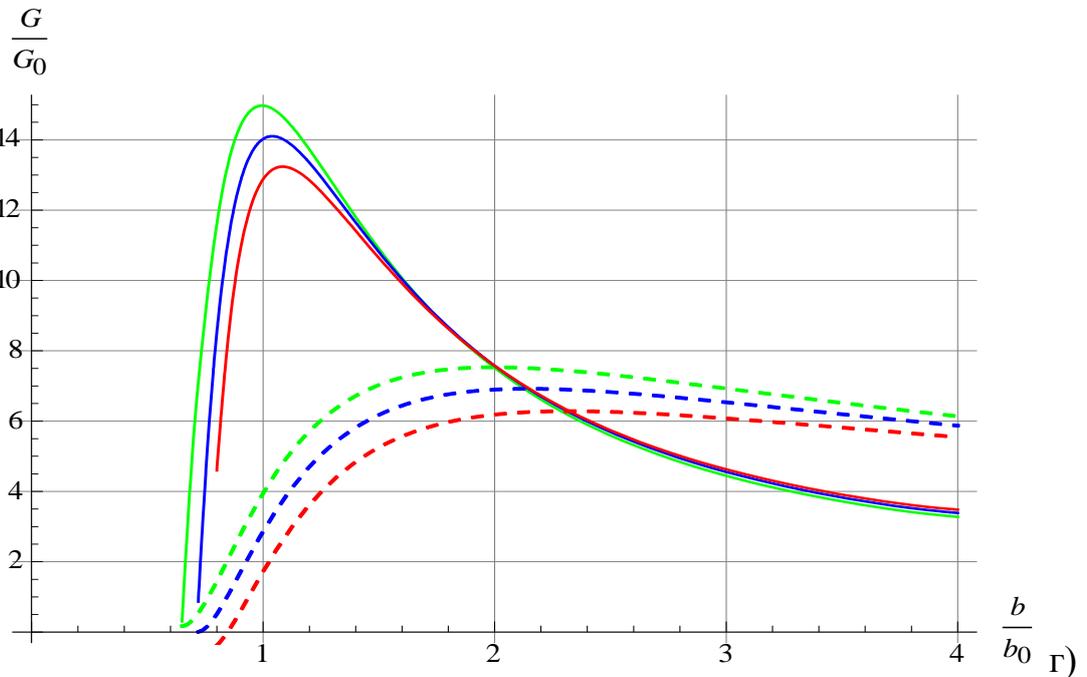
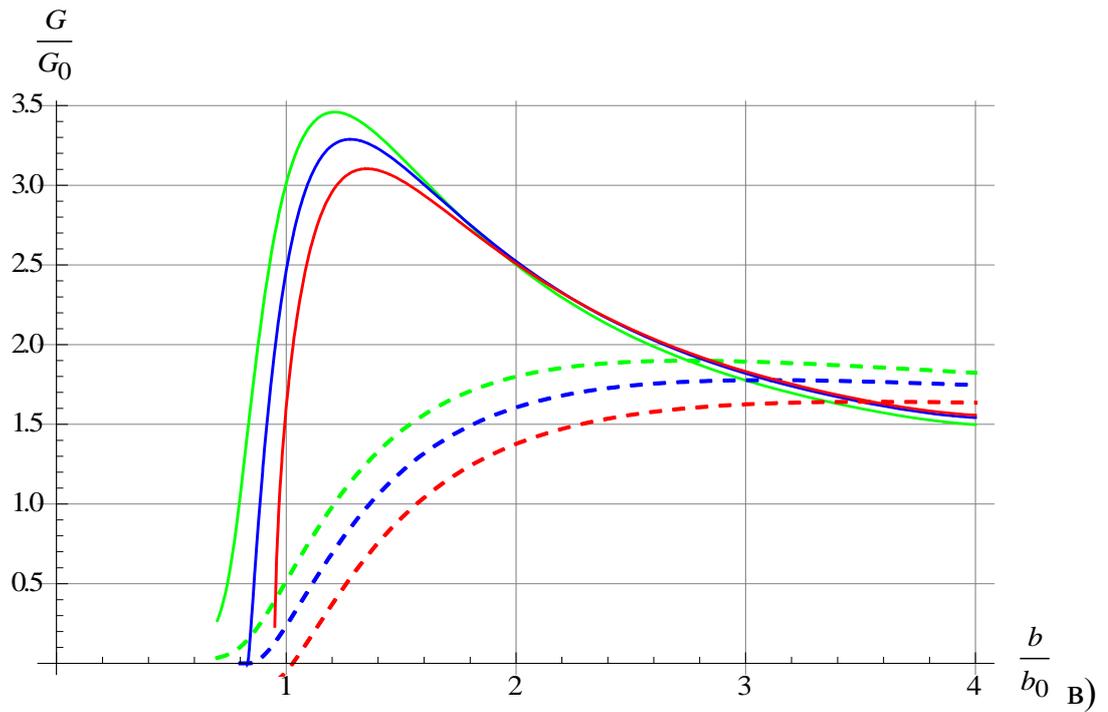


Рисунок 4.11. Зависимости относительной скорости высвобождения энергии от отношения полуширины отслоения к полуширине отслоения, соответствующего моменту потери устойчивости для прямолинейного отслоения. Всюду $\varepsilon = 0.01$. Сплошные линии соответствуют распространению отслоения вдоль прямолинейного фронта, пунктирные – вдоль криволинейного. Зеленые линии соответствуют $\frac{b_0}{R} = 0.02$, синие - $\frac{b_0}{R} = 0$, красные -

$$\frac{b_0}{R} = -0.02; \text{ а) } \frac{E^*}{E_s^*} = 1, \text{ б) } \frac{E^*}{E_s^*} = 3, \text{ в) } \frac{E^*}{E_s^*} = 19, \text{ г) } \frac{E^*}{E_s^*} = 199.$$

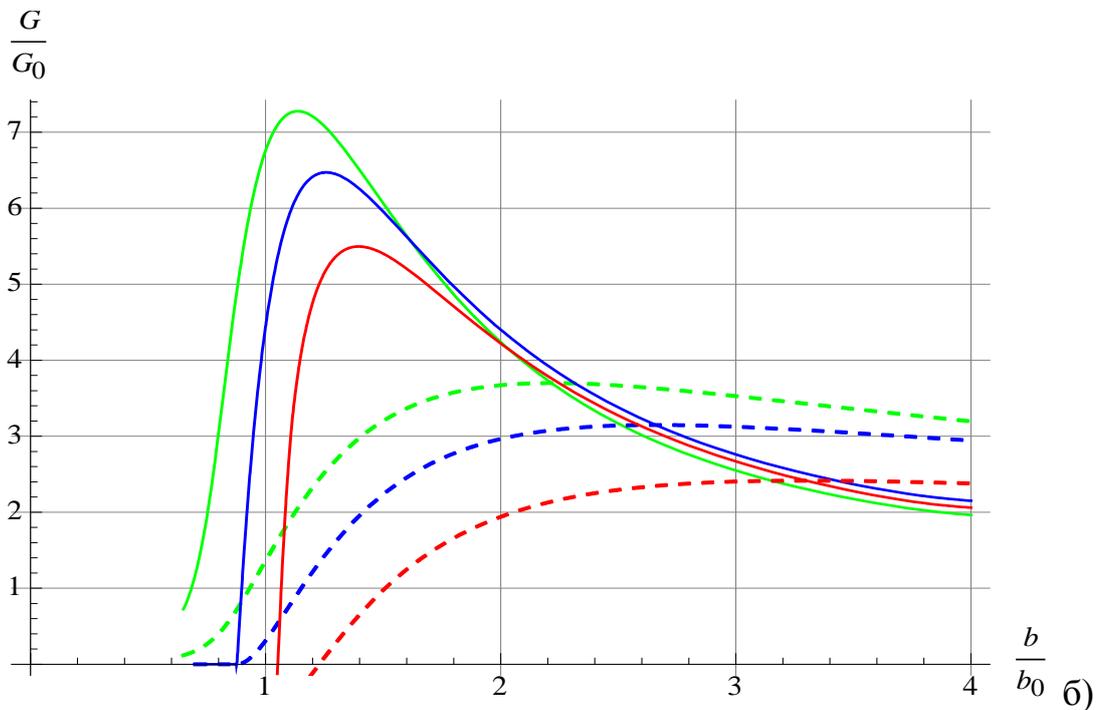
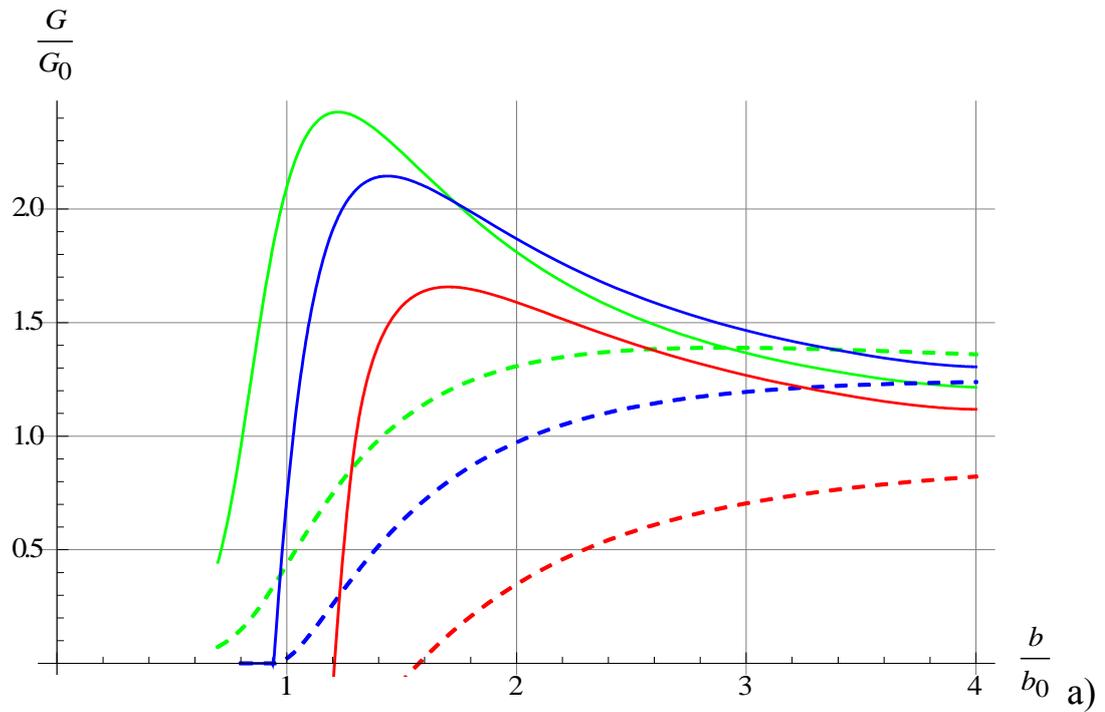


Рисунок 4.12. Зависимости относительной скорости высвобождения энергии от отношения полуширины отслоения к полуширине отслоения, соответствующего моменту потери устойчивости для прямолинейного отслоения. Всюду $\varepsilon = 0.001$. Сплошные линии соответствуют распространению отслоения вдоль прямолинейного фронта, пунктирные – вдоль криволинейного. Зеленые линии соответствуют $\frac{b_0}{R} = 0.02$, синие - $\frac{b_0}{R} = 0$, красные -

$$\frac{b_0}{R} = -0.02; \text{ а) } \frac{E^*}{E_s} = 19, \text{ б) } \frac{E^*}{E_s} = 199.$$

4.3.6. Анализ результатов и выводы

В приближении теории пластин, имеющих малую начальную кривизну, исследовано совместное влияние кривизны и податливости подложки на параметры отслоения. Податливость подложки учитывалась заданием граничных условий для пластины, моделирующей отслоившийся участок покрытия, в виде обобщенной упругой заделки – пропорциональности компонент смещения и угла поворота в точке заделки действующим в данной точке главному вектору и изгибающему моменту, посредством расширенной (3x3) матрицы податливости. Для покрытия, отслаивающегося от цилиндрической поверхности, посчитаны скорости высвобождения энергии при развитии вытянутого вдоль образующей отслоения как вдоль прямолинейного фронта, так и вдоль криволинейной границы. Показано, что при увеличении податливости подложки скорость высвобождения энергии существенно возрастает. Из анализа результатов также следует, что для достаточно мягких подложек существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться вдоль криволинейной границы, чем вдоль прямолинейной. Этим, возможно, объясняется явление «туннелирования», заключающееся в образовании узких продольных отслоений. Для плоских подложек это отмечалось и ранее [96]. Кроме того, из представленных данных расчета видно, что наличие положительной кривизны (покрытия со стороны выпуклости) и уменьшение относительной жесткости подложки приводит к уменьшению этой критической ширины, и, тем самым, способствует образованию вытянутых структур отслоений. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью рассмотренной модели, с результатами, полученными с помощью упрощенной модели (не учитывающей влияние нормального смещения и поперечной силы в точках защемления). Показано, что учет данного влияния становится существенным при увеличении

относительной податливости подложки и увеличении отношения ширины отслоения к радиусу кривизны подложки.

4.4. Приложение результатов к описанию работы кантилевера АСМ

Атомный силовой микроскоп (АСМ) в силу своей универсальности является в настоящее время одним из основных инструментов исследования поверхности. Измерительным элементом АСМ является кантилевер – консоль, закрепленная с одного конца, на другом конце которой крепится зонд в виде острого наконечника (иглы). Для описания механического поведения кантилевера обычно применяется балочная модель. В настоящем параграфе ставится задача вычисления поправок, связанных с уточнением граничных условий балочной модели для более адекватного описания процесса деформирования кантилевера.

4.4.1. Основные соотношения модели.

Наиболее простой моделью, описывающей механическое поведение кантилевера, является балочная модель, в рамках которой кантилевер рассматривается как балка, один конец которой жестко закреплен, а другой находится под действием сосредоточенной силы. Данная модель приводит к

элементарному уравнению изогнутой оси балки, которое в случае балки постоянного сечения и модуля Юнга имеет вид

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = q \quad (4.4.1)$$

где $u(x)$ - поперечное смещение точек оси балки (прогиб); E - модуль Юнга вдоль оси балки; координатная ось x направлена вдоль оси балки (кантилевера); q - распределенная вдоль оси балки нагрузка (для кантилеверов АСМ обычно полагается равной нулю, поскольку единственными силами такого рода являются силы Ван-дер-Ваальса, а их влияние вдоль оси кантилевера мало); I - момент инерции сечения кантилевера. Для балки прямоугольного сечения

$$I = bh^3/12 \quad (4.4.2)$$

где h, b - высота и ширина балки, соответственно (размеры вдоль и поперек приложения нагрузки).

Данное уравнение в применении к кантилеверу АСМ обычно решается со следующими граничными условиями. В заделке ($x=0$) прогиб и угол наклона равны нулю (жесткая заделка)

$$u(0) = 0 \quad (4.4.3)$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 0 \quad (4.4.4)$$

На конце кантилевера ($x=l$) ставится условия равенства нулю момента

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(l) = 0 \quad (4.4.5)$$

и условие, соответствующее приложенной силе f :

$$\frac{d^3 u}{dx^3}(l) = -\frac{f}{EI} \quad (4.4.6)$$

При соблюдении данных граничных условий (классических для балочной теории) и отсутствия распределенной нагрузки $q=0$ решение уравнения (4.4.1) есть

$$u(x) = \frac{f l}{2EI} x^2 - \frac{f}{6EI} x^3 \quad (4.4.7)$$

Соответственно связь смещения в крайней точке кантилевера l (точке приложения силы) и приложенной силы определяется как

$$u_{rigid}(l) = \frac{f}{3IE} l^3 \quad (4.4.8)$$

Несмотря на простоту, балочная модель кантилевера является весьма неплохим приближением к точному решению. Это связано с тем, что она есть асимптотически точное решение для малых отношений толщины консоли к длине, что всегда выполняется для кантилеверов АСМ. Точное решение имеет вид

$$u_{exact} = A \frac{P}{3EI} l^3 \left[1 + O\left(\frac{h}{l}\right)^2 \right] \quad (4.4.9)$$

Здесь $A=1$ для $h/b \sim 1$ и $A=1/(1-\nu^2)$ для $h/b \rightarrow 0$, ν - коэффициент Пуассона.

Обычно при расчетах балочных систем в качестве основной поправки к элементарной теории балок рассматривают поправку, вызываемую действием перерезывающей силы (см., например, [99]). Однако все поправки

данного рода дают вклад порядка не выше чем $O(h/l)^2$. Вместе с тем, принятие условия жесткой заделки для закрепленного конца кантилевера является всего лишь приближением и, как будет показано ниже, вносит погрешность порядка h/l . Замена условия жесткой заделки на более корректное условие упругой заделки позволяет, оставаясь в рамках элементарного балочного приближения, получить корректное решение с точностью до $O(h/l)^2$.

4.4.2. Балочная модель прямоугольного кантилевера; уточненные граничные условия.

На Рисунке 4.13 представлена конфигурация прямоугольного кантилевера АСМ в ненагруженном состоянии. В процессе нагружения кантилевера происходит его деформирование, описываемое в рамках классической балочной теории как изгиб. При этом в рамках классической теории закрепленный конец (слева на Рисунке 4.13а) предполагается недеформированным и несмещенным. Такая ситуация имела бы место в случае прикрепления консоли (кантилевера) к абсолютно жесткому телу (Рисунок 4.13b). Такое допущение интуитивно представляется вполне оправданным ввиду массивности тела, к которому крепится кантилевер. Однако в действительности на данное тело со стороны кантилевера действуют напряжения, вызывающие локальные смещения точек границы контакта (Рисунок 4.13с).

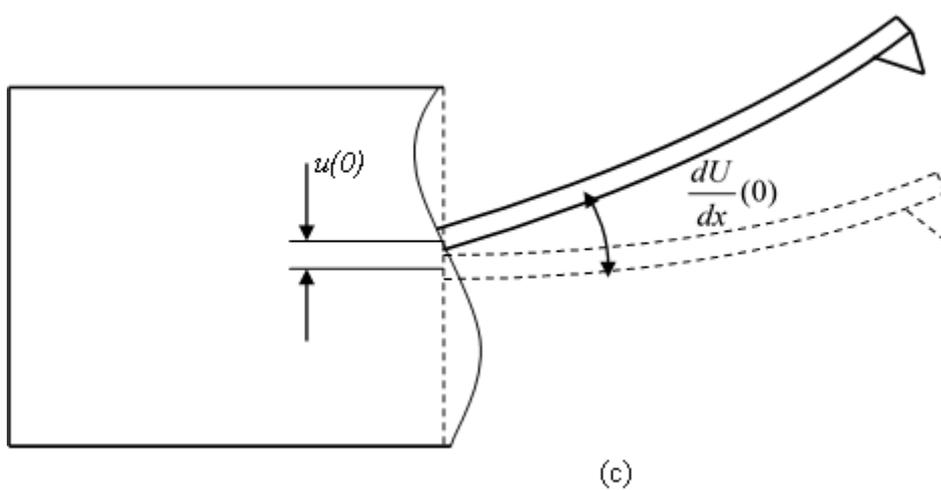
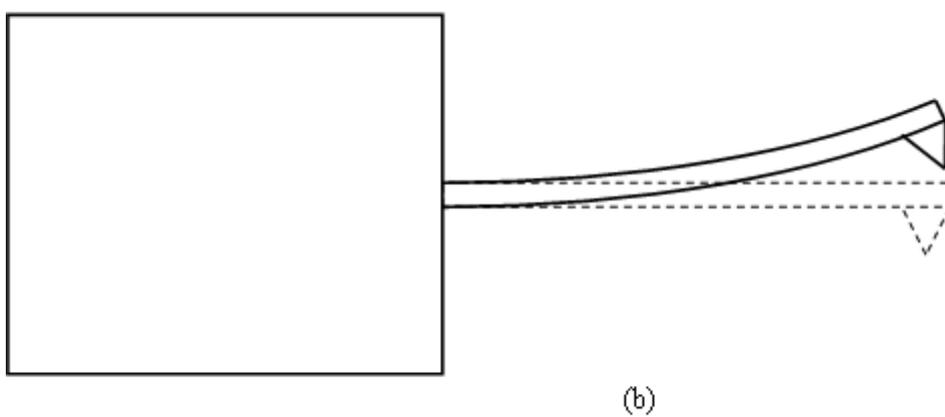
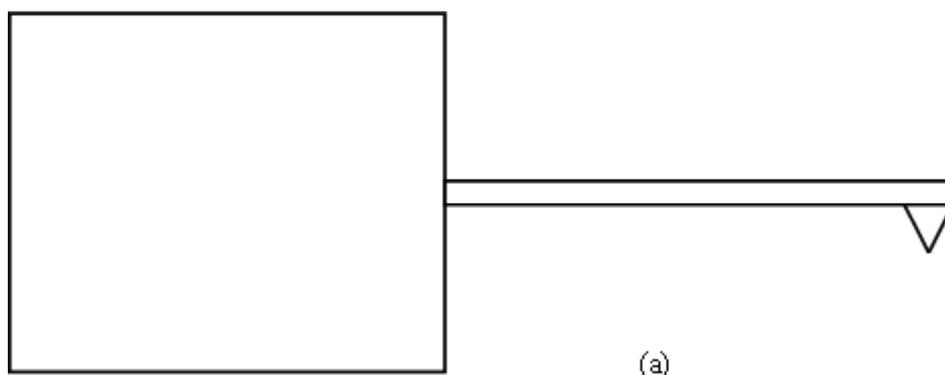


Рисунок 4.13. Модель заделки кантеливера АСМ

С точки зрения влияния этих смещений на граничные условия для балки можно выделить смещение $u(0)$ и поворот $\frac{du}{dx}(0)$ точки заделки, которые уже не будут равны нулю, а предполагаются зависящими силы $P(0)$ и момента $M(0)$ (см. Приложение). Взаимосвязь между приложенной силой и смещением в точке приложения силы ($x=l$) с точностью до $l^2O(h/l)$ имеет вид (9.1.14)

$$U_{el}(l) = f \frac{l^3}{IE} \left(\frac{1}{3} + a_c \frac{h}{l} \right) \quad (4.4.10)$$

Безразмерный коэффициент a_c , являющийся коэффициентом упругой заделки, не может быть определен в рамках балочной теории. В общем случае он может зависеть от геометрических параметров балки и упругих параметров балки и материала массивной части конструкции, в которую эта балка заделана. Размеры массивной части предполагаются достаточно большими, чтобы балка (кантилевер) могла рассматриваться как прикрепленная к полупространству, для которого, очевидно, невозможно выделить линейные размеры. К геометрическим параметрам балки относятся ее ширина и высота в точке крепления b и h , к упругим параметрам – модули Юнга E, E_m и коэффициенты Пуассона ν, ν_m кантилевера и массивной части. Итак, a_c является функцией от следующего набора параметров

$$a_c = a_c(b, h, E, E_m, \nu, \nu_m) \quad (4.4.11)$$

Поскольку безразмерная функция должна зависеть лишь от безразмерных параметров, то (4.4.11) очевидно преобразуется к виду

$$a_c = a_c(h/b, E_m/E, \nu, \nu_m) \quad (4.4.12)$$

Для вычисления коэффициента упругой заделки можно предложить несколько способов. Так в Главах 2 и 3 были получены значения данного коэффициента для случая плоской деформации. В следующем параграфе будет приведен конечноэлементный расчет для трехмерного случая, и будет показано, что численные значения качественно не отличаются от двумерного.

4.4.3. Численное определение коэффициента упругой заделки.

Методом конечных элементов (на сетках с числом узлов 22350 и числом элементов 15482) была решена задача для различных соотношений параметров $h/b, E_m/E, l$. Конфигурация рассматриваемой области и конечноэлементные сетки представлены на Рисунке 4.14.

Проведен ряд расчетов для коэффициентов Пуассона $\nu_m = \nu = 0.25$, что примерно соответствует значениям материалов, используемых на практике. Для каждого набора геометрических параметров задача решалась для отношения модулей Юнга $E_m/E = 10^4; 1; 10^{-1}$. Первое из значений соответствует практически бесконечно жесткому телу основания, т.е. жесткой заделке, второе значение – случаю, когда кантилевер и основание изготовлены из одного материала, третье значение – случаю более жесткого кантилевера. Для каждого из значений E_m/E рассчитывалось смещение в точке приложения силы, а затем считалось отношение смещений кончика кантилевера для случая упругой и жесткой заделок.

$$\frac{U_{el}}{U_{rigid}} = \frac{U(E_m/E = 1 \div 10^{-1})}{U(E_m/E = 10^{-4})} \quad (4.4.13)$$

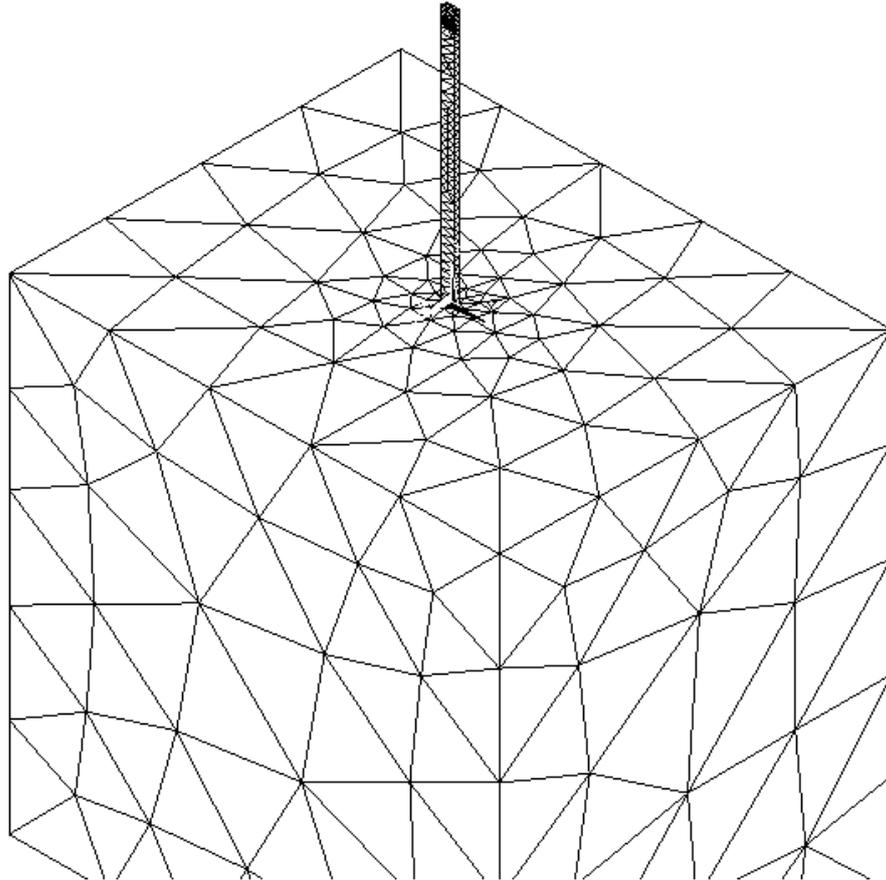


Рисунок 4.14. Конечноэлементная схема для модели заделки кантеливера АСМ

Подставляя сюда формулы (4.4.8) и (4.4.10) получаем уравнение для определения коэффициента упругой заделки a_c :

$$\frac{U_{elastic}}{U_{rigid}} = \frac{U(E_m / E = 1 \div 10^{-1})}{U(E_m / E = 10^{-4})} = \frac{f \frac{l^3}{IE} (1/3 + \beta h/l)}{f l^3 / 3EI} = 1 + 3a_c h/l \quad (4.4.14)$$

Откуда

$$a_c = \frac{l}{3h} \left(\frac{U(E_m / E = 1 \div 10^{-1})}{U(E_m / E = 10^{-4})} - 1 \right) \quad (4.4.15)$$

Расчетные данные приведены в Таблице 4.1. В силу линейности рассматриваемой задачи имеют значения лишь относительные значения параметров.

Таблица 4.1.

длина	ширина	высота	E_m / E	$U(l) \cdot 10^5$	$\frac{U_{el} - U_{rigid}}{U_{rigid}}$	a_c
10	0.5	0.1	10000	2.5030		
10	0.5	0.1	1	2.5196	0.00663	0.22
10	0.5	0.1	0.1	2.6484	0.0581	1.94
10	1	0.1	10000	1.2469		
10	1	0.1	1	1.2554	0.00682	0.27
10	1	0.1	0.1	1.3247	0.0624	2.08
10	1	0.2	10000	0.15593		
10	1	0.2	1	0.15791	0.0127	0.21
10	1	0.2	0.1	0.17324	0.111	1.85
10	0.5	0.2	10000	0.31313		
10	0.5	0.2	1	0.31718	0.0129	0.22
10	0.5	0.2	0.1	3.4623	0.106	1.76

На основании представленных данных трудно сделать вывод о зависимости коэффициента упругой заделки от профиля сечения кантилевера. Эта зависимость либо является слабой, либо отсутствует вовсе. Вместе с тем, наблюдается явная зависимость коэффициента от отношения упругих модулей кантилевера и основания. Данная зависимость может быть представлена в виде

$$a_c \sim a_{c0} f(E/E_m); \quad (4.4.16)$$

В случае плоской деформации (плоского напряженного состояния) функция $f(E/E_m)$ представляет собой кубический корень (2.4.49). Однако для рассматриваемого трехмерного имеющийся набор данных не позволяет сделать однозначный выбор. Удовлетворительный результат получается для линейной функции $f(E/E_m) = E/E_m$ и $a_{c0} \sim 0.2$. Данное значение неплохо согласуется со значением 0.33, полученным выше для плоского случая и одинаковых модулей консоли и основания.

Влияние поправки, учитывающей упругость заделки кантилевера видна из приведенных в Таблице 4.1 данных. Для некоторых значений соотношения геометрических и упругих параметров она может достигать десятка процентов.

На основании формул (4.4.16) и (4.4.14) можно оценить поправку для прогиба за счет упругости заделки в общем случае

$$\frac{U_{el}}{U_{rigid}} \sim 1 + 0.6 \frac{h}{l} \frac{E}{E_m} \quad (4.4.17)$$

4.4.4. Влияние упругости заделки на угол наклона свободного конца кантилевера. Интерпретация результатов измерений.

В процессе сканирования обычно регистрируется угол наклона свободного конца кантилевера. Угол наклона может быть посчитан как производная от прогиба в данной точке. Оценим вклад упругости заделки в изменение данного угла. Дифференцируя выражение (9.1.13), получаем с точностью до членов порядка $l^2 O(h/l)$:

$$\alpha(x) = U'(x) = \frac{fl}{IE}x - \frac{f}{2IE}x^2 + \frac{a_c}{EI}flh \quad (4.4.18)$$

Откуда для точки $x=l$:

$$\alpha(l) = \frac{f}{2IE}l^2 \left(1 + 0.4 \frac{h}{l} \frac{E}{E_m} \right) \quad (4.4.19)$$

Хотя для применяемых кантилеверов второй член в скобках и остается много меньше единицы, он может вносить ощутимый вклад. Так существуют методики для определения сил трения f_y между зондом и исследуемой поверхностью. При этом в случае движения зонда вдоль собственной оси вклад в измеряемую величину, угол $\alpha(l)$, от этой силы суммируется с вкладом от нормальной силы f [218]:

$$\alpha = c_0 \frac{3}{2l} \left(1 + 0.4 \frac{h}{l} \frac{E}{E_m} \right) f + c_0 \frac{3l_{ip}}{l^2} f_y \quad (4.4.20)$$

Здесь l_{ip} - длина острия зонда; c_0 - коэффициент податливости, посчитанный без учета влияния упругости заделки. Согласно (4.4.10):

$$c_0 = l^3 / 3EI \quad (4.4.21)$$

Из (4.4.20) видно, что поправка в измеряемый угол за счет упругости заделки может быть примерно того же порядка, что и вклад от измеряемой силы трения, так что пренебрежение влиянием упругости заделки может быть критичным.

В работе [219] рассмотрены два других варианта учета податливости заделки. Согласно первому варианту смещения в точке заделки предполагались пропорциональными приложенной силе. Согласно второму варианту кантилевер моделировался балкой большей длины, заделанная часть которой рассматривалась как находящаяся в упругой среде. Данные задачи решались в указанной работе в динамической постановке с учетом демпфирования. Однако (см. Приложение) поправка на нормальное смещение в точке заделки является величиной существенно меньшего порядка по сравнению с рассмотренной здесь поправкой на поворот. Анализ второй модели для статического случая должен приводить к результатам аналогичным полученным в настоящей работе.

4.5. Краткие выводы по главе

В рамках сформулированного подхода (Гл. 1) рассмотрена задача о потере устойчивости отслоившегося от подложки покрытия вследствие наличия в нем собственных деформаций сжатия, вызванных, например, нагревом. Предлагаемое аналитическое решение получено в рамках классической теории тонких пластин при рассмотрении двумерной задачи о потере устойчивости сжатой в собственной плоскости пластины, моделирующей покрытие, скрепленной с упругой подложкой, рассматриваемой как бесконечное упругое тело, всюду, за исключением

некоторой области отслоения. Получено выражение для критического сжимающего напряжения. Показано, что отношение величины критического напряжения к соответствующей величине для жестко заземленной пластины определяется единым безразмерным параметром, представляющим собой комбинацию упругих констант покрытия и подложки и отношения длины отслоения к толщине покрытия. Рассмотрены различные варианты записи граничных условий и условий контакта покрытия и подложки; получаемые при этом зависимости близки между собой. Полученные результаты хорошо коррелируют с результатами проведенных конечноэлементных расчетов.

Та же задача рассмотрена также в с помощью модели обобщенной упругой заделки, когда смещение и угол поворота отслоившегося покрытия в точке отслоения предполагаются пропорциональными главному вектору и главному моменту действующей нагрузки, что приводит к малому, но систематическому отклонению от указанной зависимости. Проведено обобщение на случай анизотропных и слоистых подложек и отслоений.

В приближении теории пластин, имеющих малую начальную кривизну, (модели Муштари-Донелла-Власова) исследовано совместное влияние кривизны и податливости подложки на параметры отслоения покрытий. Для покрытия, отслаивающегося от цилиндрической поверхности, посчитаны скорости высвобождения энергии при развитии вытянутого вдоль образующей отслоения как вдоль прямолинейной, так и вдоль криволинейной границы. Показано, что для достаточно мягких подложек существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться вдоль криволинейной границы, чем вдоль прямолинейной. Этим, возможно, объясняется явление «туннелирования», заключающееся в образовании узких продольных отслоений.

Исследовано влияние граничных условий балочной модели кантилевера атомно-силового микроскопа (АСМ) на результаты вычислений. Показано, что влияние упругости контакта (обычно рассматриваемого как жесткого) кантилевера с массивной частью может быть существенным при интерпретации результатов, связанных с измерением тангенциальных сил взаимодействия зонда с исследуемой поверхностью.

ГЛАВА 5. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКИХ СЛОЕВ И ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗДЕЛА БЕЗ ОТСЛОЕНИЯ. МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНОЙ УПРУГОСТИ

5.1. Описание механического поведения тонкого слоя в рамках теории поверхностной упругости. Обобщение модели поверхностной упругости

5.1.1. Определение поверхностных величин. Кинематика поверхности. Определяющие соотношения на поверхности. Обобщение уравнения Шаттлворса для описания поверхностных взаимодействий

Следуя [176], под поверхностной плотностью $g^s(x, y)$ произвольной величины g в некоторой точке (x_0, y_0) поверхности $z(x, y)$ будем понимать интеграл от избытка объемной плотности соответствующей величины $g(z)$ по нормали к поверхности, проведенной через рассматриваемую точку (Рисунок 5.1).

Хотя в течение последующего изложения будем ограничиваться рассмотрением малых деформаций, все рассуждения здесь будем проводить, используя лагранжево описание, т.е. все величины будем относить к материалному участку поверхности. Будем рассматривать достаточно общий случай границы, а именно границу раздела фаз А и В (граница раздела фаза А, или В, - вакуум может рассматриваться как частный случай, когда рассматриваемая величина в вакууме равна нулю или бесконечности). Пределы интегрирования при этом, строго говоря, должны простирались на

всю рассматриваемую область. Однако практически, если избыток рассматриваемой величины убывает с расстоянием от поверхности достаточно быстро, пределы интегрирования можно сократить до некоторых малых конечных размеров z_A и z_B , значения рассматриваемой величины в которых будут g_A и g_B , соответственно.

$$g^s(x, y) \equiv \int_{z_A}^{z_B} g(x, y, z) dz - h_A g_A(x, y) - h_B g_B(x, y) \quad (5.1.1)$$

$$h_A = (z_0 - z_A); \quad h_B = (z_B - z_0)$$

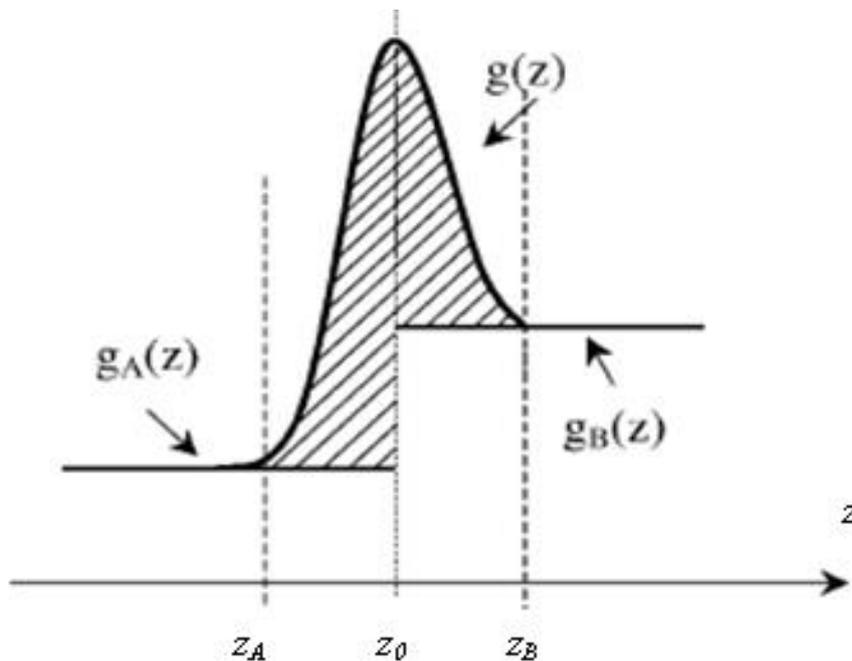


Рисунок 5.1. Распределение произвольной величины вблизи поверхности раздела фаз

При формальном определении поверхностной плотности произвольной величины посредством выражения (5.1.1), однако, остается произвол в выборе координаты точки раздела фаз z_0 . Данная проблема отсутствует, если

положение границы раздела можно выбрать из соображений внешних по отношению к рассматриваемой задаче.

Рассмотрим с указанных позиций выражение для вариации плотности поверхностной энергии

$$\delta W^s = \int_{z_A}^{z_B} \sigma_{ij}(z) \delta \varepsilon_{ij}(z) dz - \sigma_{ij}^A \delta \varepsilon_{ij}^A h_A - \sigma_{ij}^B \delta \varepsilon_{ij}^B h_B \quad (5.1.2)$$

Отсюда в частности следует, что определенная таким образом поверхностная энергия не обязана быть положительно определенной. Положительно определенной должна быть энергия тела в целом, а не избыток, связанный с поверхностью и определяемый формулой (5.1.2). Иначе говоря, положительно определенной должна быть энергия области в пределах интегрирования в выражении (5.1.2), т.е. интегральный член в указанной формуле. Точно также при применении определения (5.1.1) для упругих поверхностных модулей не приводит к их положительной определенности.

Здесь необходимо сделать оговорку. При рассмотрении поверхности раздела твердое тело-вакуум, либо в некотором приближении твердое тело-газ, выбор внешней границы твердого тела более произволен. Так пусть в частном случае на Рис 5.1 слева от точки z_0 тело отсутствует. Тогда при проведении границы в точке z_0 мы приходим к описанию, рассмотренному выше, а проведение границы в точке z_B , что может быть предпочтительно, например, при минимуме функции $g(z)$ (обозначающей в нашем случае упругий модуль), а не максимуме, как указано на рисунке, приводит к обычному ограничению, состоящему в требовании положительной определенности поверхностных модулей.

Тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} удобно разложить на перпендикулярные и параллельные составляющие (например [177, 178]). Так для любого симметричного тензора второго ранга

$$\omega = \omega^{\parallel} + \omega^{\perp} = \begin{pmatrix} \omega_{11}^{\parallel} & \omega_{12}^{\parallel} & 0 \\ \omega_{12}^{\parallel} & \omega_{22}^{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_{13}^{\perp} \\ 0 & 0 & \omega_{23}^{\perp} \\ \omega_{13}^{\perp} & \omega_{23}^{\perp} & \omega_{33}^{\perp} \end{pmatrix} \quad (5.1.3)$$

Данное представление имеет смысл только для системы координат, связанной с поверхностью, т.е. когда ось 3 направлена по нормали к поверхности. Представление (5.1.3) не является, поэтому тензорной декомпозицией в том смысле, каковой является, например, разложение тензора на шаровую и девиаторную составляющую.

Применение представления (5.1.3) для выражения вариации упругой энергии (5.1.2) дает

$$\delta W^s = \int_{z_A}^{z_B} \sigma_{ij}^{\parallel}(z) \delta \varepsilon_{ij}^{\parallel}(z) dz - \sigma_{ij}^{\parallel A} \delta \varepsilon_{ij}^{\parallel A} h_A - \sigma_{ij}^{\parallel B} \delta \varepsilon_{ij}^{\parallel B} h_B + \quad (5.1.4)$$

$$\int_{z_A}^{z_B} \sigma_{ij}^{\perp}(z) \delta \varepsilon_{ij}^{\perp}(z) dz - \sigma_{ij}^{\perp A} \delta \varepsilon_{ij}^{\perp A} h_A - \sigma_{ij}^{\perp B} \delta \varepsilon_{ij}^{\perp B} h_B$$

Дальнейшее упрощение возможно в случае выполнения двух дополнительных условий [177]

$$\delta \varepsilon_{ij}^{\parallel} = \delta \varepsilon_{ij}^{\parallel A} = \delta \varepsilon_{ij}^{\parallel B} \quad (5.1.5)$$

$$\sigma_{ij}^{\perp} = \sigma_{ij}^{\perp A} = \sigma_{ij}^{\perp B} \quad (5.1.6)$$

первое из которых следует из однородности деформаций на рассматриваемом масштабе (при нарушении данного условия происходило бы изменение

скачка смещения на рассматриваемом интервале), а второе является следствием уравнений равновесия в случае отсутствия объемных сил.

При выполнении (5.1.5), (5.1.6) выражение для вариации плотности поверхностной упругой энергии (5.1.4) преобразуется к виду

$$\delta W^s = \sigma_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij}^{\parallel} + \sigma_{ij}^{\perp} \delta \varepsilon_{ij}^s = \sigma_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^s \quad (5.1.7)$$

Здесь

$$\sigma_{ij}^s = \int_{z_A}^{z_B} \sigma_{ij}^{\parallel}(z) dz - \sigma_{ij}^{\parallel A} h_A - \sigma_{ij}^{\parallel B} h_B \quad (5.1.8)$$

$$\varepsilon_{ij}^s = \int_{z_A}^{z_B} \varepsilon_{ij}^{\perp}(z) dz - \varepsilon_{ij}^{\perp A} h_A - \varepsilon_{ij}^{\perp B} h_B \quad (5.1.9)$$

естественно назвать поверхностными напряжениями и деформациями, соответственно. Их свойства отличает заметное своеобразие. Очевидно, согласно (5.1.7), они не образуют энергетической пары. Ненулевые компоненты поверхностных напряжений и поверхностных деформаций суть

$$\sigma^s = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^s & \sigma_{12}^s & 0 \\ \sigma_{12}^s & \sigma_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13}^s \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23}^s \\ \varepsilon_{13}^s & \varepsilon_{23}^s & \varepsilon_{33}^s \end{pmatrix} \quad (5.1.10)$$

Из первой из формул (5.1.10) видно, что поверхностные напряжения можно рассматривать как двумерный тензор второго ранга, что обычно и делается. Размерность поверхностных напряжений σ_{ij} есть Н/м, а поверхностных деформаций ε_{ij} - м. Введенные таким образом поверхностные деформации есть не что иное, как нормальный и тангенциальные эффективные скачки смещения $\varepsilon_{33}^s = [u_3]$, $2\varepsilon_{13}^s = [u_1]$, $2\varepsilon_{23}^s = [u_2]$. Заметим, что эти скачки смещения присутствуют не смотря на непрерывность истинных смещений на микроуровне.

Из выражения вариации упругой энергии (5.1.7) следуют равенства для переменных при лагранжевом описании (т.е. при отнесении всех переменных к физическому участку поверхности)

$$\left. \frac{\partial W^s}{\partial \varepsilon_{ij}^{\parallel}} \right|_{\varepsilon_{ij}^s} = \sigma_{ij}^s$$

$$\left. \frac{\partial W^s}{\partial \varepsilon_{ij}^s} \right|_{\varepsilon_{ij}^{\parallel}} = \sigma_{ij}^{\perp} \quad (5.1.11)$$

Первое из этих равенств есть хорошо известное уравнение Шаттлворса [179], записанное в лагранжевых переменных (см., например, [177]). Обычно, уравнение Шаттлворса записывают в эйлеровых переменных, при этом в выражении для напряжений появляются члены, связанные с изменением площади поверхности

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \gamma_0 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial W^s}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \quad (5.1.12)$$

В дальнейшем эйлерово представление (5.1.12) использоваться не будет.

В линеаризованном варианте при выполнении условий

$$\delta \varepsilon_{ij}^s = 0 \quad \vee \quad \sigma_{ij}^{\perp} = 0 \quad (5.1.13)$$

первое из соотношений (5.1.11), как следующее из условия (5.1.7), записывается в форме

$$\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^{s0} + C_{ijkl}^s \varepsilon_{kl}^{\parallel} = \sigma_{ij}^{s0} + C_{ijkl}^s \varepsilon_{kl}$$

$$i, j, k, l = 1, 2 \quad (5.1.14)$$

что представляет собой еще более привычный вид уравнений Шаттлворса в лагранжевых переменных. При этом для первого и второго случая (5.1.13) значения начальных напряжений σ_{ij}^{s0} и коэффициентов C_{ijkl}^s будут, вообще говоря, различны. Первый случай соответствует отсутствию поверхностных деформаций (5.1.10), т.е. эффективного скачка смещения. Однако это условие может не выполняться даже при непрерывных на микроуровне смещениях. Второй случай соответствует отсутствию напряжений по нормали к поверхности, что имеет место на свободной границе. Обычно при выводе уравнений Шаттлворса явно или не явно а priori предполагается выполнения условий (5.1.13).

Для изотропной поверхности уравнения (5.1.14) упрощаются и принимают следующий вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^s &= \sigma_{11}^{s0} + (\lambda^s + 2\mu^s)\varepsilon_{11} + \lambda^s\varepsilon_{22} \\ \sigma_{22}^s &= \sigma_{22}^{s0} + \lambda^s\varepsilon_{11} + (\lambda^s + 2\mu^s)\varepsilon_{22} \\ \sigma_{12}^s &= \sigma_{12}^{s0} + 2\mu^s\varepsilon_{12}\end{aligned}\tag{5.1.15}$$

Условия (5.1.13) выполняются с достаточной точностью в ряде случаев, например для свободных поверхностей, т.е. для случая поверхностных напряжений. Однако для более общего случая границы раздела твердых фаз дело обстоит сложнее. На основании первого из равенств (5.1.11) поверхностные напряжения σ_{ij}^s будут различны для различных поперечных деформаций ε_{ij}^s , т.е. они могут рассматриваться как функции продольных $\varepsilon_{ij}^{\parallel}$ и поперечных деформаций ε_{ij}^s . В линеаризованном варианте это соответствует замене уравнений (5.1.14) более общими

$$\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^{s0} + C_{ijkl}^s \varepsilon_{kl}^{\parallel} + C_{ijkl}^{s\perp} \varepsilon_{kl}^s = \sigma_{ij}^{s0} + C_{ijkl}^s \varepsilon_{kl} + C_{ijkl}^{s\perp} \varepsilon_{kl}^s\tag{5.1.16}$$

Аналогично, для поперечных напряжений следует записать

$$\sigma_{ij}^{\perp} = C_{ijkl}^{s\perp} \varepsilon_{kl} + C_{ijkl}^{\perp\perp} \varepsilon_{kl}^s \quad (5.1.17)$$

При этом все компоненты тензора деформаций входят в число аргументов энергии равноправно, что оправдывает форму записи (5.1.16).

По поводу выражения (5.1.16) следует сделать еще ряд пояснений. Значения начальных напряжений σ_{ij}^{s0} в формулах (5.1.14) и (5.1.16), вообще говоря, различны: в случае (5.1.14) они соответствуют *каким либо* фиксированным значениям поперечных деформаций (при отсутствии вариации деформаций $\delta\varepsilon_{ij}^s$), либо нулевым поперечным напряжениям $\sigma_{ij}^{\perp} = 0$, в то время как в случае (5.1.16) они соответствуют нулевым поперечным деформациям.

Матрицы C_{ijkl}^s и $C_{ijkl}^{s\perp}$ достаточно сильно разрежены. В общем случае $C_{ijkl}^s = 0$, если хотя бы из один из индексов равен 3, и $C_{ijkl}^{s\perp} = 0$, если ни один из индексов не равен 3. Отметим, что, согласно введенному способу определения поверхностных деформаций, размерности коэффициентов C_{ijkl}^s , $C_{ijkl}^{s\perp}$ и $C_{ijkl}^{\perp\perp}$ различны: размерность C_{ijkl}^s есть Н/м, размерность $C_{ijkl}^{s\perp}$ - Н/м², размерность $C_{ijkl}^{\perp\perp}$ - Н/ м³.

Выражения (5.1.16), (5.1.17) можно, таким образом, рассматривать как обобщение уравнений Шаттлворса для поверхностей раздела, учитывающих действие нормального и касательных к поверхности напряжений. Отметим, что на влияние давления (нормального напряжения) на величину поверхностной энергии указывалось ранее [191, 192]. Два обычно рассматриваемых варианта описания поверхностных эффектов являются частными случаями. Так наложив запрет на поверхностные деформации ε_{kl}^s , т.е. убрав в (5.1.16), (5.1.17) члены, содержащие $C_{ijkl}^{s\perp}$ и $C_{ijkl}^{\perp\perp}$, получаем

уравнение поверхностной упругости Шаттлворса (5.1.14). Убрав члены, содержащие C_{ijkl}^s , $C_{ijkl}^{s\perp}$, получаем вариант описания поверхностных эффектов при наличии скачка деформации – модель пружин (модель винклевского типа) [193-196].

Для достаточно широкого класса задач поверхность можно рассматривать как трансверсально-изотропную с осью симметрии, направленной по нормали. В этом случае уравнения (5.1.16) принимают упрощенный вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^s &= \sigma_{11}^{s0} + C_{1111}^s \varepsilon_{11} + C_{1122}^s \varepsilon_{22} + C_{1133}^{s\perp} \varepsilon_{33} \\ \sigma_{22}^s &= \sigma_{22}^{s0} + C_{1122}^s \varepsilon_{11} + C_{1111}^s \varepsilon_{22} + C_{1133}^{s\perp} \varepsilon_{33} \\ \sigma_{12}^s &= \sigma_{12}^{s0} + 2C_{1212}^s \varepsilon_{12}\end{aligned}\tag{5.1.18}$$

$$C_{1212}^s = (C_{1111}^s - C_{1122}^s) / 2$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^\perp &= \sigma_{33} = C_{1133}^{s\perp} \varepsilon_{11} + C_{1133}^{s\perp} \varepsilon_{22} + C_{3333}^{\perp\perp} \varepsilon_{33} \\ \sigma_{13}^\perp &= \sigma_{13} = 2C_{1313}^{\perp\perp} \varepsilon_{13}\end{aligned}\tag{5.1.19}$$

$$\sigma_{23}^\perp = \sigma_{23} = 2C_{1313}^{\perp\perp} \varepsilon_{23}$$

Далее рассмотрим модельный пример, а именно случай, когда приповерхностные изменения всех величин локализованы в пределах узкого слоя толщины h , внутри которого они постоянны, а вне слоя – отсутствуют.

5.1.2. Модель поверхностного слоя как предел слоя конечной толщины, обладающего постоянными свойствами

Рассмотрим слой материала толщины h , заключенный между слоями других материалов, так что суммарная толщина всех трех слоев есть $H > h$. Все три материала будем полагать линейно-упругими трансверсально-изотропными с плоскостями изотропии параллельными границам раздела слоев (Рисунок. 5.2). В системе координат с осью z , направленной по нормали к слоям, упругие свойства описываются набором упругих постоянных $C_{11}^i, C_{12}^i, C_{13}^i, C_{33}^i, C_{44}^i, C_{66}^i = (C_{11}^i - C_{22}^i)/2$ ($i = A$ для нижнего, $i = B$ для верхнего и $i = C$ - для среднего слоя).

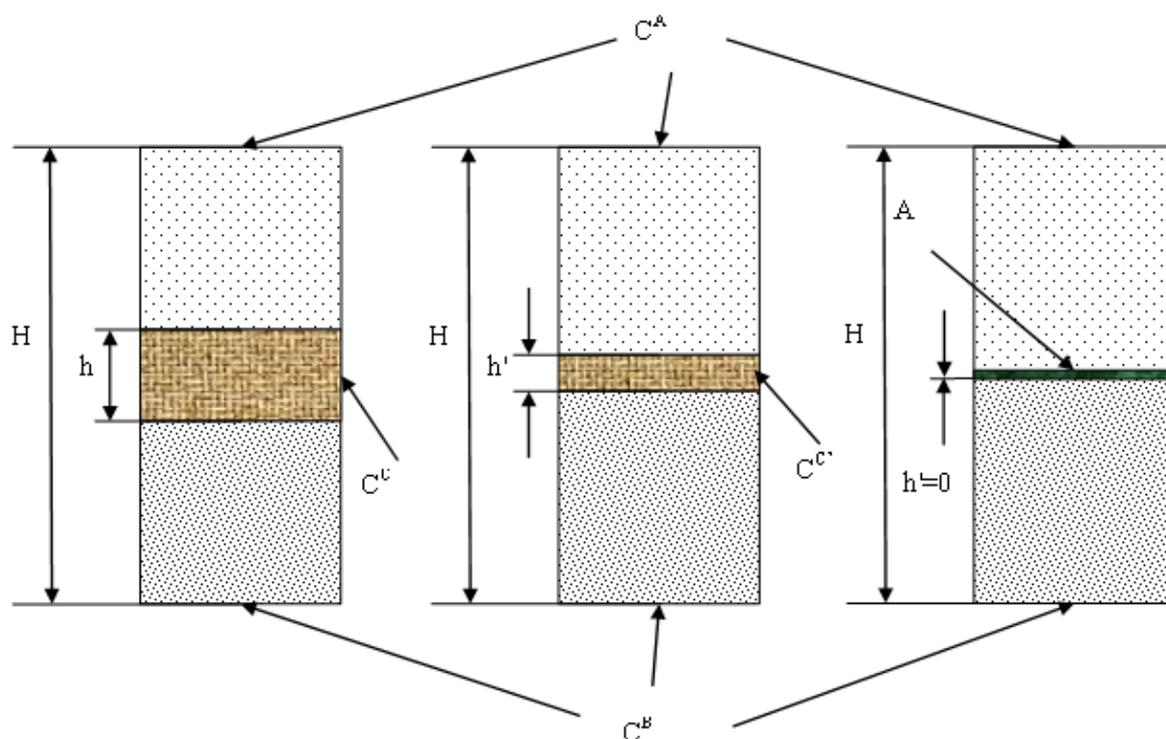


Рисунок. 5.2. Модель поверхностного слоя как предел слоя конечной толщины

Рассмотрим однородное нагружение области рассматриваемой структуры, содержащей участок срединного слоя и прилегающие к нему участки вышележащего и нижележащего слоев. Такое рассмотрение соответствует случаю слабо меняющегося поля, когда характерные расстояния, на которых происходит существенное изменение, значительно превосходят размер рассматриваемого элемента. Будем использовать одноиндексную систему записи (матричную запись закона Гука) для компонент деформации и напряжения, соответственно

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^k &= \varepsilon_1^k, & \varepsilon_{22}^k &= \varepsilon_2^k, & \varepsilon_{33}^k &= \varepsilon_3^k, & 2\varepsilon_{23}^k &= \varepsilon_4^k, & 2\varepsilon_{13}^k &= \varepsilon_4^k, & 2\varepsilon_{12}^k &= \varepsilon_6^k, \\ \sigma_{11}^k &= \sigma_1^k, & \sigma_{22}^k &= \sigma_2^k, & \sigma_{33}^k &= \sigma_3^k, & \sigma_{23}^k &= \sigma_4^k, & \sigma_{13}^k &= \sigma_5^k, & \sigma_{12}^k &= \sigma_6^k \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

$$k = A, B, C$$

Упругую энергию в данной системе обозначений можно записать как

$$U = U_0 + \frac{h}{2} \left[C_{11}^C (\varepsilon_1^{C2} + \varepsilon_2^{C2}) + 2C_{12}^C \varepsilon_1^C \varepsilon_2^C + 2C_{13}^C \varepsilon_3^C (\varepsilon_1^C + \varepsilon_2^C) + \right. \quad (5.1.21)$$

$$\left. C_{33}^C \varepsilon_3^{C2} + C_{66}^C \varepsilon_6^{C2} + C_{44}^C (\varepsilon_4^{C2} + \varepsilon_5^{C2}) \right]$$

Здесь U_0 - энергия вышележащего и нижележащего слоев.

Заменяем теперь промежуточный упругий слой толщины h эквивалентным составным слоем, состоящим из слоя толщины $h' < h$ со свойствами $C_{ij}^{C'}$ и двух слоев толщиной $(h-h')/2$ со свойствами C_{ij}^A и C_{ij}^B , соответствующими исходным вышележащему и нижележащему слоям таким образом, чтобы при произвольной заданной деформации значения упругой энергии исходной и эквивалентной упругой системы совпадали. Затем,

устремляя толщину нового слоя к нулю ($h' \rightarrow 0$) и изменяя при этом $C_{ij}^{C'}$ так, чтобы сохранялась упругая энергия, получим вместо структуры толщины H , состоявшей из двух слоев толщины $(H-h)/2$ и слоя толщины h между ними, эквивалентную структуру H , состоящую из двух слоев толщины $H/2$, соответствующих исходным материалам, и бесконечно тонкой поверхности между ними, наделенной такими новыми упругими свойствами A_{ij} , что при произвольной заданной деформации значения упругой энергии исходной и эквивалентной упругой системы совпадают. При этом упругие свойства эквивалентной поверхности полностью описываются упругими константами A_{ij} , полученными в результате указанного предельного перехода.

Выполним намеченную последовательность действий. Упругая энергия системы после замены исходного среднего слоя толщины h эквивалентным составным слоем, состоящим из слоя толщины $h' < h$ со свойствами $C_{ij}^{C'}$ и двух слоев толщиной $(h-h')/2$ со свойствами C_{ij}^A и C_{ij}^B , соответствующими исходным вышележащему и нижележащему слоям, будет

$$U_{eff} = U_0 +$$

$$\begin{aligned} & \frac{h-h'}{4} \left[C_{11}^A (\varepsilon_1^{A2} + \varepsilon_2^{A2}) + 2C_{12}^A \varepsilon_1^A \varepsilon_2^A + 2C_{13}^A \varepsilon_3^A (\varepsilon_1^A + \varepsilon_2^A) + \right. \\ & \quad \left. + C_{33}^A \varepsilon_3^{A2} + C_{66}^A \varepsilon_6^{A2} + C_{44}^A (\varepsilon_4^{A2} + \varepsilon_5^{A2}) + \right. \\ & \quad \left. + C_{11}^B (\varepsilon_1^{B2} + \varepsilon_2^{B2}) + 2C_{12}^B \varepsilon_1^B \varepsilon_2^B + 2C_{13}^B \varepsilon_3^B (\varepsilon_1^B + \varepsilon_2^B) + \right. \\ & \quad \left. + C_{33}^B \varepsilon_3^{B2} + C_{66}^B \varepsilon_6^{B2} + C_{44}^B (\varepsilon_4^{B2} + \varepsilon_5^{B2}) \right] + \\ & \frac{h'}{2} \left[C_{11}^{C'} (\varepsilon_1^{C'2} + \varepsilon_2^{C'2}) + 2C_{12}^{C'} \varepsilon_1^{C'} \varepsilon_2^{C'} + 2C_{13}^{C'} \varepsilon_3^{C'} (\varepsilon_1^{C'} + \varepsilon_2^{C'}) + \right. \\ & \quad \left. C_{33}^{C'} \varepsilon_3^{C'2} + C_{66}^{C'} \varepsilon_6^{C'2} + C_{44}^{C'} (\varepsilon_4^{C'2} + \varepsilon_5^{C'2}) \right] \quad (5.1.22) \end{aligned}$$

В выражении (5.1.22) деформирование эффективного слоя характеризуется деформациями вдоль слоя $\varepsilon_1^{C'}$, $\varepsilon_2^{C'}$, $\varepsilon_6^{C'}$, теми же, что и для исходного промежуточного слоя конечной толщины, и деформациями по нормали, вообще говоря, отличными от исходных. Компоненты деформации вдоль трех слоев являются общими,

$$\varepsilon_1^A = \varepsilon_1^B = \varepsilon_1^C = \varepsilon_1^{C'} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2^A = \varepsilon_2^B = \varepsilon_2^C = \varepsilon_2^{C'} = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_6^A = \varepsilon_6^B = \varepsilon_6^C = \varepsilon_6^{C'} = \varepsilon_6 \quad (5.1.23)$$

в то время как для компонент деформации в перпендикулярном направлении (в направлении оси z) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{h-h'}{2} \varepsilon_5^A + \frac{h-h'}{2} \varepsilon_5^B + h' \varepsilon_5^{C'} &= h \varepsilon_5^C \\ \frac{h-h'}{2} \varepsilon_4^A + \frac{h-h'}{2} \varepsilon_4^B + h' \varepsilon_4^{C'} &= h \varepsilon_4^C \\ \frac{h-h'}{2} \varepsilon_3^A + \frac{h-h'}{2} \varepsilon_3^B + h' \varepsilon_3^{C'} &= h \varepsilon_3^C \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

следующие из равенства смещений точек внешней поверхности исходного и эквивалентного составного промежуточного слоя. Кроме чисто кинематического ограничения (5.1.24) на величины $\varepsilon_3^j, \varepsilon_4^j, \varepsilon_5^j$ и $\varepsilon_3^{j'}, \varepsilon_4^{j'}, \varepsilon_5^{j'}$ ($j = A, B$), эти величины должны подчиняться уравнениям, следующим из принципа Лагранжа, т.е. обращать в минимум упругую энергию (5.1.22). Это выполняется при

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^A &= \frac{(C_{13}^C - C_{13}^A)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + C_{33}^C \varepsilon_3^C}{C_{33}^A} \\ \varepsilon_3^B &= \frac{(C_{13}^C - C_{13}^B)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + C_{33}^C \varepsilon_3^C}{C_{33}^A} \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

$$\varepsilon_5^A = \frac{C_{44}^C \varepsilon_5^C}{C_{44}^A}$$

$$\varepsilon_5^B = \frac{C_{44}^C \varepsilon_5^C}{C_{44}^B}$$

$$\varepsilon_4^A = \frac{C_{44}^C \varepsilon_4^C}{C_{44}^A}$$

$$\varepsilon_4^B = \frac{C_{44}^C \varepsilon_4^C}{C_{44}^B}$$

Равенства (5.1.25) можно также рассматривать как условия равенства напряжений $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ в слоях A, B, C , соответственно.

Подстановка (5.1.24) в (5.1.22) дает выражение для энергии системы, эквивалентной исходной энергии (5.1.21), выраженной через те же кинематические переменные $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6$, $\varepsilon_3^C, \varepsilon_4^C, \varepsilon_5^C$. Для полной эквивалентности равенство $U = U_{eff}$ должно выполняться для любого сочетания кинематических переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6$, $\varepsilon_3^C, \varepsilon_4^C, \varepsilon_5^C$ и любых упругих модулей, как во внутреннем слое, так и в обоих прилегающих слоях C_{ij}^k $k = A, B, C$. При этом равенство $U = U_{eff}$ дает систему уравнений относительно упругих постоянных $C_{ij}^{C'}$ эффективного слоя новой толщины, решение которой будет

$$C_{11}^{C'} = C_{23}^{C'} = C_{12}^{C'} + 2C_{66}^{C'} \quad (5.1.26)$$

$$C_{12}^{C'} = C_{21}^{C'} = \frac{h/h'}{4C_{33}^A C_{33}^B - 2C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)} \times$$

$$\times \left[C_{13}^{B2} (2C_{33}^A - C_{33}^C) + C_{13}^{A2} (2C_{33}^B - C_{33}^C) + \right. \quad (5.1.27)$$

$$2 C_{13}^{C2} (C_{33}^A + C_{33}^B) - 4C_{13}^B C_{13}^C C_{33}^A - 4C_{13}^A C_{13}^C C_{33}^B + 2C_{13}^A C_{13}^B C_{33}^C -$$

$$\left. (2C_{12}^C - C_{12}^A - C_{12}^B) (C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B) - 2C_{33}^A C_{33}^B) \right]$$

$$C_{13}^{C'} = C_{23}^{C'} = C_{31}^{C'} = C_{32}^{C'} = \frac{(C_{13}^B C_{33}^A + C_{13}^A C_{33}^B) C_{33}^C - 2C_{13}^C C_{33}^A C_{33}^B}{C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B) - 2C_{33}^A C_{33}^B} \quad (5.1.28)$$

$$C_{33}^{C'} = \frac{h'}{h} \left(\frac{1}{C_{33}^C} - \frac{1}{2C_{33}^A} - \frac{1}{2C_{33}^B} \right)^{-1} \quad (5.1.29)$$

$$C_{44}^{C'} = C_{55}^{C'} = \frac{h'}{h} \left(\frac{1}{C_{44}^C} - \frac{1}{2C_{44}^A} - \frac{1}{2C_{44}^B} \right)^{-1} \quad (5.1.30)$$

$$\begin{aligned} C_{66}^{C'} &= \frac{h}{2h'} \left(C_{11}^C - C_{12}^C - \frac{C_{11}^A - C_{22}^A}{2} - \frac{C_{11}^B - C_{22}^B}{2} \right) = \\ &= \frac{h}{h'} \left(C_{66}^C - \frac{C_{66}^A + C_{66}^B}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

Выполним в получившихся выражениях предельный переход $h' \rightarrow 0$. При этом условия (5.1.24) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \varepsilon_5^A + \frac{h}{2} \varepsilon_5^B + [u_1] &= h \varepsilon_5^C \\ \frac{h}{2} \varepsilon_4^A + \frac{h}{2} \varepsilon_4^B + [u_2] &= h \varepsilon_4^C \\ \frac{h}{2} \varepsilon_3^A + \frac{h}{2} \varepsilon_3^B + [u_3] &= h \varepsilon_3^C \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

Здесь произведение деформации внутри слоя на его толщину есть разница смещений его границ

$$\begin{aligned} [u_1] &= u_{1+} - u_{1-} = \lim_{h' \rightarrow 0} h' \varepsilon_5^{C'} \\ [u_2] &= u_{2+} - u_{2-} = \lim_{h' \rightarrow 0} h' \varepsilon_4^{C'} \\ [u_3] &= u_{3+} - u_{3-} = \lim_{h' \rightarrow 0} h' \varepsilon_3^{C'} \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

Выражение для упругой энергии эффективного слоя при $h' \rightarrow 0$ преобразуется к виду

$$U_{eff} = U_0 +$$

$$\begin{aligned} & \frac{h}{4} \left[C_{11}^A (\varepsilon_1^{A2} + \varepsilon_2^{A2}) + 2C_{12}^A \varepsilon_1^A \varepsilon_2^A + 2C_{13}^A \varepsilon_3^A (\varepsilon_1^A + \varepsilon_2^A) + C_{33}^A \varepsilon_3^{A2} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + C_{66}^A \varepsilon_6^{A2} + C_{44}^A (\varepsilon_4^{A2} + \varepsilon_5^{A2}) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + C_{11}^B (\varepsilon_1^{B2} + \varepsilon_2^{B2}) + 2C_{12}^B \varepsilon_1^B \varepsilon_2^B + 2C_{13}^B \varepsilon_3^B (\varepsilon_1^B + \varepsilon_2^B) + C_{33}^B \varepsilon_3^{B2} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + C_{66}^B \varepsilon_6^{B2} + C_{44}^B (\varepsilon_4^{B2} + \varepsilon_5^{B2}) \right] + \\ & \frac{A_{11}}{2} (\varepsilon_1^{C2} + \varepsilon_2^{C2}) + A_{12} \varepsilon_{11}^C \varepsilon_{22}^C + A_{13} [u_3] (\varepsilon_1^C + \varepsilon_2^C) + \frac{A_{33}}{2} [u_3]^2 + \\ & \frac{A_{44}}{2} ([u_1]^2 + [u_2]^2) + \frac{A_{66}}{2} \varepsilon_6^{C2} \end{aligned} \tag{5.1.34}$$

Здесь

$$A_{11} = \lim_{h' \rightarrow 0} h' C_{11}^{C'} \tag{5.1.35}$$

$$A_{12} = \lim_{h' \rightarrow 0} h' C_{12}^{C'} \tag{5.1.36}$$

$$A_{13} = \lim_{h' \rightarrow 0} C_{13}^{C'} = C_{13}^{C'} \tag{5.1.37}$$

$$A_{33} = \lim_{h' \rightarrow 0} C_{33}^{C'} / h' \tag{5.1.38}$$

$$A_{44} = \lim_{h' \rightarrow 0} C_{44}^{C'} / h' \tag{5.1.39}$$

$$A_{66} = \lim_{h' \rightarrow 0} h' C_{66}^{C'} \tag{5.1.40}$$

После подстановки сюда (5.1.26)-(5.1.31) окончательно получаем

$$A_{11} = A_{22} = A_{12} + 2A_{66} \quad (5.1.41)$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{h}{4C_{33}^A C_{33}^B - 2C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)} \left[C_{13}^{B2} (2C_{33}^A - C_{33}^C) + \right. \\ \left. + C_{13}^{A2} (2C_{33}^B - C_{33}^C) + \right. \\ \left. + 2 C_{13}^{C2} (C_{33}^A + C_{33}^B) - 4C_{13}^B C_{13}^C C_{33}^A - 4C_{13}^A C_{13}^C C_{33}^B + 2 C_{13}^A C_{13}^B C_{33}^C - \right. \\ \left. (2C_{12}^C - C_{12}^A - C_{12}^B) (C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B) - 2C_{33}^A C_{33}^B) \right] \quad (5.1.42)$$

$$A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = \frac{(C_{13}^B C_{33}^A + C_{13}^A C_{33}^B) C_{33}^C - 2C_{13}^C C_{33}^A C_{33}^B}{C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B) - 2C_{33}^A C_{33}^B} \quad (5.1.43)$$

$$A_{33} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{C_{33}^C} - \frac{1}{2C_{33}^A} - \frac{1}{2C_{33}^B} \right)^{-1} \quad (5.1.44)$$

$$A_{44} = A_{55} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{C_{44}^C} - \frac{1}{2C_{44}^A} - \frac{1}{2C_{44}^B} \right)^{-1} \quad (5.1.45)$$

$$A_{66} = \frac{h}{2} \left(C_{11}^C - C_{12}^C - \frac{C_{11}^A - C_{22}^A}{2} - \frac{C_{11}^B - C_{22}^B}{2} \right) = \\ = h \left(C_{66}^C - \frac{C_{66}^A + C_{66}^B}{2} \right) \quad (5.1.46)$$

В полученных формулах (5.1.41)-(5.1.46) упругие модули A_{ij} имеют разную размерность (см. рассуждения после формулы (5.1.17)). Они, как и

следовало ожидать, не зависят от толщины эффективного слоя h' , однако зависят от толщины исходного слоя h , который моделируют. Так если исходный слой толщины h моделируется согласно формулам (5.1.41)-(5.1.46) упругими модулями A_{ij} , то для слоя из того же материала удвоенной толщины жесткость в продольном направлении, определяемая модулями A_{11}, A_{12}, A_{66} , будет вдвое большей, а жесткость в поперечном направлении, определяемая модулями A_{33}, A_{44} , - вдвое меньшей. Принципиально важно, что упругие модули A_{ij} определяются толщиной h и упругими свойствами не независимо, а посредством комбинаций типа (5.1.44)-(5.1.46).

Рассмотрим некоторые частные случаи полученного решения (решения, полученного после предельного перехода: левые части равенств (5.1.33), условия (5.1.34), (5.1.41)-(5.1.46)).

Частный случай 1: Тонкий жесткий слой. В этом случае толщина слоя стремится к нулю, а упругие постоянные C_{ij}^C имеют одинаковый порядок и стремятся к бесконечности так, что

$$h C_{ij}^C \rightarrow const \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (5.1.47)$$

Выполнение условий энергетической эквивалентности, хотя бы в смысле главного члена разложения по малому параметру отношения модулей $(C_{66}^A + C_{66}^B) / C_{66}^C$ требует выполнения **дополнительных** условий. Рассмотрим, например, выражение для A_{66} (формула (5.1.46)). Чтобы A_{66} оставалось постоянным при $h \rightarrow 0$, необходимо стремление C_{66}^C к бесконечности как $A_{66} / h + (C_{66}^A + C_{66}^B) / 2$. Аналогичное должно иметь место и для модулей C_{11}^C, C_{12}^C . Что касается модулей A_{33}, A_{44}, A_{55} , то для устранения бесконечного вклада в энергию, необходимо наложить запрет на наличие скачков смещения $[u_n] = 0, n = 1, 2, 3$. При этом вклад члена, содержащего A_{13}

исчезает, поскольку при вычислении энергии коэффициент A_{13} домножается на $[u_3] = 0$. Такой предельный переход соответствует случаю традиционной теории поверхностной упругости с отсутствием начальных напряжений при нулевых деформациях.

Значимые коэффициенты для рассматриваемого частного случая получаются разложением (5.1.41)-(5.1.46) по малым $C_{ij}^A / C_{ij}^C, C_{ij}^B / C_{ij}^C$

$$A_{11} = A_{22} = A_{12} + 2A_{66} \quad A_{12} = A_{21} = h \left(C_{12}^C - \frac{C_{13}^{C2}}{C_{33}^C} \right) \quad A_{66} = h C_{66}^C \quad (5.1.48)$$

Для изотропного промежуточного слоя формулы (5.1.48) с точностью до обозначений совпадают с формулами работы [220].

Замечание. В соответствии с определением поверхностных модулей, как и всякой другой поверхностной величины, в теории поверхностной упругости через интегралы от избытка соответствующей величины по нормали к поверхности, логично рассматривать предельный переход вида $h(C_{ij}^{C'} - (C_{ij}^A + C_{ij}^B)/2) \rightarrow const$, а не $h C_{ij}^{C'} \rightarrow const$ при $h \rightarrow 0$. Однако при $C_{ij}^C \rightarrow \infty$ и ограниченных C_{ij}^A, C_{ij}^B разница сказывается лишь на членах высших порядков малости.

Частный случай 2. Тонкий мягкий слой. В этом случае все упругие постоянные C_{ij}^C имеют одинаковый порядок, причем

$$h C_{ij}^{C-1} \rightarrow const \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (5.1.49)$$

То есть с уменьшением толщины слоя соответствующим образом растет не жесткость, а податливость. В таком случае существенный вклад в энергию дают лишь члены, содержащие A_{33}, A_{44} , которые, согласно (5.1.44), (5.1.45), стремятся к постоянным при $h C_{33}^{C-1} \rightarrow const, h C_{44}^{C-1} \rightarrow const, h \rightarrow 0$.

Согласно (5.1.41), (5.1.42), (5.1.46), модули A_{11}, A_{12}, A_{66} при $h \rightarrow 0$ обращаются в ноль, а модуль A_{13} , хотя и стремится к константе, как видно из (5.1.43), но слагаемое, его содержащее в выражении для энергии должно стремиться к нулю при $h \rightarrow 0$. Получаемая в результате такого предельного перехода модель есть модель линейных пружин [193-196]. Уравнение (5.1.49), являющееся условием ее применимости показывает, что использование модели имеет смысл для мягких, податливых приповерхностных слоев. Значимые коэффициенты для рассматриваемого частного случая получаются разложением (5.1.41)-(5.1.46) по малым $C_{ij}^C / C_{ij}^A, C_{ij}^C / C_{ij}^B$

$$A_{33} = \frac{C_{33}^C}{h}$$

$$A_{44} = A_{55} = \frac{C_{44}^C}{h} \quad (5.1.50)$$

Достоинствами двух предыдущих моделей, получаемых в результате предельных переходов, является их относительная простота, а недостатком – отсутствие общности. Действительно, ни одна из них не позволяет обеспечить сохранение полной упругой энергии для произвольных упругих модулей слоев и при произвольных деформациях. Для общего случая, сохранение модулей A_{ij} обеспечивается когда $h C_{33}^{C-1} \rightarrow const$, $h C_{44}^{C-1} \rightarrow const$, $h C_{11}^C \rightarrow const$, $h C_{12}^C \rightarrow const$, $C_{13}^C \rightarrow const$ при $h \rightarrow 0$. Такой случай не сводится к объединению частных случаев 1 и 2, поскольку в определяющих соотношениях не исчезает перекрестный член с модулем A_{13} . Упругие параметры модели при этом определяются всеми формулами (5.1.41)-(5.1.46).

Рассмотрим еще один тип предельного перехода в полученных формулах. Предел $h \rightarrow 0$ при фиксированных C_{ij}^k $k = A, B, C$ соответствует

классической упругости, т.е. отсутствию какого бы то ни было вклада поверхности. Действительно, поверхностные модули A_{33}, A_{44}, A_{55} согласно (5.1.44), (5.1.45) стремятся к бесконечности. При этом в соответствии с (5.1.34) бесконечно большой становится энергия системы при конечных скачках смещения $[u_n]$, $n=1,2,3$. Следовательно, данные скачки смещения должны отсутствовать $[u_n]=0$, $n=1,2,3$. При $[u_3]=0$ рассмотрение перекрестных модулей $A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32}$ согласно (5.1.22) лишается смысла, поскольку при любом конечном значении они не дают вклада в величину энергии. Согласно (5.1.41), (5.1.42), (5.1.46) другие модули A_{11}, A_{12}, A_{66} при $h \rightarrow 0$ обращаются в нуль и в соответствии с (5.1.34) не дают вклада в упругую энергию при любых конечных деформациях.

Итак, при указанном предельном переходе рассматриваемая поправка является исчезающе малой. Оценим порядок малости данной поправки. Для этого рассмотрим область среды, содержащую слой толщины h и простирающуюся по нормали к слою на величину $H \gg h$, а вдоль слоя на единичную длину. Тогда, при условии того, что упругие постоянные всех слоев одного порядка, на основании (5.1.21) относительный вклад в энергию слоя S должен убывать пропорционально уменьшению относительной толщины промежуточного слоя h/H , поскольку в (5.1.21) $U_0 \sim H$, а все остальные члены пропорциональны h . Согласно определению модулей эффективного бесконечно тонкого слоя вклад от каждого слагаемого, содержащего A_{ij} , в (5.1.22) должен быть также пропорционален h , что так и есть, с учетом (5.1.41)-(5.1.46) и того, что (при сопоставимости всех упругих констант) $[u_n] \sim \varepsilon_{3n} h$. Таким образом, формулы (5.1.41)-(5.1.46) можно рассматривать как определяющие линейную поправку (первый член разложения по h/H) к классической упругости.

Очевидно, что указанный предел отличается от рассмотренного выше, когда толщина слоя устремлялась к нулю с одновременным изменением его упругих свойств.

5.1.3. Тонкий слой между изотропными материалами

Для частного случая изотропии вышележащего и нижележащего слоев формулы (5.1.41)-(5.1.46) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 A_{11} = & (h(-4\lambda_B\mu_A(\lambda_A + \mu_A) - 4(2\mu_A(\lambda_B + \mu_A) + \lambda_A(\lambda_B + 2\mu_A))\mu_B - \\
 & 4(\lambda_A + 2\mu_A)\mu_B^2 + 2C_{11}^C(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) - \\
 & 4C_{13}^C(\lambda_B\mu_A + \lambda_A(\lambda_B + \mu_B)) + C_{13}^{C2}(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B)) + \\
 & C_{33}^C(2(\lambda_A + \mu_A + \mu_B)(\lambda_B + \mu_A + \mu_B) - C_{11}^C(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B)))) / \\
 & (2(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) - C_{33}^C(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B))) \\
 & (5.1.51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} = & (h(-2\lambda_A\lambda_B\mu_A - 2(\lambda_A\lambda_B + 2(\lambda_A + \lambda_B)\mu_A)\mu_B - 2C_{13}^C(\lambda_B\mu_A + \lambda_A(\lambda_B + \mu_B)) + \\
 & C_{13}^{C2}(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B)) + C_{33}^C(\lambda_B(\mu_A + \mu_B) + \lambda_A(2\lambda_B + \mu_A + \mu_B)) + \\
 & C_{12}^C(2(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) - C_{33}^C(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B)))) / \\
 & (2(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) - C_{33}^C(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B))) \\
 & (5.1.52)
 \end{aligned}$$

$$A_{13} = \frac{2(-C_{13}^C(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) + C_{33}^C(\lambda_B\mu_A + \lambda_A(\lambda_B + \mu_B)))}{-2(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) + C_{33}^C(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B))} \quad (5.1.53)$$

$$A_{33} = -\frac{2}{h\left(-\frac{2}{C_{33}^C} + \frac{1}{\lambda_A + 2\mu_A} + \frac{1}{\lambda_B + 2\mu_B}\right)} \quad (5.1.54)$$

Примечание. Если мы будем устремлять к нулю толщину слоя при замене слоя на эквивалентную поверхность без заполнения образующегося пространства материалами вышележащего и нижележащего слоя, а просто за счет уменьшения толщины трехслойной структуры, то в U_{ef} членов с h не будет. Тогда сравнение U и U_{ef} сразу даст $A_{11} = h C_{11}^C$, $A_{12} = h C_{12}^C$, $A_{13} = C_{13}^C$, $A_{33} = h^{-1} C_{33}^C$. Все перекрестные члены A_{13} присутствуют.

5.1.4. Модель поверхностного слоя как предела слоя конечной толщины, обладающего постоянными свойствами при наличии собственных деформаций

Рассмотрим теперь более общий случай, а именно: пусть в каждом из слоев могут присутствовать различные для каждого слоя собственные (свободные от напряжений) деформации ε_k^{Pn} , $n = A, B, C$, $k = 1 \div 6$, так, что полные деформации ε_k^{Tn} суть сумма упругих и собственных деформаций

$$\varepsilon_k^{Tn} = \varepsilon_k^{Pn} + \varepsilon_k^n, \quad n = A, B, C, \quad k = 1 \div 6 \quad (5.1.55)$$

Обобщение выражения (5.1.21) для упругой энергии будет иметь вид

$$U = U_0 + \frac{h}{2} C_{ij}^C (\varepsilon_i^{TC} - \varepsilon_i^{PC}) (\varepsilon_j^{TC} - \varepsilon_j^{PC}) \quad (5.1.56)$$

А обобщение выражения (5.1.34) для эффективной энергии составного слоя можно записать как

$$U = U_0 + \frac{h}{4} C_{ij}^A (\varepsilon_i^{TA} - \varepsilon_i^{PA}) (\varepsilon_j^{TA} - \varepsilon_j^{PA}) + \frac{h}{4} C_{ij}^B (\varepsilon_i^{TB} - \varepsilon_i^{PB}) (\varepsilon_j^{TB} - \varepsilon_j^{PB}) +$$

$$\frac{A_{ij}^{EE}}{2} \varepsilon_i^{ED} \varepsilon_i^{ED} + A_{ij}^{EP} \varepsilon_i^{ED} \varepsilon_i^{PD} + \frac{A_{ij}^{PP}}{2} \varepsilon_i^{PD} \varepsilon_i^{PD} + A_{ij}^{EA} \varepsilon_i^{ED} \varepsilon_i^{PA} + A_{ij}^{EB} \varepsilon_i^{ED} \varepsilon_i^{PB} + \quad (5.1.57)$$

$$A_{ij}^{PA} \varepsilon_i^{PD} \varepsilon_i^{PA} + A_{ij}^{PB} \varepsilon_i^{PD} \varepsilon_i^{PB} + A_{ij}^{AB} \varepsilon_i^{PA} \varepsilon_i^{PB} + \frac{A_{ij}^{AA}}{2} \varepsilon_i^{PA} \varepsilon_i^{PA} + \frac{A_{ij}^{BB}}{2} \varepsilon_i^{PB} \varepsilon_i^{PB}$$

Здесь введено обозначение

$$\varepsilon^{TD} = \left\{ \varepsilon_1^{TC}, \varepsilon_2^{TC}, [u_3^T], [u_2^T], [u_1^T], \varepsilon_6^{TC} \right\}^T$$

$$\varepsilon^{PD} = \left\{ \varepsilon_1^{PC}, \varepsilon_2^{PC}, [u_3^P], [u_2^P], [u_1^P], \varepsilon_6^{PC} \right\}^T \quad (5.1.58)$$

$$\varepsilon^{ED} = \varepsilon^{TD} - \varepsilon^{PD}$$

а $[u_3^T], [u_2^T], [u_1^T]$ и $[u_3^P], [u_2^P], [u_1^P]$ обозначают скачки полного смещения и смещения, соответствующего собственным (свободным от напряжений) деформациям. Матрицы A_{ij} с одинаковыми верхними (нетензорными) индексами – симметричны, матрицы с неодинаковыми верхними индексами – несимметричны. Введенные таким образом коэффициенты A_{ij} дают квадратичную форму наиболее общего вида для упругой энергии. Как будет видно из дальнейшего изложения, только такая форма позволяет найти свойства эффективного бесконечно тонкого слоя для произвольных упругих параметров слоев.

Для скачков смещения должны выполняться условия совместности, аналогичные (5.1.32), отдельно для полной и собственной деформации

$$\frac{h}{2}\varepsilon_k^{TA} + \frac{h}{2}\varepsilon_k^{TB} + [u_1^T] = h\varepsilon_k^{TC} \quad (5.1.59)$$

$$\frac{h}{2}\varepsilon_k^{PA} + \frac{h}{2}\varepsilon_k^{PB} + [u_1^P] = h\varepsilon_k^{PC} \quad k = 3, 4, 5$$

Кроме того, должно выполняться равенство напряжений $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ в слоях A, B, C , соответственно.

$$\begin{aligned} C_{33}^A(\varepsilon_{T3}^A - \varepsilon_{P3}^A) + C_{13}^A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1^{PA} - \varepsilon_2^{PA}) = \\ = C_{13}^C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1^{PC} - \varepsilon_2^{PC}) + C_{33}^C(\varepsilon_3^{TC} - \varepsilon_3^{PC}) = \end{aligned} \quad (5.1.60)$$

$$= C_{33}^B(\varepsilon_3^{TB} - \varepsilon_3^{PB}) + C_{13}^B(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1^{PB} - \varepsilon_2^{PB})$$

$$C_{44}^A(\varepsilon_k^{TA} - \varepsilon_k^{PA}) = C_{44}^B(\varepsilon_k^{TB} - \varepsilon_k^{PB}) = C_{44}^C(\varepsilon_k^{TC} - \varepsilon_k^{PC}) \quad (5.1.61)$$

$$k = 4, 5$$

Подстановка (5.1.59)-(5.1.61) в (5.1.57) дает выражение для энергии системы, эквивалентной исходной (5.1.56), и выраженной через те же кинематические переменные, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3^{EC}, \varepsilon_4^{EC}, \varepsilon_5^{EC}, \varepsilon_6, \varepsilon_k^{Pn}, n = A, B, C, k = 1 \div 6$. Для того, чтобы системы были эквивалентны, равенство $U = U_{eff}$ должно выполняться для любого сочетания указанных кинематических переменных.

Поскольку при отсутствии собственных деформаций полные деформации равны упругим, обозначение матрицы A_{ij}^{EE} соответствует обозначению матрицы A_{ij} в (5.1.41)-(5.1.46).

Если собственные деформации присутствуют только в среднем слое, то достаточно знать выражения для матриц A_{ij}^{EP} и A_{ij}^{PP} .

$$A_{11}^{PP} = A_{22}^{PP} = A_{12}^{PP} + 2A_{66}^{PP}$$

$$A_{12}^{PP} = A_{21}^{PP} = -\frac{h}{2} \left[C_{12}^A + C_{12}^B + \frac{C_{13}^{A2} (2C_{33}^B - C_{33}^C) + C_{13}^{B2} (2C_{33}^A - C_{33}^C) + 2C_{13}^A C_{13}^B C_{33}^C}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)} \right]$$

$$A_{66}^{PP} = -\frac{h}{4} (C_{11}^A - C_{12}^A + C_{11}^B - C_{12}^B) = -\frac{h}{2} (C_{66}^A + C_{66}^B) \quad (5.1.62)$$

Для перекрестного члена

$$A_{11}^{EP} = A_{22}^{EP} = A_{12}^{EP} + 2A_{66}^{EP}$$

$$A_{12}^{EP} = A_{21}^{EP} = A_{12}^{PP} - h \frac{C_{13}^C (C_{33}^A C_{13}^B + C_{33}^B C_{13}^A)}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)}$$

$$A_{31}^{EP} = A_{32}^{EP} = -\frac{C_{33}^C (C_{13}^B C_{33}^A + C_{13}^A C_{33}^B)}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)}$$

$$A_{66}^{EP} = A_{66}^{PP} \quad (5.1.63)$$

Если собственные деформации присутствуют также в слое A, то необходимо знать матрицы A_{ij}^{AA} , A_{ij}^{EA} и A_{ij}^{PA} . Их ненулевые компоненты суть

$$A_{11}^{AA} = A_{22}^{AA} = A_{12}^{AA} + 2A_{66}^{AA}$$

$$A_{66}^{AA} = -\frac{h}{4}(C_{11}^A - C_{12}^A) = -\frac{h}{2}C_{66}^A$$

$$A_{12}^{AA} = A_{21}^{AA} = \frac{h}{2} \left[-C_{12}^A + \frac{C_{13}^{A2} (2C_{33}^B - C_{33}^C)}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)} \right] \quad (5.1.64)$$

$$A_{11}^{EA} = A_{22}^{EA} = A_{12}^{EA} + 2A_{66}^{EA}$$

$$A_{12}^{EA} = A_{21}^{EA} = -A_{12}^{AA} + \frac{h}{2} \frac{C_{13}^A (2C_{33}^B C_{13}^C - C_{13}^B C_{33}^C)}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)}$$

$$A_{31}^{EA} = A_{32}^{EA} = \frac{C_{13}^A C_{33}^B C_{33}^C}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)}$$

$$A_{66}^{EA} = \frac{h}{4}(C_{11}^A - C_{12}^A) = \frac{h}{2}C_{66}^A \quad (5.1.65)$$

$$A_{11}^{PA} = A_{22}^{PA} = A_{12}^{PA} + 2A_{66}^{PA}$$

$$A_{12}^{PA} = A_{21}^{PA} = A_{12}^{TT} - h \frac{C_{13}^A C_{33}^B C_{13}^C}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)}$$

$$A_{66}^{PA} = \frac{h}{4}(C_{11}^A - C_{12}^A) = \frac{h}{2}C_{66}^A \quad (5.1.66)$$

Если собственные деформации присутствуют также в слое В то необходимо знать выражения для матриц A_{ij}^{BB} , A_{ij}^{EB} , A_{ij}^{PB} и A_{ij}^{AB} , причем выражения для ненулевых компонент первых их трех матриц получаются заменой индексов А на В, и В на А в формулах (5.1.64)-(5.1.66). Ненулевые компоненты A_{ij}^{AB} суть

$$A_{11}^{AB} = A_{22}^{AB} = A_{12}^{AB} = A_{21}^{AB} = \frac{h}{2} \frac{C_{13}^A C_{13}^B C_{33}^C}{2C_{33}^A C_{33}^B - C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)} \quad (5.1.67)$$

5.1.5. Постановка граничных условий на поверхности раздела

Для того чтобы воспользоваться потенциальными преимуществами теории поверхностной упругости – возможностью заменить рассмотрение деформирования реальных трехмерных объектов описанием специфических граничных условий на двумерной границе – необходимо выписать эти граничные условия. Для этого нужно величины (напряжения, деформации и смещения), связанные с поверхностью, выразить через граничные значения соответствующих величин прилегающих к поверхности областей и связать их необходимым количеством уравнений. Необходимые уравнения получим по теореме Лагранжа, продифференцировав выражения для упругой энергии (5.1.57) по компонентам упругих деформаций в слое

$$\sigma_i^s = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_i^s} = A_{ij}^{EE} \varepsilon_i^{ED} + A_{ij}^{EP} \varepsilon_j^{PD} + A_{ij}^{TA} \varepsilon_j^{PA} + A_{ij}^{EB} \varepsilon_j^{PB} \quad (5.1.68)$$

Получившиеся уравнения можно назвать уравнениями обобщенного закона Гука (или обобщенного закона Шаттлворса) для поверхности раздела при наличии собственных деформаций, в которых $\varepsilon_j^{PA}, \varepsilon_j^{PB}$ – собственные деформации прилегающих слоев, $\varepsilon_j^{ED}, \varepsilon_j^{PD}$ – упругие и собственные деформации приповерхностного слоя, определяемые (5.1.58).

Здесь следует сделать некоторые уточнения. Поскольку под поверхностными величинами всюду понимался интеграл от избытка соответствующих величин по нормали, то продольные компоненты

деформаций (как и нормальные компоненты напряжения) не являются , строго говоря, поверхностными величинами. Более того, поскольку компоненты деформации в плоскости поверхности в общем случае претерпевают разрыв, под продольными поверхностными деформациями логично понимать полусумму продольных деформаций прилегающих слоев.

$$\varepsilon^{TD} = \left\{ \frac{\varepsilon_1^{TA} + \varepsilon_1^{TB}}{2}, \frac{\varepsilon_2^{TA} + \varepsilon_2^{TB}}{2}, u_3^{TB} - u_3^{TA}, u_2^{TB} - u_2^{TA}, u_1^{TB} - u_1^{TA}, \frac{\varepsilon_6^{TA} + \varepsilon_6^{TB}}{2} \right\}^T \quad (5.1.69)$$

Аналогичная ситуация имеет место для напряжений - компоненты напряжения по нормали к поверхности в общем случае также терпят разрыв за счет сил, возникающих в приповерхностном слое, воспринимающих часть нагрузки при наличии кривизны подобно оболочке. Здесь также для компонент, терпящих разрыв, в качестве значений логично понимать полусуммы напряжений на границах слоя

$$\sigma^S = \left\{ \sigma_1^S, \sigma_2^S, \frac{\sigma_3^A + \sigma_3^B}{2}, \frac{\sigma_4^A + \sigma_4^B}{2}, \frac{\sigma_5^A + \sigma_5^B}{2}, \sigma_6^S \right\}^T \quad (5.1.70)$$

Условия (5.1.68), (5.1.69), (5.1.70) вместе с уравнениями равновесия на поверхности (уравнениями Лапласа-Юнга)

$$\sigma^A - \sigma^B = \nabla_s \sigma^S \quad (5.1.71)$$

и являются граничными условиями на поверхности.

Для иллюстрации приведем таблицу (Таблица 5.1), показывающую различие условий полного контакта, пружинного (винклеровского) взаимодействия, контакта типа традиционной поверхностной упругости, контакта типа обобщенной поверхностной упругости (рассматриваемая модель, для простоты ограниченная случаем отсутствия собственных деформаций).

Таблица 5.1. Варианты записи условий контакта.

Полный контакт	Винклеровский слой	Поверхностная упругость	Обобщенная поверхностная упругость
Кинематические условия:			
$[u_i]=0$	$[u_i]=\varepsilon_{ni}^S$	$[u_i]=0$	$[u_i]=\varepsilon_{ni}^S$
Статические условия:			
$[\sigma_{ni}]=0$	$[\sigma_{ni}]=0$	$[\sigma_{ni}]=\nabla_s \sigma_{\alpha\beta}^s$ Уравнение Лапласа-Юнга	
Дополнительные (по сравнению с полным контактом) переменные:			
-	ε_{ni}^S - 3 скачка смещения	$\sigma_{\alpha\beta}^s$ - 3 компоненты поверхностного напряжения	$\varepsilon_{ni}^S, \sigma_{\alpha\beta}^s$ - 6 единиц (3 скачка смещения и 3 компоненты поверхностного напряжения)
Дополнительные уравнения:			
-	$\mu_{(i)}^S \varepsilon_{ni}^S = \sigma_{ni}$ уравнения Винклера	$\sigma_{\alpha\beta}^s = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}$ уравнения Шаттлворса	$\sigma_i^s = A_{ij}^{TT} \varepsilon_i^S$ предлагаемые уравнения

Подчеркнем, что рассматриваемые определяющие соотношения (5.1.68) за счет присутствия перекрестных членов не сводятся к сумме двух других случаев.

5.1.6. О различных формах записи уравнения Шаттлворса

Следуя работе [179] рассмотрим деформирование поверхности кристалла таким образом, что первоначально квадратный элемент площади A_0 принимает форму прямоугольника со сторонами параллельными исходному квадрату. При этом затрачивается работа

$$dW = \sigma_1 dA_1 + \sigma_2 dA_2 \quad (5.1.72)$$

где σ_1, σ_2 - компоненты поверхностных напряжений, перпендикулярные сторонам квадрата; A_1, A_2 - увеличения площади в данных направлениях. Для изотропных поверхностей (что имеет место, например, для кристаллографических плоскостей с осями симметрии третьего или шестого порядка) в случае равнокомпонентного растяжения $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ выражение для работы принимает вид

$$dW = \sigma dA \quad (5.1.73)$$

Здесь $dA = dA_1 + dA_2$. Данная работа в случае упругого процесса расходуется на увеличение потенциальной энергии U , которая может быть представлена как произведение удельной упругой энергии на площадь. Однако определить удельную энергию можно двояко: как отношение энергии к текущей и исходной площади, соответственно

$$\gamma = U / A \quad (5.1.74)$$

$$\gamma_0 = U / A_0 \quad (5.1.75)$$

В традиционном представлении Шаттлворса [179] используется первая форма (5.1.74), для которого равенство приращений работы и упругой энергии принимает вид

$$\sigma dA = d(\gamma A) \quad (5.1.76)$$

Откуда

$$\sigma = \gamma + A \frac{d\gamma}{dA} \quad (5.1.77)$$

Если за приращение деформации принять $d\varepsilon = \frac{dA}{A}$, то уравнение (5.1.77) записывается в виде

$$\sigma = \gamma + \frac{d\gamma}{d\varepsilon} \quad (5.1.78)$$

что есть наиболее привычная форма записи уравнения Шаттлворса.

При определении удельной поверхностной энергии посредством (5.1.75), имеем аналогичное выражению (5.1.76) уравнение

$$\sigma dA = d(\gamma_0 A_0) \quad (5.1.79)$$

Поскольку A_0 есть постоянная, она может быть вынесена из-под знака дифференциала. В результате аналогом выражения (5.1.77) станет

$$\sigma = A_0 \frac{d\gamma_0}{dA} \quad (5.1.80)$$

Согласно (5.1.74), (5.1.75) $\gamma_0 = \gamma A / A_0$. Подстановка данного выражения в (5.1.80) дает (5.1.77).

Если за приращение деформации принять $d\varepsilon_0 = \frac{dA}{A_0}$, то уравнение (5.1.80) запишется как

$$\sigma = \frac{d\gamma_0}{d\varepsilon_0} \quad (5.1.81)$$

Для жидкости, поскольку именно величина γ , определенная посредством (5.1.74), не зависит от A (число атомов, находящихся на поверхности, пропорционально текущей площади поверхности) удобно использовать представление (5.1.78), из которого в силу равенства нулю производной в правой части немедленно следует равенство удельной поверхностной энергии и поверхностного натяжения $\sigma = \gamma$.

Для твердого тела в принципе можно использовать оба представления. Однако если считать, что в упругом теле новая поверхность не образуется (число атомов на поверхности сохраняется, изменяется лишь расстояние между ними), логичнее относить упругую энергию к исходной геометрии, т.е. использовать представление (5.1.75), (5.1.81).

Отметим, что в обоих случаях введенная удельная энергия представляет собой энергию определенного числа поверхностных атомов.

В общем случае, когда появление новой поверхности и изменение площади существующей поверхности (выход новых атомов на поверхность и изменение межатомных расстояний поверхностных атомов) происходит одновременно, и мы в состоянии, хотя бы в принципе, различить эти явления, логично под плотностью энергии по прежнему понимать отношение энергии к определенному числу атомов поверхности. Тогда баланс энергии можно записать как равенство работы сумме энергии, затрачиваемой на растяжение существующей поверхности, и энергии, затраченной на образование новой поверхности (и та и другая составляющие, в принципе, могут быть как обратимыми, так и необратимыми)

$$\sigma dA = \frac{\partial U}{\partial A_e} dA_e + \frac{\partial U}{\partial A_{cre}} dA_{cre} \quad (5.1.82)$$

Здесь dA_e, dA_{cre} - изменение площади благодаря растяжению существующей и образованию новой поверхности, соответственно, причем

$$dA = dA_e + dA_{cre}.$$

Производная, стоящая во втором слагаемом (5.1.82) есть изменение энергии, вызванное образованием новой поверхности, или, иными словами, удельная энергия образования поверхности

$$\gamma_{cre} = \frac{\partial U}{\partial A_{cre}} \quad (5.1.83)$$

Подстановка (5.1.83) и (5.1.75) – поскольку решено было использовать именно его – в (5.1.82) дает

$$\sigma dA = A_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial A_e} dA_e + \gamma_{cre} dA_{cre} \quad (5.1.84)$$

Т.к. γ_0 не зависит от A_{cre} первое слагаемое может быть преобразовано следующим образом

$$A_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial A_e} dA_e = A_0 \frac{d\gamma_0}{dA_e} dA_e = A_0 \frac{d\gamma_0}{dA} \frac{dA}{dA_e} dA_e = A_0 \frac{d\gamma_0}{dA} dA \quad (5.1.85)$$

Подстановка (5.1.85) в (5.1.84) дает

$$\sigma dA = A_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial A} dA + \gamma_{cre} dA_{cre} \quad (5.1.86)$$

или

$$\sigma = \gamma_{cre} \frac{dA_{cre}}{dA} + \frac{\partial \gamma_0}{\partial \varepsilon_0} \quad (5.1.87)$$

Последнее выражение существенно отличается от выражения (5.1.78), что вовсе не означает, что какое-либо из них неверно.

5.1.7. Поправки, вносимые поверхностными эффектами в величину изгиба плиты под действием всестороннего сжатия

В работе [221] на основе модельных представлений, аналогичных используемых здесь, было получено решение для изгиба двухслойной пластины, например благодаря нагреву, с учетом влияния поверхностных эффектов. В рассмотренной задаче поверхностей, обладавших свойствами поверхностной упругости и вносивших вклад в деформирование пластины, было три: две внешние поверхности и одна для самой поверхности (интерфейса). Там же был рассмотрен и более простой случай - изгиб однородной пластины с поверхностным слоем, нанесённым только с одной ее стороны. В обоих случаях, как и в рассматриваемом здесь, эффективные собственные деформации и эффективные упругие свойства определялись из условия эквивалентности реального поверхностного слоя конечной толщины и эффективного бесконечно тонкого слоя.

Следует подчеркнуть, что в рамках элементарных теорий изгиба напряжения, нормальные к плоскости пластины, либо отсутствуют, либо пренебрежимо малы (что следует из того, что в полной трехмерной задаче об изгибе плит величины этих напряжений отличаются от учитываемых напряжений, действующих в плоскости пластины, в $(L/H)^n$, $n \geq 1$ раз, где L/H - отношение размера пластины в плане к ее толщине), и, следовательно, тензор напряжений можно рассматривать как двумерный. Также, для этого класса задач двумерен и тензор поверхностных напряжений, и использованная традиционная мембранная теория поверхностной упругости вполне оправдана.

Однако отсутствием нормальных к плоскости пластины напряжений не исчерпывается круг задач, в которых учет поверхностных эффектов может

быть интересен. Рассмотрим однородную пластину с поверхностным слоем, нанесённым только с одной ее стороны под действием приложенного к ней всестороннего достаточно большого давления. Действие этого давления, в некотором смысле аналогичного действию температуры, вызовет, в общем случае, неодинаковое деформирование в объеме пластины и поверхностном слое приводящее к изгибу. Причем величина этого изгиба, посчитанная в рамках мембранной теории поверхностной упругости и в рамках теории, рассматриваемой нами, будет различной.

Рассмотрим это явление подробнее. Пусть имеется двуслойная пластина, состоящая из слоя толщины $H - h$, обладающего упругими константами C_{ik} , и покрытия толщины

$$h = \eta H; \quad \eta \ll 1, \quad (5.1.88)$$

обладающего упругими свойствами $C_{ik}^{(C)}$ (ось x_3 направлена по нормали к пластине, ось x_1 - вдоль пластины, начало координат находится на границе слоя и покрытия). Приложим к пластине давление p . Для простоты рассмотрим ее деформирование в условиях плоской деформации. Рассматривая задачу в рамках теории изгиба тонких пластин, распределение деформаций в слое $H - h$ будем считать линейным, а деформации в тонком слое постоянными

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^0 + \kappa x_3; \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{33}^0 + \kappa_3 x_3 \\ \varepsilon_{11}^{(C)} &= \varepsilon_{11}^0; \\ \varepsilon_{33}^C &= \text{const} \end{aligned} \quad (5.1.89)$$

Форма пластины будет определяться из условия минимума разности работы внешних сил и упругой энергии. Для элемента пластины эта разность будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta W = p & \left(\int_0^{H-h} \varepsilon_{33} dx_3 + \int_{-h}^0 \varepsilon_{33}^{(C)} dx_3 + \int_0^{H-h} \varepsilon_{11} dx_3 + \int_{-h}^0 \varepsilon_{11}^{(C)} dx_3 \right) - \\ & - \int_0^{H-h} \left(\frac{C_{11}}{2} \varepsilon_{11}^2 + C_{13} \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + \frac{C_{33}}{2} \varepsilon_{33}^2 \right) dx_3 - \\ & - \int_{-h}^0 \left(\frac{C_{11}^{(C)}}{2} \varepsilon_{11}^{(C)2} + C_{13}^{(C)} \varepsilon_{11}^{(C)} \varepsilon_{33}^{(C)} + \frac{C_{33}^{(C)}}{2} \varepsilon_{33}^{(C)2} \right) dx_3 \end{aligned} \quad (5.1.90)$$

Приравнявая к нулю частные производные от (5.1.90) (после подстановки (5.1.89) и интегрирования) по кинематическим переменным ε_{11}^0 , κ , ε_{33}^0 , κ_3 , ε_{33}^C , получаем систему пяти уравнений относительно пяти неизвестных, решение которой и будет соответствовать истинным значениям кинематических переменных. В данной задаче нас более всего интересует величина изгиба κ (обратная радиусу кривизны). Раскладывая получившееся значение в ряд для малых η_h , находим

$$\begin{aligned} \kappa = 6p\eta_h C_{33} \times \\ \times \frac{C_{13}^{(C)} \left[C_{13} C_{13}^{(C)} - C_{13}^2 + C_{33} \left(C_{11} - C_{13}^{(C)} \right) \right] + C_{33}^{(C)} \left[C_{13}^2 - C_{13} C_{11}^{(C)} + C_{33} \left(C_{11}^{(C)} - C_{11} \right) \right]}{HC_{33}^{(C)2} \left(C_{13}^2 - C_{11} C_{33} \right)^2} \end{aligned} \quad (5.1.91)$$

Если оба материала изотропны, то с учетом известных равенств

$$E^* = E / (1 - \nu^2) \quad \nu^* = \nu / (1 - \nu)$$

последняя формула упрощается следующим образом (здесь и далее, в отличие от Глав 2, 3, будем понимать под символом E обычный модуль Юнга материала)

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{6ph}{E^{*2}H^2} \left[E^{(C)*} (1-\nu^*) - E^* (1-\nu^{(C)*}) \right] \quad (5.1.92)$$

Полученное выражение можно привести также к форме, выраженной через определенные в предыдущем параграфе поверхностные модули. Весьма существенным оказывается зависимость радиуса кривизны как от отношения модулей Юнга, так и от коэффициентов Пуассона материалов. Так, даже для одинаковых значений модулей Юнга толстого и тонкого слоев, в зависимости от значений их коэффициентов Пуассона под действием давления пластина может изгибаться как в ту, так и в другую сторону.

При моделировании составной пластины в рамках традиционной теории поверхностных напряжений (в пренебрежении влиянием нормальных к поверхности напряжений на деформацию поверхностного слоя) выражение (5.1.90) следует заменить следующим

$$\begin{aligned} \Delta W = p & \left(\int_0^{H-h} \varepsilon_{33} dx_3 + \int_0^{H-h} \varepsilon_{11} dx_3 + h \varepsilon_{11}^{(C)} \right) - \\ & - \int_0^{H-h} \left(\frac{C_{11}}{2} \varepsilon_{11}^2 + C_{13} \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + \frac{C_{33}}{2} \varepsilon_{33}^2 \right) dx_3 - h \frac{C'}{2} \varepsilon_{11}^{(C)2} \quad (5.1.93) \\ C' = & \frac{E^{*(C)}}{(1-\nu^{*(C)})(1+\nu^{*(C)})} \end{aligned}$$

Продельвая выкладки, аналогичные предыдущим получаем для радиуса кривизны

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{6ph}{E^{*2}H^2} \left[E^{(C)} \frac{(1-\nu^{(C)})}{(1+\nu^{(C)})(1-2\nu^{(C)})(1-\nu)} - E^* \right] \quad (5.1.94)$$

что отличается от (5.1.93).

Оценим величину прогиба. Так, для никелевой пленки на слое серебра (случай, рассмотренный в работе [221]) значения параметров будут: $E = 80$

ГПа, $E^{(C)} = 210$ ГПа, $\nu = 0.37$, $\nu^{(C)} = 0.28$. При $p = 100$ МПа, $H = 10^{-4}$ м, $\eta_h = 0.025$ получаем радиус кривизны $R = 1.7$ м. При длине пластины порядка нескольких сантиметров прогиб, соответствующий такому радиусу кривизны, вполне регистрируем. Традиционная теория согласно (5.1.94) для указанных значений дает $R = 4.3$ м. Модели достаточно чувствительны к параметрам. Так при изменении коэффициента Пуассона одного из материалов с указанного значения $\nu = 0.37$ до $\nu = 0.4$ радиусы кривизны становятся 4.2 и -6.3 м, соответственно. Существенным является искривление в противоположные стороны, что означает качественное различие в результатах.

5.2. Случай искривленной границы

5.2.1. Модель искривленной границы раздела как предела слоя конечной толщины, обладающего постоянными свойствами

Рассмотрим вспомогательную задачу о деформации сферы с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 , общее решение для которой (например, [222]) записывается в виде

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2},$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr},$$

(5.2.1)

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + 2\lambda\varepsilon_{\theta\theta},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2(\lambda + \mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{rr}$$

Здесь u - радиальное смещение; $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi}$ - радиальная и окружные деформации; $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ - радиальная и окружные компоненты напряжения; λ, μ - константы Ламе материала, C_1, C_2 - постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий.

Рассмотрим простейший случай сферически симметричной задачи. Пусть слой материала толщины h , заключенный между двумя сферами с радиусами $R - h/2$ и $R + h/2$

$$\delta_R = h / R \ll 1 \tag{5.2.2}$$

Внутри и вне этого слоя прилегающее пространство заполнено материалом с другими свойствами (Рисунок 5.3а). Все три материала будем полагать изотропными линейно-упругими, обладающими постоянными Ламе λ^i, μ^i ($i = A$ для внутреннего, $i = B$ для внешнего и $i = C$ - для среднего слоя).

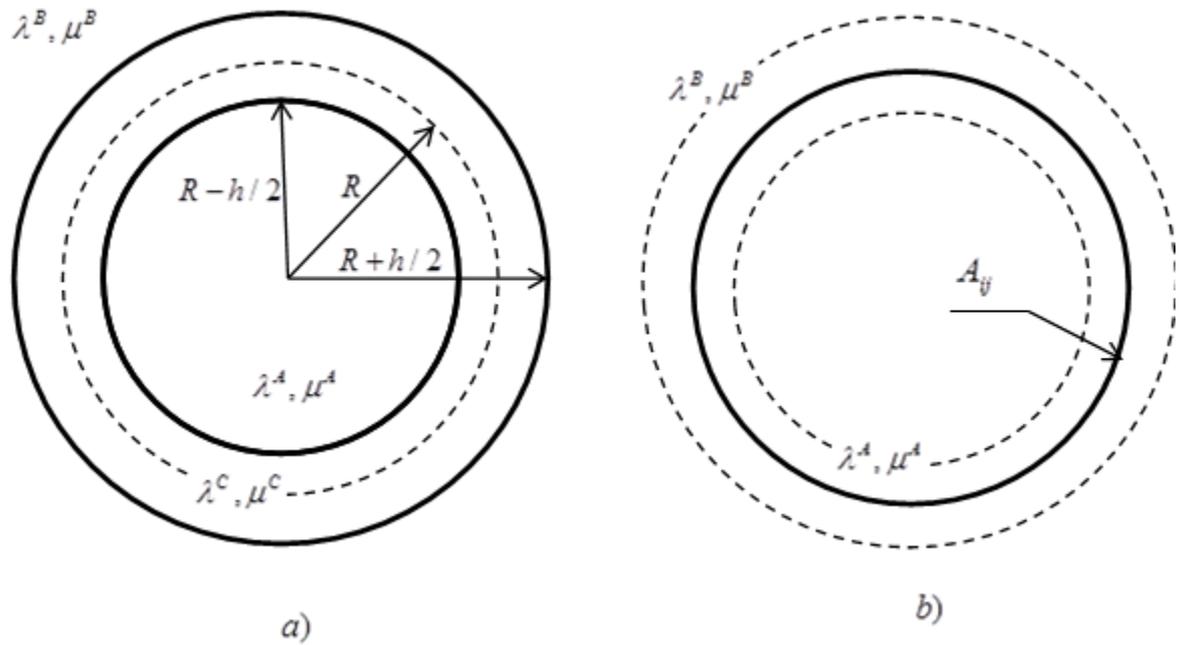


Рисунок 5.3. Искривленная граница как предел слоя конечной толщины

Рассмотрим сферически симметричное нагружение рассматриваемой структуры, содержащей участок срединного слоя и прилегающие к нему внешние участки. Смещение u , деформации $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$ и напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ определяются формулами (5.2.1), в которых значения упругих констант соответствуют среднему слою

$$\lambda = \lambda^C, \mu = \mu^C, \quad (5.2.3)$$

а постоянные C_1 и C_2 находятся из граничных условий, например

$$u(R-h/2) = u_1, \quad (5.2.4)$$

$$u(R+h/2) = u_2$$

Упругую энергию в данной системе обозначений согласно теореме Клапейрона можно записать как

$$U = U_0 + \int_{R-h/2}^{R+h/2} \left[\frac{\lambda^C + 2\mu^C}{2} (\varepsilon_{rr}^2 + 2\varepsilon_{\theta\theta}^2) + \lambda^C (2\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\theta\theta}^2) \right] 4\pi r^2 dr \quad (5.2.5)$$

Здесь U_0 - упругая энергия системы, запасенная вне рассматриваемого слоя. Подстановка (5.2.3), (5.2.4) в (5.2.1), а затем в (5.2.5) позволяет записать выражение для энергии в виде квадратичной формы по u_1, u_2 .

Заменяем теперь упругий слой толщины h эквивалентным составным слоем, состоящим из двух слоев толщиной $h/2$ со свойствами λ^A, μ^A и λ^B, μ^B , соответствующими исходным внутреннему и внешнему слоям, и промежуточным слоем нулевой толщины (Рисунок 5.3b), наделенным такими новыми упругими свойствами A_{ij} , чтобы при произвольной заданных граничных условиях значения упругой энергии исходной и эквивалентной упругой системы совпадали. Поставленная задача аналогична задаче, решенной в п. 5.1, с той разницей, что граница теперь криволинейна, но в целях упрощения рассматривается изотропный случай и только радиальные смещения.

Упругая энергия эквивалентной системы есть

$$\begin{aligned}
U = & U_0 + \\
& + \int_{R-h/2}^R \left[\frac{\lambda^A + 2\mu^A}{2} (\varepsilon_{rr}^2(r) + 2\varepsilon_{\theta\theta}^2(r)) + \lambda^A (2\varepsilon_{rr}(r)\varepsilon_{\theta\theta}(r) + \varepsilon_{\theta\theta}^2(r)) \right] 4\pi r^2 dr + \\
& + \int_R^{R+h/2} \left[\frac{\lambda^B + 2\mu^B}{2} (\varepsilon_{rr}^2(r) + 2\varepsilon_{\theta\theta}^2(r)) + \lambda^B (2\varepsilon_{rr}(r)\varepsilon_{\theta\theta}(r) + \varepsilon_{\theta\theta}^2(r)) \right] 4\pi r^2 dr + \\
& + \frac{A_{rr}}{2} \varepsilon_{rr}^2(R) + (A_{\theta\theta} + A_{\theta\varphi}) \varepsilon_{\theta\theta}^2(R) + 2A_{r\theta} \varepsilon_{rr}(R) \varepsilon_{\theta\theta}(R)
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Здесь деформации находятся по формулам (5.2.1) с формальной заменой λ, μ на λ^A, μ^A и λ^B, μ^B , и C_1, C_2 , на C_{1A}, C_{2A} и C_{1B}, C_{2B} для внутреннего и внешнего слоев, соответственно.

Записанная форма поверхностной упругой энергии (последняя строчка (5.2.6)) предполагает следующий вид определяющих соотношений, являющихся обобщением уравнений Шаттлворса

$$\sigma_{\theta\theta}^s = (A_{\theta\theta} + A_{\theta\varphi}) \varepsilon_{\theta\theta}(R) + A_{r\theta} \varepsilon_{rr}(R) \tag{5.2.7}$$

$$\sigma_{rr}^s \equiv \sigma_{rr}^B(R) - \sigma_{rr}^A(R) = A_{rr} \varepsilon_{rr}(R) + 2A_{r\theta} \varepsilon_{\theta\theta}(R)$$

Постоянные $C_{1A}, C_{2A}, C_{1B}, C_{2B}$ должны находиться из условий равенства смещений и напряжений для исходной и эквивалентной системы на границах $r = R \pm h/2$. Первые из условий суть (5.2.4), вторые могут быть записаны в виде

$$(\lambda^c + 2\mu^c) \left(C_1 - \frac{2C_2}{(R-h/2)^3} \right) + 2\lambda^c \left(C_1 + \frac{C_2}{(R-h/2)^3} \right) = \quad (5.2.8)$$

$$(\lambda^A + 2\mu^A) \left(C_{1A} - \frac{2C_{2A}}{(R-h/2)^3} \right) + 2\lambda^A \left(C_{1A} + \frac{C_{2A}}{(R-h/2)^3} \right)$$

$$(\lambda^c + 2\mu^c) \left(C_1 - \frac{2C_2}{(R+h/2)^3} \right) + 2\lambda^c \left(C_1 + \frac{C_2}{(R+h/2)^3} \right) = \quad (5.2.9)$$

$$(\lambda^B + 2\mu^B) \left(C_{1B} - \frac{2C_{2B}}{(R+h/2)^3} \right) + 2\lambda^B \left(C_{1B} + \frac{C_{2B}}{(R+h/2)^3} \right)$$

Система (5.2.4), (5.2.8), (5.2.9) однозначно разрешима относительно постоянных $C_{1A}, C_{2A}, C_{1B}, C_{2B}$.

В случае прямолинейной границы определение деформаций эффективного бесконечно-тонкого слоя было однозначным. Для более общего рассматриваемого случая примем в качестве меры нормальной компоненты деформации эффективного слоя скачек смещений $\varepsilon_{rr}(R)$, а в качестве окружной компоненты деформации $\varepsilon_{\theta\theta}(R)$ – среднее значение деформаций берегов:

$$\varepsilon_{rr}(R) = C_{1B} - \frac{2C_{2B}}{R^3} - \left(C_{1A} - \frac{2C_{2A}}{R^3} \right) \quad (5.2.10)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(R) = \frac{1}{2} \left(C_{1B} + \frac{C_{2B}}{R^3} + C_{1A} + \frac{C_{2A}}{R^3} \right) \quad (5.2.11)$$

Упругая энергия эквивалентной системы (5.2.6) после всех указанных подстановок оказалась выраженной в виде квадратичной формы по u_1, u_2 .

Приравнивая выражения для энергии действительной (5.2.5) и эффективной (5.2.6) систем для любых u_1, u_2 , получаем систему из трех уравнений для определения трех величин $A_{rr}, A_{r\theta}, A_{\theta\theta} + A_{\theta\varphi}$. Как сама система, так и полное ее решение громоздки, чтобы быть выписанными полностью. Выпишем лишь главный член разложения по малому параметру h/R . Очевидно, что при разложении величин, зависящих от нескольких переменных по малому параметру, результат может существенно зависеть от того, какой мы полагаем зависимость (или независимость) переменных от этого параметра. В рассматриваемом случае такими независимыми переменными являются смещения u_1, u_2 , входящие в граничные условия. В простейшем варианте можно предположить, что u_1, u_2 не зависят от малого параметра δ_R , определяемого (5.2.2). Это приведет к следующему виду главного члена разложения для эффективных упругих постоянных тонкого слоя

$$A_{rr} = \frac{2}{h \left(\frac{2}{\lambda_C + 2\mu_C} - \frac{1}{\lambda_A + 2\mu_A} - \frac{1}{\lambda_B + 2\mu_B} \right)} \quad (5.2.12)$$

Данный вид соответствует модели границы типа винклеровского слоя [193-196]. Из указанного предположения следует, что согласно (5.2.1), (5.2.4),

$$\varepsilon_r \approx \frac{u_2 - u_1}{h}, \quad (5.2.13)$$

$$\varepsilon_\theta \approx \frac{u_2 + u_1}{2R}$$

а их отношение

$$\eta \equiv \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_\theta} \approx \frac{2}{\delta_R} \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} \gg 1 \quad (5.2.14)$$

что может выполняться только для чрезвычайно мягких слоев. Это заключение согласуется с полученным результатом. Учет необходимой жесткости слоя позволяет упростить (5.2.12) путем пренебрежения членов, содержащих λ^C, μ^C по сравнению с членами, содержащими на λ^A, μ^A и λ^B, μ^B :

$$A_{rr} = \frac{\lambda_C + 2\mu_C}{h} \quad (5.2.15)$$

Для жестких слоев соблюдается обратное соотношение, характерное для мембранной теории оболочек

$$\eta_\varepsilon \equiv \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_\theta} \approx \frac{2}{\delta} \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} \ll 1 \quad (5.2.16)$$

Для его выполнения достаточным условием является возможность представления

$$u_2 = u_1 + \Delta_0 \delta^k, \quad k > 1, \quad (5.2.17)$$

$$\frac{\Delta_0}{u_1} \sim 1$$

При зависимости u_1, u_2 от δ_R вида (5.2.17) главный член разложения эффективных упругих постоянных тонкого слоя принимает вид

$$\begin{aligned}
A_{\theta\theta} + A_{\theta\varphi} = & -h(\lambda_C(3(\lambda_B + \lambda_A)(2\mu_C - (\mu_A + \mu_B)) - \\
& 2(\mu_B^2 + 10\mu_A\mu_B + \mu_A^2 - 6\mu_C(\mu_A + \mu_B))) + \\
& 4(2\mu_C - \mu_A - \mu_B)(-2\mu_A\mu_B + \mu_C(\mu_A + \mu_B)) + \\
& 4(\lambda_A + \lambda_B)(\mu_C^2 + 3\mu_A\mu_B) - 6(\lambda_A + \lambda_B)\mu_C(\mu_A + \mu_B) - 6\lambda_A\lambda_B(2\mu_C - \mu_A - \mu_B) \quad (5.2.18) \\
& + 4\lambda_A\mu_B(\mu_B - 2\mu_C) + 4\lambda_B\mu_A(\mu_A - 2\mu_C)) / \\
& (2(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) - (\lambda_C + 2\mu_C)(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B)))
\end{aligned}$$

Данный вид соответствует традиционному виду уравнений Шаттлворса, т.е. отсутствию вклада от нормальных к поверхности напряжений. При жесткости промежуточного слоя намного превышающей жесткость окружающего материала выражение (5.2.18) сильно упрощается за счет возможности пренебрежения членами, содержащими λ^A, μ^A и λ^B, μ^B

$$A_{\theta\theta} + A_{\theta\varphi} = 2h\mu_C \frac{3\lambda_C + 2\mu_C}{\lambda_C + 2\mu_C} \quad (5.2.19)$$

Данное выражение фактически совпадает с выражением, полученным авторами [220].

Для промежуточного случая,

$$\eta_\varepsilon \approx \frac{2}{\delta_R} \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} \sim 1 \quad (5.2.20)$$

характерного для сопоставимых по порядку величины упругих постоянных промежуточного и окружающего его слоев, достаточным условием его выполнения является возможность представления

$$u_2 = u_1 + \Delta_0 \delta_R, \quad \frac{\Delta_0}{u_1} \sim 1 \quad (5.2.21)$$

При зависимости u_1, u_2 от ε вида (5.2.21) главный член разложения эффективных упругих постоянных тонкого слоя принимает вид

$$A_{rr} = \frac{2}{h \left(\frac{2}{\lambda_C + 2\mu_C} - \frac{1}{\lambda_A + 2\mu_A} - \frac{1}{\lambda_B + 2\mu_B} \right)} \quad (5.2.22)$$

$$\begin{aligned} A_{\theta\theta} + A_{\phi\phi} = & -h(\lambda_C(3(\lambda_B + \lambda_A)(2\mu_C - (\mu_A + \mu_B)) - \\ & 2(\mu_B^2 + 10\mu_A\mu_B + \mu_A^2 - 6\mu_C(\mu_A + \mu_B))) + \\ & 4(2\mu_C - \mu_A - \mu_B)(-2\mu_A\mu_B + \mu_C(\mu_A + \mu_B)) + \\ & 4(\lambda_A + \lambda_B)(\mu_C^2 + 3\mu_A\mu_B) - 6(\lambda_A + \lambda_B)\mu_C(\mu_A + \mu_B) - 6\lambda_A\lambda_B(2\mu_C - \mu_A - \mu_B) \\ & + 4\lambda_A\mu_B(\mu_B - 2\mu_C) + 4\lambda_B\mu_A(\mu_A - 2\mu_C)) / \\ & (2(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) - (\lambda_C + 2\mu_C)(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B))) \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

$$A_{r\theta} = \frac{2(-\lambda_C(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) + (\lambda_C + 2\mu_C)(\lambda_B\mu_A + \lambda_A(\lambda_B + \mu_B)))}{-2(\lambda_A + 2\mu_A)(\lambda_B + 2\mu_B) + (\lambda_C + 2\mu_C)(\lambda_A + \lambda_B + 2(\mu_A + \mu_B))} \quad (5.2.24)$$

Характерно, что для упругих констант A_{rr} и $A_{\theta\theta} + A_{\theta\phi}$ значения совпадают с крайними случаями (5.2.12) и (5.2.18), соответственно. Существенно, что хотя согласно (5.2.24) упругие константы имеют различную размерность и содержат параметр h в различной степени, при выполнении условия (5.2.20) вклад в упругую энергию от членов, содержащих эти константы, сопоставим.

Полученные выражения в точности совпадают с аналогичными выражениями, полученными выше для случая плоской границы. Отметим, что для данные выражения являются асимптотическими: главными членами разложения по параметру отношения толщины слоя к радиусу.

Выполнение условий (5.2.14), (5.2.16) и (5.2.20) для мягких, жестких и средней жесткости прослоек проверяется непосредственно решением соответствующих элементарных задач теории упругости. Хотя приведенное выше рассмотрение и не является доказательством справедливости полученных формул для общего случая произвольной переменной кривизны слоя, из него следует, по крайней мере, ограничения на применимость традиционных моделей поверхностной упругости (Шаттлворса и типа винклерового слоя).

5.2.2. Замечания о выполнении уравнения Лапласа-Юнга

Для рассматриваемого случая сферической симметрии уравнение Лапласа-Юнга (являющегося, по сути, уравнением равновесия для участка поверхности) запишется в виде

$$\sigma_{rr}^B(R) - \sigma_{rr}^A(R) - \frac{2}{R} \sigma_{\theta\theta}^s = 0 \quad (5.2.25)$$

Здесь $\sigma_{rr}^B(R)$, $\sigma_{rr}^A(R)$ - нормальные напряжения для поверхностного слоя (рассматриваемого уже как поверхность нулевой толщины) с внешней и внутренней стороны, соответственно, рассчитываемые по формулам (5.2.1). Поверхностные напряжения $\sigma_{\theta\theta}^s$ рассчитываются на основе полученных определяющих соотношений (5.2.7). Обращение уравнения (5.2.25) после подстановки (5.2.10), (5.2.11) и (5.2.22)-(5.2.24) в тождество убеждает в его справедливости.

Все величины здесь относятся к эквивалентной конфигурации, т.е. для нулевой толщины эффективного поверхностного слоя. Следует подчеркнуть, что напряжения и смещения на границе *реального* слоя не совпадают с полученными величинами. Действительно, в исходной конфигурации (Рисунок. 5.3а) радиальные (нормальные к слою) напряжения $\sigma_{rr}(r)$ непрерывны при переходе через границы слоев; терпит разрыв лишь производная. Напряжения на границах слоя при этом $\sigma_{rr}^A(R-h/2)$, $\sigma_{rr}^B(R+h/2)$, что отличается от напряжений $\sigma_{rr}^B(R)$, $\sigma_{rr}^A(R)$ на эквивалентном поверхностном слое нулевой толщины. Для указанных напряжений на границе слоя уравнение (5.2.25) уже не будет выполняться точно. Действительно, для средней линии реального поверхностного слоя, $r = R$, уравнение равновесия есть

$$\frac{d}{dr}\sigma_{rr}(R) + \frac{2}{R}\sigma_{rr}(R) - \frac{2}{R}\sigma_{\theta\theta}(R) = 0 \quad (5.2.26)$$

Заменяя в первом члене производную конечной разностью, а во втором члене значение напряжения в центре на полусумму значений на границах (данные замены справедливы с принятой точностью), получаем

$$\frac{\sigma_{rr}(R+h/2) - \sigma_{rr}(R-h/2)}{h} + \frac{\sigma_{rr}(R+h/2) + \sigma_{rr}(R-h/2)}{R} - \frac{2}{R}\sigma_{\theta\theta}(R) = 0 \quad (5.2.27)$$

Данное выражение можно также (с той же точностью) получить из рассмотрения баланса сил для элемента реального слоя.

В формуле (5.2.27) в общем случае пренебрежение вторыми членами по сравнению с первыми возможно только, если разница значения напряжений на границе не зависит от h/R , что в общем случае не выполняется. Входящая в (5.2.27) величина $\sigma_{\theta\theta}(R)$ не является поверхностным напряжением $\sigma_{\theta\theta}^s$, входящим в формулу (5.2.25). На основании выписанных формул возможен пересчет одних компонент напряжений в другие. Иллюстрация различия величин напряжений σ_{rr} приведена на Рисунке 5.4.

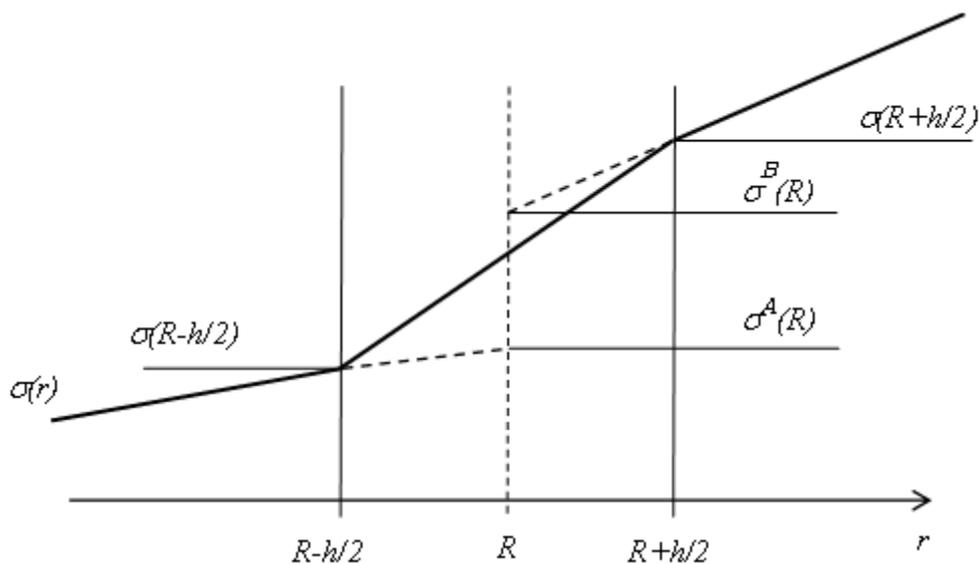


Рисунок 5.4. Напряжения на границах истинного и формально введенного поверхностного слоя нулевой толщины

5.2.3. Замечания и обсуждение

Полученные результаты относятся к случаю изотропных в плане поверхностей. Однако в связи с наличием в твердых телах, определяемых кристаллической решеткой, выделенных плоскостей естественно ожидать зависимость поверхностных свойств (поверхностной энергии, поверхностных модулей) от ориентации поверхности. Даже для кубических кристаллов эта зависимость имеет непривычный вид [223]. Выберем ориентацию поверхности, для которой плотность энергии имеет локальный минимум. При весьма малом отклонении поверхности от данной ориентации ее реальная конфигурация благодаря дискретному (атомарному) строению будет представлять собой участки поверхности исходной ориентации, чередующиеся со ступеньками высоты порядка шага кристаллической ячейки, причем частота этих ступенек будет пропорциональна углу наклона. Поверхностная энергия будет складываться из поверхностной энергии участков исходной ориентации и дополнительной энергии, образуемой ступеньками. Угол отклонения всегда можно выбрать настолько малым, чтобы расстояния между ступеньками были достаточными для пренебрежения энергией взаимодействия между ними. Таким образом, ввиду возможности отклонения в обе стороны, поверхностная энергия для малых углов отклонения от стационарного значения линейно зависит от абсолютной величины угла отклонения. Очевидно, такой тип зависимости не может быть описан тензором никакого ранга. Рассмотренный изотропный случай может рассматриваться как приближение.

Отметим, что согласно полученным выражениям, поверхностная энергия не является положительно определенной. Требование положительной определенности поверхностной энергии твердого тела обычно вводят по аналогии с жидкостью, для которой это имеет основание. Действительно, все атомы жидкости притягиваются друг к другу силами

Ван-дер-Ваальса и энергия каждой парной связи отрицательна. Для атома, находящегося на поверхности число ближних и дальних соседей меньше, чем для атома, находящегося вдали от границы, следовательно, меньше и количество связей (с отрицательной энергией), и его потенциальная энергия больше. Кроме того, если бы в силу каких-то внешних причин поверхностная энергия жидкости оказалась бы отрицательной, то благодаря подвижности атомов в силу стремления свободной энергии тела к минимуму эта граница начала бы самопроизвольно неограниченно расти, что привело бы к полному смешению фаз вплоть до молекулярного уровня и фактическому упразднению фазовой границы. Для твердого тела, атомы входят в связь посредством более сильных взаимодействий, кроме того, положение атомов друг относительно друга в пренебрежении флуктуациями фиксировано. Поэтому в твердом теле принципиально возможны ситуации, когда (отрицательная) энергия связи поверхностных атомов больше энергии связи внутренних атомов (например, это могут быть атомы другого вещества).

Принципиальным отличием поверхностной энергии для жидкости и твердого тела является то, что в первом случае изменение энергии осуществляется за счет увеличения числа материальных частиц поверхности, а во втором случае также, а может быть в первую очередь, – за счет увеличения расстояний между частицами поверхности.

5.3. Связь моделей тонких слоев при наличии и при отсутствии отслоений. Соотношения между параметрами моделей.

Из результатов п.5.1 следует, что теория поверхностной упругости может использоваться для описания деформирования тонких покрытий. В обоих случаях обычно поверхностные эффекты описывают с помощью двух поверхностных модулей. В случае отслоения тонкого поверхностного слоя,

его деформирование можно описывать в рамках теории изгиба пластин. При этом процесс деформирования контролируется другим параметром – изгибной жесткостью, а также, возможно, жесткостью при растяжении. В общем случае, хотя бы из-за различной размерности, без привлечения дополнительных сведений невозможно однозначно связать один набор параметров с другим.

Таким образом, при переходе от описания деформирования поверхностных слоев без отслоения к деформированию при наличии отслоений возникают два основных вопроса:

- расчет параметров модели отслоившегося участка на основе параметров, характеризующих неотслоившийся участок;
- задание адекватных граничных условий для пластины, моделирующей отслоение.

При ответе на первый вопрос ограничимся рассмотрением изотропной поверхности. Если под поверхностными модулями понимать интеграл от *избытка* модуля по нормали к поверхности как это делалось всюду в настоящей работе, то предполагая отклонение модуля в приповерхностном слое от модуля вдали от поверхности постоянным и сосредоточенным в узком слое толщины h , связь между поверхностными модулями E_s, μ_s и модулями, приписываемыми этому приповерхностному однородному слою, E_c, μ_c можно получить из формул (5.1.41), (5.1.27), (5.1.31), в которых свойства материалов A, B предполагаются совпадающими

$$E_s = h(E_c - E), \quad \mu_s = h(\mu_c - \mu) \quad (5.3.1)$$

Здесь E, μ – упругие модули основания (под E понимается модифицированный модуль Юнга для плоского напряженного состояния, под μ – модуль сдвига). За исключением отслоений, образуемых молекулярным монослоем, изгибная жесткость D определяется

комбинацией упругих констант и толщины отслоения. Предполагая классическое соотношение для изгибной жесткости, получим искомую связь

$$D = E_c h^3 / 12 = (Eh + E_s) h^2 / 12 \quad (5.3.2)$$

Первую часть задачи можно считать решенной. Отметим также, что если использовать более сложные варианты теории поверхностной упругости, в частности моментную теорию [177, 220], то вопросов пересчета констант не возникает, однако при этом возникает традиционный вопрос идентификации большого числа входящих в уравнения постоянных.

Вопрос применения адекватных граничных условий рассмотрен в Гл. 4. Заметим, что представленные данные соответствуют чисто упругому режиму без учета таких специфических явлений как пластический поворот вследствие движения дислокаций [224-226], а также отклонения, вызываемые действием адгезионных сил, например сил Ван-дер-Ваальса. При определенных условиях в вершине трещины-расслоения происходит эмиссия дислокаций [227]. Данный механизм приводит к изменению податливости концевой области. Следовательно, для этого механизма можно найти эффективную связь момента и главного вектора силы с углом поворота и вектором смещения и учесть эту связь при анализе условий роста отслоения.

5.4. Краткие выводы по главе

Основные соотношения поверхностной теории упругости получены в результате рассмотрения произвольного изменения полей и свойств материалов вблизи поверхности раздела. При этом поверхностные величины определяются обычным образом: как интегралы от избытка объемной плотности соответствующих величин. Рассмотрен частный случай, когда

приповерхностные изменения всех величин локализованы в пределах узкого слоя толщины h , внутри которого они постоянны, а вне – отсутствуют. Как для общего, так и для частного случая, при наличии твердых фаз по обе стороны границы раздела, получены определяющие соотношения более общего (по сравнению с уравнениями Шаттлворса) вида. Последние могут быть найдены из полученных общих соотношений отбрасыванием некоторых членов. Сделаны оценки параметров, при которых подобное пренебрежение может быть оправдано (для весьма жестких приповерхностных слоев).

Показано, что традиционные соотношения (Шаттлворса и типа винклерового слоя) являются строгими и асимптотически точными для случая свободной границы, однако для произвольного соотношения модулей внутреннего слоя, моделируемого поверхностью, и окружающего материала, таковыми не являются. Поправки, вносимые использованием моментной теории, в общем случае не являются формой асимптотически точных поправок для общего случая внутренней поверхности.

Полученные результаты обобщены на случай наличия собственных деформаций в контактирующих слоях по обе стороны приповерхностного слоя, а также в самом приповерхностном слое.

Рассмотрена задача изгиба двуслойной пластины под воздействием давления, приложенного к обеим сторонам. Показано, что при одинаковых модулях упругости и различных коэффициентах Пуассона слоев пластины ее прогиб, описываемый в рамках рассматриваемого подхода, не может быть описан в рамках традиционной теории поверхностных напряжений.

Показано, при классическом определении поверхностных величин как интегралов от избытка объемной плотности соответствующих величин предложенная модель поверхностной упругости обобщается на случай криволинейной поверхности. На примере задачи о составной сфере, нагружаемой центрально симметрично, показано, что определяющие

соотношения (полученные обобщенные соотношения Шаттлворса) и уравнения равновесия на поверхности (уравнения Лапласа-Юнга) сохраняют свой вид (с точностью до главного члена разложения по отношению толщины слоя к радиусу его кривизны).

Основное отличие используемых определяющих соотношений от традиционных соотношений Шаттлворса состоит в том, что в них помимо напряжений и деформаций, действующих в плоскости границы раздела, входят напряжения и деформации, нормальные к этой плоскости.

При моделировании весьма тонких покрытий, содержащих как отслоившиеся, так и неотслоившиеся участки, представлен алгоритм пересчета параметров моделей, описывающих деформирование данных участков (пластиночную модель, описанную в Гл. 4, и модель поверхностной упругости, описанную в настоящей главе), из одной в другую.

ГЛАВА 6. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице

В настоящей главе представлены приложения описанной в Главе 5 модели поверхностной упругости для решения задач, связанных со включениями. В п.6.1 рассмотрены задачи о шаровом включении в бесконечной среде под действием гидростатического внешнего поля и однородных сферически симметричных собственных деформаций включения и поверхности. В п.6.2 рассмотрен общий случай собственных деформаций (произвольных однородных, и независимых для включения и поверхности) и произвольных однородных внешних напряжений. Однако во избежание чрезвычайной громоздкости, определяющие уравнения для поверхности раздела были использованы частного вида, соответствующего традиционной модели поверхностной упругости Шаттлворса.

6.1. Задача о шарообразном включении в бесконечной среде в гидростатическом внешнем поле

6.1.1. Основные уравнения

Рассмотрим задачу о шарообразном включении радиуса R в бесконечной упругой среде при наличии контакта указанного типа. Общее решение уравнений упругости для полей смещений, деформаций и напряжений

внутри и вне включения имеет вид (приведенный к удобным для рассматриваемой задачи обозначениям), например [222]

$$u^k = C_1^k r + \frac{C_2^k}{r^2},$$

$$\varepsilon_{rr}^k = \frac{du^k}{dr} = C_1^k - \frac{2C_2^k}{r^3},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^k = \varepsilon_{\varphi\varphi}^k = \frac{u^k}{r} = C_1^k + \frac{C_2^k}{r^3},$$

$$\sigma_{rr}^k = (\lambda^k + 2\mu^k)\varepsilon_{rr}^k + 2\lambda^k\varepsilon_{\theta\theta}^k = 3K^k C_1^k - \frac{4\mu^k C_2^k}{r^3},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^k = 2(\lambda^k + \mu^k)\varepsilon_{\theta\theta}^k + \lambda^k\varepsilon_{rr}^k = 3K^k C_1^k + \frac{2\mu^k C_2^k}{r^3}$$

(6.1.1)

$$k = A, B, \quad C_2^A = 0$$

Здесь $k = A, B$ для внутренней и внешней областей соответственно; C_1^B определяет поле на бесконечности, в случае гидростатического растяжения σ^∞ ,

$$C_1^B = \frac{\sigma^\infty}{3K^B}$$

(6.1.2)

Для определения двух оставшихся неизвестных C_1^A, C_2^B воспользуемся комбинациями условий (5.1.68), (5.1.71), которые для рассматриваемого случая отсутствия собственных деформаций и сферической симметрии преобразуются к виду

$$\frac{R}{2}(\sigma_{rr}^B - \sigma_{rr}^A) - (A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE}) \frac{\varepsilon_{\theta\theta}^A + \varepsilon_{\theta\theta}^B}{2} - A_{13}^{EE} (u^B - u^A) = 0 \Big|_{r=R} \quad (6.1.3)$$

$$\frac{\sigma_{rr}^A + \sigma_{rr}^B}{2} = A_{33}^{EE} (u^B - u^A) + A_{31}^{EE} (\varepsilon_{\theta\theta}^A + \varepsilon_{\theta\theta}^B) \Big|_{r=R}$$

Здесь A_{ij}^{EE} - константы поверхностной упругости. Найденные из (6.1.3) величины C_1^A, C_2^B достаточно громоздки и здесь не приводятся, хотя их вычисление не представляет трудности.

Рассмотрим случай, когда поверхностные величины A_{ij}^{EE} соответствуют слою конечной толщины h и определяются формулами (5.1.41)-(5.1.46). Дальнейшее вычисление любых компонент напряжений и смещений не представляет труда. Выпишем, например, коэффициент концентрации деформации (отношение деформации во включении к деформации на бесконечности) для изотропных фаз с точностью до одного члена разложения по параметру h/R

$$\frac{\varepsilon^A}{\varepsilon^\infty} = \frac{3(\lambda^B + 2\mu^B)}{3K^A + 4\mu^B} - \frac{36(\lambda^B + 2\mu^B)(K^A - K^C)(\mu^B - \mu^C)}{(3K^A + 4\mu^B)^2(\lambda^C + 2\mu^C)} \frac{h}{R} + O\left(\frac{h}{R}\right)^2 \quad (6.1.4)$$

Здесь $K^n, \lambda^n, \mu^n, n = A, B, C$ - объемные модули и константы Ламе материалов.

6.1.2. Задача о шаровом включении при наличии промежуточного слоя конечной толщины

Сравним полученное решение с решением задачи о шаровом включении при наличии промежуточного слоя конечной толщины. Для этого вновь воспользуемся формулами (6.1.1), в которых положим $k = A, B, C$, $C_2^A = 0$, где индекс C соответствует промежуточному слою, толщину которого положим h . Граничные условия полного контакта будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^A - \sigma_{rr}^C &= 0 \Big|_{r=R-h/2} \\ \sigma_{rr}^B - \sigma_{rr}^C &= 0 \Big|_{r=R+h/2} \\ u^A - u^C &= 0 \Big|_{r=R-h/2} \\ u^B - u^C &= 0 \Big|_{r=R+h/2}\end{aligned}\tag{6.1.5}$$

Решение системы (6.1.5) после подстановки в нее выражений для напряжений и смещений (6.1.1) дает значения констант $C_1^A, C_2^B, C_1^C, C_2^C$, подстановка которых в общее решение (6.1.1) дает решение задачи. Отметим, что вычисленный таким образом коэффициент концентрации деформации для изотропных фаз с точностью до одного члена разложения по параметру h/R совпадает с результатом (6.1.4), полученным на основе рассмотренной модели.

6.1.3. Задача о шаровом включении при наличии промежуточного слоя в постановке традиционной поверхностной упругости

Рассмотрим решение, получаемое в постановке традиционной поверхностной упругости. Граничные условия при этом [228, 229] имеют в используемых обозначениях вид

$$\frac{R}{2}(\sigma_{rr}^B - \sigma_{rr}^A) - (A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE})\varepsilon_{\theta\theta}^A = 0 \Big|_{r=R} \quad (6.1.6)$$

$$(u^B - u^A) = 0 \Big|_{r=R} \Rightarrow \varepsilon_{\theta\theta}^A = \varepsilon_{\theta\theta}^B \Big|_{r=R}$$

Подстановка (6.1.6) в (6.1.1) дает

$$C_1^A / C_1^B = \frac{3(\lambda^B + 2\mu^B)}{2(A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE}) / R + 3K^A + 4\mu^B} \quad (6.1.7)$$

$$C_2^B / C_1^B = R^3 \left[1 + \frac{3(\lambda^B + 2\mu^B)}{2(A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE}) / R + 3K^A + 4\mu^B} \right]$$

Подстановка (6.1.7) в (6.1.1) для изотропного слоя $(A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE} = \lambda^C + \mu^C)$ дает решение задачи, совпадающее, по сути, с решением [228, 229].

$$\frac{\varepsilon^A}{\varepsilon^\infty} = \frac{3(\lambda^B + 2\mu^B)}{3K^A + 4\mu^B} - \frac{12(\lambda^B + 2\mu^B)(\lambda^C + \mu^C)}{(3K^A + 4\mu^B)^2} \frac{h}{R} + O\left(\frac{h}{R}\right)^2 \quad (6.1.8)$$

Для сравнения коэффициент концентрации деформации, вычисленный аналогично (6.1.4), в общем случае не совпадает с (6.1.4) ни при каком выборе констант $A_{ij}^{EE}(\lambda^C, \mu^C)$. Совпадение возможно лишь для искусственно подобранных значений упругих постоянных.

6.1.4. Задача о шарообразном включении при наличии собственных сферически симметричных деформаций во включении и в поверхностном слое

Рассмотрим аналогичную задачу, но при наличии собственных деформаций во включении и приповерхностном слое и при отсутствии внешнего поля. Общее решение уравнений упругости для полей смещений, деформаций и напряжений внутри и вне включения будут иметь вид

$$u^k = C_1^k r + \frac{C_2^k}{r^2},$$

$$\varepsilon_{rr}^{Tk} = \frac{du^k}{dr} = C_1^k - \frac{2C_2^k}{r^3},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{Tk} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{Tk} = \frac{u^k}{r} = C_1^k + \frac{C_2^k}{r^3},$$

$$\sigma_{rr}^k = (\lambda^k + 2\mu^k)(\varepsilon_{rr}^{Tk} - \varepsilon_{rr}^{Pk}) + 2\lambda^k(\varepsilon_{\theta\theta}^{Tk} - \varepsilon_{\theta\theta}^{Pk})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^k = 2(\lambda^k + \mu^k)(\varepsilon_{\theta\theta}^{Tk} - \varepsilon_{\theta\theta}^{Pk}) + \lambda^k(\varepsilon_{rr}^{Tk} - \varepsilon_{rr}^{Pk})$$

$$k = A, B, \quad C_2^A = C_2^B = 0,$$

(6.1.9)

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{PB} = \varepsilon_{rr}^{PB} = 0, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{PA} = \varepsilon_{rr}^{PA} = \varepsilon^0$$

Здесь $k = A, B$, по-прежнему, для внутренней и внешней областей соответственно; в качестве параметров, определяющих поле напряжений выступают три величины собственных деформаций: собственные деформации в шаровом включении $\varepsilon_{\theta\theta}^{PA} = \varepsilon_{rr}^{PA} = \varepsilon^0$ и, вообще говоря, различные окружные и радиальные собственные деформации поверхности $\varepsilon_{\theta\theta}^{PD}, \varepsilon_{rr}^{PD}$.

Для определения констант C_1^A, C_2^B вновь воспользуемся комбинациями условий (5.1.68), (5.1.71), которые для рассматриваемого случая наличия собственных деформаций и сферической симметрии преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
& \frac{R}{2} (\sigma_{rr}^B - \sigma_{rr}^A) - (A_{11}^{EE} + A_{12}^{EE}) \left(\frac{\varepsilon_{\theta\theta}^A + \varepsilon_{\theta\theta}^B}{2} - \varepsilon_{\theta\theta}^{PD} \right) - A_{13}^{EE} (u^B - u^A - \varepsilon_{rr}^{PD}) - \\
& (A_{11}^{EA} + A_{12}^{EA} + A_{13}^{EA}) \varepsilon^0 - (A_{11}^{EP} + A_{12}^{EP}) \varepsilon_{\theta\theta}^{PD} - A_{13}^{EP} \varepsilon_{rr}^{PD} = 0 \Big|_{r=R} \\
& \frac{\sigma_{rr}^A + \sigma_{rr}^B}{2} = \tag{6.1.10} \\
& = A_{33}^{EE} (u^B - u^A - \varepsilon_{rr}^{PD}) + A_{31}^{EE} (\varepsilon_{\theta\theta}^A + \varepsilon_{\theta\theta}^B - 2\varepsilon_{\theta\theta}^{PD}) + \\
& + (2A_{31}^{EA} + A_{33}^{EA}) \varepsilon^0 + 2A_{31}^{EP} \varepsilon_{\theta\theta}^{PD} + A_{33}^{EP} \varepsilon_{rr}^{PD} \Big|_{r=R}
\end{aligned}$$

Пусть поверхностные величины A_{ij}^{EE} соответствуют слою конечной толщины h и определяются формулами (5.1.41)-(5.1.46). Выпишем, например, отношение полной деформации во включении к собственной деформации во включении (данное отношение является комбинацией компонент тензора Эшелби для рассматриваемой задачи). Рассмотрим два варианта: собственные деформации в слое толщины h отсутствуют; собственные деформации в данном слое равны собственным деформациям в шарообразном включении.

Для первого из указанных вариантов эффективные собственные деформации в бесконечнотонком слое согласно (5.1.59) имеют вид

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{PD} = 0, \quad \varepsilon_{rr}^{PD} = -\varepsilon^0 h / 2 \tag{6.1.11}$$

Для данного варианта в случае изотропных фаз с точностью до линейного члена разложения по параметру h/R искомое отношение имеет вид

$$\frac{\varepsilon^A}{\varepsilon^0} = \frac{3K^A}{3K^A + 4\mu^B} + \frac{12K^A(\mu^B - \mu^C)(3K^C + 4\mu^B)}{(3K^A + 4\mu^B)^2(\lambda^C + 2\mu^C)} \frac{h}{R} + O\left(\frac{h}{R}\right)^2 \quad (6.1.12)$$

Для второго из указанных вариантов эффективные собственные деформации в бесконечнотонком слое согласно (5.1.59) имеют вид

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{PD} = \varepsilon^0, \quad \varepsilon_{rr}^{PD} = \varepsilon^0 h / 2 \quad (6.1.13)$$

Для данного варианта в случае изотропных фаз с точностью до линейного члена разложения по параметру h/R получаем

$$\frac{\varepsilon^A}{\varepsilon^0} = \frac{3K^A}{3K^A + 4\mu^B} + \frac{48\mu^B(\mu^B - \mu^C)(K^A - K^C)}{(3K^A + 4\mu^B)^2(\lambda^C + 2\mu^C)} \frac{h}{R} + O\left(\frac{h}{R}\right)^2 \quad (6.1.14)$$

Сравним полученные решения с решениями задачи о шаровом включении при наличии промежуточного слоя конечной толщины. Для этого вновь воспользуемся формулами (6.1.9), в которых положим $k = A, B, C$, $C_2^A = 0$, где индекс C соответствует промежуточному слою, толщину которого положим h . Граничные условия полного контакта имеют по-прежнему вид (6.1.5). Решение системы (6.1.5) после подстановки в нее выражений для напряжений и смещений (6.1.9) дает значения констант $C_1^A, C_2^B, C_1^C, C_2^C$, подстановка которых в (6.1.9) дает решение задачи. Вычисленные таким образом отношения полных деформации к собственным

деформациям включения для изотропных фаз с точностью до одного члена разложения по параметру h/R совпадают с результатами (6.1.12) и (6.1.14) для отсутствия и наличия собственных деформаций в промежуточном слое, соответственно, и отличаются от решений, полученных на основе традиционной поверхностной теории упругости.

Следует отметить связь полученных результатов с результатами [168, 169]. Так в работе [168] получено решение для «лукообразных» структур – шарового включения, окруженного конечным числом концентрических сферических слоев конечной толщины при наличии собственных деформаций во всех слоях. Полученные выше решения соответствуют случаю единственного слоя, толщина которого устремлена к нулю. Однако в указанной работе подобный проделанному в настоящей работе предельный переход осуществлен не был. В работе [169] результаты [168] были обобщены на случай наличия традиционной поверхностной упругости (без собственных поверхностных деформаций) между слоями. При такой постановке возникает естественный вопрос о выборе отсчетной конфигурации для промежуточного слоя. Этот вопрос будет более подробно исследован ниже.

6.2. Задача о шарообразном включении в бесконечной среде в произвольном однородном поле и при произвольных однородных собственных деформациях включения и поверхности раздела

Дано обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной заданными напряжениями вдали от него, а также однородными собственными деформациями внутри включения и на поверхности раздела,

при учете наряду с поверхностной упругостью поверхностных остаточных напряжений. Во избежание чрезвычайной громоздкости, определяющие соотношения для интерфейса были записаны для частного вида, соответствующего традиционной модели поверхностной упругости Шаттлворса.

6.2.1. Соотношения для сред внутри и вне включения

Предполагаем, что среда может рассматриваться как кусочно-однородная, каждая из подобластей которой описывается уравнениями линейной теории упругости с возможными собственными (начальными или остаточными) деформациями. При этом в силу высокой степени симметрии и линейности задачи деформации ε для k -той однородной области можно представить в виде суммы упругой и неупругой составляющей

$$\varepsilon_{ij}^{kT} = \varepsilon_{ij}^k + \varepsilon_{ij}^{k0} \quad (6.2.1)$$

Здесь и далее второй верхний индекс T соответствует полным деформациям, а второй верхний индекс 0 - собственным деформациям. Отсутствие второго верхнего индекса указывает на упругие деформации. Первый верхний индекс k характеризует тип рассматриваемой области и для него возможны далее два значения: e - для матрицы и i - для включения. Нижними индексами отмечаются компоненты тензорных величин.

Рассматривая задачу, аналогичную известной задаче Эшелби, будем предполагать, что неограниченная упругая матрица всюду свободна от собственных деформаций, а во включении имеются однородные собственные деформации. Предположение об однородности достаточно для разложения

не только деформаций, но и смещений на упругую и неупругую составляющие

$$\varepsilon_{ij}^{eT} = \varepsilon_{ij}^e, \quad \varepsilon_{ij}^{iT} = \varepsilon_{ij}^i + \varepsilon_{ij}^{i0}, \quad U_i^{eT} = U_i^e, \quad U_i^{iT} = U_i^i + U_i^{i0} \quad (6.2.2)$$

Здесь для смещений U использован аналогичный набор индексов. Иначе говоря, ненапряженное состояние сферического включения и поверхностного слоя выбираются в качестве отсчётной конфигурации [230].

Ввиду линейности задачи достаточно в дальнейшем рассмотреть, прежде всего, случай одноосных собственных деформаций, после чего общий случай может быть получен как суперпозиция решений, соответствующих собственным деформациям в различных направлениях.

Внутри и вне шарообразного включения поле упругого смещения может быть представлено в сферических координатах (r, θ, φ) как (см., например, [231], гл. IV, формулы (1.8), (1.10))

$$\begin{aligned} U_r^i &= \sum_{n=0}^N \left[A_n (n+1)(n-2+4\nu^i) r^{n+1} + B_n n r^{n-1} \right] P_n(\cos \theta) \quad r \leq R \\ U_\theta^i &= \sum_{n=0}^N \left[A_n (n+5-4\nu^i) r^{n+1} + B_n r^{n-1} \right] \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta} \quad r \leq R \\ U_r^e &= \sum_{n=0}^N \left[C_n n (n+3-4\nu^e) r^{-n} + D_n (n+1) r^{-n-2} \right] P_n(\cos \theta) \quad r \geq R \\ U_\theta^e &= \sum_{n=0}^N \left[C_n (-n+4-4\nu^e) r^{-n} + D_n r^{-n-2} \right] \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta} \quad r \geq R \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Здесь R - радиус включения; $P_n(x)$ - полиномы Лежандра; ν^i, ν^e - коэффициенты Пуассона включения и матрицы, соответственно; A_n, B_n, C_n, D_n - коэффициенты, подлежащие определению. Из последующего

видно, что для рассматриваемой задачи достаточно удержать младшие члены с $n \leq 2$. Причем, члены с $n=1$ следует опустить, поскольку они связаны с отсутствующим в рассматриваемой задаче главным вектором сил.

В задаче о включении, испытывающем собственные деформации, полные смещения внутри него будут складываться из упругих смещений (6.2.3) и собственных смещений, обязанных однородной собственной деформации растяжения ε^{i0} вдоль оси z ,

$$U_r^{i0} = \varepsilon^{i0} r \cos^2 \theta$$

$$U_\theta^{i0} = -\varepsilon^{i0} r \sin \theta \cos \theta$$

(6.2.4)

Упругие деформации внутри и вне включения будут выражаться через упругие смещения обычным образом

$$\varepsilon_{rr}^k = \frac{\partial U_r^k}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^k = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta^k}{\partial \theta} + \frac{U_r^k}{r}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^k = \frac{U_\theta^k}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{U_r^k}{r}$$

(6.2.5)

$$\varepsilon_{r\theta}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_\theta^k}{\partial r} - \frac{U_\theta^k}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^k}{\partial \theta} \right)$$

В случае упругой изотропии материалов матрицы и включения напряжения связаны с упругими деформациями следующим образом

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^k &= 2\mu^k \varepsilon_{rr}^k + \lambda^k (\varepsilon_{rr}^k + \varepsilon_{\theta\theta}^k + \varepsilon_{\varphi\varphi}^k) \\
\sigma_{\theta\theta}^k &= 2\mu^k \varepsilon_{\theta\theta}^k + \lambda^k (\varepsilon_{rr}^k + \varepsilon_{\theta\theta}^k + \varepsilon_{\varphi\varphi}^k) \\
\sigma_{\varphi\varphi}^k &= 2\mu^k \varepsilon_{\varphi\varphi}^k + \lambda^k (\varepsilon_{rr}^k + \varepsilon_{\theta\theta}^k + \varepsilon_{\varphi\varphi}^k) \\
\sigma_{r\theta}^k &= 2\mu^k \varepsilon_{r\theta}^k
\end{aligned}
\tag{6.2.6}$$

Здесь λ^k, μ^k - константы Ламе k -той фазы.

Для решения поставленной задачи о нахождении полей напряжений и смещений внутри и вне включения выписанные соотношения должны быть дополнены граничными условиями, в качестве которых будут выступать соотношения поверхностной упругости на границе раздела, к рассмотрению которых сейчас и перейдем.

6.2.2. Соотношения на поверхности раздела

Подобно описанию явления упругости в объеме, поверхностная упругость описывается двумя группами переменных (кинематических – смещений и деформаций и статических – поверхностных напряжений) и тремя группами уравнений – кинематических, связывающих компоненты поверхностных и объемных смещений и деформаций, статических, связывающих компоненты поверхностных и объемных напряжений, и определяющих соотношений, связывающих между собой переменные обеих групп. Рассмотрим указанные соотношения.

6.2.2.1. Кинематика поверхности

Ограничим рассмотрение случаем двусторонне когерентной границы раздела, т.е. будем считать, что полные смещения поверхности U_i^{sT} совпадают с полными смещениями обеих прилегающих объемных областей (включения и окружающей матрицы)

$$U_i^{sT} = U_i^{eT} = U_i^{iT} \quad (6.2.7)$$

т.е. вектор полного смещения является непрерывной функцией координат. Полные поверхностные деформации при этом связываются с полными смещениями по обычным формулам. В силу непрерывности нормальной и тангенциальных к поверхности компонент вектора смещения необходимо отсутствие компонент тензора поверхностных деформаций, имеющих индексы, соответствующие направлению нормали (т.е. ε_{ni}^{sT} и ε_{nm}^{sT}). Тензор полных поверхностных деформаций становится проекцией тензора полных объемных деформаций на плоскость, касательную к границе раздела. Следовательно, каждый из тензорных индексов тензора поверхностных деформаций может принимать значения от 1 до 2, а не от 1 до 3 как в пространственном случае. Данное понижение размерности тензора полных поверхностных деформаций соответствует непрерывности полных смещений (6.2.7).

Непрерывность полных смещений вдоль поверхности раздела влечет за собой непрерывность всех производных от полных смещений по координатам, направленным по касательным к поверхности раздела, так что можно заключить, что аналогично условию для полных смещений должно выполняться условие непрерывности компонент полных деформаций с тензорными индексами, принимающими значения 1 и 2

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{sT} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{eT} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{iT} \quad (6.2.8)$$

Для рассматриваемого случая осесимметрично деформируемой сферы, соотношения между полными поверхностными деформациями и полными смещениями аналогичны второму и третьему соотношению (6.2.5). В них достаточно заменить индекс k , указывающий материал матрицы и включения, на индекс поверхности раздела s и добавить индекс полных смещений и деформаций T

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{sT} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\theta}^{eT}}{\partial \theta} + \frac{U_r^{eT}}{r} \quad (6.2.9)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{sT} = \frac{U_{\theta}^{eT}}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{U_r^{eT}}{r}$$

Отметим, что рассмотренный вариант связи кинематики поверхности с кинематикой объема не единственный (обсуждение различных возможностей см., например, в [228, 229, 230]). Далее мы принимаем, что справедливы соотношения непрерывности вида (6.2.7)-(6.2.9), (6.2.1)-(6.2.3). Однако нельзя исключить и другие варианты для иных физических ситуаций, например, со скольжением на границе раздела, с реконструкцией поверхности раздела, и другими взаимосвязями между упругими и неупругими составляющими в объеме и на поверхности.

6.2.2.2. Статика поверхности

Будем предполагать, что равновесное состояние поверхности описывается обобщенным законом Лапласа-Юнга в соответствии с [174, 175], который использовался в работах [157, 158],

$$\nabla_s \boldsymbol{\sigma}^s + [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{n} = 0 \quad (6.2.10)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}^i - \boldsymbol{\sigma}^e$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}^s$ - тензор поверхностных напряжений. Такой закон может быть получен путем рассмотрения баланса сил в координатных осях, связанных с элементом поверхности, т.е. является аналогом уравнений равновесия. При этом выражение для поверхностного градиента ∇_s представимо в виде (см. [157, 158])

$$\begin{aligned} \nabla_s \boldsymbol{\sigma}^s = & - \left(\frac{\sigma_{11}^s}{R_1} + \frac{\sigma_{22}^s}{R_2} \right) \mathbf{n} + \frac{\mathbf{e}_1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} h_2 \sigma_{11}^s + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} h_1 \sigma_{21}^s + \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^s - \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22}^s \right] + \\ & \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_2} \left[- \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11}^s + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} h_2 \sigma_{12}^s + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} h_1 \sigma_{22}^s + \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{21}^s \right] \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ - два взаимно ортогональных базисных вектора в плоскости, касательной к поверхности раздела; \mathbf{n} - единичный вектор нормали к ней; α_1, α_2 - два параметра, определяющие поверхность раздела так, что кривые с $\alpha_1 = const, \alpha_2 = const$ задают два взаимно ортогональных семейства на данной поверхности; h_1, h_2 - соответствующие метрические коэффициенты; R_1, R_2 - главные радиусы кривизны; σ_{ij}^s - компоненты тензора поверхностных напряжений.

Для частного случая сферической поверхности формулы (6.2.10), (6.2.11) принимают простой вид

$$\sigma_{rr}^e - \sigma_{rr}^i - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^s + \sigma_{\theta\theta}^s}{R} = 0$$

(6.2.12)

$$\sigma_{r\theta}^e - \sigma_{r\theta}^i + \frac{1}{R \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{\theta\theta}^s + \frac{\sigma_{\theta\theta}^s - \sigma_{\varphi\varphi}^s}{R} = 0$$

Данные выражения получаются также из уравнений равновесия сферической оболочки, нагруженной симметрично относительно оси (см. [232] §105), и соответствуют уравнениям равновесия, записанным в сферических координатах.

6.2.2.3. Определяющие соотношения для поверхности

Для пополнения системы уравнений граничными условиями необходимо выписать определяющие соотношения, связывающие компоненты тензора поверхностных напряжений с компонентами тензора деформаций. В настоящее время предложено большое количество вариантов записи определяющих соотношений. Не претендуя здесь на полноту их анализа, сделаем лишь некоторые замечания. Данные соотношения могут быть нелинейными и содержать компоненты начальных (остаточных) напряжений или собственных деформаций поверхности. Упругие параметры, входящие в определяющие соотношения, соответствуют, в общем случае, анизотропному телу. Значения, как упругих поверхностных параметров, так и начальных поверхностных напряжений, могут зависеть от кристаллографической ориентации поверхности, т.е. от положения рассматриваемой точки и ориентации локального базиса на поверхности включения. При этом теоретические ограничения на значения поверхностных модулей весьма слабые, поскольку вместе с поверхностью необходимо учитывать прилегающие объемы, так что требование положительности

упругой энергии применимо лишь к телу в целом, но не к участку поверхности. Поэтому в отличие от чисто объемной упругости многие поверхностные модули жесткости могут быть отрицательными, как это видно из теоретических расчетов упругости кристаллических материалов, выполненных в [233].

При дальнейшем анализе будем пользоваться определяющими соотношениями частного вида

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^s &= \sigma_{\theta\theta}^{s0} + (\lambda^s + 2\mu^s) \varepsilon_{\theta\theta}^{sT} + \lambda^s \varepsilon_{\varphi\varphi}^{sT} = (\lambda^s + 2\mu^s) (\varepsilon_{\theta\theta}^{sT} - \varepsilon_{\theta\theta}^{s0}) + \lambda^s (\varepsilon_{\varphi\varphi}^{sT} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0}) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^s &= \sigma_{\varphi\varphi}^{s0} + \lambda^s \varepsilon_{\theta\theta}^{sT} + (\lambda^s + 2\mu^s) \varepsilon_{\varphi\varphi}^{sT} = \lambda^s (\varepsilon_{\theta\theta}^{sT} - \varepsilon_{\theta\theta}^{s0}) + (\lambda^s + 2\mu^s) (\varepsilon_{\varphi\varphi}^{sT} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0})\end{aligned}\tag{6.2.13}$$

Здесь λ^s, μ^s - модули поверхностной упругости, аналогичные константам Ламе для объемной изотропной упругости, а $\sigma_{\theta\theta}^{s0}, \sigma_{\varphi\varphi}^{s0}$ - компоненты поверхностных остаточных напряжений. Благодаря учету в этих определяющих уравнениях остаточных (начальных) напряжений они являются более общими, чем использованные в работах [157, 158]. Первые равенства в (6.2.13) выражают действующие поверхностные напряжения через остаточные напряжения $\sigma_{\theta\theta}^{s0}, \sigma_{\varphi\varphi}^{s0}$ и полные поверхностные деформации, а вторые – через поверхностные деформации и собственные поверхностные деформации $\varepsilon_{\theta\theta}^{s0}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0}$. При этом связь между остаточными напряжениями и собственными деформациями очевидна

$$\begin{aligned}-\sigma_{\theta\theta}^{s0} &= (\lambda^s + 2\mu^s) \varepsilon_{\theta\theta}^{s0} + \lambda^s \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0} \\ -\sigma_{\varphi\varphi}^{s0} &= \lambda^s \varepsilon_{\theta\theta}^{s0} + (\lambda^s + 2\mu^s) \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0}\end{aligned}\tag{6.2.14}$$

Определяющие соотношения (6.2.13) можно получить также с помощью следующего выражения для плотности энергии, связанной с деформированием поверхности

$$\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{2} (\varepsilon_{11}^{sT} - \varepsilon_{11}^{s0})^2 + \frac{\lambda^s + 2\mu^s}{2} (\varepsilon_{22}^{sT} - \varepsilon_{22}^{s0})^2 + \lambda^s (\varepsilon_{11}^{sT} - \varepsilon_{11}^{s0})(\varepsilon_{22}^{sT} - \varepsilon_{22}^{s0}) + 2\mu^s (\varepsilon_{12}^{sT} - \varepsilon_{12}^{s0})^2 \quad (6.2.15)$$

Предположение о малости не только упругих деформаций ε_{ik} , но также собственных объемных и поверхностных деформаций ε_{ik}^{i0} , ε_{ik}^{s0} , позволяет ограничиться рассмотрением задачи в рамках малых деформаций.

В предшествующих работах [157, 158] члены определяющих уравнений, соответствующие остаточным поверхностным напряжениям (собственным поверхностным деформациям) отбрасывались в предположении их малости. Однако согласно оценкам характеристик поверхностной упругости, выполненным в работе [233] для ряда кубических кристаллов, это не вполне верно. В [233] было найдено, что модули поверхностной упругости составляли ~ 10 Н/м и лишь на один порядок величины превосходили остаточные поверхностные напряжения ($\sigma^{s0} \sim 1$ Н/м). При деформациях в линейном диапазоне $\varepsilon \leq 0.01$ такие остаточные напряжения обеспечивают главный вклад в напряжения на поверхности (напряжения, соответствующие упругим поверхностным деформациям имеют порядок $\sigma^s = \lambda^s \varepsilon \sim 0.1$ Н/м). Поэтому далее они учитываются наряду с гуксовским деформационным вкладом в принятых определяющих соотношениях. Дополнительное своеобразие используемых определяющих соотношений состоит в предположении об анизотропии остаточных поверхностных напряжений, которая частично отражает анизотропию структурной реконструкции поверхности раздела. Согласно расчетам работы

[233] различие в нормальных компонентах остаточных поверхностных напряжений для некоторых кристаллографических плоскостей кристаллов может достигать десятков процентов от средней величины.

При дальнейших расчетах будем предполагать, что собственные деформации поверхности совместны, так что существует вектор поверхностного смещения, и он может быть представлен в виде, аналогичном (6.2.4)

$$U_r^{s0} = \varepsilon^{s0} R \cos^2 \theta \quad (6.2.16)$$

$$U_\theta^{s0} = -\varepsilon^{s0} R \sin \theta \cos \theta$$

Здесь ε^{s0} - эффективная одноосная деформация, вызывающая указанные поверхностные смещения.

Отметим, что определяющие соотношения (6.2.13) можно переписать и в терминах упругой деформации, различной для внутренней и внешней окрестностей поверхности раздела. Подстановка (6.2.8) и (6.2.2) в (6.2.13) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^s &= (\lambda^s + 2\mu^s)(\varepsilon_{\theta\theta}^e - \varepsilon_{\theta\theta}^{s0}) + \lambda^s(\varepsilon_{\varphi\varphi}^e - \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0}) = \\ &= (\lambda^s + 2\mu^s)(\varepsilon_{\theta\theta}^i + \varepsilon_{\theta\theta}^{i0} - \varepsilon_{\theta\theta}^{s0}) + \lambda^s(\varepsilon_{\varphi\varphi}^i + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{i0} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0}) \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^s &= \lambda^s(\varepsilon_{\theta\theta}^e - \varepsilon_{\theta\theta}^{s0}) + (\lambda^s + 2\mu^s)(\varepsilon_{\varphi\varphi}^e - \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0}) = \\ &= \lambda^s(\varepsilon_{\theta\theta}^i + \varepsilon_{\theta\theta}^{i0} - \varepsilon_{\theta\theta}^{s0}) + (\lambda^s + 2\mu^s)(\varepsilon_{\varphi\varphi}^i + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{i0} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0}) \end{aligned}$$

В частном случае $\varepsilon^{s0} = \varepsilon^{i0}$ вновь приходим к формулировке определяющего соотношения, использованной в [157, 158], когда ненапряженное состояние поверхности совпадает с ненапряженным состоянием включения. В другом частном случае, $\varepsilon^{s0} = 0$, ненапряженное состояние поверхности совпадает с ненапряженным состоянием матрицы.

Тогда согласно (6.2.17) поверхностные напряжения могут быть выражены в терминах либо упругих внутренних деформаций

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^s &= (\lambda^s + 2\mu^s)(\varepsilon_{\theta\theta}^i + \varepsilon_{\theta\theta}^{i0}) + \lambda^s(\varepsilon_{\varphi\varphi}^i + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{i0}) = -\sigma_{\theta\theta}^{s0} + (\lambda^s + 2\mu^s)\varepsilon_{\theta\theta}^i + \lambda^s\varepsilon_{\varphi\varphi}^i \\ \sigma_{\varphi\varphi}^s &= \lambda^s(\varepsilon_{\theta\theta}^i + \varepsilon_{\theta\theta}^{i0}) + (\lambda^s + 2\mu^s)(\varepsilon_{\varphi\varphi}^i + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{i0}) = -\sigma_{\varphi\varphi}^{s0} + \lambda^s\varepsilon_{\theta\theta}^i + (\lambda^s + 2\mu^s)\varepsilon_{\varphi\varphi}^i\end{aligned}\quad (6.2.18)$$

либо упругих внешних деформаций

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^s &= (\lambda^s + 2\mu^s)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \lambda^s\varepsilon_{\varphi\varphi}^e \\ \sigma_{\varphi\varphi}^s &= \lambda^s\varepsilon_{\theta\theta}^e + (\lambda^s + 2\mu^s)\varepsilon_{\varphi\varphi}^e\end{aligned}\quad (6.2.19)$$

В силу большей громоздкости таких формулировок удобнее пользоваться представлением определяющих соотношений через полные деформации поверхности раздела.

6.2.3. Тензор Эшелби. Нахождение поля смещений внутри и вне сферического включения при наличии в нем одноосных собственных деформаций

Решение задачи о поиске полей смещений, деформаций и напряжений в теле, содержащем шаровую неоднородность с одноосными собственными

деформациями при учете поверхностных эффектов, описываемых соотношениями (6.2.13), сводится к нахождению коэффициентов $A_0, A_2, B_2, C_2, D_0, D_2$ в (6.2.3). Коэффициенты B_0, C_0 , как видно из структуры выражений в (6.2.3), не влияют на результаты и могут быть опущены. Другие коэффициенты находятся из сопряжения решений внутри и вне сферы.

Два из условий сопряжения являются условиями неразрывности радиальной и тангенциальной компонент смещения на поверхности

$$U_r^i(R, \theta) + U_r^{i0}(R, \theta) = U_r^e(R, \theta) \quad (6.2.20)$$

$$U_\theta^i(R, \theta) + U_\theta^{i0}(R, \theta) = U_\theta^e(R, \theta) \quad (6.2.21)$$

Еще два условия получаются путем подстановки в соотношения (6.2.12) поверхностных напряжений, выраженных через полные поверхностные деформации, совпадающие в соответствии с (6.2.8) с полными деформациями в объеме. Последние, в свою очередь (см. (6.2.2)), совпадают с упругими деформациями матрицы

$$(\sigma_{rr}^e - \sigma_{rr}^i)R - 2(\lambda^s + \mu^s)(\varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^e - \varepsilon_{\theta\theta}^{s0} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0}) = 0 \quad \text{для } r = R \quad (6.2.22)$$

$$(\sigma_{r\theta}^e - \sigma_{r\theta}^i)R + 2\mu^s \frac{(\varepsilon_{\theta\theta}^e - \varepsilon_{\varphi\varphi}^e - \varepsilon_{\theta\theta}^{s0} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0})}{\operatorname{tg} \theta} + \quad (6.2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [(\lambda^s + 2\mu^s)(\varepsilon_{\theta\theta}^e - \varepsilon_{\theta\theta}^{s0}) + \lambda^s(\varepsilon_{\varphi\varphi}^e - \varepsilon_{\varphi\varphi}^{s0})] = 0 \quad \text{для } r = R$$

Приравнявая в (6.2.20) и (6.2.22) с учетом (6.2.5), (6.2.6) коэффициенты при одинаковых $P_n(\cos \theta)$, получим шесть уравнений: (по два из (6.2.20) и (6.2.22) и по одному из (6.2.21) и (6.2.23)) относительно шести неизвестных коэффициентов $A_0, A_2, B_2, C_2, D_0, D_2$. Решение данной системы дается формулами (6.2.24)-(6.2.29).

$$A_0 = A'_0 \varepsilon^{i0}, \quad A_2 = A'_2 \varepsilon^{i0}, \quad B_2 = B'_2 \varepsilon^{i0}, \quad C_2 = C'_2 \varepsilon^{i0}, \quad D_0 = D'_0 \varepsilon^{i0}, \quad D_2 = D'_2 \varepsilon^{i0} \quad (6.2.24)$$

$$A'_0 = A_0^i + A_0^s \varepsilon^{s0} / \varepsilon^{i0}, \quad A'_2 = A_2^i + A_2^s \varepsilon^{s0} / \varepsilon^{i0}, \quad B'_2 = B_2^i + B_2^s \varepsilon^{s0} / \varepsilon^{i0}, \quad (6.2.25)$$

$$C'_2 = C_2^i + C_2^s \varepsilon^{s0} / \varepsilon^{i0}, \quad D'_0 = D_0^i + D_0^s \varepsilon^{s0} / \varepsilon^{i0}, \quad D'_2 = D_2^i + D_2^s \varepsilon^{s0} / \varepsilon^{i0},$$

Здесь

$$A_0^i = \frac{\lambda^s + \mu^s + R\mu^e}{\Delta_0}, \quad A_0^s = -\frac{\lambda^s + \mu^s}{\Delta_0}, \quad (6.2.26)$$

$$D_0^i = -\frac{R^4 \mu^i (1 + \nu^i)}{\Delta_0}, \quad D_0^s = -\frac{2R^3 (\lambda^s + \mu^s) (1 - 2\nu^i)}{\Delta_0}$$

$$A_2^i = -\frac{4\mu^i (\lambda^s + 2\mu^s) (4 - 5\nu^i)}{\Delta_2}, \quad A_2^s = 2(\lambda^s + 2\mu^s) \frac{2\mu^i (4 - 5\nu^i) + \mu^e (7 - 5\nu^e)}{\Delta_2} \quad (6.2.27)$$

$$B_2^i = R(-2(\lambda^s + 2\mu^s)^2 (4 - 5\nu^e) (7 - 10\nu^i) - 7R(\lambda^s + 2\mu^s) (-\mu^i (4 - 5\nu^e) (1 - \nu^i) +$$

$$6\mu^e (1 - \nu^e) (7 - 10\nu^i)) + (R\mu^e (7 - 5\nu^e) - \lambda^s (4 - 5\nu^e)) (-2\lambda^s (7 - 10\nu^i) -$$

$$R(\mu^i (7 + 5\nu^i) + 4\mu^e (7 - 10\nu^i))) / \Delta_2$$

$$\begin{aligned}
B_2^s &= R(2(\lambda^s + 2\mu^s)^2 (4 - 5\nu^e)(7 - 10\nu^i) - 7R(\lambda^s + 2\mu^s)(\mu^i (4 - 5\nu^e)(1 - \nu^i) + \\
&\quad 2\mu^e (-7 + 16\nu^i + (11 - 20\nu^i)\nu^e)) + \\
&\quad \lambda^s (4 - 5\nu^e)(-2\lambda^s (7 - 10\nu^i) - R(\mu^i (7 + 5\nu^i) + 4\mu^e (7 - 10\nu^i))) / \Delta_2 \\
C_2^i &= \frac{R^5 \mu^i}{2\Delta_2} (7(5R(4\mu^e + \mu^i) + 24\lambda^s + 28\mu^s) - 5\nu^i (48\lambda^s + 56\mu^s + 5R(8\mu^e - \mu^i))) \\
C_2^s &= \frac{R^4}{2\Delta_2} (\lambda^s (4R\mu^e (7 - 10\nu^i) + R\mu^i (7 + 5\nu^i) + 20\mu^s (7 - 10\nu^i)) + \\
&\quad \mu^s (20\mu^s (7 - 10\nu^i) + 7R\mu^i (7 + 5\nu^i) + 28R\mu^e (7 - 10\nu^i))) \\
D_2^i &= \frac{R^7 \mu^i}{\Delta_2} (2(\lambda^s + 2\mu^s)(1 + 4\nu^e)(7 - 10\nu^i) + 3(R\mu^i (7 + 5\nu^i) + 2(\lambda^s + 2R\mu^e)(7 - 10\nu^i))) \\
D_2^s &= \frac{R^6}{2\Delta_2} (6(\lambda^s + 2\mu^s)^2 (7 - 10\nu^i) - 3\lambda^s (2\lambda^s (7 - 10\nu^i) + R(\mu^i (7 + 5\nu^i) + 4\mu^e (7 - 10\nu^i))) + \\
&\quad R(\lambda^s + 2\mu^s)(4\mu^e (7 - 2\nu^e)(7 - 10\nu^i) + \mu^i (119 - 107\nu^i - 16\nu^e (7 - 10\nu^i))))
\end{aligned} \tag{6.2.28}$$

$$\Delta_0 = 3R\mu^i (1 + \nu^i) + 6(\lambda^s + \mu^s + R\mu^e)(1 - 2\nu^i)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= 3R(2(\lambda^s + 2\mu^s)^2 (4 - 5\nu^e)(7 - 10\nu^i) + \\
&\quad 7R(\lambda^s + 2\mu^s)(6\mu^e (1 - \nu^e)(7 - 10\nu^i) + 7\mu^i (4 - 5\nu^e)(1 - \nu^i)) - \\
&\quad (\lambda^s (4 - 5\nu^e) + R(\mu^e (-7 + 5\nu^e) + 2\mu^i (-4 + 5\nu^e))) \\
&\quad (\lambda^s (14 - 20\nu^i) + R(\mu^e (28 - 40\nu^i) + \mu^i (7 + 5\nu^i)))
\end{aligned} \tag{6.2.29}$$

Коэффициенты с номерами $n > 2$ при $P_n(\cos \theta)$ исчезают. В частном случае $\varepsilon^{s0} = \varepsilon^0$ выражения (6.2.24)-(6.2.29) с точностью до обозначений

совпадают с выражениями, полученными в [157, 158]. Учет других возможностей для ε^{s0} не приводит к существенно большей громоздкости получаемых выражений. Решение в ситуации без поверхностных напряжений получается предельным переходом $\lambda^s \rightarrow 0, \mu^s \rightarrow 0$ (либо $R \rightarrow \infty$). В случае $\lambda^e = \lambda^i, \mu^e = \mu^i$ решение совпадает с хорошо известным решением, полученным другим методом (см. [197]).

6.2.4. Компоненты тензора Эшелби

На основе полученного решения выпишем компоненты внутреннего и внешнего тензоров Эшелби - тензоров четвертого ранга, связывающих тензоры соответствующей полной деформации с тензором собственной деформации во включении,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{iT}_{ij} &= S^i_{ijkl} \varepsilon^{i0}_{kl} \\ \varepsilon^{eT}_{ij} &= S^e_{ijkl} \varepsilon^{i0}_{kl} \end{aligned} \tag{6.2.30}$$

Некоторые из этих компонент получаются непосредственно из выражений (6.2.3) при переходе к декартовой системе координат. Такие компоненты внутреннего тензора Эшелби имеют вид

$$\begin{aligned}
S_{3333}^i &= 1 - 2(1 - 2\nu^i)A'_0 + 2B'_2 + 3A'_2 \left[7(x^2 + y^2) - 6\nu^i(x^2 + y^2 - 2z^2) \right] \\
S_{1133}^i &= -2(1 - 2\nu^i)A'_0 - B'_2 - 3A'_2 \left[(7 - 8\nu^i)z^2 + 2\nu^i(3x^2 + y^2) \right] \\
S_{2233}^i &= -2(1 - 2\nu^i)A'_0 - B'_2 - 3A'_2 \left[(7 - 8\nu^i)z^2 + 2\nu^i(x^2 + 3y^2) \right] \\
S_{1233}^i &= -12\nu^i A'_2 xy \\
S_{1333}^i &= 6\nu^i A'_2 xz \\
S_{2333}^i &= 6\nu^i A'_2 yz
\end{aligned} \tag{6.2.31}$$

Величины $A'_0, A'_2, B'_2, C'_2, D'_0, D'_2$ определяются формулами (6.2.25)-(6.2.29). Решение, как и в [157, 158], оказывается зависящим от координат.

Для других компонент, содержащих неодинаковые индексы во второй их паре, решение может быть получено суперпозицией решений, соответствующих собственным деформациям растяжения вдоль оси x и собственным деформациям сжатия вдоль оси y с последующим поворотом результата суперпозиции на угол $\pi/4$ относительно оси z . Соответствующие компоненты при этом будут

$$\begin{aligned}
S_{1112}^i &= S_{2212}^i = -3(7 - 16\nu^i)A'_2 xy \\
S_{1212}^i &= \frac{1}{2} + \frac{B'_2}{2} + \frac{3A'_2}{2} \left[(7 + 2\nu^i)r^2 - 6\nu^i z^2 \right] \\
S_{1312}^i &= 9\nu^i A'_2 yz \\
S_{2312}^i &= 9\nu^i A'_2 xz \\
S_{3312}^i &= -3(7 - 10\nu^i)A'_2 xy
\end{aligned} \tag{6.2.32}$$

Остальные компоненты получаются круговой перестановкой индексов. Найденные выражения для S_{ijkl}^i с точностью до обозначений совпадают с аналогичными выражениями в [157, 158, 234].

Так же можно получить выражения для компонент внешнего тензора Эшелби, вывод которых изложен в следующем пункте.

6.2.5. Задача об упругой неоднородности при заданной нагрузке вдали. Тензоры концентрации напряжений

Обратимся теперь к решению более общей задачи о напряженно-деформированном состоянии среды с неоднородностью в виде шарообразного включения, создаваемым однородными собственными деформациями внутри и полем напряжений вдали от него. Как и при рассмотрении предыдущей задачи, процесс решения можно упростить с помощью принципа суперпозиции. А именно, для начала достаточно рассмотреть задачу об упругом бесконечном теле, подвергаемом действию одноосного растягивающего напряжения σ_{zz}^∞ вдали от шарового включения из другого материала при наличии собственных деформаций ε_{zz}^{i0} внутри него. Предполагаем, что среда внутри и вне включения однородна и изотропна и характеризуется упругими константами $\lambda^e, \mu^e, \lambda^i, \mu^i$ для матрицы и включения соответственно. Поведение поверхности по-прежнему характеризуется соотношениями (6.2.7)-(6.2.13). Задача о нахождении полей смещений, деформаций и напряжений, как и прежде, сводится к нахождению коэффициентов $A_0, A_2, B_2, C_2, D_0, D_2$ в (6.2.3), исходя из условий сопряжения на сфере (6.2.20)-(6.2.23). Единственное отличие том, что под смещениями в матрице U_r^e, U_θ^e теперь следует понимать величины

$$U_r^e = \sum_{n=0}^2 \left[C_n n (n+3-4\nu^e) r^{-n} + D_n (n+1) r^{-n-2} \right] P_n(\cos \theta) + \frac{\sigma_{33}^\infty}{2\mu^e} r \left(\cos^2 \theta - \frac{\nu^e}{1-\nu^e} \right) \quad (6.2.33)$$

$$U_\theta^e = \sum_{n=0}^2 \left[C_n (-n+4-4\nu^e) r^{-n} + D_n r^{-n-2} \right] \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} - \frac{\sigma_{33}^\infty}{2\mu^e} r \sin \theta \cos \theta$$

отличающиеся от употреблявшихся ранее выражений дополнительными членами, соответствующими однородному растяжению вдоль оси z . Выражения для внутренних смещений U_r^i, U_θ^i остаются в том же виде (6.2.3). Приравнявая в (6.2.20)-(6.2.23) коэффициенты при одинаковых $P_n(\cos \theta)$, получим шесть уравнений относительно шести неизвестных коэффициентов $A_0, A_2, B_2, C_2, D_0, D_2$.

В силу линейности такой системы уравнений ее решение может быть представлено в виде суммы трех решений, для каждого из которых только одно из значений $\varepsilon_{zz}^{i0}, \varepsilon_{zz}^{s0}, \sigma_{zz}^\infty$ не равно нулю

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0^i \varepsilon^{i0} + A_0^s \varepsilon^{s0} + A_0^\sigma \sigma^\infty, & A_2 &= A_2^i \varepsilon^{i0} + A_2^s \varepsilon^{s0} + A_2^\sigma \sigma^\infty, \\ B_2 &= B_2^i \varepsilon^{i0} + B_2^s \varepsilon^{s0} + B_2^\sigma \sigma^\infty, & C_2 &= C_2^i \varepsilon^{i0} + C_2^s \varepsilon^{s0} + C_2^\sigma \sigma^\infty, \\ D_0 &= D_0^i \varepsilon^{i0} + D_0^s \varepsilon^{s0} + D_0^\sigma \sigma^\infty, & D_2 &= D_2^i \varepsilon^{i0} + D_2^s \varepsilon^{s0} + D_2^\sigma \sigma^\infty, \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

Найденные из решения системы коэффициенты определяются формулами (6.2.26)-(6.2.29), а также формулами (6.2.35)

$$A_0^\sigma = -\frac{3R(1-\nu^e)}{4(1+\nu^e)\Delta_0}, \quad A_2^\sigma = -\frac{15(\lambda^s + 2\mu^s)(1-\nu^e)}{\Delta_2}$$

$$\begin{aligned}
B_2^\sigma &= \frac{1}{2 \Delta_2} (15 R^2 (-1 + v^e) (56 \mu^s (-1 + v^i) + \\
&\quad 6 \lambda^s (-7 + 8 v^i) + R (-\mu^i (7 + 5 v^i) + 4 \mu^e (-7 + 10 v^i)))) \\
C_2^\sigma &= -\frac{1}{4 \Delta_2} (5 R^4 \mu^{-e} (-4 \mu^s (\lambda^s + \mu^s) (-7 + 10 v^i) + \\
&\quad R^2 (\mu^e - \mu^i) (-\mu^i (7 + 5 v^i) + 4 \mu^e (-7 + 10 v^i)) + R (-49 \mu^i \mu^s \\
&\quad (-1 + v^i) + \lambda^s (\mu^i (35 - 47 v^i) + 4 \mu^e (-7 + 10 v^i)))) \\
D_0^\sigma &= \frac{1}{2 (1 + v^e) \Delta_0} (R^3 \mu^{-e} (-R \mu^i (-1 + 2 v^e) (1 + v^i) + \\
&\quad (-1 + 2 v^i) (R \mu^e (1 + v^e) + 2 \mu^s (-1 + 2 v^e) + \lambda^s (-2 + 4 v^e)))) \\
D_2^\sigma &= -\frac{1}{2 \Delta_2} (3 R^6 \mu^{-e} (-4 \mu^s (\lambda^s + \mu^s) (-7 + 10 v^i) + \\
&\quad R^2 (\mu^e - \mu^i) (-\mu^i (7 + 5 v^i) + 4 \mu^e (-7 + 10 v^i)) + \\
&\quad R (\lambda^s (\mu^i (35 - 47 v^i) + 4 \mu^e v^e (-7 + 10 v^i)) + \\
&\quad \mu^s (-49 \mu^i (-1 + v^i) + 8 \mu^e (-1 + v^e) (-7 + 10 v^i)))) \\
\end{aligned} \tag{6.2.35}$$

Результаты для смещений получаются подстановкой (6.2.34) в (6.2.3), после чего выражения для деформаций и напряжений находятся подстановкой смещений в выражения (6.2.5) и деформаций в выражения (6.2.6).

Решение для напряжений внутри и вне включения удобно представить в виде разложений

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^i &= T_{ijkl}^{ii} \varepsilon_{kl}^{i0} + T_{ijkl}^{is} \varepsilon_{kl}^{s0} + T_{ijkl}^{i\sigma} \sigma_{kl}^\infty \\
\sigma_{ij}^e &= \sigma_{kl}^\infty + T_{ijkl}^{ei} \varepsilon_{kl}^{i0} + T_{ijkl}^{es} \varepsilon_{kl}^{s0} + T_{ijkl}^{e\sigma} \sigma_{kl}^\infty
\end{aligned} \tag{6.2.36}$$

Компоненты тензоров T_{ijkl}^{mi} , T_{ijkl}^{ms} , $T_{ijkl}^{m\sigma}$ характеризуют значения ij -ой компоненты тензора напряжений (для $m = i$ внутри включения и для $m = e$ вне его) при единичном значении kl -ой компоненты тензора собственных деформаций включения ε_{kl}^{i0} , тензора собственных поверхностных деформаций ε_{kl}^{s0} и тензора напряжений на бесконечности σ_{kl}^∞ . Тензор $T_{ijkl}^{m\sigma}$

именуется тензором концентрации напряжений [157, 158], тензоры T_{ijkl}^{mi} , T_{ijkl}^{ms} могут быть названы перекрестными тензорами концентрации напряжений-деформаций.

Для компонент T_{ij33}^{in} , T_{ij33}^{en} ($n = i, s, \sigma$) выражения получаются последовательной подстановкой (6.2.34) в (6.2.3), (6.2.5), (6.2.6). Для внутренних компонент тензоров T_{ij33}^{in} ($n = i, s, \sigma$) имеем

$$\begin{aligned}
 T_{1133}^{in} &= -2\mu^i \left[2(1+\nu^i)A_0^n + 3(z^2(7+6\nu^i) - (x^2+5y^2)\nu^i)A_2^n + B_2^n \right] \\
 T_{2233}^{in} &= -2\mu^i \left[2(1+\nu^i)A_0^n + 3(z^2(7+6\nu^i) - (5x^2+y^2)\nu^i)A_2^n + B_2^n \right] \\
 T_{3333}^{in} &= -2\mu^i \left[2(1+\nu^i)A_0^n - 3(2\nu^i z^2 + (x^2+y^2)(7+\nu^i))A_2^n - 2B_2^n \right] \\
 T_{1233}^{in} &= -24\mu^i \nu^i xy A_2^n \\
 T_{1333}^{in} &= 12\mu^i \nu^i xz A_2^n \\
 T_{2333}^{in} &= 12\mu^i \nu^i yz A_2^n
 \end{aligned} \tag{6.2.37}$$

Здесь величины A_0^n , A_2^n , B_2^n , C_2^n , D_0^n , D_2^n с $n = i, s, \sigma$ даются формулами (6.2.26)-(6.2.29), (6.2.35).

Для компонент, содержащих неодинаковые индексы во второй их паре, решение может быть получено суперпозицией решений, соответствующих собственным деформациям растяжения вдоль оси x и собственным деформациям сжатия вдоль оси z с последующим поворотом результата суперпозиции на угол $\pi/4$ относительно оси y . Соответствующие компоненты при этом равны

$$T_{1113}^{in} = -6\mu^i (7 + 5\nu^i) xz A_2^n$$

$$T_{2213}^{in} = -6\mu^i (7 + 11\nu^i) xz A_2^n$$

$$T_{3313}^{in} = -6\mu^i (7 + 5\nu^i) xz A_2^n$$

$$T_{1213}^{in} = 18\mu^i \nu^i yz A_2^n \quad (6.2.38)$$

$$T_{2313}^{in} = 18\mu^i \nu^i xy A_2^n$$

$$T_{1313}^{in} = 3\mu^i \left[\left((7 + 2\nu^i) r^2 - 6\nu^i y^2 \right) A_2^n + B_2^n \right]$$

Остальные компоненты получаются круговой перестановкой индексов.

Выражения для компонент внешних тензоров получаются совершенно аналогично.

$$T_{1133}^{\text{en}} = \frac{1}{r^9 (1 - 2\nu)}$$

$$(\mu (2 r^2 (r^4 (-5 + 4\nu) + r^2 (4 y^2 (4 - 5\nu) \nu + z^2 (9 + 30\nu - 24\nu^2) + x^2 (15 - 26\nu + 4\nu^2))) + 5 z^2 (2 (y^2 + z^2) \nu (-5 + 4\nu) + x^2 (-9 + 8\nu + 8\nu^2))) C_2^n - 2 r^4 (3 x^2 (-1 + \nu) - 3 (y^2 + z^2) \nu + r^2 (1 + \nu)) D_0^n + 3 (r^4 + 7 z^2 (x^2 (5 - 8\nu) + 2 (y^2 + z^2) \nu) + r^2 (-2 y^2 \nu - z^2 (5 + 6\nu) + x^2 (-5 + 8\nu))) D_2^n))$$

$$T_{2233}^{\text{en}} = \frac{1}{r^9 (1 - 2\nu)}$$

$$(\mu (2 r^2 (r^4 (-5 + 4\nu) + r^2 (4 x^2 (4 - 5\nu) \nu + z^2 (9 + 30\nu - 24\nu^2) + y^2 (15 - 26\nu + 4\nu^2))) + 5 z^2 (2 (x^2 + z^2) \nu (-5 + 4\nu) + y^2 (-9 + 8\nu + 8\nu^2))) C_2^n - 2 r^4 (r^2 (1 + \nu) - 3 (-y^2 (-1 + \nu) + (x^2 + z^2) \nu)) D_0^n + 3 (r^4 + 7 z^2 (y^2 (5 - 8\nu) + 2 (x^2 + z^2) \nu) + r^2 (-2 x^2 \nu - z^2 (5 + 6\nu) + y^2 (-5 + 8\nu))) D_2^n))$$

$$T_{3333}^{\text{en}} = -\frac{1}{r^9 (1 - 2\nu)}$$

$$(\mu (-2 r^2 (2 r^4 \nu (-5 + 4\nu) + r^2 (x^2 (1 + 6\nu - 4\nu^2) + y^2 (1 + 6\nu - 4\nu^2) + 6 z^2 (5 - 6\nu + 4\nu^2))) - 5 z^2 (2 z^2 (5 - 9\nu + 4\nu^2) + x^2 (1 + 8\nu^2) + y^2 (1 + 8\nu^2))) C_2^n + 2 r^4 (r^2 (1 + \nu) - 3 (-z^2 (-1 + \nu) + (x^2 + y^2) \nu)) D_0^n - 3 (2 r^4 \nu + 7 z^2 (-2 z^2 (-1 + \nu) + x^2 (-3 + 8\nu) + y^2 (-3 + 8\nu)) - r^2 (2 z^2 (3 + 2\nu) + x^2 (-3 + 8\nu) + y^2 (-3 + 8\nu))) D_2^n))$$

$$T_{1233}^{\text{en}} = -\frac{1}{r^9} (3 x y \mu (2 r^2 (15 z^2 + r^2 (-5 + 4\nu)) C_2^n - 2 r^4 D_0^n + 5 (r^2 - 7 z^2) D_2^n))$$

$$T_{1333}^{\text{en}} = -\frac{1}{2 r^9} (x z \mu (2 r^2 (5 (x^2 (1 - 8\nu) + y^2 (1 - 8\nu) + z^2 (19 - 8\nu)) + 7 r^2 (-5 + 4\nu)) C_2^n + 3 (-4 r^4 D_0^n + (9 r^2 + 7 (3 x^2 + 3 y^2 - 7 z^2)) D_2^n))$$

$$T_{2333}^{\text{en}} = -\frac{1}{2 r^9} (y z \mu (2 r^2 (5 (x^2 (1 - 8\nu) + y^2 (1 - 8\nu) + z^2 (19 - 8\nu)) + 7 r^2 (-5 + 4\nu)) C_2^n + 3 (-4 r^4 D_0^n + (9 r^2 + 7 (3 x^2 + 3 y^2 - 7 z^2)) D_2^n))$$

$$\begin{aligned}
T_{1113}^{en} &= -\frac{1}{r^9 (1-2\nu)} \\
&\quad (3xz\mu (-6r^2(z^2 - 2z^2\nu + 2r^2\nu^2 - 2z^2\nu^2 + y^2(1-2\nu-2\nu^2)) - \\
&\quad\quad 2x^2(2-4\nu+\nu^2)) C_2^n + \\
&\quad\quad 5(4x^2 - 3(y^2+z^2))(-1+2\nu) D_2^n) \\
T_{2213}^{en} &= \frac{1}{r^9 (1-2\nu)} \\
&\quad (3xz\mu (6r^2(z^2 - 4z^2\nu + 2r^2\nu^2 + 2z^2\nu^2 + 2y^2(-2+3\nu+\nu^2)) + \\
&\quad\quad x^2(1-4\nu+2\nu^2)) C_2^n + 5(x^2 - 6y^2 + z^2)(-1+2\nu) D_2^n) \\
T_{3313}^{en} &= \frac{1}{r^9 (1-2\nu)} \\
&\quad (3xz\mu (-6r^2(x^2(-1+4\nu-2\nu^2) - y^2(1-4\nu+2\nu^2)) - \\
&\quad\quad 2(-r^2(-1+\nu)\nu + z^2(-2+3\nu+\nu^2))) C_2^n + \\
&\quad\quad 5(3x^2 + 3y^2 - 4z^2)(-1+2\nu) D_2^n) \\
T_{1213}^{en} &= \\
&\quad \frac{3yz\mu (6r^2(x^2(-5+\nu) + (y^2+z^2)\nu) C_2^n + 5(6x^2 - y^2 - z^2) D_2^n)}{r^9} \\
T_{1313}^{en} &= \frac{1}{r^9} (3\mu (2r^2(x^4+y^4+z^4+r^2z^2\nu + \\
&\quad\quad 2y^2(z^2-r^2\nu) + x^2(2y^2-13z^2+r^2\nu)) C_2^n + \\
&\quad\quad (-4x^4+y^4-3y^2z^2-4z^4-3x^2(y^2-9z^2)) D_2^n) \\
T_{2313}^{en} &= \\
&\quad \frac{3xy\mu (6r^2(z^2(-5+\nu) + (x^2+y^2)\nu) C_2^n - 5(x^2+y^2-6z^2) D_2^n)}{r^9}
\end{aligned}
\tag{6.2.39}$$

Здесь для краткости опущены верхние индексы e у модуля сдвига μ^e и коэффициента Пуассона ν^e матрицы.

Удобно выписать решение для деформаций в виде аналогичных разложений

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{ij}^i &= S_{ijkl}^{ii} \mathcal{E}_{kl}^{i0} + S_{ijkl}^{is} \mathcal{E}_{kl}^{s0} + S_{ijkl}^{i\sigma} \mathcal{E}_{kl}^{\sigma\infty} \\
\mathcal{E}_{ij}^e &= S_{ijkl}^{ei} \mathcal{E}_{kl}^{i0} + S_{ijkl}^{es} \mathcal{E}_{kl}^{s0} + S_{ijkl}^{e\sigma} \mathcal{E}_{kl}^{\sigma\infty}
\end{aligned}
\tag{6.2.40}$$

Компоненты тензоров S_{ijkl}^{mi} , S_{ijkl}^{ms} , $S_{ijkl}^{m\sigma}$ дают значения ij -ой компоненты тензора деформации (для $m = i$ внутри включения и для $m = e$ вне его) при единичном значении kl -ой компоненты тензора собственных деформаций включения ε_{kl}^{i0} , тензора собственных поверхностных деформаций ε_{kl}^{s0} и тензора напряжений на бесконечности σ_{kl}^{∞} , соответственно. Тензоры S_{ijkl}^{mi} могут рассматриваться в качестве варианта обобщения внутреннего и внешнего тензоров Эшелби для случая наличия поверхностных напряжений. Заметим что в работах [157, 158] под обобщением тензора Эшелби при наличии поверхностных напряжений понималась величина, которая в наших обозначениях записывается как $S_{ijkl}^{mi} + S_{ijkl}^{ms}$. Причина различия, как указывалось выше, лежит в различии отсчета деформаций поверхности от недеформированной матрицы, как в нашем случае, или от недеформированного включения, как это делалось в работах [157, 158]. Тензоры S_{ijkl}^{mi} , S_{ijkl}^{ms} могут быть названы тензорами концентрации деформаций, а тензоры $S_{ijkl}^{m\sigma}$ перекрестными тензорами концентрации деформаций-напряжений.

Компоненты внутренних тензоров на основе (6.2.31)-(6.2.32), можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
S_{3333}^{in} &= \delta^{in} - 2(1 - 2\nu^i)A_0^n + 2B_2^n + 3A_2^n \left[7(x^2 + y^2) - 6\nu^i(x^2 + y^2 - 2z^2) \right] \\
S_{1133}^{in} &= -2(1 - 2\nu^i)A_0^n - B_2^n - 3A_2^n \left[(7 - 8\nu^i)z^2 + 2\nu^i(3x^2 + y^2) \right] \\
S_{2233}^{in} &= -2(1 - 2\nu^i)A_0^n - B_2^n - 3A_2^n \left[(7 - 8\nu^i)z^2 + 2\nu^i(x^2 + 3y^2) \right] \\
S_{1233}^{in} &= -12\nu^i A_2^n xy \\
S_{1333}^{in} &= 6\nu^i A_2^n xz \\
S_{2333}^{in} &= 6\nu^i A_2^n yz
\end{aligned} \tag{6.2.41}$$

$$S_{1112}^{in} = S_{2212}^{in} = -3(7 - 16\nu^i)A_2^n xy$$

$$S_{1212}^{in} = \frac{1}{2}\delta^{in} + \frac{B_2^n}{2} + \frac{3A_2^n}{2} \left[(7 + 2\nu^i)r^2 - 6\nu^i z^2 \right]$$

$$S_{1312}^{in} = 9\nu^i A_2^n yz$$

(6.2.42)

$$S_{2312}^{in} = 9\nu^i A_2^n xz$$

$$S_{3312}^{in} = -3(7 - 10\nu^i)A_2^n xy$$

Здесь $\delta^{in} = 1$ при $n = i$ и нулю для других $n = s, \sigma$. Величины $A_0^n, A_2^n, B_2^n, C_2^n, D_0^n, D_2^n$ для $n = i, s, \sigma$ даются формулами (6.2.26)-(6.2.29), (6.2.35). Остальные компоненты получаются круговой перестановкой индексов.

Выражения для компонент внешних тензоров концентрации получаются аналогично.

$$\begin{aligned}
S_{1133}^{\text{en}} &= \frac{1}{2 r^9} \\
&\quad (2 r^2 (-45 x^2 z^2 + r^4 (-5 + 4 v^e) + r^2 (9 z^2 - 3 x^2 (-5 + 4 v^e))) C_2^n - \\
&\quad 2 r^4 (r^2 - 3 x^2) D_0^n + 3 (r^4 + 35 x^2 z^2 - 5 r^2 (x^2 + z^2)) D_2^n) \\
S_{2233}^{\text{en}} &= \frac{1}{2 r^9} \\
&\quad (2 r^2 (-45 y^2 z^2 + r^4 (-5 + 4 v^e) + r^2 (9 z^2 - 3 y^2 (-5 + 4 v^e))) C_2^n - \\
&\quad 2 r^4 (r^2 - 3 y^2) D_0^n + 3 (r^4 + 35 y^2 z^2 - 5 r^2 (y^2 + z^2)) D_2^n) \\
S_{3333}^{\text{en}} &= \frac{1}{2 r^9} \\
&\quad (-2 r^2 (-5 z^2 (2 z^2 (-5 + 4 v^e) + x^2 (-1 + 8 v^e) + y^2 (-1 + 8 v^e)) + \\
&\quad r^2 (6 z^2 (-5 + 4 v^e) + x^2 (-1 + 8 v^e) + y^2 (-1 + 8 v^e))) \\
&\quad C_2^n - 2 r^4 (r^2 - 3 z^2) D_0^n + \\
&\quad 3 (3 r^2 (x^2 + y^2 - 2 z^2) + 7 z^2 (-3 x^2 - 3 y^2 + 2 z^2)) D_2^n) \\
S_{1233}^{\text{en}} &= \\
&\quad \frac{3 x y (2 r^2 (15 z^2 + r^2 (-5 + 4 v^e)) C_2^n - 2 r^4 D_0^n + 5 (r^2 - 7 z^2) D_2^n)}{2 r^9} \\
S_{1333}^{\text{en}} &= -\frac{1}{4 r^9} (x z (2 r^2 (7 r^2 (-5 + 4 v^e) + \\
&\quad 5 (x^2 + y^2 + 19 z^2 - 8 x^2 v^e - 8 y^2 v^e - 8 z^2 v^e)) C_2^n + \\
&\quad 3 (-4 r^4 D_0^n + (9 r^2 + 21 x^2 + 21 y^2 - 49 z^2) D_2^n)) \\
S_{1113}^{\text{en}} &= \\
&\quad \frac{3 x z (6 r^2 (2 x^2 (-2 + v^e) + (y^2 + z^2) (1 + 2 v^e)) C_2^n + 5 (4 x^2 - 3 (y^2 + z^2)) D_2^n)}{2 r^9} \\
S_{2213}^{\text{en}} &= \frac{3 x z (6 r^2 (x^2 - 4 y^2 + z^2) C_2^n - 5 (x^2 - 6 y^2 + z^2) D_2^n)}{2 r^9}
\end{aligned} \tag{6.2.43}$$

$$S_{3313}^{en} = \frac{3 x z (6 r^2 (x^2 + y^2 - 4 z^2 + 2 r^2 \nu^e) C_2^n - 5 (3 x^2 + 3 y^2 - 4 z^2) D_2^n)}{2 r^9}$$

$$S_{1213}^{en} = \frac{3 y z (6 r^2 ((y^2 + z^2) \nu^e + x^2 (-5 + \nu^e)) C_2^n + 5 (6 x^2 - y^2 - z^2) D_2^n)}{2 r^9}$$

$$S_{1313}^{en} = \frac{1}{2 r^9} (3 (2 r^2 (x^4 + y^4 + z^4 + r^2 z^2 \nu^e + 2 y^2 (z^2 - r^2 \nu^e) + x^2 (2 y^2 - 13 z^2 + r^2 \nu^e)) C_2^n + (-4 x^4 + y^4 - 3 y^2 z^2 - 4 z^4 - 3 x^2 (y^2 - 9 z^2)) D_2^n)$$

$$S_{2313}^{en} = \frac{3 x y (6 r^2 ((x^2 + y^2) \nu^e + z^2 (-5 + \nu^e)) C_2^n - 5 (x^2 + y^2 - 6 z^2) D_2^n)}{2 r^9}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (6.2.44)$$

6.2.6. Оценка роли поверхностных эффектов

В этом пункте при оценке роли эффектов, связанных с упругими аномалиями границы раздела, используем найденные решения в простой ситуации шарового включения с собственными деформациями всестороннего растяжения ε^0 и поверхностными собственными деформациями ε^{s0} . Частный случай $\varepsilon^{s0} = \varepsilon^0$ был рассмотрен в [157, 158, 234]. Для него ненапряженное состояние поверхности соответствует продеформированному включению (поверхность включения не напряжена после собственных деформаций), а $\varepsilon^{s0} = 0$ дает случай, когда ненапряженное состояние поверхности соответствует недеформированному включению (поверхность матрицы не напряжена после собственных деформаций). Выражение для полных деформаций во включении может быть получено как суперпозиция решений, соответствующих трем ортогональным собственным деформациям. Подстановка (6.2.26)-(6.2.29) в (6.2.31), а затем в (6.2.30) дает

$$\varepsilon^{iT} = \frac{3K^i + 2K^s / R}{3K^i + 4\mu^e + 2K^s / R} \varepsilon^0 - \frac{2K^s / R}{3K^i + 4\mu^e + 2K^s / R} \varepsilon^{s0} \quad (6.2.45)$$

Здесь K^i - модуль всестороннего сжатия включения, $K^s = 2(\lambda^s + \mu^s)$ - модуль упругости поверхности (аналог модуля всестороннего сжатия), который может быть и отрицательным, R - радиус включения. Раскладывая выражение (6.2.45) по степеням безразмерного параметра

$$\delta_k = \frac{2K^s}{R\mu^e} \quad (6.2.46)$$

являющегося малым для включений достаточно большого радиуса, оставляя только члены нулевого и первого порядка по указанному малому параметру, получим

$$\varepsilon^{iT} = \varepsilon^0 \frac{3K^i}{3K^i + 4\mu^e} \left(1 + \frac{4\mu^e}{3K^i(3K^i + 4\mu^e)} \delta_k - \frac{\mu^e}{3K^i} \eta_s \delta_k \right) \quad (6.2.47)$$

В этой записи используется также безразмерное отношение поверхностной собственной деформации к собственной деформации во включении $\eta_s \equiv \varepsilon^{s0} / \varepsilon^0$.

В частном случае $\varepsilon^{s0} = \varepsilon^0$ формула для деформации упрощается следующим образом

$$\varepsilon^{iT} = \varepsilon^0 \frac{3K^i}{3K^i + 4\mu^e} \left(1 - \frac{\mu^e}{3K^i + 4\mu^e} \delta \right) \quad (6.2.48)$$

а в другом частном случае $\varepsilon^{s0} = 0$ преобразуется к виду

$$\varepsilon^{iT} = \varepsilon^0 \frac{3K^i}{3K^i + 4\mu^e} \left[1 + \frac{4\mu^e}{3K^i(3K^i + 4\mu^e)} \delta_k \right] \quad (6.2.49)$$

Отметим, что поправки, обязанные поверхностному эффекту, в этих частных случаях имеют противоположный знак.

Выписанные формулы (6.2.47)-(6.2.49) для простого примера сферически симметричного деформирования (расширения) шарообразного включения позволяют достаточно просто оценить относительное влияние поверхностной упругости и собственной поверхностной деформации ε^{s0} (остаточного поверхностного напряжения σ^{s0}) на процесс деформирования. Для многих твердых материалов, например, металлов, типичными значениями упругих коэффициентов объемного расширения и сдвига являются $K \approx 2.5 \mu \approx 10^{11} \text{ Н / м}^2$. Оценку нужных поверхностных характеристик K^s и σ^{s0} можно получить из результатов теоретических расчетов для кристаллов металлов, решетки которых обладают кубической симметрией, выполненных в работе [233]. По порядку величины имеем $K^s \sim \lambda^s \sim \mu^s \sim 10 \text{ Н / м}$ и $\sigma^{s0} \sim 1 \text{ Н / м}$, $\varepsilon^{s0} \sim 0.1$. Последняя оценка поверхностной собственной деформации существенно выше типичных собственных деформаций материала в объеме включения. Не совпадать они могут и по знаку.

Приведенные оценки дают для безразмерного параметра (6.2.46) оценку

$$\delta_k \approx \frac{10^{-9} \text{ м}}{R} \quad (6.2.50)$$

Согласно этой оценке определяющий параметр рассмотренной задачи становится малым при диаметрах включений, превышающих десятков нанометров. Следует далее уточнить, что согласно (6.2.47) влияние на поля деформаций собственных поверхностных деформаций (остаточных поверхностных напряжений) зависит от произведения «малого»

безразмерного комплекса δ_k и безразмерного отношения $\eta_s \equiv \varepsilon^{s0} / \varepsilon^0$, величина которого согласно предыдущим оценкам не мала. Так что при наличии остаточных поверхностных напряжений изменение поля деформаций в объеме в основном и будет определяться этим несколько большим произведением безразмерных параметров

$$\eta_s \delta_k \approx \frac{\varepsilon^{s0}}{\varepsilon^0 R} 10^{-9} m \quad (6.2.51)$$

В то же время при отсутствии остаточных напряжений согласно (6.2.49) влияние одной поверхностной упругости определяется только несколько меньшим параметром δ_k . Как ясно из выражения (6.2.52), последним параметром характеризуется и случай $\varepsilon^{s0} = \varepsilon^0$.

Из приведенного анализа оценок достаточно ясно, что при рассмотрении влияния поверхностных эффектов на напряженно-деформированное состояние включения в определяющих уравнениях для поверхности необходимо учитывать остаточные поверхностные напряжения наряду с поверхностной упругостью. Более того, их роль может оказаться определяющей.

6.2.7. Замечания о связи использованных определяющих соотношений для поверхности с определяющими соотношениями Гертца-Мердока

Линеаризованные определяющие соотношения для поверхностной упругости из [174, 175], вообще говоря, существенно отличаются от (6.2.13).

В покомпонентном виде для случая независящего от направления остаточного напряжения σ^{s0} они записываются в виде

$$\begin{aligned}
 S_{11}^s &= \sigma^{s0} (1 + \varepsilon_{22}) + (\lambda^0 + 2\mu^0) \varepsilon_{11} + \lambda^0 \varepsilon_{22} \\
 S_{22}^s &= \sigma^{s0} (1 + \varepsilon_{11}) + \lambda^0 \varepsilon_{11} + (\lambda^0 + 2\mu^0) \varepsilon_{22} \\
 S_{12}^s &= 2\mu^0 \varepsilon_{12} + \sigma^{s0} (u_{1,2} - \varepsilon_{12}) \\
 S_{21}^s &= 2\mu^0 \varepsilon_{12} + \sigma^{s0} (u_{2,1} - \varepsilon_{12})
 \end{aligned}
 \tag{6.2.53}$$

Здесь S_{ij}^s - компоненты тензора поверхностных напряжений Пиолы-Кирхгоффа, определяемые как отношение силы к площади, соответствующей отсчетной конфигурации. ε_{ij} - компоненты тензора деформации для поверхности; λ^0, μ^0 - поверхностные константы Ламе, которые, вообще говоря, отличны от введенных нами λ^s, μ^s ; u_i - компоненты вектора смещения поверхности. При выводе авторами [174, 175] определяющих соотношений для поверхностных напряжений и деформаций подчеркивалось, что форма (6.2.53) продиктована желанием того, чтобы при равенстве нулю поверхностных модулей упругости λ^0, μ^0 напряжения Коши, т.е. напряжения в актуальном состоянии, оставались бы постоянными. Для частного случая жидких сред естественно полагать $\lambda^0 = \mu^0 = 0$, и напряжения Коши (отношение силы к площади, соответствующей текущей конфигурации) будут $\sigma_{11}^s = S_{11}^s / (1 + \varepsilon_{22}) = \sigma^{s0}$, $\sigma_{22}^s = S_{22}^s / (1 + \varepsilon_{11}) = \sigma^{s0}$. При выполнении равенств $\lambda^0 = \mu^0 = 0$, как видно из (6.2.53), компоненты напряжения Пиолы-Кирхгоффа S_{ij}^s растут с увеличением площади поверхности. Однако при рассмотрении твердых тел, когда новая поверхность не образуется, а все деформации (и, следовательно, увеличение площади) происходят за счет

растяжения уже существующей поверхности, отсутствие упругости (равенство нулю поверхностных упругих модулей) представляется более естественным связывать с ситуацией, когда напряжения Пиолы-Кирхгоффа не зависят от деформации. Именно эти модули, т.е. модули, исчезновение которых приводит к постоянству тензора напряжений Пиолы-Кирхгоффа, мы будем именовать, как λ^s, μ^s . Принятое условие запишется следующим образом

$$S_{11}^s = S_{22}^s = \sigma^{s0} \text{ для } \lambda^s = \mu^s = 0 \quad (6.2.54)$$

Найдем связь модулей λ^s, μ^s с модулями λ^0, μ^0 . Для этого введем постоянные коэффициенты A, B согласно

$$\lambda^0 = \lambda^s + A\sigma^{s0} \quad (6.2.55)$$

$$\mu^0 = \mu^s + B\sigma^{s0}$$

Эти коэффициенты подлежат определению из условия (6.2.54). Подстановка выражений (6.2.55) в определяющие соотношения (6.2.53), а затем в условие постоянства напряжений Пиолы-Кирхгоффа (6.2.54) дает значения констант $A = -1, B = 1/2$. После подстановки полученных значений в выражения (6.2.55) и в определяющие соотношения (6.2.53), последние преобразуются к виду

$$\begin{aligned} S_{11}^s &= \sigma^{s0} + (\lambda^s + 2\mu^s)\varepsilon_{11} + \lambda^s\varepsilon_{22} \\ S_{22}^s &= \sigma^{s0} + \lambda^s\varepsilon_{11} + (\lambda^s + 2\mu^s)\varepsilon_{22} \\ S_{12}^s &= 2\mu^s\varepsilon_{12} - \sigma^{s0}(u_{1,2} - u_{2,1})/2 \\ S_{21}^s &= 2\mu^s\varepsilon_{12} + \sigma^{s0}(u_{1,2} - u_{2,1})/2 \end{aligned} \quad (6.2.56)$$

Полученные соотношения для нормальных напряжений совпадают с введенными определяющими соотношениями (6.2.13) при постоянных остаточных поверхностных напряжениях.

Для непостоянных (по координатам) остаточных напряжений ситуация усложняется: из (6.2.55) следует, что либо λ^s, μ^s , либо λ^0, μ^0 (либо и те, и другие) становятся функциями координат или деформаций. Данная зависимость, однако, имеет порядок $1 + \sigma^{s0} / \lambda^0 \approx 1 + \varepsilon^{s0}$ и будет пренебрежимо малой, если только собственные деформации (деформации, соответствующие остаточным напряжениям) малы (что видно уже из формул (6.2.53)).

6.3. Краткие выводы по главе

На основе модели поверхностной упругости, предложенной в предыдущей главе, рассмотрены задачи о сферически симметричном деформировании бесконечного тела с шарообразным включением при наличии внешнего поля и собственных деформаций во включении и промежуточном слое. Сравнение полученных решений с решениями для поверхностного слоя малой, но конечной толщины дает совпадения главных членов разложения по отношению толщины поверхностного слоя к радиусу включения, в то время как для решений, полученных в приближении традиционной теории поверхностной упругости, подобного совпадения не наблюдается.

Дано обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной однородными собственными деформациями внутри включения и заданными напряжениями вдали от него, при учете наряду с поверхностной

упругостью поверхностных остаточных напряжений. Найдены выражения внутреннего и внешнего тензоров Эшелби и тензоров концентрации напряжений при учете указанных двух типов поверхностных эффектов. Выявлен характер неоднородности полей деформаций и зависимости от диаметра включения (масштабный эффект), проявляющихся на нанометровых масштабах. Показано, что при определенных условиях (для параметров, соответствующих ряду кубических кристаллов) влияние остаточных напряжений превосходит эффект поверхностной упругости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен комплекс исследований по упругому деформированию систем с покрытиями и промежуточными слоями, цель которого заключалась в разработке подхода к исследованию механического поведения тонких покрытий, и промежуточных слоев; выявление на основе этого подхода основных закономерностей их деформирования и разрушения посредством образования отслоений.

Основные результаты состоят в следующем:

1. Представлен подход к решению задач об отслоении покрытий, заключающийся в рассмотрении отслоившегося участка покрытия с помощью теории пластин, граничные условия для которых ставятся исходя из решений задач о контакте полубесконечных отслоений с основанием.
2. Для получения граничных условий сформулирован и решен ряд задач о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы. Путем нахождения асимптотик смещения вдали от вершины интерфейсной трещины, а также путем сравнения скорости высвобождения энергии, посчитанной в рамках задачи о полосе и эквивалентной балочной модели, получены значения ряда констант, необходимых для записи эффективных граничных условий для решения задач о пластинах, моделирующих отслоившиеся участки покрытий.
3. Получено обобщение решения задачи об отслоении полосы от полуплоскости на случай различных упругих постоянных материалов (хотя и подчиняющихся дополнительному соотношению), путем факторизации матрицы-функции с ненулевым индексом. Получены

- аналитические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и скорости высвобождения энергии.
4. Дано описание свойств эффективной упругой заделки для пластины, моделирующей отслоение, с помощью матрицы (3×3) упругих коэффициентов.
 5. На основе сформулированного подхода рассмотрена задача о потере устойчивости отслоившегося от подложки покрытия вследствие наличия в нем собственных деформаций сжатия, вызванных, например, нагревом. Получено выражение для критического сжимающего напряжения. Показано, что отношение величины критического напряжения к соответствующей величине для жестко заземленной пластины определяется единым безразмерным параметром, представляющим собой комбинацию упругих констант покрытия и подложки и отношения длины отслоения к толщине покрытия.
 6. На базе сформулированного подхода в приближении теории пластин, имеющих малую начальную кривизну, исследовано совместное влияние кривизны и податливости подложки на параметры отслоения покрытий. Для покрытия, отслаивающегося от цилиндрической поверхности, посчитаны скорости высвобождения энергии при развитии вытянутого вдоль образующей отслоения как вдоль, так и по нормали к образующей. Показано, что для достаточно мягких подложек существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться вдоль криволинейной границы, чем вдоль прямолинейной. Этим объясняется явление «туннелирования», заключающееся в образовании узких продольных отслоений.
 7. Модель балки с нежесткой заделкой применена для описания работы кантилеверов АСМ. Показано, что влияние упругости контакта кантилевера с массивной частью может быть существенно при интерпретации результатов измерений.

8. Представлен новый подход к рассмотрению поверхностных явлений, заключающийся в анализе влияния всех компонент напряжений на процесс деформирования внутренней либо внешней поверхности. В рамках подхода представлена новая, более общая, чем ранее, замкнутая система уравнений поверхностной (интерфейсной) теории упругости, в том числе при наличии собственных деформаций. Основное отличие используемых определяющих соотношений от традиционных соотношений Шаттлворса состоит в том, что в них помимо напряжений и деформаций, действующих в плоскости поверхности раздела, входят напряжения и деформации, нормальные к этой плоскости.
9. На основе предложенной модели поверхностной упругости рассмотрены задачи о сферически симметричном деформировании бесконечного тела с шарообразным включением при наличии внешнего поля и собственных деформаций во включении и промежуточном слое. Дано обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной произвольными однородными собственными деформациями внутри включения и заданными напряжениями вдали от него, при учете наряду с поверхностной упругостью поверхностных остаточных напряжений.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Вывод связи между производной от скачка смещения и напряжениями на границе слоя и полуплоскости

Рассмотрим плоско-деформированное состояние полосы $y \in [0,1]$ в декартовой системе координат, верхняя граница $y = 1$ которой свободна от напряжений

$$\sigma_{yy}(x,1) = \sigma_{xy}(x,1) = 0 \quad (7.1.1)$$

а к нижней границе $y = 0$ приложена некоторая система нагрузок.

$$\sigma_{xy}(x,0) = q_x(x) \quad (7.1.2)$$

$$\sigma_{yy}(x,0) = q_y(x) \quad (7.1.3)$$

Здесь $q_x(x)$, $q_y(x)$ - заданные функции. Изложение следует в основном работам [106-109].

Найдем связь между действующей на нижней границе полосы системой нагрузок и производными от компонент смещений $\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x,0)$.

Полную систему уравнений теории упругости можно записать следующим образом. Она включает:

1. уравнения равновесия в отсутствие объемных сил

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (7.1.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (7.1.5)$$

Здесь σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} - компоненты тензора напряжений.

2. Уравнения Закона Гука, выраженные через компоненты смещений u, v

$$E^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - (1 + \nu^{(2)}) \sigma_{yy} \quad (7.1.6)$$

$$E^{(2)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2(1 + \nu^{(2)}) \sigma_{xy} \quad (7.1.7)$$

Здесь $E^{(2)}, \nu^{(2)}$ - модуль Юнга и коэффициент Пуассона полосы.

3. Уравнение совместности, выраженное через компоненты тензора напряжений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (7.1.8)$$

Для решения поставленной задачи подвергнем уравнение (7.1.7) следующим преобразованиям. Подставим значение $\frac{\partial u}{\partial x}$ из уравнения (7.1.6) в продифференцированное по x уравнение (7.1.7)

$$E^{(2)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (1 + \nu^{(2)}) \left(2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial y} \quad (7.1.9)$$

Подстановка сюда уравнений равновесия (7.1.5) дает

$$E^{(2)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (1 + \nu^{(2)}) \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial y} \quad (7.1.10)$$

Для решения системы уравнений (7.1.4), (7.1.5), (7.1.6), (7.1.10), (7.1.8) используем двустороннее преобразование Лапласа, определяющего образ $\hat{f}(p)$ функции $f(x, y)$

$$\hat{f}(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-px} dx \quad (7.1.11)$$

Обратное преобразование при этом определяется как

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(p, y) e^{px} dp \quad (7.1.12)$$

где направление обхода по контуру L , соответствующему мнимой оси, осуществляется сверху вниз.

Трансформанты от уравнений (7.1.4), (7.1.5), (7.1.6), (7.1.10), (7.1.8) и граничных условий (7.1.1), (7.1.2), (7.1.3) примут вид

$$p\hat{\sigma}_{xx}(p, y) + \frac{d\hat{\sigma}_{xy}(p, y)}{dy} = 0 \quad (7.1.13)$$

$$p\hat{\sigma}_{xy}(p, y) + \frac{d\hat{\sigma}_{yy}(p, y)}{dy} = 0 \quad (7.1.14)$$

$$\left(p^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) [\hat{\sigma}_{xx}(p, y) + \hat{\sigma}_{yy}(p, y)] = 0 \quad (7.1.15)$$

$$E^{(2)} \hat{u}'(p, y) = \hat{\sigma}_{xx}(p, y) + \hat{\sigma}_{yy}(p, y) - (1 + \nu^{(2)}) \hat{\sigma}_{yy}(p, y) \quad (7.1.16)$$

$$pE^{(2)} \hat{v}'(p, y) = p(1 + \nu^{(2)}) \hat{\sigma}_{xx}(p, y) - \frac{d}{dy} [\hat{\sigma}_{xx}(p, y) + \hat{\sigma}_{yy}(p, y)] \quad (7.1.17)$$

$$\hat{\sigma}_{xy}(p,1) = \hat{\sigma}_{yy}(p,1) = 0 \quad (7.1.18)$$

$$\hat{\sigma}_{xy}(p,0) = q_x(p) \quad (7.1.19)$$

$$\hat{\sigma}_{yy}(p,0) = q_y(p) \quad (7.1.20)$$

Здесь

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.1.21)$$

а

$$q_x(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(x,0) e^{-px} dx \quad (7.1.22)$$

$$q_y(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(x,0) e^{-px} dx$$

есть трансформанты от напряжений на нижней границе.

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7.1.13)-(7.1.17) с граничными условиями (7.1.18)-(7.1.20) дает выражения для трансформант производных смещения через действующие на нижнем крае полосы ($y=0$) напряжения. Для поставленной задачи интерес представляют значения трансформант производных смещения на этой же линии ($y=0$)

$$\frac{E^{(2)}}{2} g_x^{(2)}(p) = \frac{\sin p \cos p - p}{d} q_x(p) + \frac{p^2}{d} q_y(p) + \frac{1 - \nu^{(2)}}{2} q_y(p) \quad (7.1.23)$$

$$\frac{E^{(2)}}{2} g_y^{(2)}(p) = -\frac{1 - \nu^{(2)}}{2} q_x(p) - \frac{p^2}{d} q_x(p) + \frac{\sin p \cos p + p}{d} q_y(p)$$

$$d = \sin^2 p - p^2 \quad (7.1.24)$$

Здесь

$$g_x^{(2)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u(x,0) e^{-px} dx \quad (7.1.25)$$

$$g_y^{(2)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} v(x,0) e^{-px} dx$$

Коэффициенты в полученных выражениях аналитичны на всей мнимой оси за исключением нуля, где они имеют полюса до третьего порядка включительно. Полюс третьего порядка в нуле трансформанты соответствует квадратичному росту оригинала на бесконечности. Следовательно из полученных выражений в частности следует, что при отсутствии особенностей для напряжений, производные от смещения могут расти как квадрат расстояния, а сами смещения как куб расстояния. Для полосы такое поведение является общеизвестным фактом, в частности в рамках элементарной балочной теории, являющейся при определенных условиях строгой асимптотикой точной теории, смещения вдали от приложенной системы сил с ненулевым главным вектором растут как третья степень расстояния.

Рассмотрим аналогичную задачу для полуплоскости $y \in]-\infty, 0]$ в декартовой системе координат, к границе $y=0$ которой приложена некоторая система нагрузок $q_x(x)$, $q_y(x)$.

$$\sigma_{xy}(x,0) = q_x(x) \quad (7.1.26)$$

$$\sigma_{yy}(x,0) = q_y(x) \quad (7.1.27)$$

Найдем связь между действующей на границе системой нагрузок и производными от компонент смещений $\frac{\partial u}{\partial x}(x,0), \frac{\partial v}{\partial x}(x,0)$.

Полная система уравнений теории упругости включает уравнения (7.1.4)-(7.1.8) в которых упругие постоянные $E^{(2)}, \nu^{(2)}$ следует заменить на упругие постоянные полуплоскости $E^{(1)}, \nu^{(1)}$. Вместо граничных условий (7.1.18) теперь потребуем убывания напряжений на бесконечности

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \sigma_{xy}(x, y) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \sigma_{yy}(x, y) = 0$$

Граничные условия для $y = 0$ по-прежнему сохраняют вид (7.1.2), (7.1.3).

После применения преобразования Лапласа и повторения преобразований система уравнений приобретает вид (7.1.13)-(7.1.17), а граничные условия - (7.1.19), (7.1.20), (7.1.28).

Общий интеграл системы (7.1.13)-(7.1.17) для интересующих величин есть

$$\hat{\sigma}_{yy}(p, y) = [a_h(p) + c_h(p)py] \exp(ipu) + [b_h(p) + d_h(p)py] \exp(-ipu)$$

$$\hat{\sigma}_{xy}(p, y) = -[ia_h(p) + (1 + ipu)c_h(p)] \exp(ipu) + [ib_h(p) - (1 - ipu)d_h(p)] \exp(-ipu)$$

Здесь $a_h(p), c_h(p), b_h(p), d_h(p)$ - коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Для положения p возможны два варианта

$$(1) \operatorname{Im} p < 0$$

$$(2) \operatorname{Im} p > 0$$
(7.1.31)

Для первого варианта условие (7.1.28) дает

$$b_h(p) = d_h(p) = 0$$
(7.1.32)

А из (7.1.19), (7.1.20) получаем

$$a_h(p) = \hat{q}_y(p), \quad c_h(p) = -\hat{q}_x(p) - i\hat{q}_y(p)$$
(7.1.33)

Подставляя данные выражения в общее решение, получаем

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_x^{(1)}(p) = -i \hat{q}_x(p) + \frac{1 - \nu^{(1)}}{2} \hat{q}_y(p)$$
(7.1.34)

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_y^{(1)}(p) = -\frac{1 - \nu^{(1)}}{2} \hat{q}_x(p) - i \hat{q}_y(p)$$

Для второго варианта условие (7.1.28) дает

$$a_h(p) = c_h(p) = 0$$
(7.1.35)

А общее решение для интересующих величин приобретает вид

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_x^{(1)}(p) = -i \hat{q}_x(p) + \frac{1 - \nu^{(1)}}{2} \hat{q}_y(p)$$
(7.1.36)

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_y^{(1)}(p) = -\frac{1 - \nu^{(1)}}{2} \hat{q}_x(p) - i \hat{q}_y(p)$$

Для точек, лежащих на мнимой оси, выражения (7.1.34) и (7.1.36) можно записать следующим образом

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_x^{(1)}(p) = i \operatorname{sgn}\left(\frac{p}{i}\right) q_x(p) + \frac{1-\nu^{(1)}}{2} q_y(p)$$

$$\frac{E^{(1)}}{2} g_y^{(1)}(p) = -\frac{1-\nu^{(1)}}{2} q_x(p) + i \operatorname{sgn}\left(\frac{p}{i}\right) q_y(p) \quad p \in L \quad (7.1.37)$$

Коэффициенты в полученных выражениях аналитичны на всей мнимой оси за исключением нуля, где они имеют разрывы. Разрыв в нуле трансформанты соответствует логарифмической особенности оригинала на бесконечности. Для полуплоскости такое поведение является общеизвестным фактом: поле смещений вдали от места приложения нагрузки с ненулевым главным вектором растет логарифмически.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Решение матричной задачи Римана для рассматриваемого частного случая.

Изложение следует работам [106-109]. Пусть a_{ij} ($i, j = 1, 2$) являются компонентами невырожденной матрицы $\mathbf{A}(t)$,

$$\mathbf{A}(z) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (8.1.1)$$

определенной на мнимой оси L комплексной плоскости z . Задача состоит в нахождении такой кусочно-голоморфной матрицы-функции (2×2) $\mathbf{X}(z)$ в форме

$$\mathbf{X}(z) = \begin{cases} \mathbf{X}_+(z), & z \in S^+ \\ \mathbf{X}_-(z), & z \in S^- \end{cases} \quad (8.1.2)$$

такой, что $\mathbf{X}_+(z)$ и $\mathbf{X}_-(z)$, а также их обратные матрицы $\mathbf{X}_+^{-1}(z)$ и $\mathbf{X}_-^{-1}(z)$, были бы голоморфными в S^+ и S^- , и на контуре L выполнялось бы условие

$$\mathbf{X}_+(t)\mathbf{X}_-(t) = \mathbf{A}(t), \quad t \in L \quad (8.1.3)$$

В общем случае решение в замкнутой форме поставленной задачи неизвестно. Однако для рассматриваемого далее частного случая эффективное решение было получено [106-109].

Под девиатором матрицы $\text{dev } \mathbf{A}$ будем понимать матрицу, получаемую из исходной матрицы \mathbf{A} вычитанием единичной матрицы \mathbf{I} , умноженной на половину ее следа s

$$\text{dev } \mathbf{A} = \mathbf{A} - s \mathbf{I} = \begin{vmatrix} \frac{a_{11} - a_{22}}{2} & a_{12} \\ a_{21} & \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \end{vmatrix} \quad (8.1.4)$$

$$s = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$$

При этом, поскольку определитель девиатора равен

$$\det \text{dev } \mathbf{A} = -\frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 - a_{12}a_{21} \quad (8.1.5)$$

выполняется следующее тождество

$$\det \mathbf{A} = s^2 + \det \text{dev } \mathbf{A} \quad (8.1.6)$$

Данное тождество может быть переписано в виде

$$\left[\frac{s}{(\det \mathbf{A})^{1/2}} \right]^2 - \left[\frac{(-\det \text{dev } \mathbf{A})^{1/2}}{(\det \mathbf{A})^{1/2}} \right]^2 = 1 \quad (8.1.7)$$

Определитель и показатель матрицы определяются следующим образом

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \quad (8.1.8)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \ln(\lambda_1 / \lambda_2) \quad (8.1.9)$$

где λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы \mathbf{A}

$$\lambda_1 = s + (-\det \text{dev } \mathbf{A})^{1/2} \quad (8.1.10)$$

$$\lambda_2 = s - (-\det \operatorname{dev} \mathbf{A})^{1/2} \quad (8.1.11)$$

Отсюда получаются следующие соотношения

$$\Delta^{-1/2} s = \operatorname{ch} \varepsilon \quad (8.1.12)$$

$$\Delta^{-1/2} (-\det \operatorname{dev} \mathbf{A})^{1/2} = \operatorname{sh} \varepsilon \quad (8.1.13)$$

Подстановка последних двух выражений в (8.1.4) дает

$$\mathbf{A} = \Delta^{1/2} \left[\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon + (-\det \operatorname{dev} \mathbf{A})^{-1/2} \operatorname{dev} \mathbf{A} \operatorname{sh} \varepsilon \right] \quad (8.1.14)$$

Определив коммутанту матрицы \mathbf{A} как

$$\mathbf{R} = \operatorname{com} \mathbf{A} = (-\det \operatorname{dev} \mathbf{A})^{-1/2} \operatorname{dev} \mathbf{A} \quad (8.1.15)$$

Перепишем выражение (8.1.14) как

$$\Delta^{-1/2} \mathbf{A} = [\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon + \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon] \quad (8.1.16)$$

Укажем на два важные свойства коммутанты: во-первых, она не меняет значения при умножении девиатора на произвольный ненулевой множитель; во-вторых, ее квадрат дает единичную матрицу

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{I} \quad (8.1.17)$$

Пусть имеются две матрицы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ с одинаковыми коммутантами $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}$ и, вообще говоря, различными определителями Δ_1, Δ_2 и показателями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Используя формулы (8.1.16) и (8.1.17) их произведение можно представить как

$$\begin{aligned}
(\Delta_1 \Delta_2)^{-1/2} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 &= (\Delta_1 \Delta_2)^{-1/2} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = [\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon_1 + \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon_1][\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon_2 + \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon_2] = \\
&= \mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon_1 \operatorname{ch} \varepsilon_2 + \mathbf{R}^2 \operatorname{sh} \varepsilon_1 \operatorname{sh} \varepsilon_2 + \mathbf{R}[\operatorname{sh} \varepsilon_1 \operatorname{ch} \varepsilon_2 + \operatorname{ch} \varepsilon_1 \operatorname{sh} \varepsilon_2] = \\
&= \mathbf{I} \operatorname{ch}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mathbf{R} \operatorname{sh}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)
\end{aligned} \tag{8.1.18}$$

Из сравнения (8.1.16) и (8.1.18) следует, что показатель произведения матриц с одинаковыми коммутантами равен сумме показателей сомножителей. Факт равенства определителя произведения матриц произведению их определителей является общеизвестным.

Вычисление обратной матрицы в представлении (8.1.16) также весьма удобно. Непосредственной проверкой легко убеждаемся, что

$$\mathbf{A}^{-1} = \Delta^{-1/2} [\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon - \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon] \tag{8.1.19}$$

Действительно

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \Delta \Delta^{-1} = [\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon + \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon][\mathbf{I} \operatorname{ch} \varepsilon - \mathbf{R} \operatorname{sh} \varepsilon] = \\
&= \mathbf{I} \operatorname{ch}^2 \varepsilon - \mathbf{R}^2 \operatorname{sh}^2 \varepsilon = \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{8.1.20}$$

Рассмотрим, собственно, поставленную задачу. Ограничимся случаем, когда матричный коэффициент $\mathbf{A}(t)$ имеет коммутанту $\mathbf{R}(t)$ вида

$$\mathbf{R}(t) = \psi^{-1/2}(t) \begin{vmatrix} l(t) & m(t) \\ n(t) & -l(t) \end{vmatrix} \tag{8.1.21}$$

где

$$\psi(t) = l^2(t) + m(t)n(t) \tag{8.1.22}$$

а $l(t)$, $m(t)$, $n(t)$ - полиномы.

Матрицу $\mathbf{R}(t)$ можно рассматривать как граничное значение $\mathbf{R}(z)$ вдоль мнимой оси, определенной для любых точек комплексной плоскости

$$\mathbf{R}(z) = \varphi^{-1/2}(z) \begin{vmatrix} l(z) & m(z) \\ n(z) & -l(z) \end{vmatrix} \quad (8.1.23)$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_+^{\pm 1}(z) &= \Lambda_+^{\pm 1}(z) \left[\mathbf{I} \operatorname{ch}[(\psi \beta_+)(z)] \pm \mathbf{R}(z) \operatorname{sh}[(\psi \beta_+)(z)] \right] \\ \mathbf{X}_-^{\pm 1}(z) &= \Lambda_-^{\pm 1}(z) \left[\mathbf{I} \operatorname{ch}[(\psi \beta_-)(z)] \pm \mathbf{R}(z) \operatorname{sh}[(\psi \beta_-)(z)] \right] \end{aligned} \quad (8.1.24)$$

Здесь $\Lambda_{\pm}(z), \beta_{\pm}(z)$ - функции, голоморфные справа и слева от мнимой оси. Голоморфность матриц-функций $\mathbf{X}_{\pm}^{\pm 1}(z)$ соответственно, в областях S^+ и S^- доказывается, например, разложением гиперболических синуса и косинуса в степенные ряды, сходящиеся, как известно, в любых точках комплексной плоскости

$$\operatorname{ch}[(\psi \beta)(z)] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^j \beta^{2j}}{(2j)!} \quad (8.1.25)$$

$$\psi^{-1/2} \operatorname{sh}[(\psi \beta)(z)] = \beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^j \beta^{2j}}{(2j+1)!} \quad (8.1.26)$$

Уравнения (3.2.1) удовлетворяются тождественно если

$$\Lambda_-^{-1}(z) \Lambda_+(z) = \Delta^{1/2}(z), \quad z \in L \quad (8.1.27)$$

$$\beta_+(z) - \beta_-(z) = \psi^{-1/2}(z) \varepsilon(z), \quad z \in L \quad (8.1.28)$$

После проведения факторизации матрицы в форме (8.1.24) решение задачи находится по теореме Лиувилля.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Граничные условия типа обобщенной упругой заделки для линейного уравнения изгиба балки; оценка вклада различных членов

Классическое линейное уравнение изгиба балки при отсутствии распределенных усилий имеет вид

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = 0 \quad (9.1.1)$$

$$I = ah^3/12 \quad (9.1.2)$$

Здесь EI - изгибная жесткость; h, a - высота и ширина балки, соответственно; $u(x)$ - нормальное смещение (прогиб); x - координата вдоль оси балки. Решение данного уравнения есть полином третьей степени, входящие в него константы определяются из граничных условий

$$u(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \quad (9.1.3)$$

Несмотря на простоту, балочная модель является весьма неплохим приближением к точному решению. Это связано с тем, что она дает асимптотически точное решение для малых отношений толщины консоли к длине (минимум два члена по h/l). Иными словами точное решение можно представить в виде

$$u_{exact} = u(x) \left[1 + O\left(\frac{h}{l}\right)^2 \right] \quad (9.1.4)$$

где $u(x)$ определяется решением (9.1.3).

Обычно при расчетах балочных систем в качестве основной поправки к элементарной теории балок рассматривают поправку, вызываемую действием перерезывающей силы (см., например, [99]). Однако все поправки данного рода дают вклад порядка не выше чем $O(h/l)^2$. Вместе с тем, для того, чтобы решение давало два верных члена, необходимо, чтобы и граничные условия выполнялись с той же точностью.

Оценим поправки, вносимые заменой условий жесткой заделки на условия обобщенной упругой заделки. Для этого рассмотрим балку длины l , левый конец которой жестко либо упруго защемлен, а к правому приложена сила f . В случае жесткой заделки граничные условия имеют вид

$$u(0) = 0 \quad (9.1.5)$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 0 \quad (9.1.6)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(l) = 0 \quad (9.1.7)$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}(l) = -\frac{f}{EI} \quad (9.1.8)$$

Решение уравнения (9.1.1) с граничными условиями (9.1.5)-(9.1.8) есть

$$u(x) = \frac{fl}{2EI} x^2 - \frac{f}{6EI} x^3 \quad (9.1.9)$$

Рассмотрим соотношения обобщенной упругой заделки. Поскольку в балочном решении в каждом сечении из силовых параметров фигурируют только сила $P(x)$ и момент $M(x)$, то в граничных условиях смещение и

поворот должны быть функциями от указанных силовых параметров. В силу линейности задачи, а также с учетом того, что $P(0) = f$, $M(0) = fl$, имеем

$$u(0) = \frac{a_{11}}{EI} f h^3 + \frac{a_{12}}{EI} f l h^2 \quad (9.1.10)$$

$$\frac{du}{dx}(0) = \frac{a_{21}}{EI} f h^2 + \frac{a_{22}}{EI} f l h \quad (9.1.11)$$

Тогда решение уравнения (9.1.1) с граничными условиями (9.1.5), (9.1.6), (9.1.10), (9.1.11) есть

$$u(x) = \frac{fl}{2IE} x^2 - \frac{f}{6IE} x^3 + \frac{a_{21}}{EI} f h^2 x + \frac{a_{22}}{EI} f l h x + \frac{a_{11}}{EI} f h^3 + \frac{a_{12}}{EI} f l h^2 \quad (9.1.12)$$

Ограничиваясь только старшими членами разложения по h/l и ограничиваясь двумя членами (поскольку остальные выходят за предел точности линейной балочной теории), получаем

$$u(x) = \frac{fl}{2IE} x^2 - \frac{f}{6IE} x^3 + \frac{a_{22}}{EI} f l h x + \frac{f}{IE} l h x \times o(h/l) \quad (9.1.13)$$

Таким образом, взаимосвязь между приложенной силой и смещением в точке приложения силы ($x=l$) с точностью до $l^2 O(h/l)$ имеет вид

$$U_{el}(l) = f \frac{l^3}{IE} \left(\frac{1}{3} + a_c \frac{h}{l} \right) \quad (9.1.14)$$

Здесь положено $a_c = a_{22}$.

Безразмерный коэффициент a_c , являющийся коэффициентом упругой заделки, не может быть определен в рамках балочной теории. В общем случае он может зависеть от геометрических параметров балки и упругих

параметров балки и материала массивной части конструкции, в которую эта балка заделана.

Следует особенно подчеркнуть, что поправка, вносимая за счет замены граничного условия жесткой заделки на граничное условие простой упругой заделки (пропорциональности угла поворота в точке заделки действующему моменту) – не просто максимальна по сравнению с остальными членами, появляющимися благодаря обобщенной упругой заделки, но и единственная, чей вклад еще не выходит за рамки точности, линейной балочной теории (без поправок на действие поперечной силы). Также отметим, что вклад от данного члена на порядок по h/l превосходит вклад от обычно рассматриваемой поправки на действие поперечной силы (см., например, [99]). Тем не менее, для повышения точности иногда может оказаться полезным и рассмотрение условий обобщенной упругой заделки, хоть и не являющейся асимптотически корректной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B. Asymptotic analysis of crack interaction with free boundary // *Int. J. Solids Structures*. 2000. V. 37. P. 857-886.
2. Устинов К.Б. Об уточнении граничных условий для балочной модели кантилевера атомно-силового микроскопа и их влиянии на интерпретацию результатов измерений // *Изв. РАН МТТ*. 2008. №3. С. 182-188.
3. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. Моделирование механических эффектов, связанных с работой атомно-силовых микроскопов // *Российские нанотехнологии*. 2008. №5-6. С. 136-147.
4. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б.. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // *Физ. Мезомех.* 2010. Т. 13. №5. С. 127-138.
5. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Ченцов А.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия // *Вычисл. Мех. Спл. Сред.* 2011. Т. 4. № 3. С. 48-57.
6. Устинов К.Б. О влиянии поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*. 2011. № 4 часть 5. С. 2541-2542.

7. Салганик Р.Л., Устинов К.Б. Задача об упруго заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Известия РАН МТТ. 2012. №4. С. 50-62.
8. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. О построении теории поверхностной упругости для плоской границы // Физ. Мезомех. 2013. Т. 16. №4. С. 75-83.
9. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б. Об учете ван-дер-ваальсового взаимодействия в некоторых задачах теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 87-94.
10. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // Engineering Failure Analysis Engineering Failure Analysis 2015. V. 48B P. 338-344.
11. Устинов К.Б.. О сдвиговом отслоении тонкой полосы от полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 6. С.141-152.
12. Устинов К.Б.. Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины, эквивалентной слою // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 1. С. 75-95.
13. Устинов К.Б., Каспарова Е.А. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия // Деформация и разрушение материалов. 2015. № 3 С. 28-35
14. Р.В. Гольдштейн, В.А. Городцов, К.Б. Устинов. О некоторых особенностях механического поведения кантилеверов атомно-силовых микроскопов. Инженерная физика. 2009. №4. С. 19-23.
15. Устинов К.Б. Еще раз к задаче о полуплоскости, ослабленной полубесконечной трещиной, параллельной границе // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. №4. С. 138-168.
16. Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A. On the Modeling of Surface and Interface Elastic Effects in Case of Eigenstrains. Models, Simulations

- and Applications / Series: Advanced Structured Materials Altenbach H., Morozov N.F. (Eds.). 2013, XV. 30. P. 167-180. 193p.
17. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic analysis of extensive crack growth parallel to free boundary. 3rd Int. Conf. Localized Damage 94. 1994. P. 623-630.
 18. Dyskin, A.V., Ustinov K.B., Germanovich L.N. Asymptotic vs. Numerical Modelling in Fracture Mechanics // A.K. Easton and J.M. Steiner (eds.) AEMC94. 1996. Studentlitteratur, Lund. P. 399-407.
 19. Ustinov K. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings / Books of Abstracts 19-th European conference on fracture. Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety. ESIS19 August 26-31 2012. Kazan. CD-PROCEEDINGS.
 20. Устинов К.Б.. О сдвиговом отслоении тонкого слоя от полуплоскости; эквивалентные условия упругой заделки. Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, 22-31 мая 2013, Алушта. - М.: Изд-во МАИ, 2013. С.442-443.
 21. Goldstein R.V., Ustinov K.B., Chentsov A.V. Buckling of delaminated coatings: effects of substrate compliance and coating thickness // 2nd Int. Conf. "From Nanoparticles & Nanomaterials to Nanodevices & Nanosystems", June 28 – July 03, 2009, Rhodes, Greece. Book of Abstracts. P. 192.
 22. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. О механических эффектах, связанных с работой кантилеверов атомно-силовых микроскопов / Всероссийская конференция ММПСН–2008 «Многомасштабное моделирование процессов и структур в нанотехнологиях» Сборник тезисов докладов, Москва, МИФИ. 2008. С. 305-307.

23. Chentsov A.V., Ustinov K.B. Buckling of delaminated coatings: effects of substrate compliance and coating thickness / 2-nd International Conference “From nanoparticles and nanomaterials to nanodevices and nanosystems” Rhodes, Greece, 28 June – 04 July 2009. Book of Abstract. P. 192.
24. Устинов К.Б. Ченцов А.В. Континуальное и дискретно-континуальное моделирование слоистых наноматериалов и систем с покрытиями / Международный форум по нанотехнологиям 6-8 октября 2009. Сборник тезисов докладов Второго Международного форума по нанотехнологиям. Rusnanotech-09. С. 208-209.
25. Ustinov K.B., Goldstein R.V., Chentsov A.V. Influence of substrate compliance and coating thickness on buckling of delaminated coatings / 18-th European Conference on Fracture of Materials from Micro to Macro Scale. August 30 – September 03, 2010. Dresden, Germany. Books of Abstracts. Eds. Klingbeil et al. P.262
26. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. О влиянии податливости подложки на параметры потери устойчивости отслоившегося покрытия / XVII Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, 28 февраля – 3 марта 2011 г. Тезисы докладов. Пермь – Екатеринбург, 2011. С. 318
27. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Ustinov K.B. Effects of surface stress and surface elasticity on deformation of an inclusion in an elastic matrix / 3rd International Conference from Nanoparticles & Nanomaterials to Nanodevices & Nanosystems and Cretan Workshop on: Global Challenges and Opportunities for Nanotechnology BOOK OF ABSTRACTS Crete, Greece, June 26 – 30, 2011. P. 140.
28. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Городцов А.В. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование включений нанометровых размеров в упругой матрице / Тезисы докладов II Всероссийской конференции.

- Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций. Новосибирск 10-14 окт 2011. Изд-во НГТУ, С. 106-107.
29. Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A. On the Modeling of Surface and Interface Elastic Effects in Case of Eigenstrains / ESMC-2012 - 8th European solid mechanics conference. Gerhard A. Holtzapfel and Ray W. Ogden eds. Graz Austria; July 9-13, 2012. Books of abstracts. CD.
 30. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings 19-th European conference on fracture. Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety. ESIS19 August 26-31 2012. Foliant Kazan Russia. P. 135.
 31. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. О построении теории поверхностной упругости / XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 18-22 февраля 2013. Тезисы докладов. Пермь-Екатеринбург. 2013. С. 357.
 32. Ustinov K.B. On propagation of interfacial cracks parallel to free boundaries and delamination of coatings / The 13-th International Conference New Trends in Fatigue and fracture NT2F13, Moscow, Russia, 13-16 May, 2013. P. 19.
 33. Goldstein R.V., Ustinov K.B. On propagation of interface cracks parallel to free boundaries in relation to delamination of coatings / Abstract book. 13-th International Conference on Fracture June 16-21 2013. Beijing China. Shouwen Yu, Xi-Qiao Eds. P. 296-297.
 34. Ustinov K.B. On problem of interface crack parallel to free boundary; equivalent elastic clamping conditions / Advanced Problems in Mechanics: book of abstracts of International Summer School-Conference, 1-6 of July 2013. СПб, Издательство Политехнического университета. С. 81.
 35. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости для некоторого класса различных упругих свойств. Сучасні проблеми механіки

- деформівного твердого тіла, дифференціальних та інтегральних рівнянь. Тези доповідей міжнародної наукової конференції, 23-26 серпня 2013. Одеса. С. 122.
36. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б. Деформирование и отслоение тонких приповерхностных слоев. Успехи механики сплошных сред. Сборник докладов международной конференции. 28 сентября – 4 октября 2014. Владивосток с. 148-151.
 37. Устинов К.Б. О граничных условиях для задач, связанных с отслоением покрытий, решаемых в терминах теории пластин. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды VIII международной конференции. Сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт. с. 428-231.
 38. Устинов К.Б. Некоторые задачи об отслоении покрытий: влияние податливости основания. Труды XVII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» 14-17 октября 2014, Ростов-на-Дону. Т.2. 200-204.
 39. Устинов К.Б., Ченцов А.В. Аналитическое и численное моделирование потери устойчивости отслоившегося от подложки покрытия. Препринт 926 ИПМех РАН. 2010. 16с.
 40. Устинов К.Б., Салганик Р.Л. Задача об упруго заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация). Препринт ИПМех РАН. 2010. № 948. 20с.
 41. Устинов К.Б. О построении теории поверхностной упругости для внутренней плоской границы при наличии собственных деформаций. Препринт ИПМех РАН. 2011. № 987. 30с.
 42. Устинов К.Б. Еще раз к задаче о полуплоскости, ослабленной полубесконечной трещиной, параллельной границе. Препринт ИПМех РАН. 2013. № 1046. 31с.

43. Устинов К.Б. О сдвиговом отслоении тонкого слоя от полуплоскости. Препринт ИПМех РАН. 2013. № 1047. 30с
44. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости для некоторого класса различных упругих свойств. Препринт ИПМех РАН. 2013. № 1048. 50с.
45. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. О построении теории поверхностной упругости для криволинейной границы. Препринт ИПМех РАН. 2014. № 1060. 23с.
46. Устинов К.Б. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия. Препринт ИПМех РАН. 2014. № 1078. 19с.
47. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. Деформирование шарообразного включения в упругой матрице при наличии собственных деформаций с учетом влияния свойств поверхности раздела, рассматриваемой как предел слоя конечной толщины. Препринт ИПМех РАН. 2014. № 1080. 22с.
48. Устинов К.Б. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия с учетом влияния перерезывающих сил. Препринт ИПМех РАН. 2014. № 1081. 24с.
49. Tolpygo V.K., Clarke D.R. Wrinkling of α -alumina films grown by thermal oxidation—I. Quantitative studies on single crystals of Fe–Cr–Al alloy // *Acta Materialia*. 1998. V. 46. Is. 14. P. 5153–5166.
50. Clarke D.R., Levi C.G. Materials design for the next generation thermal barrier coatings // *Annu. Rev. Mater. Res.* 2003. V. 33. P. 383–417.
51. Evans A.G., Mumm D.R., Hutchinson J.W., Meier G.H., Pettit F.S. Mechanisms controlling the durability of thermal barrier coatings // *Prog. Mater. Sci.* 2001. V. 46 Is. 5. P. 505–553.

52. Stiger M.J., Yanar N.M., Topping M.G., Pettit F.S., Meier G.H. Thermal barrier coatings for the 21st century // *Z. Metallkd.* 1999. V. 90. P. 1069–1078.
53. Samson F. Ophthalmic lens coating // *Surf. Coat. Tech.* 1996. V. 81. P. 79–86.
54. Moon M.-W., Chung J.-W., Lee K.-R., Oh K.H., Wang R., Evans, A.G. An experimental study of the influence of imperfections on the buckling of compressed thin films // *Acta Mater.* 2002. V. 50. P. 1219–1227.
55. Bowden N., Brittain S., Evans, A.G., Hutchinson J.W., Whitesides G.M. Spontaneous formation of ordered structures in thin films of metals supported on an elastomeric polymer // *Nature.* 1998. V. 393. P. 146–149.
56. Huck W., Bowden N., Onck P., Pardoën T., Hutchinson J., Whitesides G. Ordering of spontaneously formed buckles on planar surfaces // *Langmuir.* 2000. V. 16. P. 3497–3501.
57. Yoo P.J., Suh K.Y., Park S.Y., Lee H.H. Physical self-assembly of microstructures by anisotropic buckling // *Advanced materials.* 2002. V. 14. P. 1383–1387.
58. Freund L.B., Suresh S. *Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution.* Cambridge University Press, Cambridge. 2004. 750 p.
59. Faulhaber S., Mercer C. Moon M.-Y., Hutchinson J.W., Evans A.G. Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks // *J. Mech. Phys. Solids.* 2006. V. 54. P. 1004–1028.
60. Obreimoff J.W. Splitting Strength of Mica // *Proc. Roy. Soc., London, A.* 1930. V. 127. P. 290–297.
61. Дерягин Б.В., Кротова Н.А., Смилга В.П., Адгезия твердых тел. М. Наука. 1973. 280с.

62. Spies G.J. The peeling test on Redoux-bonded joints // Aircraft Engng. 1953. V. 25. N.289. P. 64-70.
63. Kaelble D.H. Theory and analysis of peel adhesion: mechanisms and mechanics // Trans. Soc. Rheology. 1959. V.3. P. 160-180.
64. Kaelble D.H. Theory and analysis of peel adhesion: bond stresses and distributions // Trans. Soc. Rheology. 1960. V.4. P. 160-180.
65. Dannenberg H. Measurement of adhesion by a blister method // J. Appl. Pol. Sci. 1961. V. 5. Is. 14. P.125–34.
66. Bikerman J.J. The science of adhesive joints. 2-nd ed. N.-Y., L. Academic Press.1968. 350p.
67. Williams M.L. The continuum interpretation for fracture and adhesion // J. Appl. Pol. Sci. 1969. V. 13. P. 29–40.
68. Салганик Р.Л. О хрупком разрушении склеенных тел // ПММ. 1963. Т. 27. № 5. С. 957–962.
69. Malyshev B.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of crack // Int. J. Fracture Mechanics. 1965. V. 1. № 2. С. 114–128.
70. Гольдштейн Р.В., Дашевский И.Н., Ентов В.Н. Анализ модели отдира с учетом вязкоупругости клеевого слоя // Изв. АН СССР МТТ. 1979. №2. С.110-116.
71. Дашевский И.Н. Плоская смешанная задача линейной вязкоупругости о стационарном отслаивании полубесконечной полоски, сцепленной с полупространством слоем винклеровского клея // Смешанные задачи механики деформируемого твердого тела. 2-я Всесоюзная научная конференция. Тезисы докладов. Днепропетровск. ДГУ, 1981. С. 48-49.
72. Karihaloo B.L., Stang H. Buckling-driven Delamination Growth in Composite Laminates: Guidelines for Assessing the Threat Posed by an

- Interlaminar Delamination // Composites: Part B. 2008. V. 39. Is. 2. P. 386–395.
73. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение. 1980. 375с.
74. Алехин В.В., Аннин Б.Д., Колпаков А.Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. Новосибирск: ИГ СО АН СССР. 1988.130 с.
75. Аннин Б.Д. Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2005. 203 с.
76. Панин В.Е., Елсукова Т.Ф., Панин А.В., Кузина О.Ю. Мезосубструктура в поверхностных слоях поликристаллов при циклическом нагружении и ее роль в усталостном разрушении // Докл. РАН. 2005. Т.403. № 3. С.1-6.
77. Панин В.Е., Сергеев В.П., Панин А.В. Наноструктурирование поверхностных слоев и нанесение наноструктурных покрытий. Томск: Изд-во ТПУ. 2008. 285с.
78. Sultan E., Boudaoud A. The buckling of a swollen thin gel layer bound to a compliant substrate // J. Appl. Mech. 2008. V.75. 051002-1-5
79. Морозов Н.Ф., Паукшто М.В., Товстик П.Е. Устойчивость Поверхностного Слоя При Термонагружении Известия Российской академии наук // Изв. РАН МТТ. 1998. № 1. С. 130-139.
80. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН МТТ. 2005. № 1. С. 147-160.
81. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О Формах Потери Устойчивости Пластины На Упругом Основании // Изв. РАН МТТ. 2010. № 4. С. 30-42.

82. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О Формах Потери Устойчивости Сжатой Пластины На Упругом Основании // Докл. РАН. 2012. Т. 446. № 1. С. 37-41.
83. Moon M-W., Lee S.H., Sun J-Y., Oh K.H., Vaziri A., Hutchinson J.W. Controlled formation of nanoscale wrinkling patterns on polymers using focused ion beam // Scripta Materialia. 2007. V. 57. P. 747-750.
84. Cai S., Breid D., Crosby A.J., Suo Z., Hutchinson J.W. Periodic patterns and energy states of buckled films on compliant substrates // J. Mech. Phys. Solids. 2011. V. 59. P. 1094-1114.
85. Zang J., Zhao X., Cao Y., Hutchinson J.W. Localized ridge wrinkling of stiff films on compliant substrates // J. Mech. Phys. Solids. 2012. V. 60. P. 1265-1279.
86. Hutchinson J.W. The role of nonlinear substrate elasticity in the wrinkling of thin films // Phil. Trans. R. Soc. A. 2013. 37120120422.
87. Audoly B., Boudaoud A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate (part I). Formulation, linear stability of cylindrical patterns, secondary bifurcations // J. Mech. and Phys. Solids. 2008. V. 56. Is. 7. P. 2401–2421,
88. Audoly B., Boudaoud A. Buckling of a thin film bound to a compliant substrate (part 2). A global scenario for the formation of herringbone pattern // J. Mech. and Phys. Solids. 2008. V. 56. Is. 7. P. 2422—2443.
89. Audoly B., Boudaoud A. Buckling of a thin film bound to a compliant substrate (part 3). Herringbone solutions at large buckling parameter // J. Mech. and Phys. Solids. 2008. V. 56. Is. 7. P. 2444—2458.
90. Korobeynikov S.N. Nonlinear equations of deformation of atomic lattices // Archive of Mechanics. 2005. 57, No. 6. P. 435-453.

91. Korobeinikov S.N. The numerical solution of nonlinear problems on deformation and buckling of atomic lattices // *International Journal of Fracture*. 2004. V. 128. No. 1. P. 315-323
92. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed Mode Cracking in Layered Materials / *Advances in Applied Mechanics*. 1992; ed. Hutchinson J.W., Wu T.Y., V. 29. P. 63-191.
93. Kachanov L.M. *Delamination Buckling of Composite Materials*. Kluwer.1988. 95 p.
94. Thouless M.D. Combined Buckling and Cracking of Films // *J. American Ceramic Soc.* 1993. V. 86. Is. 1. P. 2936–2938.
95. Parry G., Colin J., Coupeau C., Foucher F., Cimetière A., Grilhé J., Effect of substrate compliance on the global unilateral post-buckling of coatings: AFM observation and finite element calculations // *Acta materialia*. 2005. V. 53. P. 441-447.
96. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // *Int. J. Fract.* 2002. V. 113. P. 39-55.
97. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // *Int. J. Fracture*. 2000. V. 104. № 2. P. 169–179.
98. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates // *J. Mech. Phys. Solids*, 50, 2001. P. 1847-1864.
99. Тимошенко, С.П., Гудьер, Дж. Теория упругости. М.: Наука. 1975. 575с.
100. Ciarlet P.G. A justification of the von Kármán equations // *Arch Rational Mech. and Analys.* 1980. V. 73. Is. 4. P. 349-389.
101. Ciarlet P.G. Two-Dimensional Approximations of Three-Dimensional Models in Nonlinear Plate Theory / *Proceedings of the IUTAM Symposium*

- on Finite Elasticity. Ed: D. E. Carlson, R. T. Shield. Martinus Nijhoff Publishers. The Hague, Boston, London. 1982. P. 123-141.
102. Ciarlet, P. G., Rabier, P. Les Equations de von Kármán. Lecture Notes in Mathematics Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1980.
 103. Nicolson D.W. Peel mechanics with large bending // Int. J. Fract. 1977. V. 13. N. 3. P. 279-287.
 104. Yu, H.H., He, M.Y., Hutchinson, J.W. Edge effects in thin film delamination // Acta Mater. 2001. V.49. P.93–107.
 105. Греков М.А. Сингулярная плоская задача теории упругости. Изд-во СПб университета. 2001. 192с.
 106. Златин А.Н., Храпков А.А. Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 31. С. 1009–1010.
 107. Златин А.Н., Храпков А.А. Упругая полуплоскость, ослабленная трещиной, параллельной ее границе // ЛГУ Исследования по упругости и пластичности. 1990. Т. 16. Проблемы современной механики разрушения. С. 68-75.
 108. Златин А.Н., Храпков А.А. Векторная задача Римана с ненулевым индексом показателя матрицы-коэффициента // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1985. Т 181. С. 12-16.
 109. Khrapkov A.A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. S.-P. 2001.
 110. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1955. V. 8. Pt 2. P. 164-178.
 111. Alblas J.B., Kuypers W.J.J. On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate // Applied Scientific Research, Section A. 1965-1966, V. 15, Is. 1. P. 429-439.

112. Каландия А.И. О напряженном состоянии в пластинах, усиленных ребрами жесткости // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 538-543.
113. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука. 1973. 303с.
114. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты на упругом полупространстве / Г.Я.Попов // Строительство: Научные доклады высшей школы. 1958. №4. С. 19-24.
115. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно деформируемом основании // ПММ. 1961, 25. Вып.2. С. 342-355.
116. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 312-320.
117. Банцури Р.Д. Контактная задача для клина с упругим креплением // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. № 4. С. 797-800.
118. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине // Прикл. механика. Сер. Е. 1968. Т. 35. № 4. С. 124-135.
119. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 487с.
120. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение. 1980. 415 с.
121. Назаров С.А., Полякова О.Р. Коэффициенты интенсивности напряжений для параллельных сближенных трещин в плоской области // Прикладная матем. и механика. 1990. Т. 54. N 1. С. 132–141.
122. Гольдштейн Р.В., Коновалов А.Б. Асимптотический анализ пространственной задачи о трещине-расслоении в двухслойной пластине // Изв. РАН. МТТ. 1996. №3. С. 62-71.

123. Jacobson R. Measurement of the adhesion of thin films // *Thin Solid Films*, V.34, 1976, P.181-199.
124. Анищенко Л. М., Кузнецов С. Е. Влияние неоднородности удельной силы сцепления пленки с подложкой и неравномерности толщины пленки на величину силы отрыва контактной площадки // *Физика и химия обработки материалов*. 1982, №2. С.37-42
125. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Электромеханические эффекты в материале с трещинами и шероховатым покрытием, испытывающим изгибное отслоение // *Вестник МАИ*. 2009. Т. 16. №4. С. 130-138
126. Salganik R.L., Fedotov A.A., Mischenko A.A. Thermal stressing effects in material with rough coating caused by electromagnetic radiation energy dissipation / *Proceedings of PACAM XI, 11th Pan-American Congress of Applied Mechanics*, January 04-08, 2010, Foz do Iguaçu, PR, Brazil, 2009.
127. Wiener N., Hopf E. Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen. *Sitzungber. Akad. Wiss. Berlin*. 1931. P. 696–706.
128. Heins A.E. System of Wiener-Hopf equations / *Proceeding of Symposia in Applied mathematics II*. McGraw-Hill, 1950. P. 76-81.
129. Чеботарев Г.Н., К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для систем n пар функций // *Уч. Зап. Казанского Университета*. 1956. Т. 116б. Кн. 4. С. 31-58.
130. Daniele V.G. On the factorization of Wiener-Hopf matrices in problem solvable with Hurd's method // *Trans ANTENNAS propagate*. 1978. V. 26. P. 614-616.
131. Jones D.S. Commutative Wiener-Hopf factorization of a matrix // *Proc. R. Soc. A*. 1984. V. 393. P. 185-192.
132. Моисеев Н.Г. О факторизации матриц-функций специального вида // *Докл. АН СССР*. 1989. Т. 305. №1, С. 44-47.

133. Antipov Y.A., Moiseev N.G. Exact solution of the plane problem for a composite plane with a cut across the boundary between two media // J. Appl. Math. Mech. 1991. V. 55. P. 531-539.
134. Abrahams I.D. On the non-commutative of factorization of Wiener-Hopf kernels of Khrapkov type // Proc. Roy. Soc. London A. 1998. V. 454. P. 1719-1743.
135. Antipov D.A., Silvestrov V.V. Factorization on a Riemann surface in scattering theory // QR. J. Mech. Appl. Math. 2002. V. 55. P. 607-654.
136. Antipov D.A., Silvestrov V.V. Vector functional difference equation in electromagnetic scattering. // IMA Journal of Applied Math. 2004 V. 69. N 1. P. 27-69.
137. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука. 1974. 456 с.
138. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М. 1979. 320 с.
139. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука. 1984. 256 с.
140. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полупространства усиленного упругими накладками // ПММ, 1972. Т. 36. № 5. С. 770-787.
141. Casimir H.B.G. Note on the conduction of heat in crystals // Physica. 1938. V. 5. P. 495-500.
142. Hall E.O. The Deformation and Ageing of Mild Steel: III Discussion of Results // Proc. Phys. Soc. London. 1951. V. 643. P. 747-753.
143. Petch N.J. The Cleavage Strength of Polycrystals // J. Iron Steel Inst. London. 1953. V. 173. P. 25-28.

144. Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Ro. Soc. London, A 221. 1921. P. 163–198.
145. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // Докл. АН. 2001. Т. 381. № 3. С. 825-827.
146. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Chentsov A.V., Starikov S.V., Stegailov V.V. Norman G.E. To description of mechanical properties of nanotubes. Tube wall thickness problem. Size effect // Preprint of Institute for problems in mechanics No.937. Russian Acad. Sci. Moscow 2010.
147. Поверхностные слои и внутренние границы раздела в гетерогенных материалах / отв. ред. В. Е. Панин ; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т физики прочности и материаловедения. - Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2006. 520с
148. Sevostianov I., Kachanov M. Effect of interphase layers on the overall elastic and conductive properties of matrix composites. Applications to nanosize inclusion // Int. J. Sol. Struct. 2006. V. 44. Is. 3-4. P. 1304-1315.
149. Вильчевская Е.Н., Филиппов Р.А., Фрейдин А.Б. О переходных слоях в композитных материалах как областях новой фазы // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 113-144.
150. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука. 1975. 415 с.
151. Mura T., Micromechanics of defects in solids, Martinus Nijhoff Publishers 1982.
152. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск. Издательство Петрозаводского ун-та. 1993. 538 с
153. Kanaun S.K., Levin V.M. Self-Consistent Methods for Composites. Vol. 1, Static Problems. Springer. 2008. 376p.

154. Фрейдин А.Б. Механика разрушения. Задача Эшелби: учеб. пособие - СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. - 2010. - 236 с.
155. Riccardi A., Montheillet F. A generalized self-consistent method for solids containing randomly oriented spheroidal inclusions // *Acta Mechanica*. 1999. V.133. P. 39-56.
156. Kluge M.D., Wolf D., Lutsko J.F., Phillpot S.R. Formalism for the calculation of local elastic constants at grain boundaries by means of atomic simulation // *J. Appl. Phys.* 1990. V. 67. P. 2370–2379.
157. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karihaloo B.L., Eshelby formalism for nanoinhomogeneities // *Proc. Roy. Soc. L., A*. 2005. V. 461. No. 2062. P. 3335–3353.
158. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. Theory of elasticity at the nanoscale // *Advances in Appl. Mech.* 2008. V. 42. P. 1-68.
159. Kanaun S.K., Kudriavtseva L.T. Spherically layered inclusions in a homogeneous elastic medium // *Appl. Math. Mech.* 1986. V. 50. P. 483–491.
160. Garboczi E.J., Bentz D.P. Analytical formulas for interfacial transition zone properties // *Adv. Cement-Based Mater.* 1997. V. 6. P. 99–108.
161. Shen L., Li J. Effective elastic moduli of composites reinforced by particle or fiber with an inhomogeneous interface // *Int. J. Solids Struct.* 2003. V. 40. P. 1393–1409.
162. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б. Влияние включений на эффективные свойства композитов. Учет влияния промежуточной фазы. Препринт ИПМех РАН. 2005. № 792, 23с.
163. Goldstein R.V., Ustinov K.B. On influence of intermediate phase on the mechanical properties of the nanocomposites / Тезисы докладов международной конференции MESOMECH'2006, Физическая

мезомеханика, компьютерное конструирование и разработка новых материалов. 19-22 сентября 2006. Томск, Россия, С. 243-244

164. Goldstein R.V., Ustinov K.B. On effective elastic properties of nanocomposites; a 3-phase model / Theses of International conference NANO'06, Brno University of technology. Czech Republic. 2006. P. 25.
165. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б. Учет влияния промежуточной фазы на эффективные свойства дисперсных композитов. В сборнике Математические модели и методы механики сплошных сред. К 60-летию А.А. Буренина. РАН Дальневосточное отделение. Институт автоматизации и процессов управления. 2007. Владивосток. С. 42-51.
166. Салганик, Р.Л. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР МТТ. 1973. N.4. С. 149-158.
167. Roscoe R.A. Isotropic composites with elastic and viscoelastic phases: General bounds for the moduli and solutions for special geometries // Rheol. Acta. 1973. V. 12. P. 404-411.
168. Herve E., Zaoui A., N-layered inclusion-based micromechanical modelling // Int. J. Eng. Sci. 1993. V. 31. P. 1-10.
169. Yi X., Duan H.L., Karihaloo B.L., Wang J. Eshelby formalism for multi-shell nano-inhomogeneities // Arch. Mech. 2007. V. 59. Is. 3. P. 259-281.
170. Лурье С.А., Соляев Ю.О. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями // Вестник ПГТУ. Механика. 2010. №3 С. 80-90.
171. Лурье С.А., Тучкова Н.П. Континуальная модель адгезии для деформируемых твердых тел и сред с наноструктурами // Композиты и наноструктуры. 2009. Т. 2. № 2. С. 25-43.
172. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites // Int. J. Contr. Mater. Sci. 2003. V. 28. № 3-4. P. 529-539.

173. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // *J. Mater. Sci.* 2006. V. 41. № 20. P. 6693-6707.
174. Gurtin, M.E., Murdoch, A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1975. V.57. №.4. P. 291–323. 1975. V. 59. P. 389-390.
175. Murdoch A.I. Some fundamental aspects of surface modeling // *J. of Elasticity.* 2005. V. 80. P. 33-52.
176. Ibach H. The role of surface stress in reconstruction, epitaxial growth and stabilization of mesoscopic structures // *Surf. Sci. Rep.* 1997. V. 29. P. 195-263.
177. Подстригач Я. С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах / Киев : Наук. Думка. 1985. 200с.
178. Müller P., Saul A. Elastic effects on surface physics // *Surf. Sci. Rep.* 2004. V.54. P. 157-258.
179. Shuttleworth R. The surface tension of solids // *Proc. Phys. Soc.* 1950. V. A63. P. 444-457.
180. Altenbach H., Eremeyev V.A., Morozov N.F. Surface viscoelasticity and effective properties of thin-walled structures at the nanoscale // *Int. J. Engineering Sci.* 2012. V. 59. P. 83-89.
181. Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P. On the existence of solution in the linear elasticity with surface stresses // *ZAMM.* 2010. V. 90. № 3. P. 231-240.
182. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the shell theory on the nanoscale with surface stresses // *Int. J. Engineering Sci.* 2011. V. 49. № 12. P. 1294-1301.

183. Еремеев В.А., Альтенбах Х., Морозов Н.Ф. О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин // Докл. АН. 2009. Т. 424. № 5. С. 618-620.
184. Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // Докл. АН. 2009. Т. 429. № 4. С. 472-476.
185. Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Об эффективной жесткости нанопористого стержня // Докл. АН. 2010. Т. 432. № 4. С. 473-476.
186. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф. Некоторые задачи наномеханики // Физ. мезомех. 2013. Т. 16. № 4. С. 67-73.
187. Grekov M.A., Morozov N.F. Surface effects and problems of nanomechanics // J. Ningbo university (NSEE). V. 25. N. 1. 2012. P. 60-63.
188. Викулина Ю.И., Греков М.А. Напряженное состояние плоской поверхности упругого тела нанометрового размера при периодическом силовом воздействии. // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Серия: Математика, механика астрономия. Изд-во С.-Петербур. ун-та., 2012. Вып. 4. 72-80.
189. Grekov M.A., Vikulina Yu.I. Effect of a type of loading on stresses at a planar boundary of a nanomaterial. // Surface Effects in Solid Mechanics. Advanced Structured Materials 30, H. Altenbach and N. F. Morozov (eds.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. P. 69-79.
190. Grekov M.A., Yazovskaya A.A. Surface stress in an elastic plane with a nearly circular hole // Surface Effects in Solid Mechanics. Advanced Structured Materials 30, H. Altenbach and N. F. Morozov (eds.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. P. 81-94.
191. Рехвиашвили С.Ш., Кишტიкова Е.В. Адсорбция и поверхностная энергия в экспериментах с кварцевым микробалансом // ЖТФ. 2008. Т. 78. № 4. С. 137-139.

192. Кашежев А.З., Кумыков В.К., Манукянц А.Р., Сергеев И.Н., Созаев В.А. Зависимость поверхностной энергии металлов от давления // АН СССР. Известия. Сер. Физическая. 2009. Т. 73, № 8. С. 1211-1213.
193. Hashin Z. Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface // Mech. Mater. 1990. V.8. P. 333–348.
194. Hashin Z. Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface // J. Mech. Phys. Solids. 1991. V. 39. P. 745–762.
195. Jiang B., Weng G.J. A generalized self-consistent polycrystal model for the yield strength of nanocrystalline materials // J. Mech. Phys. Solids. 2004. V. 52. P. 1125–1149.
196. Tan H., Liu C., Huang Y., Geubelle P.H. The cohesive law for the particle/matrix interfaces in high explosives // J. Mech. Phys. Solids. 2005. V. 53. P. 1892–1917.
197. Eshelby, J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // Proc. R. Soc. London. A. 1957. V. 241. P. 376-396. Определение поля упругих напряжений, создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой // Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ. 1963. С.103–139.
198. Eshelby, J.D. Elastic inclusions and inhomogeneities / Eds. Sneddon I.N., Hill R. Progress in Solid Mechanics. V. 2. North-Holland. Amsterdam. 1961. P. 89-140.
199. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 279 с.
200. Попов Г.Я., Острик В.І. Метод факторизації: навчальний посібник. Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова. Одеса. 2014. 118 с.
201. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 6. С. 87–99.

202. Салганик Р.Л. Тонкий упругий слой, испытывающий скачек характеристик, в бесконечном упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 2. С. 154–163.
203. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения 2-е изд. М., Наука. 1962. 600 с.
204. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. - 640 с.
205. Дёч Г.. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Гос. Изд. Физ.-мат. Лит. М. 1958. 207с.
206. Лехницкий С.Г., Теория упругости анизотропного тела. М.-Л. Гостехиздат, 1950. 301 с.
207. Салганик Р.Л. Изгиб пласта на слое при изменении скачком их характеристик и контакте пласта с массивом // Изв. АН СССР МТТ. 1988. № 4. С. 86-97.
208. Салганик Р.Л. Тонкий упругий слой, испытывающий скачек характеристик, в бесконечном упругом теле // Изв. АН СССР МТТ. 1977. № 2. С. 154-163
209. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН СССР МТТ. 1968. №6. С. 87-99.
210. Слепян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296с.
211. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композиционных материалов. 1979. № 3. С. 387-396
212. Thouless M.D., Evans A.G., Ashby M.F., Hutchinson, J.W. The edge cracking and spalling of brittle plates // Acta Metallurgica. 1987. V. 35. P. 1333-1341.
213. Лифшиц И.М., Розенцвейг Д.Н. К теории упругих свойств поликристаллов // ЖЭТФ. 1946. Т.16. N.11. С. 967–980.

214. Лифшиц И.М., Розенцвейг Д.Н. К теории упругих свойств поликристаллов // Письмо в редакцию: ЖЭТФ. 1951. Т.21. N.10.
215. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. Т2. М.: Наука, 1965. 480с.
216. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. 490 с
217. Sanders J.L. Nonlinear theories for thin shells // Quart. Appl. Math. XXI (21) 34, 1963
218. Handbook of Micro/Nanotribology. Ed. by Bhushan Bharat. 2d ed. Boca Raton etc. CRC press, 1999. 859с.
219. Rabe U., Hirsekorn S., Reinstädler M., Sulzbach T., Lehrer C., Arnold W. Influence of the cantilever holder on the vibrations of AFM cantilevers // Nanotechnology. 2007. V. 18. Is. 4. 044008.
220. Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений // Изв. РАН МТТ. 2010. № 3. С. 30-44.
221. Гольдштейн Р.В., Каспарова Е.А., Шушпанников П.С. Роль поверхностных эффектов при деформировании двухслойный пластин // Вестн. тамбовского унив. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 3. С. 1182-1185.
222. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10 томах. Т.7. Теория упругости. Издание 5-е. М.: Физматлит. 2003. 264с.
223. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах. Т.5. Статистическая физика. Ч. I. 1995.
224. Зубов Л.М. Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями // Докл. РАН. 2007. Т. 412. № 3. С.343-346.
225. Зубов Л.М., Столповский А.В. Теория дислокаций и дисклинаций в упругих пластинках // ПММ. 2008. Т. 72. вып. 6. С. 989-1006.

226. Зубов Л.М., Фам Т.Х. Сильный изгиб круглой пластины с непрерывно распределенными дисклинациями // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2010. №4. С. 28-33.
227. Elssner G., Korn D., Rühle M. The influence of interface impurities on fracture energy of UHV diffusion bonded metalceramic bicrystals // Scripta Metall. Mater. 1994. V. 31. P. 1037-1042.
228. Cammarata R.C., Sieradzki K., Spaepen F. Simple model for interface stresses with application to misfit dislocation generation in epitaxial thin films // J. Appl. Phys. 2000. V. 87. No.3. P.1227-1234.
229. Cammarata R.C. Surface and interface stress effects in thin films // Progr. Surf. Sci. 1994. V.46. No.1. P. 1-38.
230. Cahn J.W., Larche F. Surface stress and the chemical equilibrium of small crystals. II. Solid particles embedded in a solid matrix // Acta Metallurgica. 1982. V. 30. No.1. P. 51-56.
231. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука 1981. 688с.
232. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 624с.
233. Shenoy V.B. Atomic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces // Phys. Rev. B. 2005. V. 71. No.9. 094104.
234. Sharma P., Ganti S., Bhate N., Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneity // Appl. Phys. Lett. 2003. V.82. No.4. P.535–537.