

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный технический университет»

На правах рукописи

МАЛОЛЕТОВ Александр Васильевич

ДИНАМИКА И ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ, ПАРАМЕТРОВ И  
АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ШАГАЮЩИХ МАШИН  
СО СДВОЕННЫМИ ШАГАЮЩИМИ ДВИЖИТЕЛЯМИ

Специальность 01.02.01  
«Теоретическая механика»

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант Брискин Е.С.

Волгоград — 2015

## Оглавление

Введение.....	4
1. Система механических показателей качества шагающих машин.....	16
1.1. Анализ и классификация шагающих машин и областей их использования.....	16
1.2. Показатели качества шагающих машин.....	70
1.2.1. Структурные показатели.....	72
1.2.2. Кинематические показатели.....	74
1.2.3. Показатели взаимодействия с окружающей средой.....	77
1.2.4. Геометрические показатели.....	80
1.2.5. Динамические показатели.....	87
1.3. Многокритериальная оптимизации шагающих машин.....	88
2. Разработка теоретико-механической модели движения шагающих машин.....	95
2.1. Динамика движения шагающей машины как системы твёрдых тел.....	95
2.2. Силовые взаимодействия.....	109
2.3. Стационарные связи.....	117
2.4. Нестационарные связи и законы управления.....	137
2.5. Матрица законов управления движением шагающих машин.....	145
2.6. Программная реализация теоретико-механической модели.....	149
2.6.1. Автоматическое формирование полной системы уравнений движения.....	149
2.6.2. Особенности реализации численных методов.....	155
2.6.3. Проверка разработанных теоретико-механических моделей.....	160
3. Оптимизация алгоритмов и законов управления движением шагающих машин.....	164
3.1. Применение уравнения Эйлера-Лагранжа при многокритериальной оптимизации шагающих машин.....	164
3.1.1. Оптимизация закона управления линейным приводом.....	177
3.1.2. Оптимизация закона управления четырёхзвенным механизмом.....	181
3.1.3. Оптимизация закона движения машины с цикловыми шагающими движителями... ..	184
3.2. Применение прямого метода задания программных движений.....	187
3.2.1. Оптимизация законов управления шагающей машиной при перемещении по плоской поверхности.....	190
4. Методы структурно-параметрической оптимизации шагающих машин.....	195
4.1. Особенности применения метода поиска на многомерных кубах для оптимизации структуры и параметров шагающих машин.....	195

4.2. Оптимизация структуры цикловых движителей на основе введения механизма-корректора .....	197
4.3. Оптимизация структуры машины со сдвоенными шагающими движителями.....	202
4.3.1. Построение расчётной схемы модульной шагающей машины.....	203
4.3.2. Особенности походок шагающих машин со сдвоенными движителями.....	206
4.3.3. Условия осуществимости различных типов походок.....	214
4.3.4. Оптимизация запаса статической устойчивости и количества приводов.....	223
4.3.5. Влияние дополнительных внешних сил на статическую устойчивость шагающей машины.....	230
5. Методы структурно-алгоритмической оптимизации шагающих машин.....	240
5.1. Оптимизация формы составной машины с шагающими опорами.....	240
5.2. Оптимизация структуры движителей и алгоритмов управления шагающей машины при маневрировании и преодолении препятствий.....	246
5.3. Курсовая устойчивость шагающей машины с цикловыми движителями.....	251
5.4. Управление реконфигурируемым цикловым движителем.....	254
Основные результаты и выводы.....	272
Список использованной литературы.....	273

## **Введение**

### **Актуальность темы.**

Работа посвящена решению проблем механики, возникающих в связи с созданием мобильных роботов с шагающими движителями. Шагающие машины являются сложными механическими системами, отличаются большим разнообразием структурных и кинематических схем, допускают реализацию множества различных алгоритмов и законов управления.

Эффективность выполнения машиной своих задач, обычно определяемая несколькими критериями, зависит от структуры аппарата, его параметров и законов управления, которые в свою очередь взаимосвязаны друг с другом и должны рассматриваться в совокупности. Поэтому при создании шагающих машин актуальной является проблема многокритериальной оптимизации, в рамках которой оптимум ищется одновременно среди нескольких вариантов структуры аппарата, множества параметров и законов управления.

В некоторых случаях актуальной является проблема оптимизации кинематической схемы и параметров машины при фиксированных законах управления, например при постоянных угловых скоростях вращения приводных двигателей. В других случаях возникает проблема многокритериальной оптимизации законов управления при неизменной кинематической схеме и параметрах аппарата.

Отдельного рассмотрения требует проблема определения и вычисления критериев оптимизации — механических показателей качества, которые для шагающих машин являются функциями не только структуры и параметров, но и реализуемых алгоритмов управления, и, следовательно, могут изменяться во время движения аппарата.

Исследования и разработки в области шагающих машин ведутся во всех развитых странах мира. В области теории движения и управления мобильными роботами в том числе с шагающими движителями Россия занимает одно из

ведущих мест благодаря работам И. И. Артоболевского, В. В. Белецкого, А. П. Бессонова, Ю. В. Болотина, Н. Н. Болотника, Е. С. Брискина, Ю. Ф. Голубева, В. Г. Градецкого, Е. А. Девянина, В. В. Жоги, М. Б. Игнатьева, И. А. Каляева, А. Л. Кемурджиана, В. В. Лапшина, В. Б. Ларина, М. И. Маленкова, Д. Е. Охоцимского, В. Е. Павловского, А. К. Платонова, Н. В. Умнова, А. М. Формальского, Ф. Л. Черноусько, В. В. Чернышева, А. Ю. Шнейдера, Е. И. Юревича, А. С. Ющенко и др. Среди теоретических исследований за рубежом широко известны работы К. Дж. Валдрона (США), М. Вукобратовича (Югославия), М. Канеко, И. Като, С. Хироси, И. Шимоямы (Япония), К. Бернса (Германия), Г. С. Вирка (Великобритания), Т. Зелинской (Польша) и др.

Результаты теоретических исследований привели к созданию многочисленных образцов шагающих машин, количество которых в настоящее время измеряется несколькими сотнями. Среди них можно отметить машины Plustech (Финляндия), ASV, Dante, Ambler, BigDog (США), Asimo, Titan (Япония), MANTIS (Великобритания) и некоторые другие. Разрабатываются такие машины и в России. Известны разработки шагающих роботов в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Институте Механики МГУ, Институте машиноведения им. А.А. Благонравова РАН и некоторых других организациях. При участии автора и с использованием результатов данной работы в Волгоградском государственном техническом университете (ВолгГТУ) разработаны шагающие опоры для дождевальная машины «Кубань», шагающие машины «Восьминог», «Восьминог М», «Ортоног».

Особенностью шагающих машин разработанных в ВолгГТУ является использование сдвоенных шагающих движителей, состоящих из двух механизмов шагания, кинематически связанных друг с другом. Хотя возможны и специальные режимы движения, обычно в сдвоенном шагающем движителе в каждый момент времени один из механизмов шагания находится в опоре, а второй — в переносе. Таким образом, каждый шагающий движитель одной из своих двух стоп всегда

опирается на грунт, что повышает устойчивость машины и упрощает алгоритмы управления ею.

Достоинства шагающих машин определяются в первую очередь потенциально более высокой проходимостью, маневренностью и лучшими экологическими свойствами по сравнению с машинами, использующими традиционные типы двигателей. А основные недостатки шагающих машин связаны со сложностью конструкции и системы управления, а также небольшой скоростью передвижения шагающей техники.

Эффективность шагающей машины — понятие, зависящее от её функционального предназначения и от оценки разработчиком или потребителем важности того или иного механического показателя.

Как правило, улучшение одних механических показателей шагающей машины приводит к ухудшению других её характеристик. Например: усложняя кинематическую схему двигателей можно добиться повышения профильной проходимости, маневренности и ряда других механических показателей, однако это приводит к усложнению системы управления и снижению надёжности машины; энергетически эффективные алгоритмы движения могут противоречить требованиям комфортабельности движения; требования экологичности в значительной степени противоречат требованиям грунтовой проходимости; и так далее.

Для шагающих машин характерно, что лишь сравнительно небольшая часть показателей определяется исключительно особенностями конструкции. Большинство показателей зависят не только от конструктивных особенностей, но и от реализуемых алгоритмов управления машиной. Например, для колёсных или гусеничных машин одной из основных характеристик является ширина колеи, которая определяется конструкцией машины и не меняется во время движения (лишь для некоторых тракторов предусматривается возможность регулирования ширины колеи в сравнительно небольших пределах). Для большинства шагающих машин само понятие колеи не имеет смысла, а ближайший его аналог — следовая

дорожка зависит от алгоритмов управления движителями и её ширина может меняться в значительных пределах во время движения.

Важность той или иной характеристики неразрывно связана с функциональным предназначением машины, а также с конкретной выполняемой задачей. Например: для сельскохозяйственных машин (шагающие опоры для дождевальная машины «Кубань») и машин, предназначенных для лесного хозяйства («Plustech»), наиболее важными являются экологические требования; для военных машин поддержки пехоты («BigDog») важны долгое время автономной работы и высокая проходимость; для человекоподобных роботов («Asimo») важна способность машины перемещаться в привычной для человека среде; для перевозки крупногабаритных грузов важнейшей характеристикой является комфортабельность движения; и так далее.

Поэтому при создании шагающих машин и при разработке алгоритмов и программ управления ими разработчику приходится решать задачу многокритериальной оптимизации. Методы многокритериальной оптимизации известны и широко применяются в различных областях науки. Однако для шагающих аппаратов научные исследования, учитывающие комплексное влияние различных показателей на итоговую эффективность машины, практически отсутствуют. Обычно рассматриваются задачи поиска оптимальных по тому или иному критерию законов управления при заданной структуре и параметрах машины (например, В. В. Лапшиным отдельно решались задачи оптимизации управления шагающих машин с целью снижения энергозатрат при движении, снижения времени при экстренной остановке и увеличения статической устойчивости; Ю.В. Болотиным решались задачи оптимального управления шагающего аппарата по критерию энергетической эффективности). Известны также работы, рассматривающие оптимизацию структуры шагающего аппарата или его параметров при заданных законах движения входных звеньев механизмов шагания (например, в работах Е. С. Брискина решались задачи использования дополнительных механизмов для увеличения проходимости и управляемости

шагающих машин).

Следовательно актуальным является разработка и исследование методов многокритериальной оптимизации применительно к шагающим аппаратам с учётом влияния на критерии качества и взаимосвязей между собой структуры, параметров и алгоритмов управления машиной.

Применение этих методов позволит обоснованно выбирать программные режимы движения, структуру и механические параметры шагающих машин как на этапе их разработки, так и во время использования.

**Цель исследования.** Разработка методов оптимизации структуры, параметров и алгоритмов управления движением шагающих машин на основе системы показателей, характеризующих их механическое состояние.

**Задачи исследования.**

1. Анализ и классификация шагающих машин и роботов, областей их применения, механических показателей, характеризующих их состояние и функциональные возможности. Постановка задач оптимизации параметров, структуры и алгоритмов управления движением шагающих машин.

2. Разработка теоретико-механических моделей шагающих машин, рассматриваемых как системы твёрдых тел, и программного обеспечения, включающего в себя методы моделирования динамики управляемого движения шагающих аппаратов, алгоритмы оптимизации их структуры и параметров.

3. Разработка методов многокритериальной оптимизации алгоритмов управления и законов движения шагающих машин со сдвоенными шагающими движителями.

4. Разработка методов структурно-параметрической многокритериальной оптимизации шагающих машин со сдвоенными шагающими движителями.

5. Разработка методов многокритериальной оптимизации структуры, алгоритмов управления и параметров шагающих машин со сдвоенными шагающими движителями.

**Методы исследования** базировались на основных положениях

теоретической механики, теории системного анализа, теории механизмов и машин. Для решения уравнений движения использовались аналитические и численные методы. **Достоверность результатов** обеспечивалась методами параметрической идентификации динамических систем на основании результатов экспериментов и проверкой разработанных моделей и алгоритмов на тестовых задачах, имеющих аналитические решения.

**Научная новизна работы** заключается в развитии теории управляемого движения механических систем на основе введённых функций механического состояния и определения на их основе оптимальных структуры, параметров и алгоритмов управления шагающих машин и состоит из следующих **положений, выносимых на защиту**:

- система механических показателей качества шагающих машин;
- функция механического состояния шагающей машины;
- теоретико-механическая модель и программное обеспечение, позволяющее осуществлять расчёт динамики управляемого движения шагающего аппарата;
- матрица управления, определяемая кинематической схемой машины и методами управления её приводами, являющаяся составной частью теоретико-механической модели;
- методика многокритериальной оптимизации структуры и алгоритмов управления движением шагающих машин со сдвоенными двигателями на основе методов вариационного исчисления;
- методика многокритериальной оптимизации структуры шагающей машины со сдвоенными двигателями и её параметров на основе методов поиска на многомерных кубах;
- методика многокритериальной оптимизации алгоритмов управления движением шагающих машин со сдвоенными двигателями на основе прямых методов задания программных движений;

- методы повышения эффективности шагающих машин на основе целенаправленного изменения показателей, определяющих функцию механического состояния машины.

**Реализация результатов работы и их практическая ценность.** Результаты работы использовались при разработке и испытаниях ряда образцов шагающих машин. При участии и поддержке ФГУП «Баррикады», ЦКБ «Титан», Института прикладной математики РАН, Института механики МГУ, Института машиноведения РАН созданы многоцелевое шагающее шасси, предназначенное для работы с различным технологическим оборудованием на слабых грунтах, шагающие опоры для дождевальная машины «Кубань», робототехнические комплексы «Восьминог», «Восьминог-М» (рисунок В.1), «Ортоног» (рисунок В.2) и несколько лабораторных образцов шагающих роботов. По своим показателям это машины разные, предназначены для различных отраслей хозяйства и могут использоваться при аварийно-спасательных работах в экстремальных условиях, при внедрении новых почвосберегающих технологий в лесном и сельском хозяйстве, в нефте- и газодобывающих отраслях и др.



Рисунок В.1 — «Восьминог»



Рисунок В.2 — «Ортоног»

Робот «Восьминог-М» и его разработчики, включая автора, отмечены золотыми медалями ВВЦ на 1-й и 2-й специализированных выставках «Робототехника» (Москва, 2004).

Практическая значимость работы состоит в том, что разработанные методы позволяют на этапе разработки шагающего аппарата осуществлять прогноз и оценку эффективности его использования в тех или иных условиях, и целенаправленно изменять показатели для повышения эффективности машины.

**Апробация работы.** Основные положения диссертации докладывались на:

- ежегодных науч.-техн. конференциях ВолгГТУ 1997–2014 гг. (Волгоград);
- Научн. шк.-конф. (с междунар. участием) 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004 гг. «Мобильные роботы и мехатронные системы» (МГУ, Москва);
- Междунар. науч.-практич. конф. 1999, 2002, 2005, 2009, 2013 гг. «Прогресс транспортных средств и систем» (Волгоград);
- VIII Всерос. съезд по теоретической и прикладной механике (2001);
- Науч. молод. школа «Интеллектуальные робототехнические системы» (ИРС-2001), пос.Дивноморское, 2001;
- Междунар. науч.-техн. конф. «Искусственный интеллект» (2002, п.Кацивели, Крым, Украина);
- 1-ой (2000 г.) и 2-ой (2003 г.) междунар. конф. «Проблемы механики современных машин» (Улан-Удэ);
- Вторая научная молодежная школа «Экстремальная робототехника» ЭР - 2003, пос.Дивноморское, 2003;
- XIII, XIV науч.-техн. конф. «Экстремальная робототехника» (СПбГПУ, ЦНИИ РТК, СПб, 2003, 2004 гг.);

- Всерос. науч.-техн. конф. с междунар. участ. «Мехатроника, автоматизация, управление», Владимир, 2004;
- 1-й и 2-й специализированных выставках «Робототехника» и междунар. семинарах «Робототехника и мехатроника» (ВВЦ, Москва, 2004);
- II, III науч. конф. «Проблемы динамики и прочности исполнительных механизмов и машин» (Астрахань, 2004, 2007);
- Девятой Всерос. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы защиты и безопасности. Экстремальная робототехника», СПб., 2006;
- Междунар. конф. по теории механизмов и механике машин (Краснодар, 2006);
- Междунар. н.-т. конф. «Мехатроника, автоматизация, управление» (МАУ`2007), Дивноморское, 2007;
- Междунар. науч.-техн. выставки-конгресса «Мехатроника и робототехника», Санкт-Петербург, 2007;
- XX междунар. науч.-техн. конф. «Экстремальная робототехника. Нано-, микро- и макророботы» (ЭР-2009), Дивноморское, 2009;
- XII всерос. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы защиты и безопасности», СПб., 2009;
- 7-й науч.-техн. конф. «Мехатроника, автоматизация, управление» (МАУ-2010), СПб., 2010;
- Междунар. науч.-техн. семинара «Робототехника. Взгляд в будущее», СПб., 2010;
- Междунар. конф. с элементами науч. школы для молодёжи «Экстремальная робототехника», СПб., 2010;
- Четвёртая Всероссийская мультikonференция по проблемам управления. МКПУ-2011, Дивноморское, 2011;

- XXV междунар. науч. конф. «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ–25», Саратов, 2012;
- Всерос. науч.-техн. конф. «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» – УТЭОСС-2012, СПб., 2012;
- Всерос. науч.-техн. конф. «Экстремальная робототехника», Санкт-Петербург, 2012, 2014;
- 4th, 5th and 6th Int. Conf. «Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR» (Karlsruhe, Germany, 2001, Paris, France, 2002; Catania, Italy, 2003);
- 13-th and 14-th CISM–IFTToMM Symposium «Theory and Practice of Robots and Manipulators. ROMANSY» (Zakopane, Poland, 2000; Udine, Italy, 2002);
- 11-th Int. Conf. on Advanced Robotics (ICAR 2003), (Coimbra, Portugal, 2003);
- The 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (Changchun, Jilin, China, 2009);
- 13th Int. Conf. on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines (Nagoya, Japan, 2010).
- The 3rd Joint International Conference on Multibody System Dynamics. The 7th Asian Conference on Multibody Dynamics, Busan, Korea, June 30 – July 3, 2014
- Advances on theory and practice of robots and manipulators: ROMANSY 2014 XX CISM-IFTToMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators (Moscow, 23-26 June 2014)
- научных семинарах в ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, институте механики МГУ, МГТУ им. Н. Э. Баумана, Юго-Западном государственном университете, ИПМех им. А.Ю.Ишлинского РАН, 2014 г.

**Участие в научно-исследовательских проектах.** Автор принимал участие в качестве исполнителя в проектах: РФФИ №№ 01-01-00521-а, 04-01-00410-а, 09-08-97016-р\_поволжье\_а, 11-08-00955-а, 11-08-97061-р\_поволжье\_а, 12-08-10002-к, 13-08-01144-а, 13-01-97057-р\_поволжье\_а, 13-08-10000-к, 14-08-01002-а, 14-08-97041-р\_поволжье\_а; ФЦП «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области создания и управления новыми видами транспортных систем / «Шагающие машины со спаренными ортогональными движителями» (2009-1.1-217-004)»

Под руководством автора был реализован проект ФЦП «Проведение научных исследований научными группами под руководством кандидатов наук / «Создание энергоэффективных шагающих движителей для наземных транспортных средств высокой проходимости» (2010-1.2.2-230-009)»

**Публикации.** Основные положения диссертации отражены в 108 публикациях, в том числе в 2 монографиях, 18 статьях в журналах по перечню ВАК, 3 патентах на изобретения, 6 программах для ЭВМ. Результаты работы также отражены в 16 научно-исследовательских отчётах, имеющих государственную регистрацию.

**В первой главе** выполнен анализ и предложена классификация шагающих машин и роботов, областей их применения. Предложена система механических показателей шагающих аппаратов, характеризующих их состояние и функциональные возможности. Построена функция механического состояния шагающего аппарата, основанная на системе показателей и предназначенная для формирования критериев при решении задач оптимизации алгоритмов движения, структуры и параметров шагающих машин.

**Во второй главе** разработаны теоретико-механические модели шагающих машин, рассматриваемых как системы твёрдых тел, и программное обеспечение, включающее в себя методы моделирования динамики управляемого движения шагающих аппаратов и методы расчёта значений механических показателей и

функции механического состояния машины. Проведена проверка разработанных теоретико-механических моделей на экспериментальных образцах шагающих машин.

**В третьей главе** разработаны методы оптимизации алгоритмов и законов управления шагающими машинами. Практическое применение разработанных методов иллюстрируется на примере шагающих машин «Восьминог» и «Ортоног».

**В четвёртой главе** разработаны методы структурно-параметрической оптимизации шагающих машин. Методы изменения структуры включают в себя добавление новых механизмов или звеньев механизмов, изменение числа степеней свободы механизмов, удаление или отключение механизмов или приводов.

**В пятой главе** разработаны методы структурно-алгоритмической оптимизации шагающих машин. Изменение структуры шагающей машины в ряде случаев требует не столько оптимизации параметров, сколько разработки новых алгоритмов управления.

# **1. Система механических показателей качества шагающих машин**

## **1.1. Анализ и классификация шагающих машин и областей их использования**

### **Классификация машин, передвигающихся с помощью ног**

Первые попытки изготовления шагающих машин предпринимались ещё до нашей эры [202], а в настоящее время количество известных образцов шагающих аппаратов исчисляется несколькими сотнями, большинство из которых были изготовлены в единственном экземпляре. Огромное разнообразие кинематических схем, конструктивных решений и методов управления шагающими машинами затрудняет их классификацию. Даже сам термин «шагание», несмотря на его кажущуюся очевидность, разные исследователи определяют по-разному, что приводит к разногласию по вопросу того, какие машины следует относить к шагающим «по-настоящему», а в каких случаях предпочтительнее использовать какую-то другую терминологию [15, 104, 195, 202].

Определяющей особенностью аппарата, позволяющей вообще говорить о шагании является наличие специальных механизмов (ног, механизмов шагания, педипуляторов), которые обеспечивают передвижение машины в результате дискретного взаимодействия с опорой. Под дискретным взаимодействием понимается ситуация когда существуют моменты времени, в которые механизм находится в контакте с опорой, и моменты времени, в которые механизм с опорой не взаимодействует.

С помощью ног могут реализовываться локомоции различных типов. *Ходьбой* называется такой тип движения машины, при котором в каждый момент времени хотя бы один механизм шагания находится в опоре. Если существуют такие моменты времени когда ни одна из ног машины не контактирует с опорой,

то такие движения называются *прыжками*, *скачками* или *бегом* [15, 195]. Если фаза движения машины с опорой на ноги перемежается фазой покоя, в которой машина неподвижно лежит на опорной поверхности, то такое движение называется *ползанием*. Ходьба, прыжки, скачки, бег и ползание предполагают что связи ног с опорной поверхностью является неудерживающими. Однако ноги могут быть снабжены специальными устройствами — захватами, присосками и т.п., позволяющими аппарату реализовывать удерживающие связи с опорной поверхностью. Тип движения такого аппарата называется *лазанием*.

По принципу типа взаимодействия с опорной поверхностью предлагается следующая классификация машин, передвигающихся с помощью ног (рисунок 1.1).



Рисунок 1.1 — Классификация машин, передвигающихся с помощью ног

**Псевдошагающие** машины имеют механизмы внешне похожие на ноги, которые во время движения не отрываются от опорной поверхности. Другими словами, такие машины только имитируют процесс шагания. Например, так устроены модели шагающих слонов (рисунок 1.2), а также многочисленные игрушки.

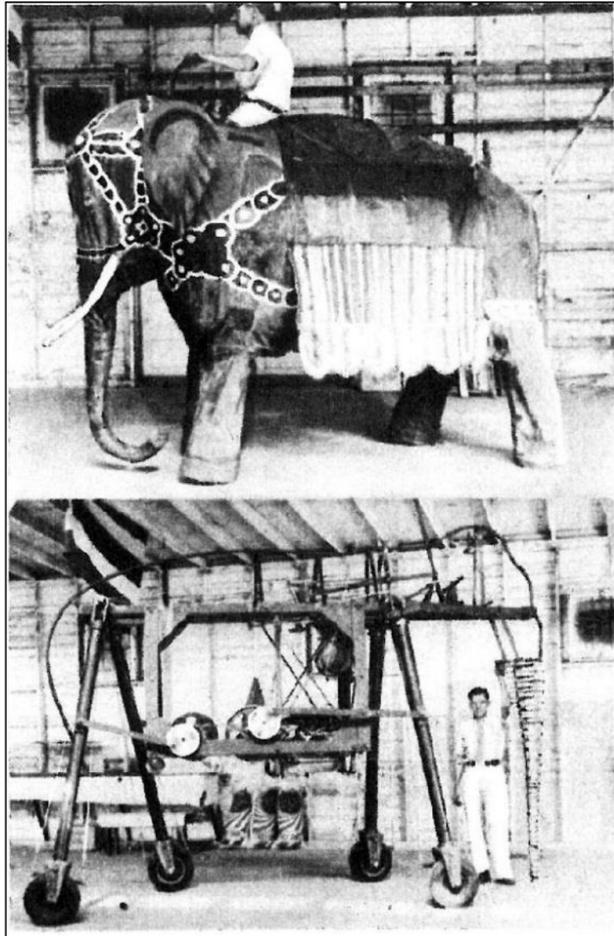


Рисунок 1.2 — Механический слон J.G. and George W. Shrum, США, 1937 г.

К классу **шагающих машин с дополнительными опорами** относятся аппараты, которые имеют кроме дискретно взаимодействующих с опорной поверхностью шагающих движителей дополнительные механизмы, постоянно контактирующие с опорой. Необходимость в использовании дополнительных опор обычно возникает тогда, когда шагающих движителей не достаточно для обеспечения устойчивости машины. Чаще всего с этой целью к шагающему аппарату прикрепляется колёсная тележка (рисунки 1.3-1.8) [40, 202, 211, 445].

Такие машины используются для демонстрации шагающего принципа передвижения или для отладки систем управления и отдельных узлов шагающих машин. Для практического применения такие машины обычно не годятся, так как почти не имеют преимуществ перед колёсными машинами.



Рисунок 1.3 — Современная копия лошади с повозкой, разработанной в Китае ориентировочно в 230 г до н.э.

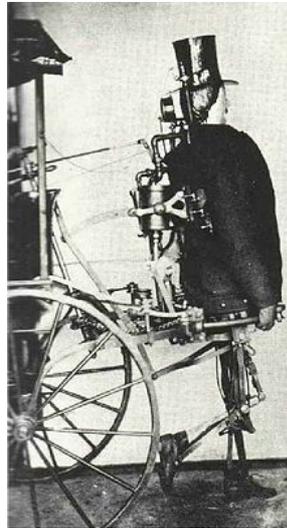


Рисунок 1.4 — Steam Man, Zadoc P. Dederick, 1868 г.



Рисунок 1.5 — Паровая лошадь, Франция, 1875 г.



Рисунок 1.6 — Электрическая лошадь, Vogart, США, 1951 г.

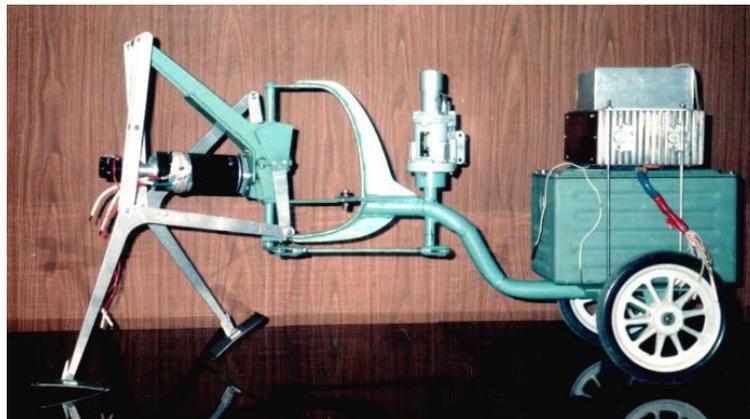


Рисунок 1.7 — Робот «Рикша», ВолГГТУ, Россия, 1995 г.

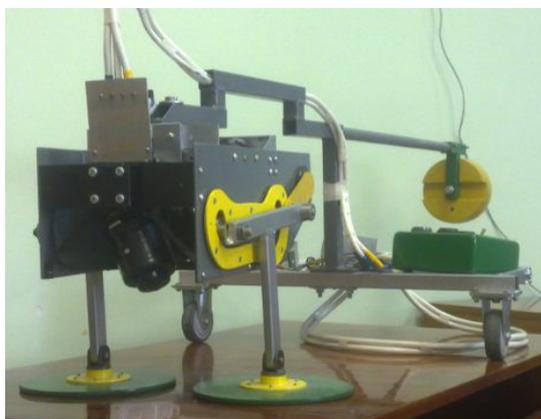


Рисунок 1.8 — Робот «Циклон», ВолГГТУ, Россия, 2012 г.

Преимущества шагающей техники перед колёсной проявляются в классах **3** и **4** (рисунок 1.1).

**Шагающие машины с движителями циклового действия** характеризуются тем, что опорные точки механизмов шагания движутся по одним и тем же траекториям относительно корпуса машины, и не решают задач адаптации к грунту и выбора точек постановки ног на грунт. Такие машины имеют лучшую по сравнению с колёсными грунтовую проходимость за счёт меньшего сопротивления движению со стороны грунта, лучшего сцепления с опорной поверхностью, больших возможностей по снижению давления на грунт. Примеры машин с цикловыми движителями: стопоходящая машина П. Л. Чебышева (рисунок 1.9) [180, 452], шагающие опоры для дождевальной машины «Кубань» (рисунок 1.10) [205, 207, 208], транспортно-технологическая шагающая машина «Восьминог» (рисунок В.1) [206], шагающий болотоход (рисунок 1.11) [286, 287, 450]. Основным достоинством машин с цикловыми шагающими движителями по сравнению с другими шагающими машинами является простота их конструкции и управления.

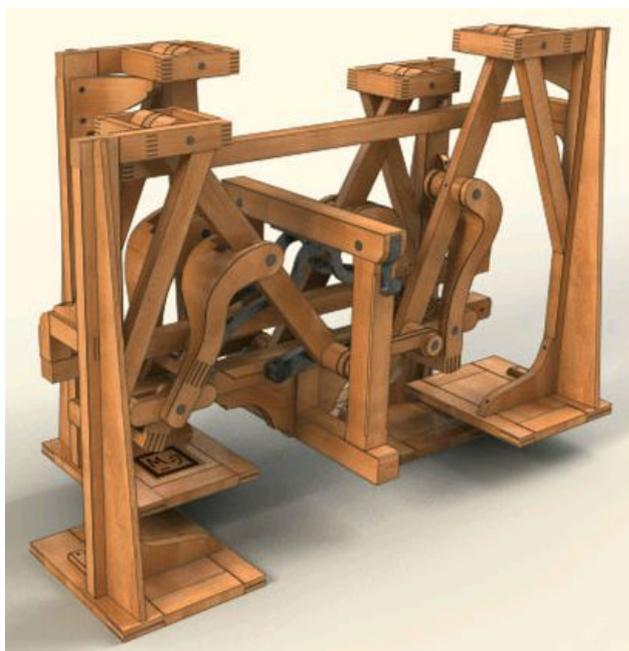


Рисунок 1.9 — Стопоходящая машина П. Л. Чебышева (1878 г.)

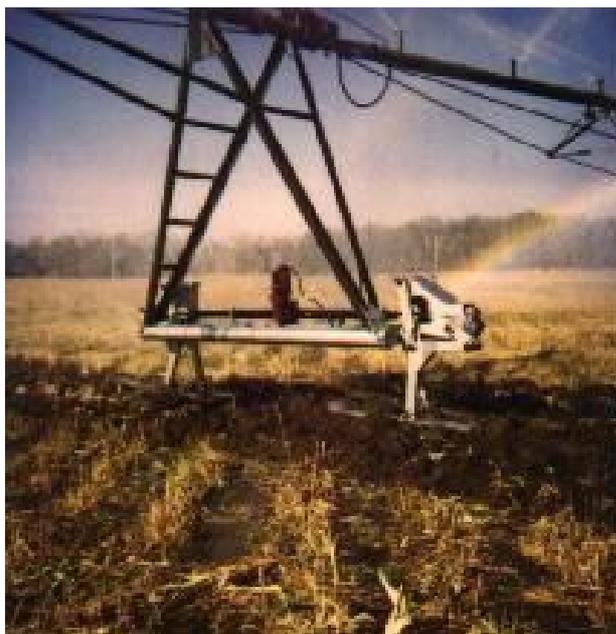


Рисунок 1.10 — Шагающая опора для дождевальной машины «Кубань» (1995 г.)



Рисунок 1.11 — Шагающий болотоход БШМ-1 (2012 г.)

Наиболее же полно достоинства шагающих машин раскрываются в аппаратах с движителями, обеспечивающими произвольное движение опорной точки и, следовательно, **произвольную следовую дорожку**, а также адаптацию стопы к грунту, произвольный закон изменения скорости стопы как на этапе взаимодействия с грунтом, так и на этапе переноса. Такие машины значительно превосходят традиционные транспортные средства не только в грунтовой, но и в

профильной проходимости. А их основным недостатком является сложность конструкции и системы управления. Это наиболее многочисленный и разнообразный класс шагающих машин, и большинство последующих примеров за исключением особо оговоренных случаев относится к нему.

**Колёсно-шагающими машинами** традиционно называют класс аппаратов, в которых стопами шагающих движителей служат колёса. Такие машины могут работать в двух режимах: в режиме колёсной машины и в шагающем режиме. В первом случае шагающие движители блокируются, и машина движется только с использованием колёс. Во втором случае машина осуществляет шагание, отрывая поочередно колёса от грунта и переставляя их на новое место. При этом колёса, находящиеся в контакте с грунтом, могут как блокироваться, так и вращаться согласованно с движением опорных ног. Примерами таких машин являются (рисунки 1.12-1.15): колесно-шагающий аппарат разработки ВНИИТМ (Ленинград, СССР, под руководством д.т.н. М.И.Маленкова) [449], робот ATHLETE (США), колёсно-шагающий экскаватор Kaiser (Германия), колёсно-шагающий аппарат ALDURO (Германия) [350, 386] и ряд других разработок, преимущественно в коммерческих фирмах [204].

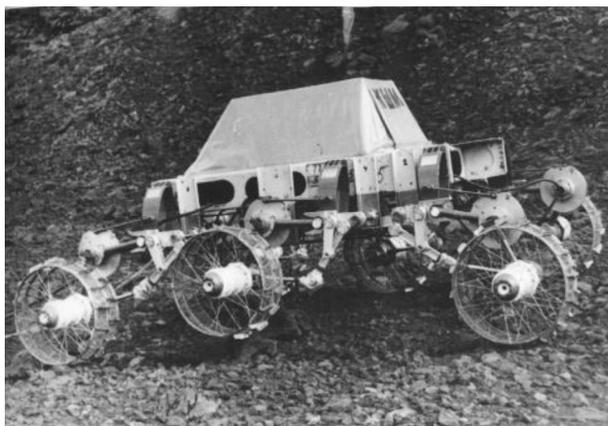


Рисунок 1.12 — Колёсно-шагающий аппарат ВНИИТМ (СССР), разрабатывавшийся для исследования других планет



Рисунок 1.13 — Колёсно-шагающая машина ATHLETE (США)



Рисунок 1.14 — Колёсно-шагающий экскаватор Kaiser (Германия)



Рисунок 1.15 — Колёсно-шагающий робот ALDURO (Германия)

Некоторые примеры **прыгающих и бегающих машин** [202, 302, 303, 376, 400, 446] представлены на рисунках 1.16-1.19. Следует отметить, что машины способные реализовывать с помощью ног прыжки или бег, обычно способны и к ходьбе.

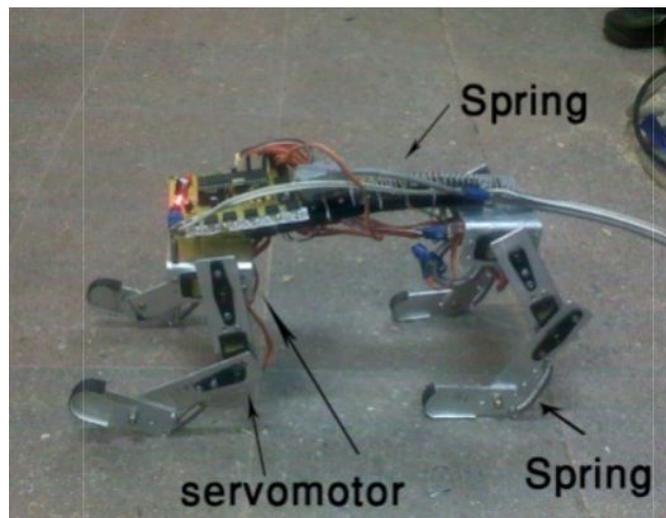


Рисунок 1.16 — Бегающий и прыгающий Tiger robot (Иран)



Рисунок 1.17 — Одноногий прыгающий Monopod Hopper (США)



Рисунок 1.18 — Прыгающий X-RHex (США)



Рисунок 1.19 — Big Dog (США).

К **машинам ползущего типа** согласно выше приведённому определению относятся большинство так называемых шагающих экскаваторов (рисунок 1.20). Не смотря на слово «шагающий» в названии, такие машины перемещаются, приподнимаясь с помощью ног, и лежат на днище во время перестановки ног в новое положение.



Рисунок 1.20 — Механизм шагания экскаватора ЭШ6/45

**Лазающие** машины представлены, например, роботами, показанными на рисунках 1.21-1.24 [89, 301, 304, 334, 378, 379, 401]. Не смотря на то, что

принципы управления ногами лазающих и шагающих машин во многом похожи, специфика взаимодействия с опорной поверхностью и области применения этих классов машин настолько сильно различаются, что сравнение их показателей (за исключением общетехнических) становится практически бессмысленным. Следует также отметить, что многие ползающие и лазающие роботы вообще не имеют ног или какого-то их подобия, перемещаясь например за счёт движений гибкого корпуса.



Рисунок 1.21 — Лазающий робот с электростатическим сцеплением (Италия)

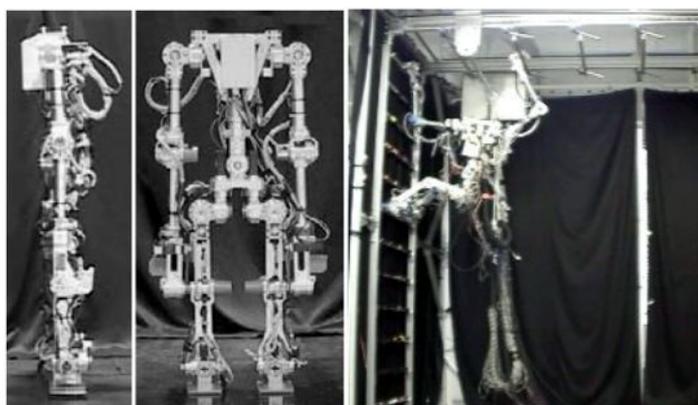


Рисунок 1.22 — Лазающий робот с механическими захватами Gorilla III (Япония)

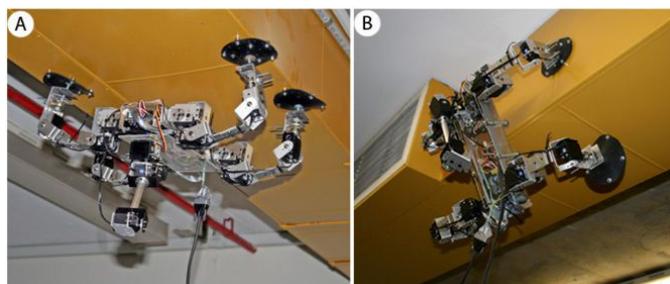


Рисунок 1.23 — Лазающий робот с магнитным сцеплением (США)



Рисунок 1.24 — Лазающий робот LitleAre с крючковыми захватами (Германия)

Таким образом из всего разнообразия аппаратов, передвигающихся с помощью ног, в качестве шагающих следует рассматривать только машины относящиеся к классам **3** и **4**, а также, с некоторыми оговорками, к классам **2** и **5**.

### **Области применения шагающих машин**

Подавляющее большинство известных образцов шагающих машин — это лабораторные макеты, предназначенные для проведения исследований и отработки технологий. Несмотря на то, что ещё 30–35 лет назад ставилась задача разработки шагающих машин предназначенных для эксплуатации [6, 8, 101, 102, 103, 130, 159, 195, 201, 299, 312], количество действующих образцов шагающих машин, способных выполнять работы в реальных условиях эксплуатации, исчисляется единицами [202, 433].

Большинство разработок крупногабаритных шагающих машин, способных выполнять транспортно-технологические операции, замещая традиционные колёсные и гусеничные средства, — это дорогостоящие проекты. Высокая стоимость шагающих роботов является одним из основных сдерживающих факторов, препятствующих широкому использованию шагающих машин. Возможности снижения стоимости шагающих роботов рассмотрены в работе [314].

Достоинства шагающих машин проявляются в задачах транспортировки

грузов в условиях бездорожья [1, 101, 188, 198, 253, 269, 275, 276, 283, 284]. При движении в сложных условиях машины с шагающими движителями могут быть более эффективными в сравнении с традиционными транспортными средствами. Использование шагающего способа передвижения дает качественный рост ряда основных показателей транспортных машин по сравнению с колесными и гусеничными движителями [6, 70, 195, 201, 198, 213]. Имеют место принципиально более высокие возможности по адаптации к опорной поверхности и профильная проходимость [3, 6, 70, 213, 296], высокая маневренность, допускающая перемещение машины в произвольном направлении и повороты на месте [11, 293, 339], возможность работы на слабых грунтах [220, 261], возможность управления опорными реакциями и стабилизации положения корпуса при движении [77, 280, 294].

Высокая грунтовая проходимость и щадящее по сравнению с колесным и гусеничным транспортом воздействие на почву определяют целесообразность использования шагающих машин при движении по слабым грунтам и легко разрушаемому почвенному покрову в болотистой местности, тундре, пустынях и полупустынях, в лесу и в горах [62, 144, 187, 220].

Такие машины предполагается использовать, например, для ремонтных работ на участках нефте- и газопроводов, проложенных на труднопроходимой территории [56, 177, 178, 269]. Предполагается использование шагающих робототехнических комплексов для аварийно-спасательных работ в экстремальных условиях и ликвидации последствий природных и техногенных катастроф [56, 263]. Имеется опыт проведения с помощью шагающих машин ремонтно-восстановительных работ на очистных сооружениях промышленных предприятий [263]. Условия применения роботов при устранении последствий чрезвычайных ситуаций описаны в работе [12]. Там же сформулированы общие технические требования к роботам, работающим в экстремальных условиях и приведена классификация роботов по массово-геометрическим параметрам.

Важное значение имеет использование шагающих машин для проведения научных исследований в условиях, непроходимых для традиционных транспортных средств, например, для исследования кратеров вулканов [340], для проведения исследований на поверхности других планет [160, 210, 213, 373, 455].

Возможно применение шагающих аппаратов в военных целях [312, 322, 335], для транспортировки грузов, контроля последствий ядерного, химического и биологического нападения, разведки, постановки дымовой завесы, разборки разрушенных зданий и проведения спасательных операций в городах после ядерной бомбардировки или стихийных бедствий. Исследуются возможности применения шагающих движителей для боевых машин. Шагающие машины могут оказаться незаменимыми для устранения последствий военных действий, например, для поиска и разминирования мин [138, 292, 295, 347, 354, 386, 388, 425, 426].

Перспективно использование машин с шагающими движителями при внедрении новых почвосберегающих технологий в лесном и сельском хозяйстве [33, 34, 157, 219, 241, 256, 265, 457] благодаря дискретному взаимодействию стоп с грунтом, что значительно уменьшает разрушение экологически ранимого почвенного покрова. Особенно эффективны шагающие машины в поливном земледелии [32, 187, 225] за счёт их высокой грунтовой проходимости.

Существуют шагающие роботы, предназначенные для передвижения в ограниченном пространстве, например, внутри труб [24] и для вертикального перемещения [88].

Отдельное направление представляют шагающие роботы, предназначенные для домашнего сервиса, отдыха, медицины [9, 333, 416]. Их отличительной особенностью является адаптация к условиям, предназначенным для человека.

С точки зрения механики и управления движением области применения шагающих машин классифицируются по характеру и размеру преодолеваемых препятствий (рисунок 1.25). Можно выделить движение на местности без

значительных препятствий; движение на местности, где препятствия преимущественно представлены ямами или запрещёнными для наступания зонами; движение на местности, где препятствия представляют собой разного рода выступы (камни, брёвна и т. п.); движение в ограниченном пространстве; движение в среде, предназначенной для человека.

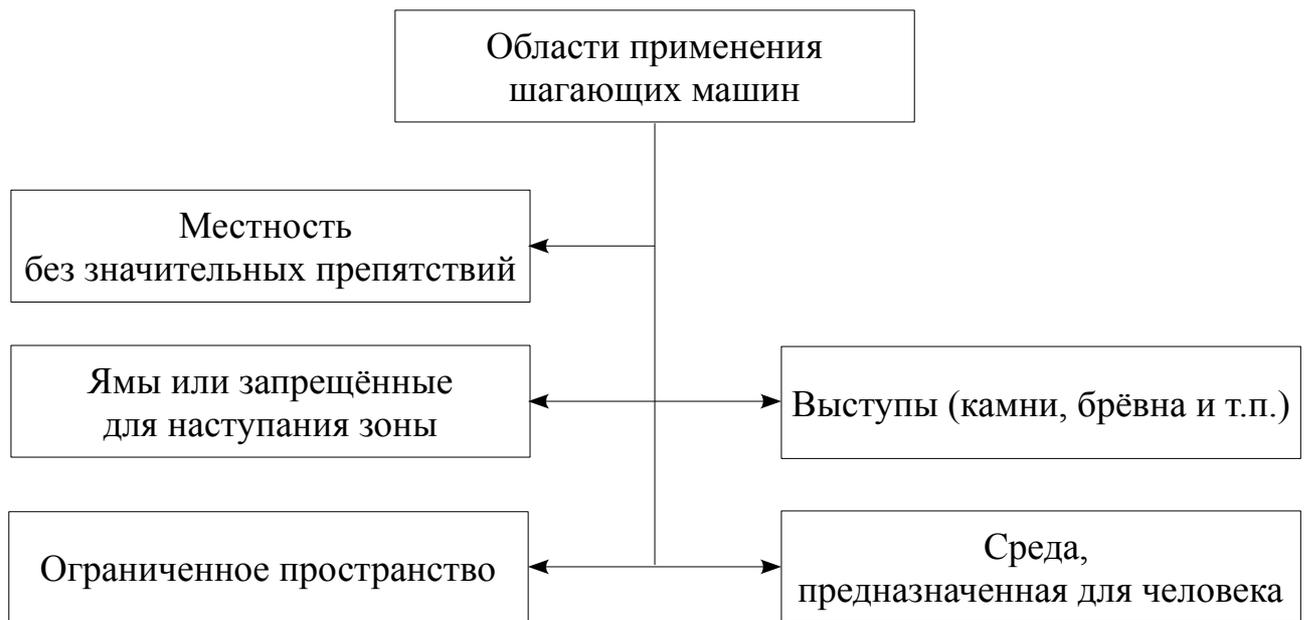


Рисунок 1.25 — Классификация областей использования шагающих машин

Конкретные условия в рамках этих классов могут значительно различаться, но основные требования к проходимости и необходимому числу степеней свободы в рамках каждого класса близки друг к другу. Машины способные перемещаться в более сложных условиях могут двигаться и в более простых. Поэтому отнесение конкретной машины к тому или иному классу определяется наиболее сложными условиями, для работы в которых эта машина предназначена.

**Ограниченное пространство** представляет собой область движения машины, в которой препятствия и проходы сравнимы с размерами машины. Преодоление таких препятствий связано с необходимостью забираться на них и спускаться с них, обход препятствий затруднён или невозможен, из множества доступных для машины законов движения корпуса и ног лишь небольшая часть

удовлетворяет критерию отсутствия столкновений с препятствиями. Такие условия характерны для зон природных и техногенных катастроф, движения в густом лесу, в горах, внутри различных объектов искусственного происхождения. В этих условиях предъявляются наиболее строгие требования к проходимости машин, здесь сильнее всего проявляются преимущества шагающих машин перед машинами с традиционными двигателями.

**Среда, предназначенная для человека** представляет собой частный случай ограниченного пространства, выделение которого в отдельный класс связано с его особой важностью и распространённостью. Типичными задачами здесь являются движение по стандартным лестницам, проход в дверные проёмы стандартных размеров, движение по коридорам стандартной ширины.

Средой с препятствиями типа **выступов** считается местность, которая содержит большое количество различных препятствий, но эти препятствия не создают ограниченного пространства, то есть большинство потенциально доступных для машины движений не приводят к столкновениям с препятствиями. Примерами таких условий являются редколесье, завалы камней, валы, овраги и тому подобное.

Местность, где препятствия представлены преимущественно **ямами или зонами, запретными для наступания**, отличается от предыдущего случая тем, что необходимость специального учёта возможностей столкновения с препятствиями при синтезе программных движений машины практически отсутствует. Типичным способом преодоления препятствий в таких условиях является перешагивание или обход препятствий. На такой местности полностью отсутствуют или имеются в небольшом количестве выступающие препятствия, не представляя существенных сложностей для их обхода. Примером таких условий является минное поле с известными расположениями мин.

**Местность без значительных препятствий** — это территория, по которой шагающая машина может перемещаться без необходимости преодолевать

препятствия, сравнимые по размерам с машиной. Неровности грунта могут быть либо достаточно мелкими (кочки), либо достаточно крупными (холмы), чтобы к показателям профильной проходимости не предъявлялись особые требования. Значительные препятствия могут присутствовать, но в единичных количествах, так, чтобы прокладка трассы в обход этих препятствий не представляла особых сложностей. Необходимость в использовании шагающих машин в подобных условиях определяется трудностями грунтовой проходимости или экологическими требованиями. Примерами такой местности являются: пески, болота, размытые грунтовые дороги, сельскохозяйственные угодья и тому подобное.

### **Классификация шагающих машин**

Классификация шагающих машин возможна по различным конструктивным и эксплуатационным признакам. Наиболее важные признаки классификации показаны на рисунке 1.26.

По своим возможностям проходимости шагающие машины можно условно разделить на машины грунтовой и профильной проходимости.

Машины грунтовой проходимости предназначены для преодоления препятствий, несоизмеримых с габаритами машины. Это могут быть как очень маленькие препятствия (кочки), так и очень большие (холмы). Типичной областью применения таких машин является местность без значительных препятствий. А также с некоторыми ограничениями такие машины могут использоваться в условиях, где препятствия представлены ямами или выступами.

Машины профильной проходимости обеспечивают преодоление препятствий, сравнимых по размерам с габаритами машины. Машины профильной проходимости способны работать в более сложных условиях ограниченного пространства, эффективно преодолевать выступы и впадины, однако это достигается за счёт усложнения самой машины, шагающих движителей и системы управления.



Рисунок 1.26 — Схема классификации шагающих машин

По реализуемым режимам движения шагающие машины делятся на статически и динамически устойчивые. Статически устойчивый режим движения реализуется в случае, если в каждый момент времени замороженная конфигурация машины находится в статическом устойчивом равновесии [147, 195]. Под замороженной конфигурацией понимается твёрдое тело, получающееся при жёсткой фиксации ног относительно корпуса в том положении, в котором они находятся в рассматриваемый момент времени. Если контакт ног с опорной поверхностью носит точечный характер, то выполнения условий устойчивого статического равновесия в каждый момент времени в опоре должно находиться не менее трёх ног, не лежащих на одной прямой и образующих, таким образом, опорный многоугольник.

По количеству ног шагающие машины можно разделить на машины с небольшим числом ног (двуногие и трёхногие) и многоногие (с четырьмя и более ногами). Это деление оправдано тем, что для многоногих машин возможны принципиально другие подходы к проектированию и управлению, чем для двуногих [15, 185]. Принципиально различны и функциональные возможности этих машин. В свою очередь, многоногие машины можно разделить на четырёхногие, пятиногие, шестиногие и т.д. В теоретических исследованиях часто рассматривается общий случай — с  $n$  ногами. Из соображений симметрии подавляющее большинство шагающих аппаратов имеет чётное количество ног — четыре, шесть или восемь. Однако иногда рассматривается движение аппаратов с нечётным количеством ног, особенно для машин, допускающих реконфигурацию их кинематических схем [43, 331, 405].

По конструкции корпуса машины делятся на моноблочные и составные. Большинство шагающих машин имеет моноблочный корпус, но известны и аппараты, имеющие корпус из нескольких твёрдых тел (рисунки 1.10, 1.27, 1.28), соединённых управляемыми или неуправляемыми связями [30, 189, 332].

По конструкции шагающих движителей машины классифицируются в зависимости от типа механизмов шагания и в зависимости от типа стопы. Следует оговориться, что эта классификация включает в себя только «базовые» механизмы шагания. Хотя большинство разработанных шагающих аппаратов укладывается в эту классификацию, некоторые лабораторные модели могут использовать «упрощённые» механизмы, получающиеся из «базовых» путём исключения одной из степеней свободы. С другой стороны, движители наиболее совершенных образцов шагающей техники содержат большее количество степеней свободы и звеньев.

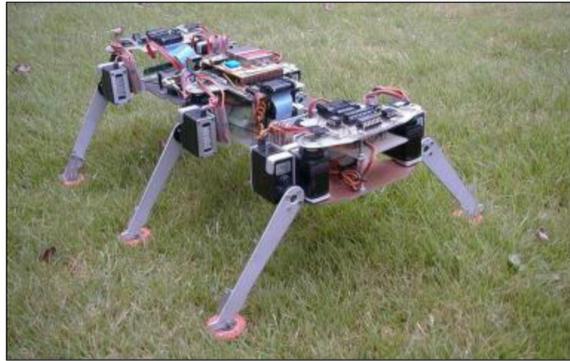


Рисунок 1.27 — Робот IOAN с «ломающимся» корпусом. Свободный Университет Брюсселя. Бельгия



Рисунок 1.27 — Лазающий робот с составным корпусом. Корея

Под стопой понимается звено или несколько звеньев механизма шагания, специально предназначенных для контакта с опорной поверхностью. Неуправляемая стопа представляет собой стопу, присоединённую к основной части механизма шагания шарниром того или иного вида без какого-либо

активного управления по степеням свободы этого шарнира. Управляемой стопой считается стопа, движение которой относительно основной части движителя управляется одним или несколькими двигателями. Однако, граница между управляемой стопой и движителем без стопы является условной, ведь при отсутствии стопы её функция контактировать с опорной поверхностью перекладывается на крайнее звено механизма шагания, которое в таком случае и может считаться управляемой стопой. Поэтому выделять отдельное звено механизма как управляемую стопу или считать, что шагающий движитель стопы не имеет, в каждом конкретном случае должен решать исследователь, ориентируясь, главным образом, на удобство терминологии.

**Инсектоморфные механизмы шагания** состоят из трёх твёрдых тел, соединённых друг с другом и с корпусом машины с помощью цилиндрических шарниров таким образом, что первое звено (и вместе с ним весь механизм) вращается относительно корпуса вокруг вертикальной оси, оси вращения второго звена относительно первого и третьего относительно второго расположены горизонтально и параллельно друг другу (рисунок 1.29). Обычно на шагающих аппаратах используют шесть или восемь безстопных ног такого типа. Локомоции таких аппаратов напоминают движения представителей биологических классов насекомых и пауков.

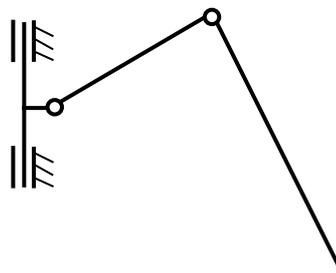


Рисунок 1.29 — Инсектоморфный механизм шагания

Так же как и в животном мире насекомые и пауки являются наиболее многочисленными по видовому составу, шагающие машины с инсектоморфными движителями лидируют по количеству разработок. Далее представлены лишь некоторые примеры машин такого типа.

В начале 70-х годов одни из первых образцов шагающих роботов с инсектоморфными движителями были созданы в Советском Союзе в Институте механики МГУ под руководством профессора Е. А. Девянина (рисунок 1.30) и в Институте прикладной математики Академии Наук СССР под руководством академика, в то время члена-корреспондента, Д. Е. Охоцимского (рисунок 1.31) [202].

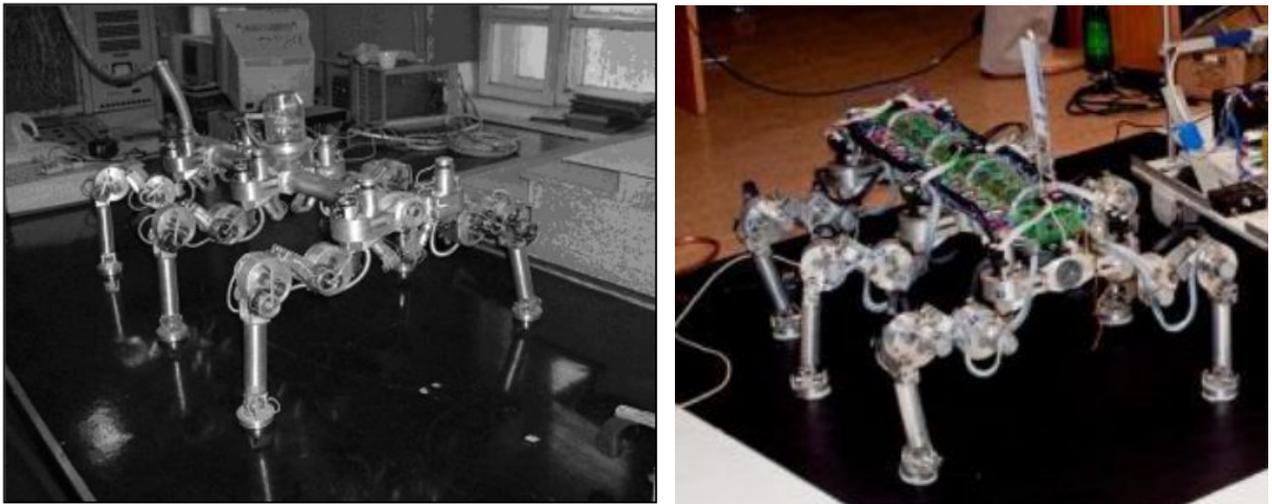


Рисунок 1.30 — Робот МАША, Институт Механики МГУ.

Первая (1975 г.) и современная версии.

Робот МАША (МАшина ШАгающая) Института механики МГУ создавался совместно с Институтом проблем передачи информации АН СССР. На первом этапе система управления была реализована на универсальных аналоговых вычислительных машинах. Система управления включала в себя триангуляционный дальномер, датчики измерения сил реакций опорной поверхности, датчик гировертикали. Длина аппарата 0,7 м, масса 18 кг. В автоматическом режиме аппарат способен обходить и преодолевать препятствия, в том числе препятствия типа «лестница» [93, 94, 95, 100]. Разработаны и экспериментально исследованы вопросы управления движением аппарата по деформируемому грунту [294]. Работы продолжаются и в настоящее время.

Несколько моделей шагающих машин были разработаны в Институте прикладной математики АН СССР совместно с рядом других научных

организаций. Показанный на рисунке 1.31 аппарат имеет следующие технические характеристики: длина 0,6 м, масса 56 кг (из них 16 кг приходится на оптическую информационную систему), скорость движения 0,2 м/сек. Аппарат оснащён оптической информационной системой с использованием сканирующего светолокационного дальномера. На рисунке 1.32 показана машина НМША (Натурный Макет Шагающего Аппарата), которая была способна нести человека-оператора. Её масса 750 кг, скорость движения 0,7 км/ч, грузоподъёмность 50 кг, дорожный просвет 1,5 м. Аппараты испытаны в режимах супервизорного управления и в автоматическом режиме при обходе препятствий и перелезании через препятствия [194, 195]. Исследования продолжаются и в настоящее время (рисунок 1.33).

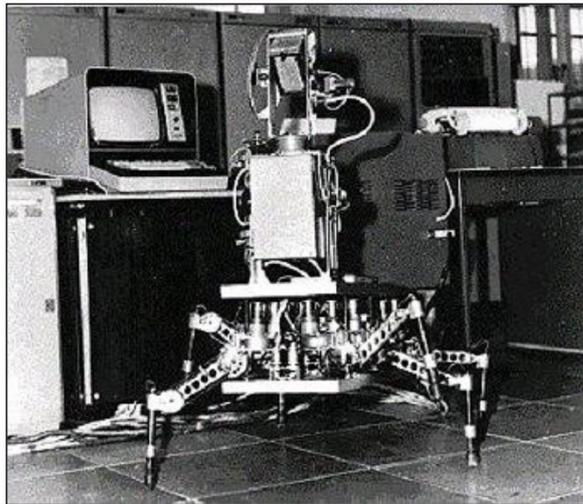


Рисунок 1.31 — Шагающий робот ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР, 1975 г.

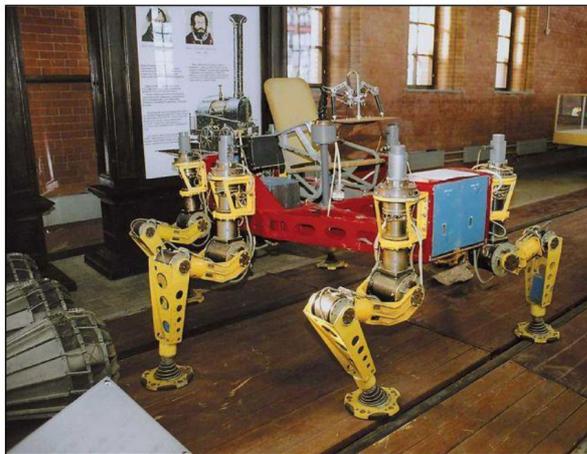


Рисунок 1.32 — Аппарат НМША, ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1975 г.



Рисунок 1.33 — Современная версия шагающего робота ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2009 г.

Современные аппараты снабжаются сложной системой управления, техническим зрением и другими датчиками позволяющими роботам автономно в автоматическом режиме. Небольшие роботы обычно приводятся в движение электроприводом (рисунки 1.34, 1.36-1.38, 1.40). Но для машин массой несколько тонн чаще используется гидропривод (рисунки 1.35, 1.39). Также особенностью массивных машин является обязательное использование стоп, обычно неуправляемых, в то время как на небольших роботах стопы используются сравнительно редко.

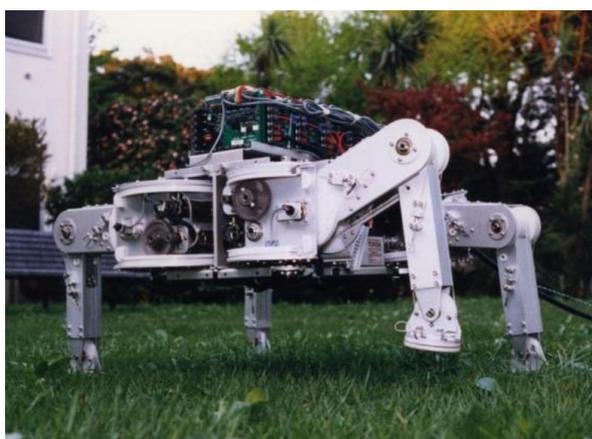


Рисунок 1.34 — Titan 8. Япония



Рисунок 1.35 — Titan 11. Япония



Рисунок 1.36 — Lauron 4. Университет Карлсруэ. Германия

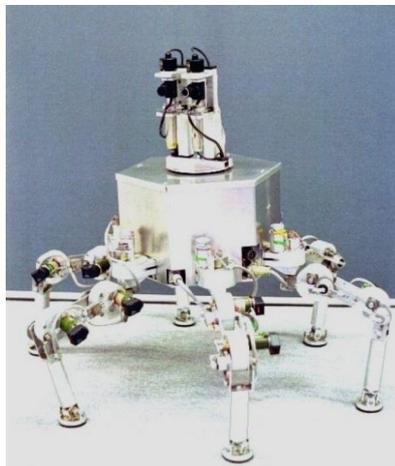


Рисунок 1.37 — Katharina. Магдебург. Германия



Рисунок 1.38 — Средние шагающие роботы Silo 4 и Silo 6.



Рисунок 1.39 — Робот MANTIS. Великобритания

**Зооморфные механизмы шагания** аналогично инсектоморфным механизмам состоят из трёх твёрдых тел, соединённых друг с другом и с корпусом машины с помощью цилиндрических шарниров, и отличается от последних тем, что ось вращения первого звена расположена горизонтально и перпендикулярно осям остальных двух шарниров (рисунок 1.41). Движения таких механизмов подобны движениям животных биологического класса тетрапод. Чаще всего на шагающих аппаратах используют четыре ноги такого типа, хотя иногда применяется и шесть ног. Почти всегда ноги снабжаются неуправляемыми стопами.

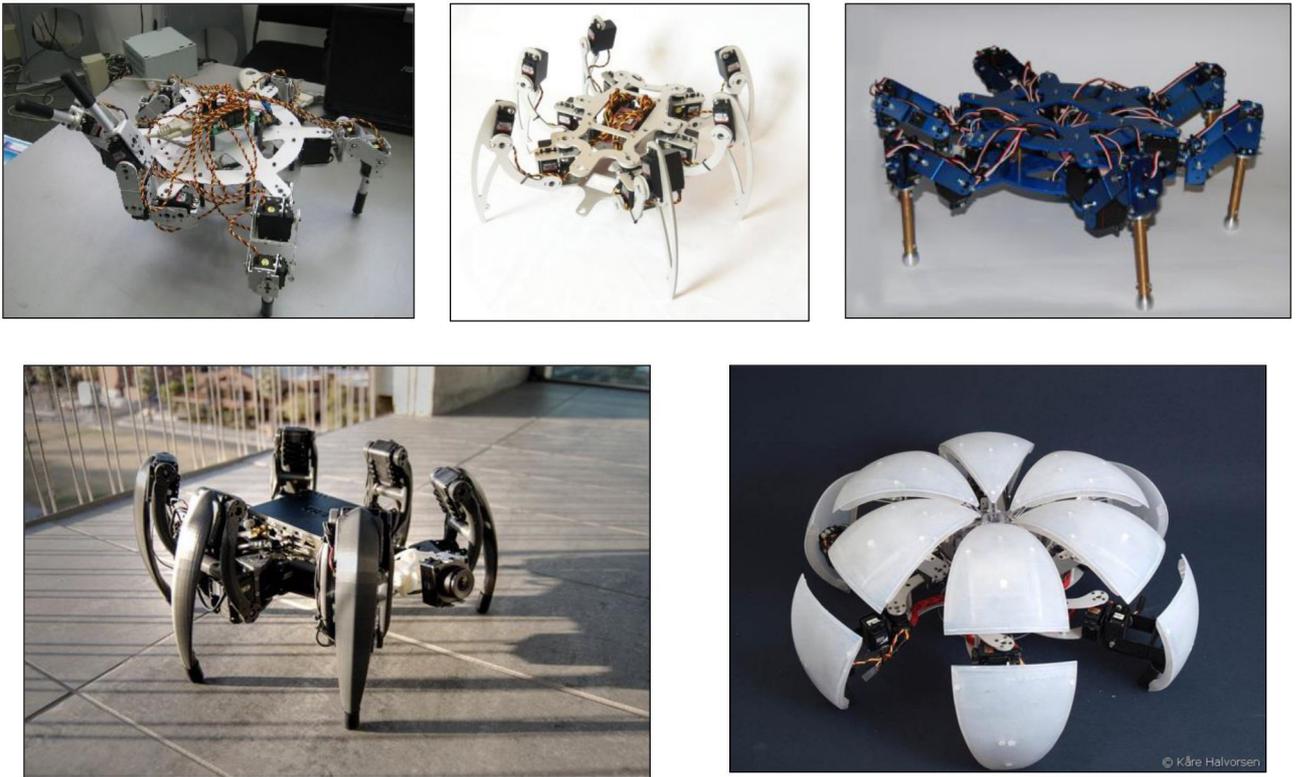


Рисунок 1.40 — Гексаподы для лабораторных исследований

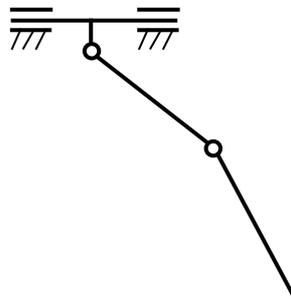


Рисунок 1.41 — Зооморфный механизм шагания

Одной из первых шагающих машин с зооморфными движителями является разработанная в 1969 году в США фирмой «General Electric» четырёхногая машина высотой 3,5 м, весом 1350 кг и грузоподъемностью 300 кг (рисунок 1.42). Эта машина работала в копирующем режиме, для чего в системе управления были использованы двусторонние силовые обратные связи, благодаря которой оператор чувствовал усилие, развиваемое ногой машины. Испытания показали трудности обучения операторов. Кроме того, оператор при управлении движением машины испытывал большую мышечную и нервную нагрузку, сохраняя

работоспособность всего в течение нескольких минут [384, 403, 422]. Основным итогом этой работы была демонстрация необходимости автоматической системы управления, обеспечивающей координацию движения ног и устойчивость машины.

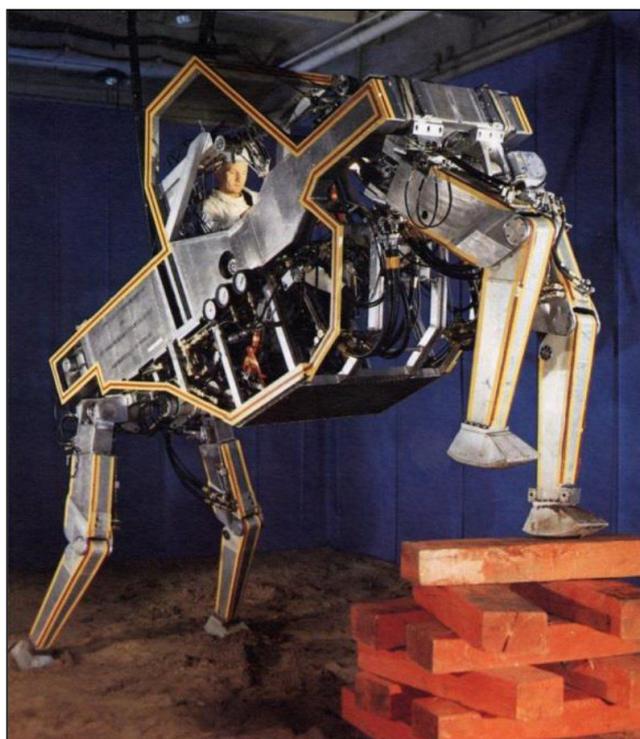


Рисунок 1.42 — Шагающая машина General Electric, США, 1969 г.

На водителя шагающей машины, так же как и на водителя традиционного транспортного средства, следует возлагать только самый верхний уровень управления — управление движением машины в целом, а не приводов каждой ноги. Управление должно происходить аналогично действиям всадника, который задает лошади направление и скорость движения, а лошадь сама обеспечивает координацию движения ног и адаптацию к неровностям опорной поверхности [100].

Один из первых макетов шагающих аппаратов, управляемых с использованием вычислительной техники, был реализованы в Университете Южной Калифорнии (США) и назывался «Фонни пони» или «Калифорнийская лошадь» (рисунок 1.43) [424]. В нём использовался упрощённый вариант

двигателя, имеющий две степени свободы, из-за чего аппарат был способен только к прямолинейному перемещению.

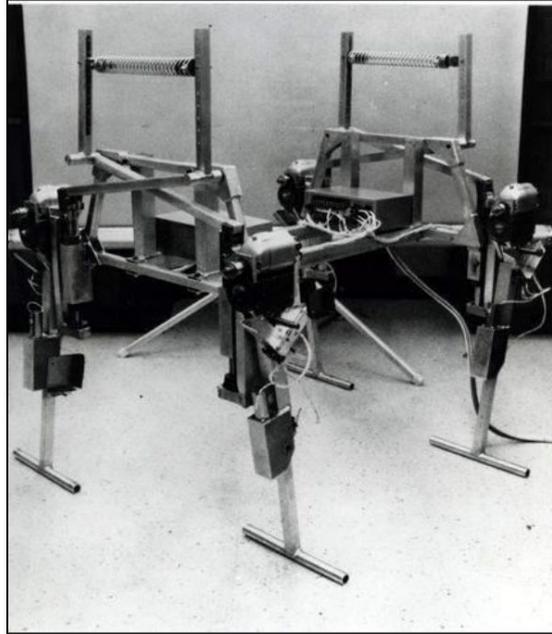


Рисунок 1.43 — Калифорнийская лошадь — Phoney-Poney, США, 1968 г.

На рисунке 1.44 показана шестиногая машина с зооморфными двигателями, созданная в Финляндии в фирме Plustech Oy Ltd. Машина предназначена для работы в лесу на лесозаготовках, в условиях труднопроходимой местности. А на рисунке 1.45 — четырёхногий робот, разработанный в Германии.



Рисунок 1.44 — Plustech, Финляндия



Рисунок 1.45 — Робот BISAM. Университет Карлсруэ. Германия

Зооморфные движители нашли своё применение в ряде военных разработок. Так, в Университете штата Огайо (США) при финансировании агентства по перспективным научно-исследовательским разработкам (DARPA) Министерства обороны США разработана автономная шестиногая шагающая машина Adaptive Suspension Vehicle (ASV) для передвижения по пересеченной местности (рисунок 1.46). Руководитель разработок профессор К. J. Waldron. Масса машины 2700 кг, грузоподъемность 90 кг, длина корпуса 5,2 м. Скорость движения 8 км/час. Каждая нога имеет по три степени подвижности относительно корпуса с индивидуальными следящими гидроприводами. Источником энергии является двигатель мощностью 50 кВт. Машина имеет систему технического зрения на базе сканирующего дальномера. Система управления реализована на 15 микро-ЭВМ. Пять из них обеспечивают обработку измерений и управление системой технического зрения, остальные 10 — обеспечивают управление движением аппарата [429, 431, 432]. Работы продолжались с 1984 по 1991 годы.

В лаборатории Boston Dynamics в США в период с 2005 года по настоящее время разрабатываются роботы, имитирующие движение собаки (рисунки 1.19, 1.47, 1.48), предназначенные для использования в военных целях в качестве средств поддержки пехоты.



Рисунок 1.46 — Шагающая машина ASV, США



Рисунок 1.47 — Alpha Dog. Boston Dynamics. США. 2011 г.



Рисунок 1.48 — Little Dog. Boston Dynamics. США. 2005 г.

**Антропоморфные механизмы шагания** являются частным случаем зооморфных механизмов. Однако их разрабатывают с целью имитации движения ноги человека, и, как правило, делают гораздо более сложными, чем простейшая зооморфная нога из трёх звеньев. В первую очередь отличия касаются стопы, которая почти всегда делается управляемой, а также добавляется возможность поворота вокруг вертикальной оси в «тазобедренном шарнире». Антропоморфные механизмы используют преимущественно для разработки двуногих роботов (рисунок 1.49).



Рисунок 1.49 — Антропоморфный шагающий робот «ASIMO» (Япония).

**Телескопическим механизмом шагания** называют механизм, состоящий из двух звеньев, связанных поступательной парой, которые имеют возможность вращаться относительно корпуса (рисунок 1.50). Существенными недостатками таких движителей являются необходимость поступательной пары воспринимать изгибающую нагрузку и сложность организации пространственного движения. Из-за этих недостатков телескопические механизмы шагания почти не использовались на практике. Тем не менее можно отметить одну из пионерских работ, выполненную ещё в 60-х годах прошлого века в Римском институте

автоматики: шестиногую автоматически управляемую машину, предназначенную для прямолинейного передвижения [382].

Телескопические сервоприводы используются и в более сложных механизмах. Например, в Лаборатории инженерной механики (Япония) создана электромеханическая шагающая машина MELWALK-III, массой 35 кг, грузоподъемностью 24 кг, размером корпуса 0,5 м. В конструкции ноги использован механизм, обеспечивающий реализацию шагового цикла при равномерном вращении тягового привода. Адаптация к неровностям производится с помощью вертикального телескопического сервопривода ноги [365].

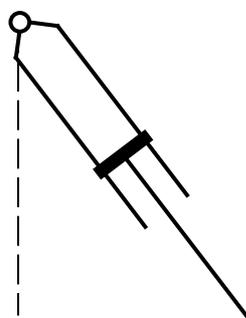


Рисунок 1.50 — Телескопический механизм шагания

**Ортогональные механизмы шагания** характеризуются наличием поступательных пар, оси которых перпендикулярны друг другу. Различают плоский ортогональный механизм (рисунок 1.51) и пространственный.

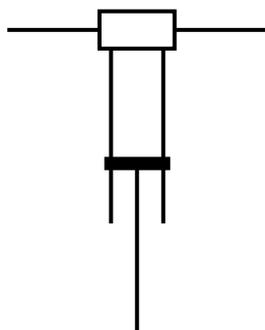


Рисунок 1.51 — Ортогональный механизм шагания

По-видимому, первой в мире шагающей машиной с ортогональным двигателем была машина, созданная в начале 70-х годов прошлого века в Институте машиноведения Академии Наук под руководством академика И. И. Артоболевского, профессоров А. П. Бессонова и Н. В. Умнова (рисунок 1.52).

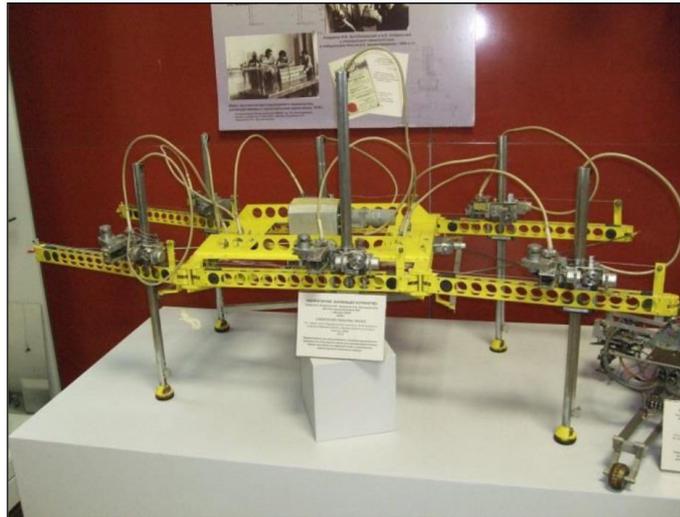


Рисунок 1.52 — Шагающая машина ИМАШ РАН. Политехнический музей

Основным достоинством ортогонального механизма шагания является независимость вертикального и горизонтального перемещений, что позволяет и упростить систему управления, и обеспечить движение без энергозатрат на поддержание веса аппарата. Плоский ортогональный механизм имеет две степени свободы и без дополнительных устройств позволяет реализовать только прямолинейное движение. Пространственный ортогональный механизм шагания имеет очень большие габариты и конструктивную сложность. Поэтому для организации пространственного движения чаще используют комбинацию плоского ортогонального механизма и поворотной пары.

Такую конструкцию имеет шагающая машина Ambler (рисунок 1.53), разработанная в 1988–1992 годах в США по заказу NASA усилиями группы по изучению планетоходов и института компьютерных наук (Planetary Rover Group,

School of Computer Science) [444, 451], и шагающий робот с ортогональным движителем, разработанный в ВолгГТУ в 2007-2014 годах (рисунок 1.54).



Рисунок 1.53 — Шагающая машина Ambler, США



Рисунок 1.54 — Робот с ортогональным движителем, ВолгГТУ, Волгоград, РФ

В основе **пантографного шагающего движителя** лежит плоский пантографный механизм (рисунок 1.55), который для организации пространственного движения обычно снабжается поворотным приводом.

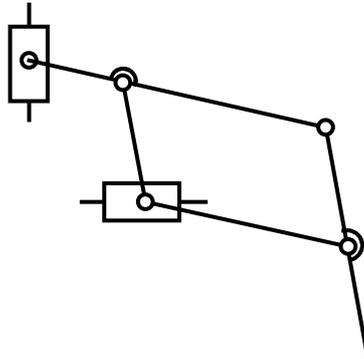


Рисунок 1.55 — Пантографный механизм шагания

В Токийском технологическом институте (Япония) создана электромеханическая четырёхногая машина PVII. Масса машины 10 кг, длина ноги 0,87 м. Скорость движения 0,07 км/час. В конструкции ноги использован пространственный пантографный механизм. Машина способна перемещаться по неровной поверхности и демонстрирует высокую маневренность [355]. Затем был испытан более крупный макет с аналогичной кинематикой ног (масса машины 150 кг, скорость 0,36 км/час) [427].

Шагающая машина MECANT (рис 1.56) была разработана и сконструирована в Финляндии в Хельсинкском технологическом университете совместно с Лабораторией технологий в автоматике в 1988–1993 годах [443]. Заказчиками выступали Финская Академия, Хельсинкский университет, Центр технических исследований и Финская исследовательская организация по индустрии и технологии. Технические характеристики: 6 ног, 18 активных степеней свободы, максимальная скорость 1,8 км/ч, масса машины 1100 кг, грузоподъёмность 100 кг, потребляемая мощность 35 кВт.



Рисунок 1.56 — Шагающая машина MECANT, Финляндия

В 1992–1994 годах в США были разработаны шагающие роботы Dante I, Dante II, предназначенная для исследования вулканической активности (рисунок 1.57). Её разработка проводилась в Университете Карнеги Меллона совместно с Центром робототехники. Эта машина имела 8 ног, при 11 активных степенях подвижности, массу 770 кг и могла передвигаться со скоростью 1 м/мин (0,060 км/ч), затрачивая мощность от 0,5 до 1,5 кВт. А продолжением этой работы явился сконструированный в 1997 году K2T Demining Robot [340].



Рисунок 1.57 — Шагающий робот Dante II, США

**Цикловые механизмы шагания** представляют собой механизмы с одной степенью свободы, обеспечивающие движение опорной точки по замкнутой траектории. И могут быть представлены от простейших однозвенных механизмов (рисунок 1.18), до сложных многозвенных систем (рисунки 1.9-1.11, 1.58) [104]. Известны машины, в которых движитель состоит из одного циклового механизма, но в большинстве случаев используются сдвоенные механизмы.

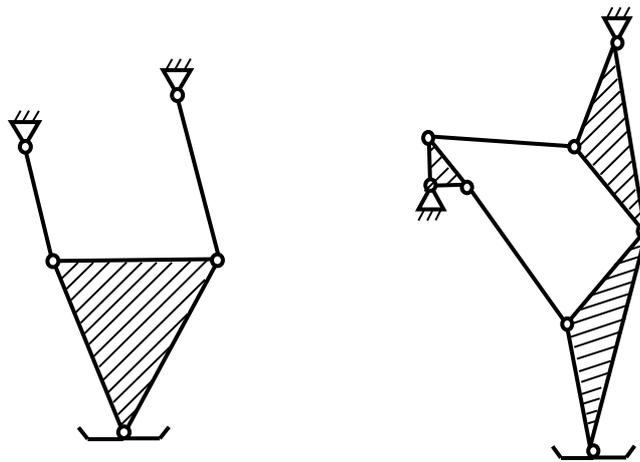


Рисунок 1.58 — Четырёхзвенный (слева) и шестизвенный (справа) цикловые механизмы шагания

Отказавшись от идеи копирования живой природы, в 1878 г. П. Л. Чебышеву удалось создать намного более простой механизм — так называемую стопоходящую машину (рисунок 1.9), в основе которой используются цикловые рычажные механизмы с одной степенью подвижности. Несмотря на простоту стопоходящая машина Чебышева обладала рядом преимуществ перед описанными выше попытками имитации живых организмов. В частности, она обеспечивала почти прямолинейное в вертикальной плоскости и почти равномерное движение корпуса, а также не нуждалась в дополнительных опорах при движении, сохраняя статическое равновесие за счёт достаточно большой по площади жёстко прикрепленной к опорному звену механизма стопы. В то же время, стопоходящая машина реализовывала постоянный шаговый цикл и, следовательно, не обладала возможностями адаптации к опорной поверхности и не могла выбирать точки для постановки ног на грунт.

Подход, разработанный П. Л. Чебышевым, получил своё продолжение в начале 90-х годов в разработке шагающей опоры для дождевальная машины [205, 207, 208] и несколько позднее в транспортно-технологической шагающей машине «Восьминог» [206]. В этих машинах были использованы цикловые рычажные механизмы шагания П. Л. Чебышева [180], модифицированные согласно разработкам Н. В. Умнова [17, 253]. Значительное количество работ связано с развитием подхода, использованного в стопоходящей машине П.Л.Чебышева [38, 110, 114, 115, 187, 365, 372, 413]. В этих машинах используются механизмы, обеспечивающие перемещение конца ноги (стопы) по шаговому циклу, содержащему участок равномерного и прямолинейного горизонтального движения стопы относительно корпуса в фазе опоры и участок переноса ноги из конечного заднего положения относительно корпуса в переднее, при равномерном вращении тягового привода. Эти механизмы могут быть дополнены еще двумя степенями подвижности, обеспечивающими в случае необходимости вертикальную адаптацию к малым неровностям местности и поворот машины. Использование таких механизмов позволяет не только уменьшить энергозатраты на поддержание веса аппарата, но и энергозатраты на разгон, торможение и реверсирование тягового привода. Одновременно значительно упрощается задача управления движением аппарата по местности с малыми неровностями без изменения параметров используемой походки. В теоретических работах описывается идеальный шаговый цикл, формулируются геометрические и кинематические требования. Однако приближение реальных механизмов шагания к идеальным требованиям приводит к значительному усложнению кинематической схемы механизма. Используются дополнительные степени свободы [56, 358], увеличивается число звеньев механизма (используются шарнирные шестизвенники) [410], предлагаются схемы механизмов, корректирующих закон движения ведущего звена механизма шагания [320].

Такие недостатки цикловых механизмов как отсутствие адаптации и невозможность выбора точек для постановки ног на грунт являются совершенно не существенными для использования на полях сельскохозяйственных угодий. А возможность многократно снизить давление на грунт за счёт большой поверхности стопы, гораздо более высокая по сравнению с колёсными опорами грунтовая проходимость, малое разрушение почвенного покрова, нечувствительность к высыханию грунта определяют преимущества шагающего движителя, актуальные для дождевальных машин [30, 105, 186, 189]. Шагающая машина «Восьминог», разработанная на базе опор дождевальной машины, также была предназначена для движения по слабонесущим грунтам, в условиях, где профильная проходимость не требуется, и отличалась исключительной простотой конструкции и управления [135, 136, 272, 277].

**Сдвоенный ортогонально-поворотный движитель** представляют собой два ортогональных механизма шагания, объединённых общим поворотным приводом (рисунок 1.59). Такой движитель сочетает в себе достоинства сдвоенных цикловых и ортогональных механизмов шагания. Примером использования движителей такого типа является машина «Ортоног» (рисунок В.2).

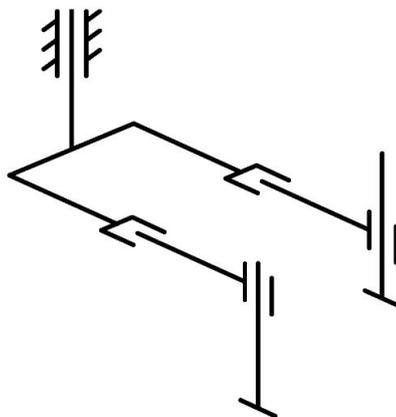


Рисунок 1.59 — Сдвоенный ортогонально-поворотный движитель

Иногда на одной одной машине размещаются движители различных типов. Такой подход позволяет значительно улучшить проходимость машины. Примерами таких машин являются:

- колёсно-шагающий экскаватор Kaiser (рисунок 1.14), который кроме колёсно-шагающих движителей имеет две дополнительные опоры инсектоморфного типа, а также эффективно использует манипулятор для опоры на грунт при движении на наиболее сложных участках;

- шагающая машина «Восьминог М» (рисунок 1.60), которая имеет основные сдвоенные цикловые движители и дополнительный подъёмно-поворотный движитель, который позволяет «вывесить» машину при преодолении препятствий и осуществлении поворота.



Рисунок 1.60 — Машина «Восьминог М» с движителями различных типов  
ВолгГТУ. Волгоград

Шагающие машины, разработанные в ВолгГТУ основываются на простейших шагающих движителях с одной управляемой степенью свободы. Движитель состоит из двух четырёхзвенных механизмов шагания, кинематически жёстко связанных и работающих в противофазе. В каждый момент времени хотя бы один из механизмов шагания находится в контакте с грунтом, таким образом, коэффициент режима такого движителя равен 1. Следовательно, для обеспечения статической устойчивости достаточно трёх таких движителей. Использование движителей на основе четырёхзвенных механизмов шагания позволяет значительно упростить конструкцию по сравнению с конкурирующими образцами, следовательно, сделать её гораздо менее дорогостоящей и, в перспективе, более надёжной. Кроме того, такой подход делает возможным предельное упрощение системы управления, что сохраняет принципы управления традиционными транспортными средствами, перенося их на шагающие машины. Машины, использующие такие движители, относятся к классу машин грунтовой проходимости.

Ещё одним направлением в развитии шагающих машин является разработка реконфигурируемых аппаратов, конструкция которых может быть изменена в зависимости от стоящих перед роботом задач.

Среди таких машин можно отметить колёсно-шагающий аппарат ALDURO (рисунок 1.15), в котором все или некоторые колёса могут быть заменены на стопы, превращая таким образом колёсно-шагающие движители в шагающие [350, 386], или реконфигурируемый робот OSCAR-X [331] (рисунок 1.61), в котором можно менять количество ног, а также заменять шагающие движители на колёсно-шагающие и наоборот.

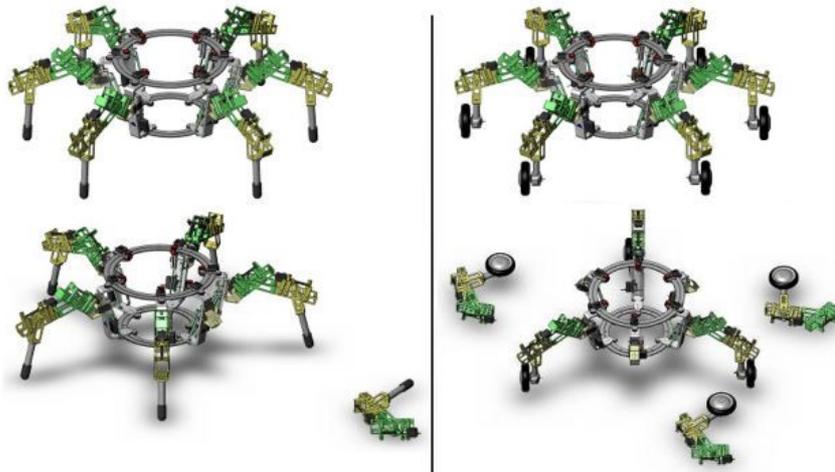


Рисунок 1.61 — Реконфигурируемый робот OSCAR-X (Германия)

Некоторыми возможностями реконфигурации обладают и машины, разработанные в ВолгГТУ. Дождевальная машина «Кубань» представляет собой многосекционную ферму, каждая секция которой поддерживается своей опорой, таким образом, количество шагающих опор совместно работающих в одной дождевальной машине может варьироваться от нескольких единиц до полутора десятков. В шагающих машинах «Восьминог» и «Восьминог М» предусмотрена возможность в полевых условиях поменять стопы. В шагающей машине «Ортоног» допускается изменение конфигурации движителей путём отключения и блокировки некоторых из приводов.

Классификация по числу управляемых (активных) и неуправляемых (пассивных) степеней свободы шагающих движителей тесно связана с функциональными возможностями машины. Так, для машины профильной проходимости необходимо независимое движение опорной точки шагающего движителя в двух направлениях в плоскости шагания, следовательно, требуется не менее двух независимых управляемых степеней свободы. А для машины грунтовой проходимости достаточно обеспечить не изменяющуюся относительную траекторию опорной точки в плоскости шагания, для чего достаточно одной независимой управляемой степени свободы. Для осуществления поворота и в том и в другом случае шагающие движители могут быть дополнены

ещё одной управляемой степенью свободы, обеспечивающей изменение ориентации плоскости шагания относительно корпуса. Однако, поворот машины может быть обеспечен и без изменения ориентации движителей относительно корпуса, например, изменением скорости движения одного из бортов (аналогично гусеничным машинам) или изменением ориентации полурам машины относительно друг друга для сочленённых машин. Неуправляемые степени свободы используются в тех случаях, когда положение звена механизма обеспечивается за счёт силы тяжести, инерционных сил или других факторов, например, неуправляемая степень свободы в шарнире стопы обеспечивает самоадаптацию стопы к грунту [277]. Следует отметить, что число степеней свободы шагающих движителей, работающих в машине, может быть меньше, чем сумма степеней свободы каждого движителя по отдельности, так как между некоторыми звеньями соседних шагающих движителей могут быть установлены жёсткие кинематические связи.

Заслуживает внимания концепция создания шагающих роботов из отдельных функциональных модулей. В работе Г.С.Вирка [428] описываются спецификации функциональных модулей и схема их взаимодействия для шагающих и прыгающих машин. Модульный принцип сборки шагающих машин описывается и в работе [441]. Шагающая машина собирается из однотипных двуногих модулей и общее число ног может варьироваться в достаточно широких пределах.

Поскольку использование шагающего принципа перемещения широко распространено в природе, то большое число работ посвящено задаче копирования животных или человека. В работе [330] приводится обзор конструктивных критериев ног для шагающих машин, выработанных в результате исследования движения четырёхногих млекопитающих. Сделаны следующие выводы: ноги должны иметь как минимум три звена; звенья должны быть упорядочены зигзагообразным образом; пропорции звеньев механизма должны

быть выбраны из условия самостабилизирующихся походок; в сочленениях звеньев рекомендуется использовать упругие элементы; общая жёсткость в осевом направлении должна корреспондироваться с тем, что есть у животных; деформации в упругих элементах шарниров должны быть обратно пропорциональны кратчайшему расстоянию от шарнира до оси ведущего звена механизма.

В тоже время, история техники показывает, что копирование живой природы не всегда эффективный путь. Поэтому некоторые исследователи намеренно отказываются от копирования животных и ставят перед собой задачу разработки наиболее простых (с возможно меньшим числом степеней свободы) шагающих движителей, способных, тем не менее, решать те же задачи, что и ноги животных. Согласно исследованиям К.Ёнеда [436] возможно многократное уменьшение числа управляемых степеней свободы шагающей машины за счёт использования жёстких кинематических связей между отдельными звеньями шагающих движителей. Так, при сохранении полной функциональности для движения шестиногого аппарата достаточно 6 степеней, для двуногого аппарата необходимо 5 степеней свободы, а для четырёхногого — 3 степени. Однако, при уменьшении функциональных возможностей разрабатываемых машин, возможно и ещё значительное уменьшение степеней свободы.

В шагающей машине, использующей движители с двумя или тремя степенями свободы, система управления должна обеспечивать согласованное движение звеньев ног при одновременном управлении значительным количеством сервоприводов в зависимости от состояния машины (показаний датчиков), управляющих сигналов от водителя или верхних уровней автоматической системы управления и формы опорной поверхности. Наиболее простым с точки зрения управления способом перемещения шагающей машины является статически устойчивое шагание. В частности, перед алгоритмами управления движением такой машины не ставится задача обеспечения динамической устойчивости. В то

же время, статически устойчивые режимы движения могут обеспечить высокую маневренность и проходимость. Среди достоинств динамически устойчивых режимов движения — более высокие скорости передвижения.

Если аппарат не имеет значительной по площади управляемой стопы, то контакт ноги с опорной поверхностью имеет точечный характер и для статически устойчивой ходьбы минимальное количество ног, одновременно находящихся в фазе опоры, равно трем. Минимальное же количество ног аппарата равно четырем. При этом четырёхногий аппарат имеет только один тип статически устойчивых походок, при котором по очереди одна за другой переносятся ноги аппарата. Для реализации достаточно богатого набора походок, обеспечивающих высокую проходимость машины в рамках статической устойчивости, количество ног аппарата должно быть не меньше шести. Использование большего, чем шесть количества ног не дает заметных преимуществ по профильной проходимости или маневренности, однако, позволяет уменьшить силы и моменты сил инерции за счёт уменьшения коэффициента режима (отношения времени нахождения движителя в опоре к времени всего шага), и, следовательно, более плавного движения ноги в фазе переноса.

Известные манипуляционные роботы имеют соотношение грузоподъёмности и собственного веса 1:10 – 1:20 [119, 298, 312]. Ноги же шагающей машины (которые можно рассматривать как специализированные манипуляторы) должны обеспечивать перемещение не только собственного веса, но и веса автономного источника энергии, запаса топлива, системы управления и полезной нагрузки. Некоторые исследователи отмечают возможность объединения ног и манипуляторов в один механизм [391]. Конечности описанного в этой работе шестиногого робота используются для шагания, но при необходимости, некоторые из них могут быть использованы для осуществления работ.

Шагающие движители служат не только для перемещения машины. Они должны обеспечивать и устойчивое неподвижное положение машины при работе

установленного на ней технологического оборудования. В частном случае, может быть поставлена задача предварительного выравнивания (например, горизонтирования) рамы шагающей машины перед началом работы технологического оборудования. Желательно, чтобы шагающие движители обеспечивали устойчивое неподвижное положение машины без затрат энергии на поддержание её веса. Кроме того, в этом случае к ним предъявляются повышенные требования по жёсткости в неподвижном положении. Влияние упругости опорных элементов машины на работу манипулятора рассматривается в работе польских учёных [371].

Как и для любого транспортного средства, кроме проходимости важнейшими показателями эффективности шагающей машины являются энергозатраты на метр пути (энергетическая эффективность машины), крейсерская и максимальная скорость движения по легкопроходимой местности.

Существенным недостатком шагающих машин является резкое увеличение энергозатрат с ростом скорости движения. Выходная мощность приводов в шарнирах ног, связанная с преодолением силы тяжести, растет пропорционально скорости движения, а мощность, связанная с обеспечением колебательного движения ног относительно корпуса, растет пропорционально кубу скорости [148]. При значительных скоростях основной объем энергозатрат связан с обеспечением движения ног относительно корпуса. Одним из способов уменьшения энергозатрат шагающего аппарата при увеличении скорости движения является увеличение продолжительности шагового цикла за счет увеличения длины шага и увеличения отношения продолжительности фазы переноса ноги к продолжительности опорной фазы движения ног. Более радикальным способом снижения энергозатрат при высоких скоростях движения является переход от ходьбы к бегу. Условия, при которых переход от ходьбы к бегу становится выгодным с энергетической точки зрения, сформулированы в работе [15].

Статически устойчивые шагающие машины позволяют решать задачу передвижения более простым способом, чем динамически устойчивые машины. При статически устойчивом шагании реализуются меньшие нагрузки на движители, что упрощает и облегчает конструкцию машины. Статически устойчивые машины более надёжны, в том числе и при сбоях и отказах ходовой части и системы управления. Поэтому практические разработки статически устойчивых шагающих машин были начаты раньше и большинство изготовленных практических образцов в настоящее время — статически устойчивые машины.

Одной из основных проблем, препятствующих практическому использованию шагающей техники, является невысокая скорость передвижения таких аппаратов.

В рамках статической устойчивости для шестиногого аппарата при значительных скоростях наиболее выгодным является движение походкой «трешки» [195] с конструктивно максимально возможной длиной шага. Однако даже при использовании энергетически наиболее выгодного режима движения уже при скоростях 5–10 км/час основной объем энергозатрат связан с обеспечением колебательного движения ног относительно корпуса [148, 196, 246]. Поэтому необходима разработка специальных методов сокращения энергозатрат на колебательное движение ног относительно корпуса.

Ряд исследований показывает, что возможно увеличение скорости движения статически устойчивой шагающей машины до 10–15 км/час за счет рекуперации энергии при разгоне и торможении ног относительно корпуса за счёт естественного колебательного движения ног относительно корпуса как гравитационного маятника [431] или по аналогии с пружинным маятником путем использования упругих элементов [108, 146, 197]. При совпадении частоты шагания с собственной частотой колебания ног разгон и торможение ног осуществляется за счет рекуперации энергии, а внешний источник энергии

используется для компенсации необратимых потерь энергии на трение. В связи с тем, что частота собственных колебаний ноги фиксирована, использование для рекуперации энергии колебательного движения ног как гравитационного маятника, приводит к существованию скорости движения, при которой энергозатраты на метр пути минимальны [431]. Использование двух упругих элементов, один из которых работает в окрестности переднего положения ноги, а другой — в окрестности крайнего заднего положения ноги, с возможным наличием в середине зоны свободного хода (зоны, где не работает ни один упругий элемент), позволяет изменять частоту собственных колебаний ног относительно корпуса за счет изменения жесткости упругих элементов или за счет изменения величины зоны свободного хода. Это обеспечивает возможность организации энергетически эффективного движения шагающей машины с рекуперацией энергии на разгон и торможение ног относительно корпуса для широкого диапазона скоростей движения машины [197]. Подобные конструкции использовались, например, в резонансных манипуляторах, разработанных в Институте машиноведения АН СССР [1].

Для шагающих движителей на основе телескопической, «лошадиной» или инсектоморфной схем характерен значительный объём энергозатрат, связанных с поддержанием веса машины. Так, для медленных шагающих машин энергозатраты на поддержание веса могут быть значительно больше, чем все остальные потери энергии вместе взятые. Поддержание веса за счет двигателей в шарнирах ног даже на ровной поверхности (это характерно для лабораторных макетов шагающих аппаратов Университета штата Огайо [397], Института прикладной математики АН СССР [Ошибка: источник перекрестной ссылки не найден, 194, 195], Института механики МГУ и Института проблем передачи информации АН СССР [93], и других моделей роботов) существенно снижает энергетическую эффективность медленных шагающих машин.

Поэтому являются актуальными работы по использованию кинематических схем ног, обеспечивающих поддержание веса машины за счет нагрузки на конструкцию, а не на двигатели, хотя бы при движении по местности с малыми неровностями, с одновременным обеспечением адаптации к неровностям.

Этот эффект можно получить при использовании ортогонального шагающего движителя. Ведущие звенья ног такой машины, как правило, имеют линейные перемещения друг относительно друга во взаимно перпендикулярных направлениях. Вертикальный привод, обеспечивающий адаптацию и поддержание веса машины, при соприкосновении ноги с грунтом отключается, и вертикальное положение машины фиксируется тормозом. Это делает возможными адаптацию к неровностям местности за счет различной длины выдвижения вертикального звена ноги и поддержание веса машины без использования привода. Такая конструкция ноги шагающего движителя предложена и использована в лабораторном макете Института машиноведения АН СССР [5, 253], а также в более поздней конструкции лабораторного макета Кировского политехнического института [293]. Недостатками ортогональной схемы ноги являются ее большие размеры уже для ног с двумя степенями подвижности относительно корпуса и сложностью конструктивной реализации ноги с ортогональной схемой, имеющей три степени подвижности относительно корпуса.

Использование в конструкциях ног пантографных механизмов позволяет сохранить преимущества ортогональной кинематической схемы ноги и обеспечить компактность конструкции ноги и ее размещение на машине [218]. Плоский пантографный механизм используется в лабораторном макете шестиногой машины Парижского университета (Франция) [367], а пространственный пантограф — в лабораторном макете четырёхногой машины Токийского технологического института (Япония) [355, 427]. Плоские пантографы в сочетании с третьей вращательной степенью подвижности использованы в шагающей машине Университета штата Огайо (США) [431, 432], в шагающей

машине фирмы «Одетикс» (США) [315] и в машине Института механики машин АН СССР, обеспечивающей передвижение двухколесного шасси с помощью двух ног [211]. Результаты исследований и экспериментов демонстрируют целесообразность использования пантографных механизмов ног для повышения энергетической эффективности шагающих машин. Достоинства пантографных механизмов обеспечивают их большую популярность в современных работах [330, 348, 354, 385].

Система управления, обеспечивающая адаптацию к неровностям местности без использования ЭВМ, создана и опробована на лабораторном макете шагающей машины в Институте машиноведения АН СССР [5, 253]. Эта машина способна перемещаться с фиксированной походкой и с заданными длиной шага и клиренсом. Простая система управления на основе использования реле и командно-временного устройства обеспечивает адаптацию к неровностям опорной поверхности и поворот машины. Ноги машины с ортогональной кинематической схемой имеют по две степени подвижности относительно корпуса. Для обеспечения поворота используется рулевое устройство поворота составных частей корпуса друг относительно друга. Длина аппарата 1,7 м, масса 16 кг, скорость 0,05 м/сек. Максимальная величина преодолеваемого препятствия 0,4 м. Минимальный радиус поворота 1,1 м [5, 253].

Большое количество исследований посвящено разработке структурных схем шагающих машин и их движителей. Среди этих работ: шестиногая шагающая машина, разработанная в Наньянском технологическом университете (Сингапур) и Варшавском технологическом университете (Польша) [439, 440]; паукообразная восьминогая машина разработанная в исследовательском центре Карлсруе (Германия) [407]; шестиногая машина Tarry II [305]; шестиногая машина с зооморфными механизмами шагания и жёсткой рамой [348]; восьминогий робот «Scorpion», [368]; шагающий робот LAURON III [344]; трёхногий робот, разработанный в США [405]; работа испанских учёных [415], в которой

рассматриваются вопросы проектирования стопы для двуногой шагающей машины, предназначенной для движения статически устойчивой походкой.

Для четырёхногих машин некоторые исследователи используют конструкции ног и походки, подобные паукообразным, насекомым или ракообразным. Например, в [336] для четырёхногой машины используется крабовидная походка. Использование такой походки является подходящим для машин, предназначенных для преодоления неровных поверхностей. Однако более естественной для четырёхногих машин является копирование четвероногих животных. Так П.Войчек [434] предложена многоцелевая конструкция ноги для использования в четырёхногих машинах. В зависимости от поставленных перед машиной задач, многоцелевая нога может работать подобно ногам млекопитающих или рептилий. Роботы, описанные в работе [328], моделируют движение сухопутной черепахи. Вопросам улучшения походки робота рысью посвящена работа шведских учёных [359]. Улучшение достигается за счёт изменения траектории стопы в начале движения. Поскольку для четырёхногих машин существует только один тип статически устойчивой походки, то в большинстве случаев в четырёхногих машинах используются динамические походки. Динамическая ходьба четырёхногого робота, основанная на использовании генератора ритма, рассматривается в работе [419].

Исследуются также новые типы приводных двигателей, пригодных для использования в роботах. Нелинейный двигатель, предназначенный для работы в квазирезонансных приводах роботов, разработан в Испании [395]. Для привода инсектоморфной машины Airbug используются жидкостные (гидравлические) мускулы [307]. Мускулы предназначены для создания усилия только в одном направлении (при сокращении), а для формирования знакопеременного момента сил в шарнире необходимо использование двух мускулов, работающих друг против друга.

В последнее время в разработке систем управления многоногими шагающими машинами используются технологии, основанные на нечёткой логике и нейронных сетях. Нейронные сети применяются как на высоком уровне управления, обеспечивая для достижения заданной цели выбор движения машины в целом при обходе непреодолимых препятствий, так и на низком уровне, обеспечивая адаптацию отдельных движителей к неровностям опорной поверхности. В работе учёных Билефельдского университета (Германия) на основе биологических данных строится нейронная сеть для управления шестиногой шагающей машиной [327]. Четырёхногий робот, способный совершать пространственное движение и управляемый нейронной сетью, разработан в Токийском университете электросвязи (Япония) [423]. Система управления шестиногим шагающим роботом «Katharina» основывается на методе нечёткой логики и реализована в виде нейронной сети [398]. С помощью нечёткой логики румынскими учёными [361] решается задача перехвата цели шагающим роботом. Более общая задача передвижения и обхода препятствий мобильным роботом в изменяющейся среде рассмотрена в совместной работе российских и итальянских учёных [343]. На основе нейронной сети, использующей нечёткую логику, осуществляется управление пантографными механизмами шагания восьминого робота в разработке бельгийских учёных [354]. Различные самообучающиеся алгоритмы, предназначенные для управления многоногими шагающими роботами, в условиях когда планирование движения на длительный срок вперёд невозможно, исследуются учёными разных стран (Словакия, Испания, Япония) [380, 402, 418]. В совместной работе бразильских и российских учёных рассматриваются два метода управления шагающими роботами [329]: геометрический метод и метод управления на основе нейронной сети. На основе метода определения реакций построено управление робота BISAM [404].

В работе Г.Мускато и Н.Савалли [387] формулируются требования к компьютерной технике, необходимой для эффективного управления прыгающей или шагающей машиной.

В сравнительно небольшом числе экспериментальных образцов используются динамически устойчивые походки [321, 333]. Для «скоростных» шагающих машин может быть актуальной проблема экстренной остановки. В качестве возможного решения этой проблемы в работе В.Лапшина [374] рассматривается «вставание на дыбы», подобно тому как это делают лошади при экстренной остановке.

Отличительной особенностью рассмотренных систем управления и макетов шагающих машин является максимальное использование возможностей шагающих машин по профильной проходимости и маневренности (возможность движения боком, разворота на месте и т.д.).

Для решения ряда транспортных задач не обязательно использовать все кинематические возможности шагающей машины по проходимости и маневренности. Вместе с тем такое уменьшение проходимости и маневренности значительно упрощает систему управления движением, обеспечивая ее функционирование без использования вычислительной техники.

## **1.2. Показатели качества шагающих машин**

В зависимости от условий применения и решаемых задач к шагающим машинам предъявляются различные, часто противоречивые требования, для количественной оценки соответствия которым вводится система механических показателей качества (рисунок 1.62).

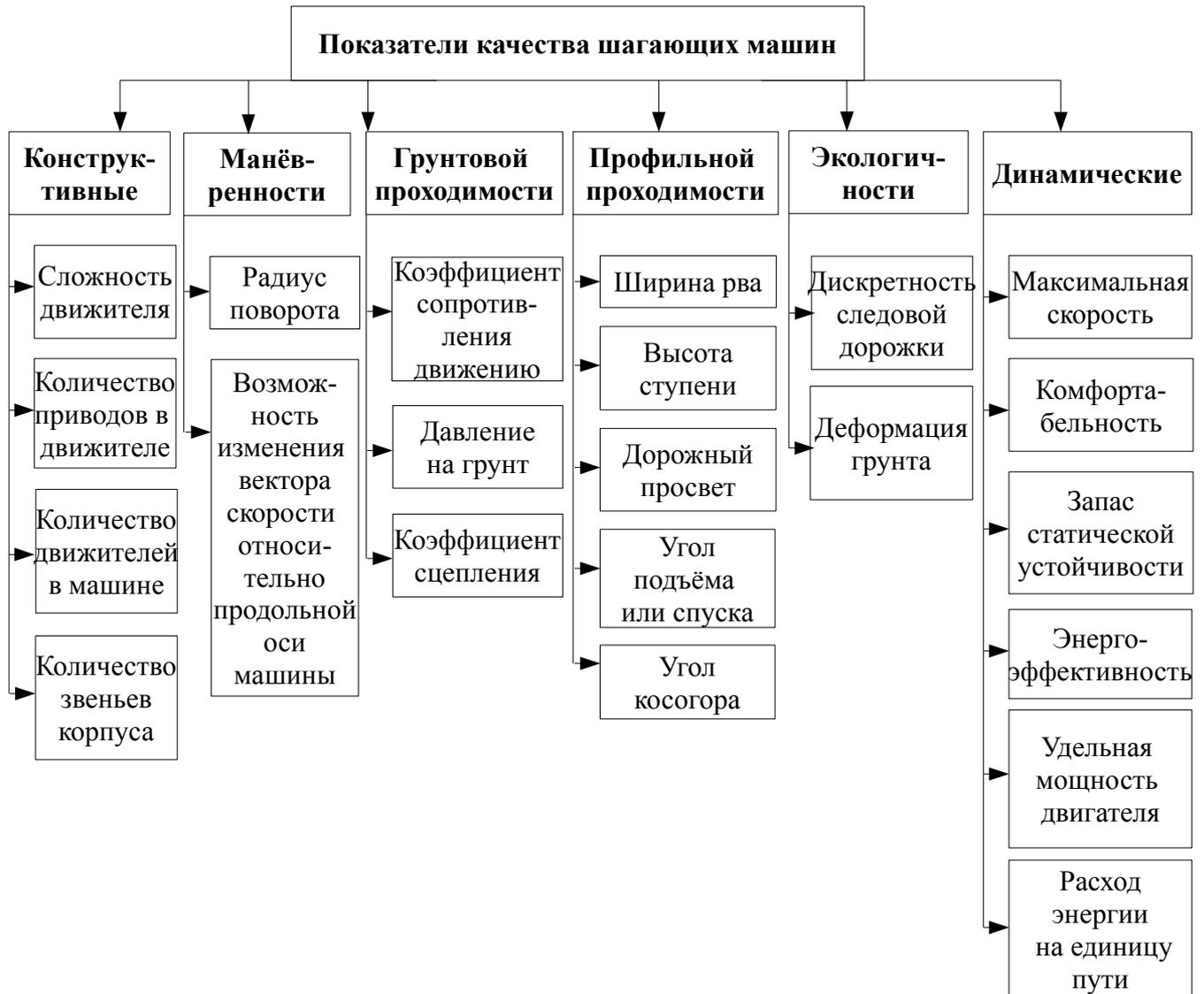


Рисунок 1.62 — Классификация показателей качества шагающих машин

Часть этих показателей заимствованы из теории транспортных средств (ТС) с традиционными двигателями, другие — специфичны для шагающих машин [51]. В то же время, некоторые механические показатели качества, характерные для колёсных ТС, для шагающих машин не актуальны. Например, из-за малой скорости движения для шагающих машин неактуальны показатели, определяющие характеристики торможения, потери устойчивости при повороте или преодоления препятствий за счёт инерционных свойств транспортного средства.

В отличие от традиционных ТС, почти все показатели шагающего аппарата зависят не только от особенностей конструкции машины, но и от алгоритмов

управления приводами движителей. Следовательно, оценка качества шагающей машины неразрывно связана с реализуемыми алгоритмами движения.

### 1.2.1. Структурные показатели

Подробный обзор конструкций шагающих машин и роботов представлен в параграфе 1.1.

Структурные показатели качества характеризуют сложность конструкции машины как механической системы и определяются количеством тел входящих в систему. В задачах оптимизации при прочих равных условиях считается более удачной та механическая система, которая состоит из меньшего количества элементов.

Сложность движителя определяется количеством его звеньев  $N_i$ , без учёта неуправляемых стоп. Сложность системы управления определяется количеством приводов или, что тоже самое, числом управляемых степеней подвижности в движителе  $N_d$ . Сложность структурной схемы машины определяется количеством движителей  $N_L$ . Через  $\min(N_L)$  обозначается количество движителей, минимально достаточное для реализации тех же движений корпуса, что и у машины с исходной структурной схемой. Разность  $N_L - \min(N_L)$  определяет избыточность структурной схемы машины по количеству движителей.

Примеры значений структурных показателей приведены в таблице 1.1.

Как правило, чем меньше звеньев содержит механизм движителя, тем проще обеспечить прочность, жёсткость и надёжность его конструкции, а также тем меньшее влияние на динамику движения оказывают неточности в изготовлении деталей. Хотя работоспособность реальной конструкции зависит не только от количества звеньев механизма, но и от множества других факторов, всё-таки количество звеньев является наиболее простым и удобным показателем удачности структуры шагающего аппарата.

Таблица 1.1 — Примеры значений структурных показателей

	$N_l$	$N_d$	$\min(N_L)$	$N_L$
Шагающая машина «Восьминог». Сдвоенный цикловой движитель.	5	1	3	4
Шагающая машина «Восьминог». Сдвоенный цикловой движитель с механизмами коррекции	9	1	3	4
Шагающая машина «Ортоног». Сдвоенный ортогонально-поворотный движитель	5	5	3	4
Шестиногие инсектоморфные шагающие машины. Инсектоморфный движитель	3	3	4	6

С другой стороны, увеличение количества звеньев может быть продиктовано желанием разработчика обеспечить требуемые характеристики движения при сохранении небольшого числа приводных двигателей.

Количество приводов или число управляемых степеней подвижности в движителе  $N_d$  характеризует сложность системы управления. Чем больше приводов требуют согласованного управления, тем труднее обеспечить точное выполнение программных движений машины. С другой стороны, доступные движения при увеличении числа управляемых степеней подвижности в движителе становятся более разнообразными, позволяя улучшить механические характеристики машины.

Количество движителей в машине  $N_L$  связано с используемым типом движителей и с требованиями устойчивости и проходимости машины. Так, для машин со сдвоенными движителями минимально необходимое значение  $\min(N_L) = 3$ , но по соображениям статической устойчивости обычно устанавливается 4 движителя. Для машин с одинарными движителями, например,

с инсектоморфными  $\min(N_L) = 4$ , но большинство моделей шагающих аппаратов имеет количество движителей не менее 6.

Ещё одним показателем сложности конструкции является количество твёрдых тел, образующих корпус машины. Большинство моделей шагающих машин имеют простой корпус, состоящий из одного твёрдого тела. Но известны образцы с двух или многозвенным корпусом [30, 189].

### 1.2.2. Кинематические показатели

В отличие от традиционных колёсных и гусеничных ТС для шагающих машин направление скорости центра корпуса обычно не ограничивается направлениями, близкими к продольной оси машины, что позволяет машине осуществлять линейные и угловые перемещения независимо друг от друга. Поэтому минимального радиуса поворота недостаточно для оценки манёвренности шагающих машин, и требуется введение ещё одного показателя манёвренности, в качестве которого предложен диапазон изменения угла между вектором скорости центра корпуса и продольной осью машины. Вводится понятие идеальной маневренности, под которой понимается способность корпуса машины совершать произвольное плоско-параллельное движение в плане местности.

При таком понимании, маневренность характеризуется двумя показателями: минимальным радиусом кривизны траектории характерной точки корпуса (обычно условного геометрического центра или центра масс)  $R_{min}$  и максимально допустимым углом  $\gamma$  между продольной осью корпуса и вектором скорости  $V$  характерной точки. Для случая идеальной манёвренности указанный угол должен принимать произвольные значения в пределах  $\pm 180^\circ$ .

Минимальный радиус поворота  $R_{min}$  определяется как минимально возможное расстояние от мгновенного центра скоростей (МЦС) до одной из характерных точек корпуса машины и, в случае кинематически точного движения без проскальзывания, зависит от максимального угла поворота  $\theta_{max}$  поворотных

колёс. В качестве характерной точки в зависимости от решаемой задачи обычно выбирается центр оси поворотных колёс, центр забегающего поворотного колеса или наиболее удалённая от МЦС габаритная точка машины. Например, для кинематически точного поворота автомобиля минимальный радиус поворота по центру оси поворотных колёс (рисунок 1.63.а) определяется выражением

$$R_{min} = \sqrt{\frac{L^2}{\operatorname{tg}^2(\theta_{max})} + \frac{LB}{\operatorname{tg}(\theta_{max})} + \frac{B^2}{4} + L^2} \quad (1.1)$$

где  $L$  и  $B$  — продольная и поперечная базы машины.

Причём, МЦС корпуса автомобиля при движении без проскальзывания лежит на продолжении оси задних колёс. Скорости точек корпуса, лежащих на оси задних колёс, всегда направлены параллельно продольной оси автомобиля, а направления скоростей остальных точек корпуса отличаются от продольной оси не более, чем на угол  $\theta_{max}$ . Другими словами, угол  $0 \leq \gamma \leq \theta_{max}$  для любой точки корпуса автомобиля между его передней и задней осями, причём между этим углом и радиусом поворота существует однозначная связь.

Для гусеничных машин характерен, так называемый, бортовой поворот, когда движитель одного борта машины частично или полностью затормаживается или когда движитель одного борта движется в одну сторону, а движитель другого борта — в другую. При этом наблюдается значительное скольжение движителей по грунту. Хотя радиус поворота в этом случае может принимать любые значения вплоть до нуля, произвольного движения корпуса машины всё-равно добиться не удаётся, так как угол  $\gamma = 0$  для точки корпуса, лежащей на продольной оси и ближайшей к МЦС (если сама эта точка не совпадает с МЦС).

Корпус колёсной машины может совершать произвольное кинематически точное движение в плоскости дороги, если все колёса будут иметь возможность

поворачиваться вокруг вертикальных осей на произвольный угол, при этом углы поворота всех колёс должны быть согласованы (рисунок 1.63.в) [166].

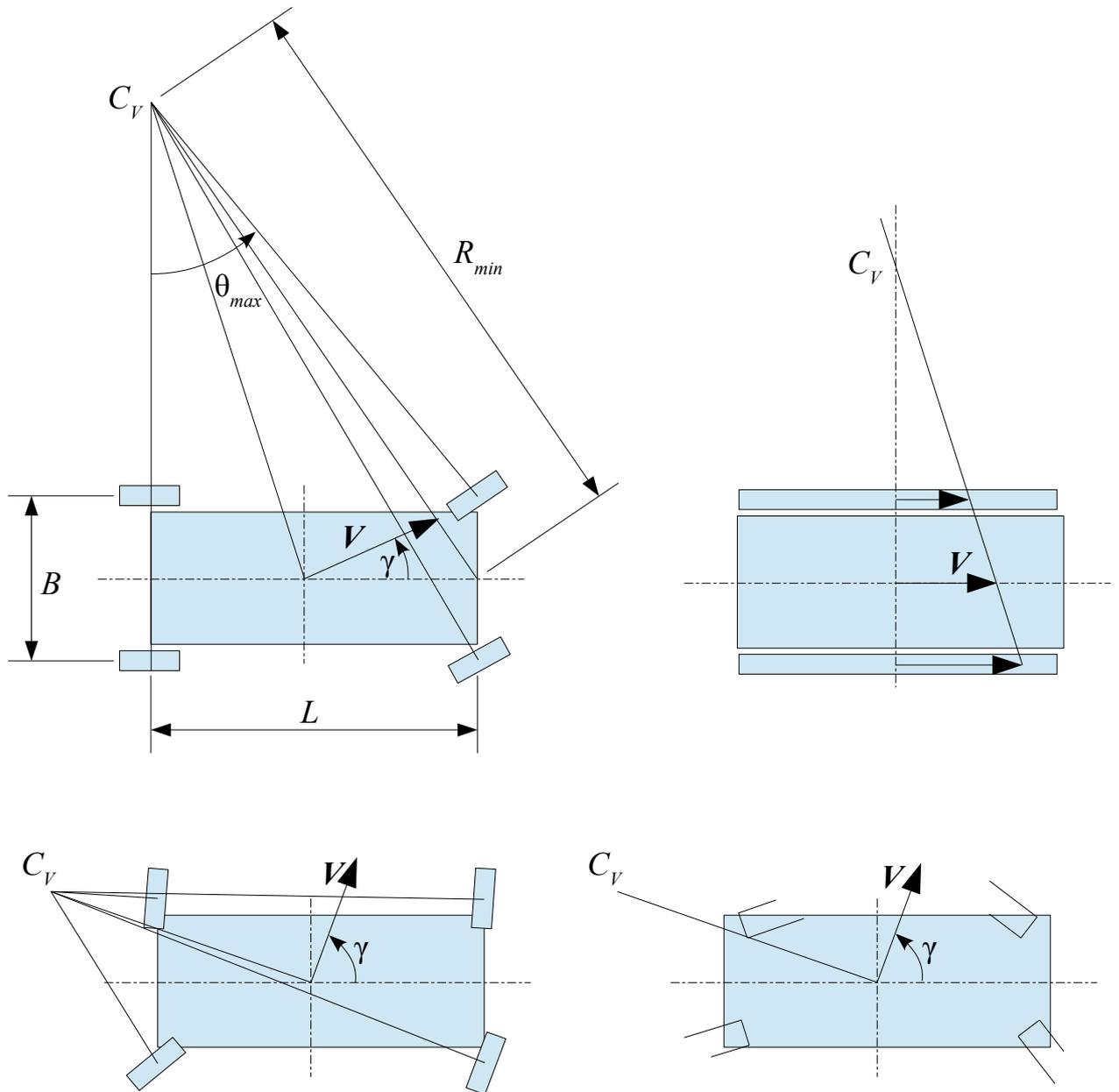


Рисунок 1.63 — Схемы поворота: а) автомобиля, б) гусеничной машины, в) колёсной машины с произвольной ориентацией колёс, г) шагающей машины.  $C_v$  — мгновенный центр скоростей корпуса,  $V$  — скорость центра корпуса.

Однако возможность осуществлять произвольное движение корпуса характерна для большинства шагающих машин, являясь своего рода «побочным эффектом» при использовании шагающих движителей с достаточно большим числом степеней подвижности. При этом углы поворота шагающих движителей относительно корпуса и друг друга могут быть произвольными (рисунок 1.63.г), МЦС корпуса может занимать произвольные положения, а направление вектора скорости характерной точки корпуса и его угловая скорость могут меняться независимо друг от друга. То есть,  $R_{min} = 0$  и  $-\pi \leq \gamma \leq \pi$ , что соответствует понятию идеальной манёвренности.

### 1.2.3. Показатели взаимодействия с окружающей средой

Особенность взаимодействия шагающего движителя с грунтом заключается в том, что сопротивление движению не является величиной постоянной. Большая часть энергии на деформацию грунта тратится в начале шага, сразу после наступания ноги на грунт. Известным подходом является усреднение этих энергозатрат на весь период шага [28, 41].

Давление стоп шагающей машины на грунт также не остаётся постоянным в процессе движения: при шагании взаимное расположение стоп и корпуса постоянно меняется, что приводит к перераспределению нагрузок, а в моменты постановки стоп на грунт наблюдаются ударные явления и колебательные процессы. Например, на рисунке 1.64 показаны данные по изменению нормальной нагрузки под стопами одного из движителей машины «Восьминог».

В результате чего нагрузки на движители и давление стоп на грунт могут меняться более чем в два раза по сравнению со статическими значениями даже при реализации походки, обеспечивающей нахождение в опоре в каждый момент времени одного и того же количества стоп. В случае, если в разные моменты времени в опоре находится разное количество стоп, нагрузки меняются в существенно больших пределах.

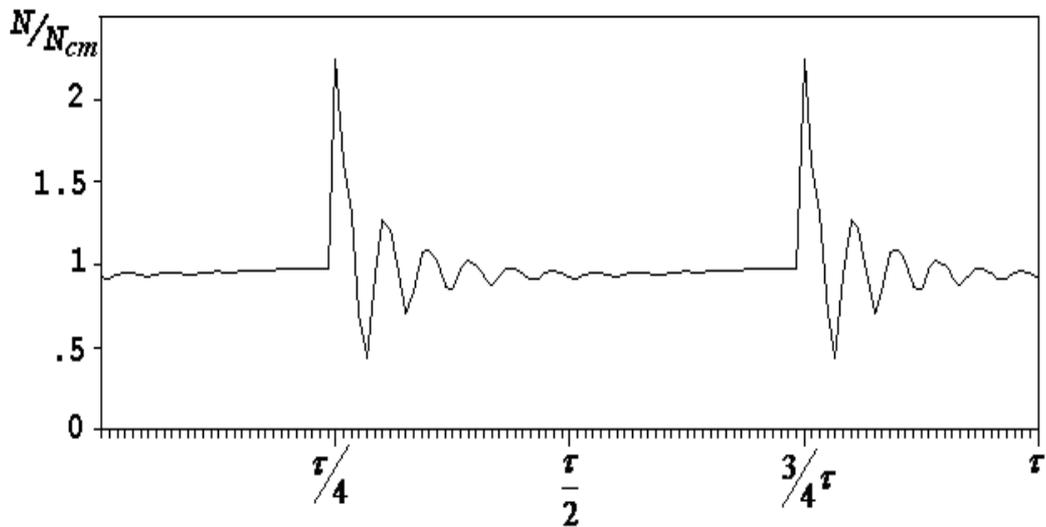


Рисунок 1.64 — Изменение нормальной реакции при наступании стопы на грунт

С одной стороны это приводит к необходимости учитывать изменение нагрузок и давлений при проектировании и управлении машиной, а с другой стороны позволяет ставить задачи синтеза таких законов движения, которые обеспечат улучшение эксплуатационных характеристик машины за счёт использования описанных эффектов.

За счёт изменения давления стопы на грунт меняются и условия их сцепления. Кроме того, значительного увеличения горизонтальной составляющей силы сцепления можно добиться при активном управлении стопой. Для оценки этих явлений вводится эффективный коэффициент сцепления, который определяется как отношение реализуемой силы сцепления в горизонтальном направлении к стационарному значению вертикальной нагрузки на стопу.

В связи с изменением вертикальной нагрузки эффективный коэффициент сцепления определяется выражением:

$$f_{\text{эф}} = f \frac{N}{N_{cm}} \quad (1.2)$$

где  $f$  — «базовый» коэффициент сцепления,  $N$  — реализуемая нормальная реакция,  $N_{cm}$  — стационарное значение нормальное реакции.

В связи с перераспределением нагрузки в пределах стопы удаётся увеличить коэффициент сцепления на величину примерно равную тангенсу угла поворота стопы относительно поверхности грунта, вызванного этим перераспределением нагрузки (рисунок 1.65) [42, 240]:

$$f_{\varphi} \approx f + \operatorname{tg} \varphi \quad (1.3)$$

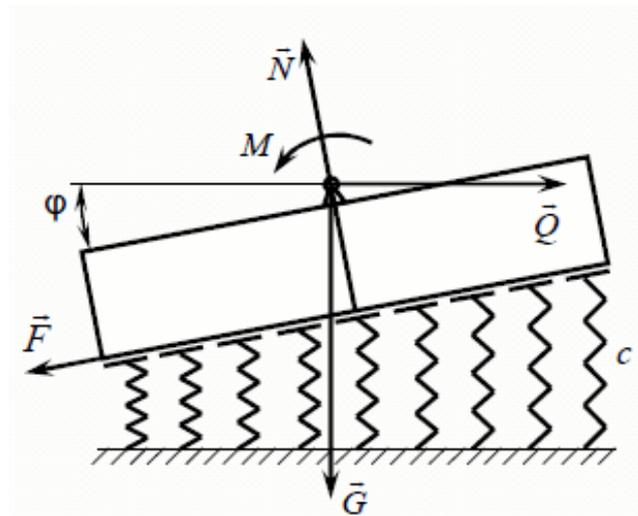


Рисунок 1.65 — Схема взаимодействия стопы с грунтом при приложении дополнительного момента сил:  $G$  — нагрузка на стопу,  $Q$  — приведённая к стопе сила сопротивления движению,  $N$  — нормальная реакция грунта,  $F$  — сила сцепления с грунтом,  $c$  — жёсткость грунта на единицу длины,  $M$  — приложенный к стопе момент сил,  $\varphi$  — угол поворота стопы.

Для оценки экологических свойств шагающей машины вводится показатель дискретности следовой дорожки (рисунок 1.66), который определяется как отношение длины следов  $l$  машины к длине шага  $L$

$$S_h = \frac{l}{L} . \quad (1.4)$$

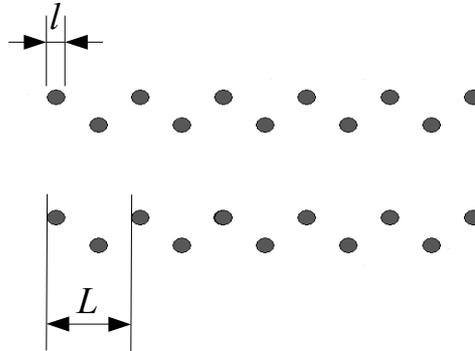


Рисунок 1.66 — Следовая дорожка

Как и для большинства других показателей, дискретность следовой дорожки определяется не только конструкцией машины, но и реализуемой походкой.

Если машина оставляет сплошную колею, то показатель дискретности принимается равным единице. Кроме экологических свойств, этот показатель влияет также на проходимость, определяя размеры препятствий, которые машина может перешагнуть без наступания на них.

Ещё одним показателем экологических свойств машины является коэффициент деформации грунта, который определяется как произведение дискретности следовой дорожки на глубину следов  $\lambda$ :

$$E_h = \lambda S_h . \quad (1.5)$$

#### 1.2.4. Геометрические показатели

К показателям профильной проходимости для машин с традиционными движителями относят: ширину преодолеваемого рва, высоту ступени, величину дорожного просвета, допустимые углы подъёма и спуска машины, допустимый

угол косогора и некоторые другие. В зависимости от конструкции шагающей машины эти показатели для неё могут определяться аналогично традиционным транспортным средствам, а могут требовать более сложных методов определения.

Под рвом понимается глубокая впадина на опорной поверхности, на дно которой опереться запрещено или невозможно. Предполагается, что ров преодолевается в квазистатическом режиме, то есть возможностью проехать этот участок дороги за счёт инерционных свойств машины пренебрегается. Считается также, что опорная поверхность жёсткая и прочная. На деформируемой и разрушающейся поверхности ширина преодолеваемого рва меньше предельных значений.

Для колёсной машины ширина преодолеваемого рва определяется размерами колеса. Предельное значение ширины рва примерно равно  $2/3$  диаметра колеса (рисунок 1.67.а).

Для гусеничной машины ширина преодолеваемого рва равна расстоянию вдоль продольной оси от центра тяжести машины до ближайшего крайнего переднего или крайнего заднего катка гусеницы (рисунок 1.67.б).

Схемы преодоления препятствий шагающими машинами показаны на рисунках 1.67.в-1.67.д. Шагающие движители показаны условно, безотносительно их конкретной конструкции. Нога, преодолевающая препятствие показана в двух положениях: пунктиром — в начале шага, сплошной линией — в конце шага, расстояние между ними характеризует максимальную длину шага.

Для шагающих машин предельная ширина  $D$  преодолеваемого рва в простейшем случае для неуправляемых стоп определяется в зависимости от соотношения максимальной длины шага  $L_s$  и длины стопы  $L_f$ :

$$D = \begin{cases} L_s, & \text{если } L_f \leq L_s \\ L_f, & \text{если } L_f/2 < L_s < L_f \\ L_s + L_f/2, & \text{если } L_s \leq L_f/2 \end{cases} \quad (1.6)$$

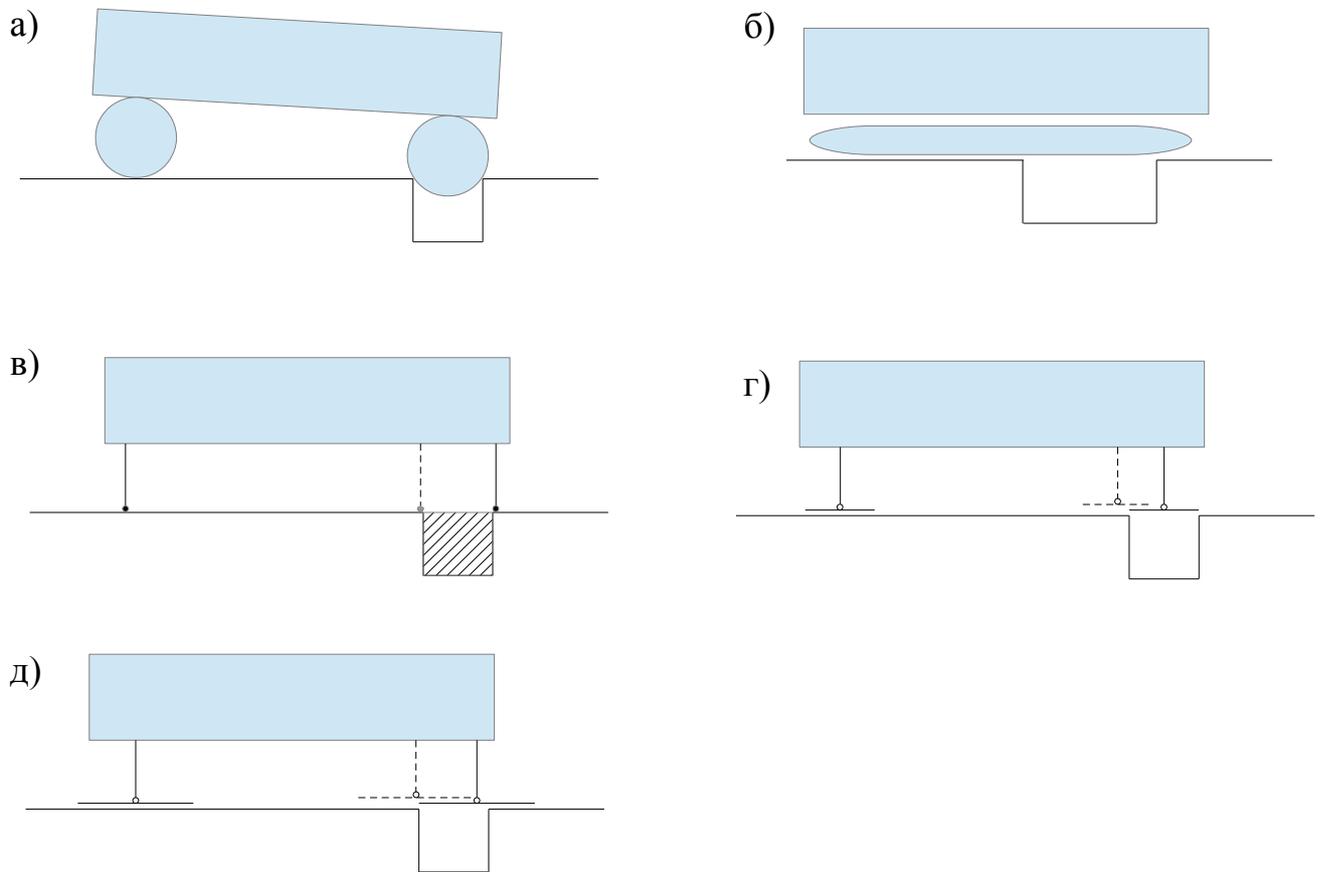


Рисунок 1.67 — Схемы преодоления рва: а) колёсной машиной; б) гусеничной машиной; в) шагающей машиной со стопами меньше длины шага; г) шагающей машины с длиной шага больше половины длины стопы и меньше длины стопы; д) шагающей машины с длиной шага меньше половины длины стопы. Пунктиром обозначено положение шагающего движителя в начале шага, сплошной линией — в конце шага. Заштрихованная область — зона запретная для наступания, которая может не являться рвом.

Как правило, для преодоления шагающей машиной препятствия максимальной ширины требуется реализация соответствующего алгоритма управления.

В ряде случаев необходимо также учитывать взаимное расположение движителей на машине, возможность управления стопами и другие факторы.

Ещё одной особенностью шагающих машин является то, что при достаточно малых размерах стоп «преодолеваемый ров» может представлять собой не впадину в опорной поверхности, а запрещённую для наступания зону (рисунок 1.67.в), например, место расположения мины в военном деле или растение в сельскохозяйственной деятельности (см. также п. 1.2.5 — дискретность следовой дорожки). Для колёсных и гусеничных машин бесконтактное преодоление такого рода препятствий не представляется возможным.

Высота преодолеваемой ступени для колёсных и гусеничных машин зависит от радиуса колеса или параметров гусеницы и определяется в значительной степени тягово-сцепными свойствами машины. Так, при одном и том же радиусе колёс, полноприводный автомобиль способен преодолевать более высокие препятствия, чем машина с приводом на два колеса.

Для шагающих машин тягово-сцепные свойства обычно не оказывают заметного влияния на высоту преодолеваемой ступени. Высота преодолеваемой ступени зависит от геометрических параметров движителей и в значительной степени определяется реализуемыми алгоритмами управления. Так, преодоление ступени шагающей машиной может происходить либо в результате наступания непосредственно на ступень (рисунок 1.68.а), либо с промежуточной опорой на ступень только одним концом стопы (рисунок 1.68.а). В первом случае максимальная высота  $H$  преодолеваемой ступени равна высоте шага, во втором случае — почти в два раза больше. Условия реализуемости этих вариантов зависят от параметров стопы, например, в случае симметричной стопы:

$$H = \begin{cases} 2 H_s, & \text{если } H_s < (L_f \sin \alpha)/2 \\ H_s, & \text{если } H_s \geq (L_f \sin \alpha)/2 \end{cases}, \quad (1.7)$$

где  $\alpha$  — предельный угол поворота стопы.

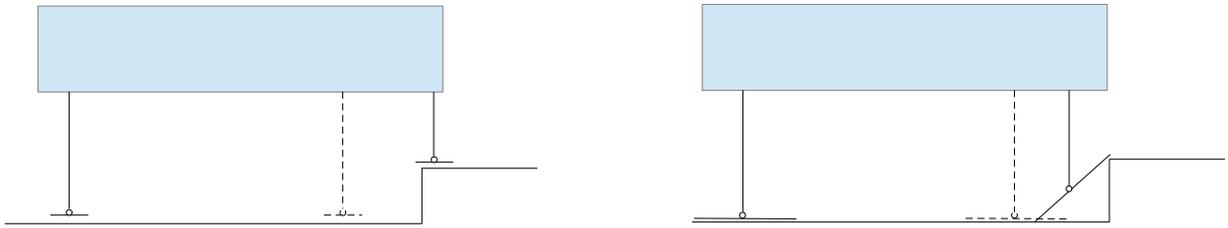


Рисунок 1.68 — Схемы преодоления ступени: а) шагающей машиной с короткой стопой; б) шагающей машиной с длинной стопой.

Дорожный просвет или клиренс машины для машин с традиционными движителями и для шагающих машин определяется одинаково — как высота нижней точки корпуса машины над уровнем грунта при движении по ровной поверхности. Однако для колёсных и гусеничных машин клиренс обычно не меняется во время движения, лишь в сравнительно небольших пределах уменьшается при увеличении загрузки машины. А для большинства шагающих машин клиренс может меняться во время движения в значительных пределах в зависимости от алгоритмов управления.

При движении на подъём, на спуск или при движении по косоугру допустимые углы наклона определяются двумя принципиально разными способами: по сцеплению и по опрокидыванию. Предельным допустимым углом считается минимальное значение из полученных этими двумя способами.

Допустимый угол по сцеплению  $\theta_\varphi$  (рисунок 1.69) определяется в зависимости от коэффициента сцепления  $\varphi$  выражением

$$\theta_\varphi = \arctg \varphi, \quad (1.8)$$

физический смысл которого в том, что составляющая силы тяжести по касательной к опорной поверхности не должна превышать силу сцепления. Поскольку коэффициенты сцепления в продольном и поперечном направлениях могут отличаться, различаются и допустимые углы на подъёме или спуске и на косогоре.

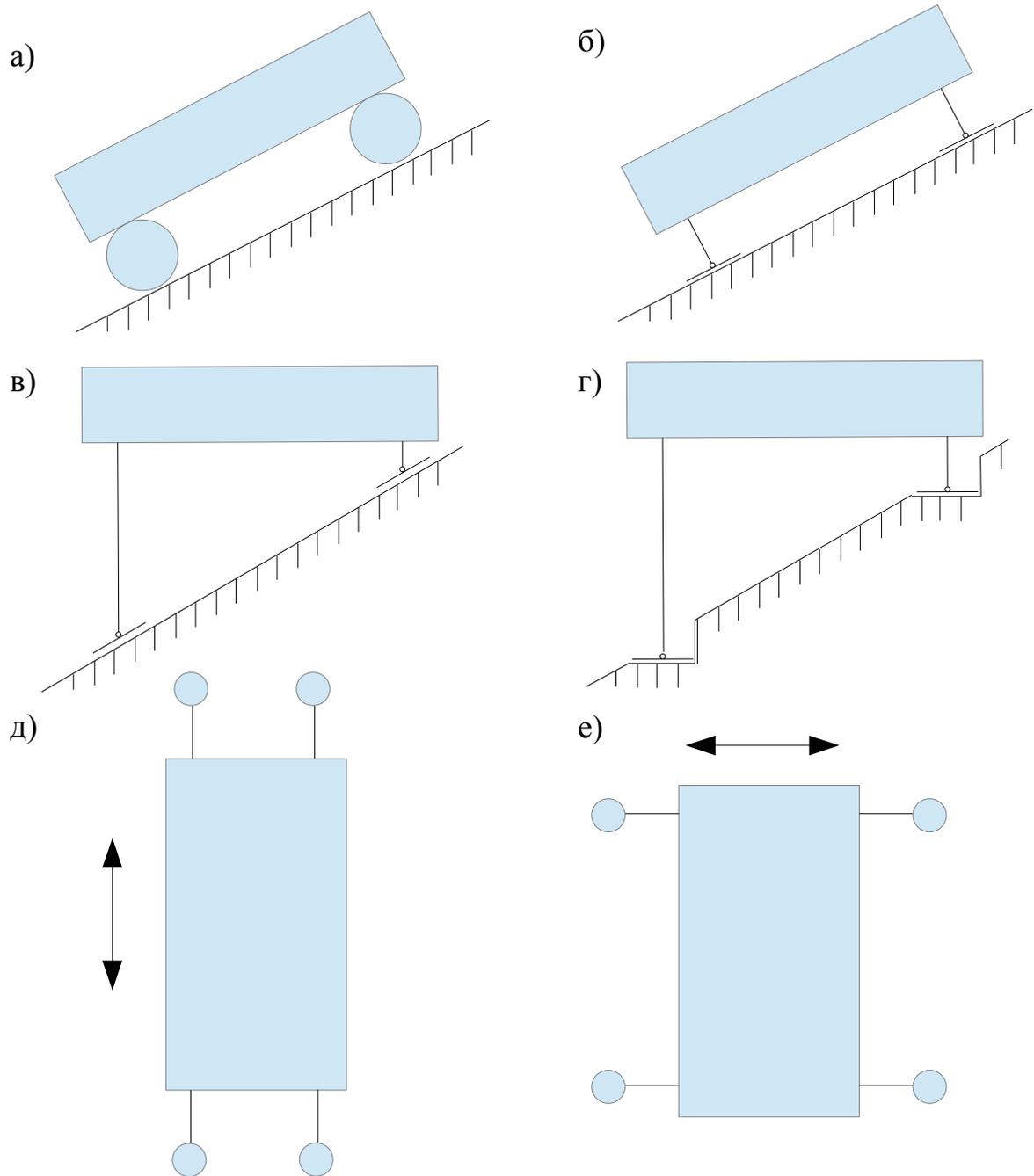


Рисунок 1.69 — Схемы движения на уклоне: а) колёсная машина; б) шагающая машина с постоянным клиренсом; в) шагающая машина с возможностью

адаптации к грунту; г) шагающая машина с возможностью адаптации и управляемой стопой на деформируемом грунте; д) шагающая машина с двигателями выдвинутыми в продольном направлении (вид сверху); е) шагающая машина с двигателями выдвинутыми в поперечном направлении (вид сверху). Стрелками показано направление уклона поверхности.

Однако некоторые шагающие машины, оснащённые управляемой стопой, при движении по достаточно пластичному грунту могут целенаправленно деформировать опорную поверхность так, как это показано на рисунке 1.69, в результате чего определение допустимого угла по сцеплению практически теряет смысл. Предельный угол в этом случае ограничивается только возможностью опрокидывания машины.

Допустимый угол по опрокидыванию  $\theta_s$  (рисунок 1.69) определяется как угол наклона опорной поверхности, при котором находящаяся на поверхности машина опрокидывается под действием силы тяжести (см. также п. 1.2.6 — показатель запаса статической устойчивости).

Для колёсных и гусеничных машин, а также для некоторых шагающих аппаратов, положение корпуса относительно опорной поверхности не может меняться (продольные и поперечные оси корпуса остаются параллельными опорной плоскости), не меняется так же и взаимное расположение опорных точек двигателей относительно корпуса машины и друг друга. Большинство же шагающих машин, а также, например, колёсно-шагающие машины, имеют возможность и менять ориентацию корпуса относительно опорной поверхности, и управлять положением опорных точек, например, располагая двигатели максимально далеко от центра тяжести машины в сторону возможного опрокидывания. Эти два фактора позволяют значительно увеличить допустимый угол подъёма или косогора.

### 1.2.5. Динамические показатели

Энергетический баланс шагающей машины состоит из слагаемых, характерных и для других наземных ТС (полезная механическая работа, потери в трансмиссии, потери на преодоление сил сопротивления движению и т. д.), и слагаемых, специфичных для шагающих аппаратов: затрат энергии на разгон-торможение шагающих движителей на каждом шаге  $W_\phi$ , затрат энергии на разгон-торможение корпуса машины в горизонтальном направлении  $W_m$  и затрат энергии на вертикальные перемещения корпуса  $W_G$  [51, 104, 148, 195]. Энергетическая эффективность оценивается долей специфичных для шагающих машин затрат энергии в общем энергетическом балансе машины в установившемся режиме движения. Чем меньше эта доля, тем лучше энергетическая эффективность машины.

$$\eta = \frac{W_G + W_m + W_\phi}{W}, \quad (1.9)$$

где  $W$  — суммарная мощность при движении машины в установившемся режиме.

Теоретико-механическая модель динамики движения машины, позволяя вычислять энергетический баланс, позволяет определять такие динамические показатели как максимальная скорость, требуемая удельная мощность двигателей, расход энергии на единицу пути, принципы определения которых не отличаются от тех, что используются в теории традиционных транспортных средств [97, 117, 271].

К динамическим показателям относятся и такие показатели как комфортабельность и запас статической устойчивости.

Комфортабельность является комплексным показателем, включающим в себя несколько разнородных показателей, среди которых можно выделить механические показатели, такие как: максимальное ускорение, максимальный

рывок и другие [190, 226, 227]. В отличие от колёсных и гусеничных машин, неравномерность движения корпуса шагающей машины определяется не только неровностями дороги и движением в неустановившихся режимах, но также особенностями кинематики движителей и реализуемыми алгоритмами движения. Другими словами, даже при движении по идеально ровной поверхности в установившемся маршевом режиме движения корпус может совершать колебательные движения в различных направлениях. Механические показатели комфортабельности характеризуют неравномерность движения корпуса как твёрдого тела или отдельных его точек.

Запас статической устойчивости определяет способность шагающих машины сохранять устойчивость от опрокидывания при воздействии на неё внешних сил. Известные методы расчёта запаса статической устойчивости описаны в [147].

### ***1.3. Многокритериальная оптимизация шагающих машин***

Известные методы комплексной оценки различных видов продукции как правило основываются на технико-экономические показателях, причём даже технические показатели обычно рассматриваются через призму экономической составляющей [63, 65, 87, 129, 169, 170, 172, 212, 223]. Ориентация на экономическую эффективность является совершенно оправданной для серийно выпускаемой продукции. Однако такой подход затруднительно использовать для области исследований в которой образцы техники изготавливаются обычно в единственном экземпляре. Оценка качества в этом случае должна строиться исключительно на технических показателях. В то же время, следует отметить, что сами методы оценки являются достаточно универсальными и их использование возможно для любого набора показателей.

Многокритериальная оптимизация параметров, структуры и законов управления движением шагающих роботов, с учётом функционального предназначения машины, заключается в поиске минимума общего критерия качества, который вводится в виде линейной взвешенной комбинации частных критериев или показателей качества

$$I = \sum_j k_j H_j \rightarrow \min \quad (1.10)$$

где  $k_j$  — весовые коэффициенты значимости соответствующих показателей,  $H_j$  — нормированные значения показателей качества шагающей машины.

Вместо минимума общего критерия может определяться и его максимум. Чтобы перейти от поиска минимума к поиску максимума или наоборот, достаточно поменять знаки частных показателей  $H_j$ . Выбор из этих двух вариантов определяется, главным образом, удобством представления результатов.

Показатели качества  $H_j$ , как правило, являются линейными функционалами от тех или иных функций  $f_j$ , определяемых механическим состоянием шагающей машины.

$$H_j = \mathbf{H}_j(f_j) \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{H}_j$  — линейный оператор, задающий отображение из пространства функций на множество вещественных чисел, например: интеграл от функции  $f_j$  по времени.

В некоторых случаях на оптимизируемую механическую систему могут накладываться дополнительные условия, например, условие согласованности движения корпуса и ног шагающего аппарата. Обычно такие условия также

являются линейными функционалами от функций механического состояния системы.

Функции  $f_j$  могут быть произвольными функциями обобщённых координат механической системы и их производных. Например, критерий тепловых потерь в двигателе представляет собой интеграл за период движения  $\tau$  от квадрата момента сил  $M$ , развиваемого двигателем

$$H_M = \int_0^{\tau} f_M dt = \int_0^{\tau} n_M M^2 dt \quad (1.12)$$

где  $n_M$  — нормирующий коэффициент.

Момент сил, развиваемый двигателем, в свою очередь определяется из дифференциальных уравнений той или иной теоретико-механической модели. В простейшем случае для одностепенного механизма дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$J \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 = M - M_c \quad (1.13)$$

где  $J$  — приведённый момент инерции,  $\varphi$  — обобщённая координата механизма,  $M_c$  — момент сил сопротивления. Откуда момент  $M$  определяется как функция первой и второй производной от обобщённой координаты.

В общем случае операторы  $\mathbf{H}_j$  являются различными, однако класс задач, в которых выражение (1.10) содержит только функционалы, определяемые одним и тем же линейным оператором  $\mathbf{H}$  (например, интегралом с одними и теми же пределами интегрирования), достаточно велик. Тогда обобщённый критерий качества записывается в виде

$$I = \mathbf{H}(\Phi) \rightarrow \min \quad (1.14)$$

где

$$\Phi = \sum_j k_j f_j \quad (1.15)$$

является функцией механического состояния шагающей машины, зависящей также от весовых коэффициентов  $k_j$  и позволяющей при их изменении управлять качеством шагающего аппарата.

Целью многокритериальной оптимизации является поиск Парето оптимальных решений по частным критериям  $H_j$  и выбор исследователем одного из этих решений на основе анализа соответствующих значений критериев  $H_j$ .

Если для заданных значений весовых коэффициентов  $k_j$  удаётся найти минимум или максимум общего критерия качества (1.10), то найденное решение является Парето-оптимальным относительно частных критериев  $H_j$ .

Для каждого набора весовых коэффициентов  $k_j$  может быть найдено наилучшее (максимальное или минимальное) значение обобщённого критерия  $I$ , которое соответствует одному из возможных Парето оптимальных решений по частным критериям  $H_j$ . При этом, сами по себе значения весовых коэффициентов  $k_j$  не важны, а выбор из возможных программных законов движения робота производится на основании значений частных критериев  $H_j$  по следующему алгоритму (рисунок 1.70).

1. Задаются произвольно или на основании имеющегося опыта коэффициенты  $k_j$ .

2. Строится обобщённый критерий качества (1.10).

3. В зависимости от конкретной решаемой задачи определяются параметры, структура или законы движения шагающей машины, соответствующие максимуму или минимуму обобщённого критерия качества для набора коэффициентов  $k_j$ .

4. Вычисляются значения частных показателей (1.11).

5. Производится субъективная оценка частных показателей. Если они удовлетворяют разработчика, то программное движение выбрано, и алгоритм завершается.

6. Если один или некоторые показатели, по мнению разработчика, требуют улучшения, то соответствующий коэффициент или коэффициенты значимости увеличиваются, и производится переход к п. 2 алгоритма.

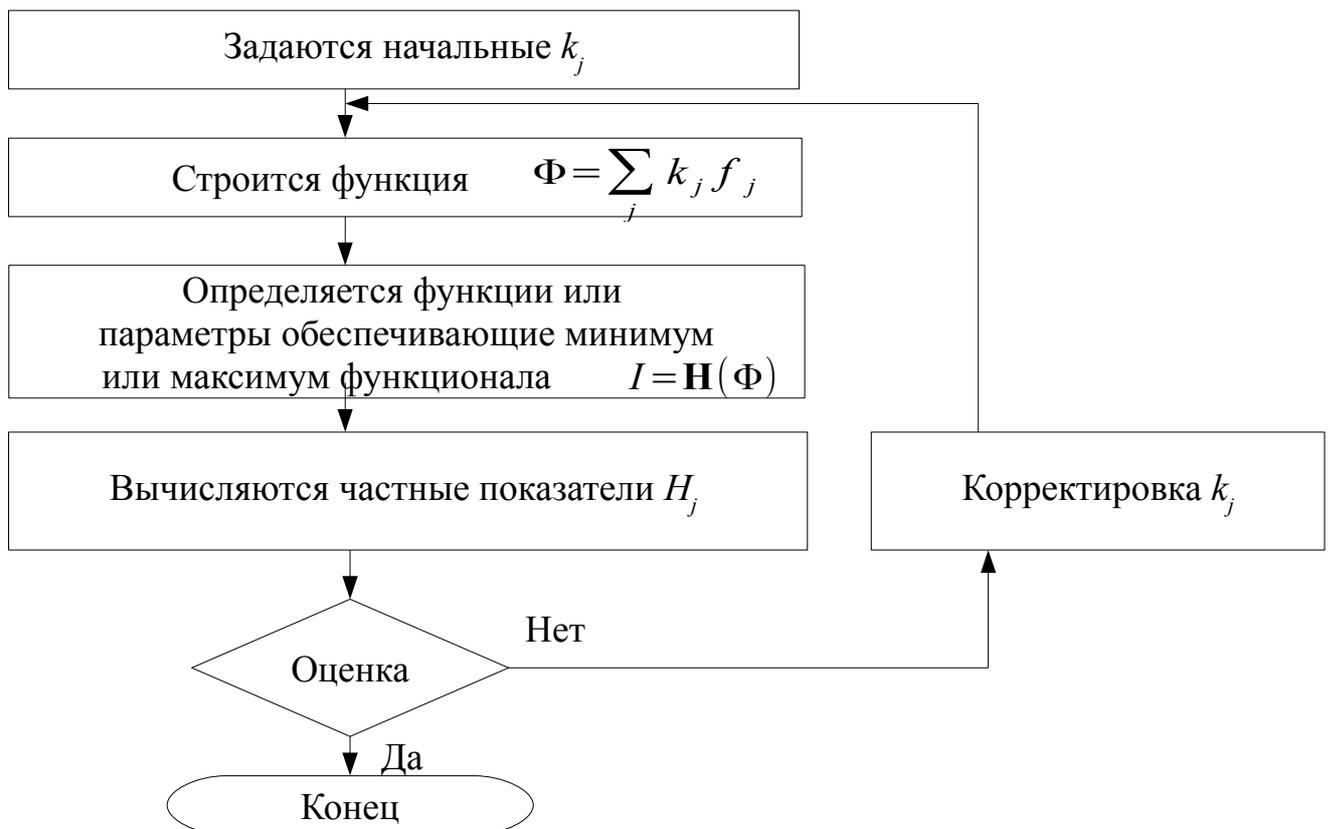


Рисунок 1.70 — Алгоритм многокритериальной оптимизации

Увеличение одного из весовых коэффициентов  $k_j$  при неизменных остальных коэффициентах приводит к улучшению (уменьшению, если ищется минимум) соответствующего частного показателя  $H_j$  в силу следующих соображений. Пусть найдено решение, обеспечивающее минимум выражения (1.10), и исследователь хочет улучшить один из показателей — для определённости  $H_1$ , увеличивая для этого соответствующий коэффициент  $k_1$  на  $\Delta k$ . Тогда новое решение, обеспечивающее минимум общего критерия качества, может быть записано в виде:

$$I^* = \Delta k H_1^* + \sum_j k_j H_j^* \rightarrow \min \quad (1.16)$$

где  $H_j^*$  — значения частных критериев, соответствующие новому решению. Справедливость выражения (1.10) в частности означает, что никакое другое решение не может дать значения частных показателей, которые уменьшили бы сумму (1.10). Следовательно справедливо неравенство

$$\sum_j k_j H_j^* > \sum_j k_j H_j \quad (1.17)$$

С другой стороны, минимум выражения (1.16) означает справедливость неравенства

$$\Delta k H_1^* + \sum_j k_j H_j^* < \Delta k H_1 + \sum_j k_j H_j \quad (1.18)$$

Откуда следует

$$\Delta k(H_1^* - H_1) < \sum_j k_j H_j - \sum_j k_j H_j^* < 0 \quad (1.19)$$

или

$$H_1^* < H_1, \quad (1.20)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, выбор оптимального программного движения происходит в интерактивном режиме в форме диалога разработчика с компьютером. В отличие от других интерактивных методов многокритериальной оптимизации, например, от метода исследования пространства параметров [237], в данном случае множество допустимых решений в целом не определяется и не анализируется. Разработчик выбирает из ограниченного количества решений — по одному на каждую итерацию, каждое из которых является оптимальным в смысле Парето.

## **2. Разработка теоретико-механической модели движения шагающих машин**

### **2.1. Динамика движения шагающей машины как системы твёрдых тел**

Одной из основных задач при разработке теоретико-механической модели является получение уравнений движения в форме, удобной для разработки расчётных компьютерных программ. По этой причине уравнения записываются в развёрнутом виде, несмотря на то, что такая запись более громоздка и возможно менее наглядна по сравнению с записью в виде векторных или матричных уравнений [86, 216].

Шагающие машины рассматриваются как механические системы, состоящие из абсолютно твёрдых тел, взаимодействие между которыми может задаваться в виде стационарных и нестационарных связей, а также сил и моментов сил между ними. При моделировании механических систем с замкнутыми кинематическими цепями избыточные связи разрезаются и заменяются соответствующими силами [68, 72, 216].

Для удобства автоматизации составления и решения уравнений движения вводится неподвижное базовое тело (среда), с которым связывается абсолютная система отсчёта, включающая в себя декартову прямоугольную правоориентированную систему координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и время  $t$ .

Внешние силы, действующие на моделируемую систему, рассматриваются в этом случае как силы взаимодействия между средой и телами системы. Например: сила тяжести или сила вязкого сопротивления среды задаются как силы взаимодействия между базовым телом и соответствующим телом системы. Связи, наложенные на тела системы со стороны не входящих в систему тел, рассматриваются как связи между телами системы и средой. Так, например,

взаимодействие стоп шагающей машины с опорной поверхностью в зависимости от решаемой задачи моделируется либо как геометрическая неударживающая связь, либо как упруго-вязко-пластичная сила взаимодействия между стопой и базовым телом [28, 78, 109, 113, 195, 243].

С каждым  $i$  твёрдым телом, входящим в состав механической системы, связывается подвижная система координат  $x_i, y_i, z_i$  с началом отсчёта в центре масс тела. Матрица направляющих косинусов для перехода из неподвижной системы отсчёта в подвижную, связанную с  $i$  телом имеет вид:

$$A_i = \begin{vmatrix} \alpha_{i11} & \alpha_{i12} & \alpha_{i13} \\ \alpha_{i21} & \alpha_{i22} & \alpha_{i23} \\ \alpha_{i31} & \alpha_{i32} & \alpha_{i33} \end{vmatrix}, \quad (2.1)$$

Задаётся масса  $m_i$  тела и его тензор инерции (компоненты тензора инерции относительно осей подвижной системы координат обозначаются через  $J_{ix}, J_{iy}, J_{iz}, J_{ixy}, J_{ixz}, J_{iyz}$ ).

Для удобства формального описания и программного моделирования взаимодействия между телами рассматриваются взаимодействия различных типов, которые могут содержать геометрические ограничения на взаимное положение взаимодействующих тел, кинематические ограничения и силы и моменты сил взаимодействия между телами.

Взаимодействие, содержащее только геометрические ограничения на движение, эквивалентно голономной связи или программному закону относительного перемещения тел.

Взаимодействие, содержащее геометрические и кинематические ограничения, эквивалентно неголономной связи или программному закону изменения относительной скорости тел. На практике в некоторых случаях бывает удобно использовать кинематические ограничения для задания программных скоростей даже в том случае, если кинематические уравнения могут быть проинтегрированы.

Разрабатываемый подход позволяет при реализации теоретико-механической модели в виде компьютерной программы объединять в рамках одного программируемого объекта как связи, так и силовые взаимодействия тел.

Рассматривается система состоящая из  $N$  тел, связанных  $K$  взаимодействиями (связями или силами). Величины относящиеся к  $i$  телу обозначаются одним индексом ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), а величины относящиеся к взаимодействиям двумя индексами  $ij$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ), первый из которых указывает на тело к которому приложено воздействие, а второй — со стороны которого приложено воздействие. Индекс 0 зарезервирован для обозначения среды. Поэтому уравнения для  $i=0$  не записываются.

Воспользовавшись принципом освобожденности от связей уравнения динамики пространственного движения  $i$  тела в подвижной системе отсчёта, связанной с этим телом, могут быть записаны на основе теоремы об изменении количества движения и теоремы об изменении кинетического момента:

$$\begin{aligned}
 m_i(\dot{V}_{ix} + q_i V_{iz} - r_i V_{iy}) &= \sum_j F_{ijx}, \\
 m_i(\dot{V}_{iy} + r_i V_{ix} - p_i V_{iz}) &= \sum_j F_{ijy}, \\
 m_i(\dot{V}_{iz} + p_i V_{iy} - q_i V_{ix}) &= \sum_j F_{ijz}, \\
 J_{ix} \dot{p}_i - J_{ixy} \dot{q}_i - J_{ixz} \dot{r}_i + (J_{iz} - J_{iy}) q_i r_i + J_{iyz} (r_i^2 - q_i^2) + p_i (J_{ixy} r_i - J_{ixz} q_i) &= \\
 &= \sum_j (M_{ijx} + F_{ijz} y_{ij} - F_{ijy} z_{ij}), \quad (2.2) \\
 -J_{ixy} \dot{p}_i + J_{iy} \dot{q}_i - J_{iyz} \dot{r}_i + (J_{ix} - J_{iz}) r_i p_i + J_{ixz} (p_i^2 - r_i^2) + q_i (J_{iyz} p_i - J_{ixy} r_i) &= \\
 &= \sum_j (M_{ijy} + F_{ijx} z_{ij} - F_{ijz} x_{ij}), \\
 -J_{ixz} \dot{p}_i - J_{iyz} \dot{q}_i + J_{iz} \dot{r}_i + (J_{iy} - J_{ix}) p_i q_i + J_{ixy} (q_i^2 - p_i^2) + r_i (J_{ixz} q_i - J_{iyz} p_i) &= \\
 &= \sum_j (M_{ijz} + F_{ijy} x_{ij} - F_{ijx} y_{ij})
 \end{aligned}$$

где  $V_{ix}$ ,  $V_{iy}$ ,  $V_{iz}$ ,  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $r_i$  — проекции скорости центра масс и угловой скорости твёрдого тела на оси подвижной системы координат (квазискорости);  $F_{ijx}$ ,  $F_{ijy}$ ,  $F_{ijz}$ ,  $M_{ijx}$ ,  $M_{ijy}$ ,  $M_{ijz}$  — проекции главного вектора и главного момента сил

взаимодействия  $i$  и  $j$  тел на оси подвижной системы координат, связанной с  $i$  телом, относительно точки взаимодействия тел;  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $z_{ij}$  — координаты точки, принадлежащей  $i$  телу, в которой оно взаимодействует с  $j$  телом, заданные в подвижной системе координат, связанной с  $i$  телом. Индекс  $j$  под знаком суммы принимает значения номеров только тех тел, которые взаимодействуют с  $i$  телом. Можно записать соответствующие формальные условия, однако для упрощения записи эти условия в уравнениях (2.3) опущены, поскольку справедливость уравнений (2.3) не нарушается, даже если индекс  $j$  будет принимать значения номеров всех тел, входящих в систему. При реализации теоретико-механической модели в виде компьютерной программы на принципах объектно-ориентированного программирования эти условия выполняются автоматически и их формальная запись также не требуется.

Известны различные способы выбора обобщённых координат, описывающих пространственное движение твёрдого тела [68, 79].

Поступательную составляющую движения тела удобно описывать координатами центра масс тела в неподвижной системе отсчёта, которые для  $i$  тела обозначаются через  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$ . Дифференциальные уравнения для этих координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= V_{ix} \alpha_{i11} + V_{iy} \alpha_{i21} + V_{iz} \alpha_{i31} \\ \dot{\eta}_i &= V_{ix} \alpha_{i12} + V_{iy} \alpha_{i22} + V_{iz} \alpha_{i32} \\ \dot{\zeta}_i &= V_{ix} \alpha_{i13} + V_{iy} \alpha_{i23} + V_{iz} \alpha_{i33} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\alpha_{i11}$ ,  $\alpha_{i21}$ ,  $\alpha_{i31}$ ,  $\alpha_{i12}$ ,  $\alpha_{i22}$ ,  $\alpha_{i32}$ ,  $\alpha_{i13}$ ,  $\alpha_{i23}$ ,  $\alpha_{i33}$  — направляющие косинусы между осями подвижной и неподвижной систем отсчёта.

Для описания вращательной составляющей движения могут быть выбраны различные системы обобщённых координат: три независимых координаты (углы Эйлера, корабельные углы, самолётные углы и другие), четыре координаты с

одним уравнением связи (параметры Эйлера или параметры Родрига-Гамильтона, параметры Кэли-Клейна), девять координат с шестью уравнениями связей (направляющие косинусы).

Преимуществом системы трёх координат является их независимость, что уменьшает количество совместно решаемых уравнений, а также простота и наглядность их использования. Основным же недостатком является то, что любая из систем трёх координат имеет вырождение при некоторых положениях тела. Использование систем с четырьмя или девятью координатами позволяет избежать проблем с вырождением значений, но увеличивает количество уравнений, что в свою очередь влияет на точность и быстродействие расчётов.

Среди систем трёх координат для целей исследования наиболее удобным представляется использование корабельных углов — дифферента, крена и рысканья  $\psi_i, \theta_i, \varphi_i$ , задающих последовательные повороты вокруг 2, 1 и 3 осей. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_i &= (q_i \cos \varphi_i - p_i \sin \varphi_i) / \cos \theta_i \\ \dot{\theta}_i &= p_i \cos \varphi_i - q_i \sin \varphi_i \\ \dot{\varphi}_i &= r_i + \operatorname{tg} \theta_i (p_i \sin \varphi_i + q_i \cos \varphi_i)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Направляющие косинусы между осями подвижной и неподвижной системами координат для этого случая представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 — Направляющие косинусы через корабельные углы

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x_i$	$\alpha_{i11} = \cos \psi_i \cos \varphi_i + \sin \psi_i \sin \varphi_i \sin \theta_i$	$\alpha_{i12} = \sin \varphi_i \cos \theta_i$	$\alpha_{i13} = -\cos \varphi_i \sin \psi_i + \sin \varphi_i \cos \psi_i \sin \theta_i$
$y_i$	$\alpha_{i21} = -\cos \psi_i \cos \varphi_i + \sin \psi_i \cos \varphi_i \sin \theta_i$	$\alpha_{i22} = \cos \varphi_i \cos \theta_i$	$\alpha_{i23} = \sin \varphi_i \sin \psi_i + \cos \varphi_i \cos \psi_i \sin \theta_i$
$z_i$	$\alpha_{i31} = \sin \psi_i \cos \theta_i$	$\alpha_{i32} = -\sin \theta_i$	$\alpha_{i33} = \cos \psi_i \cos \theta_i$

Уравнения (2.4) имеют особенность — они вырождаются при угле крена  $\theta_i = \pm \pi/2$ . Поэтому их использование не возможно когда угол крена приближается к указанным значениям.

Критические случаи отсутствуют при использовании системы четырёх координат. При выборе в качестве таких координат параметров Эйлера  $h_{i0}, h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}$  дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{h}_{i0} &= -(h_{i1}p + h_{i2}q + h_{i3}r)/2 \\ \dot{h}_{i1} &= (h_{i0}p - h_{i3}q + h_{i2}r)/2 \\ \dot{h}_{i2} &= (h_{i3}p + h_{i0}q - h_{i1}r)/2 \\ \dot{h}_{i3} &= (-h_{i2}p + h_{i1}q + h_{i0}r)/2\end{aligned}\tag{2.5}$$

Поскольку параметры Эйлера являются нормированными кватернионами, их значения связаны между собой уравнением связи вида:

$$h_{i0}^2 + h_{i1}^2 + h_{i2}^2 + h_{i3}^2 = 1\tag{2.6}$$

При численном интегрировании системы уравнений, включающих в себя выражения вида (2.5), неминуемо будут возникать ошибки, приводящие к нарушению условия (2.6). Для коррекции этих ошибок следует продолжать вычисления не с рассчитанных значений  $h_{i\alpha}$ , а со значений  $h_{i\alpha}^*$ , вычисляемых по формуле:

$$h_{i\alpha}^* = \frac{h_{i\alpha}}{\sqrt{h_{i0}^2 + h_{i1}^2 + h_{i2}^2 + h_{i3}^2}}\tag{2.7}$$

Направляющие косинусы между осями подвижной и неподвижной систем координат через параметры Эйлера выражаются формулами, приведёнными в таблице 2.2.

Таблица 2.2 — Направляющие косинусы через параметры Эйлера

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x_i$	$\alpha_{i11} = 2(h_{i0}^2 + h_{i1}^2) - 1$	$\alpha_{i12} = 2(h_{i1}h_{i2} - h_{i0}h_{i3})$	$\alpha_{i13} = 2(h_{i1}h_{i3} + h_{i0}h_{i2})$
$y_i$	$\alpha_{i21} = 2(h_{i1}h_{i2} + h_{i0}h_{i3})$	$\alpha_{i22} = 2(h_{i0}^2 + h_{i2}^2) - 1$	$\alpha_{i23} = 2(h_{i2}h_{i3} - h_{i0}h_{i1})$
$z_i$	$\alpha_{i31} = 2(h_{i1}h_{i3} - h_{i0}h_{i2})$	$\alpha_{i32} = 2(h_{i2}h_{i3} - h_{i0}h_{i1})$	$\alpha_{i33} = 2(h_{i0}^2 + h_{i3}^2) - 1$

Разработанные теоретико-механическая модель и программно-алгоритмическое обеспечение ориентированы на то, чтобы предоставить свободу выбора между разными способами задания угловых положений тел. Так, формируя модель шагающей машины, можно для каждого тела выбрать: описывать ли его положение корабельными углами или параметрами Эйлера. Архитектура программного комплекса допускает также добавление новых объектов, реализующих другие способы описания положения тела.

Для преобразования корабельных углов и параметров Эйлера друг в друга служат выражения через направляющие косинусы.

Корабельные углы определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 \sin \theta_i &= -\alpha_{i32}, & \cos \theta_i &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}, \\
 \sin \psi_i &= \alpha_{i31} / \cos \theta_i, & \cos \psi_i &= \alpha_{i33} / \cos \theta_i, \\
 \sin \varphi_i &= \alpha_{i12} / \cos \theta_i, & \cos \varphi_i &= \alpha_{i22} / \cos \theta_i.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

А для вычисления параметров Эйлера используется следующий алгоритм.

1) Вычисляется значение  $h_{i0}$ :

$$\begin{aligned}
 h_{i0} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \alpha_{i11} + \alpha_{i22} + \alpha_{i33}}{4}} \neq 0 \\
 h_{i1} &= (\alpha_{i32} - \alpha_{i23}) / 4 h_{i0} \\
 h_{i2} &= (\alpha_{i13} - \alpha_{i31}) / 4 h_{i0} \\
 h_{i3} &= (\alpha_{i21} - \alpha_{i12}) / 4 h_{i0}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Если  $h_{i0} \neq 0$ , то вычисляются остальные параметры. В противном случае следует перейти к пункту 2.

2) Вычисляется значение  $h_{i1}$ :

$$\begin{aligned}
 h_{i0} &= 0 \\
 h_{i1} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \alpha_{i11}}{2}} \neq 0 \\
 h_{i2} &= \alpha_{i12} / 2 h_{i1} \\
 h_{i3} &= \alpha_{i13} / 2 h_{i1}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Если  $h_{i1} \neq 0$ , то вычисляются остальные параметры. В противном случае следует перейти к пункту 3.

3) Вычисляется значение  $h_{i2}$ :

$$\begin{aligned}
 h_{i0} &= 0 \\
 h_{i1} &= 0 \\
 h_{i2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \alpha_{i22}}{2}} \neq 0 \\
 h_{i3} &= \alpha_{i23} / 2 h_{i2}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Если  $h_{i2} \neq 0$ , то вычисляются остальные параметры. В противном случае следует перейти к пункту 4.

4) В этом случае, параметры определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} h_{i0} &= 0 \\ h_{i1} &= 0 \\ h_{i2} &= 0 \\ h_{i3} &= \pm 1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Выбор знака «+» или «-» в уравнениях (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) не существенен в том смысле, что оба получающихся таким образом набора углов или параметров соответствуют одному и тому же положению тела. Однако, на практике для получения гладких решений необходимо контролировать значения углов или параметров на каждом шаге вычислений и выбирать то решение, которое будет ближе к их значениям на предыдущем шаге расчёта.

Взаимодействие между телами (включая взаимодействие тел со средой) может задаваться в виде силовых полей, голономных или неголономных связей, в общем случае нестационарных. Общее количество таких уравнений для каждого взаимодействия равно шести. В зависимости от вида взаимодействия часть этих уравнений соответствует уравнениям связей, а остальные — задаются в виде выражений для сил и моментов сил в проекциях на те оси подвижных систем отсчёта, движение по которым не ограничивается связями. Примеры: 1) для сферического шарнира задаются три уравнения связи, геометрический смысл которых — абсолютные координаты точки взаимодействия тел должны быть равны друг другу, и три уравнения силовых полей для моментов  $M_{ijx}$ ,  $M_{ijy}$ ,  $M_{ijz}$ , которые в частном случае при отсутствии в шарнире трения и управления могут быть равны нулю; 2) для скользящей заделки записывается одно силовое

уравнение в проекции на ось заделки (в частных случаях эта сила может быть равна нулю, представлять собой силу трения, развиваемое двигателем усилие и т. п.) и пять уравнений связей, задающих ограничения на взаимный поворот тел и линейное перемещение в направлениях, ортогональных оси заделки.

Силы взаимодействия между телами подчиняются 3 закону Ньютона

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} &= -\vec{F}_{ji} \\ \vec{M}_{ij} &= -\vec{M}_{ji} \end{aligned} \quad (2.13)$$

кроме того для  $i = j$  выполняются условия

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} &= 0 \\ \vec{M}_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, для  $K$  взаимодействий между телами имеется  $12K$  сил и моментов сил (активных или реакций связей), количество независимых из которых равно  $6K$ . Для упрощения программной реализации вводится правило: независимыми считаются силы и моменты сил приложенные со стороны тел с меньшими индексами к телам с большими индексами. В частности, это означает, что в расчёт всегда учитываются силы приложенные со стороны среды к телам, а не наоборот. Следовательно для вычисления сумм в правых частях уравнений (2.2) необходимо выбирать  $F_{ij}$  и  $M_{ij}$  при  $i > j$ , и  $-F_{ij}$  ( $-M_{ij}$ ) при  $i < j$ :

$$\begin{aligned}
m_i(\dot{V}_{ix} + q_i V_{iz} - r_i V_{iy}) &= \sum_j \begin{cases} F_{ijx}, & \text{npu } i > j \\ -F_{ijx}, & \text{npu } i < j \end{cases} \\
m_i(\dot{V}_{iy} + r_i V_{ix} - p_i V_{iz}) &= \sum_j \begin{cases} F_{ijy}, & \text{npu } i > j \\ -F_{ijy}, & \text{npu } i < j \end{cases} \\
m_i(\dot{V}_{iz} + p_i V_{iy} - q_i V_{ix}) &= \sum_j \begin{cases} F_{ijz}, & \text{npu } i > j \\ -F_{ijz}, & \text{npu } i < j \end{cases} \\
J_{ix} \dot{p}_i - J_{ixy} \dot{q}_i - J_{ixz} \dot{r}_i + (J_{iz} - J_{iy}) q_i r_i + J_{iyz} (r_i^2 - q_i^2) + p_i (J_{ixy} r_i - J_{ixz} q_i) &= \\
&\sum_j \begin{cases} M_{ijx} + F_{ijz} y_{ij} - F_{ijy} z_{ij}, & \text{npu } i > j \\ -(M_{ijx} + F_{ijz} y_{ij} - F_{ijy} z_{ij}), & \text{npu } i < j \end{cases} \quad (2.15) \\
-J_{ixy} \dot{p}_i + J_{iy} \dot{q}_i - J_{iyz} \dot{r}_i + (J_{ix} - J_{iz}) r_i p_i + J_{ixz} (p_i^2 - r_i^2) + q_i (J_{iyz} p_i - J_{ixy} r_i) &= \\
&\sum_j \begin{cases} M_{ijy} + F_{ijx} z_{ij} - F_{ijz} x_{ij}, & \text{npu } i > j \\ -(M_{ijy} + F_{ijx} z_{ij} - F_{ijz} x_{ij}), & \text{npu } i < j \end{cases} \\
-J_{ixz} \dot{p}_i - J_{iyz} \dot{q}_i + J_{iz} \dot{r}_i + (J_{iy} - J_{ix}) p_i q_i + J_{ixy} (q_i^2 - p_i^2) + r_i (J_{ixz} q_i - J_{iyz} p_i) &= \\
&\sum_j \begin{cases} M_{ijz} + F_{ijy} x_{ij} - F_{ijx} y_{ij}, & \text{npu } i > j \\ -(M_{ijz} + F_{ijy} x_{ij} - F_{ijx} y_{ij}), & \text{npu } i < j \end{cases}
\end{aligned}$$

Введя функцию:

$$\sigma = \sigma(i, j) = \begin{cases} +1, & \text{npu } i > j \\ -1, & \text{npu } i < j \end{cases}, \quad (2.16)$$

и с учётом соотношений

$$\begin{aligned}
F_{ijx} &= F_{ij\xi} \alpha_{i11} + F_{ij\eta} \alpha_{i12} + F_{ij\zeta} \alpha_{i12} \\
F_{ijy} &= F_{ij\xi} \alpha_{i21} + F_{ij\eta} \alpha_{i22} + F_{ij\zeta} \alpha_{i22} \\
F_{ijz} &= F_{ij\xi} \alpha_{i31} + F_{ij\eta} \alpha_{i32} + F_{ij\zeta} \alpha_{i32} \\
M_{ijx} &= M_{ij\xi} \alpha_{i11} + M_{ij\eta} \alpha_{i12} + M_{ij\zeta} \alpha_{i12} \\
M_{ijy} &= M_{ij\xi} \alpha_{i21} + M_{ij\eta} \alpha_{i22} + M_{ij\zeta} \alpha_{i22} \\
M_{ijz} &= M_{ij\xi} \alpha_{i31} + M_{ij\eta} \alpha_{i32} + M_{ij\zeta} \alpha_{i33}
\end{aligned}, \quad (2.17)$$

окончательно уравнения (2.15) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
m_i \dot{V}_{ix} - \sum_j \sigma(i, j) (F_{i\xi} \alpha_{i11} + F_{i\eta} \alpha_{i12} + F_{i\zeta} \alpha_{i12}) &= -m_i q_i V_{iz} + m_i r_i V_{iy} \\
m_i \dot{V}_{iy} - \sum_j \sigma(i, j) (F_{i\xi} \alpha_{i21} + F_{i\eta} \alpha_{i22} + F_{i\zeta} \alpha_{i22}) &= -m_i r_i V_{ix} + m_i p_i V_{iz} \\
m_i \dot{V}_{iz} - \sum_j \sigma(i, j) (F_{i\xi} \alpha_{i31} + F_{i\eta} \alpha_{i32} + F_{i\zeta} \alpha_{i32}) &= -m_i p_i V_{iy} + m_i q_i V_{ix} \\
J_{ix} \dot{p}_i - J_{ixy} \dot{q}_i - J_{ixz} \dot{r}_i - \sum_j \sigma(i, j) (M_{i\xi} \alpha_{i11} + M_{i\eta} \alpha_{i12} + M_{i\zeta} \alpha_{i12}) - \\
- \sum_j \sigma(i, j) ((F_{i\xi} \alpha_{i31} + F_{i\eta} \alpha_{i32} + F_{i\zeta} \alpha_{i32}) y_{ij} - (F_{i\xi} \alpha_{i21} + F_{i\eta} \alpha_{i22} + F_{i\zeta} \alpha_{i22}) z_{ij}) &= \\
- (J_{iz} - J_{iy}) q_i r_i - J_{iyz} (r_i^2 - q_i^2) - p_i (J_{ixy} r_i - J_{ixz} q_i) & \quad (2.18) \\
- J_{ixy} \dot{p}_i + J_{iy} \dot{q}_i - J_{iyz} \dot{r}_i - \sum_j \sigma(i, j) (M_{i\xi} \alpha_{i21} + M_{i\eta} \alpha_{i22} + M_{i\zeta} \alpha_{i22}) - \\
- \sum_j \sigma(i, j) ((F_{i\xi} \alpha_{i11} + F_{i\eta} \alpha_{i12} + F_{i\zeta} \alpha_{i12}) z_{ij} - (F_{i\xi} \alpha_{i31} + F_{i\eta} \alpha_{i32} + F_{i\zeta} \alpha_{i32}) x_{ij}) &= \\
- (J_{ix} - J_{iz}) r_i p_i - J_{ixz} (p_i^2 - r_i^2) - q_i (J_{iyz} p_i - J_{ixy} r_i) \\
- J_{ixz} \dot{p}_i - J_{iyz} \dot{q}_i + J_{iz} \dot{r}_i - \sum_j \sigma(i, j) (M_{i\xi} \alpha_{i31} + M_{i\eta} \alpha_{i32} + M_{i\zeta} \alpha_{i33}) - \\
- \sum_j \sigma(i, j) ((F_{i\xi} \alpha_{i21} + F_{i\eta} \alpha_{i22} + F_{i\zeta} \alpha_{i22}) x_{ij} - (F_{i\xi} \alpha_{i11} + F_{i\eta} \alpha_{i12} + F_{i\zeta} \alpha_{i12}) y_{ij}) &= \\
- (J_{iy} - J_{ix}) p_i q_i - J_{ixy} (q_i^2 - p_i^2) r_i (J_{ixz} q_i - J_{iyz} p_i)
\end{aligned}$$

Таким образом, для описания динамики движения механической системы, состоящей из  $N$  тел, взаимодействующих друг с другом посредством  $K$  связей или силовых полей, получается система дифференциально-алгебраических уравнений, включающая в себя  $12N + 6K$  или  $13N + 6K$  уравнений в зависимости от выбора уравнений вида (2.4) или (2.5) относительно  $12N + 6K$  или  $13N + 6K$  переменных соответственно.

В случае, если взаимодействие реализуется посредством силового поля, выражения для сил или моментов сил ( $F_{ijx}$ ,  $F_{ijy}$ ,  $F_{ijz}$ ,  $M_{ijx}$ ,  $M_{ijy}$  или  $M_{ijz}$ ) задаются как функции времени, обобщённых координат и скоростей взаимодействующих тел и включаются в общую систему уравнений непосредственно

$$F_l = F_l(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \text{ или } F_l = F_l(t, X'_i, V_i, X'_j, V_j), \quad (2.19)$$

$$M_l = M_l(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \text{ или } M_l = M_l(t, X'_i, V_i, X'_j, V_j),$$

где  $l$  — индекс уравнения (от 1 до 6),  $X$  и  $X'$  — векторы обобщённых координат  $X = (\xi, \eta, \zeta, \psi, \theta, \varphi)^T$  и  $X' = (\xi, \eta, \zeta, h_0, h_1, h_2, h_3)^T$  для соответствующих тел,  $V$  — вектор скоростей  $V = (V_x, V_y, V_z, p, q, r)^T$  для соответствующего тела, символ  $T$  здесь означает операцию транспонирования.

Голономные связи и программные движения тел системы представляются уравнениями, зависящими от времени и обобщённых координат тел, вида:

$$D_l(t, X_i, X_j) = 0 \text{ или } D_l(t, X'_i, X'_j) = 0, \quad (2.20)$$

которые представляют собой алгебраические уравнения и в общую систему дифференциальных уравнений включаются в виде:

$$\ddot{D}_l + 2a \dot{D}_l + b^2 D_l = 0, \quad (2.21)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные коэффициенты, значения которых подбираются экспериментально при моделировании на ЭВМ для обеспечения устойчивости численного решения [68].

На практике в ряде случаев программные движения тел удобнее представлять в виде ограничений, наложенных на обобщённые скорости тел, несмотря на то, что часто эти уравнения могут быть проинтегрированы. Такие ограничения, также как и неголономные связи, задаются уравнениями вида:

$$B_l(t, X_i, V_i, X_j, V_j)=0 \text{ или } B_l(t, X'_i, V_i, X'_j, V_j)=0. \quad (2.22)$$

Для включения этих зависимостей в общую систему уравнений они дифференцируются один раз и включаются в виде:

$$\dot{B}_l + s B_l = 0 \quad (2.23)$$

где  $s$  — постоянный коэффициент, определяемый аналогично коэффициентам  $a$  и  $b$ .

Старшие производные в выражениях (2.21) и (2.23) позволяют алгебраические уравнения связей представлять в виде дифференциальных уравнений, а остальные слагаемые обеспечивают автоматическое затухание ошибок расчётов при численном интегрировании.

В разработанном программном обеспечении [228, 229, 230, 231, 232, 233] процесс создания модели заключается в выполнении исследователем следующих действий.

1. Создаётся необходимое количество объектов, соответствующих твёрдым телам. Для каждого из них выбирается набор обобщённых координат, включающий в себя корабельные углы или параметры Эйлера.

2. Создаётся необходимое количество объектов, соответствующих силовым взаимодействиям, связям между телами системы и программным законам движения.

3. Все массово-геометрические параметры объектов инициализируются, начальные условия для независимых обобщённых координат указываются, программные законы движения задаются. Или разрабатываются подпрограммы, обеспечивающие автоматическое формирование программных законов, расчёт массово-геометрических параметров и начальных условий.

После запуска программы на исполнение происходит автоматическое вычисление начальных условий для зависимых обобщённых координат в соответствии с наложенными на тела системы связями (2.20) и (2.22) и автоматическое формирование общей системы дифференциально-алгебраических уравнений, включающей в себя динамические уравнения движения тел (2.18), кинематические уравнения (2.3), (2.4) и (2.5), выражения для сил взаимодействия между телами (2.19), уравнения связей и программных движений в дифференциальной форме (2.21) и (2.23). На каждом шаге численного интегрирования полученная система уравнений разрешается следующим образом.

1. Уравнения (2.18), (2.19), (2.21) и (2.23) решаются известными методами линейной алгебры как система линейных алгебраических уравнений относительно обобщённых ускорений тел, активных сил взаимодействия и реакций связи между телами.

2. Полученные значения ускорений совместно с выражениями (2.3), (2.4) и (2.5) интегрируются известными методами численного интегрирования.

## **2.2. Силовые взаимодействия**

Если взаимодействие между  $i$  и  $j$  телами задаётся посредством силового поля той или иной природы, то согласно принципу суперпозиции силы взаимодействия между этими телами не зависят от наличия или отсутствия связей или других силовых полей. В этом случае уравнения (2.19) могут быть представлены в виде шести выражений, задающих законы изменения главного вектора и главного момента сил взаимодействия между телами как функций времени, координат и скоростей взаимодействующих тел:

$$\begin{aligned}
F_{\xi} &= F_{\xi}(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \\
F_{\eta} &= F_{\eta}(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \\
F_{\zeta} &= F_{\zeta}(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \\
M_{\xi} &= M_{\xi}(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \\
M_{\eta} &= M_{\eta}(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \\
M_{\zeta} &= M_{\zeta}(t, X_i, V_i, X_j, V_j)
\end{aligned}
\tag{2.24}$$

Через  $F_{\xi}$ ,  $F_{\eta}$ ,  $F_{\zeta}$ ,  $M_{\xi}$ ,  $M_{\eta}$ ,  $M_{\zeta}$  и аналогичные обозначения далее обозначаются величины, относящиеся к взаимодействию  $i$  и  $j$  тел, однако индексы  $ij$  опускаются для краткости и в связи с тем, что при реализации теоретико-механической модели в компьютерной программе на основе объектно-ориентированного подхода эти индексы являются излишними, так как в каждом программном объекте доступен только один набор таких величин.

Одновременно требуется задать координаты точки приведения главного вектора и главного момента в подвижных системах отсчёта, связанных с  $i$  и  $j$  телами:  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $z_{ij}$  и  $x_{ji}$ ,  $y_{ji}$ ,  $z_{ji}$ .

Рассматриваются примеры силовых взаимодействий, использованных при исследовании динамики шагающих машин.

**а) Сила тяжести** задаётся как сила взаимодействия  $i$  тела и среды, обозначаемой индексом  $j$ . Точка приведения для  $i$  тела находится в центре масс ( $x_{ij} = 0$ ,  $y_{ij} = 0$ ,  $z_{ij} = 0$ ), для  $j$  тела не определена. Уравнения сил и моментов сил:

$$\begin{aligned}
F_{\xi} &= 0 \\
F_{\eta} &= 0 \\
F_{\zeta} &= -m_i g \\
M_{\xi} &= 0 \\
M_{\eta} &= 0 \\
M_{\zeta} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

**б) Силы сопротивления среды.** В простейшем случае шарообразного однородного тела, уравнения сил и моментов сил для вязкого сопротивления среды имеют вид:

$$\begin{aligned}
 F_{\xi} &= -\mu_i \dot{\xi}_i \\
 F_{\eta} &= -\mu_i \dot{\eta}_i \\
 F_{\zeta} &= -\mu_i \dot{\zeta}_i \\
 M_{\xi} &= 0 \\
 M_{\eta} &= 0 \\
 M_{\zeta} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

где  $\mu_i$  — коэффициент вязкого сопротивления среды для  $i$  тела.

А для сопротивления среды, пропорционального квадрату скорости:

$$\begin{aligned}
 F_{\xi} &= -k_i \dot{\xi}_i \sqrt{\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2} \\
 F_{\eta} &= -k_i \dot{\eta}_i \sqrt{\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2} \\
 F_{\zeta} &= -k_i \dot{\zeta}_i \sqrt{\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2} \\
 M_{\xi} &= 0 \\
 M_{\eta} &= 0 \\
 M_{\zeta} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

где  $k_i$  — коэффициент сопротивления среды для  $i$  тела.

Точкой приведения является центр сопротивления, в случае однородного тела, совпадающий с центром масс.

**в) Следящий привод.** При вращении тела вокруг одной из осей, например, вокруг оси  $\eta$ , приводной двигатель, работающий в следящем режиме создаёт соответствующий момент:

$$\begin{aligned}
F_{\xi} &= 0 \\
F_{\eta} &= 0 \\
F_{\zeta} &= 0 \\
M_{\xi} &= 0 \\
M_{\eta} &= C_{\psi}(\psi^*(t) - \psi_i) + C_q(\dot{\psi}^*(t) - q_i) \\
M_{\zeta} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

где  $C_{\psi}$ ,  $C_q$  — постоянные коэффициенты,  $\psi^*(t)$  — отслеживаемый закон изменения угла поворота вокруг оси  $\eta$ .

г) **Точечный контакт с упруго-вязко-пластичной неударивающей поверхностью.** Для целей моделирования контакта стопы шагающей машины с опорной поверхностью вводится силовое взаимодействие, обладающее следующими свойствами. Силы взаимодействия отличны от нуля только при наличии контакта с поверхностью, сам контакт является односторонним, считается что тело контактирует с поверхностью со стороны положительного направления оси  $\zeta$  (рисунок 2.1).

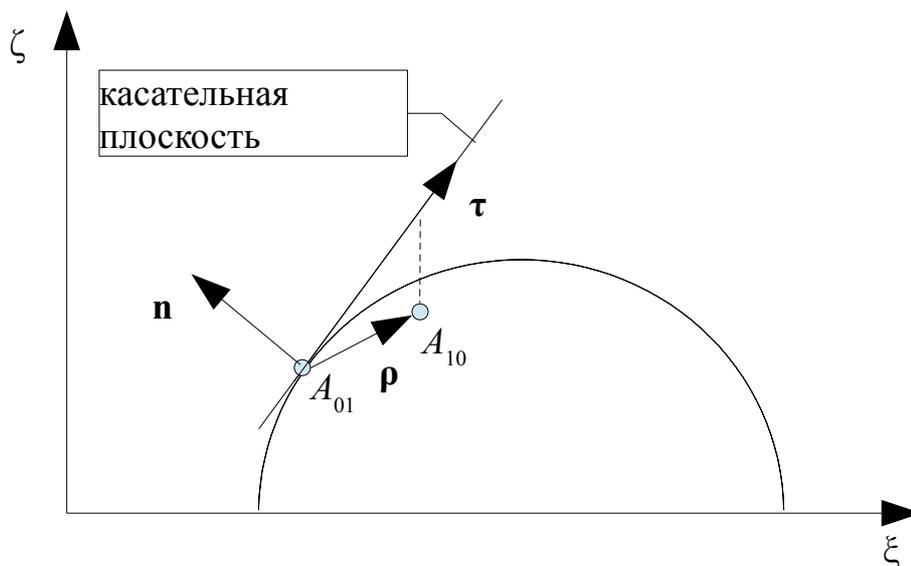


Рисунок 2.1 — Расчётная схема неударивающей связи

Опорная поверхность, связанная с  $j$  телом, задаётся в виде функции:

$$\zeta = f(\xi, \eta), \quad (2.29)$$

где каждой паре значений  $\xi, \eta$  (ось  $\eta$  на рисунке 2.1 не показана) поставлено в соответствие только одно значение  $\zeta$ . Это гарантирует в частности, что нормаль к такой поверхности будет иметь ненулевую проекцию на ось  $\zeta$ . Для определения нормали и касательной плоскости также требуется, чтобы функция (2.29) имела непрерывные частные производные  $f'_{\xi}(\xi, \eta)$ ,  $f'_{\eta}(\xi, \eta)$ .

Уравнение связи, соответствующее функции (2.29) имеет вид:

$$D(\xi, \eta, \zeta) = f(\xi, \eta) - \zeta = 0. \quad (2.30)$$

Частные производные определяются в виде:

$$\begin{aligned} D'_{\xi}(\xi, \eta, \zeta) &= f'_{\xi}(\xi, \eta), \\ D'_{\eta}(\xi, \eta, \zeta) &= f'_{\eta}(\xi, \eta), \\ D'_{\zeta}(\xi, \eta, \zeta) &= -1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Программная реализация теоретико-механической модели допускает как задание частных производных  $f'_{\xi}(\xi, \eta)$ ,  $f'_{\eta}(\xi, \eta)$  в виде аналитических функций, так и автоматическое определение значений частных производных численными методами.

Абсолютные координаты и скорости точки  $A_{ij}(\xi_{ij}, \eta_{ij}, \zeta_{ij})$  принадлежащей  $i$  телу, в которой оно контактирует с  $j$  телом:

$$\begin{aligned}
\xi_{ij} &= \xi_i + x_{ij} \alpha_{i11} + y_{ij} \alpha_{i21} + z_{ij} \alpha_{i31}, \\
\eta_{ij} &= \eta_i + x_{ij} \alpha_{i12} + y_{ij} \alpha_{i22} + z_{ij} \alpha_{i32}, \\
\zeta_{ij} &= \zeta_i + x_{ij} \alpha_{i13} + y_{ij} \alpha_{i23} + z_{ij} \alpha_{i33}, \\
\dot{\xi}_{ij} &= \dot{\xi}_1 + x_{ij} \dot{\alpha}_{11} + y_{ij} \dot{\alpha}_{21} + z_{ij} \dot{\alpha}_{31}, \\
\dot{\eta}_{ij} &= \dot{\eta}_1 + x_{ij} \dot{\alpha}_{12} + y_{ij} \dot{\alpha}_{22} + z_{ij} \dot{\alpha}_{32}, \\
\dot{\zeta}_{ij} &= \dot{\zeta}_1 + x_{ij} \dot{\alpha}_{13} + y_{ij} \dot{\alpha}_{23} + z_{ij} \dot{\alpha}_{33}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Условие контакта тел определяется в виде:

$$\zeta_{ij} \leq f(\xi_{ij}, \eta_{ij}). \tag{2.33}$$

Если условие (2.33) не выполняется, то силы взаимодействия равны нулю. Если условие выполняется, то силы взаимодействия определяются согласно упруго-вязкой модели в направлении нормали к поверхности и упруго-вязко-пластичной модели в касательной плоскости.

Через  $A_{ji}(\xi_{ji}, \eta_{ji}, \zeta_{ji})$  обозначается точка первоначального контакта тел, принадлежащая поверхности ( $j$  телу). Координаты этой точки определяются приближённо при выполнении условия (2.33):

$$\begin{aligned}
\xi_{ji} &= \xi_{ij}, \\
\eta_{ji} &= \eta_{ij}, \\
\zeta_{ji} &= f(\xi_{ij}, \eta_{ij}).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

и сохраняются до потери контакта тел.

Кривая поверхность в окрестности точки  $A_{ji}$  аппроксимируется касательной плоскостью.

Координаты нормального вектора  $\vec{N}$  к поверхности определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
N_{\xi} &= F'_{\xi}(\xi_{ji}, \eta_{ji}, \zeta_{ji}), \\
N_{\eta} &= F'_{\eta}(\xi_{ji}, \eta_{ji}, \zeta_{ji}), \\
N_{\zeta} &= F'_{\zeta}(\xi_{ji}, \eta_{ji}, \zeta_{ji}).
\end{aligned}
\tag{2.35}$$

С учётом того, что нормальный вектор гарантированно не лежит в плоскости  $\xi\eta$ , два произвольных вектора, задающих касательную плоскость могут быть найдены в результате векторных произведений:

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= \vec{N} \times \vec{i}, \\
\vec{B} &= \vec{T} \times \vec{N}.
\end{aligned}
\tag{2.36}$$

Или в скалярном виде:

$$\begin{aligned}
T_{\xi} &= 0, \\
T_{\eta} &= N_{\zeta}, \\
T_{\zeta} &= -N_{\eta}, \\
B_{\xi} &= N_{\zeta}^2 + N_{\eta}^2, \\
B_{\eta} &= -N_{\xi} N_{\eta}, \\
B_{\zeta} &= -N_{\xi} N_{\zeta}.
\end{aligned}
\tag{2.37}$$

Орты  $\vec{n}$ ,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{b}$  векторов  $\vec{N}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{B}$ , представляют собой естественную систему координат, связанную с опорной поверхностью в точке контакта, а их координаты представляют собой направляющие косинусы этой системы относительно неподвижной системы отсчёта и определяются формулами:

$$\begin{aligned}
N &= \sqrt{N_\xi^2 + N_\eta^2 + N_\zeta^2}, \\
T &= \sqrt{T_\xi^2 + T_\eta^2 + T_\zeta^2}, \\
B &= \sqrt{B_\xi^2 + B_\eta^2 + B_\zeta^2}, \\
n_\xi &= N_\xi / N, \\
n_\eta &= N_\eta / N, \\
n_\zeta &= N_\zeta / N, \\
\tau_\xi &= T_\xi / T, \\
\tau_\eta &= T_\eta / T, \\
\tau_\zeta &= T_\zeta / T, \\
b_\xi &= B_\xi / B, \\
b_\eta &= B_\eta / B, \\
b_\zeta &= B_\zeta / B,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Радиус-вектор между точками  $A_{ji}$  и  $A_{ij}$  и его производная (скорость точки  $A_{ij}$  относительно точки  $A_{ji}$ , по сути — абсолютная скорость точки  $A_{ij}$ , так как точка  $A_{ji}$  неподвижна) в неподвижной системе отсчёта определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
\rho_\xi &= \xi_{ij} - \xi_{ji}, \\
\rho_\eta &= \eta_{ij} - \eta_{ji}, \\
\rho_\zeta &= \zeta_{ij} - \zeta_{ji}, \\
\dot{\rho}_\xi &= \dot{\xi}_{ij}, \\
\dot{\rho}_\eta &= \dot{\eta}_{ij}, \\
\dot{\rho}_\zeta &= \dot{\zeta}_{ij},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

а в естественной системе отсчёта, связанной с поверхностью, выражениями:

$$\begin{aligned}
\rho_n &= \rho_\xi n_\xi + \rho_\eta n_\eta + \rho_\zeta n_\zeta, \\
\rho_\tau &= \rho_\xi \tau_\xi + \rho_\eta \tau_\eta + \rho_\zeta \tau_\zeta, \\
\rho_b &= \rho_\xi b_\xi + \rho_\eta b_\eta + \rho_\zeta b_\zeta, \\
\dot{\rho}_n &= \dot{\rho}_\xi n_\xi + \dot{\rho}_\eta n_\eta + \dot{\rho}_\zeta n_\zeta, \\
\dot{\rho}_\tau &= \dot{\rho}_\xi \tau_\xi + \dot{\rho}_\eta \tau_\eta + \dot{\rho}_\zeta \tau_\zeta, \\
\dot{\rho}_b &= \dot{\rho}_\xi b_\xi + \dot{\rho}_\eta b_\eta + \dot{\rho}_\zeta b_\zeta.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Отдельно задаются коэффициенты жёсткости и вязкости поверхности в нормальном ( $c_n$ ,  $\mu_n$ ) и касательном ( $c_\tau$ ,  $\mu_\tau$ ) направлениях, а также коэффициент сцепления  $\lambda_\tau$  в касательном направлении. Тогда силы взаимодействия тела с поверхностью в естественной системе отсчёта определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 F_n &= -c_n \dot{\rho}_n - \mu_n \dot{\rho}_n, \\
 F_\tau^* &= -c_\tau \dot{\rho}_\tau, \\
 F_b^* &= -c_\tau \dot{\rho}_b, \\
 F_\tau^{**} &= \lambda_\tau |F_n| F_\tau^* / \sqrt{(F_\tau^*)^2 + (F_b^*)^2}, \\
 F_b^{**} &= \lambda_\tau |F_n| F_b^* / \sqrt{(F_\tau^*)^2 + (F_b^*)^2}, \\
 F_\tau &= -\mu_\tau \dot{\rho}_\tau + \begin{cases} F_\tau^*, & \text{при } F_\tau^* < F_\tau^{**} \\ F_\tau^{**}, & \text{при } F_\tau^* \geq F_\tau^{**} \end{cases}, \\
 F_b &= -\mu_\tau \dot{\rho}_b + \begin{cases} F_b^*, & \text{при } F_b^* < F_b^{**} \\ F_b^{**}, & \text{при } F_b^* \geq F_b^{**} \end{cases}.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

А в проекциях на оси неподвижной системы отсчёта, соответственно:

$$\begin{aligned}
 F_\xi &= F_n n_\xi + F_\tau \tau_\xi + F_b b_\xi, \\
 F_\eta &= F_n n_\eta + F_\tau \tau_\eta + F_b b_\eta, \\
 F_\zeta &= F_n n_\zeta + F_\tau \tau_\zeta + F_b b_\zeta.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

### 2.3. Стационарные связи

#### Отсутствие взаимного перемещения тел

Связь, ограничивающая взаимное перемещение  $i$  и  $j$  тел представляет собой условие равенства координат точек взаимодействия тел в абсолютной системе отсчёта. Соответствующие уравнения связи имеют вид:

$$\begin{aligned}
D_{\xi} &= (\xi_i + x_{ij} \alpha_{i11} + y_{ij} \alpha_{i21} + z_{ij} \alpha_{i31}) - (\xi_j + x_{ji} \alpha_{j11} + y_{ji} \alpha_{j21} + z_{ji} \alpha_{j31}) = 0 \\
D_{\eta} &= (\eta_i + x_{ij} \alpha_{i12} + y_{ij} \alpha_{i22} + z_{ij} \alpha_{i32}) - (\eta_j + x_{ji} \alpha_{j12} + y_{ji} \alpha_{j22} + z_{ji} \alpha_{j32}) = 0 \\
D_{\zeta} &= (\zeta_i + x_{ij} \alpha_{i13} + y_{ij} \alpha_{i23} + z_{ij} \alpha_{i33}) - (\zeta_j + x_{ji} \alpha_{j13} + y_{ji} \alpha_{j23} + z_{ji} \alpha_{j33}) = 0
\end{aligned} \tag{2.43}$$

где  $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}$  — координаты точки воздействия  $j$  тела на  $i$  тело в подвижной системе координат, связанной с  $i$  телом;  $x_{ji}, y_{ji}, z_{ji}$  — координаты точки воздействия  $i$  тела на  $j$  тело в подвижной системе координат, связанной с  $j$  телом.

Производные от выражений:

$$\begin{aligned}
\dot{D}_{\xi} &= (V_{ix} \alpha_{i11} + V_{iy} \alpha_{i21} + V_{iz} \alpha_{i31} + x_{ij} \dot{\alpha}_{i11} + y_{ij} \dot{\alpha}_{i21} + z_{ij} \dot{\alpha}_{i31}) - \\
&\quad - (V_{jx} \alpha_{j11} + V_{jy} \alpha_{j21} + V_{jz} \alpha_{j31} + x_{ji} \dot{\alpha}_{j11} + y_{ji} \dot{\alpha}_{j21} + z_{ji} \dot{\alpha}_{j31}) \\
\dot{D}_{\eta} &= (V_{ix} \alpha_{i12} + V_{iy} \alpha_{i22} + V_{iz} \alpha_{i32} + x_{ij} \dot{\alpha}_{i12} + y_{ij} \dot{\alpha}_{i22} + z_{ij} \dot{\alpha}_{i32}) - \\
&\quad - (V_{jx} \alpha_{j12} + V_{jy} \alpha_{j22} + V_{jz} \alpha_{j32} + x_{ji} \dot{\alpha}_{j12} + y_{ji} \dot{\alpha}_{j22} + z_{ji} \dot{\alpha}_{j32}) \\
\dot{D}_{\zeta} &= (V_{ix} \alpha_{i13} + V_{iy} \alpha_{i23} + V_{iz} \alpha_{i33} + x_{ij} \dot{\alpha}_{i13} + y_{ij} \dot{\alpha}_{i23} + z_{ij} \dot{\alpha}_{i33}) - \\
&\quad - (V_{jx} \alpha_{j13} + V_{jy} \alpha_{j23} + V_{jz} \alpha_{j33} + x_{ji} \dot{\alpha}_{j13} + y_{ji} \dot{\alpha}_{j23} + z_{ji} \dot{\alpha}_{j33})
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{D}_{\xi} &= (\dot{V}_{ix} \alpha_{i11} + \dot{V}_{iy} \alpha_{i21} + \dot{V}_{iz} \alpha_{i31} + V_{ix} \dot{\alpha}_{i11} + V_{iy} \dot{\alpha}_{i21} + V_{iz} \dot{\alpha}_{i31} + x_{ij} \ddot{\alpha}_{i11} + y_{ij} \ddot{\alpha}_{i21} + z_{ij} \ddot{\alpha}_{i31}) - \\
&\quad - (\dot{V}_{jx} \alpha_{j11} + \dot{V}_{jy} \alpha_{j21} + \dot{V}_{jz} \alpha_{j31} + V_{jx} \dot{\alpha}_{j11} + V_{jy} \dot{\alpha}_{j21} + V_{jz} \dot{\alpha}_{j31} + x_{ji} \ddot{\alpha}_{j11} + y_{ji} \ddot{\alpha}_{j21} + z_{ji} \ddot{\alpha}_{j31}) \\
\ddot{D}_{\eta} &= (\dot{V}_{ix} \alpha_{i12} + \dot{V}_{iy} \alpha_{i22} + \dot{V}_{iz} \alpha_{i32} + V_{ix} \dot{\alpha}_{i12} + V_{iy} \dot{\alpha}_{i22} + V_{iz} \dot{\alpha}_{i32} + x_{ij} \ddot{\alpha}_{i12} + y_{ij} \ddot{\alpha}_{i22} + z_{ij} \ddot{\alpha}_{i32}) - \\
&\quad - (\dot{V}_{jx} \alpha_{j12} + \dot{V}_{jy} \alpha_{j22} + \dot{V}_{jz} \alpha_{j32} + V_{jx} \dot{\alpha}_{j12} + V_{jy} \dot{\alpha}_{j22} + V_{jz} \dot{\alpha}_{j32} + x_{ji} \ddot{\alpha}_{j12} + y_{ji} \ddot{\alpha}_{j22} + z_{ji} \ddot{\alpha}_{j32}) \\
\ddot{D}_{\zeta} &= (\dot{V}_{ix} \alpha_{i13} + \dot{V}_{iy} \alpha_{i23} + \dot{V}_{iz} \alpha_{i33} + V_{ix} \dot{\alpha}_{i13} + V_{iy} \dot{\alpha}_{i23} + V_{iz} \dot{\alpha}_{i33} + x_{ij} \ddot{\alpha}_{i13} + y_{ij} \ddot{\alpha}_{i23} + z_{ij} \ddot{\alpha}_{i33}) - \\
&\quad - (\dot{V}_{jx} \alpha_{j13} + \dot{V}_{jy} \alpha_{j23} + \dot{V}_{jz} \alpha_{j33} + V_{jx} \dot{\alpha}_{j13} + V_{jy} \dot{\alpha}_{j23} + V_{jz} \dot{\alpha}_{j33} + x_{ji} \ddot{\alpha}_{j13} + y_{ji} \ddot{\alpha}_{j23} + z_{ji} \ddot{\alpha}_{j33})
\end{aligned} \tag{2.45}$$

где производные от направляющих косинусов:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{i11} &= -q_i \alpha_{i31} + r_i \alpha_{i21} \\
\dot{\alpha}_{i12} &= -q_i \alpha_{i32} + r_i \alpha_{i22} \\
\dot{\alpha}_{i13} &= -q_i \alpha_{i33} + r_i \alpha_{i23} \\
\dot{\alpha}_{i21} &= -r_i \alpha_{i11} + p_i \alpha_{i31} \\
\dot{\alpha}_{i22} &= -r_i \alpha_{i12} + p_i \alpha_{i32} \\
\dot{\alpha}_{i23} &= -r_i \alpha_{i13} + p_i \alpha_{i33} \\
\dot{\alpha}_{i31} &= -p_i \alpha_{i21} + q_i \alpha_{i11} \\
\dot{\alpha}_{i32} &= -p_i \alpha_{i22} + q_i \alpha_{i12} \\
\dot{\alpha}_{i33} &= -p_i \alpha_{i23} + q_i \alpha_{i13}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}_{i11} &= -\dot{q}_i \alpha_{i31} + \dot{r}_i \alpha_{i21} - q_i \dot{\alpha}_{i31} + r_i \dot{\alpha}_{i21} \\
\ddot{\alpha}_{i12} &= -\dot{q}_i \alpha_{i32} + \dot{r}_i \alpha_{i22} - q_i \dot{\alpha}_{i32} + r_i \dot{\alpha}_{i22} \\
\ddot{\alpha}_{i13} &= -\dot{q}_i \alpha_{i33} + \dot{r}_i \alpha_{i23} - q_i \dot{\alpha}_{i33} + r_i \dot{\alpha}_{i23} \\
\ddot{\alpha}_{i21} &= -\dot{r}_i \alpha_{i11} + \dot{p}_i \alpha_{i31} - r_i \dot{\alpha}_{i11} + p_i \dot{\alpha}_{i31} \\
\ddot{\alpha}_{i22} &= -\dot{r}_i \alpha_{i12} + \dot{p}_i \alpha_{i32} - r_i \dot{\alpha}_{i12} + p_i \dot{\alpha}_{i32} , \\
\ddot{\alpha}_{i23} &= -\dot{r}_i \alpha_{i13} + \dot{p}_i \alpha_{i33} - r_i \dot{\alpha}_{i13} + p_i \dot{\alpha}_{i33} \\
\ddot{\alpha}_{i31} &= -\dot{p}_i \alpha_{i21} + \dot{q}_i \alpha_{i11} - p_i \dot{\alpha}_{i21} + q_i \dot{\alpha}_{i11} \\
\ddot{\alpha}_{i32} &= -\dot{p}_i \alpha_{i22} + \dot{q}_i \alpha_{i12} - p_i \dot{\alpha}_{i22} + q_i \dot{\alpha}_{i12} \\
\ddot{\alpha}_{i33} &= -\dot{p}_i \alpha_{i23} + \dot{q}_i \alpha_{i13} - p_i \dot{\alpha}_{i23} + q_i \dot{\alpha}_{i13}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Важным свойством первых производных от направляющих косинусов является то, что они не зависят от обобщённых ускорений и поэтому в дифференциальных формах уравнений связи они могут рассматриваться как известные на каждом шаге интегрирования величины.

Тогда дифференциальные уравнения, описывающие ограничения на взаимное перемещение тел примут вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_{ix} \alpha_{i11} + \dot{V}_{iy} \alpha_{i21} + \dot{V}_{iz} \alpha_{i31} - \dot{V}_{jx} \alpha_{j11} - \dot{V}_{jy} \alpha_{j21} - \dot{V}_{jz} \alpha_{j31} + \\
&+ \dot{p}_i (y_{ij} \alpha_{i31} - z_{ij} \alpha_{i21}) + \dot{q}_i (z_{ij} \alpha_{i11} - x_{ij} \alpha_{i31}) + \dot{r}_i (x_{ij} \alpha_{i21} - y_{ij} \alpha_{i11}) - \\
&- \dot{p}_j (y_{ji} \alpha_{j31} - z_{ji} \alpha_{j21}) - \dot{q}_j (z_{ji} \alpha_{j11} - x_{ji} \alpha_{j31}) - \dot{r}_j (x_{ji} \alpha_{j21} - y_{ji} \alpha_{j11}) = \\
&= -2a \dot{D}_\xi - b^2 D_\xi - B_\xi \\
&\dot{V}_{ix} \alpha_{i12} + \dot{V}_{iy} \alpha_{i22} + \dot{V}_{iz} \alpha_{i32} - \dot{V}_{jx} \alpha_{j12} - \dot{V}_{jy} \alpha_{j22} - \dot{V}_{jz} \alpha_{j32} + \\
&+ \dot{p}_i (y_{ij} \alpha_{i32} - z_{ij} \alpha_{i22}) + \dot{q}_i (z_{ij} \alpha_{i12} - x_{ij} \alpha_{i32}) + \dot{r}_i (x_{ij} \alpha_{i22} - y_{ij} \alpha_{i12}) - \\
&- \dot{p}_j (y_{ji} \alpha_{j32} - z_{ji} \alpha_{j22}) - \dot{q}_j (z_{ji} \alpha_{j12} - x_{ji} \alpha_{j32}) - \dot{r}_j (x_{ji} \alpha_{j22} - y_{ji} \alpha_{j12}) = \\
&= -2a \dot{D}_\eta - b^2 D_\eta - B_\eta \\
&\dot{V}_{ix} \alpha_{i13} + \dot{V}_{iy} \alpha_{i23} + \dot{V}_{iz} \alpha_{i33} - \dot{V}_{jx} \alpha_{j13} - \dot{V}_{jy} \alpha_{j23} - \dot{V}_{jz} \alpha_{j33} + \\
&+ \dot{p}_i (y_{ij} \alpha_{i33} - z_{ij} \alpha_{i23}) + \dot{q}_i (z_{ij} \alpha_{i13} - x_{ij} \alpha_{i33}) + \dot{r}_i (x_{ij} \alpha_{i23} - y_{ij} \alpha_{i13}) - \\
&- \dot{p}_j (y_{ji} \alpha_{j33} - z_{ji} \alpha_{j23}) - \dot{q}_j (z_{ji} \alpha_{j13} - x_{ji} \alpha_{j33}) - \dot{r}_j (x_{ji} \alpha_{j23} - y_{ji} \alpha_{j13}) = \\
&= -2a \dot{D}_\zeta - b^2 D_\zeta - B_\zeta
\end{aligned} \tag{2.48}$$

где

$$\begin{aligned}
B_{\xi} &= V_{ix} \dot{\alpha}_{i11} + V_{iy} \dot{\alpha}_{i21} + V_{iz} \dot{\alpha}_{i31} - V_{jx} \dot{\alpha}_{j11} - V_{jy} \dot{\alpha}_{j21} - V_{jz} \dot{\alpha}_{j31} + \\
&\quad + x_{ij} (-q_i \dot{\alpha}_{i31} + r_i \dot{\alpha}_{i21}) + y_{ij} (-r_i \dot{\alpha}_{i11} + p_i \dot{\alpha}_{i31}) + z_{ij} (-p_i \dot{\alpha}_{i21} + q_i \dot{\alpha}_{i11}) - \\
&\quad - x_{ji} (-q_j \dot{\alpha}_{j31} + r_j \dot{\alpha}_{j21}) - y_{ji} (-r_j \dot{\alpha}_{j11} + p_j \dot{\alpha}_{j31}) - z_{ji} (-p_j \dot{\alpha}_{j21} + q_j \dot{\alpha}_{j11}) \\
B_{\eta} &= V_{ix} \dot{\alpha}_{i12} + V_{iy} \dot{\alpha}_{i22} + V_{iz} \dot{\alpha}_{i32} - V_{jx} \dot{\alpha}_{j12} - V_{jy} \dot{\alpha}_{j22} - V_{jz} \dot{\alpha}_{j32} + \\
&\quad + x_{ij} (-q_i \dot{\alpha}_{i32} + r_i \dot{\alpha}_{i22}) + y_{ij} (-r_i \dot{\alpha}_{i12} + p_i \dot{\alpha}_{i32}) + z_{ij} (-p_i \dot{\alpha}_{i22} + q_i \dot{\alpha}_{i12}) - \\
&\quad - x_{ji} (-q_j \dot{\alpha}_{j32} + r_j \dot{\alpha}_{j22}) - y_{ji} (-r_j \dot{\alpha}_{j12} + p_j \dot{\alpha}_{j32}) - z_{ji} (-p_j \dot{\alpha}_{j22} + q_j \dot{\alpha}_{j12}) \\
B_{\zeta} &= V_{ix} \dot{\alpha}_{i13} + V_{iy} \dot{\alpha}_{i23} + V_{iz} \dot{\alpha}_{i33} - V_{jx} \dot{\alpha}_{j13} - V_{jy} \dot{\alpha}_{j23} - V_{jz} \dot{\alpha}_{j33} + \\
&\quad + x_{ij} (-q_i \dot{\alpha}_{i33} + r_i \dot{\alpha}_{i23}) + y_{ij} (-r_i \dot{\alpha}_{i13} + p_i \dot{\alpha}_{i33}) + z_{ij} (-p_i \dot{\alpha}_{i23} + q_i \dot{\alpha}_{i13}) - \\
&\quad - x_{ji} (-q_j \dot{\alpha}_{j33} + r_j \dot{\alpha}_{j23}) - y_{ji} (-r_j \dot{\alpha}_{j13} + p_j \dot{\alpha}_{j33}) - z_{ji} (-p_j \dot{\alpha}_{j23} + q_j \dot{\alpha}_{j13})
\end{aligned} \tag{2.49}$$

### б) Отсутствие взаимного поворота тел.

Один из вариантов уравнений, задающих запрет на взаимный поворот тел, представляет собой равенство проекций угловых скоростей тел на оси неподвижной системы отсчёта:

$$\begin{aligned}
B_{\xi} &= (p_i \alpha_{i11} + q_i \alpha_{i21} + r_i \alpha_{i31}) - (p_j \alpha_{j11} + q_j \alpha_{j21} + r_j \alpha_{j31}) = 0 \\
B_{\eta} &= (p_i \alpha_{i12} + q_i \alpha_{i22} + r_i \alpha_{i32}) - (p_j \alpha_{j12} + q_j \alpha_{j22} + r_j \alpha_{j32}) = 0 \\
B_{\zeta} &= (p_i \alpha_{i13} + q_i \alpha_{i23} + r_i \alpha_{i33}) - (p_j \alpha_{j13} + q_j \alpha_{j23} + r_j \alpha_{j33}) = 0
\end{aligned} \tag{2.50}$$

В таком виде ограничения на поворот удобно задавать в случае жёсткой связи между телами. Для включения этих уравнений в общую систему находятся их производные:

$$\begin{aligned}
\dot{B}_{\xi} &= (\dot{p}_i \alpha_{i11} + \dot{q}_i \alpha_{i21} + \dot{r}_i \alpha_{i31}) - (\dot{p}_j \alpha_{j11} + \dot{q}_j \alpha_{j21} + \dot{r}_j \alpha_{j31}) \\
&\quad + (p_i \dot{\alpha}_{i11} + q_i \dot{\alpha}_{i21} + r_i \dot{\alpha}_{i31}) - (p_j \dot{\alpha}_{j11} + q_j \dot{\alpha}_{j21} + r_j \dot{\alpha}_{j31}) = 0 \\
\dot{B}_{\eta} &= (\dot{p}_i \alpha_{i12} + \dot{q}_i \alpha_{i22} + \dot{r}_i \alpha_{i32}) - (\dot{p}_j \alpha_{j12} + \dot{q}_j \alpha_{j22} + \dot{r}_j \alpha_{j32}) \\
&\quad + (p_i \dot{\alpha}_{i12} + q_i \dot{\alpha}_{i22} + r_i \dot{\alpha}_{i32}) - (p_j \dot{\alpha}_{j12} + q_j \dot{\alpha}_{j22} + r_j \dot{\alpha}_{j32}) = 0 \\
\dot{B}_{\zeta} &= (\dot{p}_i \alpha_{i13} + \dot{q}_i \alpha_{i23} + \dot{r}_i \alpha_{i33}) - (\dot{p}_j \alpha_{j13} + \dot{q}_j \alpha_{j23} + \dot{r}_j \alpha_{j33}) \\
&\quad + (p_i \dot{\alpha}_{i13} + q_i \dot{\alpha}_{i23} + r_i \dot{\alpha}_{i33}) - (p_j \dot{\alpha}_{j13} + q_j \dot{\alpha}_{j23} + r_j \dot{\alpha}_{j33}) = 0
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Тогда дифференциальные уравнения связи имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & (\dot{p}_i \alpha_{i11} + \dot{q}_i \alpha_{i21} + \dot{r}_i \alpha_{i31}) - (\dot{p}_j \alpha_{j11} + \dot{q}_j \alpha_{j21} + \dot{r}_j \alpha_{j31}) = \\
 & - (p_i \dot{\alpha}_{i11} + q_i \dot{\alpha}_{i21} + r_i \dot{\alpha}_{i31}) + (p_j \dot{\alpha}_{j11} + q_j \dot{\alpha}_{j21} + r_j \dot{\alpha}_{j31}) - s B_{\xi} \\
 & (\dot{p}_i \alpha_{i12} + \dot{q}_i \alpha_{i22} + \dot{r}_i \alpha_{i32}) - (\dot{p}_j \alpha_{j12} + \dot{q}_j \alpha_{j22} + \dot{r}_j \alpha_{j32}) = \\
 & - (p_i \dot{\alpha}_{i12} + q_i \dot{\alpha}_{i22} + r_i \dot{\alpha}_{i32}) + (p_j \dot{\alpha}_{j12} + q_j \dot{\alpha}_{j22} + r_j \dot{\alpha}_{j32}) - s B_{\eta} \\
 & (\dot{p}_i \alpha_{i13} + \dot{q}_i \alpha_{i23} + \dot{r}_i \alpha_{i33}) - (\dot{p}_j \alpha_{j13} + \dot{q}_j \alpha_{j23} + \dot{r}_j \alpha_{j33}) = \\
 & - (p_i \dot{\alpha}_{i13} + q_i \dot{\alpha}_{i23} + r_i \dot{\alpha}_{i33}) + (p_j \dot{\alpha}_{j13} + q_j \dot{\alpha}_{j23} + r_j \dot{\alpha}_{j33}) - s B_{\zeta}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Альтернативный вариант уравнений, задающих ограничения на взаимный поворот тел, представляет собой равенство проекций угловых скоростей тел на оси подвижной системы отсчёта, связанной с одним из взаимодействующих тел, для определённости — с  $i$  телом:

$$\begin{aligned}
 B_p &= p_i - (p_j \chi_{11} + q_j \chi_{21} + r_j \chi_{31}) = 0 \\
 B_q &= q_i - (p_j \chi_{12} + q_j \chi_{22} + r_j \chi_{32}) = 0 \\
 B_r &= r_i - (p_j \chi_{13} + q_j \chi_{23} + r_j \chi_{33}) = 0
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

где  $\chi$  — направляющие косинусы между осями координат  $i$  и  $j$  тел:

$$\begin{aligned}
 \chi_{11} &= \alpha_{i11} \alpha_{j11} + \alpha_{i12} \alpha_{j12} + \alpha_{i13} \alpha_{j13} \\
 \chi_{12} &= \alpha_{i21} \alpha_{j11} + \alpha_{i22} \alpha_{j12} + \alpha_{i23} \alpha_{j13} \\
 \chi_{13} &= \alpha_{i31} \alpha_{j11} + \alpha_{i32} \alpha_{j12} + \alpha_{i33} \alpha_{j13} \\
 \chi_{21} &= \alpha_{i11} \alpha_{j21} + \alpha_{i12} \alpha_{j22} + \alpha_{i13} \alpha_{j23} \\
 \chi_{22} &= \alpha_{i21} \alpha_{j21} + \alpha_{i22} \alpha_{j22} + \alpha_{i23} \alpha_{j23} \\
 \chi_{23} &= \alpha_{i31} \alpha_{j21} + \alpha_{i32} \alpha_{j22} + \alpha_{i33} \alpha_{j23} \\
 \chi_{31} &= \alpha_{i11} \alpha_{j31} + \alpha_{i12} \alpha_{j32} + \alpha_{i13} \alpha_{j33} \\
 \chi_{32} &= \alpha_{i21} \alpha_{j31} + \alpha_{i22} \alpha_{j32} + \alpha_{i23} \alpha_{j33} \\
 \chi_{33} &= \alpha_{i31} \alpha_{j31} + \alpha_{i32} \alpha_{j32} + \alpha_{i33} \alpha_{j33}
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Первые производные от уравнений связи:

$$\begin{aligned}
\dot{B}_p &= \dot{p}_i - (\dot{p}_j \chi_{11} + \dot{q}_j \chi_{21} + \dot{r}_j \chi_{31}) - (p_j \dot{\chi}_{11} + q_j \dot{\chi}_{21} + r_j \dot{\chi}_{31}) \\
\dot{B}_q &= \dot{q}_i - (\dot{p}_j \chi_{12} + \dot{q}_j \chi_{22} + \dot{r}_j \chi_{32}) - (p_j \dot{\chi}_{12} + q_j \dot{\chi}_{22} + r_j \dot{\chi}_{32}) \\
\dot{B}_r &= \dot{r}_i - (\dot{p}_j \chi_{13} + \dot{q}_j \chi_{23} + \dot{r}_j \chi_{33}) - (p_j \dot{\chi}_{13} + q_j \dot{\chi}_{23} + r_j \dot{\chi}_{33})
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Производные направляющие косинусов между осями координат  $i$  и  $j$  тел:

$$\begin{aligned}
\dot{\chi}_{11} &= \dot{\alpha}_{i11} \alpha_{j11} + \dot{\alpha}_{i12} \alpha_{j12} + \dot{\alpha}_{i13} \alpha_{j13} + \alpha_{i11} \dot{\alpha}_{j11} + \alpha_{i12} \dot{\alpha}_{j12} + \alpha_{i13} \dot{\alpha}_{j13} \\
\dot{\chi}_{12} &= \dot{\alpha}_{i21} \alpha_{j11} + \dot{\alpha}_{i22} \alpha_{j12} + \dot{\alpha}_{i23} \alpha_{j13} + \alpha_{i21} \dot{\alpha}_{j11} + \alpha_{i22} \dot{\alpha}_{j12} + \alpha_{i23} \dot{\alpha}_{j13} \\
\dot{\chi}_{13} &= \dot{\alpha}_{i31} \alpha_{j11} + \dot{\alpha}_{i32} \alpha_{j12} + \dot{\alpha}_{i33} \alpha_{j13} + \alpha_{i31} \dot{\alpha}_{j11} + \alpha_{i32} \dot{\alpha}_{j12} + \alpha_{i33} \dot{\alpha}_{j13} \\
\dot{\chi}_{21} &= \dot{\alpha}_{i11} \alpha_{j21} + \dot{\alpha}_{i12} \alpha_{j22} + \dot{\alpha}_{i13} \alpha_{j23} + \alpha_{i11} \dot{\alpha}_{j21} + \alpha_{i12} \dot{\alpha}_{j22} + \alpha_{i13} \dot{\alpha}_{j23} \\
\dot{\chi}_{22} &= \dot{\alpha}_{i21} \alpha_{j21} + \dot{\alpha}_{i22} \alpha_{j22} + \dot{\alpha}_{i23} \alpha_{j23} + \alpha_{i21} \dot{\alpha}_{j21} + \alpha_{i22} \dot{\alpha}_{j22} + \alpha_{i23} \dot{\alpha}_{j23} \\
\dot{\chi}_{23} &= \dot{\alpha}_{i31} \alpha_{j21} + \dot{\alpha}_{i32} \alpha_{j22} + \dot{\alpha}_{i33} \alpha_{j23} + \alpha_{i31} \dot{\alpha}_{j21} + \alpha_{i32} \dot{\alpha}_{j22} + \alpha_{i33} \dot{\alpha}_{j23} \\
\dot{\chi}_{31} &= \dot{\alpha}_{i11} \alpha_{j31} + \dot{\alpha}_{i12} \alpha_{j32} + \dot{\alpha}_{i13} \alpha_{j33} + \alpha_{i11} \dot{\alpha}_{j31} + \alpha_{i12} \dot{\alpha}_{j32} + \alpha_{i13} \dot{\alpha}_{j33} \\
\dot{\chi}_{32} &= \dot{\alpha}_{i21} \alpha_{j31} + \dot{\alpha}_{i22} \alpha_{j32} + \dot{\alpha}_{i23} \alpha_{j33} + \alpha_{i21} \dot{\alpha}_{j31} + \alpha_{i22} \dot{\alpha}_{j32} + \alpha_{i23} \dot{\alpha}_{j33} \\
\dot{\chi}_{33} &= \dot{\alpha}_{i31} \alpha_{j31} + \dot{\alpha}_{i32} \alpha_{j32} + \dot{\alpha}_{i33} \alpha_{j33} + \alpha_{i31} \dot{\alpha}_{j31} + \alpha_{i32} \dot{\alpha}_{j32} + \alpha_{i33} \dot{\alpha}_{j33}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Учитывая, что первые производные направляющих косинусов не зависят от обобщённых ускорений, дифференциальные уравнения связи преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i - \dot{p}_j \chi_{11} - \dot{q}_j \chi_{21} - \dot{r}_j \chi_{31} &= (p_j \dot{\chi}_{11} + q_j \dot{\chi}_{21} + r_j \dot{\chi}_{31}) - s B_p \\
\dot{q}_i - \dot{p}_j \chi_{12} - \dot{q}_j \chi_{22} - \dot{r}_j \chi_{32} &= (p_j \dot{\chi}_{12} + q_j \dot{\chi}_{22} + r_j \dot{\chi}_{32}) - s B_q \\
\dot{r}_i - \dot{p}_j \chi_{13} - \dot{q}_j \chi_{23} - \dot{r}_j \chi_{33} &= (p_j \dot{\chi}_{13} + q_j \dot{\chi}_{23} + r_j \dot{\chi}_{33}) - s B_r
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Такая форма записи удобна для моделирования цилиндрического шарнира, в тех случаях, когда его ось параллельна одной из осей подвижной системы координат, связанной с  $i$  телом, что на практике встречается достаточно часто. Тогда соответствующее уравнение в (2.57) заменяется на уравнение момента сил (2.19).

**в) Возможность поворота вокруг одной оси (цилиндрический шарнир).**

Поскольку цилиндрический шарнир может быть ориентирован произвольно относительно тел системы, использовать уравнения (2.54) не удобно. Эти

уравнения должны быть переписаны с учётом произвольного направления оси цилиндра.

Задаётся направление оси цилиндрического шарнира в виде единичного вектора в подвижной системе координат, связанной с  $i$  телом

$$\vec{e} = \{e_{ix}, e_{iy}, e_{iz}\}. \quad (2.58)$$

Связь рассматриваемого типа накладывает запрет на взаимное перемещение тел, описываемый уравнениями (2.48), и запрет на поворот тел относительно друг друга вокруг всех осей кроме оси  $\vec{e}$ . Относительно оси  $\vec{e}$  задаётся момент сил (2.19), который в частном случае может быть равен нулю.

Для записи уравнений связи, описывающих невозможность поворота одного тела относительно другого, требуется задать два произвольных единичных вектора, перпендикулярных друг другу и вектору  $\vec{e}$ . Из бесконечного множества таких векторов выбираются векторы  $\vec{l}$  и  $\vec{m}$  по следующему алгоритму.

1. Выбирается минимальное по модулю значение из величин  $e_{ix}, e_{iy}, e_{iz}$ , которое обозначается через  $e_{n1}$ , две другие составляющие этого вектора обозначаются через  $e_{n2}$  и  $e_{n3}$ <sup>1</sup>.

2. Вычисляется величина  $e_{n23} = \sqrt{e_{n2}^2 + e_{n3}^2}$  — проекция вектора  $\vec{e}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $n1$ . Поскольку  $e_{n1} = \min(e_{ix}, e_{iy}, e_{iz})$ , то  $e_{n23} \neq 0$ .

3. Составляющие вектора  $\vec{l}$  определяются выражениями:

---

<sup>1</sup> Здесь и далее индексы  $n1$ ,  $n2$  и  $n3$  — следует понимать как формальную замену индексам  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то есть, например, компоненты  $e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}$  — это те же самые переменные  $e_{ix}, e_{iy}, e_{iz}$ , переименованные только для удобства выкладок.

$$\begin{aligned}
 l_{n1} &= -e_{n23} \\
 l_{n2} &= \frac{e_{n1}e_{n2}}{e_{n23}} \\
 l_{n3} &= \frac{e_{n1}e_{n3}}{e_{n23}}
 \end{aligned}
 \tag{2.59}$$

4. Составляющие вектора  $\vec{m}$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 m_{n1} &= 0 \\
 m_{n2} &= -\frac{e_{n3}}{e_{n23}} \\
 m_{n3} &= \frac{e_{n2}}{e_{n23}}
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

Векторы  $\vec{e}$ ,  $\vec{l}$  и  $\vec{m}$  представляют собой орты прямоугольной декартовой системы координат, а их координаты

$$\begin{array}{ccc}
 e_{ix} & e_{iy} & e_{iz} \\
 l_{ix} & l_{iy} & l_{iz} \\
 m_{ix} & m_{iy} & m_{iz}
 \end{array}
 \tag{2.61}$$

являются направляющими косинусами этой системы относительно подвижной системы отсчёта связанной с  $i$  телом.

Координаты этих векторов в подвижной системе координат  $j$  тела:

$$\begin{aligned}
e_{jx} &= e_{ix} \chi_{11} + e_{iy} \chi_{12} + e_{iz} \chi_{13} \\
e_{jy} &= e_{ix} \chi_{21} + e_{iy} \chi_{22} + e_{iz} \chi_{23} \\
e_{jz} &= e_{ix} \chi_{31} + e_{iy} \chi_{32} + e_{iz} \chi_{33} \\
l_{jx} &= l_{ix} \chi_{11} + l_{iy} \chi_{12} + l_{iz} \chi_{13} \\
l_{jy} &= l_{ix} \chi_{21} + l_{iy} \chi_{22} + l_{iz} \chi_{23} \\
l_{jz} &= l_{ix} \chi_{31} + l_{iy} \chi_{32} + l_{iz} \chi_{33} \\
m_{jx} &= m_{ix} \chi_{11} + m_{iy} \chi_{12} + m_{iz} \chi_{13} \\
m_{jy} &= m_{ix} \chi_{21} + m_{iy} \chi_{22} + m_{iz} \chi_{23} \\
m_{jz} &= m_{ix} \chi_{31} + m_{iy} \chi_{32} + m_{iz} \chi_{33}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Следовательно, уравнения связи, накладывающие запрет на взаимный поворот тел относительно осей  $l$  и  $m$  могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
B_l &= (p_i l_{ix} + q_i l_{iy} + r_i l_{iz}) - (p_j l_{jx} + q_j l_{jy} + r_j l_{jz}) = 0 \\
B_m &= (p_i m_{ix} + q_i m_{iy} + r_i m_{iz}) - (p_j m_{jx} + q_j m_{jy} + r_j m_{jz}) = 0
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Первые производные от уравнений связи:

$$\begin{aligned}
\dot{B}_l &= (\dot{p}_i l_{ix} + \dot{q}_i l_{iy} + \dot{r}_i l_{iz}) - (\dot{p}_j l_{jx} + \dot{q}_j l_{jy} + \dot{r}_j l_{jz}) + \\
&\quad + (p_i \dot{l}_{ix} + q_i \dot{l}_{iy} + r_i \dot{l}_{iz}) - (p_j \dot{l}_{jx} + q_j \dot{l}_{jy} + r_j \dot{l}_{jz}) \\
\dot{B}_m &= (\dot{p}_i m_{ix} + \dot{q}_i m_{iy} + \dot{r}_i m_{iz}) - (\dot{p}_j m_{jx} + \dot{q}_j m_{jy} + \dot{r}_j m_{jz}) + \\
&\quad + (p_i \dot{m}_{ix} + q_i \dot{m}_{iy} + r_i \dot{m}_{iz}) - (p_j \dot{m}_{jx} + q_j \dot{m}_{jy} + r_j \dot{m}_{jz})
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Поскольку векторы  $\vec{e}$ ,  $\vec{l}$  и  $\vec{m}$  — константы в подвижной системе отсчёта, связанной с  $i$  телом, то:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{ix} &= 0 \\
\dot{e}_{iy} &= 0 \\
\dot{e}_{iz} &= 0 \\
\dot{l}_{ix} &= 0 \\
\dot{l}_{iy} &= 0 \\
\dot{l}_{iz} &= 0 \\
\dot{m}_{ix} &= 0 \\
\dot{m}_{iy} &= 0 \\
\dot{m}_{iz} &= 0 \\
\dot{e}_{jx} &= e_{ix} \dot{\chi}_{11} + e_{iy} \dot{\chi}_{12} + e_{iz} \dot{\chi}_{13} \\
\dot{e}_{jy} &= e_{ix} \dot{\chi}_{21} + e_{iy} \dot{\chi}_{22} + e_{iz} \dot{\chi}_{23} \\
\dot{e}_{jz} &= e_{ix} \dot{\chi}_{31} + e_{iy} \dot{\chi}_{32} + e_{iz} \dot{\chi}_{33} \\
\dot{l}_{jx} &= l_{ix} \dot{\chi}_{11} + l_{iy} \dot{\chi}_{12} + l_{iz} \dot{\chi}_{13} \\
\dot{l}_{jy} &= l_{ix} \dot{\chi}_{21} + l_{iy} \dot{\chi}_{22} + l_{iz} \dot{\chi}_{23} \\
\dot{l}_{jz} &= l_{ix} \dot{\chi}_{31} + l_{iy} \dot{\chi}_{32} + l_{iz} \dot{\chi}_{33} \\
\dot{m}_{jx} &= m_{ix} \dot{\chi}_{11} + m_{iy} \dot{\chi}_{12} + m_{iz} \dot{\chi}_{13} \\
\dot{m}_{jy} &= m_{ix} \dot{\chi}_{21} + m_{iy} \dot{\chi}_{22} + m_{iz} \dot{\chi}_{23} \\
\dot{m}_{jz} &= m_{ix} \dot{\chi}_{31} + m_{iy} \dot{\chi}_{32} + m_{iz} \dot{\chi}_{33}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Окончательно дифференциальные уравнения связи имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i l_{ix} + \dot{q}_i l_{iy} + \dot{r}_i l_{iz} - \dot{p}_j l_{jx} - \dot{q}_j l_{jy} - \dot{r}_j l_{jz} &= -s B_l + (p_j \dot{l}_{jx} + q_j \dot{l}_{jy} + r_j \dot{l}_{jz}) \\
\dot{p}_i m_{ix} + \dot{q}_i m_{iy} + \dot{r}_i m_{iz} - \dot{p}_j m_{jx} - \dot{q}_j m_{jy} - \dot{r}_j m_{jz} &= -s B_m + (p_j \dot{m}_{jx} + q_j \dot{m}_{jy} + r_j \dot{m}_{jz})
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Выражение для момента сил относительно оси  $e$

$$M_e = M_e(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \tag{2.67}$$

может быть представлено через проекции момента сил на оси подвижной системы отсчёта  $i$  тела

$$M_{ix}e_{ix} + M_{iy}e_{iy} + M_{iz}e_{iz} = M_e(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \quad (2.68)$$

или окончательно через проекции момента сил на оси неподвижной системы отсчёта

$$\begin{aligned} & M_{\xi}(\alpha_{11}e_{ix} + \alpha_{21}e_{iy} + \alpha_{31}e_{iz}) + \\ & + M_{\eta}(\alpha_{12}e_{ix} + \alpha_{22}e_{iy} + \alpha_{32}e_{iz}) + \\ & + M_{\zeta}(\alpha_{13}e_{ix} + \alpha_{23}e_{iy} + \alpha_{33}e_{iz}) = M_e(t, X_i, V_i, X_j, V_j) \end{aligned} \quad (2.69)$$

**г) Возможность линейного относительного поступательного перемещения.** Поступательная прямолинейная пара (скользящая заделка) аналогично цилиндрическому шарниру может быть ориентирована произвольно относительно взаимодействующих тел.

Направление оси пары задаётся в виде единичного вектора  $\vec{e}$  в подвижной системе координат, связанной с  $i$  телом (2.58). Выбираются единичные векторы  $\vec{l}$  и  $\vec{m}$  (2.59), (2.60).

Связь рассматриваемого типа накладывает запрет на взаимный поворот тел, что в данном случае удобно описывать уравнениями (2.52), и запрет на относительное перемещение тел вдоль осей  $\vec{l}$  и  $\vec{m}$ . Относительно оси  $\vec{e}$  задаётся сила (2.19), которая в частном случае может быть равна нулю.

Уравнения связи, описывающие запрет на относительное перемещение тел вдоль осей  $\vec{l}$  и  $\vec{m}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
D_l = & (\xi_i \alpha_{i11} + \eta_i \alpha_{i12} + \zeta_i \alpha_{i13} + x_{ij}) l_{ix} + \\
& + (\xi_i \alpha_{i21} + \eta_i \alpha_{i22} + \zeta_i \alpha_{i23} + y_{ij}) l_{iy} + \\
& + (\xi_i \alpha_{i31} + \eta_i \alpha_{i32} + \zeta_i \alpha_{i33} + z_{ij}) l_{iz} - \\
& - (\xi_j \alpha_{j11} + \eta_j \alpha_{j12} + \zeta_j \alpha_{j13} + x_{j1}) l_{jx} - \\
& - (\xi_j \alpha_{j21} + \eta_j \alpha_{j22} + \zeta_j \alpha_{j23} + y_{j1}) l_{jy} - \\
& - (\xi_j \alpha_{j31} + \eta_j \alpha_{j32} + \zeta_j \alpha_{j33} + z_{j1}) l_{jz} = 0
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
D_m = & (\xi_i \alpha_{i11} + \eta_i \alpha_{i12} + \zeta_i \alpha_{i13} + x_{i2}) m_{ix} + \\
& + (\xi_i \alpha_{i21} + \eta_i \alpha_{i22} + \zeta_i \alpha_{i23} + y_{i2}) m_{iy} + \\
& + (\xi_i \alpha_{i31} + \eta_i \alpha_{i32} + \zeta_i \alpha_{i33} + z_{i2}) m_{iz} - \\
& - (\xi_j \alpha_{j11} + \eta_j \alpha_{j12} + \zeta_j \alpha_{j13} + x_{j1}) m_{jx} - \\
& - (\xi_j \alpha_{j21} + \eta_j \alpha_{j22} + \zeta_j \alpha_{j23} + y_{j1}) m_{jy} - \\
& - (\xi_j \alpha_{j31} + \eta_j \alpha_{j32} + \zeta_j \alpha_{j33} + z_{j1}) m_{jz} = 0
\end{aligned}$$

Первые производные уравнений связи:

$$\begin{aligned}
\dot{D}_l = & (V_{ix} l_{ix} + V_{iy} l_{iy} + V_{iz} l_{iz}) + \\
& + \xi_i (\dot{\alpha}_{i11} l_{ix} + \dot{\alpha}_{i21} l_{iy} + \dot{\alpha}_{i31} l_{iz}) + \\
& + \eta_i (\dot{\alpha}_{i12} l_{ix} + \dot{\alpha}_{i22} l_{iy} + \dot{\alpha}_{i32} l_{iz}) + \\
& + \zeta_i (\dot{\alpha}_{i13} l_{ix} + \dot{\alpha}_{i23} l_{iy} + \dot{\alpha}_{i33} l_{iz}) - \\
& - (V_{jx} l_{jx} + V_{jy} l_{jy} + V_{jz} l_{jz}) - \\
& - \xi_j (\dot{\alpha}_{j11} l_{jx} + \dot{\alpha}_{j21} l_{jy} + \dot{\alpha}_{j31} l_{jz} + \alpha_{j11} \dot{l}_{jx} + \alpha_{j21} \dot{l}_{jy} + \alpha_{j31} \dot{l}_{jz}) - \\
& - \eta_j (\dot{\alpha}_{j12} l_{jx} + \dot{\alpha}_{j22} l_{jy} + \dot{\alpha}_{j32} l_{jz} + \alpha_{j12} \dot{l}_{jx} + \alpha_{j22} \dot{l}_{jy} + \alpha_{j32} \dot{l}_{jz}) - \\
& - \zeta_j (\dot{\alpha}_{j13} l_{jx} + \dot{\alpha}_{j23} l_{jy} + \dot{\alpha}_{j33} l_{jz} + \alpha_{j13} \dot{l}_{jx} + \alpha_{j23} \dot{l}_{jy} + \alpha_{j33} \dot{l}_{jz}) - \\
& - (x_{ji} \dot{l}_{jx} + y_{ji} \dot{l}_{jy} + z_{ji} \dot{l}_{jz})
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}
\dot{D}_m = & (V_{ix} m_{ix} + V_{iy} m_{iy} + V_{iz} m_{iz}) + \\
& + \xi_i (\dot{\alpha}_{i11} m_{ix} + \dot{\alpha}_{i21} m_{iy} + \dot{\alpha}_{i31} m_{iz}) + \\
& + \eta_i (\dot{\alpha}_{i12} m_{ix} + \dot{\alpha}_{i22} m_{iy} + \dot{\alpha}_{i32} m_{iz}) + \\
& + \zeta_i (\dot{\alpha}_{i13} m_{ix} + \dot{\alpha}_{i23} m_{iy} + \dot{\alpha}_{i33} m_{iz}) - \\
& - (V_{jx} m_{jx} + V_{jy} m_{jy} + V_{jz} m_{jz}) - \\
& - \xi_j (\dot{\alpha}_{j11} m_{jx} + \dot{\alpha}_{j21} m_{jy} + \dot{\alpha}_{j31} m_{jz} + \alpha_{j11} \dot{m}_{jx} + \alpha_{j21} \dot{m}_{jy} + \alpha_{j31} \dot{m}_{jz}) - \\
& - \eta_j (\dot{\alpha}_{j12} m_{jx} + \dot{\alpha}_{j22} m_{jy} + \dot{\alpha}_{j32} m_{jz} + \alpha_{j12} \dot{m}_{jx} + \alpha_{j22} \dot{m}_{jy} + \alpha_{j32} \dot{m}_{jz}) - \\
& - \zeta_j (\dot{\alpha}_{j13} m_{jx} + \dot{\alpha}_{j23} m_{jy} + \dot{\alpha}_{j33} m_{jz} + \alpha_{j13} \dot{m}_{jx} + \alpha_{j23} \dot{m}_{jy} + \alpha_{j33} \dot{m}_{jz}) - \\
& - (x_{ji} \dot{m}_{jx} + y_{ji} \dot{m}_{jy} + z_{ji} \dot{m}_{jz})
\end{aligned}$$

Вторые производные уравнений связи:

$$\begin{aligned}
\ddot{D}_l = & (\dot{V}_{ix} l_{ix} + \dot{V}_{iy} l_{iy} + \dot{V}_{iz} l_{iz}) + \\
& + \xi_i (\ddot{\alpha}_{i11} l_{ix} + \ddot{\alpha}_{i21} l_{iy} + \ddot{\alpha}_{i31} l_{iz}) + \\
& + \eta_i (\ddot{\alpha}_{i12} l_{ix} + \ddot{\alpha}_{i22} l_{iy} + \ddot{\alpha}_{i32} l_{iz}) + \\
& + \zeta_i (\ddot{\alpha}_{i13} l_{ix} + \ddot{\alpha}_{i23} l_{iy} + \ddot{\alpha}_{i33} l_{iz}) - \\
& - (\dot{V}_{jx} l_{jx} + \dot{V}_{jy} l_{jy} + \dot{V}_{jz} l_{jz}) - \\
& - \xi_j (\ddot{\alpha}_{j11} l_{jx} + \ddot{\alpha}_{j21} l_{jy} + \ddot{\alpha}_{j31} l_{jz} + \alpha_{j11} \ddot{l}_{jx} + \alpha_{j21} \ddot{l}_{jy} + \alpha_{j31} \ddot{l}_{jz}) - \\
& - \eta_j (\ddot{\alpha}_{j12} l_{jx} + \ddot{\alpha}_{j22} l_{jy} + \ddot{\alpha}_{j32} l_{jz} + \alpha_{j12} \ddot{l}_{jx} + \alpha_{j22} \ddot{l}_{jy} + \alpha_{j32} \ddot{l}_{jz}) - \\
& - \zeta_j (\ddot{\alpha}_{j13} l_{jx} + \ddot{\alpha}_{j23} l_{jy} + \ddot{\alpha}_{j33} l_{jz} + \alpha_{j13} \ddot{l}_{jx} + \alpha_{j23} \ddot{l}_{jy} + \alpha_{j33} \ddot{l}_{jz}) - \\
& - (x_{ji} \ddot{l}_{jx} + y_{ji} \ddot{l}_{jy} + z_{ji} \ddot{l}_{jz}) + h_l
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{D}_m = & (\dot{V}_{ix} m_{ix} + \dot{V}_{iy} m_{iy} + \dot{V}_{iz} m_{iz}) + \\
& + \xi_i (\ddot{\alpha}_{i11} m_{ix} + \ddot{\alpha}_{i21} m_{iy} + \ddot{\alpha}_{i31} m_{iz}) + \\
& + \eta_i (\ddot{\alpha}_{i12} m_{ix} + \ddot{\alpha}_{i22} m_{iy} + \ddot{\alpha}_{i32} m_{iz}) + \\
& + \zeta_i (\ddot{\alpha}_{i13} m_{ix} + \ddot{\alpha}_{i23} m_{iy} + \ddot{\alpha}_{i33} m_{iz}) - \\
& - (\dot{V}_{jx} m_{jx} + \dot{V}_{jy} m_{jy} + \dot{V}_{jz} m_{jz}) - \\
& - \xi_j (\ddot{\alpha}_{j11} m_{jx} + \ddot{\alpha}_{j21} m_{jy} + \ddot{\alpha}_{j31} m_{jz} + \alpha_{j11} \ddot{m}_{jx} + \alpha_{j21} \ddot{m}_{jy} + \alpha_{j31} \ddot{m}_{jz}) - \\
& - \eta_j (\ddot{\alpha}_{j12} m_{jx} + \ddot{\alpha}_{j22} m_{jy} + \ddot{\alpha}_{j32} m_{jz} + \alpha_{j12} \ddot{m}_{jx} + \alpha_{j22} \ddot{m}_{jy} + \alpha_{j32} \ddot{m}_{jz}) - \\
& - \zeta_j (\ddot{\alpha}_{j13} m_{jx} + \ddot{\alpha}_{j23} m_{jy} + \ddot{\alpha}_{j33} m_{jz} + \alpha_{j13} \ddot{m}_{jx} + \alpha_{j23} \ddot{m}_{jy} + \alpha_{j33} \ddot{m}_{jz}) - \\
& - (x_{ji} \ddot{m}_{jx} + y_{ji} \ddot{m}_{jy} + z_{ji} \ddot{m}_{jz}) + h_m
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
h_l = & (V_{ix} \alpha_{i11} + V_{iy} \alpha_{i21} + V_{iz} \alpha_{i31}) (\dot{\alpha}_{i11} l_{ix} + \dot{\alpha}_{i21} l_{iy} + \dot{\alpha}_{i31} l_{iz}) + \\
& + (V_{ix} \alpha_{i12} + V_{iy} \alpha_{i22} + V_{iz} \alpha_{i32}) (\dot{\alpha}_{i12} l_{ix} + \dot{\alpha}_{i22} l_{iy} + \dot{\alpha}_{i32} l_{iz}) + \\
& + (V_{ix} \alpha_{i13} + V_{iy} \alpha_{i23} + V_{iz} \alpha_{i33}) (\dot{\alpha}_{i13} l_{ix} + \dot{\alpha}_{i23} l_{iy} + \dot{\alpha}_{i33} l_{iz}) - \\
& - (V_{jx} \dot{l}_{jx} + V_{jy} \dot{l}_{jy} + V_{jz} \dot{l}_{jz}) - \\
& - (V_{jx} \alpha_{j11} + V_{jy} \alpha_{j21} + V_{jz} \alpha_{j31}) (\dot{\alpha}_{j11} l_{jx} + \dot{\alpha}_{j21} l_{jy} + \dot{\alpha}_{j31} l_{jz} + \alpha_{j11} \dot{l}_{jx} + \alpha_{j21} \dot{l}_{jy} + \alpha_{j31} \dot{l}_{jz}) - \\
& - (V_{jx} \alpha_{j12} + V_{jy} \alpha_{j22} + V_{jz} \alpha_{j32}) (\dot{\alpha}_{j12} l_{jx} + \dot{\alpha}_{j22} l_{jy} + \dot{\alpha}_{j32} l_{jz} + \alpha_{j12} \dot{l}_{jx} + \alpha_{j22} \dot{l}_{jy} + \alpha_{j32} \dot{l}_{jz}) - \\
& - (V_{jx} \alpha_{j13} + V_{jy} \alpha_{j23} + V_{jz} \alpha_{j33}) (\dot{\alpha}_{j13} l_{jx} + \dot{\alpha}_{j23} l_{jy} + \dot{\alpha}_{j33} l_{jz} + \alpha_{j13} \dot{l}_{jx} + \alpha_{j23} \dot{l}_{jy} + \alpha_{j33} \dot{l}_{jz}) - \\
& - \xi_j (2 \dot{\alpha}_{j11} \dot{l}_{jx} + 2 \dot{\alpha}_{j21} \dot{l}_{jy} + 2 \dot{\alpha}_{j31} \dot{l}_{jz}) - \\
& - \eta_j (2 \dot{\alpha}_{j12} \dot{l}_{jx} + 2 \dot{\alpha}_{j22} \dot{l}_{jy} + 2 \dot{\alpha}_{j32} \dot{l}_{jz}) - \\
& - \zeta_j (2 \dot{\alpha}_{j13} \dot{l}_{jx} + 2 \dot{\alpha}_{j23} \dot{l}_{jy} + 2 \dot{\alpha}_{j33} \dot{l}_{jz})
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
h_m = & (V_{ix} \alpha_{i11} + V_{iy} \alpha_{i21} + V_{iz} \alpha_{i31})(\dot{\alpha}_{i11} m_{ix} + \dot{\alpha}_{i21} m_{iy} + \dot{\alpha}_{i31} m_{iz}) + \\
& + (V_{ix} \alpha_{i12} + V_{iy} \alpha_{i22} + V_{iz} \alpha_{i32})(\dot{\alpha}_{i12} m_{ix} + \dot{\alpha}_{i22} m_{iy} + \dot{\alpha}_{i32} m_{iz}) + \\
& + (V_{ix} \alpha_{i13} + V_{iy} \alpha_{i23} + V_{iz} \alpha_{i33})(\dot{\alpha}_{i13} m_{ix} + \dot{\alpha}_{i23} m_{iy} + \dot{\alpha}_{i33} m_{iz}) - \\
& - (V_{jx} \dot{m}_{jx} + V_{jy} \dot{m}_{jy} + V_{jz} \dot{m}_{jz}) - \\
& - (V_{jx} \alpha_{j11} + V_{jy} \alpha_{j21} + V_{jz} \alpha_{j31})(\dot{\alpha}_{j11} m_{jx} + \dot{\alpha}_{j21} m_{jy} + \dot{\alpha}_{j31} m_{jz} + \alpha_{j11} \dot{m}_{jx} + \alpha_{j21} \dot{m}_{jy} + \alpha_{j31} \dot{m}_{jz}) - \\
& - (V_{jx} \alpha_{j12} + V_{jy} \alpha_{j22} + V_{jz} \alpha_{j32})(\dot{\alpha}_{j12} m_{jx} + \dot{\alpha}_{j22} m_{jy} + \dot{\alpha}_{j32} m_{jz} + \alpha_{j12} \dot{m}_{jx} + \alpha_{j22} \dot{m}_{jy} + \alpha_{j32} \dot{m}_{jz}) - \\
& - (V_{jx} \alpha_{j13} + V_{jy} \alpha_{j23} + V_{jz} \alpha_{j33})(\dot{\alpha}_{j13} m_{jx} + \dot{\alpha}_{j23} m_{jy} + \dot{\alpha}_{j33} m_{jz} + \alpha_{j13} \dot{m}_{jx} + \alpha_{j23} \dot{m}_{jy} + \alpha_{j33} \dot{m}_{jz}) - \\
& - \xi_j (2 \dot{\alpha}_{j11} \dot{m}_{jx} + 2 \dot{\alpha}_{j21} \dot{m}_{jy} + 2 \dot{\alpha}_{j31} \dot{m}_{jz}) - \\
& - \eta_j (2 \dot{\alpha}_{j12} \dot{m}_{jx} + 2 \dot{\alpha}_{j22} \dot{m}_{jy} + 2 \dot{\alpha}_{j32} \dot{m}_{jz}) - \\
& - \zeta_j (2 \dot{\alpha}_{j13} \dot{m}_{jx} + 2 \dot{\alpha}_{j23} \dot{m}_{jy} + 2 \dot{\alpha}_{j33} \dot{m}_{jz})
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Вторые производные координат векторов  $\vec{e}$ ,  $\vec{l}$  и  $\vec{m}$  в подвижной системе отсчёта, связанной с  $j$  телом определяются формулами

$$\begin{aligned}
\ddot{e}_{jx} &= e_{ix} \ddot{\chi}_{11} + e_{iy} \ddot{\chi}_{12} + e_{iz} \ddot{\chi}_{13} \\
\ddot{e}_{jy} &= e_{ix} \ddot{\chi}_{21} + e_{iy} \ddot{\chi}_{22} + e_{iz} \ddot{\chi}_{23} \\
\ddot{e}_{jz} &= e_{ix} \ddot{\chi}_{31} + e_{iy} \ddot{\chi}_{32} + e_{iz} \ddot{\chi}_{33} \\
\ddot{l}_{jx} &= l_{ix} \ddot{\chi}_{11} + l_{iy} \ddot{\chi}_{12} + l_{iz} \ddot{\chi}_{13} \\
\ddot{l}_{jy} &= l_{ix} \ddot{\chi}_{21} + l_{iy} \ddot{\chi}_{22} + l_{iz} \ddot{\chi}_{23} \\
\ddot{l}_{jz} &= l_{ix} \ddot{\chi}_{31} + l_{iy} \ddot{\chi}_{32} + l_{iz} \ddot{\chi}_{33} \\
\ddot{m}_{jx} &= m_{ix} \ddot{\chi}_{11} + m_{iy} \ddot{\chi}_{12} + m_{iz} \ddot{\chi}_{13} \\
\ddot{m}_{jy} &= m_{ix} \ddot{\chi}_{21} + m_{iy} \ddot{\chi}_{22} + m_{iz} \ddot{\chi}_{23} \\
\ddot{m}_{jz} &= m_{ix} \ddot{\chi}_{31} + m_{iy} \ddot{\chi}_{32} + m_{iz} \ddot{\chi}_{33}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

а вторые производные направляющих косинусов между  $i$  и  $j$  телами:

$$\begin{aligned}
\ddot{\chi}_{11} &= \ddot{\alpha}_{i11} \alpha_{j11} + \ddot{\alpha}_{i12} \alpha_{j12} + \ddot{\alpha}_{i13} \alpha_{j13} + 2 \dot{\alpha}_{i11} \dot{\alpha}_{j11} + 2 \dot{\alpha}_{i12} \dot{\alpha}_{j12} + 2 \dot{\alpha}_{i13} \dot{\alpha}_{j13} + \alpha_{i11} \ddot{\alpha}_{j11} + \alpha_{i12} \ddot{\alpha}_{j12} + \alpha_{i13} \ddot{\alpha}_{j13} \\
\ddot{\chi}_{12} &= \ddot{\alpha}_{i21} \alpha_{j11} + \ddot{\alpha}_{i22} \alpha_{j12} + \ddot{\alpha}_{i23} \alpha_{j13} + 2 \dot{\alpha}_{i21} \dot{\alpha}_{j11} + 2 \dot{\alpha}_{i22} \dot{\alpha}_{j12} + 2 \dot{\alpha}_{i23} \dot{\alpha}_{j13} + \alpha_{i21} \ddot{\alpha}_{j11} + \alpha_{i22} \ddot{\alpha}_{j12} + \alpha_{i23} \ddot{\alpha}_{j13} \\
\ddot{\chi}_{13} &= \ddot{\alpha}_{i31} \alpha_{j11} + \ddot{\alpha}_{i32} \alpha_{j12} + \ddot{\alpha}_{i33} \alpha_{j13} + 2 \dot{\alpha}_{i31} \dot{\alpha}_{j11} + 2 \dot{\alpha}_{i32} \dot{\alpha}_{j12} + 2 \dot{\alpha}_{i33} \dot{\alpha}_{j13} + \alpha_{i31} \ddot{\alpha}_{j11} + \alpha_{i32} \ddot{\alpha}_{j12} + \alpha_{i33} \ddot{\alpha}_{j13} \\
\ddot{\chi}_{21} &= \ddot{\alpha}_{i11} \alpha_{j21} + \ddot{\alpha}_{i12} \alpha_{j22} + \ddot{\alpha}_{i13} \alpha_{j23} + 2 \dot{\alpha}_{i11} \dot{\alpha}_{j21} + 2 \dot{\alpha}_{i12} \dot{\alpha}_{j22} + 2 \dot{\alpha}_{i13} \dot{\alpha}_{j23} + \alpha_{i11} \ddot{\alpha}_{j21} + \alpha_{i12} \ddot{\alpha}_{j22} + \alpha_{i13} \ddot{\alpha}_{j23} \\
\ddot{\chi}_{22} &= \ddot{\alpha}_{i21} \alpha_{j21} + \ddot{\alpha}_{i22} \alpha_{j22} + \ddot{\alpha}_{i23} \alpha_{j23} + 2 \dot{\alpha}_{i21} \dot{\alpha}_{j21} + 2 \dot{\alpha}_{i22} \dot{\alpha}_{j22} + 2 \dot{\alpha}_{i23} \dot{\alpha}_{j23} + \alpha_{i21} \ddot{\alpha}_{j21} + \alpha_{i22} \ddot{\alpha}_{j22} + \alpha_{i23} \ddot{\alpha}_{j23} \\
\ddot{\chi}_{23} &= \ddot{\alpha}_{i31} \alpha_{j21} + \ddot{\alpha}_{i32} \alpha_{j22} + \ddot{\alpha}_{i33} \alpha_{j23} + 2 \dot{\alpha}_{i31} \dot{\alpha}_{j21} + 2 \dot{\alpha}_{i32} \dot{\alpha}_{j22} + 2 \dot{\alpha}_{i33} \dot{\alpha}_{j23} + \alpha_{i31} \ddot{\alpha}_{j21} + \alpha_{i32} \ddot{\alpha}_{j22} + \alpha_{i33} \ddot{\alpha}_{j23} \\
\ddot{\chi}_{31} &= \ddot{\alpha}_{i11} \alpha_{j31} + \ddot{\alpha}_{i12} \alpha_{j32} + \ddot{\alpha}_{i13} \alpha_{j33} + 2 \dot{\alpha}_{i11} \dot{\alpha}_{j31} + 2 \dot{\alpha}_{i12} \dot{\alpha}_{j32} + 2 \dot{\alpha}_{i13} \dot{\alpha}_{j33} + \alpha_{i11} \ddot{\alpha}_{j31} + \alpha_{i12} \ddot{\alpha}_{j32} + \alpha_{i13} \ddot{\alpha}_{j33} \\
\ddot{\chi}_{32} &= \ddot{\alpha}_{i21} \alpha_{j31} + \ddot{\alpha}_{i22} \alpha_{j32} + \ddot{\alpha}_{i23} \alpha_{j33} + 2 \dot{\alpha}_{i21} \dot{\alpha}_{j31} + 2 \dot{\alpha}_{i22} \dot{\alpha}_{j32} + 2 \dot{\alpha}_{i23} \dot{\alpha}_{j33} + \alpha_{i21} \ddot{\alpha}_{j31} + \alpha_{i22} \ddot{\alpha}_{j32} + \alpha_{i23} \ddot{\alpha}_{j33} \\
\ddot{\chi}_{33} &= \ddot{\alpha}_{i31} \alpha_{j31} + \ddot{\alpha}_{i32} \alpha_{j32} + \ddot{\alpha}_{i33} \alpha_{j33} + 2 \dot{\alpha}_{i31} \dot{\alpha}_{j31} + 2 \dot{\alpha}_{i32} \dot{\alpha}_{j32} + 2 \dot{\alpha}_{i33} \dot{\alpha}_{j33} + \alpha_{i31} \ddot{\alpha}_{j31} + \alpha_{i32} \ddot{\alpha}_{j32} + \alpha_{i33} \ddot{\alpha}_{j33}
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Или окончательно

$$\begin{aligned}
& (\dot{V}_{ix}l_{ix} + \dot{V}_{iy}l_{iy} + \dot{V}_{iz}l_{iz}) - (\dot{V}_{jx}l_{jx} + \dot{V}_{jy}l_{jy} + \dot{V}_{jz}l_{jz}) + \\
& + \dot{p}_i(A_{121}\alpha_{i31} + A_{122}\alpha_{i32} + A_{123}\alpha_{i33} - A_{131}\alpha_{i21} - A_{132}\alpha_{i22} - A_{133}\alpha_{i23}) + \\
& + \dot{q}_i(A_{131}\alpha_{i11} + A_{132}\alpha_{i12} + A_{133}\alpha_{i13} - A_{111}\alpha_{i31} - A_{112}\alpha_{i32} - A_{113}\alpha_{i33}) + \\
& + \dot{r}_i(A_{111}\alpha_{i21} + A_{112}\alpha_{i22} + A_{113}\alpha_{i23} - A_{121}\alpha_{i11} - A_{122}\alpha_{i12} - A_{123}\alpha_{i13}) + \\
& + \dot{p}_j(B_{121}\alpha_{j31} + B_{122}\alpha_{j32} + B_{123}\alpha_{j33} - B_{131}\alpha_{j21} - B_{132}\alpha_{j22} - B_{133}\alpha_{j23}) + \\
& + \dot{q}_j(B_{131}\alpha_{j11} + B_{132}\alpha_{j12} + B_{133}\alpha_{j13} - B_{111}\alpha_{j31} - B_{112}\alpha_{j32} - B_{113}\alpha_{j33}) + \\
& + \dot{r}_j(B_{111}\alpha_{j21} + B_{112}\alpha_{j22} + B_{113}\alpha_{j23} - B_{121}\alpha_{j11} - B_{122}\alpha_{j12} - B_{123}\alpha_{j13}) + \\
& = \\
& -2a\dot{D}_l - b^2D_l - C_l \\
& - A_{111}(-q_i\dot{\alpha}_{i31} + r_i\dot{\alpha}_{i21}) - A_{121}(-r_i\dot{\alpha}_{i11} + p_i\dot{\alpha}_{i31}) - A_{131}(-p_i\dot{\alpha}_{i21} + q_i\dot{\alpha}_{i11}) - \\
& - A_{112}(-q_i\dot{\alpha}_{i32} + r_i\dot{\alpha}_{i22}) - A_{122}(-r_i\dot{\alpha}_{i12} + p_i\dot{\alpha}_{i32}) - A_{132}(-p_i\dot{\alpha}_{i22} + q_i\dot{\alpha}_{i12}) - \\
& - A_{113}(-q_i\dot{\alpha}_{i33} + r_i\dot{\alpha}_{i23}) - A_{123}(-r_i\dot{\alpha}_{i13} + p_i\dot{\alpha}_{i33}) - A_{133}(-p_i\dot{\alpha}_{i23} + q_i\dot{\alpha}_{i13}) - \\
& - B_{111}(-q_j\dot{\alpha}_{j31} + r_j\dot{\alpha}_{j21}) - B_{112}(-q_j\dot{\alpha}_{j32} + r_j\dot{\alpha}_{j22}) - B_{113}(-q_j\dot{\alpha}_{j33} + r_j\dot{\alpha}_{j23}) - \\
& - B_{121}(-r_j\dot{\alpha}_{j11} + p_j\dot{\alpha}_{j31}) - B_{122}(-r_j\dot{\alpha}_{j12} + p_j\dot{\alpha}_{j32}) - B_{123}(-r_j\dot{\alpha}_{j13} + p_j\dot{\alpha}_{j33}) - \\
& - B_{131}(-p_j\dot{\alpha}_{j21} + q_j\dot{\alpha}_{j11}) - B_{132}(-p_j\dot{\alpha}_{j22} + q_j\dot{\alpha}_{j12}) - B_{133}(-p_j\dot{\alpha}_{j23} + q_j\dot{\alpha}_{j13})
\end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}
& (\dot{V}_{ix}m_{ix} + \dot{V}_{iy}m_{iy} + \dot{V}_{iz}m_{iz}) - (\dot{V}_{jx}m_{jx} + \dot{V}_{jy}m_{jy} + \dot{V}_{jz}m_{jz}) + \\
& + \dot{p}_i(A_{m21}\alpha_{i31} + A_{m22}\alpha_{i32} + A_{m23}\alpha_{i33} - A_{m31}\alpha_{i21} - A_{m32}\alpha_{i22} - A_{m33}\alpha_{i23}) + \\
& + \dot{q}_i(A_{m31}\alpha_{i11} + A_{m32}\alpha_{i12} + A_{m33}\alpha_{i13} - A_{m11}\alpha_{i31} - A_{m12}\alpha_{i32} - A_{m13}\alpha_{i33}) + \\
& + \dot{r}_i(A_{m11}\alpha_{i21} + A_{m12}\alpha_{i22} + A_{m13}\alpha_{i23} - A_{m21}\alpha_{i11} - A_{m22}\alpha_{i12} - A_{m23}\alpha_{i13}) + \\
& + \dot{p}_j(B_{m21}\alpha_{j31} + B_{m22}\alpha_{j32} + B_{m23}\alpha_{j33} - B_{m31}\alpha_{j21} - B_{m32}\alpha_{j22} - B_{m33}\alpha_{j23}) + \\
& + \dot{q}_j(B_{m31}\alpha_{j11} + B_{m32}\alpha_{j12} + B_{m33}\alpha_{j13} - B_{m11}\alpha_{j31} - B_{m12}\alpha_{j32} - B_{m13}\alpha_{j33}) + \\
& + \dot{r}_j(B_{m11}\alpha_{j21} + B_{m12}\alpha_{j22} + B_{m13}\alpha_{j23} - B_{m21}\alpha_{j11} - B_{m22}\alpha_{j12} - B_{m23}\alpha_{j13}) + \\
& = \\
& -2a\dot{D}_m - b^2D_m - C_m - \\
& - A_{m11}(-q_i\dot{\alpha}_{i31} + r_i\dot{\alpha}_{i21}) - A_{m21}(-r_i\dot{\alpha}_{i11} + p_i\dot{\alpha}_{i31}) - A_{m31}(-p_i\dot{\alpha}_{i21} + q_i\dot{\alpha}_{i11}) - \\
& - A_{m12}(-q_i\dot{\alpha}_{i32} + r_i\dot{\alpha}_{i22}) - A_{m22}(-r_i\dot{\alpha}_{i12} + p_i\dot{\alpha}_{i32}) - A_{m32}(-p_i\dot{\alpha}_{i22} + q_i\dot{\alpha}_{i12}) - \\
& - A_{m13}(-q_i\dot{\alpha}_{i33} + r_i\dot{\alpha}_{i23}) - A_{m23}(-r_i\dot{\alpha}_{i13} + p_i\dot{\alpha}_{i33}) - A_{m33}(-p_i\dot{\alpha}_{i23} + q_i\dot{\alpha}_{i13}) - \\
& - B_{m11}(-q_j\dot{\alpha}_{j31} + r_j\dot{\alpha}_{j21}) - B_{m12}(-q_j\dot{\alpha}_{j32} + r_j\dot{\alpha}_{j22}) - B_{m13}(-q_j\dot{\alpha}_{j33} + r_j\dot{\alpha}_{j23}) - \\
& - B_{m21}(-r_j\dot{\alpha}_{j11} + p_j\dot{\alpha}_{j31}) - B_{m22}(-r_j\dot{\alpha}_{j12} + p_j\dot{\alpha}_{j32}) - B_{m23}(-r_j\dot{\alpha}_{j13} + p_j\dot{\alpha}_{j33}) - \\
& - B_{m31}(-p_j\dot{\alpha}_{j21} + q_j\dot{\alpha}_{j11}) - B_{m32}(-p_j\dot{\alpha}_{j22} + q_j\dot{\alpha}_{j12}) - B_{m33}(-p_j\dot{\alpha}_{j23} + q_j\dot{\alpha}_{j13})
\end{aligned}$$

где





$$\begin{aligned}
c_{2lx} &= l_{ix} (2\dot{\alpha}_{i11}\dot{\alpha}_{j11} + 2\dot{\alpha}_{i12}\dot{\alpha}_{j12} + 2\dot{\alpha}_{i13}\dot{\alpha}_{j13}) + \\
&\quad + l_{iy} (2\dot{\alpha}_{i21}\dot{\alpha}_{j11} + 2\dot{\alpha}_{i22}\dot{\alpha}_{j12} + 2\dot{\alpha}_{i23}\dot{\alpha}_{j13}) + \\
&\quad + l_{iz} (2\dot{\alpha}_{i31}\dot{\alpha}_{j11} + 2\dot{\alpha}_{i32}\dot{\alpha}_{j12} + 2\dot{\alpha}_{i33}\dot{\alpha}_{j13}) \\
c_{2ly} &= l_{ix} (2\dot{\alpha}_{i11}\dot{\alpha}_{j21} + 2\dot{\alpha}_{i12}\dot{\alpha}_{j22} + 2\dot{\alpha}_{i13}\dot{\alpha}_{j23}) + \\
&\quad + l_{iy} (2\dot{\alpha}_{i21}\dot{\alpha}_{j21} + 2\dot{\alpha}_{i22}\dot{\alpha}_{j22} + 2\dot{\alpha}_{i23}\dot{\alpha}_{j23}) + \\
&\quad + l_{iz} (2\dot{\alpha}_{i31}\dot{\alpha}_{j21} + 2\dot{\alpha}_{i32}\dot{\alpha}_{j22} + 2\dot{\alpha}_{i33}\dot{\alpha}_{j23}) \\
c_{2lz} &= l_{ix} (2\dot{\alpha}_{i11}\dot{\alpha}_{j31} + 2\dot{\alpha}_{i12}\dot{\alpha}_{j32} + 2\dot{\alpha}_{i13}\dot{\alpha}_{j33}) + \\
&\quad + l_{iy} (2\dot{\alpha}_{i21}\dot{\alpha}_{j31} + 2\dot{\alpha}_{i22}\dot{\alpha}_{j32} + 2\dot{\alpha}_{i23}\dot{\alpha}_{j33}) + \\
&\quad + l_{iz} (2\dot{\alpha}_{i31}\dot{\alpha}_{j31} + 2\dot{\alpha}_{i32}\dot{\alpha}_{j32} + 2\dot{\alpha}_{i33}\dot{\alpha}_{j33})
\end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned}
c_{2mx} &= m_{ix} (2\dot{\alpha}_{i11}\dot{\alpha}_{j11} + 2\dot{\alpha}_{i12}\dot{\alpha}_{j12} + 2\dot{\alpha}_{i13}\dot{\alpha}_{j13}) + \\
&\quad + m_{iy} (2\dot{\alpha}_{i21}\dot{\alpha}_{j11} + 2\dot{\alpha}_{i22}\dot{\alpha}_{j12} + 2\dot{\alpha}_{i23}\dot{\alpha}_{j13}) + \\
&\quad + m_{iz} (2\dot{\alpha}_{i31}\dot{\alpha}_{j11} + 2\dot{\alpha}_{i32}\dot{\alpha}_{j12} + 2\dot{\alpha}_{i33}\dot{\alpha}_{j13}) \\
c_{2my} &= m_{ix} (2\dot{\alpha}_{i11}\dot{\alpha}_{j21} + 2\dot{\alpha}_{i12}\dot{\alpha}_{j22} + 2\dot{\alpha}_{i13}\dot{\alpha}_{j23}) + \\
&\quad + m_{iy} (2\dot{\alpha}_{i21}\dot{\alpha}_{j21} + 2\dot{\alpha}_{i22}\dot{\alpha}_{j22} + 2\dot{\alpha}_{i23}\dot{\alpha}_{j23}) + \\
&\quad + m_{iz} (2\dot{\alpha}_{i31}\dot{\alpha}_{j21} + 2\dot{\alpha}_{i32}\dot{\alpha}_{j22} + 2\dot{\alpha}_{i33}\dot{\alpha}_{j23}) \\
c_{2mz} &= m_{ix} (2\dot{\alpha}_{i11}\dot{\alpha}_{j31} + 2\dot{\alpha}_{i12}\dot{\alpha}_{j32} + 2\dot{\alpha}_{i13}\dot{\alpha}_{j33}) + \\
&\quad + m_{iy} (2\dot{\alpha}_{i21}\dot{\alpha}_{j31} + 2\dot{\alpha}_{i22}\dot{\alpha}_{j32} + 2\dot{\alpha}_{i23}\dot{\alpha}_{j33}) + \\
&\quad + m_{iz} (2\dot{\alpha}_{i31}\dot{\alpha}_{j31} + 2\dot{\alpha}_{i32}\dot{\alpha}_{j32} + 2\dot{\alpha}_{i33}\dot{\alpha}_{j33})
\end{aligned}$$

Выражение для силы вдоль оси  $e$

$$F_e = F_e(t, \mathbf{X}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{V}_j) \tag{2.81}$$

может быть представлено через проекции силы на оси подвижной системы отсчёта  $i$  тела

$$F_{ix}e_{ix} + F_{iy}e_{iy} + F_{iz}e_{iz} = F_e(t, \mathbf{X}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{V}_j) \tag{2.82}$$

или окончательно через проекции момента сил на оси неподвижной системы отсчёта

$$\begin{aligned}
& F_{\xi}(\alpha_{11} e_{ix} + \alpha_{21} e_{iy} + \alpha_{31} e_{iz}) + \\
& + F_{\eta}(\alpha_{12} e_{ix} + \alpha_{22} e_{iy} + \alpha_{32} e_{iz}) + \\
& + F_{\zeta}(\alpha_{13} e_{ix} + \alpha_{23} e_{iy} + \alpha_{33} e_{iz}) = F_e(t, X_i, V_i, X_j, V_j)
\end{aligned} \quad (2.83)$$

д) **Поверхность как неудерживающая геометрическая связь.** В некоторых случаях контакт тела с поверхностью удобнее рассматривать как геометрическую неудерживающую связь. Такие случаи возникают когда нахождение нормальных реакций опорной поверхности является статически-определимой задачей, что позволяет находить их более точно, не вводя предположений о физической природе взаимодействующих твёрдых тел.

При выполнении условия (2.33) контакт тела с поверхностью реализуется и накладывается связь, запрещающая перемещение в направлении нормали к поверхности:

$$D_n = \rho_n = \rho_{\xi} n_{\xi} + \rho_{\eta} n_{\eta} + \rho_{\zeta} n_{\zeta} = 0 \quad (2.84)$$

Для поверхности, связанной с неподвижным телом (средой), проекции нормали к поверхности на оси неподвижной системы отсчёта не меняются с течением времени, производные уравнения связи находятся в виде:

$$\begin{aligned}
\dot{D}_n &= \dot{\rho}_{\xi} n_{\xi} + \dot{\rho}_{\eta} n_{\eta} + \dot{\rho}_{\zeta} n_{\zeta}, \\
\ddot{D}_n &= \ddot{\rho}_{\xi} n_{\xi} + \ddot{\rho}_{\eta} n_{\eta} + \ddot{\rho}_{\zeta} n_{\zeta},
\end{aligned} \quad (2.85)$$

С учётом замены реальной поверхности касательной плоскостью, производные от расстояний находятся приближённо выражениями (2.39) и

$$\begin{aligned}\ddot{\rho}_\xi &= \ddot{\xi}_{ij}, \\ \ddot{\rho}_\eta &= \ddot{\eta}_{ij}, \\ \ddot{\rho}_\zeta &= \ddot{\zeta}_{ij}.\end{aligned}\tag{2.86}$$

Окончательно уравнение связи имеет вид:

$$\ddot{\xi}_{ij} n_\xi + \ddot{\eta}_{ij} n_\eta + \ddot{\zeta}_{ij} n_\zeta = -2a(\dot{\xi}_{ij} n_\xi + \dot{\eta}_{ij} n_\eta + \dot{\zeta}_{ij} n_\zeta) - b^2(\xi_{ij} n_\xi + \eta_{ij} n_\eta + \zeta_{ij} n_\zeta)\tag{2.87}$$

Уравнение связи (2.87) дополняется двумя уравнениями для сил в касательной плоскости:

$$\begin{aligned}F_\tau &= F_\tau(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{V}_j) \\ F_b &= F_b(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{V}_j)\end{aligned}\tag{2.88}$$

Если в правые части уравнений (2.88) не входит нормальная реакция  $F_n$  (например, в уравнениях (2.41) в случае  $F_\tau^* < F_\tau^{**}$ ,  $F_b^* < F_b^{**}$ ), то эти уравнения подставляются в общую систему уравнений в виде:

$$\begin{aligned}F_\xi \tau_\xi + F_\eta \tau_\eta + F_\zeta \tau_\zeta &= F_\tau(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{V}_j), \\ F_\xi b_\xi + F_\eta b_\eta + F_\zeta b_\zeta &= F_b(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{V}_j)\end{aligned}\tag{2.89}$$

Если правые части уравнений (2.88) от нормальной реакции  $F_n$  зависят линейно

$$\begin{aligned}F_\tau &= F_n f_\tau(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{V}_j) \\ F_b &= F_n f_b(\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_i, \mathbf{X}_j, \mathbf{V}_j)\end{aligned},\tag{2.90}$$

где  $f_\tau$ ,  $f_b$  — функции обобщённых координат и скоростей, то выражения для сил принимают вид:

$$\begin{aligned} F_\xi(\tau_\xi - n_\xi f_\tau) + F_\eta(\tau_\eta - n_\eta f_\tau) + F_\zeta(\tau_\zeta - n_\zeta f_\tau) &= 0 \\ F_\xi(b_\xi - n_\xi f_b) + F_\eta(b_\eta - n_\eta f_b) + F_\zeta(b_\zeta - n_\zeta f_b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

В случае нелинейной зависимости уравнений (2.88) от нормальной реакции  $F_n$  требуется реализация того или иного алгоритма численного решения в зависимости от вида нелинейности и требуемой точности. Так, для случая зависимости от абсолютной величины  $F_n$  (например, в уравнениях (2.41) в случае  $F_\tau^* \geq F_\tau^{**}$ ,  $F_b^* \geq F_b^{**}$ ) достаточно проверить два решения: (2.91) и

$$\begin{aligned} F_\xi(\tau_\xi + n_\xi f_\tau) + F_\eta(\tau_\eta + n_\eta f_\tau) + F_\zeta(\tau_\zeta + n_\zeta f_\tau) &= 0 \\ F_\xi(b_\xi + n_\xi f_b) + F_\eta(b_\eta + n_\eta f_b) + F_\zeta(b_\zeta + n_\zeta f_b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

#### **2.4. Нестационарные связи и законы управления**

**а) Программные законы движения для свободного тела.** Уравнения, задающие программные законы движения тела по форме соответствуют уравнениям нестационарной связи (2.20) или (2.22). При введении этих уравнений в теоретико-механическую модель определяются силы и моменты сил, обеспечивающие реализацию заданных законов движения.

Программные законы движения тел могут задаваться различными способами в зависимости от решаемой задачи. Так, для свободного твёрдого тела можно задавать законы изменения его обобщённых координат как функций времени, учитывающих также и изменения других величин.

Однако на практике при управлении шагающим аппаратом чаще всего возникает необходимость управлять корпусом аппарата, задавая его скорости в проекциях на оси подвижной системы отсчёта. Это связано с тем, что и оператор-водитель шагающей машины при ручном управлении, и система управления автоматического робота обычно имеют информацию о постоянно меняющейся внешней среде, которую получают «с борта» машины. Такой подход не является особенностью шагающих машин. Например, водитель автомобиля действует аналогично: с помощью педалей акселератора и тормоза управляет величиной скорости машины, а с помощью рулевого колеса управляет направлением скорости движения.

Если количество степеней свободы шагающего аппарата достаточно велико, то корпус шагающей машины может совершать пространственное движение и для его описания необходимо задать шесть уравнений вида:

$$\begin{aligned}
 B_{ix} &= V_{ix} - B_{ix}^*(t, \mathbf{X}) = 0 \\
 B_{iy} &= V_{iy} - B_{iy}^*(t, \mathbf{X}) = 0 \\
 B_{iz} &= V_{iz} - B_{iz}^*(t, \mathbf{X}) = 0 \\
 B_{iq} &= q_i - B_{iq}^*(t, \mathbf{X}) = 0 \\
 B_{ip} &= p_i - B_{ip}^*(t, \mathbf{X}) = 0 \\
 B_{ir} &= r_i - B_{ir}^*(t, \mathbf{X}) = 0
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

где  $B_l^*$  — функции, задающие законы изменения соответствующих скоростей;  $\mathbf{X}$  — вектор, в общем случае содержащий параметры системы и окружающей среды, по которым строятся законы управления. В вектор  $\mathbf{X}$  могут быть включены обобщённые координаты, обобщённые скорости и функции от них.

Выражения (2.93) дифференцируются и включаются в общую систему уравнений в форме (2.23). Если вектор  $\mathbf{X}$  включает в себя обобщённые скорости, то при разрешении получающихся уравнений следует учитывать ускорения,

возникающие при дифференцировании функций  $B_i^*$ . Во всех остальных случаях единственным ускорением в каждом из уравнений (2.93) будет производная от первого слагаемого — соответствующей обобщённой скорости.

Выражения (2.93) могут быть представлены в виде матричного уравнения

$$\mathbf{A}_i \times \mathbf{V}_i = \mathbf{B}_i \quad (2.94)$$

где  $\mathbf{A}_i$  — матрица коэффициентов при скоростях;  $\mathbf{B}_i$  — матрица-столбец законов управления;  $\mathbf{V}_i$  — матрица-столбец обобщённых скоростей:

$$\mathbf{A}_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{V}_i = (V_{ix}, V_{iy}, V_{iz}, p_i, q_i, r_i)^T$$

$$\mathbf{B}_i = (B_{ix}^*(t, \mathbf{X}), B_{iy}^*(t, \mathbf{X}), B_{iz}^*(t, \mathbf{X}), B_{iq}^*(t, \mathbf{X}), B_{ip}^*(t, \mathbf{X}), B_{ir}^*(t, \mathbf{X}))^T$$

Расширенная матрица, получающаяся объединением матриц  $\mathbf{A}_i$  и  $\mathbf{B}_i$ , определяется как матрица управления  $i$  тела. Аналогично могут быть построены матрицы управления систем твёрдых тел.

**б) Программное относительное вращательное движение (цилиндрический шарнир).** Для цилиндрического шарнира, рассмотренного в разделе 2.3, можно задать нестационарную связь, определяющую закон вращения тел относительно друг друга вокруг оси шарнира. Соответствующее уравнение заменит собой уравнение для момента сил (2.69).

Направление оси цилиндрического шарнира задаётся единичным вектором  $\vec{e}$ , компоненты которого определяются выражениями (2.58) и (2.62).

Уравнение связи имеет вид:

$$B_e = (p_i e_{ix} + q_i e_{iy} + r_i e_{iz}) - (p_j e_{jx} + q_j e_{jy} + r_j e_{jz}) + \omega_{ji}(t, \mathbf{X}) = 0 \quad (2.96)$$

где  $\omega_{ji}(t, \mathbf{X})$  — закон изменения угловой скорости  $j$  тела относительно  $i$  тела. Справедливо выражение  $\omega_{ij}(t, \mathbf{X}) = -\omega_{ji}(t, \mathbf{X})$ .

Первые производные от уравнения связи:

$$\begin{aligned} \dot{B}_e = & (\dot{p}_i e_{ix} + \dot{q}_i e_{iy} + \dot{r}_i e_{iz}) - (\dot{p}_j e_{jx} + \dot{q}_j e_{jy} + \dot{r}_j e_{jz}) \\ & + (p_i \dot{e}_{ix} + q_i \dot{e}_{iy} + r_i \dot{e}_{iz}) - (p_j \dot{e}_{jx} + q_j \dot{e}_{jy} + r_j \dot{e}_{jz}) + \dot{\omega}_{ji} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Полагая, что вектор параметров  $\mathbf{X}$  не зависит от обобщённых скоростей (или более старших производных от координат) тел системы, и учитывая (2.65) дифференциальное уравнение связи приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i e_{ix} + \dot{q}_i e_{iy} + \dot{r}_i e_{iz} - \dot{p}_j e_{jx} - \dot{q}_j e_{jy} - \dot{r}_j e_{jz} = & -s B_e - \dot{\omega}_{ji} \\ & + (p_j \dot{e}_{jx} + q_j \dot{e}_{jy} + r_j \dot{e}_{jz}) \end{aligned} \quad (2.98)$$

**в) Программное относительное поступательное движение (поступательная прямолинейная пара).** Для поступательной прямолинейной пары, рассмотренной в разделе 2.3, можно задать нестационарную связь, определяющую закон относительного перемещения тел вдоль оси пары. Соответствующее уравнение заменит собой уравнение для силы (2.83).

Направление оси пары задаётся единичным вектором  $\vec{e}$ , компоненты которого определяются выражениями (2.58) и (2.62).

Уравнение связи имеет вид:

$$\begin{aligned}
 D_e = & (\xi_i \alpha_{i11} + \eta_i \alpha_{i12} + \zeta_i \alpha_{i13} + x_{i2}) e_{ix} \\
 & + (\xi_i \alpha_{i21} + \eta_i \alpha_{i22} + \zeta_i \alpha_{i23} + y_{i2}) e_{iy} \\
 & + (\xi_i \alpha_{i31} + \eta_i \alpha_{i32} + \zeta_i \alpha_{i33} + z_{i2}) e_{iz} \\
 & - (\xi_j \alpha_{j11} + \eta_j \alpha_{j12} + \zeta_j \alpha_{j13} + x_{j1}) e_{jx} \\
 & - (\xi_j \alpha_{j21} + \eta_j \alpha_{j22} + \zeta_j \alpha_{j23} + y_{j1}) e_{jy} \\
 & - (\xi_j \alpha_{j31} + \eta_j \alpha_{j32} + \zeta_j \alpha_{j33} + z_{j1}) e_{jz} + S_{ji}(t, \mathbf{X}) = 0
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

где  $S_{ji}(t, \mathbf{X})$  — закон взаимного перемещения  $j$  тела относительно  $i$  тела. Справедливо выражение  $S_{ij}(t, \mathbf{X}) = -S_{ji}(t, \mathbf{X})$ .

Производные от уравнения связи:

$$\begin{aligned}
 \dot{D}_e = & (V_{ix} e_{ix} + V_{iy} e_{iy} + V_{iz} e_{iz}) + \\
 & + \xi_i (\dot{\alpha}_{i11} e_{ix} + \dot{\alpha}_{i21} e_{iy} + \dot{\alpha}_{i31} e_{iz}) + \\
 & + \eta_i (\dot{\alpha}_{i12} e_{ix} + \dot{\alpha}_{i22} e_{iy} + \dot{\alpha}_{i32} e_{iz}) + \\
 & + \zeta_i (\dot{\alpha}_{i13} e_{ix} + \dot{\alpha}_{i23} e_{iy} + \dot{\alpha}_{i33} e_{iz}) - \\
 & - (V_{jx} e_{jx} + V_{jy} e_{jy} + V_{jz} e_{jz}) - \\
 & - \xi_j (\dot{\alpha}_{j11} e_{jx} + \dot{\alpha}_{j21} e_{jy} + \dot{\alpha}_{j31} e_{jz} + \alpha_{j11} \dot{e}_{jx} + \alpha_{j21} \dot{e}_{jy} + \alpha_{j31} \dot{e}_{jz}) - \\
 & - \eta_j (\dot{\alpha}_{j12} e_{jx} + \dot{\alpha}_{j22} e_{jy} + \dot{\alpha}_{j32} e_{jz} + \alpha_{j12} \dot{e}_{jx} + \alpha_{j22} \dot{e}_{jy} + \alpha_{j32} \dot{e}_{jz}) - \\
 & - \zeta_j (\dot{\alpha}_{j13} e_{jx} + \dot{\alpha}_{j23} e_{jy} + \dot{\alpha}_{j33} e_{jz} + \alpha_{j13} \dot{e}_{jx} + \alpha_{j23} \dot{e}_{jy} + \alpha_{j33} \dot{e}_{jz}) - \\
 & - (x_{ji} \dot{e}_{jx} + y_{ji} \dot{e}_{jy} + z_{ji} \dot{e}_{jz}) + \\
 & + \dot{S}_{ji}
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{D}_e = & (\dot{V}_{ix} e_{ix} + \dot{V}_{iy} e_{iy} + \dot{V}_{iz} e_{iz}) + \\
& + \xi_i (\ddot{\alpha}_{i11} e_{ix} + \ddot{\alpha}_{i21} e_{iy} + \ddot{\alpha}_{i31} e_{iz}) + \\
& + \eta_i (\ddot{\alpha}_{i12} e_{ix} + \ddot{\alpha}_{i22} e_{iy} + \ddot{\alpha}_{i32} e_{iz}) + \\
& + \zeta_i (\ddot{\alpha}_{i13} e_{ix} + \ddot{\alpha}_{i23} e_{iy} + \ddot{\alpha}_{i33} e_{iz}) - \\
& - (\dot{V}_{jx} e_{jx} + \dot{V}_{jy} e_{jy} + \dot{V}_{jz} e_{jz}) - \\
& - \xi_j (\ddot{\alpha}_{j11} e_{jx} + \ddot{\alpha}_{j21} e_{jy} + \ddot{\alpha}_{j31} e_{jz} + \alpha_{j11} \ddot{e}_{jx} + \alpha_{j21} \ddot{e}_{jy} + \alpha_{j31} \ddot{e}_{jz}) - \\
& - \eta_j (\ddot{\alpha}_{j12} e_{jx} + \ddot{\alpha}_{j22} e_{jy} + \ddot{\alpha}_{j32} e_{jz} + \alpha_{j12} \ddot{e}_{jx} + \alpha_{j22} \ddot{e}_{jy} + \alpha_{j32} \ddot{e}_{jz}) - \\
& - \zeta_j (\ddot{\alpha}_{j13} e_{jx} + \ddot{\alpha}_{j23} e_{jy} + \ddot{\alpha}_{j33} e_{jz} + \alpha_{j13} \ddot{e}_{jx} + \alpha_{j23} \ddot{e}_{jy} + \alpha_{j33} \ddot{e}_{jz}) - \\
& - (x_{ji} \ddot{e}_{jx} + y_{ji} \ddot{e}_{jy} + z_{ji} \ddot{e}_{jz}) + h_e + \\
& + \ddot{S}_{ji}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

где

$$\begin{aligned}
h_e = & (V_{ix} \alpha_{i11} + V_{iy} \alpha_{i21} + V_{iz} \alpha_{i31}) (\dot{\alpha}_{i11} e_{ix} + \dot{\alpha}_{i21} e_{iy} + \dot{\alpha}_{i31} e_{iz}) + \\
& + (V_{ix} \alpha_{i12} + V_{iy} \alpha_{i22} + V_{iz} \alpha_{i32}) (\dot{\alpha}_{i12} e_{ix} + \dot{\alpha}_{i22} e_{iy} + \dot{\alpha}_{i32} e_{iz}) + \\
& + (V_{ix} \alpha_{i13} + V_{iy} \alpha_{i23} + V_{iz} \alpha_{i33}) (\dot{\alpha}_{i13} e_{ix} + \dot{\alpha}_{i23} e_{iy} + \dot{\alpha}_{i33} e_{iz}) - \\
& - (V_{jx} \dot{e}_{jx} + V_{jy} \dot{e}_{jy} + V_{jz} \dot{e}_{jz}) - \\
& - (V_{jx} \alpha_{j11} + V_{jy} \alpha_{j21} + V_{jz} \alpha_{j31}) (\dot{\alpha}_{j11} e_{jx} + \dot{\alpha}_{j21} e_{jy} + \dot{\alpha}_{j31} e_{jz} + \alpha_{j11} \dot{e}_{jx} + \alpha_{j21} \dot{e}_{jy} + \alpha_{j31} \dot{e}_{jz}) - \\
& - (V_{jx} \alpha_{j12} + V_{jy} \alpha_{j22} + V_{jz} \alpha_{j32}) (\dot{\alpha}_{j12} e_{jx} + \dot{\alpha}_{j22} e_{jy} + \dot{\alpha}_{j32} e_{jz} + \alpha_{j12} \dot{e}_{jx} + \alpha_{j22} \dot{e}_{jy} + \alpha_{j32} \dot{e}_{jz}) - \\
& - (V_{jx} \alpha_{j13} + V_{jy} \alpha_{j23} + V_{jz} \alpha_{j33}) (\dot{\alpha}_{j13} e_{jx} + \dot{\alpha}_{j23} e_{jy} + \dot{\alpha}_{j33} e_{jz} + \alpha_{j13} \dot{e}_{jx} + \alpha_{j23} \dot{e}_{jy} + \alpha_{j33} \dot{e}_{jz}) - \\
& - \xi_j (2 \dot{\alpha}_{j11} \dot{e}_{jx} + 2 \dot{\alpha}_{j21} \dot{e}_{jy} + 2 \dot{\alpha}_{j31} \dot{e}_{jz}) - \\
& - \eta_j (2 \dot{\alpha}_{j12} \dot{e}_{jx} + 2 \dot{\alpha}_{j22} \dot{e}_{jy} + 2 \dot{\alpha}_{j32} \dot{e}_{jz}) - \\
& - \zeta_j (2 \dot{\alpha}_{j13} \dot{e}_{jx} + 2 \dot{\alpha}_{j23} \dot{e}_{jy} + 2 \dot{\alpha}_{j33} \dot{e}_{jz})
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Или окончательно

$$\begin{aligned}
& (\dot{V}_{ix} e_{ix} + \dot{V}_{iy} e_{iy} + \dot{V}_{iz} e_{iz}) - (\dot{V}_{jx} e_{jx} + \dot{V}_{jy} e_{jy} + \dot{V}_{jz} e_{jz}) + \\
& + \dot{p}_i (A_{e21} \alpha_{i31} + A_{e22} \alpha_{i32} + A_{e23} \alpha_{i33} - A_{e31} \alpha_{i21} - A_{e32} \alpha_{i22} - A_{e33} \alpha_{i23}) + \\
& + \dot{q}_i (A_{e31} \alpha_{i11} + A_{e32} \alpha_{i12} + A_{e33} \alpha_{i13} - A_{e11} \alpha_{i31} - A_{e12} \alpha_{i32} - A_{e13} \alpha_{i33}) + \\
& + \dot{r}_i (A_{e11} \alpha_{i21} + A_{e12} \alpha_{i22} + A_{e13} \alpha_{i23} - A_{e21} \alpha_{i11} - A_{e22} \alpha_{i12} - A_{e23} \alpha_{i13}) + \\
& + \dot{p}_j (B_{e21} \alpha_{j31} + B_{e22} \alpha_{j32} + B_{e23} \alpha_{j33} - B_{e31} \alpha_{j21} - B_{e32} \alpha_{j22} - B_{e33} \alpha_{j23}) + \\
& + \dot{q}_j (B_{e31} \alpha_{j11} + B_{e32} \alpha_{j12} + B_{e33} \alpha_{j13} - B_{e11} \alpha_{j31} - B_{e12} \alpha_{j32} - B_{e13} \alpha_{j33}) + \\
& + \dot{r}_j (B_{e11} \alpha_{j21} + B_{e12} \alpha_{j22} + B_{e13} \alpha_{j23} - B_{e21} \alpha_{j11} - B_{e22} \alpha_{j12} - B_{e23} \alpha_{j13}) + \\
& = \tag{2.103} \\
& -2a \dot{D}_e - b^2 D_e - C_e - \ddot{S}_{ji} \\
& - A_{e11} (-q_i \dot{\alpha}_{i31} + r_i \dot{\alpha}_{i21}) - A_{e21} (-r_i \dot{\alpha}_{i11} + p_i \dot{\alpha}_{i31}) - A_{e31} (-p_i \dot{\alpha}_{i21} + q_i \dot{\alpha}_{i11}) - \\
& - A_{e12} (-q_i \dot{\alpha}_{i32} + r_i \dot{\alpha}_{i22}) - A_{e22} (-r_i \dot{\alpha}_{i12} + p_i \dot{\alpha}_{i32}) - A_{e32} (-p_i \dot{\alpha}_{i22} + q_i \dot{\alpha}_{i12}) - \\
& - A_{e13} (-q_i \dot{\alpha}_{i33} + r_i \dot{\alpha}_{i23}) - A_{e23} (-r_i \dot{\alpha}_{i13} + p_i \dot{\alpha}_{i33}) - A_{e33} (-p_i \dot{\alpha}_{i23} + q_i \dot{\alpha}_{i13}) - \\
& - B_{e11} (-q_j \dot{\alpha}_{j31} + r_j \dot{\alpha}_{j21}) - B_{e12} (-q_j \dot{\alpha}_{j32} + r_j \dot{\alpha}_{j22}) - B_{e13} (-q_j \dot{\alpha}_{j33} + r_j \dot{\alpha}_{j23}) - \\
& - B_{e21} (-r_j \dot{\alpha}_{j11} + p_j \dot{\alpha}_{j31}) - B_{e22} (-r_j \dot{\alpha}_{j12} + p_j \dot{\alpha}_{j32}) - B_{e23} (-r_j \dot{\alpha}_{j13} + p_j \dot{\alpha}_{j33}) - \\
& - B_{e31} (-p_j \dot{\alpha}_{j21} + q_j \dot{\alpha}_{j11}) - B_{e32} (-p_j \dot{\alpha}_{j22} + q_j \dot{\alpha}_{j12}) - B_{e33} (-p_j \dot{\alpha}_{j23} + q_j \dot{\alpha}_{j13})
\end{aligned}$$

где



## **2.5. Матрица законов управления движением шагающих машин**

Особенностью разработанных теоретико-механических моделей является единообразный подход к заданию законов управления шагающими аппаратами. В зависимости от решаемых задач законы управления могут задаваться либо в виде законов изменения усилий, реализуемых приводными двигателями, либо в виде геометрических или кинематических программных законов движения.

Каждый из приводных двигателей шагающей машины должен управляться. И одной из основных задач системы управления является генерация программных законов движения по каждой из управляемых степеней свободы машины. Однако из-за требования согласованности работы механизмов шагания и требования обеспечения необходимых условий взаимодействия с грунтом (например, отсутствие проскальзывания) количество независимых законов управления, как правило, намного меньше числа приводных двигателей. С другой стороны, законы управления часто удобнее задавать не для звеньев механизмов шагания в их относительном движении, а, например, для корпуса в его абсолютном движении. Таким образом, количество параметров, которые принципиально могут быть управляемыми, больше числа приводных двигателей. Причём в процессе движения бывает необходимо «переключаться» с одного набора управляемых параметров на другой.

Например, шагающая машина «Ортоног» (рисунок В.2) при отсутствии внешних связей имеет 26 степеней свободы: 6 степеней свободы корпуса как твёрдого тела и по 5 степеней свободы в каждом из 4 движителей. Поэтому каждый из 4 движителей содержит 5 управляемых приводов.

Если потребовать, чтобы движение механизмов шагания, находящихся в фазе переноса, было согласовано с движением парных механизмов, находящихся в опорной фазе, то это будет эквивалентно наложению на систему 8 связей, фактически задающих законы управления 8 приводными двигателями, относящимися к 4 механизмам шагания, которые находятся в фазе переноса.

Если добавить также требования безотрывности и отсутствия проскальзывания опорных стоп по грунту, то это будет эквивалентно наложению 3 связей на каждый из 4 движителей.

Таким образом, шагающая машина будет представлять собой механическую систему с 6 степенями свободы. Для управления движением такой механической системы необходимо задать 6 законов движения по обобщённым координатам корпуса, обобщённым координатам опорных механизмов шагания или какой-либо их комбинации. Остальные 12 законов движения будут определяться из заданных уравнений связи. При этом необходимо контролировать, чтобы задаваемые законы движения при включении их в общую систему дифференциальных уравнений не приводили к её вырождению или противоречивости.

Удобным способом задания законов управления представляется задание их в виде уравнений, связывающих между собой обобщённые скорости корпуса или опорных механизмов шагания, с помощью матричного уравнения, аналогичного (2.94):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{V} = \mathbf{B} \quad (2.105)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица коэффициентов при обобщённых скоростях шагающей машины, размерности  $K \times N$ ;  $K$  — количество количество степеней свободы (в рассматриваемом примере — 6);  $N$  — количество обобщённых скоростей, принципиально доступных для управления (в рассматриваемом примере — 18);  $\mathbf{B}$  — матрица-столбец законов управления размерности  $K$ ;  $\mathbf{V}$  — матрица-столбец обобщённых скоростей размерности  $N$ :

$$\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z, p, q, r, \dot{\rho}_1, \dots, \dot{\rho}_4, \dot{\chi}_1, \dots, \dot{\chi}_4, \dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_4)^T \quad (2.106)$$

$V_x, V_y, V_z, p, q, r$  — обобщённые скорости корпуса;  $\dot{\rho}_1, \dots, \dot{\rho}_4$  — обобщённые скорости приводов курсового движения;  $\dot{\chi}_1, \dots, \dot{\chi}_4$  — обобщённые скорости приводов адаптации;  $\dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_4$  — обобщённые скорости поворотных приводов.

Расширенная матрица, получающаяся объединением матриц **A** и **B**, определяется как матрица управления шагающей машины.

Матрица **A** в свою очередь может рассматриваться как блочная матрица, составленная из квадратной матрицы размерностью  $K \times K$ , столбцы которой соответствуют обобщённым скоростям корпуса, и прямоугольной матрицы размерностью  $K \times (N - K)$ , столбцы которой соответствуют обобщённым скоростям приводов машины.

Например, для того, чтобы задать движение корпуса независимо по шести обобщённым координатам (скоростям) нужно заполнить матрицу **A** нулями, присвоив единицы компонентам главной диагонали подматрицы  $K \times K$ . Тогда компоненты матрицы-столбца **B** будут содержать законы изменения обобщённых скоростей корпуса. Так, если задать закон движения центра корпуса машины по окружности радиуса  $V_0/\Omega$  в плоскости опорной поверхности с постоянной скоростью  $V_0$  и одновременным поворотом корпуса так, чтобы продольная его ось была направлена по касательной к траектории, а в вертикальном направлении — перемещение корпуса по гармоническому закону с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a_z/\omega$ , то уравнение (2.105) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ a_z \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

Если задать ограничение на сумму обобщённых скоростей приводов курсового движения и угловую скорость корпуса, то (2.105) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Четыре единицы в первой строке означают наличие связи между скоростями приводов курсового движения всех движителей шагающей машины. Если бы рассматривался полноприводный двухосный автомобиль, то таким образом описывалась бы связь, задаваемая межосевым и межбортовыми дифференциалами. Для шагающей машины «Ортоног» связь такого типа может быть реализована соответствующим программным управлением.

Выделение законов управления в виде отдельного матричного выражения даёт удобный инструмент перехода с одного закона движения на другой путём изменения или замены матриц **A** и **B**. В частности, этот подход используется в системе управления шагающей машины «Ортоног» [46].

При движении машины по относительно ровной поверхности часто можно пренебрегать вертикальными перемещениями корпуса, углами его дифферента и крена. Тогда количество независимых законов управления уменьшается до трёх, а количество управляемых параметров до 11.

Созданное на основе разработанных математических моделей программное обеспечение позволяет осуществлять имитационное моделирование движения шагающих роботов, вычислять значения всех механических показателей качества, а также вычислять значения частных производных показателей качества от

обобщённых координат, скоростей и ускорений тел системы, что необходимо при решении задач оптимизации.

## **2.6. Программная реализация теоретико-механической модели**

### **2.6.1. Автоматическое формирование полной системы уравнений движения**

Общая система уравнений движения механической системы, состоящей из  $N$  тел и  $K$  взаимодействий, включает в себя от  $12N + 6K$  до  $13N + 6K$  уравнений в зависимости от выбранного набора обобщённых координат с соответствующим количеством неизвестных: первых производных от обобщённых координат, первых производных от обобщённых скоростей, сил взаимодействия между телами и реакций в связях. При этом,  $6N$  уравнений (2.3) и (2.4) или  $7N$  уравнений (2.3) и (2.5) уже разрешены относительно неизвестных. А  $6N + 6K$  уравнений (2.18), (2.19), (2.21) и (2.23) в общем случае требуют такого разрешения для последующего их численного интегрирования. В частных случаях некоторые из  $6K$  уравнений вида (2.19) могут быть уже разрешены относительно входящих в них сил, что не мешает использовать описываемую общую схему решения.

Таким образом, одна из промежуточных задач заключается в автоматическом составлении системы  $L = 6N + 6K$  уравнений и разрешении их относительно неизвестных как системы алгебраических уравнений. Поскольку все неизвестные входят в уравнения в первой степени, то получающаяся система алгебраических уравнений является линейной, и её решение не представляет принципиальных сложностей. Программа формирует систему уравнений в виде матрицы размерностью  $L*(L+1)$ , которая разрешается известным методом Гаусса с выбором главного элемента [224].

Согласно концепции объектно-ориентированного программирования (ООП) [98], программа функционирует как совокупность взаимодействующих друг с

другом объектов, моделирующих тела и взаимодействия. Класс объектов-тел инкапсулирует в себе как модель движущегося тела, так и модель неподвижного базового тела — среды. Класс объектов-взаимодействий инкапсулирует в себе как модель силового взаимодействия между телами, так и модели различных связей. В каждом объекте содержится информация о самом объекте, и, вообще говоря, отсутствует информация о других объектах. Поэтому каждый объект формирует свою часть матрицы, которая затем объединяется общую матрицу размерностью  $L*(L+1)$ .

Объекты-тела формируют те части матрицы, которые включают в себя коэффициенты при обобщённых ускорениях и столбец свободных членов, поскольку для их формирования требуются только данные, относящиеся к моделируемому телу. Для формирования частей матриц, соответствующих уравнениям сил и моментов сил или уравнений связей, требуются данные как относящиеся к обоим взаимодействующим телам, так и относящиеся к соответствующему взаимодействию. Поэтому окончательное формирование этих частей удобно возложить на объекты-взаимодействия. Однако данные, относящиеся к телам, метод объекта-взаимодействия должен формировать не самостоятельно, а запрашивать у соответствующих объектов-тел. Окончательная сборка матрицы осуществляется методами объекта-среды.

Разделение задачи формирования уравнений движения (2.18) на объекты-тела и объекты-связи, вместо того, чтобы выполнять эту работу в объектах-телах, может показаться искусственным решением, однако оно продиктовано как удобством программирования, так и логикой ООП:

1. В методе объекта-среды при формировании уравнений гораздо удобнее сначала перебирать тела (и сформировать квадратную матрицу), а потом перебирать связи (и каждый раз расширять матрицу, остающуюся квадратной); чем при переборе тел собрать прямоугольную матрицу, в которую потом на нужные места вставлять матрицы связей.

2. Логика работы объекта тела не подразумевает знание какой порядковый номер тело имеет в системе, и тем более — какие порядковые номера имеют взаимодействующие тела (хотя технически их и возможно получить). Однако, от этого зависят знаки коэффициентов при силах и моментах сил. Поэтому логичнее переложить вычисление знаков на среду.

Согласно описанному подходу будут сформированы матрицы определённой структуры. Так,  $i$  тело будет формировать матрицу вида:

$\dot{V}_{ix}$	$\dot{V}_{iy}$	$\dot{V}_{iz}$	$\dot{p}_i$	$\dot{q}_i$	$\dot{r}_i$	
$m_i$						$-m_i q_i V_{iz} + m_i r_i V_{iy}$
	$m_i$					$-m_i r_i V_{ix} + m_i p_i V_{iz}$
		$m_i$				$-m_i p_i V_{iy} + m_i q_i V_{ix}$
			$J_{ix}$	$-J_{ixy}$	$-J_{ixz}$	$-(J_{iz} - J_{iy})q_i r_i - J_{iyz}(r_i^2 - q_i^2) - p_i(J_{ixy}r_i - J_{ixz}q_i)$
			$-J_{ixy}$	$J_{iy}$	$-J_{iyz}$	$-(J_{ix} - J_{iz})r_i p_i - J_{ixz}(p_i^2 - r_i^2) - q_i(J_{iyz}p_i - J_{ixy}r_i)$
			$-J_{ixz}$	$-J_{iyz}$	$J_{iz}$	$-(J_{iy} - J_{ix})p_i q_i - J_{ixy}(q_i^2 - p_i^2) - r_i(J_{ixz}q_i - J_{iyz}p_i)$

Над матрицей для удобства выписаны переменные, которым соответствуют столбцы. Правый столбец содержит свободные члены уравнений.

Объект-взаимодействие  $i$  и  $j$  тел будет формировать пять матриц. Первые две из них будут записываться на основе уравнений (2.18), они одинаковы по структуре и отличаются только индексами (первая описывает действие  $j$  тела на  $i$  тело, а вторая —  $i$  тела на  $j$  тело):

$F_{ij\xi}$	$F_{ij\eta}$	$F_{ij\zeta}$	$M_{ij\xi}$	$M_{ij\eta}$	$M_{ij\zeta}$	
$\mp\alpha_{11}$	$\mp\alpha_{12}$	$\mp\alpha_{13}$				0
$\mp\alpha_{21}$	$\mp\alpha_{22}$	$\mp\alpha_{23}$				0
$\mp\alpha_{31}$	$\mp\alpha_{32}$	$\mp\alpha_{33}$				0
$\mp(\alpha_{31}y_{ij} - \alpha_{21}z_{ij})$	$\mp(\alpha_{32}y_{ij} - \alpha_{22}z_{ij})$	$\mp(\alpha_{33}y_{ij} - \alpha_{23}z_{ij})$	$\mp\alpha_{11}$	$\mp\alpha_{12}$	$\mp\alpha_{13}$	0
$\mp(\alpha_{11}z_{ij} - \alpha_{31}x_{ij})$	$\mp(\alpha_{12}z_{ij} - \alpha_{32}x_{ij})$	$\mp(\alpha_{13}z_{ij} - \alpha_{33}x_{ij})$	$\mp\alpha_{21}$	$\mp\alpha_{22}$	$\mp\alpha_{23}$	0
$\mp(\alpha_{21}x_{ij} - \alpha_{11}y_{ij})$	$\mp(\alpha_{22}x_{ij} - \alpha_{12}y_{ij})$	$\mp(\alpha_{23}x_{ij} - \alpha_{13}y_{ij})$	$\mp\alpha_{31}$	$\mp\alpha_{32}$	$\mp\alpha_{33}$	0

Здесь « $\leftrightarrow$ » следует писать если  $i > j$ , а « $\leftarrow$ » — если  $i < j$

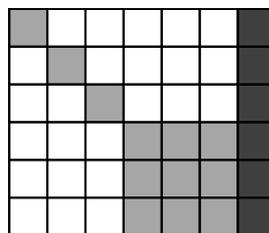
Другие две матрицы будут включать в себя коэффициенты при обобщённых ускорениях, получающиеся в результате дифференцирования уравнений связи, в столбце свободных членов — все прочие (не содержащие обобщённых ускорений слагаемые) из уравнений (2.21) и (2.23).

Последняя матрица содержит в себе условия наложенные на силы и моменты сил (2.19).

Например, для силового взаимодействия эти две матрицы будут нулевыми, а третья матрица будет иметь вид:

	$F_{ij\xi}$	$F_{ij\eta}$	$F_{ij\varsigma}$	$M_{ij\xi}$	$M_{ij\eta}$	$M_{ij\varsigma}$	
1							$F_{ij\xi}$
	1						$F_{ij\eta}$
		1					$F_{ij\varsigma}$
				1			$M_{ij\xi}$
					1		$M_{ij\eta}$
						1	$M_{ij\varsigma}$

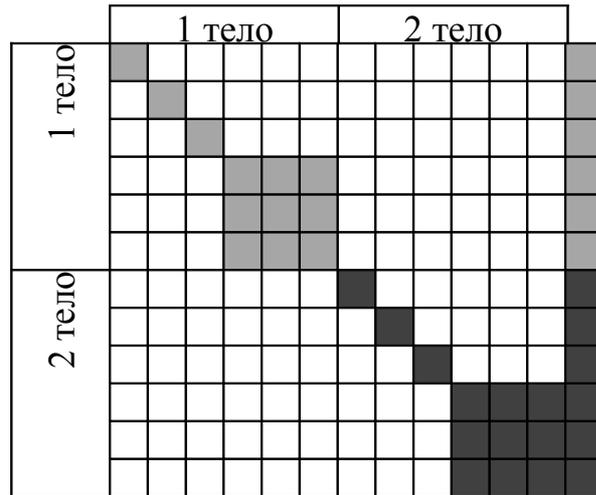
Алгоритм сборки полной матрицы заключается в выполнении следующих действий. Уравнения, описывающие движение одного свободного тела отображаются в матрицу, схематично представленную на рисунке 2.2.



Светлые ячейки соответствуют нулевым коэффициентам, серые ячейки — коэффициентам отличным от нуля, тёмно-серые — столбец свободных членов.

Рисунок 2.2 — Схема матрицы уравнений, описывающих движение одного твёрдого тела.

При добавлении второго тела матрица увеличивается на 6 строк и столбцов, элементы столбца свободных членов переносятся в крайний правый столбец, а в добавленные ячейки помещаются коэффициенты уравнений второго тела (см. рисунок 2.3).



Светлые ячейки соответствуют нулевым коэффициентам, серые ячейки — коэффициентам отличным от нуля исходной матрицы (рисунок 2.2) первого тела, тёмно-серые — коэффициентам добавленной на данном этапе матрицы второго тела.

Рисунок 2.3 — Схема матрицы уравнений, описывающих движение двух свободных твёрдых тел.

Если первое и второе тело взаимодействуют друг с другом, то матрица увеличивается ещё на 6 строк и столбцов. Элементы столбца свободных членов опять переносятся в крайний правый столбец, а в добавленных ячейках размещаются матрицы, сформированные объектом-взаимодействием. Элементы в добавленных столбцах первых 12 строк имеют строгую структуру, которая определяется способом задания сил взаимодействия между телами. А элементы на последних 6 строках определяются уравнениями связей — и их структура зависит

от вида связи. Для примера на рисунке 2.4 показана структура матрицы, получающаяся при введении в систему сферического шарнира.

	1 тело					2 тело					связь 1-2				
1 тело	■										■				
		■										■			
			■										■		
				■	■									■	■
					■										■
2 тело						■					■	■			
							■				■		■		
								■	■		■	■	■		
									■	■	■	■	■	■	
										■	■	■	■	■	■
связь 1-2															
														■	■

Светлые ячейки соответствуют нулевым коэффициентам, серые ячейки — коэффициентам отличным от нуля исходной матрицы (рисунок 2.3) для двух свободных тел, тёмно-серые — коэффициентам добавленных уравнений связи.

Рисунок 2.4 — Схема матрицы уравнений, описывающих движение двух твёрдых тел, соединённых друг с другом сферическим шарниром.

Действия повторяются при включении в систему новых тел и взаимодействий. На рисунке 2.5 показана структура матрицы, получающейся при добавлении в рассматриваемый пример третьего твёрдого тела.

	1 тело				2 тело				связь 1-2				3 тело			
1 тело	■								■							
		■								■						
			■								■					
				■								■				
2 тело					■					■						
						■					■					
							■					■				
								■					■			
связь 1-2	■	■	■	■	■	■	■	■								
	■	■	■	■	■	■	■	■								
	■	■	■	■	■	■	■	■								
	■	■	■	■	■	■	■	■								
3 тело																

Светлые ячейки соответствуют нулевым коэффициентам, серые ячейки — коэффициентам отличным от нуля исходной матрицы (рисунок 2.4), тёмно-серые — коэффициентам уравнений третьего тела.

Рисунок 2.5 — Схема матрицы уравнений после добавления в систему третьего тела.

### 2.6.2. Особенности реализации численных методов

Для численного определения производных используются известные разностные схемы [13, 224]:

$$f'_x(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}. \quad (2.109)$$

$$f''_x(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}. \quad (2.110)$$

$$f'''_x(x) \approx \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + 2f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x)}{2\Delta x^3}. \quad (2.111)$$

где  $f$  — дифференцируемая функция;  $x$  — переменная, по которой берётся производная;  $\Delta x$  — малое приращение переменной — шаг взятия производной.

Известно [13], что при использовании формулы (2.109) ошибка пропорциональна значению третьей производной

Если предполагать бесконечно высокую точность представления чисел, то чем меньше  $\Delta x$ , тем более высокую точность позволяют получить формулы (2.109), (2.110) и (2.111). Однако в компьютере точность представления чисел ограничена. Поэтому при достаточно малых значениях  $\Delta x$ , точность вычислений ухудшается. Если обозначить через  $\epsilon$  относительную погрешность представления чисел в компьютере (например, для типа `double`  $\epsilon \approx 10^{-15 \div -16}$ ), то ошибку вычислений по формуле (2.109) можно оценить следующим выражением:

$$O \approx \frac{\Delta x^2 f'''_x(x)}{3} + \frac{\epsilon f(x)}{\Delta x}. \quad (2.112)$$

Отсюда следует, что оптимальный шаг дифференцирования, при котором ошибка будет минимальна определяется по формуле:

$$\Delta x_o \approx \sqrt[3]{\left| \frac{3\epsilon f(x)}{2f'''_x(x)} \right|}. \quad (2.113)$$

Если  $f'''_x(x)$  окажется равно 0, то использование формулы (2.113) даст ошибку, которую нельзя трактовать однозначно. Это может быть и ситуация когда  $f'''_x(x)$  действительно равна 0 и шаг дифференцирования на точность вычислений не влияет (на самом деле, при очень большом шаге погрешность может возникать из-за неточности представления чисел в компьютере, но практического значения это не имеет). С другой стороны может быть ситуация, когда шаг слишком маленький и из-за погрешностей представления чисел в компьютере отличие  $f'''_x(x)$  от нуля не заметно. Теоретически возможно также случайное попадание в точку, в которой приближённая формула (2.111) даёт равенство 0, в то время как точное значение третьей производной отличается от нуля. Но на практике вероятность такого события пренебрежимо мала.

Поэтому, на  $\Delta x$  накладывается ещё два условия:

$$\Delta x \gg |\epsilon x|, \quad (2.114)$$

где символ  $\gg$  следует понимать как «больше на 1-2 порядка», и

$$\Delta x \leq \Delta x_{max}, \quad (2.115)$$

где  $\Delta x_{max}$  — максимально допустимый шаг, задаваемый экспертно.

В разработанном программном обеспечении реализован следующий алгоритм численного дифференцирования.

1. Шагу дифференцирования  $\Delta x$  присваивается значение  $\Delta x_{max}$ .
2. Вычисляется значение  $f'''_x(x)$  (2.111).
3. Если  $f'''_x(x)$  равно нулю, то вычисляются результаты дифференцирования — значения  $f'_x(x)$  (2.109) и, при необходимости,  $f''_x(x)$  (2.110), после чего

алгоритм завершается.

4. Если  $f'''_x(x)$  не равно нулю, то вычисляется  $\Delta x_0$  (2.113).
5. Если для  $\Delta x_0$  выполняются оба условия (2.114) и (2.115), то шагу дифференцирования  $\Delta x$  присваивается значение  $\Delta x_0$ .
6. Если для  $\Delta x_0$  не выполняется условие (2.114), то шагу дифференцирования  $\Delta x$  присваивается значение  $|\varepsilon x|$ .
7. Если для  $\Delta x_0$  не выполняется условие (2.115), то шагу дифференцирования  $\Delta x$  присваивается значение  $\Delta x_{max}$ .
8. Вычисляется результат дифференцирования — значение  $f'_x(x)$  (2.109). Найденный шаг дифференцирования используется также для вычисления второй  $f''_x(x)$  (2.110) и третьей  $f'''_x(x)$  (2.111) производных.

Этот же алгоритм используется при вычислении частных производных функций нескольких переменных, что требуется в некоторых задачах оптимизации.

Например, если функция механического состояния шагающей машины () зависит от одной обобщённой координаты и её первой и второй производных

$$\Phi = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) . \quad (2.116)$$

Значение функции  $\Phi$  для любого момента времени, обобщённых координаты, скорости и ускорения может быть получено из теоретико-механической модели путём задания соответствующего программного закона движения. Следовательно значения частных производных, которые могут понадобиться, могут быть найдены с помощью следующих разностных схем.

$$\Phi_{(q)} = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \approx \frac{\Phi_{+00} - \Phi_{-00}}{2 \Delta q} \quad (2.117)$$

$$\Phi_{(q\dot{q})} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q \partial \dot{q}} \approx \frac{\Phi_{++0} - \Phi_{-+0} - \Phi_{+-0} + \Phi_{--0}}{4 \Delta q \Delta \dot{q}} \quad (2.118)$$

$$\Phi_{(q\ddot{q})} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q \partial \ddot{q}} \approx \frac{\Phi_{+0+} - \Phi_{-0+} - \Phi_{+0-} + \Phi_{-0-}}{4 \Delta q \Delta \ddot{q}} \quad (2.119)$$

$$\Phi_{(\dot{q}\dot{q})} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{q}^2} \approx \frac{\Phi_{0+0} - 2\Phi_{000} + \Phi_{0-0}}{\Delta \dot{q}^2} \quad (2.120)$$

$$\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q})} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \ddot{q}^2} \approx \frac{\Phi_{00+} - 2\Phi_{000} + \Phi_{00-}}{\Delta \ddot{q}^2} \quad (2.121)$$

$$\Phi_{(q\dot{q}\ddot{q})} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial q^2 \partial \ddot{q}} \approx \frac{\Phi_{+0+} - 2\Phi_{00+} + \Phi_{-0+} - \Phi_{+0-} + 2\Phi_{00-} - \Phi_{-0-}}{2 \Delta q^2 \Delta \ddot{q}} \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{(q\dot{q}\ddot{q})} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial q \partial \dot{q} \partial \ddot{q}} \approx & \frac{\Phi_{+++} - \Phi_{-++} - \Phi_{+-+} + \Phi_{---} +}{8 \Delta q \Delta \dot{q} \Delta \ddot{q}} + \\ & + \frac{-\Phi_{++-} + \Phi_{-+-} + \Phi_{+--} - \Phi_{---}}{8 \Delta q \Delta \dot{q} \Delta \ddot{q}} \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\Phi_{(q\ddot{q}\ddot{q})} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial q \partial \ddot{q}^2} \approx \frac{\Phi_{+0+} - 2\Phi_{+00} + \Phi_{+0-} - \Phi_{-0+} + 2\Phi_{-00} - \Phi_{-0-}}{2 \Delta q \Delta \ddot{q}^2} \quad (2.124)$$

$$\Phi_{(\dot{q}\dot{q}\ddot{q})} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \dot{q}^2 \partial \ddot{q}} \approx \frac{\Phi_{0++} - 2\Phi_{00+} + \Phi_{0-+} - \Phi_{0+-} + 2\Phi_{00-} - \Phi_{0--}}{2 \Delta \dot{q}^2 \Delta \ddot{q}} \quad (2.125)$$

$$\Phi_{(\dot{q}\ddot{q}\ddot{q})} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \dot{q} \partial \ddot{q}^2} \approx \frac{\Phi_{0++} - 2\Phi_{0+0} + \Phi_{0+-} - \Phi_{0-+} + 2\Phi_{0-0} - \Phi_{0--}}{2 \Delta \dot{q} \Delta \ddot{q}^2} \quad (2.126)$$

$$\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \ddot{q}^3} \approx \frac{\Phi_{00+2} - 2\Phi_{00+} + 2\Phi_{00-} - \Phi_{00-2}}{2 \Delta \ddot{q}^3} \quad (2.127)$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_{000} &= \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\
\Phi_{+00} &= \Phi(q + \Delta q, \dot{q}, \ddot{q}) \\
\Phi_{-00} &= \Phi(q - \Delta q, \dot{q}, \ddot{q}) \\
\Phi_{++0} &= \Phi(q + \Delta q, \dot{q} + \Delta \dot{q}, \ddot{q}) \\
\Phi_{-+0} &= \Phi(q - \Delta q, \dot{q} + \Delta \dot{q}, \ddot{q}) \\
\Phi_{+-0} &= \Phi(q + \Delta q, \dot{q} - \Delta \dot{q}, \ddot{q}) \\
\Phi_{--0} &= \Phi(q - \Delta q, \dot{q} - \Delta \dot{q}, \ddot{q}) \\
\Phi_{+0+} &= \Phi(q + \Delta q, \dot{q}, \ddot{q} + \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{-0+} &= \Phi(q - \Delta q, \dot{q}, \ddot{q} + \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{+0-} &= \Phi(q + \Delta q, \dot{q}, \ddot{q} - \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{-0-} &= \Phi(q - \Delta q, \dot{q}, \ddot{q} - \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{0+0} &= \Phi(q, \dot{q} + \Delta \dot{q}, \ddot{q}) \\
\Phi_{0-0} &= \Phi(q, \dot{q} - \Delta \dot{q}, \ddot{q}) \\
\Phi_{00+} &= \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q} + \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{00-} &= \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q} - \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{+++} &= \Phi(q + \Delta q, \dot{q} + \Delta \dot{q}, \ddot{q} + \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{-++} &= \Phi(q - \Delta q, \dot{q} + \Delta \dot{q}, \ddot{q} + \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{+--} &= \Phi(q + \Delta q, \dot{q} - \Delta \dot{q}, \ddot{q} + \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{--+} &= \Phi(q - \Delta q, \dot{q} - \Delta \dot{q}, \ddot{q} + \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{++-} &= \Phi(q + \Delta q, \dot{q} + \Delta \dot{q}, \ddot{q} - \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{-+-} &= \Phi(q - \Delta q, \dot{q} + \Delta \dot{q}, \ddot{q} - \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{+--} &= \Phi(q + \Delta q, \dot{q} - \Delta \dot{q}, \ddot{q} - \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{---} &= \Phi(q - \Delta q, \dot{q} - \Delta \dot{q}, \ddot{q} - \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{0++} &= \Phi(q, \dot{q} + \Delta \dot{q}, \ddot{q} + \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{0-+} &= \Phi(q, \dot{q} - \Delta \dot{q}, \ddot{q} + \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{0+-} &= \Phi(q, \dot{q} + \Delta \dot{q}, \ddot{q} - \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{0--} &= \Phi(q, \dot{q} - \Delta \dot{q}, \ddot{q} - \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{00+2} &= \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q} + 2 \Delta \ddot{q}) \\
\Phi_{00-2} &= \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q} - 2 \Delta \ddot{q})
\end{aligned} \tag{2.128}$$

### 2.6.3. Проверка разработанных теоретико-механических моделей

Адекватность разработанных теоретико-механических моделей была проверена по результатам натуральных экспериментов для шагающих машин «Восьминог» (рисунок В.1), «Ортоног» (рисунок В.2), шагающих опор

дождевальная машины «Кубань», а также для лабораторных макетов шагающих роботов [49, 106, 137, 145, 185].

Теоретико-механическая модель шагающей машины с ортогонально-поворотными движителями легла в основу программного обеспечения системы управления шагающей машины «Ортоног».

В качестве примера на рисунке 2.6 приведены расчётный и экспериментальный графики изменения мощности от времени для шагающей машины «Восьминог».

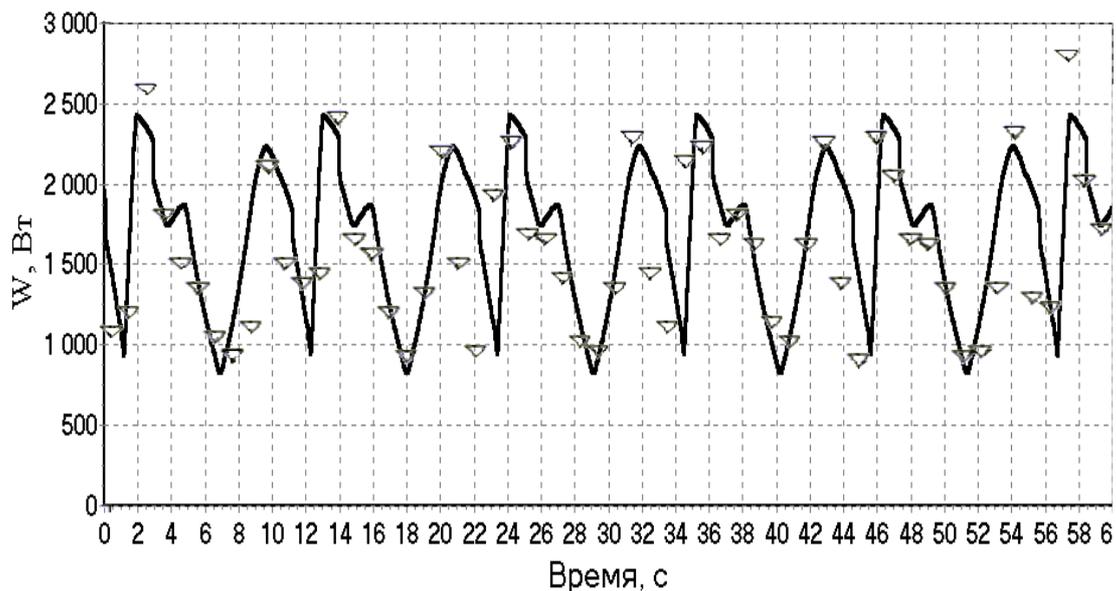


Рисунок 2.6 — Зависимости мощности от времени при движении шагающей машины «Восьминог»: расчётная (сплошная линия), экспериментальная (точки).

На рисунке 2.7 показаны примеры экспериментальных (рисунок 2.7.а, б) и расчётных (рисунок 2.7.в, г) зависимостей горизонтальной и вертикальной скоростей центра масс машины «Восьминог».

На рисунке 2.8 показан внешний вид программы просмотра и анализа экспериментальных значений параметров движения шагающей машины «Ортоног».

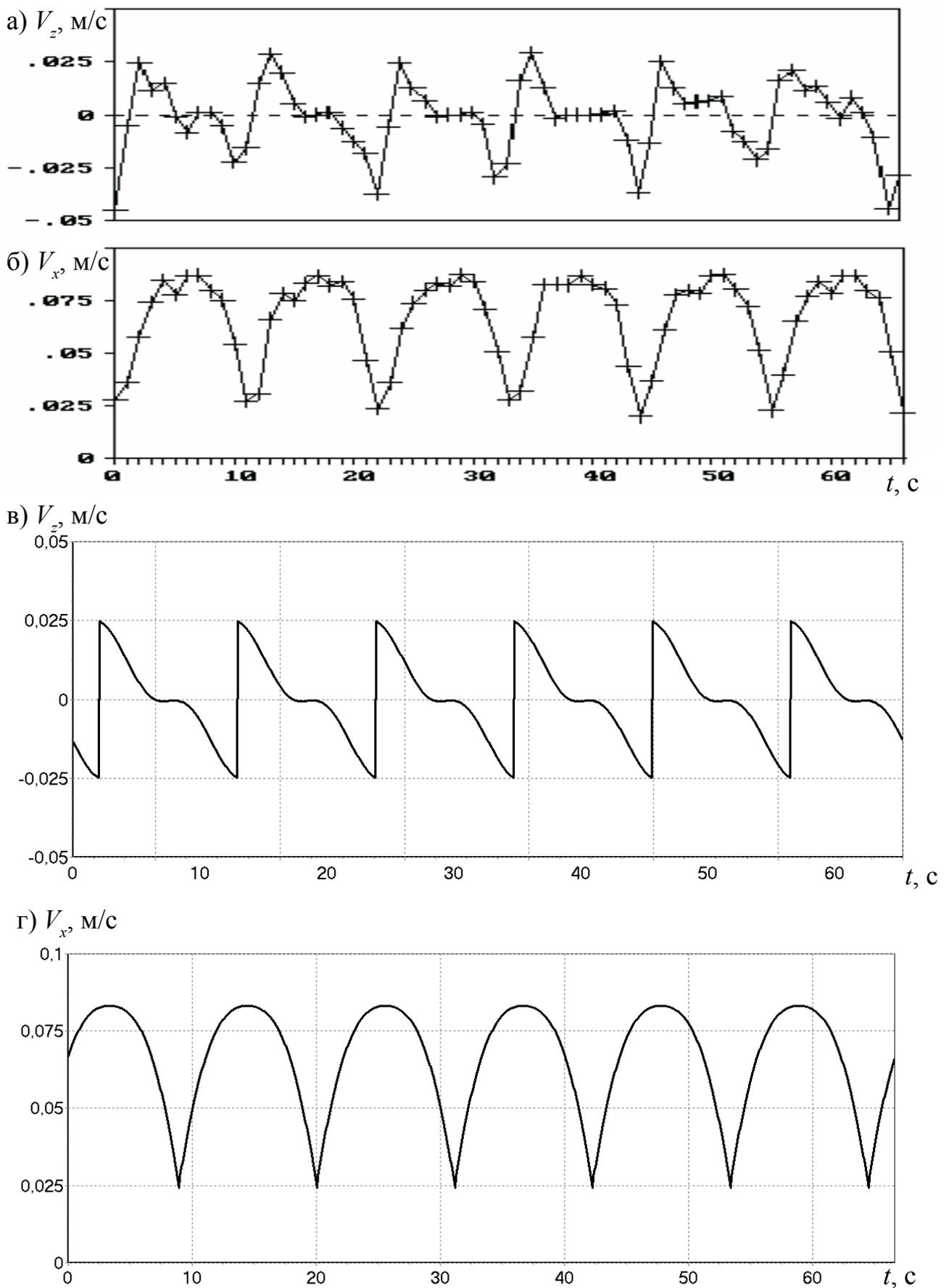


Рисунок 2.7 — Примеры экспериментальных и расчётных зависимостей

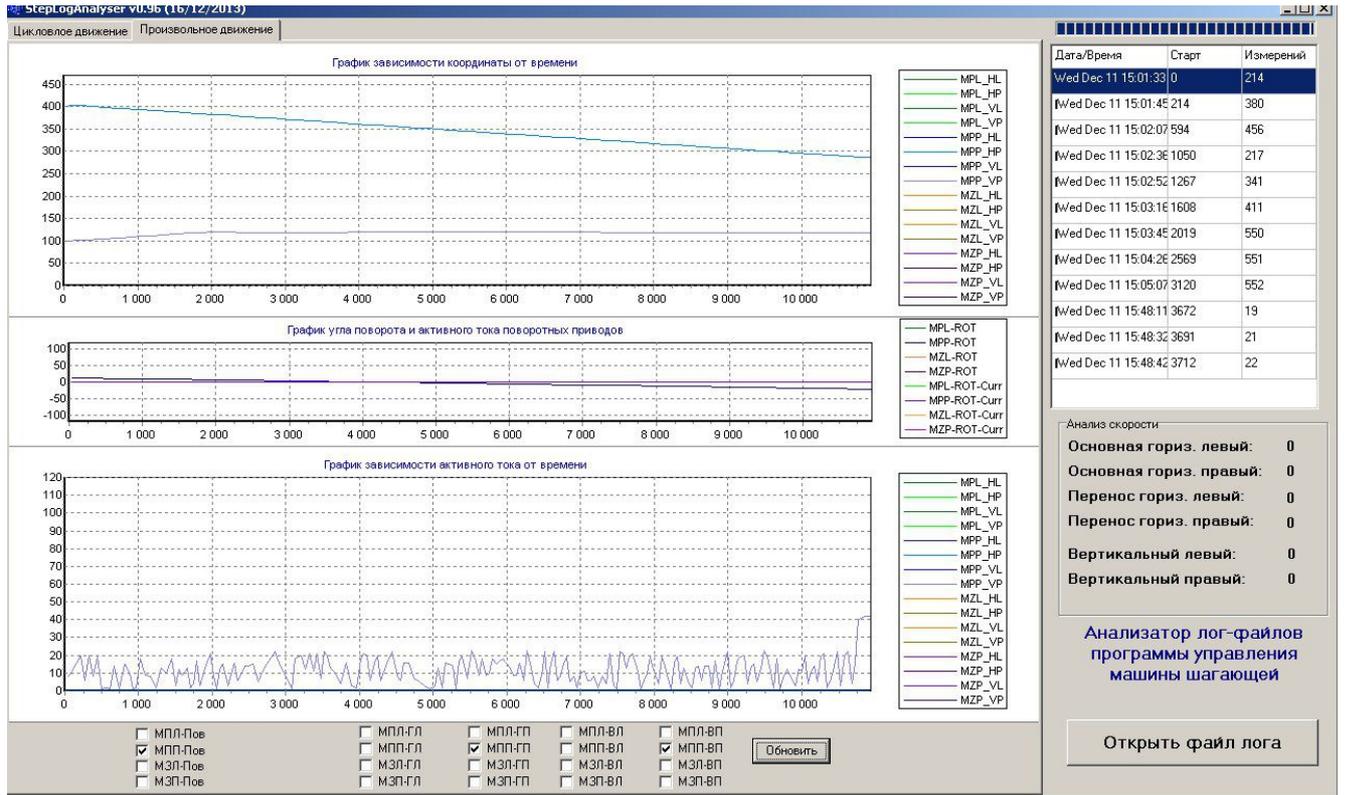


Рисунок 2.8 — Программа просмотра и анализа экспериментальных значений параметров движения шагающей машины «Ортоног»

### 3. Оптимизация алгоритмов и законов управления движением шагающих машин

#### 3.1. Применение уравнения Эйлера-Лагранжа при многокритериальной оптимизации шагающих машин

Рассматривается механическая система имеющая  $N$  степеней свободы и характеризующаяся вектором независимых обобщённых координат  $\mathbf{q} = [q_i]^T$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Из всего множества частных критериев качества ограничиваемся рассмотрением тех критериев  $H_j$ , которые могут быть представлены в виде интегралов по времени от функций механического состояния, зависящих в общем случае от времени, обобщённых координат и их производных. Для механических систем это как правило производные первого  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_i]^T$  и второго  $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_i]^T$  порядков, однако в некоторых случаях могут быть востребованы и производные более высоких порядков  $\mathbf{q}^{(n)} = [d^n q_i / dt^n]^T$  (здесь и далее верхний индекс в круглых скобках обозначает производную по времени соответствующего порядка, в частности  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(0)}$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^{(1)}$  и так далее; через  $n$  обозначен максимальный порядок производных):

$$H_j = \int_0^{\tau} f_j(t, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(n)}) dt \quad (3.1)$$

где  $f_j$  — произвольная функция,  $t$  — время,  $\tau$  — рассматриваемый период времени, для шагающих машин это обычно период одного шага или период одного цикла, состоящего из двух шагов.

Примеры таких показателей: среднеквадратичное ускорение какой-либо точки; механическая работа сил, развиваемых каким-либо двигателем, и другие.

В этом случае подынтегральная функция качества (1.15) имеет вид

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(t, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(n)}) , \quad (3.2)$$

а критерий оптимальности (1.14) может быть записан в виде

$$I = \int_0^{\tau} \Phi(t, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(n)}) dt \rightarrow \min \quad (3.3)$$

Тогда, задача определения законов движения системы

$$q_i = q_i(t, k_1, k_2, \dots, k_j, \dots) , \quad (3.4)$$

обеспечивающих оптимальность по критерию (3.3) сводится к решению системы  $N$  уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^n (-1)^l \frac{d^l}{dt^l} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i^{(l)}} = 0 \quad (3.5)$$

при соответствующих начальных или граничных условиях.

В результате решения системы уравнений (3.5) получается  $N$  зависимостей (3.4) которые представляют собой программные движения рассматриваемой механической системы, обеспечивающие оптимальность по критерию (3.3) и зависящие от выбора весовых коэффициентов  $k_j$ .

Полученное решение обеспечивает экстремум функции (3.3), а не максимум или минимум. Поэтому в ряде случаев может потребоваться дополнительное исследование на значение второй вариации.

В частном случае при  $n = 2$ , подынтегральная функция качества (3.2) и уравнение Эйлера-Лагранжа (3.5) принимают вид:

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(t, q, \dot{q}, \ddot{q}), \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = 0 \quad (3.7)$$

что, в свою очередь, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \ddot{q}_i^2} q_i^{(4)} = & -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^2 \partial \ddot{q}_i} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \ddot{q}_i^3} \ddot{q}_i^2 - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial q_i^2 \partial \ddot{q}_i} \dot{q}_i^2 - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \dot{q}_i^2 \partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i^2 - \\ & - 2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial q_i \partial \ddot{q}_i} \dot{q}_i - 2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial \dot{q}_i \partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i - 2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial \ddot{q}_i^2} \ddot{q}_i - \\ & - 2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial q_i \partial \dot{q}_i \partial \ddot{q}_i} \dot{q}_i \ddot{q}_i - 2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial q_i \partial \ddot{q}_i^2} \dot{q}_i \ddot{q}_i - 2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \dot{q}_i \partial \ddot{q}_i^2} \ddot{q}_i \ddot{q}_i - \\ & - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{q}_i^2} \ddot{q}_i - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (3.8)$$

или, используя обозначения частных производных с помощью нижних индексов в круглых скобках и опуская индекс  $i$  для краткости записи:

$$\begin{aligned}
q^{(4)} = & \frac{1}{\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q})}} \left( -\Phi_{(tt\ddot{q})} - \Phi_{(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^2 - \Phi_{(qq\ddot{q})} \dot{q}^2 - \Phi_{(\dot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^2 \right) + \\
& + \frac{1}{\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q})}} \left( -2\Phi_{(tq\ddot{q})} \dot{q} - 2\Phi_{(t\dot{q}\ddot{q})} \ddot{q} - 2\Phi_{(t\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q} \right) + \\
& + \frac{1}{\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q})}} \left( -2\Phi_{(q\dot{q}\ddot{q})} \dot{q} \ddot{q} - 2\Phi_{(q\ddot{q}\ddot{q})} \dot{q} \ddot{q} - 2\Phi_{(\dot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q} \ddot{q} \right) + \\
& + \frac{1}{\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q})}} \left( -\Phi_{(q\ddot{q})} \ddot{q} + \Phi_{(t\dot{q})} + \Phi_{(q\dot{q})} \dot{q} + \Phi_{(\dot{q}\ddot{q})} \ddot{q} - \Phi_{(q)} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Дифференциальное уравнение четвёртого порядка (3.9) записывается в виде системы четырёх уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
\dot{r} = & \frac{1}{\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q})}} \left( -\Phi_{(tt\dot{q})} - \Phi_{(\ddot{q}\ddot{q}\dot{q})} r^2 - \Phi_{(qq\dot{q})} v^2 - \Phi_{(\dot{q}\ddot{q}\dot{q})} a^2 \right) + \\
& + \frac{1}{\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q})}} \left( -2\Phi_{(tq\dot{q})} v - 2\Phi_{(t\dot{q}\dot{q})} a - 2\Phi_{(t\ddot{q}\dot{q})} r \right) + \\
& + \frac{1}{\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q})}} \left( -2\Phi_{(q\dot{q}\dot{q})} v a - 2\Phi_{(q\ddot{q}\dot{q})} v r - 2\Phi_{(\dot{q}\ddot{q}\dot{q})} a r \right) + \\
& + \frac{1}{\Phi_{(\ddot{q}\ddot{q})}} \left( -\Phi_{(q\dot{q})} a + \Phi_{(t\dot{q})} + \Phi_{(q\dot{q})} v + \Phi_{(\dot{q}\ddot{q})} a - \Phi_{(q)} \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= r \\
\dot{v} &= a \\
\dot{q} &= v
\end{aligned}$$

Системы управлений (3.10), составленные для каждой из обобщённых координат механической системы, представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями и могут быть решены одним из известных численных методов, например методом пристрелки [238].

При явном задании функции  $\Phi$  частные производные могут найдены в явном виде, при численном решении частные производные определяются по конечно-разностным формулам (2.117)-(2.127).

В таблице 3.1. приведены некоторые частные случаи зависимостей функции управления качеством для механической системы с одной степенью свободы,

которой соответствует обобщённая координата  $q$ . Далее рассмотрены получающиеся для этих случаев уравнения Эйлера-Лагранжа и некоторые их решения. Часть этих случаев с точностью до весовых коэффициентов  $k_j$  рассмотрена, например, в [297].

Таблица 3.1 — Частные случаи подынтегральной функции качества

№ п/п	Зависимость от			
	времени $t$	обобщённой координаты $q$	обобщённой скорости $\dot{q}$	обобщённого ускорения $\ddot{q}$
1	-	-	произвольная	-
2	-	произвольная	произвольная	-
3	-	произвольная	-	линейная
4	-	-	-	произвольная
5	-	произвольная	-	произвольная
6	-	-	произвольная	произвольная
7	-	произвольная	произвольная	произвольная
8	произвольная	произвольная	-	-
9	произвольная	произвольная	линейная	-
10	произвольная	-	произвольная	-
11	произвольная	произвольная	произвольная	-
12	произвольная	произвольная	-	линейная
13	произвольная	-	-	произвольная
14	произвольная	произвольная	-	произвольная
15	произвольная	-	произвольная	произвольная

1. Функция качества зависит только от обобщённой скорости.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(\dot{q}) \quad (3.11)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\left( \sum_j k_j f_{j,(\dot{q}\dot{q})} \right) \ddot{q} = 0 \quad (3.12)$$

соответствует уравнениям

$$\ddot{q} = 0 \quad (3.13)$$

или

$$\sum_j k_j f_{j,(\dot{q}\dot{q})} = 0 \quad (3.14)$$

Выражение (3.13) даёт решение

$$q = C_1 t + C_2 \quad (3.15)$$

с варьируемыми постоянными  $C_1$  и  $C_2$ . А выражение (3.14) либо имеет решение (3.15), где  $C_1$  равно одному из корней (3.14), либо решения не имеет.

2. Подынтегральная функция качества зависит от обобщённой координаты и обобщённой скорости.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(q, \dot{q}) \quad (3.16)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\sum_j k_j (f_{j,(q)} - f_{j,(q\dot{q})} \dot{q} - f_{j,(\dot{q}\dot{q})} \ddot{q}) = 0 \quad (3.17)$$

С учётом:

$$(f_{j,(q)} - f_{j,(q\dot{q})} \dot{q} - f_{j,(\dot{q}\dot{q})} \ddot{q}) \dot{q} = \frac{d}{dt} (f_j - f_{j,(\dot{q})} \dot{q}) \quad (3.18)$$

уравнение (3.17) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} \sum_j k_j (f_j - f_{j,(\dot{q})} \dot{q}) = 0 \quad (3.19)$$

откуда следует

$$\sum_j k_j (f_j - f_{j,(\dot{q})} \dot{q}) = C_1 \quad (3.20)$$

3. Подынтегральная функция качества зависит от обобщённого ускорения линейно и не зависит от обобщённой скорости.

$$\Phi = \sum_j k_j (a_j(q) + b_j(q) \ddot{q}) = \sum_j k_j a_j(q) + \left( \sum_j k_j b_j(q) \right) \ddot{q} \quad (3.21)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\sum_j k_j a_{j,(q)} + \left( \sum_j k_j b_{j,(qq)} \right) \dot{q}^2 + 2 \left( \sum_j k_j b_{j,(q)} \right) \ddot{q} = 0 \quad (3.22)$$

4. Подынтегральная функция качества зависит только от обобщённого ускорения.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(\ddot{q}) \quad (3.23)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\left( \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \right) \ddot{q}^2 + \left( \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q})} \right) \ddot{q}^{(4)} = 0 \quad (3.24)$$

С помощью замены переменной  $a = \ddot{q}$  порядок уравнения может быть понижен:

$$\left( \sum_j k_j f_{j,(aaa)} \right) \dot{a}^2 + \left( \sum_j k_j f_{j,(aa)} \right) \ddot{a} = 0 \quad (3.25)$$

5. Подынтегральная функция качества зависит только от обобщённой координаты и обобщённого ускорения.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(q, \ddot{q}) \quad (3.26)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_j k_j f_{j,(q)} + \sum_j k_j f_{j,(qq\ddot{q})} \dot{q}^2 + \sum_j k_j f_{j,(q\ddot{q})} \ddot{q} + \\ & + 2 \sum_j k_j f_{j,(q\ddot{q}\ddot{q})} \dot{q} \ddot{q} + \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^2 + \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

6. Подынтегральная функция качества зависит только от обобщённой скорости и обобщённого ускорения.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(\dot{q}, \ddot{q}) \quad (3.28)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^{(4)} + \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^2 + \sum_j k_j f_{j,(\dot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^2 + \\ + 2 \sum_j k_j f_{j,(\dot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \dot{q} \ddot{q} - \sum_j k_j f_{j,(\dot{q}\dot{q})} \dot{q} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

С помощью замены переменной  $v = \dot{q}$  порядок уравнения может быть понижен:

$$\begin{aligned} \sum_j k_j f_{j,(\ddot{v}\ddot{v})} \ddot{v} + \sum_j k_j f_{j,(\dot{v}\ddot{v}\ddot{v})} \ddot{v}^2 + \sum_j k_j f_{j,(v\ddot{v}\ddot{v})} \dot{v}^2 + \\ + 2 \sum_j k_j f_{j,(v\dot{v}\ddot{v})} \dot{v} \ddot{v} - \sum_j k_j f_{j,(v\dot{v})} \dot{v} = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

7. Подынтегральная функция качества не зависит от времени.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (3.31)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q})} q^{(4)} + \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^2 + \sum_j k_j f_{j,(q\ddot{q}\ddot{q})} \dot{q}^2 + \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^2 + \\
& + 2 \sum_j k_j f_{j,(q\dot{q}\ddot{q})} \dot{q}\ddot{q} + 2 \sum_j k_j f_{j,(q\ddot{q}\ddot{q})} \dot{q}\ddot{q} + 2 \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}\ddot{q} + \\
& + \sum_j k_j f_{j,(q\ddot{q})} \ddot{q} - \sum_j k_j f_{j,(q\dot{q})} \dot{q} - \sum_j k_j f_{j,(\dot{q}\dot{q})} \dot{q} + \sum_j k_j f_{j,(q)} = 0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

8. Подынтегральная функция качества зависит только от времени и обобщённой координаты.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(t, q) \tag{3.33}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\sum_j k_j f_{j,(q)}(t, q) = 0 \tag{3.34}$$

Уравнение (3.34) не является дифференциальным, задаёт зависимость обобщённой координаты от времени, которая в общем случае не удовлетворяет граничным условиям. Другими словами, экстремум функционала (3.33) может достигаться лишь в тех частных случаях, когда кривая (3.34) проходит через граничные точки.

9. Подынтегральная функция качества зависит от обобщённой скорости линейно и не зависит от производных более высокого порядка.

$$\Phi = \sum_j k_j (a_j(t, q) + b_j(t, q)\dot{q}) = \sum_j k_j a_j(t, q) + \left( \sum_j k_j b_j(t, q) \right) \dot{q} \tag{3.35}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\sum_j k_j (a_{j,(q)}(t, q) - b_{j,(t)}(t, q)) = 0 \quad (3.36)$$

Так же как и в предыдущем случае, уравнение (3.36) является конечным, то есть, вариационная задача обычно не имеет решения в классе непрерывных функций.

10. Подынтегральная функция качества зависит от обобщённой скорости и времени.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(t, \dot{q}) \quad (3.37)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\sum_j k_j f_{j,(t\dot{q})} + \left( \sum_j k_j f_{j,(\dot{q}\dot{q})} \right) \ddot{q} = 0 \quad (3.38)$$

удобнее представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_j k_j f_{j,(\dot{q})} \right) = 0 \quad (3.39)$$

откуда следует дифференциальное уравнение первого порядка

$$\sum_j k_j f_{j,(\dot{q})} = C_1 \quad (3.40)$$

11. Подынтегральная функция качества не зависит от обобщённого ускорения или более старших производных.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(t, q, \dot{q}) \quad (3.41)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\sum_j k_j (f_{j,(q)} - f_{j,(t,q)} - f_{j,(q\dot{q})} \dot{q} - f_{j,(\dot{q}\dot{q})} \ddot{q}) = 0 \quad (3.42)$$

12. Подынтегральная функция качества зависит от времени, обобщённой координаты и линейно зависит от обобщённого ускорения.

$$\Phi = \sum_j k_j (a_j(t, q) + b_j(t, q) \ddot{q}) = \sum_j k_j a_j(t, q) + \left( \sum_j k_j b_j(t, q) \right) \ddot{q} \quad (3.43)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\sum_j k_j (a_{j,(q)} + b_{j,(tt)}) + 2 \left( \sum_j k_j b_{j,(tq)} \right) \dot{q} + \left( \sum_j k_j b_{j,(qq)} \right) \dot{q}^2 + 2 \left( \sum_j k_j b_{j,(q)} \right) \ddot{q} = 0 \quad (3.44)$$

13. Подынтегральная функция качества зависит только от времени и обобщённого ускорения.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(t, \ddot{q}) \quad (3.45)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\sum_j k_j f_{j,(tt\ddot{q})} + 2 \left( \sum_j k_j f_{j,(t\ddot{q}\ddot{q})} \right) \ddot{q} + \left( \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \right) \ddot{q}^2 + \left( \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q})} \right) \ddot{q}^{(4)} = 0 \quad (3.46)$$

Так же как и в случае 4, это уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка относительно обобщённого ускорения  $a = \ddot{q}$  :

$$\sum_j k_j f_{j,(tta)} + 2 \left( \sum_j k_j f_{j,(taa)} \right) \dot{a} + \left( \sum_j k_j f_{j,(aaa)} \right) \dot{a}^2 + \left( \sum_j k_j f_{j,(aa)} \right) \ddot{a} = 0 \quad (3.47)$$

14. Подынтегральная функция качества зависит от времени, обобщённой координаты и обобщённого ускорения.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(t, q, \ddot{q}) \quad (3.48)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_j k_j f_{j,(q)} + \sum_j k_j f_{j,(qq\ddot{q})} \dot{q}^2 + \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^2 + \\ & + 2 \sum_j k_j f_{j,(tq\ddot{q})} \dot{q} + 2 \sum_j k_j f_{j,(t\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q} + 2 \sum_j k_j f_{j,(q\ddot{q}\ddot{q})} \dot{q} \ddot{q} + \\ & + \sum_j k_j f_{j,(q\ddot{q})} \dot{q} + \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

15. Подынтегральная функция качества зависит от времени, обобщённой скорости и обобщённого ускорения.

$$\Phi = \sum_j k_j f_j(t, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (3.50)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^{(4)} + \sum_j k_j f_{j,(tt\ddot{q})} + \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q}^2 + \sum_j k_j f_{j,(\dot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \dot{q}^2 + \\
& + 2 \sum_j k_j f_{j,(t\dot{q}\ddot{q})} \dot{q} + 2 \sum_j k_j f_{j,(t\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q} + 2 \sum_j k_j f_{j,(\ddot{q}\ddot{q}\ddot{q})} \ddot{q} \dot{q} + \\
& - \sum_j k_j f_{j,(t\dot{q})} - \sum_j k_j f_{j,(\dot{q}\dot{q})} \dot{q} = 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

С помощью замены переменной  $v = \dot{q}$  порядок уравнения может быть понижен:

$$\begin{aligned}
& \sum_j k_j f_{j,(\ddot{v}\ddot{v})} \ddot{v} + \sum_j k_j f_{j,(tt\ddot{v})} + \sum_j k_j f_{j,(\ddot{v}\ddot{v}\ddot{v})} \ddot{v}^2 + \sum_j k_j f_{j,(vv\ddot{v})} \dot{v}^2 + \\
& + 2 \sum_j k_j f_{j,(t\dot{v}\ddot{v})} \dot{v} + 2 \sum_j k_j f_{j,(t\ddot{v}\ddot{v})} \ddot{v} + 2 \sum_j k_j f_{j,(v\ddot{v}\ddot{v})} \dot{v} \ddot{v} + \\
& - \sum_j k_j f_{j,(tv)} - \sum_j k_j f_{j,(vv)} \dot{v} = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

### 3.1.1. Оптимизация закона управления линейным приводом

Описанный подход применён при оптимизация работы линейного привода фирмы «Exlar» (рисунок 3.1) использованного в приводах движителей шагающей машины «Ортоног».

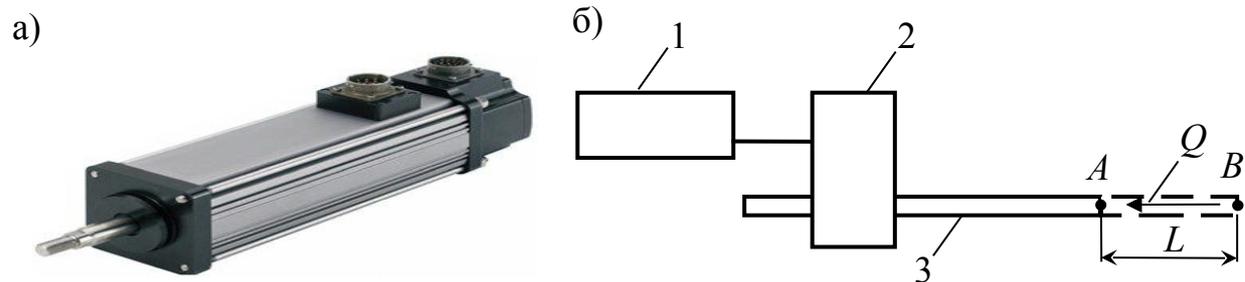


Рисунок 3.1 — Линейный привод фирмы «Exlar»: а) внешний вид, б) расчётная схема. 1 — двигатель, 2 — редуктор, 3 — шток.

Рассматривается перемещение штока из положения  $A$  в положение  $B$ . На границах участка  $AB$  скорость штока задаётся равной нулю. В качестве

обобщенной координаты выбирается угол поворота вала двигателя  $\varphi$ . Заданному перемещению штока за время  $\tau$  на величину  $L$  соответствует поворот вала двигателя на угол  $\varphi_\tau$ . Затем осуществляется движение в обратную сторону по тому же закону. Поэтому  $\tau$  – время половины цикла. Приведённый к валу двигателя постоянный момент инерции обозначается через  $J$ . Полезная сила сопротивления движению  $Q$  задается пропорциональной угловой скорости  $\dot{\varphi}$ , коэффициент пропорциональности обозначается через  $\mu$ . Оптимизация осуществляется по обобщённому критерию (2.13) с подынтегральной функцией качества  $\Phi$ :

$$\Phi = k_1 f_1 + k_w f_w = \frac{k_1}{g^2} r^2 \ddot{\varphi}^2 + \frac{k_w \tau \alpha}{\bar{A}} (J \ddot{\varphi} + \mu \dot{\varphi})^2 \quad (3.53)$$

где  $f_1$  — функция, соответствующая частному критерию комфортабельности движения (минимума среднеквадратичного ускорения штока);  $f_w$  — функция, соответствующая частному критерию минимума тепловых потерь в электродвигателе постоянного тока;  $k_1, k_w$  — весовые коэффициенты;  $r$  — условный радиус, связывающий между собой перемещение штока и угол поворота вала двигателя;  $\alpha$  — постоянный коэффициент, характеризующий двигатель;  $g, \bar{A}$  — постоянные нормирующие коэффициенты, имеющие размерность ускорения и работы соответственно.

Выражение (3.53) соответствует частному случаю (3.28), а уравнение Эйлера-Лагранжа (3.29) приобретает вид

$$\left( \frac{k_1}{g^2} r^2 + J^2 \frac{k_w \tau \alpha}{\bar{A}} \right) \varphi^{(4)} - \left( \mu^2 \frac{k_w \tau \alpha}{\bar{A}} \right) \ddot{\varphi} = 0 \quad (3.54)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0 &= \dot{\phi}_\tau = \omega_0 \\ \phi_0 &= 0 \\ \phi_\tau &= 2\pi \end{aligned} \quad (3.55)$$

Оценка осуществляется по частным критериям:  $\tilde{H}_1$  — квадрату среднеквадратичного ускорения и  $\tilde{H}_W$  — квадрату среднеквадратичного значения момента сил, развиваемого двигателем:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \ddot{\phi}^2 dt \\ \tilde{H}_W &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left( \frac{J}{\mu} \ddot{\phi}^2 + \dot{\phi} \right)^2 dt \end{aligned} \quad (3.56)$$

Тогда, при соответствующем выборе нормирующих коэффициентов  $g$  и  $\bar{A}$ , можно получить зависимости частных показателей от соотношения весовых коэффициентов, представленные на рисунке 3.2.

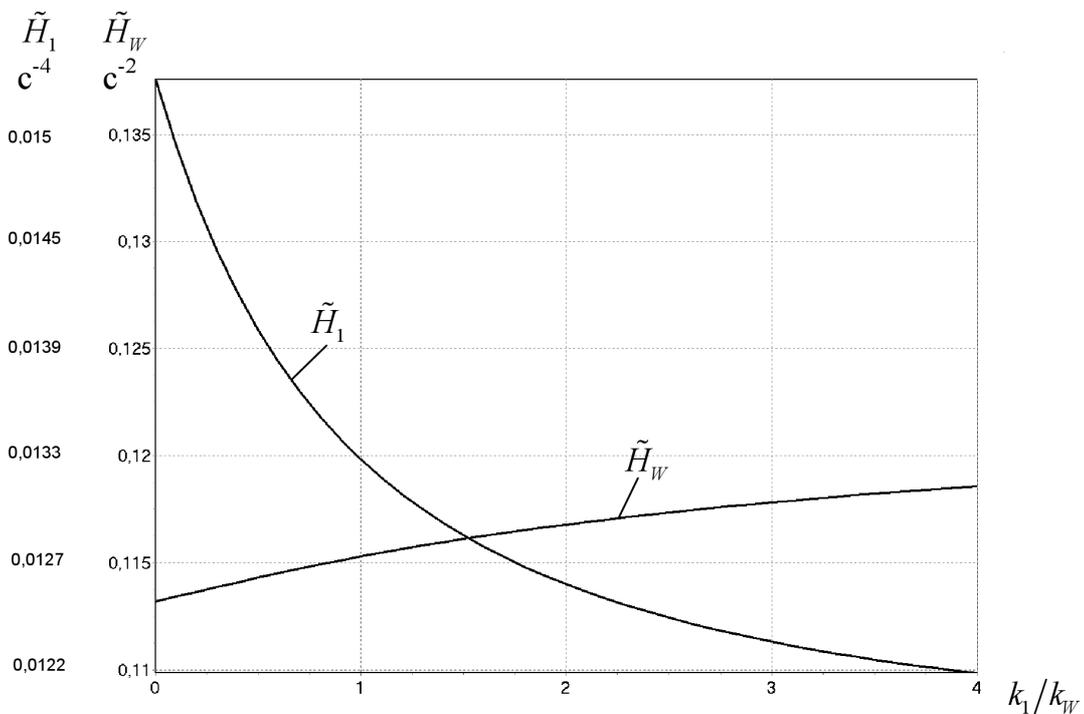


Рисунок 3.2 — Зависимости частных показателей качества от соотношения весовых коэффициентов.

Их анализ позволяет осуществить субъективный выбор программного режима движения управляемого двигателя.

Решения, получающиеся с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа, являются Парето оптимальными, и обычно их принято изображать в виде границы Парето в координатных осях  $\tilde{H}_1$  и  $\tilde{H}_W$  (рисунок 3.3).

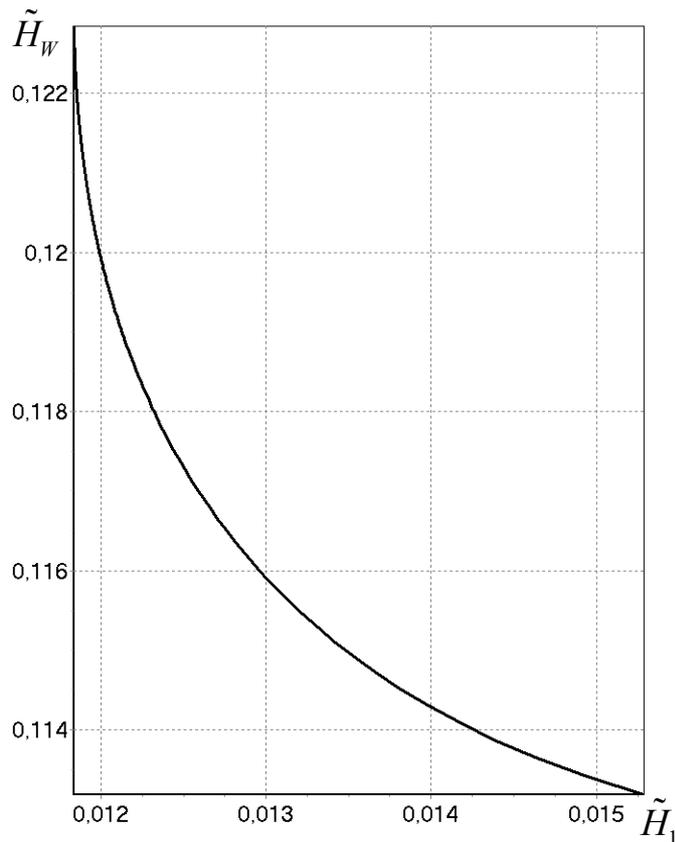


Рисунок 3.3 — Граница Парето

Однако форма представления, приведённая на рисунке 3.2 в ряде случаев более удобна, так как предоставляет инструмент выбора не только одного из решений, но и весовых коэффициентов, которые позволяют найти это решение. Например, наилучшее (в данном случае — минимальное) значение показателя  $H_W$  и одновременно наихудшее значение показателя  $H_1$  соответствует значению  $k_1 = 0$ . Стремясь улучшить показатель  $H_1$ , придётся согласиться на ухудшение показателя  $H_W$ , и по графикам 3.2 можно определить не только значения самих показателей, но и значения (точнее соотношение) весовых коэффициентов, которые при

подстановке в (3.54) дают возможность определить закон движения механизма, обеспечивающего получение требуемых значений показателей.

Законы изменения угловой скорости для различных соотношений весовых коэффициентов  $k_1/k_W$  показаны на рисунке 3.4.

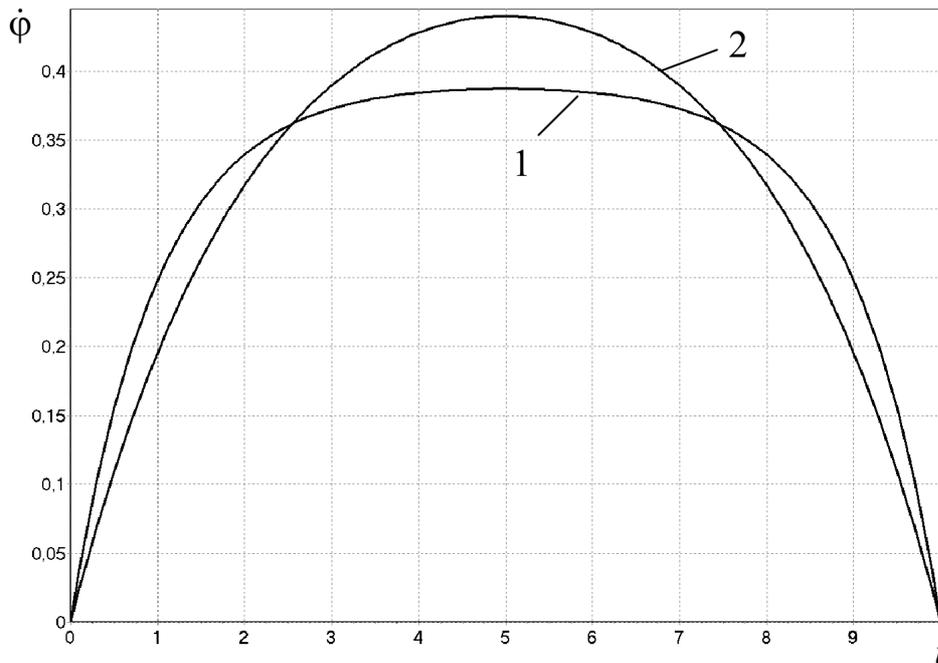


Рисунок 3.4 — Законы изменения угловой скорости: 1 —  $k_1/k_W = 0$ , 2 —  $k_1/k_W = 4$ .

### 3.1.2. Оптимизация закона управления четырёхзвенным механизмом

При решении задачи аналогичной вышеописанной, но для шагающего движителя на основе шарнирных четырёхзвенников, использованного в машины «Восьминог» (рисунок 3.5), количество частных критериев равно 9:

$$\begin{aligned}
 H_{aj} &= \frac{1}{g^2 \tau} \int_0^{\tau} a_j^2 dt \\
 H_{\varepsilon_j} &= \tau \int_0^{\tau} \varepsilon_j^2 dt \\
 H_W &= \frac{\alpha}{A} \int_0^{\tau} M_{\partial 6}^2 dt
 \end{aligned}
 \tag{3.57}$$

где  $H_{aj}$ ,  $H_{\varepsilon j}$  — безразмерные квадраты среднеквадратичных ускорений центра масс  $j$  звена и углового ускорения  $j$  звена;  $j = 1, 2, 3, 4$  — номера звеньев механизма шагания;  $H_w$  — безразмерные тепловые потери.

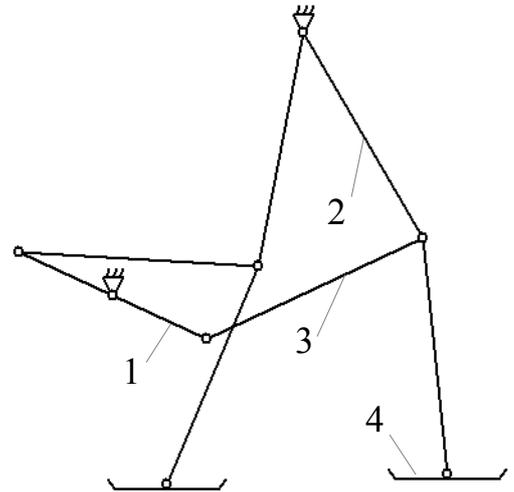


Рисунок 3.5 — Шагающий движитель машины «Восьминог»

Подынтегральная функция качества имеет вид, соответствующий частному случаю (3.31):

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum k_j \left( \beta_{1j}(\varphi) \dot{\varphi}^4 + \beta_{2j}(\varphi) \dot{\varphi}^2 \ddot{\varphi} + \beta_{3j}(\varphi) \ddot{\varphi}^2 \right) \frac{1}{g^2 \tau} + \\ & + \sum k_{N+j} \left( \gamma_{1j}(\varphi) \dot{\varphi}^4 + \gamma_{2j}(\varphi) \dot{\varphi}^2 \ddot{\varphi} + \gamma_{3j}(\varphi) \ddot{\varphi}^2 \right) \tau + \\ & + k_w \frac{\alpha}{A} \left( J(\varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 + Q(\varphi) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

где  $\beta_{1j}$ ,  $\beta_{2j}$ ,  $\beta_{3j}$ ,  $\gamma_{1j}$ ,  $\gamma_{2j}$ ,  $\gamma_{3j}$  — передаточные функции механизма,  $J$  — приведённый момент инерции.

Для численного решения уравнения Эйлера-Лагранжа после подстановки в него функции  $\Phi$  (3.58) выписываются разностные схемы, соответствующие

частным и полным производным  $\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{\varphi}}$ ,  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ , в результате чего

уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению четвёртого порядка относительно обобщённой координаты  $\varphi$ . Значения функции  $\Phi$ , входящие в разностные схемы, определяются из теоретико-механической модели движения аппарата.

На рисунке 3.6 показан пример одного из возможных решений, иллюстрирующий улучшение (уменьшение) мощности двигателя  $W$  (рисунок 3.6.а) с одновременным ухудшением (увеличением) ускорения стопы  $a_4$  (рисунок 3.6.б).

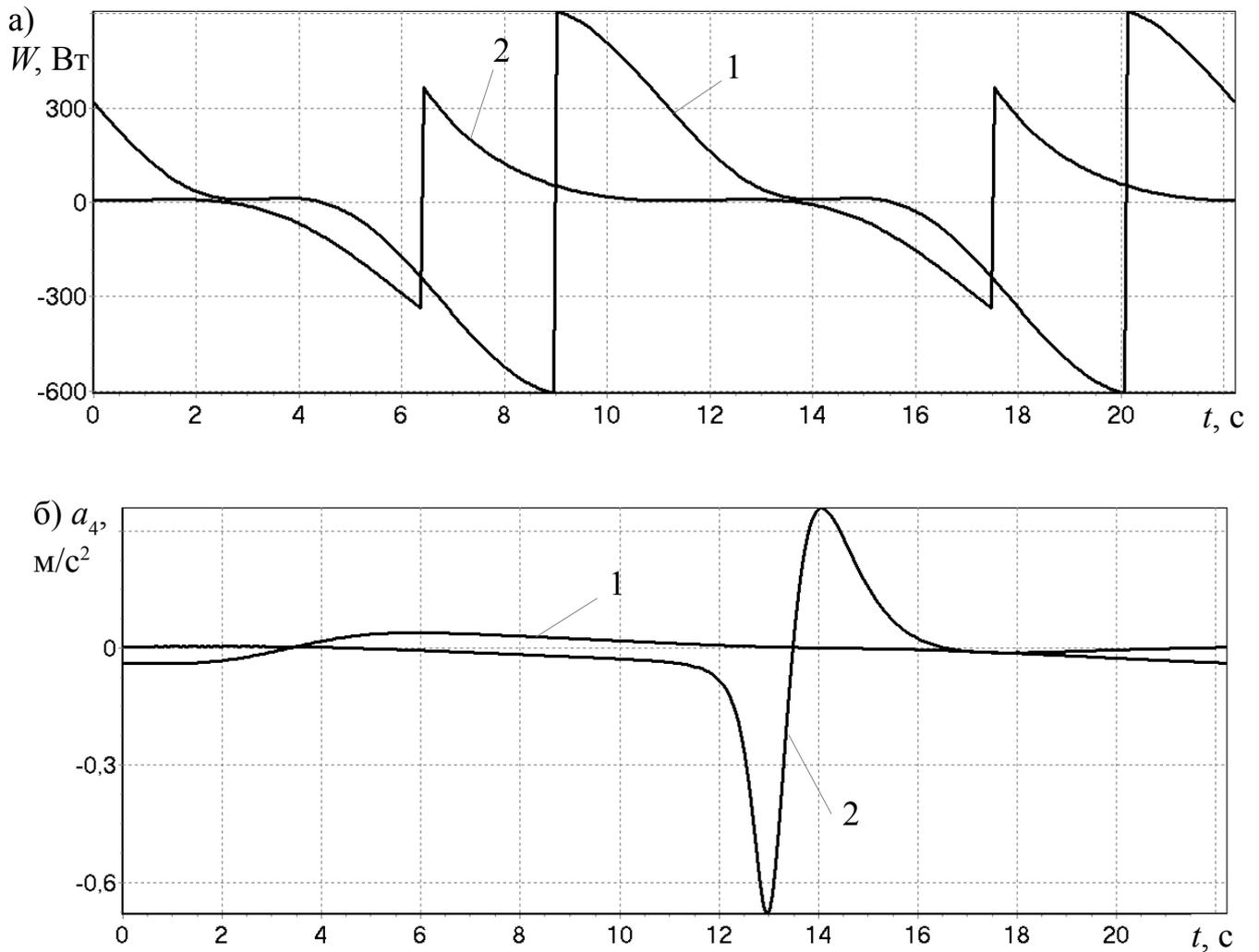


Рисунок 3.6 — Зависимости мощности двигателя (а) и ускорения стопы (б) от времени для случая вращения кривошипа с постоянной угловой скоростью (1) и для одного из возможных законов управления вращением кривошипа (2).

### 3.1.3. Оптимизация закона движения машины с цикловыми шагающими двигателями

Одним из результатов, полученных рассматриваемым методом для шагающих машин с цикловыми двигателями является решение задачи об энергетически оптимальном управлении маршевым режимом движения шагающей машины. Известным в теории шагающих машин фактом является рост мощности двигателей машины пропорционально кубу скорости при постоянной скорости движения корпуса за счёт разгона и торможения двигателей на каждом шаге. Однако, если отказаться от требования равномерного движения корпуса, то можно синтезировать такие законы управления механизмами шагания, которые обеспечат равенство нулю суммарной мощности, требуемой на разгон/торможение корпуса и двигателей [47].

Ограничиваясь рассмотрением синхронной походки, когда все двигатели работают в одной фазе, и учитывая только движение по горизонтальной оси, расчётную схему шагающей машины с цикловыми двигателями можно представить в виде, показанном на рисунке 3.7.

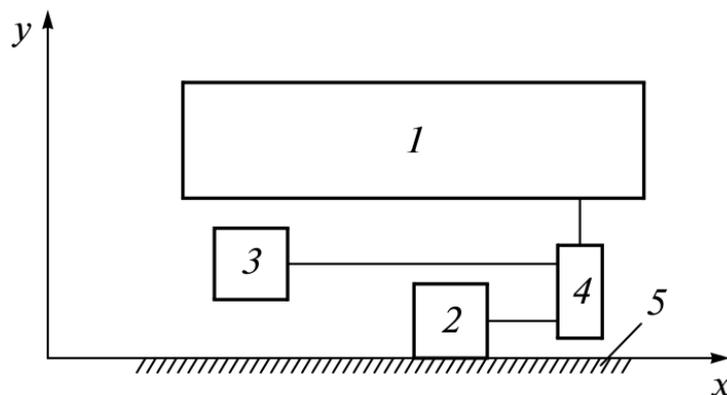


Рисунок 3.7 — Расчётная схема шагающей машины. 1 — корпус, 2 — эквивалентный механизм шагания в фазе опоры, 3 — эквивалентный механизм шагания в фазе переноса, 4 — привод курсового движения, 5 — опорная поверхность.

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы, обеспечивающие независимые движения механизмов шагания в фазе переноса и механизмов в фазе опоры на грунт.

Рекуперация энергии происходит следующим образом. В той фазе шагового цикла, когда требуется ускоренное движение стоп находящихся в переносе, другие стопы, находящиеся в опоре, а вместе с ними и корпус машины движутся замедленно. За счет инерции корпуса, моменты на ведущих валах опорных механизмов шагания становятся отрицательными, и, при постоянстве момента развиваемого двигателем, моменты на ведущих валах переносимых механизмов шагания возрастает. Таким образом, рекуперация кинетической энергии осуществляется от корпуса к ускоренно движущимся механизмам шагания и аналогично в обратном направлении при замедлении механизмов шагания.

Дифференциальные уравнения движения могут быть сведены к уравнению [48]:

$$L \dot{\phi} = \dot{T} + Q \dot{x}_1 \quad (3.59)$$

где  $L$  — момент сил развиваемый двигателем,  $\dot{\phi}$  — угловая скорость вращения вала двигателя,  $T$  — кинетическая энергия системы,  $Q$  — сила сопротивления движению,  $\dot{x}_1$  — скорость корпуса машины.

Полагая, что необратимые потери мощности пропорциональны квадрату генерируемой обобщённой силы  $L$ , что характерно например для асинхронных двигателей, показатель качества имеет вид:

$$H = \alpha L^2 = \int_0^{\tau/2} \frac{\alpha}{\dot{\phi}} (\dot{T} + Q \dot{x}_1)^2 dt \quad (3.60)$$

где  $\alpha$  — постоянный коэффициент, характеризующий двигатель;  $\tau$  — период

цикла, соответствующий двум шагам.

За один шаг корпус машины проходит расстояние  $S$ , а стопа переносимого механизма шагания —  $2S$ . Это соответствует условиям:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau/2} \dot{x}_1 dt &= S \\ \int_0^{\tau/2} \dot{x}_2 dt &= 2S \end{aligned} \quad (3.61)$$

где  $\dot{x}_2$  — скорость стопы переносимого механизма шагания.

Потребовав постоянства угловой скорости вращения вала двигателя  $\dot{\phi} = const$ , подынтегральную функцию качества можно представить в виде

$$\Phi = (\dot{T} + Q \dot{x}_1)^2 + \mu_1 \dot{x}_1 + \mu_2 \dot{x}_2 \quad (3.62)$$

где  $\mu_1, \mu_2$  — неопределённые множители Лагранжа.

С учётом зависимости кинетической энергии от скоростей  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  функция (3.62) соответствует частному случаю (3.28).

В моменты переступания  $t = 0$  и  $t = \tau/2$  скорость переносимой ноги равна нулю, а скорость корпуса обозначается через  $V_{10}$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1(\tau/2) &= V_{10} \\ \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2(\tau/2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

При выполнении этих граничных условий  $\mu_1 = -4Q^2 S/\tau$ ,  $\mu_2 = 0$  откуда следует:

$$\dot{T} + Q \dot{x}_1 = \bar{Q} \frac{2S}{\tau} = \bar{Q} \bar{V}_1 \quad (3.64)$$

где  $\bar{Q}$ ,  $\bar{V}_1$  — средние значения силы сопротивления движению и скорости корпуса.

В случае синхронной работы всех шагающих движителей, обеспечивающих поступательное движение корпуса машины, и при пренебрежении инерционными характеристиками механизмов шагания за исключением массивной стопы уравнение (3.64) может быть записано в виде

$$m_1 \dot{x}_1 \ddot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 \ddot{x}_2 + Q \dot{x}_1 = \bar{Q} \bar{V}_1 \quad (3.65)$$

где  $m_1$  — масса корпуса,  $m_2$  — суммарная масса стоп.

Выполнение условий (3.64) или (3.65) требует от исполнительных двигателей отработки достаточно сложных законов управления и приводит к значительным ускорениям движителей и корпуса машины. Поэтому более целесообразным представляется поиск компромиссного варианта управления, учитывающего кроме энергетической эффективности и такие показатели как сложность системы управления, инерционные нагрузки, определяемые главным образом ускорениями стоп, и комфортабельность движения, определяемая ускорением корпуса.

### **3.2. Применение прямого метода задания программных движений**

В ряде случаев решение точной вариационной задачи определения программного движения затруднительно. Для определения законов движения в таких ситуациях использовался прямой метод задания программных движений с

выбором лучшего из заданных законов движения. Метод состоит из двух этапов: этапа обучения и рабочего этапа. На этапе обучения определяются весовые коэффициенты согласно следующему алгоритму.

1. Ставится тестовая цель и формируются не менее  $L$  законов управления, обеспечивающих достижение заданной цели, где  $L$  — количество частных показателей качества, подлежащих оптимизации.

2. Для каждого из законов вычисляются значения всех частных показателей  $H_{ij}$ , где  $i$  — номер закона управления,  $j$  — номер показателя.

3. Из значений  $H_{ij}$  составляется квадратная матрица  $\mathbf{H} = \{H_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, L$ ,  $j = 1, \dots, L$ , для которой экспертно оценивается обусловленность. Если матрица окажется плохо обусловленной, то следует вернуться к пункту 1 и сформировать другие законы управления.

Для оценки обусловленности [125] возможно использование показателя

$$\sigma = \|\mathbf{H}\| \cdot \|\mathbf{H}^{-1}\| \quad (3.66)$$

Значение показателя (3.66) зависит от выбора норм матриц  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}^{-1}$ , но ориентировочно при значениях показателя порядка  $10^3$ — $10^4$  уже делается вывод о плохой обусловленности матрицы (чем больше  $\sigma$ , тем хуже обусловленность).

Допустима также оценка обусловленности матрицы по значению её определителя. В этом случае критерием плохой обусловленности служит близость определителя к нулю:

$$\det \mathbf{H} \approx 0 \quad (3.67)$$

Условие (3.67) является только необходимым условием плохой обусловленности, но не достаточным, однако характер решаемой задачи позволяет

предполагать, что в данном случае хорошо обусловленная матрица должна иметь определитель существенно отличающийся от нуля.

4. Результат движения машины для каждого из законов управления оценивается экспертом с выставлением количественной оценки  $I_i$ , которая трактуется как значение обобщённого критерия качества.

5. Значения весовых коэффициентов  $k_j$  определяются в результате решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^L H_{ij} k_j = I_i, \quad i=1, \dots, L \quad (3.68)$$

при совпадении количества законов и количества частных показателей или методом наименьших квадратов если количество законов больше количества показателей.

На рабочем этапе система управления машиной осуществляет выбор лучшего закона управления из ограниченного числа таких законов по следующему алгоритму.

1. Ставится очередная цель и формируются несколько законов управления, обеспечивающих достижение этой цели.

2. Выполняется расчёт динамики движения машины под управлением каждого из этих законов с вычислением частных показателей.

3. Вычисляются значения общего критерия качества для каждого из законов управления и выбирается закон, обеспечивающий лучшее значение критерия.

Прямой метод задания программных движений позволяет выбрать лучшее решение из ограниченного заранее сформированного набора вариантов. Этот

метод обладает простотой реализации, относительно высоким быстродействием, на рабочем этапе не требует участия человека, позволяет учитывать частные критерии без каких-либо ограничений.

### 3.2.1. Оптимизация законов управления шагающей машиной при перемещении по плоской поверхности

Прямой метод использован для решения задачи прокладки трассы шагающей машины «Ортоног» (рисунок В.2). Для задачи управления корпусом шагающей машины в плоскости опорной поверхности матрица-столбец скоростей (2.106) записывается в виде

$$\mathbf{V} = (V_x, V_y, r, \dot{\rho}_1, \dots, \dot{\rho}_4, \dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_4)^T \quad (3.69)$$

Тогда уравнения управления (2.105) имеют вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} B_x(t, \mathbf{q}) \\ B_y(t, \mathbf{q}) \\ B_r(t, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

где  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_r$  — законы изменения продольной и поперечной скоростей центра корпуса машины и угловой скорости корпуса в плоскости движения.

Для примера рассматривается перемещение аппарата за определённое время в заданное положение с нулевой начальной и конечной скоростями с обходом препятствий или перешагиванием зон, запретных для наступания. Вводятся частные показатели качества:  $H_1$ ,  $H_2$  — показатели комфортабельности движения, оцениваемые максимальным ускорением  $a_{max}$  полюса  $S$  и максимальным угловым

ускорением  $\varepsilon_{max}$  корпуса;  $H_3$  — максимальная мощность приводов курсового перемещения  $W_{Fmax}$ ;  $H_4$  — максимальная мощность поворотных приводов  $W_{Mmax}$ . В нормализованном виде эти показатели определяются выражениями:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{g} a_{max}, \\ H_2 &= \frac{S}{g} \varepsilon_{max}, \\ H_3 &= \frac{\tau}{SQ} W_{Fmax}, \\ H_4 &= \frac{\tau}{SQ} W_{Mmax}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $S$  — расстояние до цели,  $Q$  — средняя сила сопротивления движению,  $\tau$  — заданное время движения.

Поскольку первые два показателя пропорциональны максимальным значениям соответствующих ускорений, а вторые два при заданных силах сопротивления движению примерно пропорциональны максимальным значениям скоростей, то «хорошие» обучающие законы должны отвечать следующим требованиям. Один из законов должен обеспечивать по возможности меньшее значение максимального ускорения и большее значение максимальной скорости, второй — наоборот — большее значение ускорения и меньшее значение скорости. Третий закон должен давать по возможности большие значения и ускорения, и скорости, а четвёртый — по возможности малые значения и ускорения, и скорости. Эти требования не являются строгими, однако их выполнение существенно облегчает задачу эксперта по оценке этих законов. В менее очевидных случаях сложность подбора «хороших» обучающих законов является одним из самых существенных недостатков метода.

Указанным требованиям удовлетворяют, например, законы изменения обобщённых скоростей, заданные в виде:

$$\begin{aligned}
1. \quad & B_x = \frac{4St}{\tau^2} [0 \leq t \leq \tau_1] + \left( \frac{2S}{\tau} - \frac{4S}{\tau^2} (t - \tau_1) \right) [\tau_1 < t \leq \tau]; \\
& B_y = 0; \\
& B_p = \frac{4\Delta\varphi t}{\tau^2} [0 \leq t \leq \tau_1] + \left( \frac{2\Delta\varphi}{\tau} - \frac{4\Delta\varphi}{\tau^2} (t - \tau_1) \right) [\tau_1 < t \leq \tau]. \\
2. \quad & B_x = \frac{S}{\tau_2(\tau - \tau_2)} (t [0 \leq t \leq \tau_2] + [\tau_2 < t \leq \tau] - (t - \tau + \tau_2) [\tau - \tau_2 < t \leq \tau]); \\
& B_y = 0; \\
& B_p = \frac{\Delta\varphi}{\tau_2(\tau - \tau_2)} (t [0 \leq t \leq \tau_2] + [\tau_2 < t \leq \tau] - (t - \tau + \tau_2) [\tau - \tau_2 < t \leq \tau]). \\
3. \quad & B_x = \frac{\pi S}{2\tau} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right); \quad B_y = 0; \quad B_p = \frac{6\Delta\varphi}{\tau^3} (\tau - t)t. \\
4. \quad & B_x = \frac{2S}{\tau} \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau} t\right); \quad B_y = 0; \quad B_p = \frac{2\Delta\varphi}{\tau} \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau} t\right).
\end{aligned} \tag{3.72}$$

где  $\tau_1, \tau_2$  — периоды изменения скорости в 1 и 2 законах соответственно. Логическому значению ИСТИНА в квадратных скобках ставится в соответствие алгебраическая 1, а логическому значению ЛОЖЬ — алгебраический 0.

Для значений  $S=10$  м,  $\tau=10$  с,  $\Delta\varphi=\pi/2$ ,  $\tau_1=5$  с,  $\tau_2=1$  с,  $Q=10$  кН частные показатели качества сведены в таблицу 3.2

Таблица 3.2 — Частные показатели качества для обучающих законов

№ закона	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$I$
1	0,041	0,064	0,618	0,161	12
2	0,113	0,178	0,378	0,270	20
3	0,050	0,096	0,511	0,178	13
4	0,064	0,100	0,647	0,174	15

Экспертно определяемая оценка  $I$  (таблица 3.2) для каждого из рассматриваемых законов движения определяется по принципу штрафных баллов, начисляемых примерно пропорционально значениям частных показателей. При этом предполагается, что недостижимый идеал, который имел бы оценку 0, соответствует нулевым значениям всех показателей. Другой эксперт может руководствоваться иными соображениями при выставлении оценок.

Однако при выставлении оценок необходимо контролировать получающиеся значения весовых коэффициентов (в таблице 3.3 приведены значения весовых коэффициентов для рассматриваемого примера). Так как при недостаточно продуманной системе оценок некоторые из коэффициентов могут оказаться отрицательными, что будет соответствовать отрицательной корреляции между оценкой и показателем качества. Другими словами, в этом случае более высокую оценку будет получать закон движения, имеющий заведомо худшие показатели качества. Если для заданной обучающей выборки не удаётся разработать обоснованную систему оценок, обеспечивающую строго положительные весовые коэффициенты, то рекомендуется изменить обучающую выборку или отказаться от учёта некоторых из показателей.

Таблица 3.3 — Весовые коэффициенты для обучающих законов

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
63,73	30,42	7,74	16,52

На рисунке 3.8 приведены графики весовых коэффициентов для рассматриваемого примера при изменении оценки закона № 2 (таблица 3.2) и фиксированных значениях остальных оценок. Из графика 3.8 ясно, что оценка обучающего закона № 2 может изменяться в пределах примерно от 17,5 до 22.

Весовые коэффициенты  $k_j$  изменяются в зависимости от оценки по линейному закону.

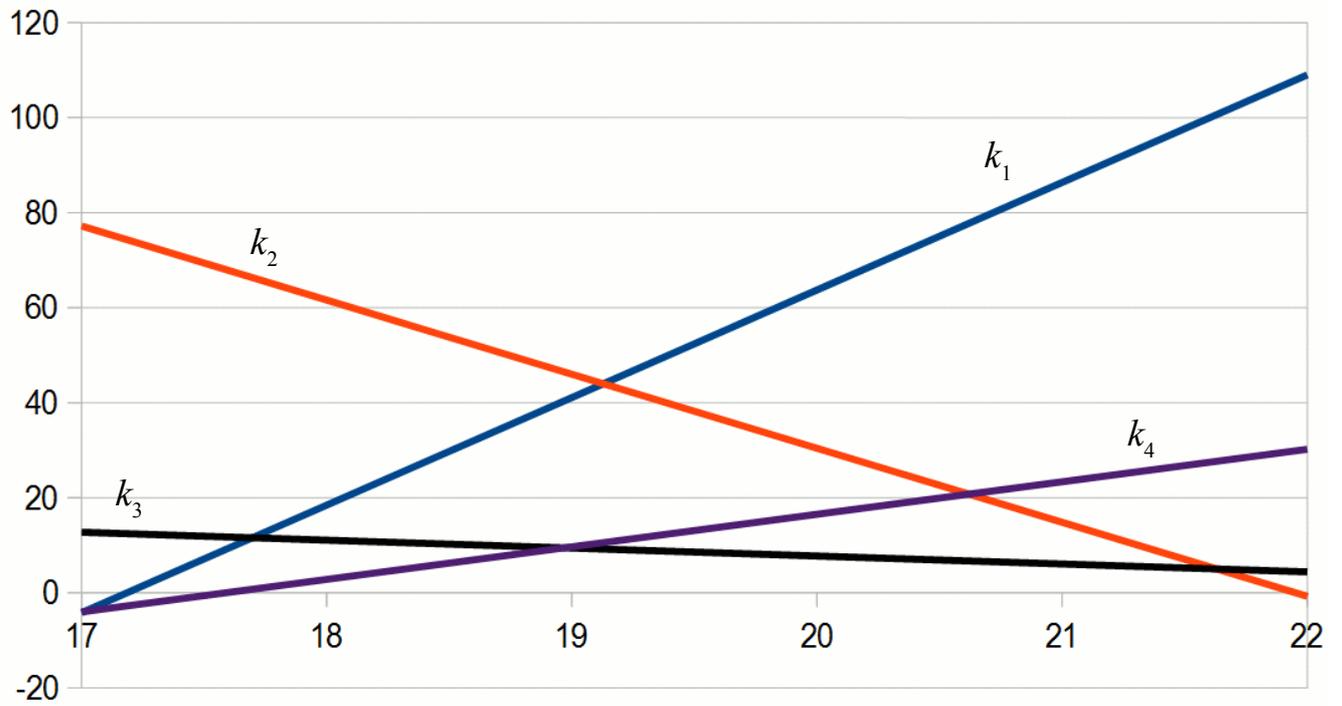


Рисунок 3.8. Зависимости весовых коэффициентов от оценки обучающего закона № 2 (таблица 3.2).

## **4. Методы структурно-параметрической оптимизации шагающих машин**

### ***4.1. Особенности применения метода поиска на многомерных кубах для оптимизации структуры и параметров шагающих машин***

Методы изменения структуры включают в себя добавление новых механизмов или звеньев механизмов, изменение числа степеней свободы механизмов, удаление или отключение механизмов или приводов.

Таким образом, в задачах структурной оптимизации происходит скачкообразное изменение показателей при изменении структуры машины, например, при изменении количества механизмов шагания. При изменении структуры часто требуется и подбор новых значений параметров аппарата. В задачах многокритериальной оптимизации сложность изменённых механизмов, например оцениваемая количеством звеньев, обычно выступает в качестве одного из частных критериев.

Существование разрывов в критериях качества делает затруднительным или невозможным применение методов оптимизации, основанных на требовании неразрывности функций.

В то же время необходимость оптимизации в связи с изменением структуры в большинстве случаев возникает при проектировании машин, следовательно вычислительная сложность методов имеет сравнительно малое значение. В этом случае лучшие результаты даёт метод поиска на многомерных кубах или в многомерных областях другой формы.

Каждый из  $n$  варьируемых параметров аппарата определён в своей области определения:

$$x_i \in [x_{i,sub}, x_{i,sup}], \quad i=1, \dots, n \quad (4.1)$$

где  $x_{i,sub}, x_{i,sup}$  — нижняя и верхняя границы области определения  $i$  параметра.

Нормализованные параметры

$$x_i^* = \frac{x_i - x_{i,sub}}{x_{i,sup} - x_{i,sub}} \quad (4.2)$$

определены в диапазоне  $[0, 1]$  и представляют собой декартовы координаты единичного  $n$ -мерного куба. В случае, если границы области определения  $i$  параметра являются функциями других параметров,  $n$ -мерная область определения параметров имеет форму, отличную от куба.

Метод поиска на многомерном кубе заключается в переборе различных комбинаций значений параметров. Для каждого параметра задаётся количество точек  $N_i$ , а общее количество рассматриваемых точек внутри  $n$ -мерного куба определяется выражением

$$N = \prod_{i=1}^n N_i . \quad (4.3)$$

Для каждой комбинации значений параметров могут определяться значения общего критерия качества (1.10) и частных критериев (1.11). После окончания перебора определяются точки куба, соответствующие границе Парето по рассматриваемым частным критериям, а при заданных весовых коэффициентах находится точка, в которой достигается минимум общего критерия.

Эффективность поиска на многомерном кубе определяется сеткой, в узлах которой находятся рассматриваемые точки. Известно, что регулярная кубическая сетка не является эффективной при  $n \geq 2$  [237]. Простой и достаточно

эффективный (по крайней мере при сравнительно небольших  $n \sim 5-6$ ) алгоритм построения сетки основывается на функции случайных чисел. Однако наиболее эффективным является использование ЛП<sub>τ</sub>-последовательностей [237].

В задачах структурно-параметрической оптимизации шагающих машин нужно учитывать, что некоторые параметры могут принимать только дискретные значения. Например, количество движителей, используемых на машине может быть только целым числом. Это накладывает соответствующие ограничения на алгоритмы построения сеток.

#### **4.2. Оптимизация структуры цикловых движителей на основе введения механизма-корректора**

Основным достоинством цикловых механизмов шагания, использованных в шагающей машине «Восьминог», является простота их конструкции и управления. Такие движители позволяют эффективно решать задачи грунтовой проходимости при постоянной в пределах шагового цикла скорости вращения входного звена механизма. В то же время несовершенство траектории опорной точки приводит к значительным вертикальным перемещениям корпуса машины при каждом шаге, а неравномерность горизонтальной скорости стопы в опорной фазе приводит периодическому разгону и торможению корпуса. Кроме того, в моменты постановки стопы на грунт её вертикальная скорость отличается от нуля, что приводит к ударным нагрузкам. Устранения этих недостатков можно добиться путём управления угловой скоростью входных звеньев движителей, однако это значительно усложняет систему управления машиной.

Альтернативой является внесение структурных изменений в схему машины: увеличение количества совместно работающих механизмов шагания или использование дополнительных механизмов в трансмиссии, изменяющих закон вращения входного звена движителя при постоянной угловой скорости вала

двигателя. Однако при этом могут уменьшаться длина шага и увеличиваться ускорения звеньев механизмов.

Таким образом, задача многокритериальной оптимизации машины с цикловыми механизмами шагания включает в себя учёт следующих частных критериев качества:

- сложность конструкции  $H_1$ , определяемая количеством механизмов или звеньев механизмов;
- длина шага, для удобства показатель  $H_2$  определяется как разность между постоянной длиной траектории и длиной шага;
- высота вертикальных перемещений корпуса на каждом шаге  $H_3$ ;
- неравномерность горизонтальной скорости в опорной фазе  $H_4$ ;
- максимальное ускорение стопы в опорной фазе, определяющее некомфортность движения корпуса  $H_5$ ;
- максимальное ускорение стопы в фазе переноса, определяющее инерционные нагрузки на привод  $H_6$ ;
- скорость стопы в момент постановки её на грунт, определяющая удары при смене ног  $H_7$ .

Могут быть учтены и другие показатели.

Для цикловых механизмов шагания, объединённых в один движитель, программные режимы движения обеспечиваются голономными связями между звеньями механизмов, реализующими такую разность фаз между ведущими кривошипами, чтобы в каждый момент времени только один из входящих в движитель механизмов шагания находился в контакте с опорной поверхностью. Таким образом, количество механизмов, включающихся в один движитель ограничено только целесообразностью и сложностью технической реализации. На рисунке 4.1 представлена принципиальная схема шагающей машины с

несколькими двигателями, каждый из которых состоит из трёх механизмов шагания. На рисунке 4.2 показаны зависимости показателей качества при изменении весового коэффициента сложности конструкции при фиксированных значениях других коэффициентов.

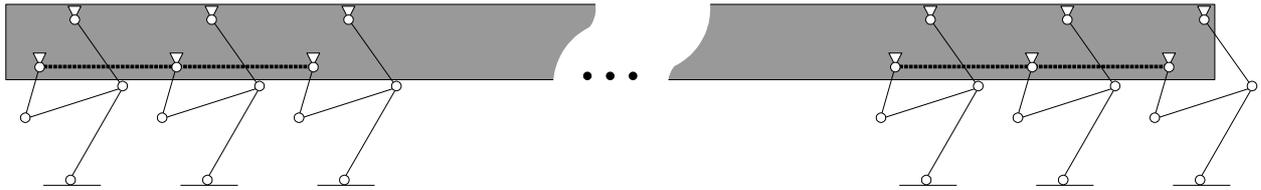


Рисунок 4.1 — Схема машины с двигателями, состоящими из трёх механизмов.

Штриховые линии обозначают голономные связи между ведущими звеньями.

Другой подход связан с использованием в трансмиссии двигателей дополнительных механизмов, обеспечивающих корректировку закона движения ведущего звена основного механизма. Использование такого рода механизмов соответствует изменению голономной связи между выходным звеном привода и ведущим звеном механизма шагания.

Одним из рассмотренных в исследовании механизмов-корректоров является рычажный четырёхзвенный механизм, показанный на рисунке 4.3.а. Ведущее звено — кривошип 5 механизма-корректора вращается с постоянной угловой скоростью, второй кривошип механизма корректора является одновременно кривошипом 1 основного механизма шагания и вращается неравномерно [135, 183, 190]. Траектория опорной точки остаётся неизменной (рисунки 4.3.б, 4.3.в), а закон движения зависит от соотношения размеров механизма-корректора. При соответствующем выборе параметров — размеров механизма-корректора можно добиться оптимума по любому из частных критериев качества, но поскольку критерии находятся в противоречии друг с другом, то решается задача поиска компромиссного решения.

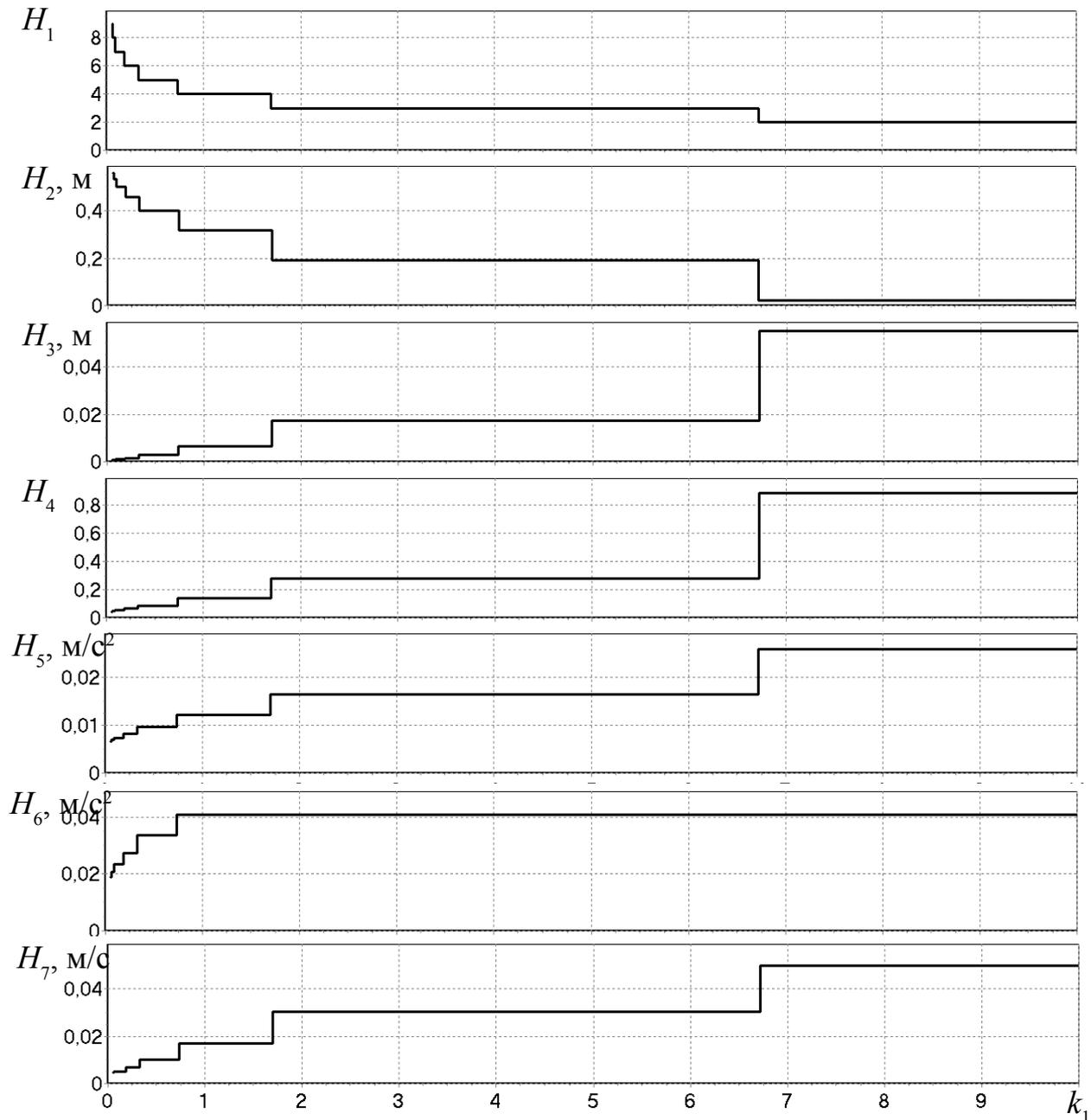


Рисунок 4.2 — Изменение частных показателей качества в зависимости от весового коэффициента сложности конструкции

Решение задачи многокритериальной оптимизации такого механизма основывалось на методе поиска в многомерном кубе параметров механизма-корректора. Количество меняющихся параметров равно четырём: длины звеньев 5 и 6, координаты оси вращения кривошипа 5 в системе координат, связанной с осью кривошипа 1.

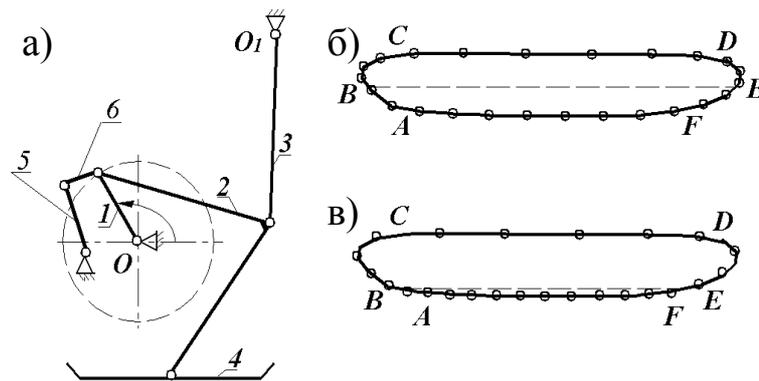


Рисунок 4.3 — Механизм шагания с рычажным механизмом коррекции. а) схема механизма, б) относительная траектория опорной точки механизма без корректора, в) относительная траектория опорной точки механизма с корректором, 1 — кривошип, 2 — шатун, 3 — коромысло, 4 — стопа, 5 — кривошип корректора, 6 — шатун корректора.

На рисунке 4.4 показаны зависимости от весового коэффициента, соответствующего вертикальным перемещениям корпуса машины на каждом шаге, следующих частных критериев качества:

- длина шага  $H_1$ ;
- высота вертикальных перемещений корпуса на каждом шаге  $H_2$ ;
- неравномерность горизонтальной скорости в опорной фазе  $H_3$ ;
- максимальное ускорение стопы в опорной фазе  $H_4$ ;
- максимальное ускорение стопы в фазе переноса  $H_5$ ;
- скорость стопы в момент постановки её на грунт  $H_6$ .

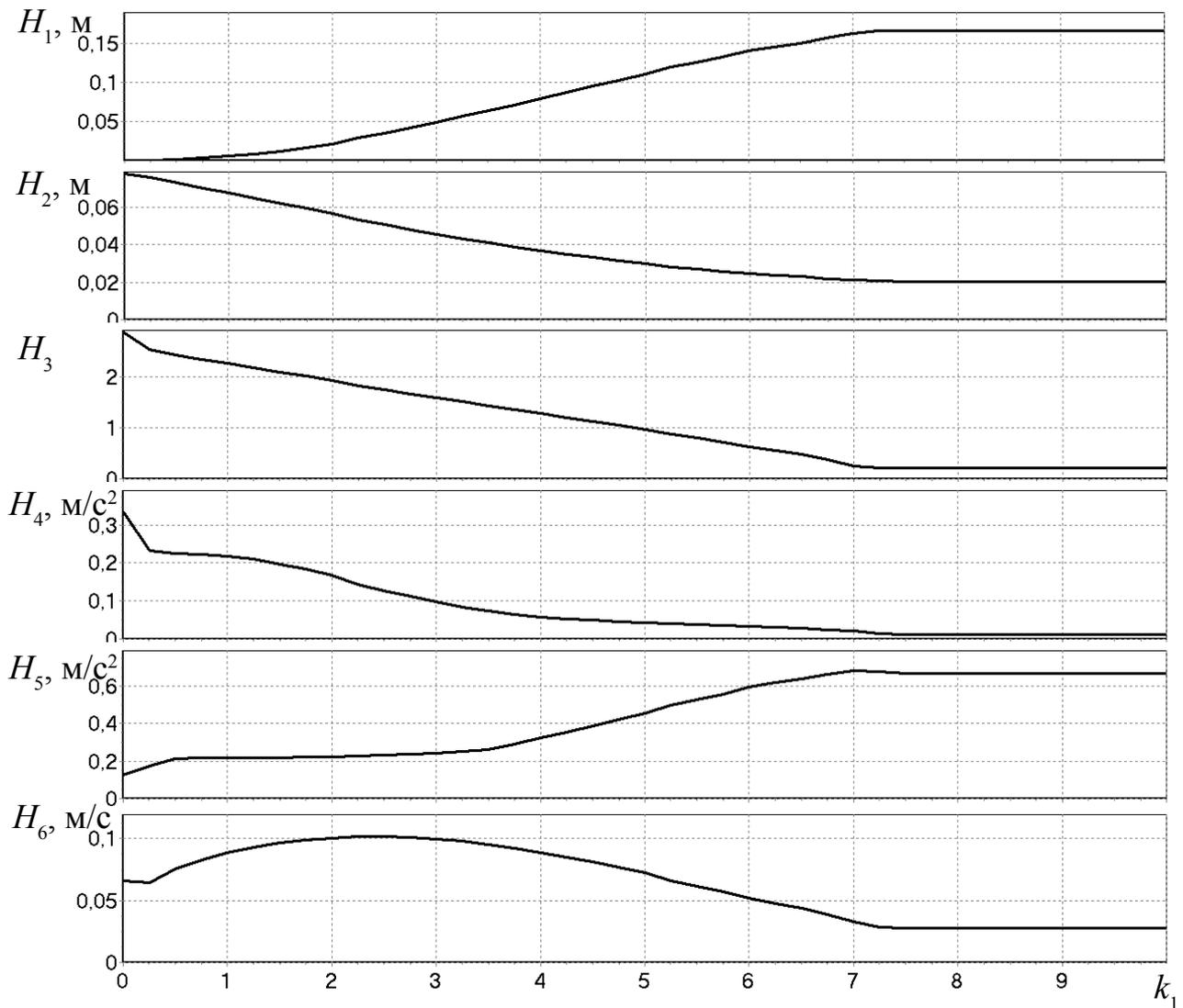


Рисунок 4.4 — Изменение частных показателей качества в зависимости от весового коэффициента высоты вертикальных перемещений корпуса при использовании механизма-корректора.

### **4.3. Оптимизация структуры машины со сдвоенными шагающими двигателями**

Методы структурной оптимизации особенно актуальны для машин, построенных на модульном принципе, который использовался например при разработке машины «Ортоног» и дождевальная машины с шагающими

двигателями. Применение отдельных модулей позволяет наращивать возможности машины, собирая из однотипных модулей транспортный агрегат необходимого состава, а также предполагает возможность реконфигурации аппарата во время движения путём отключения или включения некоторых приводов (механизмов шагания, двигателей) и блокировки соответствующих степеней свободы.

#### **4.3.1. Построение расчётной схемы модульной шагающей машины**

Шагающие машины часто имеют избыточное количество двигателей или механизмов шагания, что позволяет использовать для организации движения только часть из них. Такая необходимость может возникнуть при преодолении некоторых типов препятствий или в случае выхода из строя одной из ног аппарата. С другой стороны, увеличение количества двигателей или объединение нескольких шагающих аппаратов в один комплекс может быть востребовано для увеличения грузоподъёмности машины, повышения её проходимости и улучшения других характеристик. Поэтому в ряде случаев исследователи закладывают в свои разработки возможности реконфигурации [331, 350, 386].

Например, в шагающей машине «Ортоног» имеются 4 сдвоенных шагающих двигателя (рисунок 4.5), каждый из которых состоит из двух плоских ортогональных механизмов шагания с общим поворотным приводом и имеет таким образом 5 управляемых степеней свободы. Каждый привод, каждый механизм шагания и каждый двигатель представляют собой отдельные модули, которые можно заменять или выключать. Двигатели также можно целиком добавлять в кинематическую схему машины или исключать из неё.

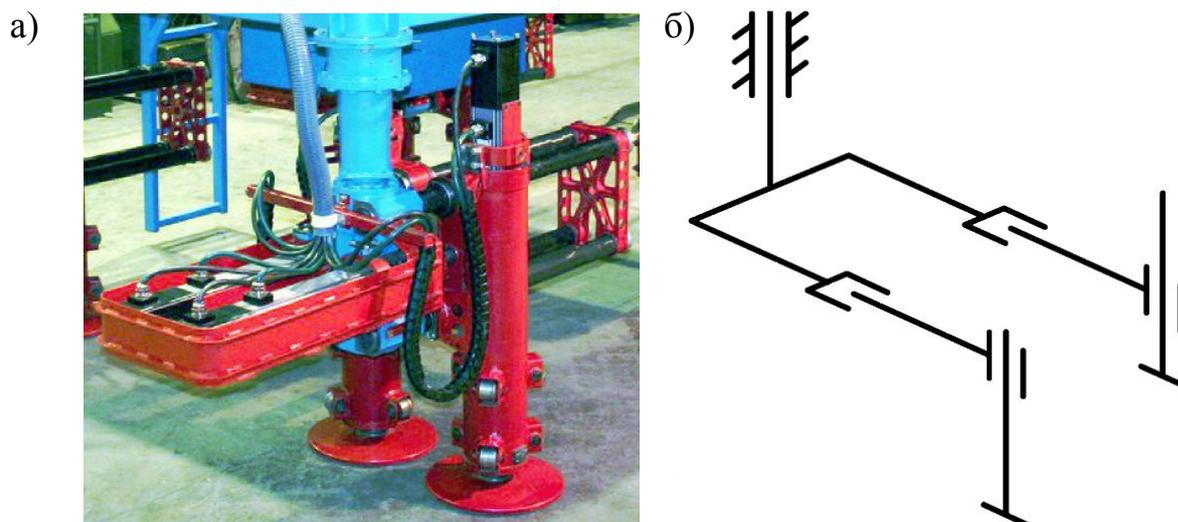


Рисунок 4.5 — Ортогонально-поворотный движитель машины «Ортоног».

Шагающие машины модульной структуры (рисунок 4.6.a) допускают реконфигурацию кинематической схемы. Модульный принцип построения шагающей машины не только позволяет наращивать её возможности, собирая из однотипных модулей транспортные агрегаты необходимой грузоподъёмности, но и предполагает возможность реконфигурации аппарата во время движения путём отключения или включения некоторых приводов (механизмов шагания, движителей) и блокировки соответствующих степеней свободы. При этом следует учитывать, что устройство используемых приводов таково, что в выключенном или нерабочем состоянии привод блокирует соответствующую степень свободы.

В частности, машина «Ортоног» состоит из рамы и четырёх модулей сдвоенных ортогонально-поворотных движителей. Модули движителей в свою очередь включают в себя модуль поворотного привода и два модуля механизмов шагания, каждый из которых собирается из двух модулей линейных приводов: курсового перемещения и привода адаптации (рисунок 4.6.б). Всего сдвоенный ортогонально-поворотный движитель содержит пять модулей приводов, и его можно условно разделить на две ноги, считая что привод поворота является

общим для обеих ног. Шагающая машина «Ортоног», таким образом, имеет 20 управляемых степеней свободы, некоторые из которых могут быть отключены.

Одна из ключевых проблем при реконфигурации состоит в необходимости исследовании условий возможности и целесообразности включения или отключения того или иного привода. Целесообразность реконфигурации определяется такими факторами как повышение энергетической эффективности, необходимость перешагнуть препятствие, не наступая на него, и другими. А возможность реконфигурации определяется необходимостью сохранения статической устойчивости и сохранения достаточного числа управляемых степеней свободы, чтобы обеспечить необходимые локомоции аппарата.

Рассматриваются походки, обеспечивающие кинематически точные режимы движения при выполнении необходимых условий статической устойчивости.

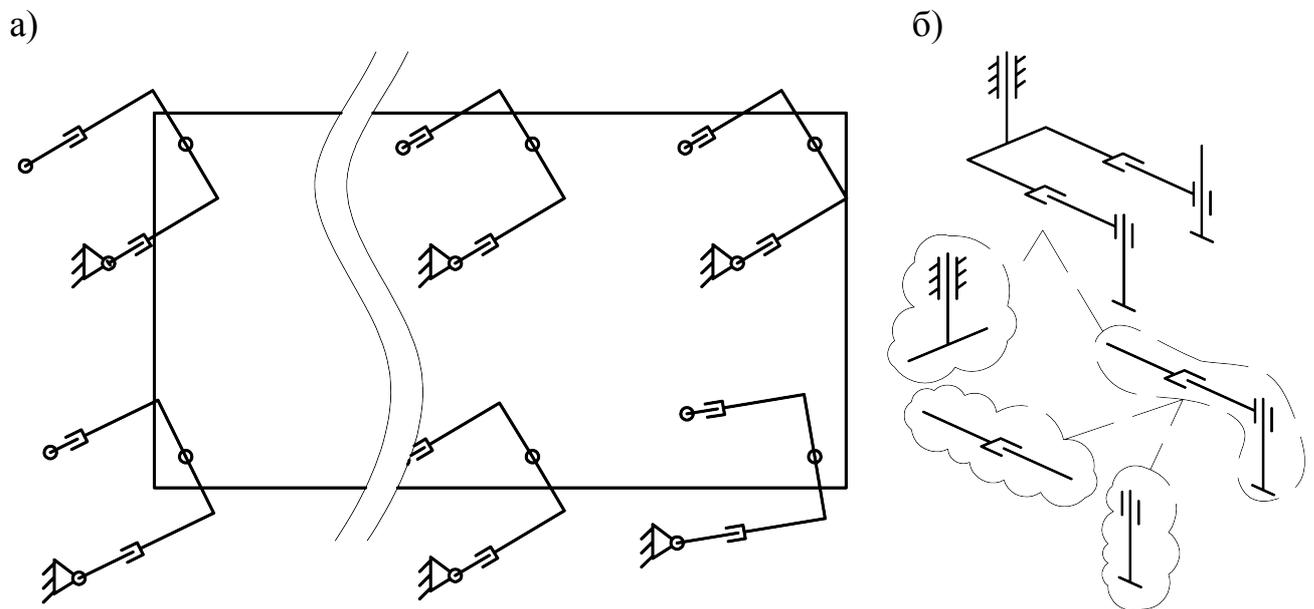


Рисунок 4.6 — Кинематическая схема модульной шагающей машины: а) вид сверху (на каждом движителе один из механизмов шагания условно показан находящимся в опоре на грунт); б) схема ортогонально-поворотного шагающего движителя с приводами, допускающими отключение.

#### **4.3.2. Особенности походок шагающих машин со сдвоенными двигателями**

В соответствии с [195], под походкой понимается последовательность фаз опоры и переноса отдельных ног (механизмов шагания). Такое определение допускает использование термина «походка» как для машины в целом, так и для отдельных двигателей, состоящих из двух или более механизмов шагания. Поскольку программное движение корпуса может быть достаточно сложным, рассматриваемые далее походки попадают в класс свободных походок [195], которые допускают произвольное изменение порядка и продолжительности фаз опоры и переноса в зависимости от особенностей опорной поверхности и требуемого движения корпуса. Для рассматриваемой машины в силу использования сдвоенных двигателей можно выделить три типа свободных походок: полноопорные, неполноопорные и смешанные походки.

Полноопорные походки — это походки, обеспечивающие отсутствие в работе каждого двигателя фазы переноса одновременно всех механизмов шагания, входящих в двигатель. Полноопорные походки могут быть реализованы двигателями, состоящими из двух или более механизмов шагания, и машинами, построенными на основе таких двигателей.

Неполноопорные походки — это походки обеспечивающие чередование в работе каждого двигателя фазы опоры хотя бы на один из механизмов шагания и фазы переноса всех механизмов шагания, входящих в двигатель. Такого типа походки реализуются, например, в машинах, каждый двигатель которых представляет собой один независимый механизм шагания.

Смешанные походки — это походки обеспечивающие отсутствие в работе некоторых двигателей фазы одновременного переноса всех механизмов шагания и наличие в работе других двигателей чередования фазы опоры на один или несколько механизмов шагания и фазы переноса всех механизмов шагания, входящих в двигатель.

В рассматриваемой машине полноопорная походка с использованием четырёх движителей гарантированно обеспечивает нахождение геометрического центра корпуса, с которым приблизительно совпадает центр масс, в пределах опорного многоугольника при любом геометрически реализуемом движении корпуса. Поэтому в базовой конфигурации машины, включающей в себя все 20 приводных модулей, использование полноопорных походок является предпочтительным.

Однако, кинематические схемы многих машин позволяют осуществлять пространственное программное движение корпуса и при использовании только части имеющихся приводов. Например, для машины «Ортоног» можно организовать полноопорную походку с опорой на три движителя, используя только 15 приводов.

Для организации неполноопорных походок достаточно использовать четыре механизма шагания, принадлежащие разным движителям и имеющие в сумме 12 управляемых приводов. Требование статической устойчивости означает, что машина должна опираться на три механизма шагания, в то время как четвёртый находится в переносе. В частном случае, при прямолинейном программном движении центра корпуса, этот режим соответствует последовательной походке.

Возможны режимы движения, при которых будет задействовано более 12 и менее 20 приводов и будет обеспечено пространственное движение корпуса. А если допустить некоторые ограничения на движение корпуса, то движение машины возможно и при меньшем количестве управляемых степеней свободы. При этом могут быть реализованы походки смешанного типа.

Хотя практическая реализация движения с использованием меньшего количества механизмов шагания представляет определённые сложности, связанные с необходимостью контролировать положение центра масс машины относительно опорного многоугольника [45], такие режимы движения являются вполне допустимыми.

Таким образом, для организации программного движения корпуса имеющиеся 20 управляемых степеней свободы избыточны. Использование меньшего количества приводов, позволяет эксплуатировать машину и в тех ситуациях когда использование всех приводов нежелательно или невозможно. Например: при выходе некоторых приводов из строя, при невозможности опирания на один из механизмов шагания из-за особенностей опорной поверхности, и в других ситуациях.

Основным типом походки для машины с СОП движителями является полноопорная походка — походка при которой в каждый момент времени хотя бы один из механизмов шагания каждого движителя находится в фазе опоры. При движении машины «Ортоход» с опорой на все четыре движителя, гарантированно сохраняется положительный запас статической устойчивости — кратчайшее расстояния от проекции центра масс машины на горизонтальную плоскость до границы опорного многоугольника.

В [163] показано, что при движении с опорой на три СОП движителя возможно обеспечить кинематически точную полноопорную походку и произвольное пространственное программное движение корпуса машины, но одной из основных проблем практической реализации такого движения является необходимость контроля за положением опорного многоугольника относительно центра масс машины.

Регулярная полноопорная походка шагающей машины с тремя СОП движителями с прямолинейным поступательным движением корпуса должна обеспечивать такое состояние шагающей машины, которое соответствует максимально возможному запасу статической устойчивости.

Одним из способов описания состояния машины является способ, когда находящийся в фазе опоры механизм шагания обозначается символом 0, а механизм, находящийся в фазе переноса — символом 1. Последовательность состояний определяет походку шагающей машины.

В случае полноопорной походки состояние каждого движителя, включающего в себя два механизма шагания, будет меняться из  $\{0\ 1\}$  в  $\{1\ 0\}$  и наоборот. Если продолжительность фаз опоры и переноса одинаковы и разность фаз между движителями равна нулю, то переступание ног на каждом из движителей происходит одновременно и состояние механизмов одновременно меняется на противоположное. Такую походку можно определить как синхронную.

При отключении одного из движителей, его механизмы шагания фиксируются в поднятом положении и формально находятся в фазе переноса. Состояние такого движителя обозначается символами  $\{1\ 1\}$ .

Для машины, использующей три работающих в полноопорном режиме сведенных движителя существует четыре синхронных полноопорных походки. За счёт симметрии, характерной например для машины «Ортоног», не существенно какой именно из четырёх движителей будет отключён. В качестве примера в выражениях (4.4) записаны синхронные полноопорные походки машины при отключении движителя номер 2.

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} & q_2 &= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \\
 q_3 &= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} & q_4 &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

На рисунке 4.7 показана диаграмма синхронной полноопорной походки  $q_1$ .

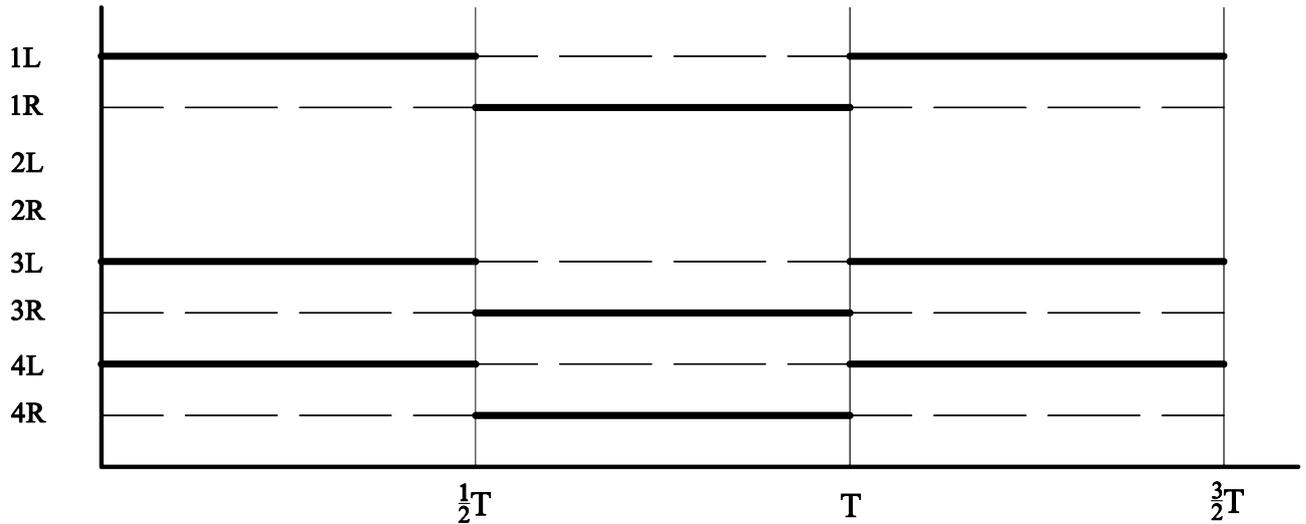


Рисунок 4.7 — Диаграмма регулярной полноопорной походки для трёх СОП движителей. Сплошные линии — механизм шагания в фазе опоры, пунктирные — в фазе переноса,  $T$  — период.

Для каждой походки могут быть реализованы различные стили движения. В частности прямолинейное движение центра корпуса может быть организовано двумя различными стилями: «линейным» и «вёсельным».

При «линейном» стиле движения направляющие приводов курсового движения механизмов шагания ориентированы параллельно направлению движения корпуса, поворотные приводы зафиксированы, и перемещение корпуса осуществляется за счёт работы курсовых приводов (рисунок 4.7.а, б).

При «вёсельном» стиле движения (рисунок 4.7.в, г, д, е) движители не остаются параллельными направлению движения корпуса. Направляющие приводов курсового движения каждого движителя совершают возвратно-вращательные движения. За счёт согласованной работы курсовых и поворотного приводов стопы движутся относительно корпуса по прямолинейным траекториям. При этом стопа одного из механизмов шагания каждого движителя занимает крайнее дальнее положение от оси поворотного привода, проходит большой путь, и при опоре на неё машина осуществляет прямой ход. А стопа второго механизма

шагания занимает крайнее ближайшее к оси поворота положение, проходит меньший путь, и при опоре на неё машина осуществляет обратный ход. Движения механизмов шагания, таким образом, напоминают движения вёсел у лодки, с той только разницей, что контакт с опорной поверхностью сохраняется как при прямом, так и при обратном ходе.

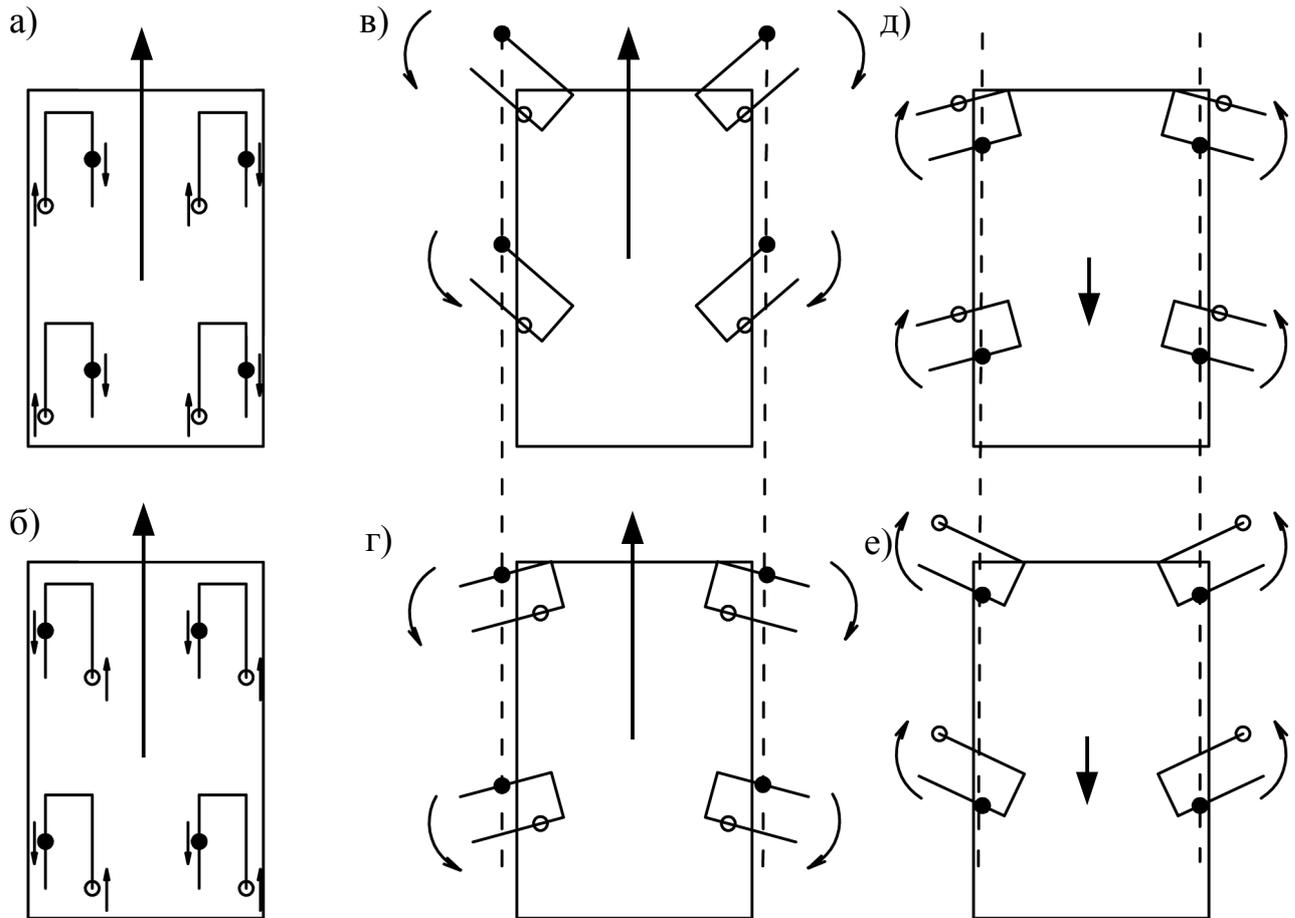


Рисунок 4.8 — Движение «линейным» (а, б) и «вёсельным» (в, г, д, е) стилями.

Стрелками показано направление движения движителей и корпуса машины.

Опорные стопы обозначены чёрными кругами, переносные стопы — белыми.

На рисунке 4.8 показаны реализации «линейного» и «вёсельного» стилей для машины с четырьмя сдвоенными движителями, но реализация этих стилей возможна и при отключении одного из движителей. Поскольку отключение движителя может быть незапланированным, а требуемые для обеспечения

устойчивости положения приводов относительно корпуса машины при движении на трёх и четырёх движителях могут отличаться, то требуют отдельного рассмотрения начальные фазы движения при отключении одного из движителей. Имеющихся на трёх движителях степеней свободы не достаточно для осуществления одновременно произвольного движения корпуса и механизмов шагания, находящихся в опоре. Поэтому переход к движению с опорой на три движителя может осуществляться с проскальзыванием стоп по грунту. Возможно также использование для опоры заблокированных механизмов шагания четвёртого движителя.

«Линейный» стиль движения является предпочтительным, так как с его помощью можно организовать прямолинейное движение с постоянной скоростью или скоростью изменяющейся по произвольному закону. В то время как «вёсельный» стиль движения из-за наличия фаз обратных ходов такой свободы не даёт.

Синхронная полноопорная походка «линейным» стилем характеризуется рядом параметров, среди которых следует выделить параметры, влияющие на запас статической устойчивости: угол  $\alpha$  между направлением движения и продольной осью машины, минимальная  $r_{min}$  и максимальная  $r_{max}$  длина выдвигания линейного курсового привода, взаимная ориентация движителей.

Угол  $\alpha$  изменяется в диапазоне от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Перемещение линейного курсового привода ограничены конструктивно значениями, обозначенными через  $[r_{min}]$  и  $[r_{max}]$ . Программные ограничения в свою очередь могут варьироваться в диапазонах:  $r_{min}$  — от  $[r_{min}]$  до  $r_{max}$ , а  $r_{max}$  — от  $r_{min}$  до  $[r_{max}]$ . Разность между  $r_{max}$  и  $r_{min}$  определяет длину шага машины.

Взаимная ориентация движителей — параметр принимающий дискретные значения в зависимости от положения направляющих курсовых приводов движителей относительно продольной оси машины. Для реализации линейного стиля движители должны быть ориентированы параллельно направлению

движения машины. Однако таких ориентаций может быть две, отличающихся на  $\pi$  относительно друг друга. На рисунке 4.9 показаны варианты взаимной ориентации движителей. Движители условно показаны в положениях 0 и  $\pi$  относительно корпуса, что соответствует движению вдоль продольной оси машины. Для реализации прямолинейного движения под углом  $\alpha$  к продольной оси, все движители должны быть повёрнуты на соответствующий угол.

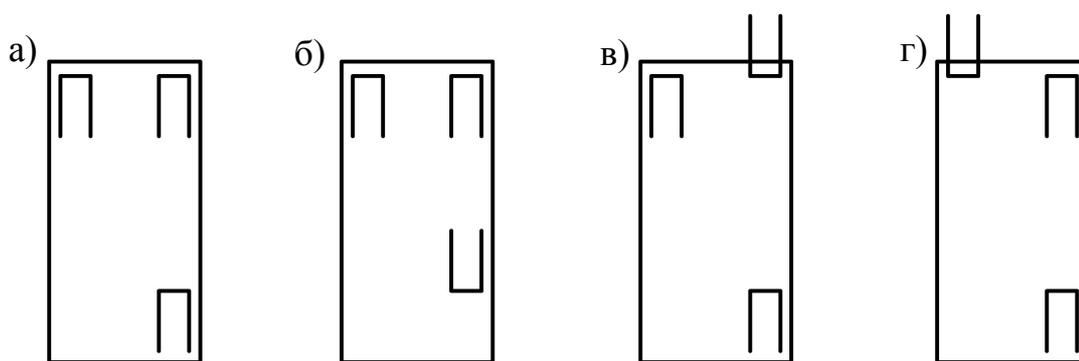


Рисунок 4.9 — Варианты взаимной ориентации движителей

Символом 0 обозначается движитель, ориентированный по направлению движения, символом  $\pi$  — движитель, ориентированный против направления движения, а прочерком — отключенный движитель. Тогда ориентация движителей, показанная на рисунке 4.9.а кодируется выражением  $\{0,-,0,0\}$ , на рисунке 4.9.б — выражением  $\{0,-,0,\pi\}$  и так далее.

Такая система обозначений является избыточной, так как инвертированное выражение (получающееся путём замены 0 на  $\pi$  и наоборот) кодирует то же состояние, что и исходное выражение. Например, состояние  $\{0,-,0,0\}$  при некотором произвольном угле  $\alpha$  соответствует состоянию  $\{\pi,-,\pi,\pi\}$  при углах  $\alpha \pm \pi$ . Следовательно, рассматривать нужно только четыре случая взаимной ориентации движителей, показанные на рисунке 4.9, для каждой из четырёх линейных синхронных полноопорных походок (4.4) — всего 16 комбинаций. Варьируя  $\alpha$ ,  $r_{min}$ ,  $r_{max}$  в указанных выше пределах можно определить значения параметров, при которых будет достигаться наибольший запас статической устойчивости.

### 4.3.3. Условия осуществимости различных типов походок

Отключение или выход из строя одного из приводов фактически приводит к появлению новой кинематической схемы, которая отличается от предыдущей тем, что имеет на одну управляемую степень свободы меньше.

Количество возможных конфигураций машины при исключении из работы нескольких приводов определяется числом сочетаний из  $n$  по  $k$ :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.5)$$

где  $n = 20$  — общее число приводов,  $k$  — количество работающих приводов.

Так, при неработающем (отсутствующем) одном приводе, возможны 20 различных кинематических схем, в зависимости от того, какой из приводов был отключён. Конечно, многие из этих схем будут давать одинаковый набор возможных походок, что позволяет упростить задачу, рассматривая только некоторые из этих схем.

Однако при отключении двух приводов, количество вариантов кинематических схем возрастает до 190, и даже задача определения вариантов, дающих одинаковые походки, становится достаточно сложной. Ещё больше трудоёмкость решения возрастает при трёх и более неработающих приводах.

В первой строке таблицы 4.1 показано распределение числа возможных кинематических схем для различного количества отключенных приводов. Общее количество различных комбинаций равно  $2^{20} = 1048576$ . Хотя значительная часть конфигураций не представляет практического интереса, так как в них используется заведомо мало приводов, количество конфигураций, требующих анализа очень велико.

Для анализа кинематических схем предлагается следующая система обозначений. Работающий привод обозначается символом «1», неработающий привод — символом «0». Например, конкретная кинематическая схема машины «Ортоног» описывается 20 символами, сгруппированными в движители — в 4 группы по 5 символов в каждой. Порядок следования движителей не важен в решаемой задаче и не оговаривается. Однако, этот порядок не меняется при переходе от одной кинематической схемы к другой.

Таблица 4.1 — Количество кинематических схем машины для различного числа приводов

	число работающих приводов										
	≤10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
всего	616666	167960	125970	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1
возможна полноопорная походка	0	0	0	0	0	4	20	40	40	20	1
возможна неполноопорная походка	0	0	16	128	416	704	664	352	104	16	1
возможны оба типа	0	0	0	0	0	0	0	0	8	16	1
возможна полноопорная походка с ограничением	0	0	0	0	24	124	260	280	136	20	1
возможна неполноопорная походка с ограничением	0	64	496	1568	2608	2480	1408	504	116	16	1
возможны оба типа с ограничением	0	0	0	0	0	0	48	128	92	16	1

Порядок следования приводов в пределах движителя: поворотный, левый курсового перемещения, левый адаптации, правый курсового перемещения, правый адаптации. Следует отметить, что понятия «левый» и «правый» в рассматриваемом случае являются условными, используются только для определённости и могут быть заменены любыми другими обозначениями.

Несколько примеров обозначений приведено в таблице 4.2.

Введённая система обозначений позволяет перебрать на ЭВМ все конфигурации машины от «00000 00000 00000 00000» до «11111 11111 11111 11111», проверяя каждую из них на допустимость того или иного типа походки.

Таблица 4.2 — Примеры обозначения кинематических схем движителей и машины

Обозначение	Описание
10000	двигатель, у которого включены только поворотный привод
11100	двигатель, у которого включены приводы: поворотный, левый курсового перемещения, левый адаптации
01010	двигатель, у которого включены только приводы курсового перемещения
00000 00000 00000 00000	машина, у которой отключены все приводы
11111 11111 11111 11111	машина, у которой все приводы включены

Для работы с комбинациями, записанными в виде последовательностей нулей и единиц, требуется проводить ряд логических операций.

В работе логическое значение ИСТИНА считается эквивалентным численному значению 1, а логическое ЛОЖЬ — численному 0. В частности, это означает, что для них определена операция арифметического сложения, которая обозначается символом +.

Операция логического сложения (дизъюнкция) обозначается символом  $\vee$ , а операция логического умножения (конъюнкция) — символом  $\wedge$ .

Символом  $\leftrightarrow$  обозначается оператор проверки эквивалентности.

Бинарный оператор *shr* осуществляет побитовый сдвиг вправо. Применяется к первому аргументу, сдвиг осуществляется на количество позиций, заданное вторым аргументом.

Для получения состояния определённого привода или нескольких приводов используется операция маскирования: конъюнкция строки, описывающей конфигурацию машины, и битовой маски — строки, в которой требуемые приводы выставлены в 1, а все остальные — в 0. Вводится оператор *m*, осуществляющий маскирование с последующим сравнением результата с маской:

$$m(X, M) = (X \wedge M) \leftrightarrow M \quad (4.6)$$

где *X* — комбинация, к которой применяется оператор; *M* — битовая маска.

Через *s(X)* обозначается оператор, который возвращает количество бит, имеющих значение 1, в комбинации *X*.

Необходимым условием сохранения статической устойчивости машины является нахождение в опоре не менее трёх ног. При этом корпус машины может осуществлять произвольное пространственное движение только в том случае, если в каждой из опорных ног будут работоспособны все три привода. Этот вывод может быть получен, например, из подсчёта степеней свободы рассматриваемой механической системы. Так, машина с тремя ногами представляет собой систему 10 твёрдых тел, общее число степеней свободы которой равно 60. На неё наложены ограничения: по 3 связи на каждую ногу со стороны опорной поверхности, и по 5 связей на каждый из 9 приводов. Разница между числом степеней свободы и количеством наложенных ограничений равна 6, что и является числом управляемых степеней свободы, которые имеет корпус.

Для реализации полноопорной походки на смену находящимся в опоре трём ногам нужно поставить другие три ноги, принадлежащие тем же движителям. Причём эти ноги тоже должны иметь по три степени свободы. Таким образом,

полноопорная походка требует наличия не менее трёх полностью работающих движителей — движителей, у которых работоспособны все пять приводов.

Оператор  $f_D$ , возвращающий значение ИСТИНА, если комбинация  $X$  допускает организацию полноопорной походки, и ЛОЖЬ в обратном случае, может быть реализован следующим образом:

$$f_D(X) = [m(X, 11111\ 00000\ 00000\ 00000) + m(X, 00000\ 11111\ 00000\ 00000) + m(X, 00000\ 00000\ 11111\ 00000) + m(X, 00000\ 00000\ 00000\ 11111)] \geq 3 \quad (4.7)$$

Здесь каждый из операторов  $m$  осуществляет проверку работоспособности всех пяти приводов в соответствующем движителе, а результаты выполнения операторов интерпретируются как числа 0 или 1, что позволяет найти их сумму и сравнить её с требуемым количеством движителей.

Если при каждом перешагивании удаётся поставить на грунт ногу, принадлежащую движителю, обе ноги которого до этого находятся в переносе, то возможна реализация неполноопорной походки.

Для осуществления такой походки необходимо, чтобы на каждом движителе были работоспособны не менее трёх приводов, образующих ногу (поворотный привод и либо оба левых привода, либо оба правых).

Оператор  $f_Q$ , возвращающий значение ИСТИНА, если комбинация  $X$  допускает организацию неполноопорной походки, и ЛОЖЬ в обратном случае, может быть реализован следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f_o(X) = & \\
 & [m(X, 11100\ 00000\ 00000\ 00000) \vee m(X, 10011\ 00000\ 00000\ 00000)] \wedge \\
 & [m(X, 00000\ 11100\ 00000\ 00000) \vee m(X, 00000\ 10011\ 00000\ 00000)] \wedge \\
 & [m(X, 00000\ 00000\ 11100\ 00000) \vee m(X, 00000\ 00000\ 10011\ 00000)] \wedge \\
 & [m(X, 00000\ 00000\ 00000\ 11100) \vee m(X, 00000\ 00000\ 00000\ 10011)]
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь каждый оператор  $m$  осуществляет проверку работоспособности в движителе трёх приводов, образующих ногу. Операторы дизъюнкции проверяют наличие в движителях хотя бы одной такой ноги, а операторы конъюнкции проверяют наличие такой ноги в каждом движителе.

Применение операторов (4.6, 4.7) к множеству возможных комбинаций приводов позволяет отфильтровать 2501 комбинацию, для которых реализуема хотя бы одна из рассматриваемых походок. Из них, для 125 комбинаций реализуема полноопорная походка, для 2401 комбинации — неполноопорная походка, а для 25 комбинаций — оба типа походок. Для большинства из этих комбинаций возможен также смешанный тип походки. Распределение числа кинематических схем в зависимости от числа используемых приводов для различных типов походок показано в таблице 1.

Среди возможных ограничений на движение корпуса машины наибольший интерес с практической точки зрения вызывает такое его движение, при котором произвольно задаются только перемещение полюса корпуса в плане опорной поверхности и угол рыскания корпуса. Углы крена и тангажа задаются равными нулю или допускается незначительное их отклонение от нуля. Высота полюса корпуса над опорной поверхностью не задаётся. При движении по достаточно ровной опорной поверхности можно считать, что задаётся плоско-параллельное программное движение корпуса.

В этом случае допустимо использовать для опоры одну ногу, имеющую заблокированный привод адаптации, при условии, что приводы остальных ног обеспечивают адаптацию этой ноги к грунту.

В общем случае не допустимо использовать для опоры более одной ноги с заблокированным приводом адаптации. Это возможно в маловероятной ситуации, когда два или три привода адаптации будут заблокированы в одинаковых положениях. Или возможно при блокировке приводов в различных положениях, если допускаются значительные углы крена и тангажа.

Проверка реализуемости «плоско-параллельного» программного движения корпуса основываются на условиях, подобных (4.7, 4.8). Но теперь допускается отсутствие одного из шести используемых приводов адаптации в случае полноопорной походки или одного из четырёх используемых приводов адаптации в случае неполноопорной походки.

Для реализации полноопорной походки должны выполняться условия:

- 1) не менее двух полностью работающих движителей (со всеми пятью приводами);
- 2) ещё хотя бы один движитель, у которого включены все приводы, возможно кроме одного из приводов адаптации.

Оператор для проверки этих условий может быть записан в виде:

$$\begin{aligned}
 f_{DV}(X) = & \\
 & \left\{ \left[ m(X, 11111\ 00000\ 00000\ 00000) + m(X, 00000\ 11111\ 00000\ 00000) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + m(X, 00000\ 00000\ 11111\ 00000) + m(X, 00000\ 00000\ 00000\ 11111) \right] \geq 2 \right\} \wedge \\
 & \left\{ \left[ \left[ m(X, 11010\ 00000\ 00000\ 00000) \wedge (s(X \wedge 00101\ 00000\ 00000\ 00000)) > 0 \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left[ m(X, 00000\ 11010\ 00000\ 00000) \wedge (s(X \wedge 00000\ 00101\ 00000\ 00000)) > 0 \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left[ m(X, 00000\ 00000\ 11010\ 00000) \wedge (s(X \wedge 00000\ 00000\ 00101\ 00000)) > 0 \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left[ m(X, 00000\ 00000\ 00000\ 11010) \wedge (s(X \wedge 00000\ 00000\ 00000\ 00101)) > 0 \right] \right] \geq 3 \right\}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Здесь сначала определяется наличие не менее двух движителей с пятью приводами в каждом, аналогично выражению (4.7). Затем для каждого движителя с помощью оператора  $s$  определяется количество включенных приводов адаптации, которых должно быть больше нуля. С помощью оператора  $m$

определяется наличие поворотного и обоих приводов курсового перемещения. С помощью оператора дизъюнкции, таким образом, проверяется условие, что движитель имеет поворотный привод, оба привода курсового перемещения и хотя бы один привод адаптации. Результаты работы операторов конъюнкции интерпретируются как числа 0 или 1 и складываются для всех движителей.

Для реализации неполноопорной походки должны выполняться условия:

- 1) работают все четыре поворотных привода;
- 2) на каждом движителе работает хотя бы один привод курсового перемещения;
- 3) наличие хотя бы трёх работающих приводов адаптации, принадлежащих трём разным движителям и находящимся на ногах с работающими приводами курсового перемещения.

Оператор для проверки этих условий может быть записан в виде:

$$\begin{aligned}
 g_1(X) &= X \wedge 01010\ 00000\ 00000\ 00000, \\
 g_2(X) &= X \wedge 00000\ 01010\ 00000\ 00000, \\
 g_3(X) &= X \wedge 00000\ 00000\ 01010\ 00000, \\
 g_4(X) &= X \wedge 00000\ 00000\ 00000\ 01010, \\
 f_{QV}(X) &= m(X, 10000\ 10000\ 10000\ 10000) \wedge \\
 &(s(g_1(X)) > 0) \wedge (s(g_2(X)) > 0) \wedge (s(g_3(X)) > 0) \wedge (s(g_4(X)) > 0) \wedge \\
 &\left\{ \left[ (s(X \wedge (g_1(X) \vee (g_1(X) \text{shr } 1))) > s(g_1(X))) + \right. \right. \\
 &\quad + (s(X \wedge (g_2(X) \vee (g_2(X) \text{shr } 1))) > s(g_2(X))) + \\
 &\quad + (s(X \wedge (g_3(X) \vee (g_3(X) \text{shr } 1))) > s(g_3(X))) + \\
 &\quad \left. \left. + (s(X \wedge (g_4(X) \vee (g_4(X) \text{shr } 1))) > s(g_4(X))) \right] \geq 3 \right\}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь сначала определяются вспомогательные операторы  $g_1(X)$ ,  $g_2(X)$ ,  $g_3(X)$ ,  $g_4(X)$ , которые обеспечивают конъюнкцию  $X$  и битовых масок, соответствующих работоспособным приводам курсового перемещения на соответствующем движителе. Затем определяется основной оператор, в котором можно выделить три структурные части. В первой части проверяется соответствие маске, описывающей работоспособность четырёх поворотных движителей. Во второй

части, для каждого движителя подсчитывается количество работоспособных приводов курсового перемещения и проверяется, что это количество больше нуля. В третьей части в квадратных скобках подсчитывается сумма однотипных слагаемых, каждое из которых может быть равно 1 или 0 (ИСТИНА или ЛОЖЬ) в зависимости от того, имеется ли в соответствующем движителе нога с работоспособными приводом курсового перемещения и приводом адаптации. В каждом из этих слагаемых сначала результат применения соответствующего оператора  $g_i(X)$  сдвигается вправо, определяя таким образом битовую маску для приводов адаптации, зависящую от работоспособности приводов курсового перемещения, затем с помощью оператора побитовой дизъюнкции образуется общая для привода курсового перемещения и привода адаптации маска, которая в свою очередь применяется к исходной комбинации. В полученном результате подсчитывается общее количество работоспособных приводов в соответствующем движителе и сравнивается с количеством работоспособных приводов курсового перемещения в этом же движителе. Если существует хотя бы один привод адаптации, удовлетворяющий условиям, то результат сравнения будет ИСТИНА, что для последующей операции арифметического сложения трактуется как 1. Условие в фигурных скобках удовлетворяется, если обнаруживаются не менее трёх подходящих приводов адаптации.

Применение операторов (4.7) - (4.9) к множеству возможных комбинаций приводов позволяет отфильтровать 9821 комбинацию, для которых реализуема хотя бы одна из рассматриваемых походок. Из них, для 797 комбинаций реализуема сдвоенная походка, для 9261 комбинации — квадроподная походка, а для 237 комбинаций — оба типа походок. Распределение числа кинематических схем в зависимости от числа используемых приводов для различных типов походок показано в таблице 4.1.

#### 4.3.4. Оптимизация запаса статической устойчивости и количества приводов

При движении машины с полноопорной походкой на трёх движителях, опорный многоугольник представляет собой треугольник, форма, размеры и положение относительно корпуса которого меняются с течением времени.

Положения вершин  $\vec{\rho}_n$  опорных треугольников в системе отсчёта, связанной с корпусом машины, определяются по общей формуле:

$$\begin{aligned}\vec{\rho}_n &= \vec{\rho}_{On} \pm \vec{h}_n + \vec{r}_n \\ \vec{h}_n &= -h \sin \alpha_n \vec{i} + h \cos \alpha_n \vec{j} \\ \vec{r}_n &= -r_n \cos \alpha_n \vec{i} - r_n \sin \alpha_n \vec{j}\end{aligned}\quad (4.11)$$

где  $\vec{\rho}_{On}$  — радиус-вектор оси поворотного привода;  $h$  — половина расстояния между плоскостями механизмов шагания в одном движителе; плюс перед  $\vec{h}_n$  соответствует левому механизму шагания, минус — правому механизму;  $\alpha_i$  принимает значения  $\alpha$  или  $\alpha \pm \pi$  в зависимости от исследуемой ориентации движителей;  $r_n$  принимает значения  $r_{min}$  или  $r_{max}$  в зависимости от ориентации и положения опорного треугольника;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  — орты координатных осей  $x$ ,  $y$ .

Область пересечения опорных треугольников в пределах одного цикла определяет область устойчивости. Согласно свойству пересечения выпуклых множеств, область устойчивости всегда представляет выпуклый многоугольник. В рассматриваемом случае область устойчивости может быть получена в результате взаимопересечения четырёх треугольников, соответствующих крайним положениям: началу и концу шага левыми механизмами и началом и концом шага правыми механизмами. В качестве примера на рисунке 7 показано движение машины под углом  $60^\circ$  к продольной оси с ориентацией  $\{0, -, \pi, 0\}$ . Пунктирными

линиями 1 обозначены опорные треугольники в начале, а сплошными линиями 2 — в конце шага. Область устойчивости заштрихована.

Известны различные способы оценки запаса статической устойчивости: по расстоянию от проекции центра масс до границ опорного многоугольника, по площади опорного многоугольника, по потенциальной энергии сил тяжести, работа против которых необходима для опрокидывания машины [43, 147, 195].

Центр масс машины в общем случае не только не совпадает с геометрическим центром корпуса, но и меняется как в связи с перемещением механизмов шагания, так и в зависимости от перевозимого груза, и при работе навесного оборудования. Поскольку точное положение центра масс заранее не известно, то использовать кратчайшее расстояние до границ опорного многоугольника от центра масс машины в качестве критерия запаса статической устойчивости.

Для оценки запаса статической устойчивости вводятся два параметра: площадь области устойчивости и кратчайшее расстояние от геометрического центра корпуса до границ опорного многоугольника. Первый параметр характеризует величину пространства, где может находиться центр масс без потери устойчивости, а второй — соответствует классическому определению запаса статической устойчивости для идеального случая равномерной нагрузки и безмассовых движителей [195].

Для анализа результатов вводятся безразмерные относительные величины: относительная площадь и относительное расстояние.

Относительная площадь  $\chi$  определяется как отношение площади области устойчивости к площади прямоугольника, образованного продольной и поперечной базами машины:

$$\chi = S / ab \quad (4.12)$$

где  $S$  — площадь опорного треугольника;  $a$ ,  $b$  — соответственно продольная и поперечная базы.

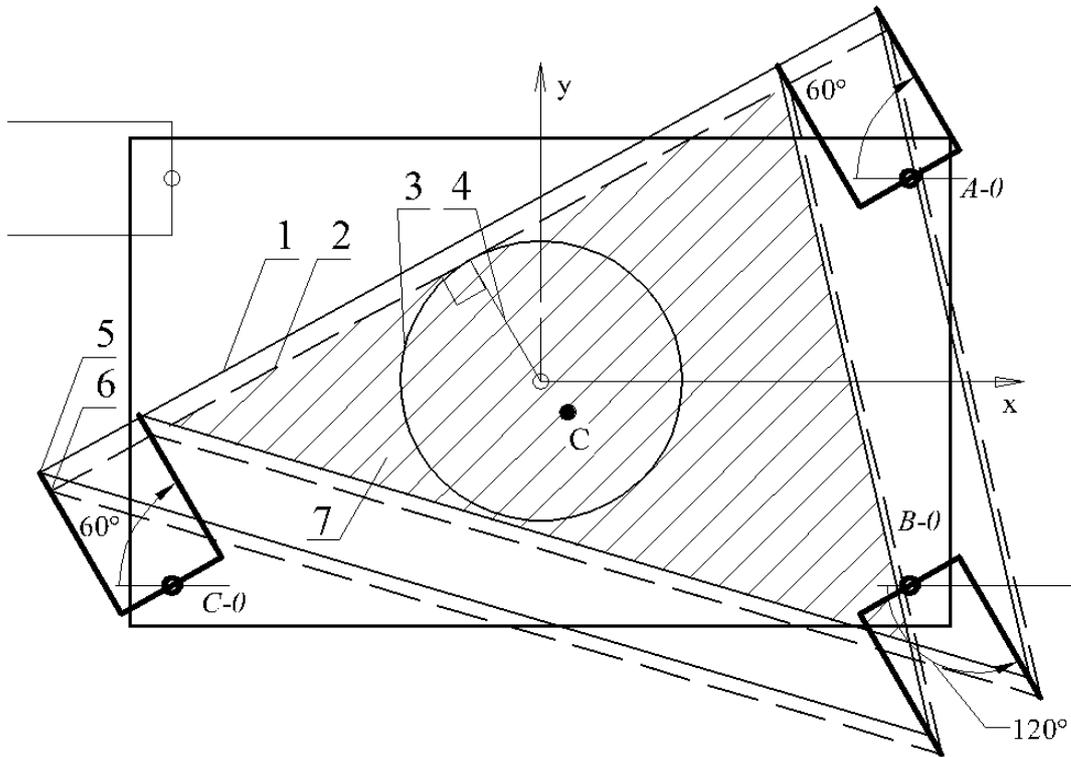


Рисунок 4.10 — Область устойчивости

Относительное расстояние  $\zeta$  — отношение удвоенного кратчайшего расстояния  $R$  от геометрического центра корпуса до границ области устойчивости к меньшему из значений продольной и поперечной баз машины:

$$\zeta = 2R / \min(a, b). \quad (4.13)$$

Алгоритм вычисления критериев статической устойчивости для заданного набора параметров состоит в последовательном выполнении итераций:

- определяются координаты вершин опорных треугольников согласно выражению (4.11) для крайних (начальных и конечных) положений движителей на каждом шаге;

- определяется область устойчивости как область взаимного пересечения опорных треугольников;

- определяется площадь области устойчивости и вычисляется относительная площадь по формуле (5.3);

- если геометрический центр корпуса находится внутри области устойчивости, то определяются расстояния от центра до границ области устойчивости, выбирается из них минимальное значение, вычисляется относительное расстояние по формуле (4.13);

- если геометрический центр корпуса находится внутри области устойчивости, то делается вывод о недопустимости движения с рассматриваемыми параметрами походки.

Для каждой комбинации ориентации движителей и линейной синхронной полноопорной походки вычисляются зависимости критериев статической устойчивости от угла  $\alpha$  для различных длин шагов.

В качестве примера на рисунках 4.11 и 4.12 показаны зависимости относительной площади и относительного расстояния от угла  $\alpha$  при движении с походкой  $q_3$  (4.4) и ориентацией движителей  $\{0, -, \pi, 0\}$  для шагающей машины «Ортоног». Численные значения параметров:  $a = 2,2$  м,  $b = 1,6$  м,  $h = 0,2$  м,  $[r_{max}] = 0,655$  м,  $[r_{min}] = 0,200$  м. Максимальное программное выдвигание курсового привода принято равным максимальному конструктивному значению  $r_{max} = 0,655$  м, а минимальное выдвигание  $r_{min}$  варьировалось в пределах от 0,200 до 0,600 м. Таким образом, длина шага варьировалась в пределах от 0,055 до 0,455 м.

Анализ результатов показывает, что с уменьшением длины шага относительная площадь и расстояние увеличиваются, а максимальные значения наблюдаются при соблюдении условий:

- два движителя ориентированы одинаково, а третий — в противоположном направлении;

- фаза опоры на грунт реализуется при максимальном удалении стоп от оси поворотного движителя.

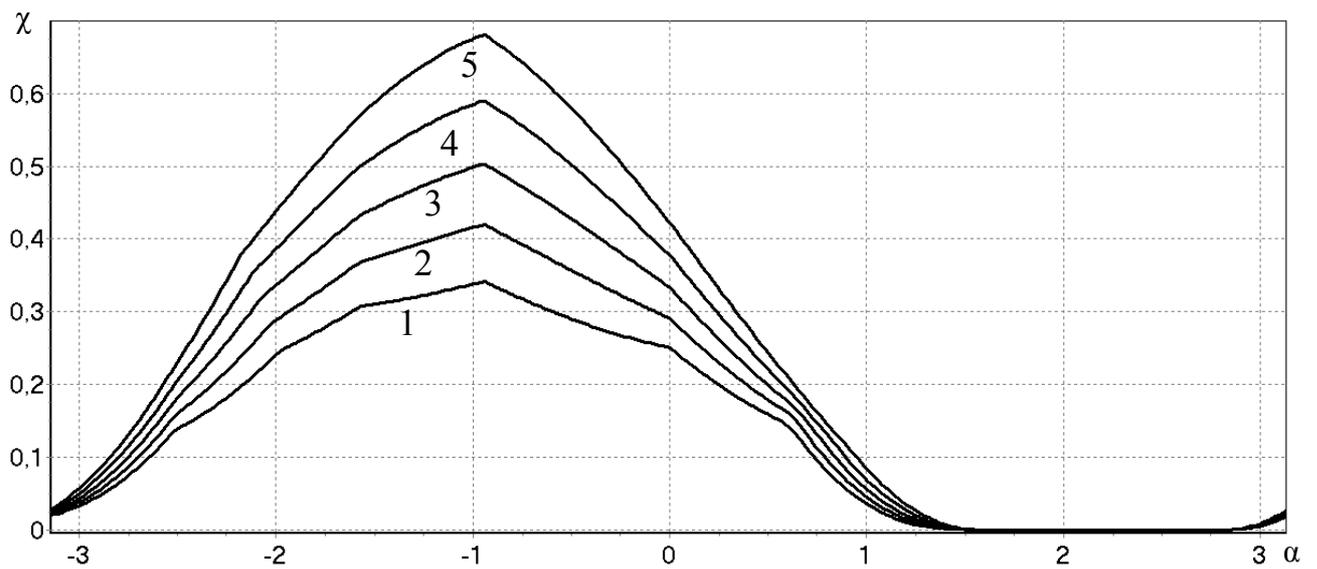


Рисунок 4.11 — Относительная площадь опорной поверхности  $\chi$  в зависимости от угла поворота движителей  $\alpha$  для различных длин шагов. Длина шага: 1 — 0,455; 2 — 0,355; 3 — 0,255, 4 — 0,155; 5 — 0,055 м.

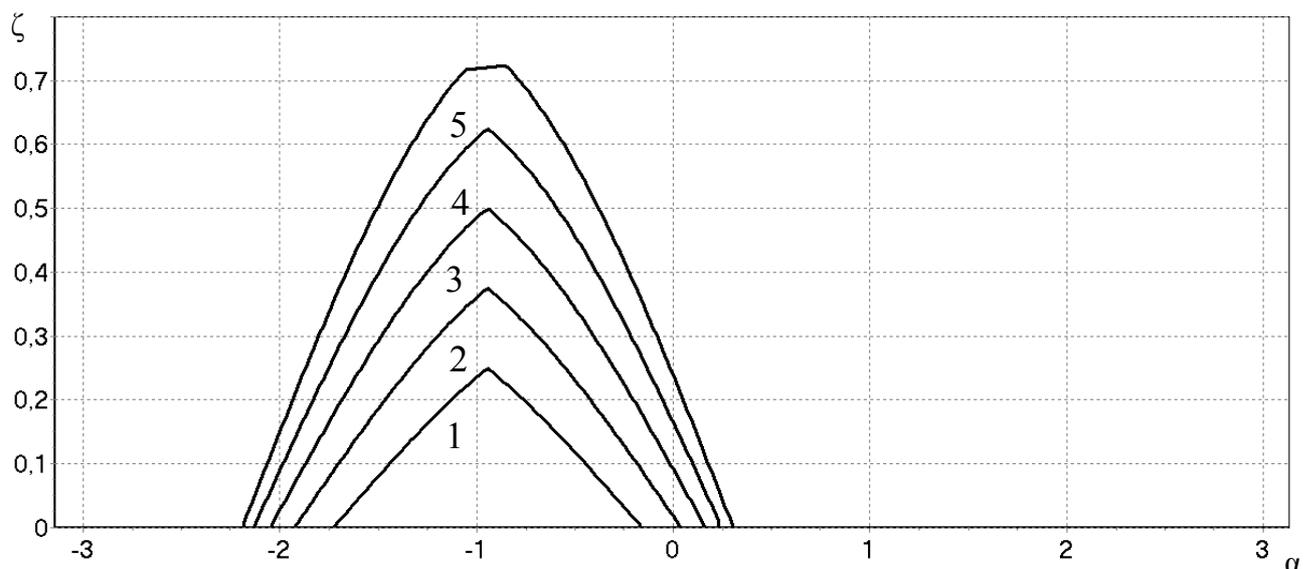


Рисунок 4.12 — Относительное расстояние  $\zeta$  в зависимости от угла поворота движителей  $\alpha$ .

Длина шага: 1 — 0,455; 2 — 0,355; 3 — 0,255, 4 — 0,155; 5 — 0,055 м.

В зависимости от параметров машины может существовать диапазон изменения угла  $\alpha$ , в котором площадь области устойчивости достигает нуля, и, следовательно, статически устойчивое движение машины невозможно при любом положении центра масс и любых значениях длины шага. Например, для машины «Ортоног» при походке  $q_3$  и ориентации движителей  $\{0, -\pi, 0\}$  такой диапазон лежит в пределах от 1,5 до 1,9 радиан (рисунок 4.11).

В зависимости от положения центра масс статически устойчивое движение может быть невозможно даже при значительной площади устойчивости. Например, при совпадении центра масс с геометрическим центром корпуса машины «Ортоног», статически устойчивое движение возможно только в диапазоне значений угла  $\alpha$  от -2,2 до 0,3 радиан или в более узком — в зависимости от длины шага (рисунок 4.12).

При различных углах  $\alpha$  и различных длинах шагов кратчайшее расстояние от центра масс до границ многоугольника области устойчивости определяется различными его гранями. Это влияет на значение угла  $\alpha$ , при котором достигается

максимальный запас статической устойчивости. В рассматриваемом примере, для длин шагов от 0,155 до 0,455 м максимальное относительное расстояние  $\zeta$  (рисунок 4.12, кривые 1-4) наблюдается при  $\alpha = -0,94$  радиан, а для длины шага 0,055 м (рисунок 4.12, кривая 5) — при  $\alpha = -0,85$  радиан.

Разработанные методы определения необходимого количества и типа приводных модулей позволяют осуществлять произвольное программное движение корпуса машины, что является основой для автоматического определения допустимых походок и ограничений на движение корпуса машины, связанных с исключением некоторых приводных модулей, и позволяет решать задачу двухкритериальной оптимизации нахождения компромисса между запасом статической устойчивости и количеством задействованных приводов.

Практическая реализация движения с использованием меньшего количества механизмов шагания представляет определённые сложности, связанные с необходимостью контролировать положение центра масс машины относительно опорного многоугольника. Например, при использовании трёх движителей (15 приводов) и нахождении центра тяжести машины в геометрическом центре корпуса для значительного диапазона углов поворота движителей обеспечить статическую устойчивость невозможно. Ограничения на относительное положение движителей должны учитываться при оптимизации структуры реконфигурируемого шагающего аппарата. Соответствующий частный критерий качества определялся как отношение запаса статической устойчивости к максимальному его значению при движении машины при отсутствии отключённых приводов. На рисунке 4.13 показаны зависимости показателей относительного запаса статической устойчивости  $H_1$ , определённого по потенциальной энергии, и количества отключённых приводов  $H_2$  от соотношения весовых коэффициентов этих показателей.

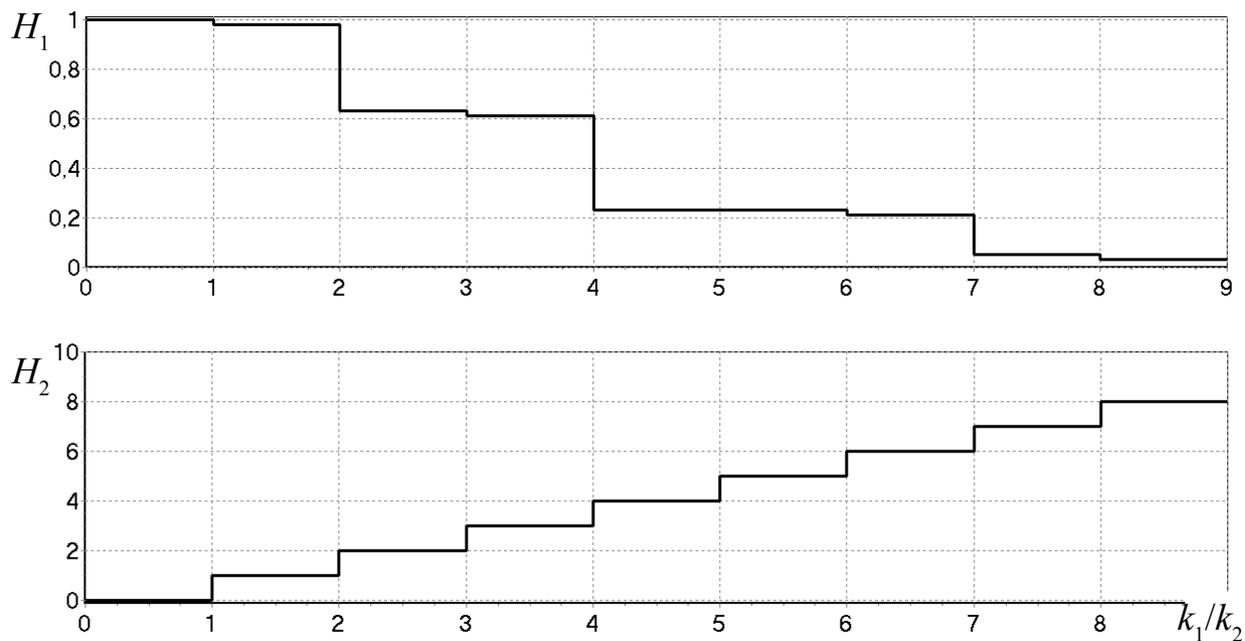


Рисунок 4.13 — Изменение показателей относительного запаса статической устойчивости  $H_1$  и количества отключённых приводов  $H_2$ .

#### 4.3.5. Влияние дополнительных внешних сил на статическую устойчивость шагающей машины

В работах [43, 147, 195] рассмотрены различные способы определения запаса статической устойчивости, однако все они основываются на учёте единственной активной внешней силы — силы тяжести. Запас статической устойчивости — это величина, характеризующая способность аппарата противостоять случайным внешним воздействиям без опрокидывания. Однако в ряде случаев шагающая машина испытывает не случайные внешние воздействия, которые могут быть учтены при оценке запаса статической устойчивости наравне с силой тяжести. Это могут быть силы взаимодействия с водой для подводного аппарата, силы инерции при работе аппарата на подвижной платформе и другие силы, которые могут быть заранее определены и учтены.

Контакт каждого механизма шагания с грунтом считается точечным, то есть, его взаимодействие с грунтом сводится к силе реакции опорной поверхности.

Твёрдое тело, получающееся если жёстко зафиксировать механизмы шагания относительно корпуса, называется замороженной конфигурацией машины.

Статически устойчивым движением называется такое движение машины при котором в каждый момент времени её замороженная конфигурация находится в статическом равновесии под действием внешних активных сил и реакций опорной поверхности.

Опорный многоугольник при рассмотрении пространственного движения машины представляет собой пространственную замкнутую ломаную линию, соединяющую опорные точки механизмов шагания, образующих в проекции на горизонтальную плоскость минимально выпуклую фигуру. Некоторые из опорных точек механизмов шагания могут попадать внутрь опорного многоугольника, и количество его вершин  $I$  меньше либо равно  $N$ , где  $N$  — количество ног, находящихся в опоре.

Потеря статической устойчивости может происходить в результате поворота аппарата вокруг одной из сторон опорного многоугольника.

Математическим критерием статического равновесия замороженной конфигурации является наличие отличных от нуля моментов активных сил относительно осей, совпадающих со сторонами пространственного опорного многоугольника и направленных «во внутрь» этого многоугольника.

Если выбрать направление обхода узлов опорного многоугольника по часовой стрелке при взгляде сверху, то условие статической устойчивости будет соблюдаться когда моменты активных сил относительно осей (сторон многоугольника) будут положительными для каждой стороны.

Развивая метод, изложенный в [147], предлагается оценивать запас статической устойчивости по минимальному значению механической энергии (работе возмущающих сил), необходимой, для того, чтобы опрокинуть аппарат.

Внешние активные силы и пары сил обозначаются через  $F_k$  и  $M_n$ , где  $k = 1..K$ ,  $n = 1..N$ ,  $K$  и  $N$  — количество активных сил и активных пар сил соответственно. Например, для подводного шагающего аппарата со шнорхелем (рисунок 4.13) можно выделить силы тяжести шагающего шасси  $G_1$  и шнорхеля  $G_2$ , выталкивающие силы  $F_{A,1}$  и  $F_{A,2}$ , силы и моменты сил взаимодействия с текущей водой  $F_{B,1}$ ,  $F_{B,2}$ ,  $M_{B,1}$  и  $M_{B,2}$ .

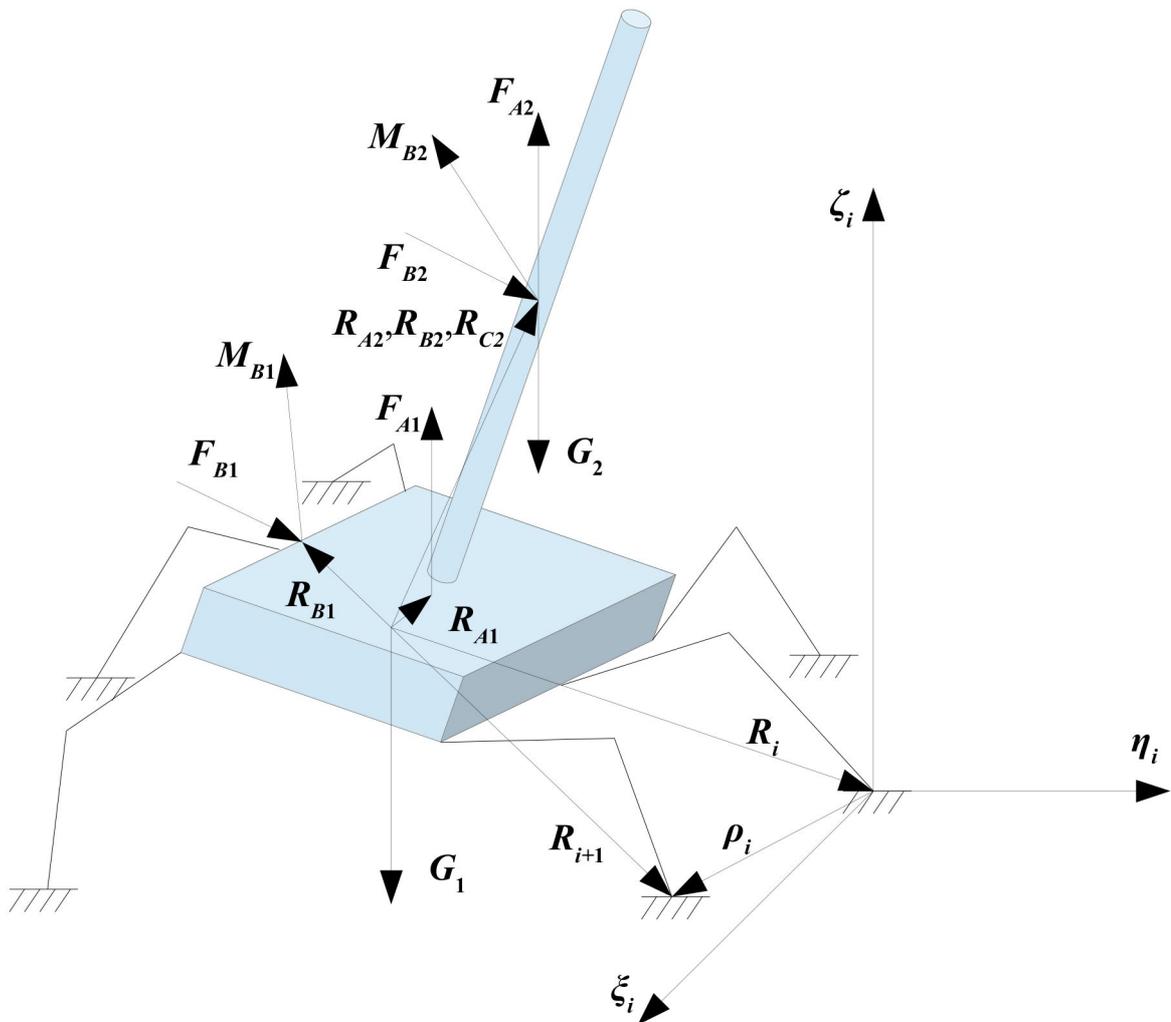


Рисунок 4.13 — Расчётная схема подводного шагающего аппарата

Вводится связанная с грунтом неподвижная система координат  $O\xi\eta\zeta$  так, чтобы ось  $\zeta$  была направлена вертикально вверх. Вводится подвижная система отсчёта  $C_1x_1y_1z_1$ , связанная с корпусом машины и имеющая начало в центре масс системы «корпус и шагающие движители». Ориентация осей подвижной системы отсчёта относительно неподвижных осей определяется корабельными углами. Матрица поворота из подвижной в неподвижную систему координат обозначается через  $A$ .

В замороженной конфигурации машины положения опорных точек механизмов шагания в подвижной системе отсчёта постоянны и их радиус-векторы обозначаются через  $R_i$ . Радиус-вектор точки приложения  $k$ -й активной силы обозначается через  $R_{F,k}$ .

Для удобства выкладок при определении запаса статической устойчивости относительно  $i$ -й грани опорного многоугольника вводится  $I$  неподвижных систем отсчёта  $O_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ , связанных с опорной поверхностью и получающихся из  $O\xi\eta\zeta$  путём параллельного переноса в соответствующую опорную точку (в  $i$ -ю опорную точку).

Полагая, что векторы активных сил и пар сил заданы в неподвижной системе отсчёта, для нахождения суммарного момента относительно  $i$ -й опорной точки определяются радиус-векторы точек приложения указанных сил относительно неподвижной системы отсчёта, начало которой совмещается с  $i$ -й опорной точкой.

$$\rho_{i,k} = A \times (-R_i + R_{F,k}) \quad (4.14)$$

Вводится также радиус-вектор, соответствующий грани опорного многоугольника «начинающейся» в  $i$ -й точке:

$$\rho_i = A \times \begin{cases} R_{i+1} - R_i, & \text{при } i < I \\ R_1 - R_i, & \text{при } i = I \end{cases} \quad (4.15)$$

где  $I$  — количество узлов опорного многоугольника, нумерация которых задаётся по порядку против часовой стрелки если смотреть сверху. Его единичный вектор обозначается через  $e_i$ , а компоненты этого единичного вектора через  $e_{i,\xi}, e_{i,\eta}, e_{i,\zeta}$ .

$$e_i = \frac{\rho_i}{\rho_i} \quad (4.16)$$

Суммарный векторный момент сил относительно  $i$ -й опорной точки определяется выражением:

$$M_i = \sum_{k=1}^K \rho_{i,k} \times F_k + \sum_{n=1}^N M_n \quad (4.17)$$

А его проекция на ось (осевой момент сил относительно оси) проведённую через  $i$  грань опорного многоугольника определяется выражением:

$$M_i = M_i \cdot e_i \quad (4.18)$$

Аппарат сохраняет статическую устойчивость если для всех  $M_i$  выполняется условие  $M_i < 0$ .

При повороте аппарата на угол  $\gamma$  относительно  $i$ -й грани опорного многоугольника радиус-векторы точек точек приложения активных сил преобразуются к виду:

$$\rho'_{i,k} = T_{i,\gamma} \times \rho_{i,k} \quad (4.19)$$

где  $T_{i,\gamma}$  — матрица поворота вокруг оси  $e_i$  на угол  $\gamma$ ,  $\rho'_{i,k}$  — радиус-вектор  $k$ -й точки после поворота.

Тогда осевой момент сил как функция от  $\gamma_i$  может быть записан в виде:

$$M'_i = M'_i(\gamma_i) = \left( \sum_{k=1}^K \rho'_{i,k} \times F_k + \sum_{n=1}^N M_n \right) \cdot e_i \quad (4.20)$$

Уравнение

$$M'_i(\gamma_i) = 0 \quad (4.21)$$

имеет два корня. Положительный корень соответствует повороту аппарата против часовой стрелки, то есть для его осуществления «противоположные механизмы шагания» должны оторваться от грунта. Отрицательный корень соответствует повороту по часовой стрелки и для его реализации механизмы шагания должны были бы заглубиться в грунт. Для задач определения статической устойчивости значение имеет первый из этих корней, далее обозначаемый через  $\gamma_{i,cr}$ .

Таким образом, минимальное значение механической энергии, необходимое для опрокидывания аппарата через  $i$ -ю грань опорного многоугольника, определяется интегралом:

$$E_i = \int_0^{\gamma_{i,cr}} M'_i(\gamma_i) d\gamma_i \quad (4.22)$$

А запас статической устойчивости  $E$  определяется как минимальное значение из всех  $E_i$ :

$$E = \min \{ E_i \}, i = 0..I \quad (4.23)$$

Записав отношение  $E$  к силе тяжести машины, можно получить запас устойчивости  $\Delta$  в более привычных единицах длины. А при делении также на некоторый характерный размер машины  $L$ , получается безразмерный запас статической устойчивости  $\delta$ :

$$\Delta = \frac{E}{G_1 + G_2} \quad (4.24)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{L} = \frac{E}{(G_1 + G_2) L} \quad (4.25)$$

### Управление положением корпуса относительно грунта

Отличительным свойством шагающих машин является потенциальная возможность управления положением корпуса относительно грунта, которая далее называется адаптацией. Это позволяет обеспечивать движение корпуса независимо от неровностей грунта. В частности, такая машина может сохранять горизонтальное положение корпуса (и вертикальное положение шнорхеля) при движении по наклонной плоскости.

В этом случае радиус-векторы опорных точек ног  $R_i$  должны соответствовать уравнениям:

$$(R_i - R_0) \cdot n = 0 \quad (4.26)$$

где  $n$  — вектор нормали к опорной плоскости в системе координат связанной с машиной  $R_0$  — радиус-вектор некоторой точки, относительно которой происходит адаптация, например это может быть точка, находящаяся на вертикали

проходящей через центр масс машины, ниже его на расстоянии равном той высоте, которую имел бы центр масс корпуса при движении по горизонтальной поверхности.

Вектор нормали к поверхности в неподвижной системе координат связанной с самой поверхностью может быть записан как матрица-столбец

$$\mathbf{n}_p = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (4.27)$$

А в подвижной системе координат, связанной с машиной, вектор нормали получается выражением:

$$\mathbf{n} = \mathbf{P} \times \mathbf{n}_p \quad (4.28)$$

где  $\mathbf{P}$  — матрица поворота из неподвижной в подвижную систему координат, зависящая от угла наклона опорной плоскости, угла между продольной осью корпуса машины и направлением наклона поверхности, углов дифферента и крена корпуса машины.

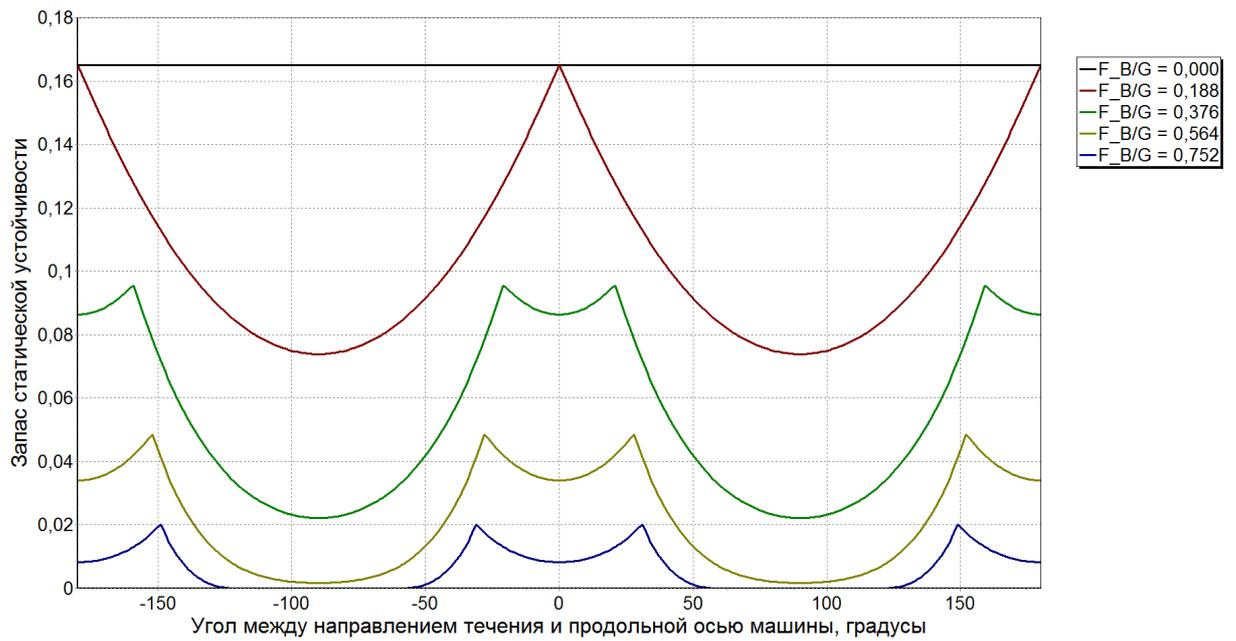


Рисунок 4.14 — Запас статической устойчивости для различных нагрузок для четырёхножной машины

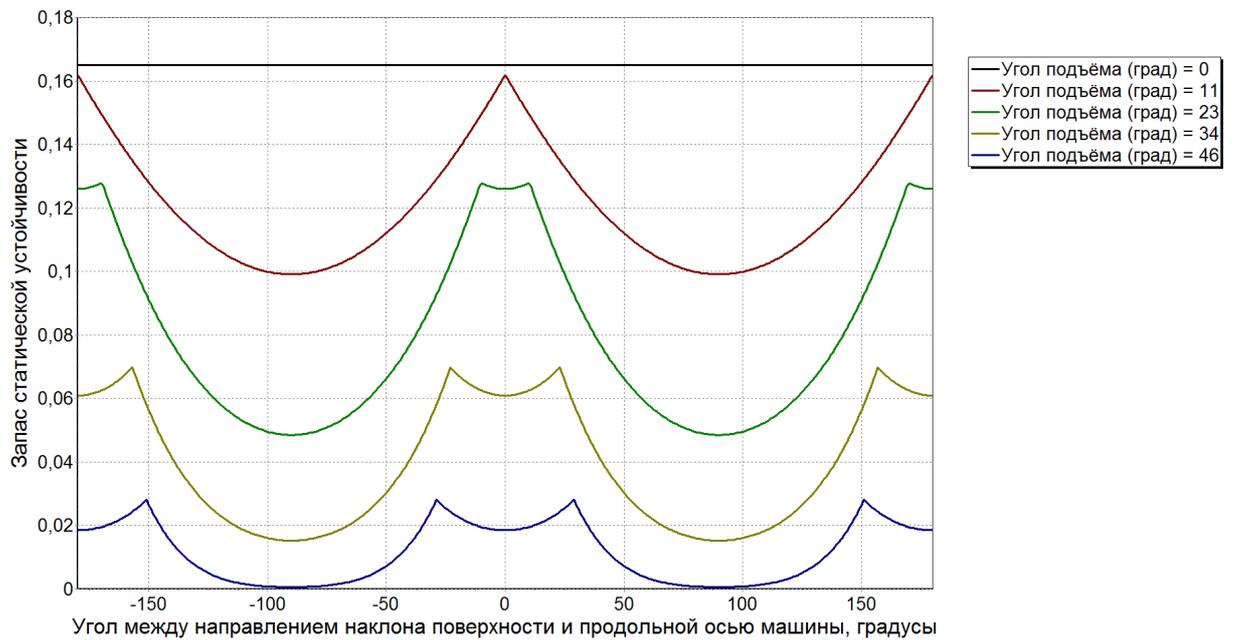


Рисунок 4.21 — Запас статической устойчивости для четырёхножной машины для различных углов наклона поверхности в зависимости от ориентации машины на наклонной поверхности без адаптации движителей к грунту

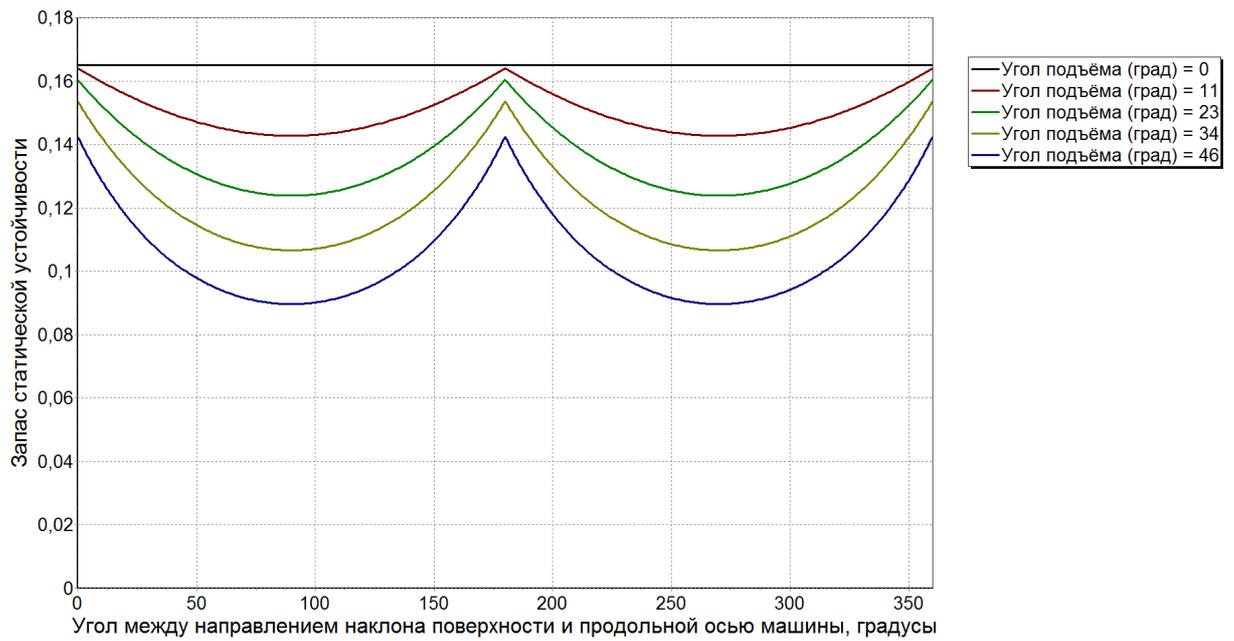


Рисунок 4.23 — Запас статической устойчивости для четырёхногой машины для различных углов наклона поверхности в зависимости от ориентации машины на наклонной поверхности с адаптацией движителей к грунту

## 5. Методы структурно-алгоритмической оптимизации шагающих машин

### 5.1. Оптимизация формы составной машины с шагающими опорами

При решении ряда транспортных задач широко используются автопоезда, представляющие собой соединение в единый комплекс нескольких транспортных средств, совместно выполняющих одну операцию [92, 126]. Известны исследования по совместному применению составных аппаратов и с шагающими двигателями [49, 53]. Составные шагающие машины согласно классификации, введённой в 1 главе (рисунок 1.26), относятся к классу машин с составным корпусом.

В отличие от машин с традиционными двигателями, более манёвренные шагающие аппараты могут быть соединены в структуры более сложных форм, реализующих более разнообразные движения. На рисунке 5.1 показаны примеры соединения машин в различные структурные схемы.

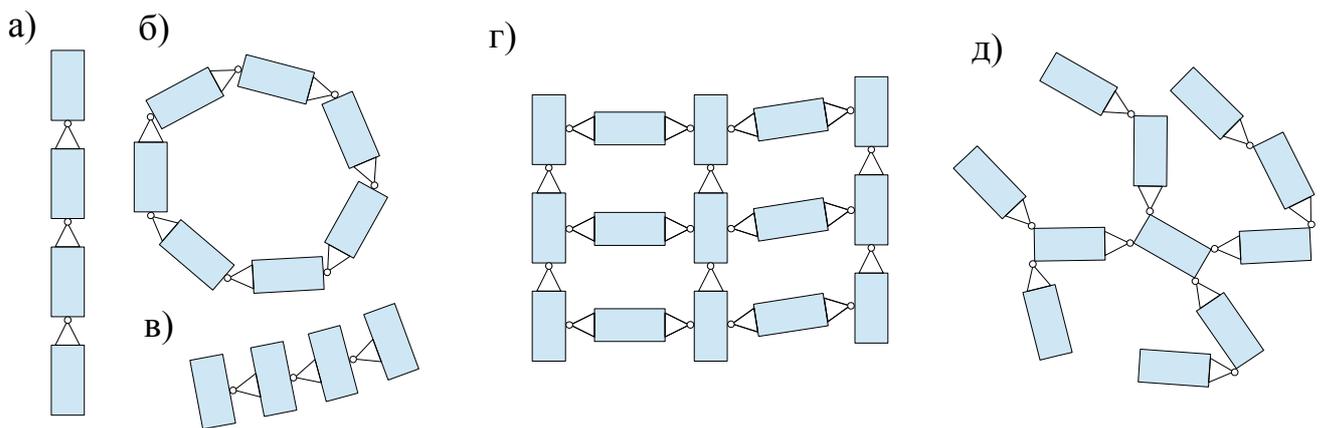


Рисунок 5.1 — примеры структурных схем составных машин. а) линейное последовательное соединение (поезд), б) кольцо, в) линейное параллельное соединение (линия), г) сеть, д) древо.

При задании матриц управления для составных машин следует различать случаи когда машина представляет собой замкнутую или разомкнутую кинематическую цепь. Для замкнутых кинематических цепей дополнительно к матрице управления должны быть сформированы дополнительные уравнения связей. Для разомкнутых кинематических цепей матрица управления формируется аналогично примерам (2.108) или (3.70). Так, например, для простейшего случая линейного шарнирного соединения  $N$  модулей матричное уравнение управления, задающее движение корпусов модулей в плоскости опорной поверхности, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1x}(t, \mathbf{q}) \\ B_{1y}(t, \mathbf{q}) \\ B_{1r}(t, \mathbf{q}) \\ B_{2r}(t, \mathbf{q}) \\ \dots \\ B_{Nr}(t, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

здесь модуль, имеющий индекс 1 считается «главным», и для него задаётся не только угловая скорость  $r_i$  в плоскости опорной поверхности, но и квазискорости центра модуля  $V_{1x}, V_{1y}$ .

Примером составных машин являются дождевальные машины кругового действия (рисунок 1.10) [49]. Эти машины представляют собой несколько однотипных модулей, совместно несущих ферменную многосекционную конструкцию, на которой размещены поливные форсунки, водопроводные трубы и шланги. В центр поля подводится вода и монтируется насосная установка, к которой подключается первая секция дождевальной машины, к которой в свою очередь подключается вторая секция и так далее. При движении ферма дождевальной машины описывает круг, в центре которого находится насосная установка (рисунок 5.1).

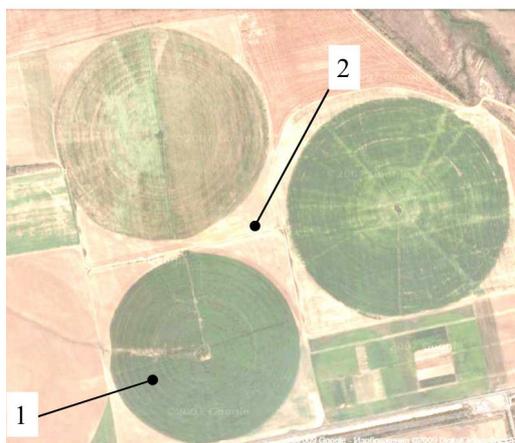


Рисунок 5.1 — Спутниковая фотография сельскохозяйственных угодий, обрабатываемых круговыми дождевальными машинами, 1 — обрабатываемое поле, 2 — необрабатываемый участок;

Одним из основных недостатков дождевальных машин кругового действия является наличие значительных участков необрабатываемой земли. Применение шагающих приводов в опорах дождевальных машин потенциально позволяет менять форму фермы дождевальной машины во время движения таким образом, чтобы обрабатываемый участок поля был не круглым, что приведёт к увеличению коэффициента использования земли.

Максимальное расстояние от центра до границ обрабатываемого участка равно длине фермы. При относительном движении шагающих опор относительно друг друга форма фермы искривляется и расстояние от центра до границ участка уменьшается (рисунок 5.2). Дуга  $AA'$  — траектория движения конца прямолинейной фермы,  $AB$  — траектория движения конца фермы при плавном её искривлении,  $BB'$  — траектория движения конца искривлённой фермы.

При движении шагающих модулей по полю приходится преодолевать силы сопротивления движению со стороны грунта. Силы сопротивления движению принимаются одинаковыми для всех шагающих опор в связи с одинаковой нагрузкой на каждую опору и однородностью и изотропностью почвенного покрова. Изменением усилий в приводах шагающих движителей в пределах шага

пренебрегается. Вращение фермы изменённой формы вокруг центра  $O$  считается равномерным.

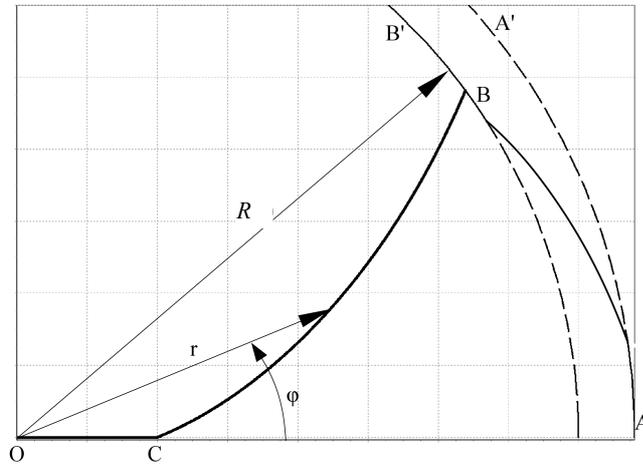


Рисунок 5.2 — Схема изменения формы обрабатываемого поля

Пренебрегая размерами отдельных секций машины, полагаем, что форма составной машины может изменяться плавно. В этом случае одним из частных критериев качества принимается минимум механической работы, необходимой для преодоления сил сопротивления.

$$H_1 = \int_{R_0}^R r \sqrt{r^2 \varphi_r^2 + 1} dr \quad (5.2)$$

где  $R_0$  — длина начального прямолинейного участка фермы;  $R$  — расстояние от центра до границы участка;  $r$ ;  $\varphi$  — полярные координаты кривой;  $\varphi_r$  — производная  $\varphi$  по  $r$ .

Другим частным критерием качества считается показатель, определяющий кривизну фермы:

$$H_2 = \int_{R_0}^R \varphi_r^2 dr . \quad (5.3)$$

На форму составной машины накладывается также изопериметрическое условие, означающее, что длина машины должна оставаться постоянной:

$$\int_{R_0}^R \sqrt{r^2 \varphi_r^2 + 1} dr = L - R_0 \quad (5.4)$$

Тогда подынтегральная функция качества с учётом условия (5.4) приобретает вид:

$$\Phi = k_1 \sqrt{\varphi_r^2 r^2 + 1} r + k_2 \varphi_r^2 + \mu \sqrt{\varphi_r^2 r^2 + 1} \quad (5.5)$$

где  $k_1, k_2$  — весовые коэффициенты критериев качества,  $\mu$  — неопределённый множитель Лагранжа.

При решении вариационной задачи, уравнение Эйлера имеет первый интеграл, равный константе, что даёт алгебраическое уравнение четвёртой степени относительно производной первого порядка  $\varphi_r$ :

$$4 k_2^2 r^2 \varphi_r^4 - 4 c k_2 r^2 \varphi_r^3 + (4 k_2^2 + c^2 r^2 - r^4 (k_1 r + \mu)^2) \varphi_r^2 - 4 c k_2 \varphi_r + c^2 = 0 \quad (5.6)$$

где  $c$  — постоянная интегрирования, определяемая начальным значением кривизны фермы.

Известным аналитическим методом решения алгебраических уравнений четвёртого порядка является метод Феррари [143]. После нахождения корней алгебраического уравнения (физический смысл решаемой задачи позволяет

предполагать, что в практических расчётах будет реализовываться случай двух комплексных корней и двух действительных, отличающихся знаком), решение должно быть проинтегрировано, а полученный закон изменения  $\varphi_r$  подставлен в (5.4) для нахождения множителя  $\mu$ .

В частном случае, полагая  $k_2 = 0$  и  $k_1 = 1$ , уравнение Эйлера даёт выражение:

$$\varphi_r = \frac{c}{r\sqrt{r^2(r+\mu)^2 - c^2}} \quad (5.7)$$

Примеры интегрирования уравнения (5.7) для различных начальных условий показаны на рисунке 5.3.

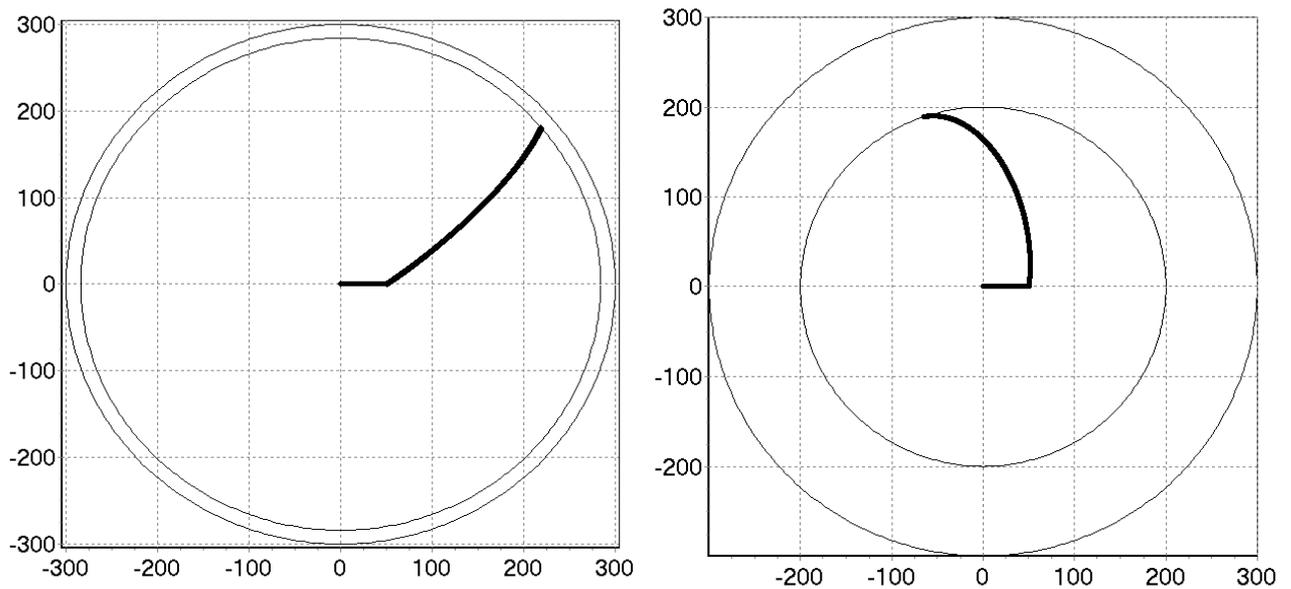


Рисунок 5.3 — Примеры формы составной машины длиной 300 м для различных начальных условий

## 5.2. Оптимизация структуры движителей и алгоритмов управления шагающей машины при маневрировании и преодолении препятствий

К задачам структурно-алгоритмической оптимизации относится применение разнотипных движителей в одной шагающей машине и построение алгоритмов управления ими. Примерами аппаратов с разнотипными движителями являются шагающая машина «Восьминог М», колёсно-шагающие машины ВНИИТМ (СССР, РФ), ATHLETE (США), Kaiser (Германия) и многие другие.

Шагающая машина «Восьминог М» (рисунок 5.4) отличается от первоначального варианта «Восьминог» наличием дополнительных подъёмно-поворотных движителей. Дополнительные движители увеличивают сложность конструкции машины и системы управления, но значительно увеличивают её проходимость и снижают энергозатраты при выполнении некоторых манёвров.

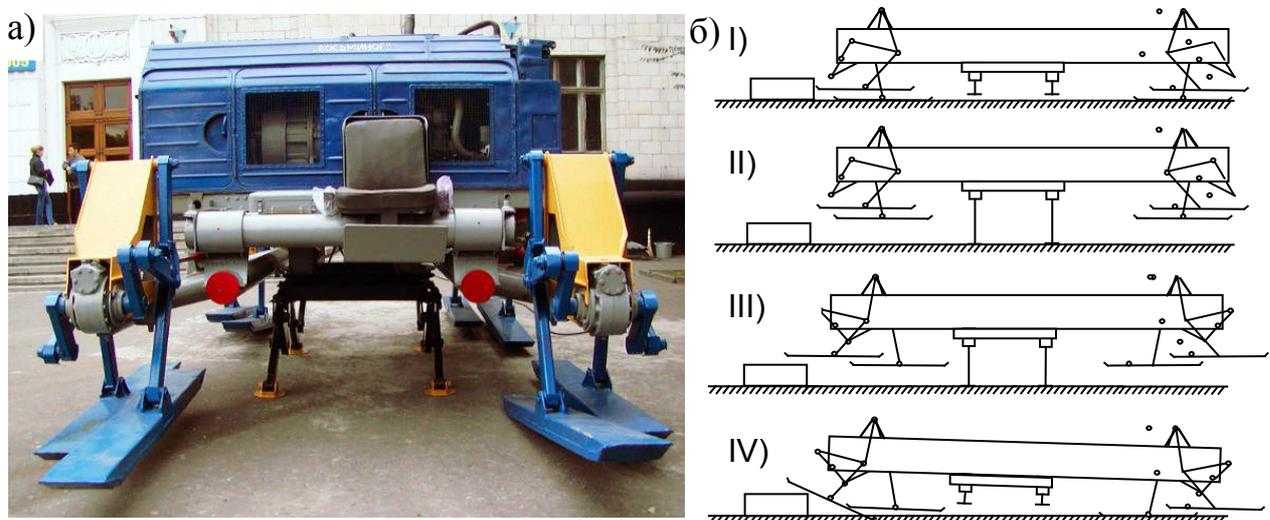


Рисунок 5.4 — Шагающая машина «Восьминог М» с подъёмно-поворотными движителями: а) внешний вид машины, б) схема преодоления препятствия

При приближении шагающего аппарата к препятствию оператор-водитель машины (или автоматическая система управления) определяет тип препятствия, возможность его преодоления и принимает решение о продолжении движения с

предстоящим преодолением препятствия или о прекращении движения. На рисунках 5.5, 5.6, 5.7 показаны схемы преодоления типовых препятствий ступени и траншеи, а также кадры экспериментов по преодолению препятствия.

Алгоритм преодоления ступени заключается в выполнении следующих действий.

1) Для того чтобы преодолеть ступень максимально возможной высоты необходимо, чтобы взаимодействие с грунтом очередного механизма шагания начиналось непосредственно перед препятствием. В общем случае такая ситуация не реализуется при курсовом движении, и стопа 1 механизма шагания занимает положение на грунте на некотором расстоянии от препятствия (рис. 5.5 а).

2) Стопа 2 смежного механизма шагания во время переноса упирается в ступень и привод курсового движения отключается (рис. 5.5 б).

3) Происходит подъём машины подъёмными движителями до отрыва стопы 1 от грунта (рис. 5.5 в).

4) Включается в обратную сторону привод курсового движения до соприкосновения стопы 1 с препятствием (рис. 5.5 г).

5) Привод курсового движения отключается и машина опускается на грунт (рис. 5.5 д).

6) Включается привод курсового движения до контакта стопы 2 с препятствием (рис. 5.5 е)

7) Включается привод подъёмных движителей до достижения стопой 2 в вертикальном направлении положения над препятствием (рис. 5.5 ж).

8) Включается привод курсового движения, стопа 2 занимает положение над препятствием (рис. 5.5 з), после чего машина опускается.

Дальнейшее движение машины осуществляется в маршевом режиме. Задние механизмы шагания преодолевают ступень аналогично.

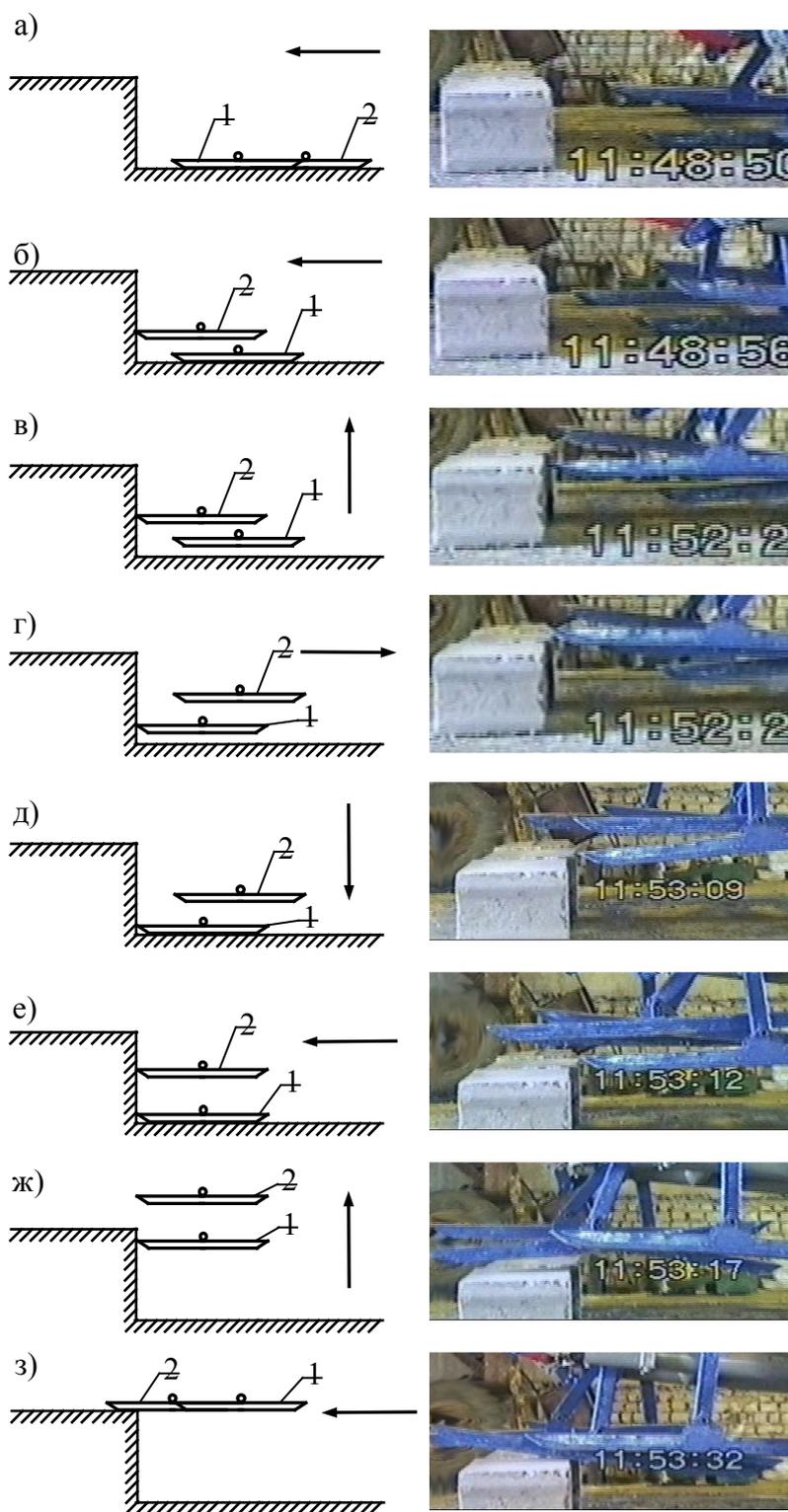


Рисунок 5.5 — Алгоритм преодоления ступени

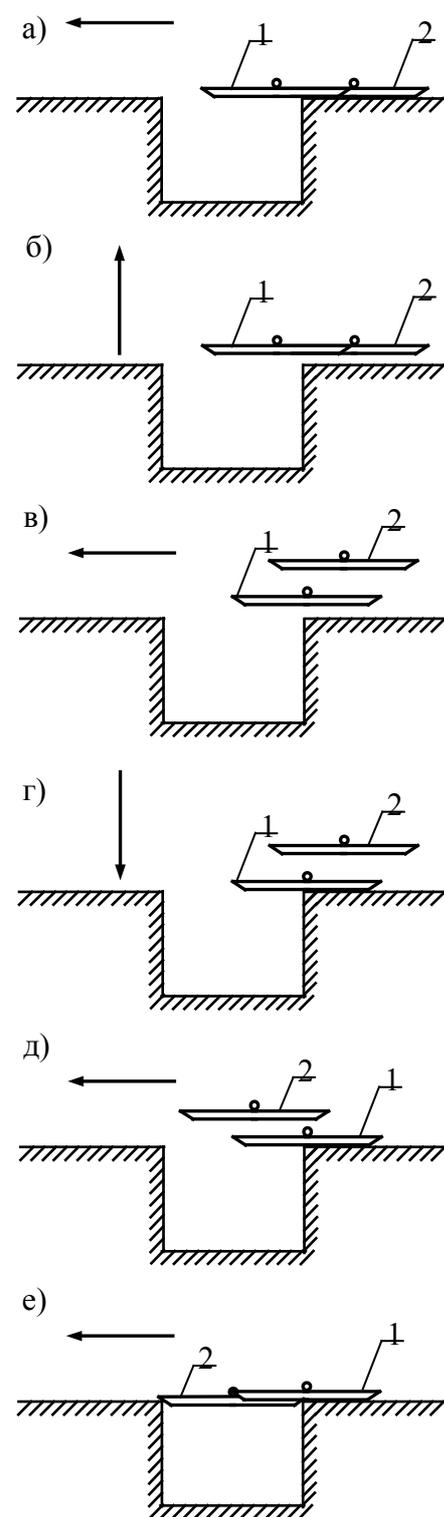


Рисунок 5.6 — Эксперимент по преодолению препятствия

Рисунок 5.7 — Алгоритм преодоления рва

Алгоритм преодоления траншеи.

1) Для того, чтобы преодолеть траншею максимальной ширины необходимо чтобы взаимодействие с грунтом очередного механизма шагания происходило таким образом, чтобы менее половины длины стопы располагалось над траншеей. Однако в общем случае стопа механизма шагания может опуститься на грунт так, что более половины длины стопы оказывается над траншеей (рис. 5.7 а).

2) Во избежание потери машиной устойчивости из-за наступания в траншею привод курсового движения отключается, вместо этого включается привод подъёмных движителей (рис. 5.7 б).

3) После вывешивания машины на подъёмных движителях привод курсового движения включается вновь (рис. 5.7 в) до тех пор, пока центр стопы не окажется над краем траншеи.

4) Машина опускается на стопы цикловых движителей (рис. 5.7 г) за счёт работы подъёмных движителей и продолжает курсовое движение (рис. 5.7 д). Так как длина стопы в машине «Восьминог» примерно равна длине шага, то опускаясь на грунт стопа очередного механизма шагания теоретически полностью перекрывает траншею (рис. 5.7 е). На практике с учётом реальных свойств грунта, ширина преодолеваемой траншеи меньше.

Схема поворота с использованием подъёмно-поворотных движителей показана на рисунке 5.8.а. На рисунке 5.8.б показаны энергозатраты на поворот для различных случаев.

При преодолении препятствий типа выступа противоречие возникает между высотой преодолеваемого препятствия  $H_2$  (чем больше, тем лучше) и высотой подъёма машины на подъёмных движителях  $H_1$  (чем меньше, тем лучше; высота подъёма равная нулю соответствует отсутствию подъёмных движителей). Зависимость этих показателей от соотношения их весовых коэффициентов показана на рисунке 5.9.

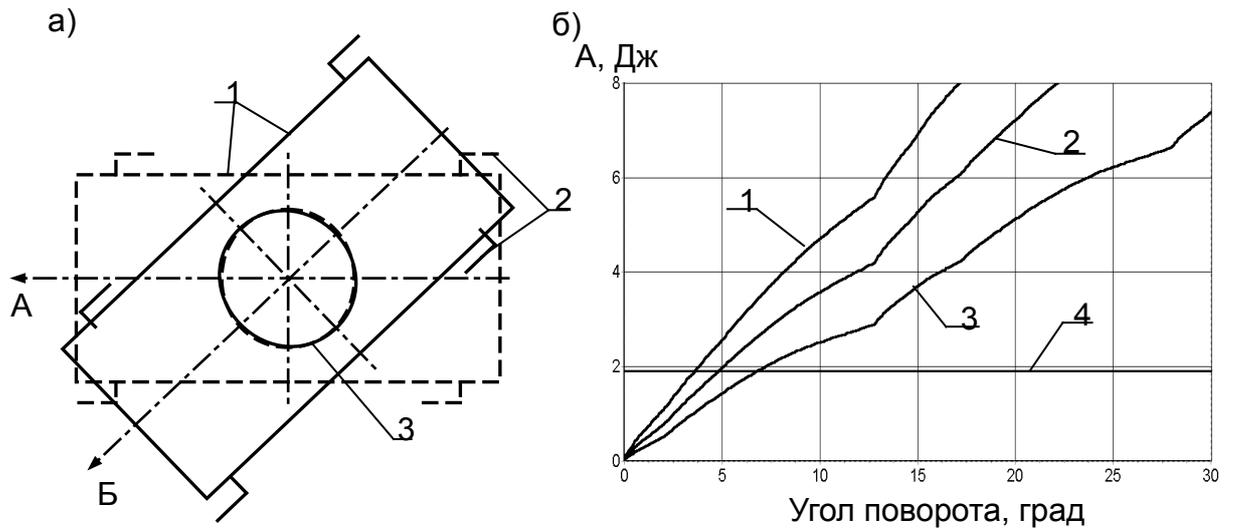


Рисунок 5.8 — Поворот шагающей машины «Восьминог М»

а) 1 — рама шагающей машины, 2 — шагающие движители, 3 — поворотный круг; пунктир — положение машины перед поворотом, сплошная линия — положение машины после поворота, стрелки — направление движения перед (А) и после (Б) поворота; б) Энергозатраты на поворот. 1, 2, 3 — поворот реализуемый из-за разности скоростей по бортам машины при коэффициентах сцепления 0,8, 0,6, 0,4 соответственно; 4 — поворот реализуемый с помощью дополнительных механизмов подъёма и поворота

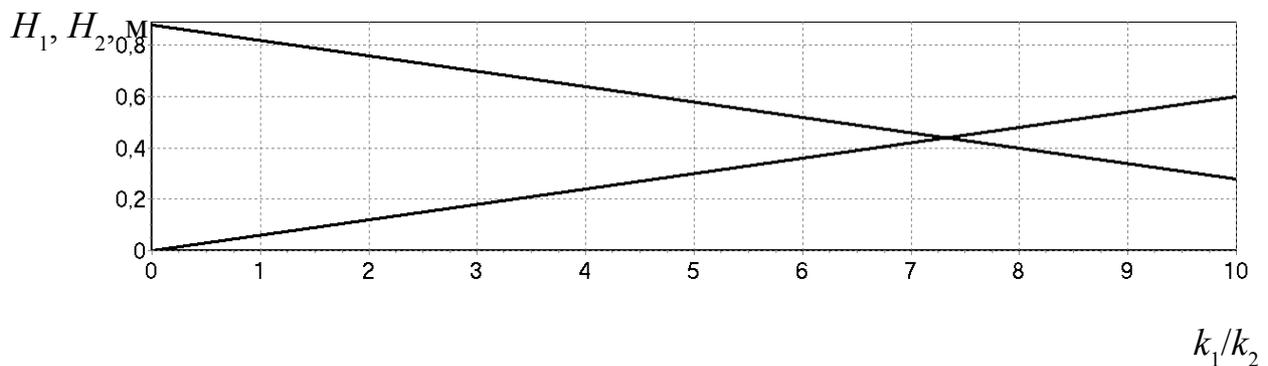


Рисунок 5.9 — Показатели высоты преодолеваемого препятствия  $H_2$  и подъёма машины  $H_1$  в зависимости от соотношения весовых коэффициентов

### 5.3. Курсовая устойчивость шагающей машины с цикловыми движителями

Одной из актуальных проблем при использовании в шагающих машинах цикловых движителей является минимизация курсовой неустойчивости движения машины, вызванной неравномерностью горизонтальной скорости стоп шагающих движителей. Так, для четырёхзвенного механизма шагания, использованного в шагающей машине «Восьминог», отношение максимальной скорости к минимальной при постоянной угловой скорости двигателя достигает трёх единиц (график изменения скорости показан на рисунке 2.7 г) [135, 136, 272].

В результате манёвров машины появляется разность фаз между движителями левого и правого борта. Один из бортов (имеющий большую скорость) «забегает» вперёд, поворачивая машину. Затем, скорость этого борта уменьшается, а другого — возрастает, но машина не возвращается на прежний курс. Постепенно угол поворота машины увеличивается и машина существенно отклоняется от курса (рисунки 5.10, 5.11, кривые 1).

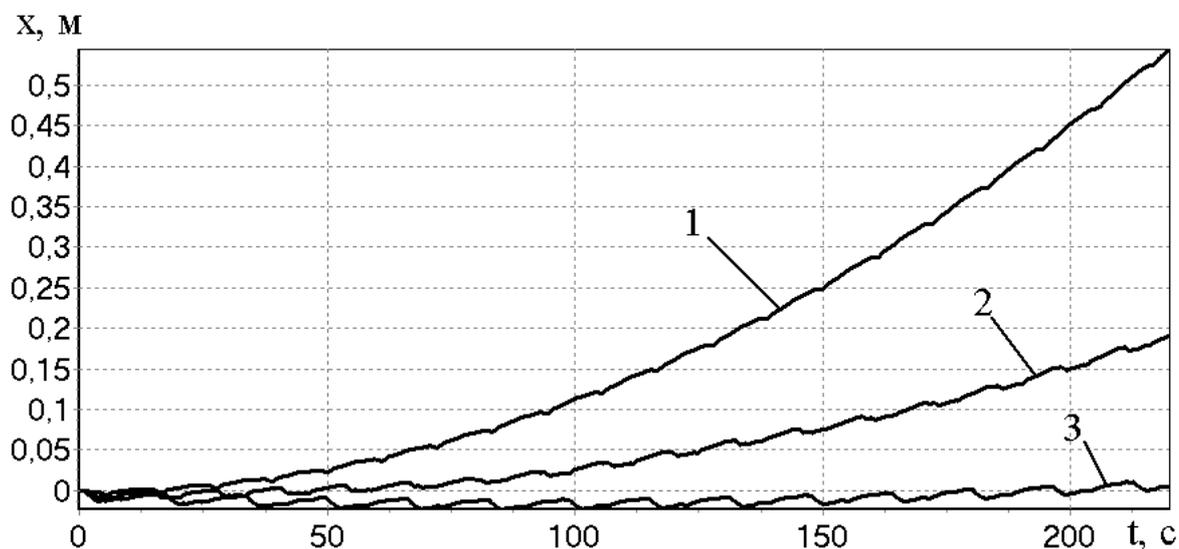


Рисунок 5.10 — Поперечный увод центра машины

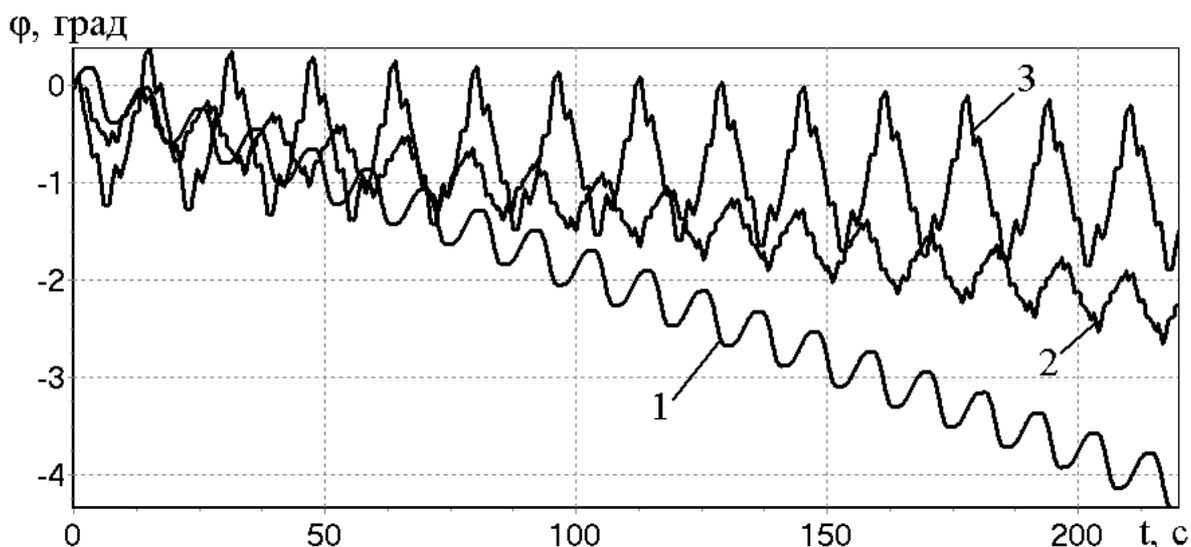


Рисунок 5.11 — Угловой увод корпуса машины

Методы управления, рассмотренные в параграфах 3.1.2 и 4.2, при уменьшении неравномерности горизонтальной скорости будут способствовать и уменьшению курсовой неустойчивости. Однако повысить показатели устойчивости движения машины, возможно кратковременными отключениями приводного двигателя забегающего борта [145], выравнивая таким образом их средние скорости на заданном интервале времени  $\Delta t$ . Разработанный метод коррекции курсовой неустойчивости по сути представляет собой разомкнутую систему релейного управления, и обладает всеми преимуществами таких систем. Практическая реализация описанной системы управления требует простой элементной базы, а параметры задающего воздействия, которые должны также зависеть от внешних условий уточняются при проведении испытаний.

Из условия равенства расстояний пройденных опорными точками движителей левого и правого бортов в относительном движении на заданном интервале времени  $\Delta t$  отключать двигатель забегающего борта необходимо на время равное

$$t'_k = \Delta t \frac{V_{1m}}{V_{2m}}, \quad (5.8)$$

где  $V_{1m}$ ,  $V_{2m}$  — средние скорости опорных точек шагающих движителей левого и правого бортов, определяемые из теоретико-механической модели.

На рисунках 5.10 и 5.11 кривые 2 иллюстрируют улучшение показателей курсовой устойчивости по сравнению с исходными кривыми 1. Однако такая коррекция не достаточна для устранения курсового увода. На реальной машине неустойчивость будет проявляться ещё сильнее. Поэтому вводится поправочный коэффициент  $k$ , и время отключения привода забегающего борта определяется выражением

$$t_k = k \Delta t \frac{V_{1m}}{V_{2m}} . \quad (5.9)$$

Для примера на рисунках 5.10 и 5.11 кривые 3 приведены для случая  $k = 1,5$ . Видно, что показатель поперечного увода машины уменьшился в 25 раз, по сравнению с первоначальным значением, а показатель углового увода уменьшился примерно в 2 раза. Одновременно с этим периодическое выключение одного из бортовых двигателей приводит к ухудшению (уменьшению) показателя средней скорости машины, ухудшению (увеличению) ускорений корпуса, а также негативно сказывается на энергозатратах.

Таким образом, подбирая значение коэффициента  $k$  следует учитывать не только критерии курсовой устойчивости, но и такие показатели качества как средняя скорость, комфортабельной, энергетическая эффективность.

#### **5.4. Управление реконфигурируемым цикловым движителем**

Рассматривается цикловой шагающий движитель, основанный на четырёхзвенных механизмах шагания (рисунок 5.12.а) с управляемой длиной коромысла [164] (рисунок 5.12.б).

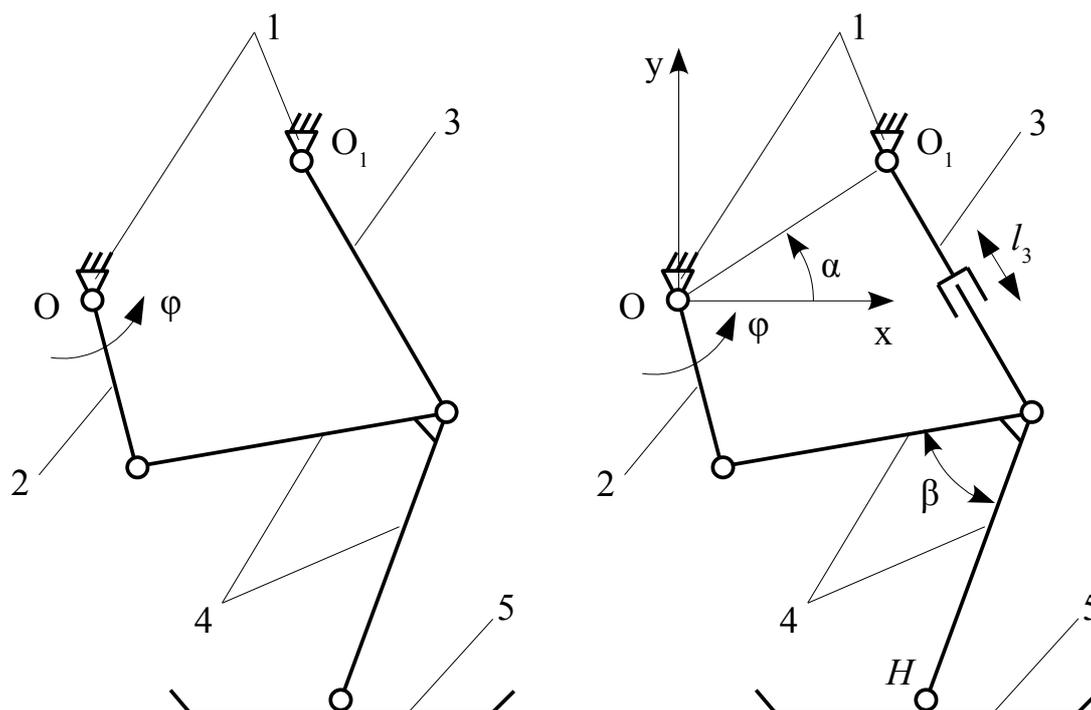


Рисунок 5.12 — Механизмы шагания: а) четырёхзвенный механизм, б) четырёхзвенный механизм с изменяемой длиной коромысла. 1 — опора (корпус машины), 2 — кривошип, 3 — коромысло, 4 — шатун, 5 — стопа

Такой движитель может работать в двух режимах. В одном режиме дополнительная степень свободы в коромысле реализуется и при надлежащем управлении позволяет эффективно решать проблемы проходимости, энергетической эффективности и комфортабельности. В другом режиме длина коромысла фиксируется, и движитель работает с одной управляемой степенью свободы, аналогично исходному механизму (рисунок 5.12.а). Система управления такого движителя усложняется по сравнению с исходным цикловым движителем, но остаётся существенно проще, чем системы управления многостепенными шагающими движителями.

Вводится система отсчёта  $Oxy$ , связанная с корпусом машины (рисунок 5.12.б). Через  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $l_{42}$ ,  $l_{45}$  обозначаются соответствующие длины звеньев механизма. Через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначаются соответственно угол между осью  $x$  и

направлением на точку  $O_1$  и угол между частями 4 звена. Через  $\varphi$  обозначается угол поворота кривошипа, измеряемый от положительного направления оси  $x$ . Механизм имеет две управляемые степени свободы, в качестве независимых обобщённых координат выбираются угол  $\varphi$  и длина  $l_3$ .

Решение геометрической задачи позволяет записать любые координаты механизма, например координаты опорной точки  $H$ , как функции независимых обобщённых координат:

$$\begin{aligned} x_H &= x_H(\varphi, l_3) \\ y_H &= y_H(\varphi, l_3) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Основной характеристикой циклового шагающего движителя является вид траектории опорной точки в относительном движении относительно корпуса машины. При значениях геометрических параметров, соответствующих размерам движителей шагающей машины «Восьминог», и фиксированном значении  $l_3$  ( $l_1=846$  мм,  $l_2=268$  мм,  $l_3=620$  мм,  $l_{42}=620$  мм,  $l_{45}=620$  мм,  $\alpha=54^\circ$ ,  $\beta=71^\circ$ ), траектория опорной точки имеет вид, показанный на рисунке 5.13.

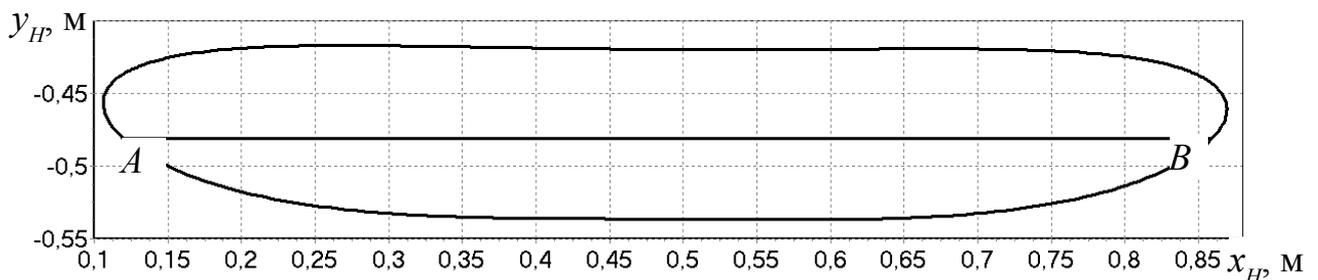


Рисунок 5.13 — Траектория опорной точки в относительном движении относительно корпуса машины. Горизонтальная линия  $AB$  — уровень смены ног.

Разница между уровнем смены ног и нижней точкой траектории определяет вертикальные перемещения корпуса машины на каждом шаге. Для указанных

размеров механизма вертикальные перемещения составляют 56 мм и требуют значительных энергозатрат. В отсутствие управления длиной коромысла и при постоянной угловой скорости вращения кривошипа горизонтальная скорость опорной точки на нижнем опорном участке траектории (и, соответственно, корпуса машины) изменяется за цикл примерно в три раза.

Варьируя длину коромысла в относительно небольшом диапазоне ( $\pm 40$  мм от базового значения  $l_3=620$  мм) можно получить сдвиг траектории опорной точки в вертикальном направлении примерно  $\pm 50$  мм от первоначальной траектории. Область доступных положений показана на рисунке 5.14.

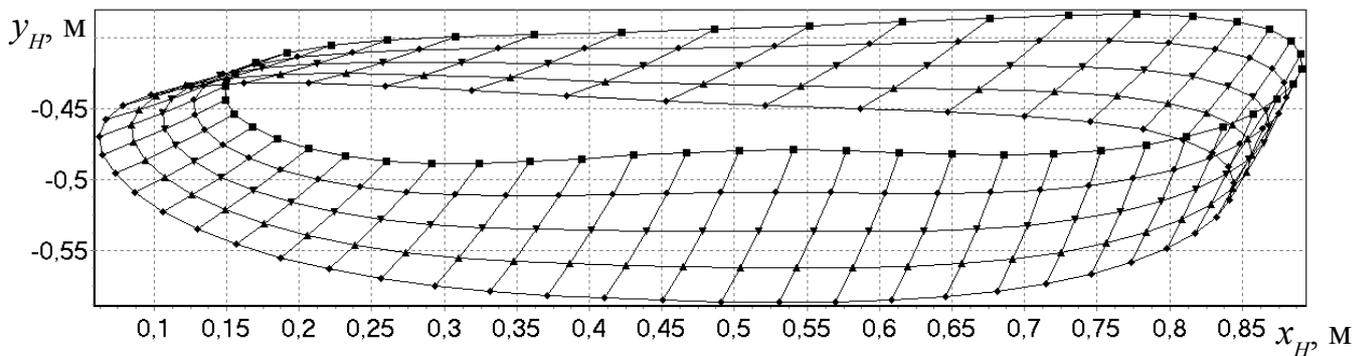


Рисунок 5.14 — Область возможных положений опорной точки механизма при управлении двумя приводами

Для устранения недостатков движителя, связанных с вертикальными перемещениями корпуса машины и неравномерностью горизонтальной скорости, строятся законы управления ведущими звеньями. В пределах опорной фазы длина коромысла изменяется относительно базового размера так, что вертикальная координата опорной точки остаётся постоянной и равной уровню переступания. Угловая скорость кривошипа остаётся постоянной в течение всего цикла.

Таким образом, управление сводится к получению закона изменения длины коромысла как функции от угла поворота кривошипа. Синтез этого закона осуществляется в результате решения обратной задачи кинематики.

Изменение фазы начала опорного участка влияет на неравномерность горизонтальной скорости. Определяя неравномерность горизонтальной скорости на опорном участке как отношение разности максимального  $v_{max}$  и минимального  $v_{min}$  значения к среднему  $v_{med}$  значению:

$$\eta = \frac{v_{max} - v_{min}}{v_{med}} \quad (5.11)$$

можно получить зависимость неравномерности от начальной фазы (рисунок 5.15) и выбрать оптимальную фазу.

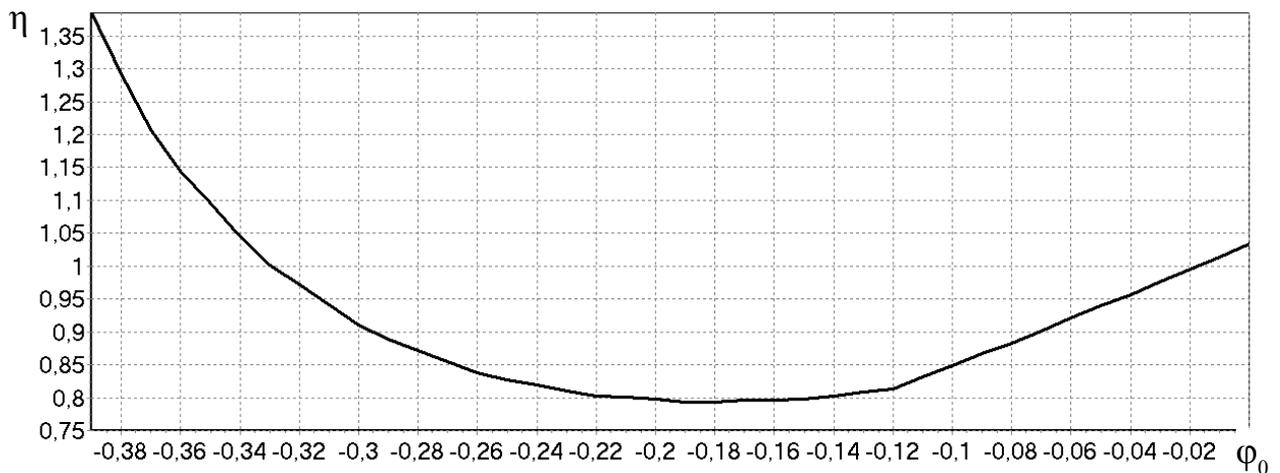


Рисунок 5.15 — Неравномерность горизонтальной скорости в зависимости от сдвига начальной фазы опорного участка траектории.

Один из возможных законов управления, соответствующий сдвигу начальной фазы на  $-0,18$  рад, показан на рисунке 5.16. Траектория опорной точки в относительном движении, скорости опорной точки показаны на рисунках 5.17 и 5.18.

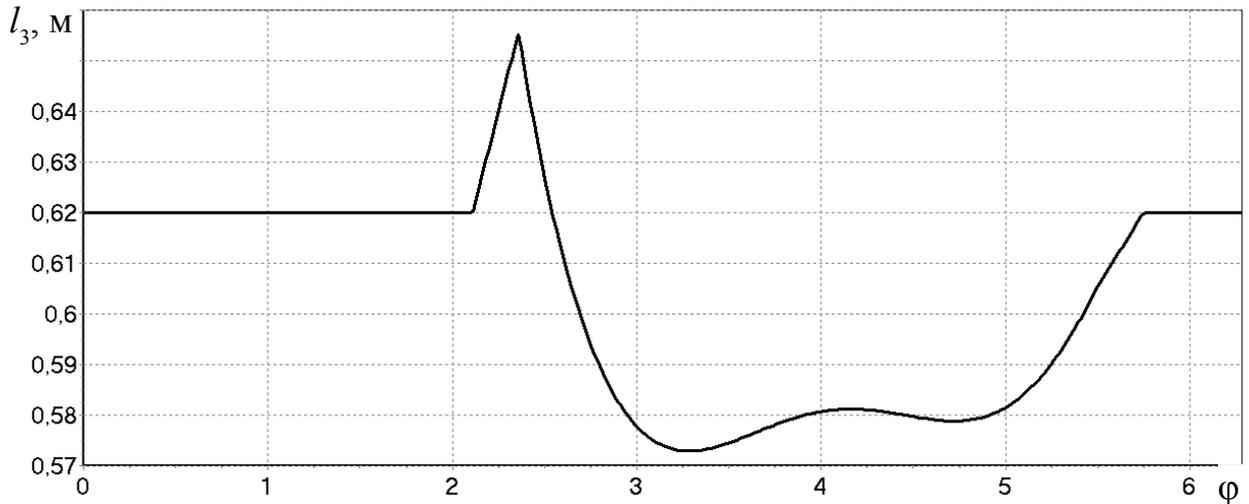


Рисунок 5.16 — Закон управления длиной коромысла

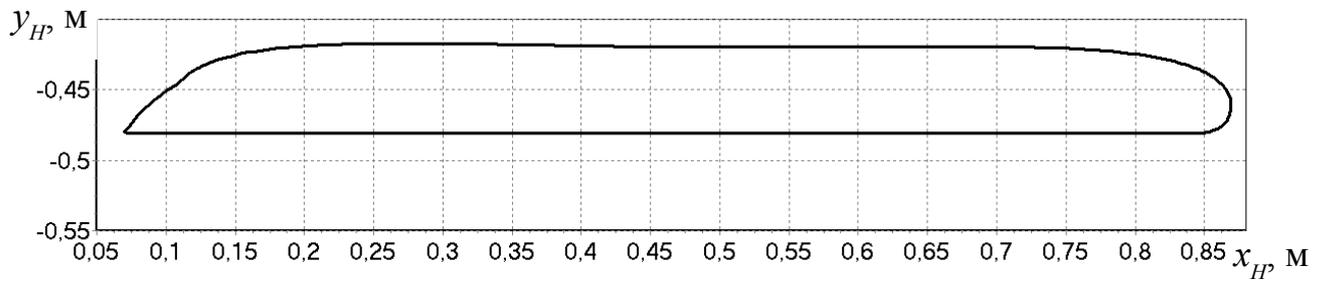


Рисунок 5.17 — Траектория опорной точки

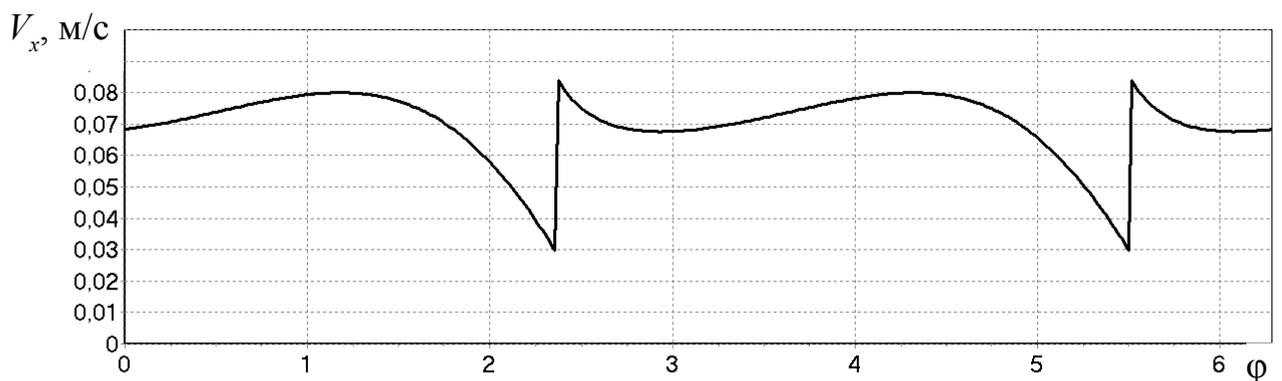


Рисунок 5.18 — Горизонтальная скорость стопы в относительном движении в опорной фазе, соответствующая закону управления коромыслом, показанному на рисунке 5.16.

Динамические расчёты показывают, что не смотря на многократное уменьшение таких показателей как вертикальные перемещения корпуса машины и

неравномерность скорости, использование механизмов с двумя степенями свободы не даёт выигрыша в энергетических показателях.

Для иллюстрации этого факта рассматривается модельная задача управления телескопической ногой, состоящей из двух тел (поворотного и опорного звеньев), имеющей две степени свободы и осуществляющей квазистатический режим движения (рисунок 5.19). То есть, пренебрегая динамическими эффектами, считаем, что на опорную точку действуют постоянные вертикальная  $G$  и горизонтальная  $Q$  нагрузки. Со стороны опорного звена действует управляющий момент  $M$ , а в поступательной паре — управляющая сила  $F$ , которые обеспечивают программное движение механизма. Внутренними силами трения пренебрегаем.

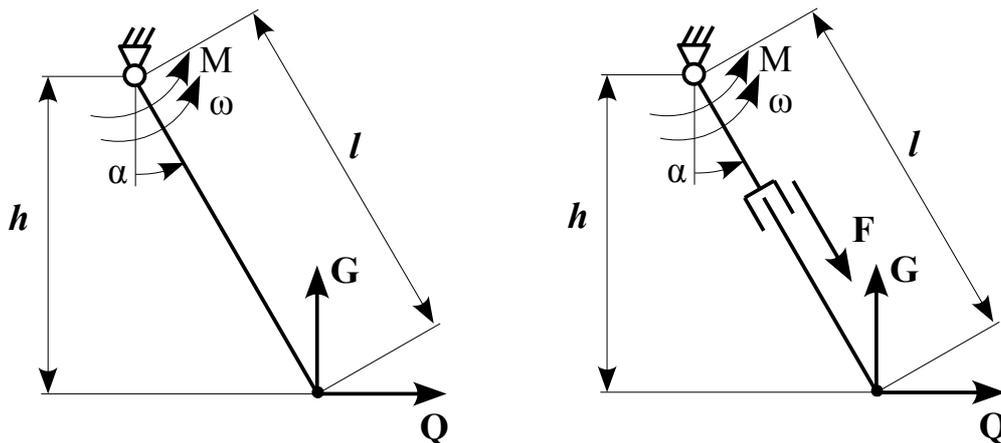


Рисунок 5.19 — Схема телескопической ноги: а) поступательная пара зафиксирована, б) поступательная пара работает. Все силы, момент, угол и угловая скорость показаны в положительном направлении.

Рассматривается два программных движения:

- 1) поступательная пара зафиксирована, опорная точка движется по окружности относительно опорного звена;
- 2) перемещение в поступательной паре согласуется с поворотом в шарнире так, чтобы опорная точка двигалась по горизонтальной прямой.

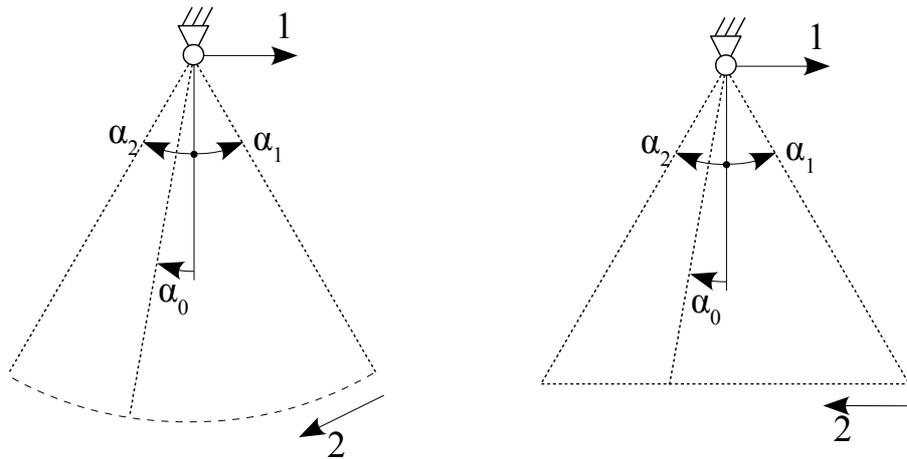


Рисунок 5.20 — Схемы движения. Стрелка 1 — направление движения машины, стрелка 2 — направление движения стопы относительно машины.

Граничные условия для первого и второго случаев одинаковы: пределы изменения угла  $\alpha$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ), длина ноги  $l(\alpha_1), l(\alpha_2)$ .

Затраты энергии на движение с учётом пренебрежения силами трения могут быть представлены в виде суммы «полезной» работы (работы сил  $M$  и  $F$ ) и тепловых потерь в соответствующих двигателях:

$$E = A^M + A^F + E_l^M + E_l^F \quad (5.12)$$

Задаются пределы угла поворота  $\alpha_1 = -\alpha_2$ , высота  $h$ , угловая скорость  $\omega$ , усилия  $G$  и  $Q$ . Тогда длина ноги равна

$$l = \frac{h}{\cos(\alpha_1)} = \text{const} \quad (5.13)$$

Момент  $M$  определяется выражением:

$$M = -Gl \sin(\alpha) - Ql \cos(\alpha) \quad (5.14)$$

Для определения работы момента считается, что работа совершается только в тех фазах движения, в которых мощность положительная (момент принимает отрицательные значения). В случае отрицательной мощности (или положительных значений момента), считается, что движение происходит под действием нагрузки на опорной точке, и постоянная скорость сохраняется не благодаря работе двигателя, а за счёт поглощения энергии управляемым фрикционным тормозом (энергозатраты на управление которым считаются пренебрежимо малыми).

Выбирая пределы угла поворота  $\alpha_1$  и  $-\alpha_2$ , из соображений организации шага, можно утверждать, что в зависимости от соотношения параметров, момент  $M$  может либо сохранять свой знак на отрезке  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , либо менять его не более чем один раз. Угол при котором момент меняет знак определяется выражением:

$$\alpha_0 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{Q}{G}\right). \quad (5.15)$$

Если  $\alpha_0$  попадает в диапазон  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , то знак меняется. Далее рассматривается случай, когда знак меняется, как более общий (случай с постоянным знаком из него может быть легко получен путём присвоения  $\alpha_0 = \alpha_2$ ).

Работа момента определяется выражением

$$\begin{aligned} A^M &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} (-Gl \sin(\alpha) - Ql \cos(\alpha)) d\alpha = \\ &= (Gl \cos(\alpha_0) - Ql \sin(\alpha_0)) - (Gl \cos(\alpha_1) - Ql \sin(\alpha_1)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

А тепловые потери энергии приближённо оцениваются как пропорциональные квадрату момента:

$$E_l^M = k_M \int_{t_1}^{t_0} M^2 dt \quad (5.17)$$

где  $k_M$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров используемого двигателя,  $t_1, t_0$  — моменты времени, соответствующие углам  $\alpha_1$  и  $-\alpha_0$ . Или, с учётом постоянства угловой скорости:

$$\begin{aligned} E_l^M = & \frac{k_M}{2\omega} G^2 l^2 ((\alpha_0 - \sin(\alpha_0) \cos(\alpha_0)) - (\alpha_1 - \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1))) + \\ & + \frac{k_M}{\omega} G Q l^2 (\sin^2(\alpha_0) - \sin^2(\alpha_1)) + \\ & + \frac{k_M}{(2\omega)} Q^2 l^2 ((\alpha_0 + \sin(\alpha_0) \cos(\alpha_0)) - (\alpha_1 + \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1))) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Для второго программного движения длина ноги не остаётся постоянной, а является функцией угла поворота  $l = l(\alpha) = h/\cos(\alpha)$ . Тогда момент  $M$  и сила  $F$  определяются выражениями:

$$\begin{aligned} M &= -G h \operatorname{tg}(\alpha) - Q h \\ F &= G \cos(\alpha) - Q \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Аналогично первому программному движению, считается, что «полезная» работа совершается только на тех фазах, на которых мощность принимает положительные значения. Для момента  $M$ , это будут те фазы, когда сам момент является отрицательным. Условие смены знака то же, что и (5.15). Тогда работа момента определяется выражением:

$$\begin{aligned} A^M &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} (-G h \operatorname{tg}(\alpha) - Q h) d\alpha = \\ &= (G h \ln |\cos(\alpha_0)| - Q h \alpha_0) - (G h \ln |\cos(\alpha_1)| - Q h \alpha_1) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Условие смены знака для силы  $F$  отличается:

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{G}{Q}\right) \quad (5.21)$$

То есть, при использовании рассматриваемого механизма в качестве шагающего движителя,  $\alpha_0$  заведомо лежит за пределами отрезка  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Таким образом, знак мощности определяется только направлением относительной скорости в поступательной паре:

$$V = \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\alpha} \omega = h \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \omega \quad (5.22)$$

С учётом  $\omega < 0$ , при  $\alpha > 0$  мощность силы  $F$  принимает отрицательные значения, а при  $\alpha < 0$  — положительные. Следовательно выражение для работы силы  $F$  записывается в виде:

$$\begin{aligned} A^F &= \int_0^{\alpha_2} (G \cos(\alpha) - Q \sin(\alpha)) \frac{dl}{d\alpha} d\alpha = \\ &= h(-G \ln|\cos(\alpha_2)| - Q \operatorname{tg}(\alpha_2) + Q \alpha_2) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Тепловые потери в двигателях с учётом постоянства угловой скорости:

$$\begin{aligned} E_l^M &= \frac{k_M}{\omega} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} (-G h \operatorname{tg}(\alpha) - Q h)^2 d\alpha = \\ &= \frac{k_M}{\omega} h^2 \left( G^2 \operatorname{tg}(\alpha_0) - G^2 \alpha_0 - 2 G Q \ln|\cos(\alpha_0)| + Q^2 \alpha_0 \right) - \\ &\quad - \frac{k_M}{\omega} h^2 \left( G^2 \operatorname{tg}(\alpha_1) - G^2 \alpha_1 - 2 G Q \ln|\cos(\alpha_1)| + Q^2 \alpha_1 \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}
E_l^F &= \frac{k_F}{\omega} \int_{\alpha_0}^{\alpha_2} (G \cos(\alpha) - Q \sin(\alpha))^2 d\alpha = \\
&= \frac{k_F}{2\omega} G^2 ((\alpha_2 + \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_2)) - (\alpha_0 + \sin(\alpha_0) \cos(\alpha_0))) - \\
&\quad - \frac{k_F}{\omega} G Q (\sin^2(\alpha_2) - \sin^2(\alpha_0)) + \\
&\quad + \frac{k_F}{2\omega} Q^2 ((\alpha_2 - \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_2)) - (\alpha_0 - \sin(\alpha_0) \cos(\alpha_0)))
\end{aligned} \tag{5.25}$$

где  $k_F$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров используемого двигателя.

Условия при выполнении которого «полезная» работа во втором программном движении меньше, чем в первом:

$$\begin{aligned}
&(G l \cos(\alpha_0) - Q l \sin(\alpha_0)) - (G l \cos(\alpha_1) - Q l \sin(\alpha_1)) > \\
&(G h \ln |\cos(\alpha_0)| - Q h \alpha_0) - (G h \ln |\cos(\alpha_1)| - Q h \alpha_1) + \\
&\quad + h(-G \ln |\cos(\alpha_2)| - Q \operatorname{tg}(\alpha_2) + Q \alpha_2)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

или:

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(\operatorname{arctg}(\varphi))}{\cos(\alpha_1)} + \frac{\varphi \sin(\operatorname{arctg}(\varphi))}{\cos(\alpha_1)} - 1 - \\
&\quad - \varphi \ln |\cos(\operatorname{arctg}(\varphi))| - \varphi \operatorname{arctg}(\varphi) + 2 \ln |\cos(\alpha_1)| > 0
\end{aligned} \tag{5.27}$$

где

$$\varphi = \frac{Q}{G} \tag{5.28}$$

Условие (5.27) можно графически представить в виде, показанном на рисунке 5.21. Светлым цветом отмечены точки в которых энергетически выгоднее

использовать механизм с двумя степенями свободы, тёмным цветом — точки, в которых энергетически выгоднее механизм с одной степенью свободы.

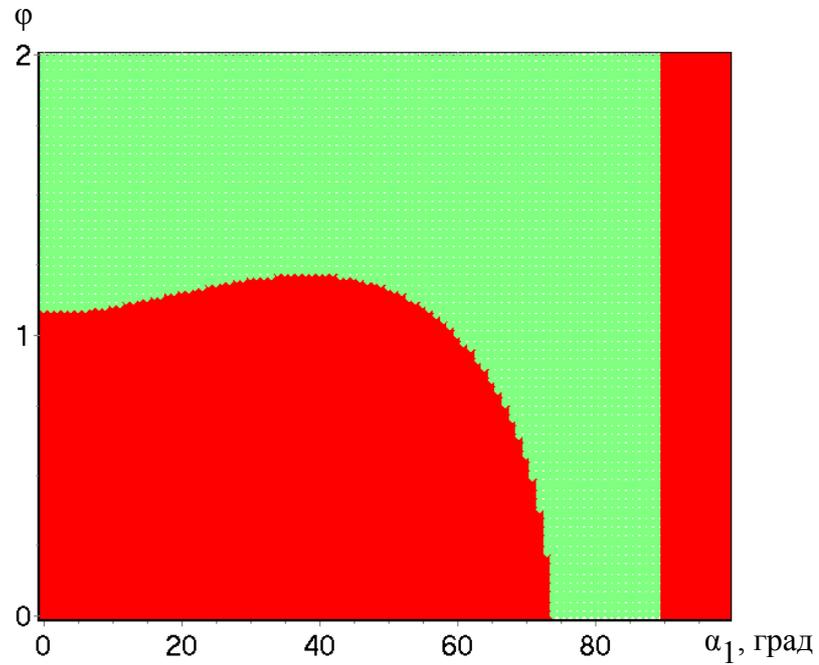


Рисунок 5.21 — Соотношения затрат энергии для модельного механизма шагания с одной и с двумя степенями свободы.

## Основные результаты и выводы

Предложена и обоснована система показателей качества шагающих машин, позволяющая оценивать качество шагающих машин со сдвоенными движителями и формировать общий критерий качества при решении задач многокритериальной оптимизации.

На основе системы показателей качества построена функция механического состояния шагающей машины, позволяющая находить оптимальные законы управления методами вариационного исчисления.

Разработаны теоретико-механические модели шагающих машин, реализованные в виде программно-алгоритмических комплексов, позволяющие осуществлять расчёт динамики движения машин, вычислять показатели качества, осуществлять оптимизацию структуры, параметров и алгоритмов управления.

Разработаны методы многокритериальной оптимизации параметров, структуры и алгоритмов управления движением шагающих машин со сдвоенными шагающими движителями, позволяющие определять структуру и параметры шагающей машины и разрабатывать алгоритмы управления её движением на этапе проектирования и эксплуатации.

Разработаны методы повышения эффективности шагающих аппаратов на основе целенаправленного изменения структуры и параметров, позволяющие улучшать показатели качества машины.

Разработанные методы использовались при разработке и управлении лабораторными образцами шагающих машин «Восьминог», «Восьминог М», «Ортоног».

## Список использованной литературы

1. Агейкин Я.С. Вездеходные колесные и комбинированные движители. М.: Машиностроение, 1972. 182 с.
2. Акинфиев Т.С. Бабицкий В.И.. Крупенин В.Л. Манипуляционные системы резонансного типа —М.:Машиноведение, 1982, № 1.
3. Алгоритмы управления движением шагающей машины при преодолении препятствий /Брискин Е.С., Чернышев В.В.// Экстремальная робототехника: Матер. XIV науч.- техн. конф. СПб.: СПбГПУ, 2004. С.191-196.
4. Алексеева Л.А., Голубев Ю.Ф. Модель динамики шагающего аппарата // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1975. № 3. С.175–177.
5. Андриянов Н.А., Бальжанов Д.С., Погребняк А.Я., Умнов Н.В. Исследование макета шагающего аппарата // Экспериментальное исследование и диагностирование роботов —М.: Наука, 1980.
6. Артоболевский И.И., Бессонов А.П., Умнов Н.В. Особенности и возможности шагающих машин // Вопросы земледельческой механики. М.: Изд-во ВИМ, 1978. С.41.
7. Артоболевский И.И. Теория механизмов.—М.:Наука, 1967—720 с.
8. Артоболевский И.И., Умнов Н.В. Некоторые проблемы создания шагающих машин // Вестник АН СССР. 1969. № 2. С.22–27.
9. Афанасьев О.А., Гендель В.С., Зимин А.В. Шагающие машины // Теория механизмов и машин. 2005. № 1(5). Том 3. С.88–91.
10. Бабков В.Ф., Бируля А.К., Сиделко В.М. Проходимость колесных машин по грунту. М.: Автотрансиздат, 1959. 189 с.
11. Балбаров В.С. Исследование механизмов движителей шагающих машин с целью улучшения их маневренности. Дисс. канд. техн. наук. Ин-т машиноведения АН СССР. 1987.
12. Батанов, А.Ф. Робототехнические системы для применения в условиях

- чрезвычайных ситуаций. Условия применения и общие технические требования / А.Ф. Батанов, С.Н. Грицынин, С.В. Муркин // Симпозиум по робототехнике и мехатронике. Москва, ВВЦ, 4-6 ноября 2008 г. — С.37-66.
13. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М.Кобельков.— 5-е изд.—М.: БИНОМ. лаборатория знаний, 2007. — 636 с.
14. Беккер М.Г. Введение в теорию систем местность-машина.—М.: Машиностроение, 1973.—520 с.
- 15.Белецкий В.В. Двухногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. —М.: Наука, 1984, 288 с.
- 16.Белоусов И.Р. Неявные алгоритмы интегрирования уравнений динамики манипуляторов с нелинейными элементами в приводах / Препринт Ин-та прикл. матем. РАН. № 73. 1992. 24 с.
- 17.Бессонов А.П., Умнов Н.В. Вопросы механики движителей шагающих машин. —В кн.: «I Всес. конференция по механике и управлению движением шагающих машин» —Волгоград, 1988.
- 18.Бессонов А.П., Умнов Н.В. К вопросу о систематике походок шагающих машин // Машиноведение. 1975. № 6. С.23–30.
- 19.Бессонов А.П., Умнов Н.В. Механика механизмов поворота шагающих машин // V Всес. съезд по теор. и прикладной механике: Аннотации докладов. / Алма-Ата, 1981. С.60.
- 20.Бигильдеев С.И., Голубев Ю.Ф. Влияние инерционности приводов и звеньев ног на энергетически оптимальные движения корпуса шагающего робота // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1988. № 4. С.194–197.
- 21.Бигильдеев С.И., Голубев Ю.Ф. Движение электромеханического шагающего аппарата с минимальными тепловыми потерями // Изв. АН СССР. МТТ. № 2. 1988. С.44–52.
- 22.Билашвили М.А. К вопросу исследования взаимодействия опорных звеньев шагающего движителя с грунтом //Механика и управление движением

- шагающих машин. Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 1./ВПИ, 1990. С.3–8.
23. Болотник Н.Н., Вешняков В.Б., Градецкий В.Г., Черноусько Ф.Л. Многозвенный универсальный шагающий робот: некоторые проблемы динамики // Изв. РАН. МГТ. 1993. №4. С.93–106.
24. Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л. Оптимизация параметров шагающего робота для движения в трубах // Изв. РАН. МГТ. 1995. №6. С.27–41.
25. Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающим аппаратом. Киев.: Наукова Думка, 1985. 263 с.
26. Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Учет динамики приводов при синтезе системы управления движением шагающего аппарата / Препринт Ин-та матем. АН УССР. № 1. 1985. С.3–11.
27. Борисов, А.В. Динамика твердого тела / А.В.Борисов, И.С.Мамаев, - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика. - 2001. - 384 с.
28. Брискин Е.С., Арзамасков А.М., Григорян Г.Г. Основы расчёта шагающих машин высокой опорной проходимости. Часть 1.—Волгоград, 1994.—113 с.
29. Брискин Е.С., Арзамасков А.М., Котова Ю.А., Русаковский А.Е. Динамика движения шагающих машин с движителями дифференциального типа // 2 Всероссийская конференция по механике и управлению движением шагающих машин.—Волгоград, 1992.—С. 9.
30. Брискин, Е.С. Дождевальная машина с шагающим движителем : инф. лист № 489 / Брискин Е.С., Жога В.В. - Волгоград: ЦНТИ, 1994. - 3 с.
31. Брискин Е.С. Исследования движения многоногих статически устойчивых шагающих машин. Дисс. докт. физ.-мат. наук. ВолгГТУ, 1996. 331 с.
32. Брискин Е.С., Жога В.В., Чернышев В.В. и др. Дождевальная машина «Кубань» с шагающими движителями //3 Всерос. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл./ Волгоград, 1995. С.5.
33. Брискин Е.С., Жога В.В., Русаковский А.Е. Чернышев В.В. Об экологически чистых технологиях обработки почвы на основе системы машин с

- шагающими движителями // Экология и безопасность жизнедеятельности, научно-прикладные аспекты, инженерные решения. Волгоград, 1996. С.68.
- 34.Брискин Е.С., Жога В.В., Черкасов В.В., Шерстобитов С.В. Шагающие движители для ВПМ ЛП–19В // Теория проектирования и методы расчета лесных и деревообрабатывающих машин. М., 1996. С.120–121.
- 35.Брискин Е.С., Малолетов А.В. Динамика бортового поворота шагающей машины с движителями на основе цикловых механизмов/ Прогресс транспортных средств и систем: матер. науч.-практич. конф. Ч.2,— Волгоград, 2002.,— С. 285–287.
- 36.Брискин Е.С., Малолетов А.В., Савин А.Ю. О выборе рациональных алгоритмов управления движением шагающих машин/ Искусственный интеллект.—2001.—№3.—С.593–598.
- 37.Брискин Е.С., Малолетов А.В., Савин А.Ю. О выборе рациональных алгоритмов управления движением шагающих машин/ Интеллектуальные робототехнические системы (ИРС-2001). Материалы научной молодёжной школы. Таганрог, 2001.—С.32–38.
- 38.Брискин Е.С., Малолетов А.В., Чернышев В.В., Шерстобитов С.В. О выборе рациональных параметров шестизвеного механизма шагания//Наземные транспортные системы. Межвузовский сборник научных трудов.— Волгоград, 1999.—С.95–99.
- 39.Брискин Е.С., Малолетов А.В., Шерстобитов С.В. Об изменении траектории и закона движения опорной точки механизма шагания //Наземные транспортные системы: Межвуз. сб. науч. тр. /ВолгГТУ.—Волгоград, 2000.— С.44–48.
- 40.Брискин, Е.С. Синтез циклового шагающего механизма с направляющей и критерии его оценки / Брискин Е.С., Леонард А.В., Малолетов А.В. // Теория механизмов и машин. - 2011. - Т. 9. № 17. - С. 14-24.
- 41.Брискин Е.С., Соболев В.М. Тяговая динамика шагающих машин с ортогональными движителями. Проблемы машиностроения и надёжности

- машин, №3, 1990. С.28–34.
- 42.Брискин, Е.С. О позиционной зависимости тягово-сцепных свойств шагающих машин с цикловыми движителями / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Фролова Н.Е. // Тракторы и сельхозмашины. - 2009. - № 6. - С. 21-25.
- 43.Брискин, Е.С. О статически устойчивой походке шагающей машины с тремя сдвоенными ортогонально-поворотными движителями / Брискин Е.С., Малолетов А.В., Колесов А.М., Серов В.А. // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2012. - № 7. - С. 22-27.
- 44.Брискин Е.С. Об общей динамике и повороте шагающих машин. Проблемы машиностроения и надёжности машин, №6, 1997. С.33–39.
- 45.Брискин, Е.С. Об определении предельно допустимых нагрузок, действующих на ортогонально-поворотные движители / Е. С. Брискин, А. М. Колесов, А. В. Малолетов, В. А. Серов // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2010. № 9. — С. 19-23.
- 46.Брискин, Е.С. Об управлении движением шагающей машины со сдвоенными ортогонально-поворотными движителями / Брискин Е.С., Вершинина И.П., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г. // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. - 2014. - № 3. - С. 168.
- 47.Брискин, Е.С. Об управлении движением шагающей машины с двигателем минимальной мощности / Е.С. Брискин, В.В. Жога, А.В. Малолетов // Известия РАН. Механика твёрдого тела. - 2009. - № 6. - С. 21-30.
- 48.Брискин, Е.С. Об энергетической эффективности цикловых механизмов / Брискин Е.С., Калинин Я.В., Малолетов А.В., Чернышев В.В. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. - 2014. - № 1. - С. 18-25.
- 49.Брискин, Е.С. Опыт разработки и испытаний шагающих опор дождевальнoй машины / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В., Малолетов А.В. // Тракторы и сельхозмашины. - 2011. - № 9. - С. 27-31.
- 50.Брискин Е.С. Особенности тягового расчёта шагающих транспортных и технологических машин опорной проходимости // 2 Всероссийская

- конференция по механике и управлению движением шагающих машин.— Волгоград, 1992.—С. 8.
- 51.Брискин, Е.С. Сравнительный анализ колесных, гусеничных и шагающих машин / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г. // Робототехника и техническая кибернетика. - 2013. - № 1 (1). - С. 6-14.
- 52.Брискин Е.С., Русаковский А.Е. О влиянии нормальных реакций на тягосцепные свойства шагающих машин // Известия вузов. Машиностроение, №9, 1992.— С.15-20
- 53.Брискин, Е.С. Управление движением группы шагающих машин при перемещении моногруза / Брискин Е.С., Шаронов Н.Г. // Искусственный интеллект. - 2007. - № 4. - С. 408-415.
- 54.Брискин Е.С., Чернышев В.В. Динамика шагающих машин с движителями на базе цикловых механизмов при ослабленной гравитации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. №1. С.15-20.
- 55.Брискин Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В. и др. Концепция проектирования шагающих машин // Наука — производству. 2005. №1. С.33–38.
- 56.Брискин Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В. Концепция создания шагающей машины для МЧС //Экстремальная робототехника: Материалы XII науч.-техн. конференции /СПбГТУ, ЦНИИ робототехники и технической кибернетики.— СПб., 2002.—С.139–146.
- 57.Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В. Многоопорные шагающие машины: опыт разработки и испытаний в условиях реальной местности/ Сборник трудов ученых Российской Федерации, Тамбов, 2002. Том. 1.—С. 52–55.
- 58.Брискин Е.С., Чернышев В.В. Методы корректировки программных движений цикловых шагающих движителей мобильных робототехнических систем // Искусственный интеллект. НАН Украины. 2004. №4. С.685–694.
- 59.Брискин Е.С., Чернышев В.В. Реализация походок алгоритмического уровня для шагающего робототехнического комплекса с цикловыми движителями //

- Искусственный интеллект. НАН Украины. 2003. №4. С.114-121.
- 60.Брискин Е.С., Чернышев В.В. Управление стопой в шагающих движителях с жесткой траекторией опорных точек // Мобильные роботы и мехатронные системы: Матер. науч. шк.- конф. М.: МГУ, 2004. С.25–31.
- 61.Брискин Е.С., Чернышев В.В. Цикловые механизмы шагания с пассивно управляемой стопой // Теория механизмов и машин. 2004. №1. С.80–88.
- 62.Брискин Е.С., Чернышев В.В. Экспериментальные исследования динамики многоопорной шагающей машины с движителями лямбдаобразного типа. Известия вузов. Машиностроение, №4, 1999. С. 32–37.
- 63.Богатин Ю.В. и др. Качество техники.—М.: Экономика, 1975.
- 64.Бурдаков С.Ф., Дьяченко В.А., Тимофеев А.Н. Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов. Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1986. 264 с.
- 65.Вавилов А.П. и др. Управление качеством продукции. — М.: Мысль, 1984.
- 66.Васенин В.А., Девянин Е.А., Жихарев Д.Н. и др. Макет шагающего аппарата и его системы управления // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. №6. С.19–23.
- 67.Величкин Н.А. Выбор рациональных конструктивных параметров шагающей машины с кинематически организованным поворотом // II Всерос. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВПИ, 1992. С.10-11.
- 68.Виттенбург Й Динамика систем твердых тел. — М.: Мир, 1980. — 296 с.
- 69.Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н. Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. М.: Мир, 1989. 376 с.
- 70.Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы. М.: Мир, 1976. 542 с.
- 71.Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. — 310 с.
- 72.Выделение и подсчет избыточных связей при построении моделей в

- Autodesk Inventor / Рогудеев А.Б., Сомов В.В., Константинов В.М., Пивоваров А.О., Малолетов А.В. // Известия ВолгГТУ. Серия "Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах". Вып. 19 : межвуз. сб. науч. тр. / ВолгГТУ. - Волгоград, 2013. - № 24 (127). - С. 74-79.
73. Гамбарян П.П. Бег млекопитающих. М.-Л.; Наука, 1972. 325 с.
74. Голицын И.В., Агафонова Л.Н. Результаты разработки силовых приводов модельного варианта ШТС // I Всес. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл./ Волгоград: ВПИ, 1988. С.90-91.
75. Голубев Ю.Ф., Бигильдеев С.И. Метод последовательной оптимизации в задаче построения движений шагающего аппарата / Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. № 60. 1988. 28 с.
76. Голубев Ю.Ф., Дегтярева Е.В. Моделирование динамики шагающей машины с помощью метода малого параметра // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1992. № 2. С.167–170.
77. Голубев Ю.Ф., Колпакова И.Г. Численный метод решения задачи распределения реакций при опоре шагающего аппарата / Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. № 9. 1984. 28 с.
78. Голубев, Ю.Ф. Компьютерное моделирование шагающих роботов / Голубев Ю.Ф., Погорелов Д.Ю. // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4. № 2. — С. 525 — 534.
79. Голубев, Ю.Ф. Основы теоретической механики // М.: Изд-во МГУ, 2000. — 719 с.
80. Голубев Ю.Ф., Пряничников В.Е., Павловский В.Е. Динамика шагающего робота, управляемого оператором // Исследование робототехнических систем. М., 1982. С.78–86.
81. Гончаров С.И. Анализ динамики периодической работы двигателей шагающих машин с целью увеличения их быстродействия / Дисс. канд. техн. наук. Ин-т машиноведения АН СССР. 1989.

82. Гончаров С.И. Анализ динамических свойств ортогонального шагающего движителя // II Всерос. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВПИ, 1992. С.12–13.
83. Гончаров С.И., Умнов Н.В. О предельных скоростях движения шагающих машин // Теория механизмов и машин. №44. Харьков, 1988. С.82–90.
84. Горобцов А.С., Вилков Ю.Н. Моделирование ходьбы многоножного робота по податливой поверхности // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1993. №3. С.92–97.
85. Горобцов А.С., Карцов С.К. Определение кинематических и динамических параметров управляемого движения многозвенных пространственных механических систем // Механика и управление движением шагающих машин. Межвуз. сб. науч. тр. Вып.2. ВолгГТУ, 1995. С.56-60.
86. Горобцов, А. С. Компьютерные методы построения и исследования математических моделей динамики конструкций автомобилей: монография / А. С. Горобцов, С. К. Карцов, А. Е. Плетнев, Ю. А. Поляков. - М.: Машиностроение, 2011. - 463 с.
87. ГОСТ 15467-79 Управление качеством продукции. Основные понятия. Термины и определения. Издательство стандартов, 1979.
88. Градецкий В.Г., Мешман Л.М., Москалев В.С. и др. Проектирование и технологические применения роботов вертикального перемещения // V Всес. совещание по робототехническим системам. М., 1990. С.13–14.
89. Градецкий, В.Г. Состояние и перспективы развития роботов вертикального перемещения для экстремальных сред / Градецкий В.Г., Князьков М.М. // Робототехника и техническая кибернетика. - 2014. - № 1 (2). - С. 9-16.
90. Григорян Г.Г., Брискин Е.С. О кинематическом повороте шагающих транспортных средств // Теория механизмов и машин. № 45. Харьков, 1988. С.75–79.
91. Громов В.В., Мирошниченко А.В., Строганов В.Ю. О взаимодействии движителя шагающего аппарата с грунтом // II Всерос. конф. по механике и

- управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВПИ, 1992. С.13–14.
92. Гуджоян О. П., Троицкая Н. А. Перевозка специфических грузов автомобильным транспортом: Учеб. для вузов. – М.: Транспорт, 2001. – 160 с.
93. Гурфинкель В.С., Гурфинкель Е.В., Девянин Е.А., Ефремов Е.В., Жихарев Д.Н., Ленский А.В., Шнейдер А.Ю., Штильман Л.Г. Макет шестиногого шагающего аппарата с супервизорным управлением —В кн.: «Исследование робототехнических систем» —М.: Наука, 1982.
94. Гурфинкель В.С., Девянин Е.А., Гориневский Д.М., Гришин А.А., Гурфинкель Е.В., Житомирский С.В., Жихарев Д.Н., Ленский А.В., Шнейдер А. Ю., Штильман Л.Г. Управление адаптивными шагающими роботами —В кн.: «X Всес совещание по проблемам управления» —М., 1986.
95. Гурфинкель Е.В., Штильман Л.Г. Принципы супервизорного управления шагающими роботами —В кн.: «VI Всес. съезд по теоретической и прикладной механике» — М.: Наука, 1986.
96. Гусев Э.Г., Соболев В.М., Брюхомицкий Ю.А., Каляев И.А. Технические требования к системе управления ШТС и принцип ее построения // I Всес. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВПИ, 1988. С.73-74.
97. Гуськов В.В., Велев Н.Н., Атаманов Ю.Е. и др. Тракторы: Теория. М.: Машиностроение, 1988. 375 с.
98. Дарахвелидзе П., Марков Е. Программирование в Delphi 4.— СПб.: БХВ— Санкт-Петербург, 1999.— 864 с.
99. Девянин Е.А., Карташев В.А., Ленский А.В., Шнейдер А.Ю. Силовая обратная связь в системе управления шагающего аппарата // Исследование робототехнических систем. М., 1982. С.147–159.
100. Девянин Е.А. Система управления шагающими роботами // VI Всес.

- съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов —М.: Наука, 1986.
101. Девянин Е.А. Концепция натурального макета шагающего аппарата // VII Всес. съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов —М.: Наука, 1991—С. 126.
102. Девянин Е.А., Охоцимский Д.Е. Концепция натурального макета шагающего аппарата // II Всерос. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВПИ, 1992. С.17.
103. Девянин Е.А. Шагающий робот — перспективное средство для обеспечения работ в сложных условиях // I всесоюзная конференция по механике и управлению движением шагающих машин. Тезисы докладов.— Волгоград, 1988—С.12–13.
104. Динамика и управление движением шагающих машин с цикловыми движителями: монография / Е.С. Брискин, В.В. Жога, В.В. Чернышев, А.В. Малолетов; под ред. Е.С. Брискина. - М.: Машиностроение, 2009. - 191 с.
105. Дождевальная машина "Кубань" с шагающими движителями / Брискин Е.С., Жога В.В., Русаковский А.Е., Попов А.Н., Чернышев В.В. и др. // 3-я Всероссийская конференция по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / ВолгГТУ. - Волгоград, 1995. - С. 5.
106. Еременко, А.В. Микропроцессорная система управления роботизированными манипуляторами / А.В. Еременко, А.В. Малолетов, В.Н. Скакунов // Известия ВолгГТУ. Серия "Электроника, измерительная техника, радиотехника и связь". Вып. 4 : межвуз. сб. науч. ст. / ВолгГТУ. - Волгоград, 2010. - № 3. - С. 88-94.
107. Жихарев Д.Н. Организация движения шестиногого шагающего аппарата различными походками // I Всес. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВПИ, 1988. С.74–75.
108. Жога В.В., Григорян Г.Г. Исследование оптимальных резонансных режимов исполнительных механизмов с переменными параметрами //

- Всесоюзная конференция по вибрационной технике.—Тбилиси, 1987.—С.25.
109. Жога В.В. Динамическая модель грунта при циклическом нагружении // Реология, процессы и аппараты химической технологии: Межвуз. сб. научных трудов / Волгоград: Изд-во ВолгГТУ, 1996. С.142–146.
110. Жога В.В. Исследование динамики шагающего движителя//Совершенствование средств и методов расчёта изделий машиностроения.—Волгоград, 1988.—С.72–78.
111. Жога В.В. К оценке эффективности шагающих движителей // Теория механизмов и машин. №47.—Харьков, 1989.—С.3–7.
112. Жога В.В., Кичеева Л.М. Полная модель динамики шагающей машины // VI Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике.—М.: Наука, 1986.—С.278–279.
113. Жога В.В. Проблемы динамики движения и энергетической эффективности многоногих шагающих машин. Дисс. доктора физ.- мат. наук. ВолгГТУ, 1998. 380 с.
114. Жога В.В., Сливин Ю.А. Оценка шагающих движителей на основе рычажных механизмов//Механика и управление движением шагающих машин. Вып.2.—Волгоград, 1995.—С.74–79.
115. Жога В.В. Система показателей качества шагающих транспортных машин//Инженерный журнал. №5.—М.: Машиностроение, 1997.—С.142–146.
116. Жога В.В. Система управления движением шагающей машины с индивидуальными приводами // Механика и управление движением шагающих машин. №1.— Волгоград, 1990.—С.39–45.
117. Забавников Н.А. Основы теории транспортных гусеничных машин. М.: Машиностроение, 1975. 448 с.
118. Зацепин М.Ф., Новожилов И.В. Управление аллюрами четырехногой ходьбы // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С.60–66.

119. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Управление роботами. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000—400 с.
120. Игнатъев М.Б., Ильевский Б.З., Клауз Л.П. Моделирование системы машин. Л.: Машиностроение, 1986.
121. Игнатъев М.Б., Кулаков Ф.М., Михайлов А.А. Динамическая модель управления шагающей машиной // Механика машин. Вып.46. М.: Наука, 1974. С.12-16.
122. Игнатъев М.Б., Кулаков Ф.М., Покровский А.М. Алгоритмы управления роботами-манипуляторами. Л.: Машиностроение, 1972. 248 с.
123. Исследование динамики движения многоногих шагающих роботов/ Брискин Е.С., Жога В.В., Каблов В.Ф., Чернышев В.В., Малолетов А.В.// Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докладов. Пермь, 2001.— С.122.
124. Исследование механизма преодоления локальных препятствий мобильными робототехническими системами с шагающими движителями / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В. и др.// Мобильные роботы и мехатронные системы: Матер. науч. шк.-конф. М.: МГУ, 2004. С.167–179.
125. Калиткин, Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.— 512 с.
126. Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. – М.: Физматлит, 2009. – 280 с.
127. Каляев И.А., Капустян В.Н., Черный О.А. Программная модель системы управления шагающего транспортного средства // I всесоюзная конференция по механике и управлению движением шагающих машин. Тезисы докладов.—Волгоград, 1988—С.76–77.
128. Каляев И.А., Петручук И.В. Опыт создания бортовой системы управления шагающей машины // III Всерос. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез.докл./ Волгоград: ВолгГТУ,1995. С.13.

129. Кац Г.В., Ковалев А.П. Техничко-экономический анализ и оптимизация конструкции машин.—М.: Машиностроение, 1981.
130. Кемурджиан А.Л. Проблемы создания шагающего аппарата // I Всес. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВПИ, 1988. С.7-8.
131. Ковалюх Р.В., Волонцевич Д.О. К вопросу об использовании прявила Чебышева как задающего механизма в шагающем движителе // Теория механизмов и машин. № 47. Харьков, 1989. С.17–21.
132. Ковалюх Р.В., Волонцевич Д.О. Стратегия выбора критериев при синтезе шагающих движителей // Вестник Харьковского политех. ин-та. 1989. №254.
133. Козлов В.С. Основы теории движения шагающей машины. Н.Новгород, 2001—154 с.
134. Концепция и моделирование шагающего аппарата с сочленённым корпусом / Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Павловский В.Е. и др. // Мобильные роботы и мехатронные системы: Докл. науч. школы.-конф. (с междунар. участ.), 7–8 дек. 1999 г. МГУ и др.—М., 1999.—С.45–57.
135. Концепция проектирования, динамика и управление движением шагающих машин. Ч.1. Концепция проектирования / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г., Фролова Н.Е. // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2005. - №5. - С. 22-27.
136. Концепция проектирования, динамика и управление движением шагающих машин. Ч.2. Динамика движения шагающих машин серии "Восьминог" / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г., Фролова Н.Е. // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2005. - №6. - С. 19-26.
137. Концепция проектирования, динамика и управление движением шагающих машин. Ч.3. Алгоритмы управления движением шагающих машин серии "Восьминог" и экспериментальные исследования / Брискин

- Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г., Фролова Н.Е. // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2005. - №7. - С. 13-18.
138. Концепция системы управления шагающим роботом для разминирования / Жога В.В., Брискин Е.С., Фролова Н.Е., Смотров В.М. // Искусственный интеллект. №4.— ДонДІШІ «Наука і освіта», 2002.—С.351–355.
139. Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. Цикловые роботы с рекуперацией энергии. Системы с несколькими степенями подвижности // Станки и инструменты. 1984. № 6. С.12–17.
140. Кореновский В.В., Умнов Н.В. К вопросу о рациональном движении шагающего транспортного устройства с движителями на основе механизмов // I Всес. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВПИ. 1988. С.57–58.
141. Кореновский В.В., Хоборков С.В. Синтез рулевого устройства для транспортных шагающих машин // Проблемы механики современных машин: Матер. 2-й международ. конф. Улан-Удэ: ВСГТУ. 2003. Т.3. С.3–7.
142. Кореновский В.В., Хоборков С.В. Синтез движителя шагающего устройства на основе восьмизвенного механизма // Проблемы механики современных машин: Матер. 2-й международ. конф. Улан-Удэ: ВСГТУ. 2003. Т.3. С.11–15.
143. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.—М.: Наука, 1973—832 с.
144. Кузнецов С.А., Малолетов А.В. О плоском движении восьминогой статически устойчивой шагающей машины//Прогресс транспортных средств и систем. Материалы международной науч.-практической конф.— Волгоград, 1999.—С.150–152.
145. Курсовая устойчивость шагающей машины «Восьминог» / Брискин Е.С., Шурыгин В.А., Жога В.В., Чернышев В.В., Малолетов А.В.// Информационно-измерительные и управляющие системы. 2006. №1–3, Т.4.

- C.56–58.
146. Лапшин, В.В. Математическое моделирование управления движением аппарата с упругими элементами в телескопических звеньях ног // Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, №32.—М., 1987.—28 с.
147. Лапшин, В.В. Механика и управление движением шагающих машин. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2012 г. — 199 с.
148. Лапшин, В.В. Модельные оценки энергозатрат шагающего аппарата. —Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1981, N 96.
149. Лапшин, В.В. Проблемы динамики и управления движением аппаратов, перемещающихся с помощью конечностей /Дисс. докт. физ.-мат. наук. Ин-т прикл. матем. РАН. 1987. 435 с.
150. Лапшин, В.В. Управление периодическим движением четырёхногого аппарата, перемещающегося рысью, иноходью и галопом // Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, №87.—М., 1985.—28 с.
151. Ларин, В.Б. Управление шагающим аппаратом // I всесоюзная конференция по механике и управлению движением шагающих машин. Тезисы докладов.—Волгоград, 1988—С.15–16.
152. Ларин В.Б. Управление шагающим аппаратом. Киев: Наук. думка, 1980. 168с.
153. Литвинов А.С., Фарабин Я.Е. Автомобиль. Теория эксплуатационных свойств. Машиностроение, 1989. 240 с.
154. Ловейкин В.С. Оптимизация режима движения манипуляционных систем роботов по комплексному критерию // IV Всесоюзное совещание по робототехническим системам. Тезисы докладов. 27-29 октября 1987 г. — Киев, 1987. — С. 75-76.
155. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 1, М., Физматгиз, 1954.
156. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
157. Мазуркин П.М. Быстроходные шагающие движители //Механика и

- управление движением шагающих машин. Межвуз. сб. науч. тр. Вып.2. Волгоград: ВолгГТУ. 1995. С.95–102.
158. Макаров И.М., Коноплев В.А. Разработка моделей механики и программного продукта в задачах управления шестиногим шагающим аппаратом // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992. №2. С.73-78.
159. Макаров И.М., Топчеев Ю.И. Роботы в прошлом настоящем и будущем. Информационно-измерительные и управляющие системы. 2006. №1–3, Т.4 С.9–15.
160. Маленков М.И. Мобильные роботы космического назначения //Мобильные роботы и мехатронные системы: Докл. науч. шк.- конф. М.: МГУ, 1998. С.68–76.
161. Малолетов А.В., Брискин Е.С. Исследование и проектирование одностепенных движителей для шагающей машины грунтовой проходимости //Тез. докл. юбилейного смотра-конкурса науч., конструкт. и технолог. работ студентов ВолгГТУ, Волгоград, 15–17 мая 2000 г. / ВолгГТУ. —Волгоград, 2000.—С.69–71.
162. Малолетов А.В., Брискин Е.С. О применении объектно-ориентированного подхода к исследованию шагающих машин //Тез. докл. юбилейного смотра-конкурса науч., конструкт. и технолог. работ студентов ВолгГТУ, Волгоград, 15–17 мая 2000 г. / ВолгГТУ.—Волгоград, 2000.—С.101–103.
163. Малолетов, А.В. О походках реконфигурируемой модульной шагающей машины с ортогонально-поворотными движителями / А.В. Малолетов, Е.С. Брискин, А.М. Колесов // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2012. - № 5. - С. 50-55.
164. Малолетов, А.В. Управление цикловым шагающим движителем на основе шарнирного четырёхзвенника с изменяемой длиной коромысла / Малолетов А.В., Брискин Е.С. // Известия ВолгГТУ. Серия "Актуальные

- проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах". Вып. 21 : межвуз. сб. науч. ст. / ВолгГТУ. - Волгоград, 2014. - № 12 (139). - С. 163-169.
165. Маргвелашвили В.О. Теоретическое исследование девиаций шагающих машин // Механика и управление движением шагающих машин. Межвуз. сб. науч. тр. Вып.1. Волгоград: ВПИ, 1990. С.76–81.
166. Мартыненко, Ю.Г. О супервизорном управлении мобильной платформой на четырех поворотных колесах / Ю. Г. Мартыненко, И. Е. Митрофанов, Е. В. Письменная, А. М. Формальский / Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 2. С. 147-157.
167. Математическое моделирование динамики движения электромеханического шагающего аппарата / Охоцимский Д.Е., Ефимов В.А., Кудрявцев М.В., Лапшин В.В., Платонов А.К., Ярошевский В.С. // Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, №96.—М., 1982.—28 с.
168. Медведь В.В., Платонов А.К. Система для сравнения кинематических и динамических характеристик двух конструкций ноги шестиногого шагающего робота / Препринт Ин-та прикл. матем. РАН. № 12. 1995. 20 с.
169. Международные стандарты. «Управление качеством продукции». ИСО 9000-9004, ИСО 8402. — М.: Изд-во стандартов, 1988.
170. Международный стандарт ИСО 9000:2005 (ГОСТ Р ИСО 9000:2005). Системы менеджмента качества. Основные положения и словарь.
171. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
172. Методика оценки уровня качества продукции с помощью комплексных показателей и индексов. — М.: Изд-во стандартов, 1974.
173. Механизм горизонтального перемещения шагающего движителя: А.с. 1365569 СССР, В62 D57/02 / Жога В.В., Брискин Е.С., Умнов Н.В., Погребняк А.Я. 1990.
174. Механика промышленных роботов. Кн. 1: Кинематика и динамика /

- Воробьев Е.И., Егоров О.Д., Попов С.А.. М.: Высшая школа, 1988. 304 с.
175. Механика промышленных роботов. Кн.2: Расчет и проектирование механизмов /Воробьев Е.И., Егоров О.Д., Попов С.А.. М.: Высшая школа, 1988. 367 с.
176. Мищенко В.Я. Электромагнитный глубинный вибратор с симметричным приводом // Вибрационные машины и технологии. Вибрация-2001. Сборник научных трудов.—Курск: КурскГТУ, 2001—С.118–121.
177. Мобильный комплекс для сбора нефтепродуктов на базе шагающей машины / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Шерстобитов С.В. и др.// Экстремальная робототехника: Мат. XI науч.-техн. конф. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. С.117-125.
178. Мобильный робототехнический комплекс на базе многоопорной шагающей машины /Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В., Тельдеков А.В. //Мехатроника: Механика. Автоматика. Электроника. Информатика.—2001.—№3.—С.19–27.
179. Мудров, А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языке Бейсик, Фортран, Паскаль. — Томск: МП «Раско», 1991. — 272 с.
180. Научное наследие П.Л. Чебышева. Теория механизмов —М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1945. 192 с.
181. Новожилов И.В., Паншина А.В. Кинематическая избыточность конечностей и энергозатраты четырехногой ходьбы // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С.60–66.
182. Новожилов И.В. Управления движением в динамике четырехногого шагающего аппарата // Научные труды МЭИ. № 77. М., 1985. С.68–75.
183. О выборе рациональных параметров шестизвенного механизма шагания /Брискин Е.С., Малолетов А.В., Чернышев В.В., Шерстобитов С.В. //Наземные транспортные системы: Межвуз. сб. науч. тр. /ВолгГТУ.— Волгоград, 1999.—С.95—99.

184. О проблемах проектирования шагающих машин грунтовой проходимости /Брискин Е.С., Чернышев В.В., Шерстобитов С.В., Малолетов А.В. //Проблемы механики современных машин: Матер. междунар. конф. /Вост.-Сибир. гос. технол. ун-т и др.—Улан–Уде, 2000.—С.206–211.
185. Об управлении движением двуногого робота при помощи маховика / Е.С. Брискин, А.В. Малолетов, А.М. Колесов, И.П. Вершинина // Изв. ВолгГТУ. Серия "Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах". Вып. 8 : межвуз. сб. науч. ст. / ВолгГТУ. - Волгоград, 2010. - № 6. - С. 9-13.
186. Об управлении дождевальными машинами с шагающими двигателями / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В., Серов В.А., Шаронов Н.Г. // Робототехника. Взгляд в будущее : тр. междунар. науч.-техн. семинара (Санкт-Петербург, 10-11 марта 2010 г.) / С.-Петерб. гос. политехн. ун-т [и др.]. - СПб., 2010. - С. 202-205.
187. Об энергетической эффективности, манёвренности, вибронегруженности и управлении шагающими машинами грунтовой проходимости /Брискин Е.С., Чернышев В.В., Шерстобитов С.В., Малолетов А.В., Тельдеков А.В., Демидов М.Г. //Мобильные роботы и мехатронные системы: Докл. науч. школы.-конф. (с междунар. участ.), 7–8 дек. 1999 г. /МГУ и др.—М., 1999.—С.89–108.
188. Опыт практического использования транспортно-технологических шагающих машин /Брискин Е.С., Чернышев В.В., Шерстобитов С.В., Малолетов А.В., Набатов А.С. //Региональные проблемы энергосбережения и пути их решения: Тез. докл. IV Всерос. конф. и семинара РФФИ, 24–25 окт. 2000 г.—Нижний Новгород, 2000.—С.91–93.
189. Опыт разработки и испытаний шагающих опор дождевальной машины / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В., Малолетов А.В. // Тракторы и сельхозмашины. - 2011. - № 9. - С. 27-31.
190. Основы расчета и проектирования шагающих машин с цикловыми

- двигателями: монография / Е.С. Брискин, В.В. Жога, В.В. Чернышев, А.В. Малолетов; под ред. Е.С.Брискина; ВолгГТУ. - М.: Машиностроение-1, 2006. - 163 с.
191. Особенности управления и стабилизации положения корпуса многоногих статически устойчивых шагающих машин /Чернышев В.В., Брискин Е.С., Буданов В.М., Девянин Е.А., Жога В.В., Малолетов А.В., Тельдеков А.В., Шерстобитов С.В., Дудкин А.Г. //Мобильные роботы и мехатронные системы: Мат. науч. шк.–конф., Москва, 5–6 дек. 2000 г. /Под. ред. Формальского А.М., Буданова В.М.; МГУ.—М., 2000.—С.256–273.
192. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Алексеева Л.А. Управление динамической моделью шагающего аппарата / Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. № 2. 1974. 56 с.
193. Охоцимский Д.Е., Громов В.В., Трушин В.П. Математическое моделирование динамики движения шагающего аппарата с учетом деформации грунта / Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. № 152. 1985. 25 с.
194. Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Донцов В.Е., Герхен-Губанов Г.В., Веселов В.А., Кузнецов В.Г. Лабораторный макет интегрального шагающего робота —В кн.: «VII Всес. совещание по проблемам управления» —Минск, 1977.
195. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата —М.: Наука, 1984 — 312 с.
196. Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Лапшин В.В. Исследование энергетики движения шестиногого шагающего аппарата // Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1981, N 96.
197. Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Лапшин В.В. Об одном способе рекуперации энергии при движении шагающего аппарата // Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, М., 1985, N 151.
198. Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Кирильченко А.А., Лапшин В.В.

- Шагающие машины // Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР.—М., 1989.—36 с.
199. Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Кугушев Е.И. и др. Управление макетом шагающего аппарата при преодолении препятствий // Исследование робототехнических систем. М., 1982. С.66–72.
200. Охоцимский Д.Е., Платонов А.К., Кугушев Е.И., Ярошевский В.С. Система построения движений шагающего аппарата // Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. № 7. 1977. 82 с.
201. Охоцимский Д.Е., Платонов А.К. Проблемы создания шагающих машин // Механика и управление движением шагающих машин: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.1 / ВПИ, 1990. С.88–93.
202. Павловский В.Е. О разработках шагающих машин // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. №101. 32 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-101>
203. Павловский В.Е., Платонов А.К., Серов А.Ю. Проприоцептивная навигация в системе управления шагающего робота / Интеллектуальные многопроцессорные системы. Тезисы докладов международной конференции.—Таганрог, Донецк, 2002.—С. 249–252.
204. Павловский В.Е., Шишканов Д.В. Исследование динамики и синтез управления колесными аппаратами с избыточной подвижностью // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. 2006. № 12. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-12>
205. Пат. 2108708 РФ, МПК 6 А 01 G 25/09, В 62 D 57/02 Самоходная тележка многоопорной дождевальнoй машины / Брискин Е.С., Русаковский А.Е., Чернышев В.В., Жога В.В., Попов А.Н. и др.; ВолгГТУ. - 1998.
206. Пат. 2153437 РФ, МПК 7 В 62 D 57/032. Шагающая опора для многоопорных самоходных машин транспортно-погрузочных средств повышенной проходимости / Брискин Е.С., Вавилин Г.Д., Голицын И.В., Жога В.В., Кузнецов С.А., Русаковский А.Е., Черкасов В.В., Чернышев В.В.,

- Шерстобитов С.В.; ВолгГТУ. - 2000.
207. Пат. 2496304 РФ, МПК А01G25/09, В62D57/02. Самоходная шагающая тележка многоопорной дождевальная машины / Чернышев В.В., Брискин Е.С., Малолетов А.В., Вершинина И.П.; ВолгГТУ. - 2013.
208. Пат. 2496305 РФ, МПК А01G25/09, В62D57/02. Самоходная шагающая тележка многоопорной многосекционной дождевальная машины / Чернышев В.В., Брискин Е.С., Шаронов Н.Г., Вершинина И.П.; ВолгГТУ. - 2013.
209. Пейкова М. Динамика пространственного движения шагающего робота. Двухчастотное периодическое решение (случай внутреннего резонанса) // Теоретическая и прикладная механика. 1990. №3. С.13–18.
210. Передвижение по грунтам Луны и планет /Под. ред. Кемурджиана А.Л. —М.: Машиностроение, 1986.
211. Петриашвили Б.Д., Маргелашвили В.О., Биладшвили М.А. К задаче организации движения опорных звеньев многоногих шагающих машин — В сб. статей Ин-та механики машин АН ГССР, Тбилиси: Мецниереба, 1986.
212. Петров В.А., Медведев Г.И., Системная оценка эффективности новой техники. — М.: Машиностроение, 1978.
213. Планетоходы /Под. ред. Кемурджиана А.Л. —М.: Машиностроение, 1982.
214. Платонов А.К. Весовое подобие шагающих машин / Препринт Ин-та прикл. матем. РАН. № 85. 1993. 20 с.
215. Повышение профильной проходимости и адаптивности шагающих машин с движителями на базе цикловых механизмов / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В. и др. //Экстремальная робототехника: Матер. XIII науч.-техн. конф. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С.125–132.
216. Погорелов, Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел. - Брянск: БГТУ, 1997. - 156 с.
217. Погребняк А.Я. Исследование движения шестиногого шагающего

- экипажа // *Машиноведение*. 1975. № 3. С.28–34.
218. Погребняк А.Я. Исследование кинематики пантографных движителей шагающих машин —В кн.: «Всес. конференция по теории и расчету мобильных машин и двигателей внутреннего сгорания» —Тбилиси, 1985.
219. Попов А.Н., Победин А.В. Шагающий движитель для тракторов // *Тракторы и сельскохозяйственные машины*. 1995. № 8. С.12–14.
220. Проблемы расчёта и проектирования шагающих машин грунтовой проходимости. Брискин Е.С., Вавилин Г.Д., Голицин И.В. и др. Доклады научной школы — конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы» — М.: Институт механики МГУ, 1999. С. 124–153.
221. Разработка шагающего движителя для транспортных машин высокой манёвренности и проходимости/ Брискин Е.С., Жога В.В., Чернышев В.В., Русаковский А.Е., Малолетов А.В., Ермаков С.А., Селиванов А.М., Карев В.И.// Тезисы докладов. Отчётная конференция-выставка по подпрограмме «Транспорт» Научно-технической программы Министерства образования России «Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники» 11-13 февраля 2002 г., Москва–Звенигород.
222. Румшицкий Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. Справочное пособие.— М.: Наука, 1971—192 с.
223. Саакян Д.Н. Система показателей комплексной оценки мобильных машин. — М.: Агропромиздат, 1988. — 415 с.
224. Самарский, А.А. Численные методы / А.А.Самарский, А.В.Гулин.— М.: Наука, 1989. — 432 с.
225. Самоходная тележка многоопорной дождевальная машины: Пат. 2108708 РФ, А01 G25/09, В62 D57/02 / Брискин Е.С., Русаковский А.Е., Чернышев В.В. и др. ВолгГТУ. 1998.
226. Санитарные нормы и правила по ограничению вибрации и шума на рабочих местах тракторов, сельскохозяйственных мелиоративных, строительно-дорожных машин и грузового автотранспорта (утв.

Заместителем Министра здравоохранения СССР, Главным санитарным врачом СССР П.Н.Бургасовым 18 мая 1973 г. N 1102-73).

227. Санитарные правила по гигиене труда водителей автомобилей (утв. Заместителем Главного государственного санитарного врача СССР 5 мая 1988 г. N 4616-88).
228. Свидетельство № 9462 об отраслевой регистрации разработки "Автоматизированная информационно-поисковая система "Методы теоретической механики"" / Е.С. Брискин, И.П. Вершинина, В.В. Жога, А.В. Малолетов, А.В. Петрухин; ВолгГТУ.- Дата регистрации 15.11.2007; дата выдачи 14.12.2007.- М.: Отраслевой фонд алгоритмов и программ, 2007.
229. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2013614123 от 24 апреля 2013 г. РФ, МПК (нет). Автоматизированная система определения параметров программного и супервизорного управления шагающей машиной со сдвоенными ортогонально-поворотными движителями / А.В. Малолетов, Н.Г. Шаронов, В.А. Серов, А.В. Леонард; ВолгГТУ. - 2013.
230. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2013614135 от 24 апреля 2013 г. РФ, МПК (нет). Автоматизированная система определения режимов работы приводов шагающего аппарата, обеспечивающих статическую устойчивость движения машины / А.В. Малолетов, А.М. Колесов, Ан.Е. Гаврилов, Я.В. Калинин; ВолгГТУ. - 2013.
231. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2014616349 от 20 июля 2014 г. РФ, МПК (нет). Автоматизированная система расчёта запаса статической устойчивости подводного многононого шагающего аппарата / Малолетов А.В., Чернышев В.В.; ВолгГТУ. - 2014.
232. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015610226 от 12 января 2015 г. РФ, МПК (нет). Автоматизированная система расчёта запаса кинематики управляемого движения сдвоенного четырёхзвенного шагающего движителя с изменяемой длиной коромысла / Малолетов А.В., Гаврилов А.Е., Леонард А.В., Фоменко С.С.; ВолгГТУ. - 2015.

233. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015610229 от 12 января 2015 г. РФ, МПК (нет). Автоматизированная система расчёта усилий в модульной шагающей машине со сдвоенными ортогонально-поворотными двигателями / Малолетов А.В., Брискин Е.С., Гаврилов А.Е., Шаронов Н.Г.; ВолгГТУ. - 2015.
234. Синтез движения шагающего робота при преодолении изолированных препятствий / Охоцимский Д.Е., Павловский В.Е., Голубев Ю.Ф., Платонов А.К. // Информационные и управляющие системы роботов. Сборник научных трудов.—М.: ИПМ МГУ, 1982—С. 186–200.
235. Скотников В.А., Мещенский А.А., Солонский А.С. Основы теории и расчета трактора и автомобиля. М.: Агропромиздат, 1986. 384 с.
236. Смирнов Г.А. Теория движения колёсных машин — М.: Машиностроение, 1990.—352 с.
237. Соболев, И. М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: учеб. пособие для вузов / И. М. Соболев, Р. Б. Статников — М.:Дрофа, 2006. — 175 с.
238. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под. ред. Дж. Холла, Дж. Уатта.—М.: Мир, 1979.— 312 с.
239. Справочник по динамике сооружений / Под. ред. Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича.—Владимир.: Стройиздат, 1972.— 512 с.
240. Сравнительный анализ колёсных, гусеничных и шагающих машин / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г. // Робототехника и техническая кибернетика. - 2013. - № 1. - С. 6-14.
241. Сулейманов Б.С., Круглов И.К. Шагающий агротехнический мост с поперечным движением рабочих органов //I Всес. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл./Волгоград, 1988. С.34.
242. Тартаковский И.И., Умнов Н.В. О выборе структурной схемы шагающей машины // Машиноведение. 1985. № 6. С.60–66.

243. Телегин, А.И. Оптимальное распределение движущих сил и моментов шагающих аппаратов с трёхзвенными конечностями / Телегин А.И., Фёдоров В.Б. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. - 2014. - Т. 14. № 2. - С. 5-14.
244. Тимофеев А.В. Адаптивные робототехнические комплексы. Л.: Машиностроение, 1988. 332 с.
245. Толмачев К.С. Оценка движителя с внутренней динамической связью на основе пятизвенного шарнирно-рычажного механизма с двумя степенями свободы // III Всерос. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВолгГТУ, 1995. С.26.
246. Толстоусова В.Г. Качественное исследование энергетики движения шагающего аппарата. —Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, —М., 1984, N 132.
247. Толстоусова В.Г. Стабилизируемость движения шагающего аппарата / Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. № 54. 1986. 28 с.
248. Тракторы: Теория: Учебник для студентов вузов по спец. «Автомобили и тракторы» / Гуськов В.В., Велев Н.Н., Атаманов Ю.Е. и др. — М.: Машиностроение, 1988.—376 с.
249. Транспортное средство с колесно-шагающими движителями: Пат. 2031040 РФ В62 D57/028 / Ловчиков М.И. 1995.
250. Умнов Н.В., Морозов Н.Г. Особенность применения прямолинейно-направляющих механизмов в шагающих системах с «лыжными» движителями // III Всес. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл. / Волгоград: ВолгГТУ, 1995. С.27.
251. Умнов Н.В. Применение механизмов с внутренней динамической связью в качестве движителей шагающих систем // 2 Всес. конф. по механике и управлению движением шагающих машин: Тез. докл./ Волгоград, 1992. С.33.
252. Умнов Н.В. Применение механизмов с поступательно движущимся

- звеном в качестве движителя ортогональной шагающей машины // Механика и управление движением шагающих машин. Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 1. / Волгоград: ВПИ, 1990. С.130–136.
253. Умнов Н.В. Теория и методы построения рациональных движителей многоногих шагающих машин —Докторская дисс. М., Ин-т машиноведения АН СССР, 1981.
254. Управляющие системы промышленных роботов / Под ред. И.М. Макарова, В.А. Чиганова. М.: Машиностроение, 1984. 288 с.
255. Формальский А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. М., Наука, 1982.
256. Цветков А.А. О возможности применения шагающего шасси на лесосечных работах в горах // Всес. конф. по теории и расчету мобильных машин и двигателей внутреннего сгорания / Тбилиси, 1985. С.117.
257. Цытович Н.А. Механика грунтов: Учебник для строительных вузов — М.: Высш. шк., 1983.—288 с.
258. Челпанов И.Б. Устройство промышленных роботов. Л.: Машиностроение. 1990. – 227 с.
259. Черноусько, Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы) / Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук. М.: Наука. - 1973. - 240 с.
260. Чернышев В.В. Исследование динамики шагающей машины как системы твердых тел с упруго-диссипативными связями // Прогресс транспортных средств и систем–2005: Матер. междунар. науч.–практич. конф. ВолгГТУ, 2005. Ч.2. С.621–623.
261. Чернышев В.В. Исследование механизма взаимодействия опорных элементов (стоп) шагающих машин со слабыми и экологически ранимыми грунтами // Состояние и перспективы развития дорожного комплекса: Сб. науч. тр. междунар. конф. Брянск: БГИТА, 2001. Вып.2. С.35-36.
262. Чернышев В.В., Малолетов А.В. Многофункциональный механизм

- поворота для транспортно-технологических шагающих машин //Изв. Вуз. Машиностроение.— 2001.— №1.— С.48–52.
263. Чернышев В.В. Опыт использования шагающей машины для ликвидации аварийного разлива нефти // БЖ. 2003. №5. С.28–30.
264. Чернышев В.В. Пассивное поддресоривание в мобильных робототехнических системах с цикловыми механизмами шагания // Изв. вузов. Машиностроение. 2003. №1. С.31–39.
265. Чернышев В.В. Полевые исследования шагающих машин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. 2004. № 4. С.20–22.
266. Чернышев В.В. Привод шагающих машин на базе электродвигателей колебательного движения // Механика и управление движением шагающих машин: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.2. / Волгоград: ВолгГТУ. 1995. С.134-140.
267. Чернышев В.В. Системы частичной адаптации, поддресоривания и поворота шагающих машин с движителями на основе цикловых механизмов // Мобильные роботы и мехатронные системы: Матер. науч. шк.-конф. М.: МГУ, 2002. С.181-196.
268. Чернышев В.В. Сопротивление бортовому повороту шагающей машины // Тракторы и сельскохозяйственные машины. 2003. № 2. С.24–27.
269. Чернышев В.В., Шерстобитов С.В., Брискин Е.С. Проблемы проектирования и эксплуатации транспортных шагающих машин высокой проходимости // Проблемы адаптации техники к суровым условиям: Докл. междунар. науч.-практич. конф. / Тюмень: ТГНГУ, 1999. С.253-258.
270. Чернышев В.В. Электромагнитный вибропривод шагающих движителей мобильных робототехнических систем // Вибрационные машины и технологии. Вибрация-2001: Сб. науч. тр. по матер. V междунар. науч.-техн. конф. «Вибрация-2001» / Курск. ГТУ, Курск, 2001. С.417-421.
271. Чудаков Д.А. Основы теории и расчёта трактора и автомобиля—М.: Колос, 1972.—384 с.
272. Шагающая машина "Восьминог" / Брискин Е.С., Чернышев В.В.,

- Малолетов А.В., Жога В.В., Шаронов Н.Г., Шаров К.В., Фролова Н.Е., Покровский Д.Н. // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2004. - №5. - С. 48-49.
273. Шагающая машина: А.с. 1501446 СССР, МКИ2 В62Д 57/02. / Брискин Е.С., Жога В.В., Рогаткин В.А.
274. Шагающая опора: Пат. 2086450 РФ, В62 D57/032 /Чернышев В.В. 1997.
275. Шагающая опора для многоопорных самоходных машин транспортно–погрузочных средств повышенной проходимости: Пат. 2153437 РФ В62 D57/032 /Брискин Е.С., Вавилин Г.Д., Голицын И.В и др. 2000.
276. Шагающая опора для многоопорных транспортно-погрузочных средств: Патент РФ 2171194 С1 В62Д 57/032 / Чернышев В.В., Брискин Е.С., Малолетов А.В.
277. Шагающая опора для транспортных средств повышенной проходимости: Пат. 2156711 РФ, МКИ 7 В 62 D 57/032 /Охоцимский Д.Е., Брискин Е.С., Чернышев В.В., Шерстобитов С.В.
278. Шагающая опора для транспортных средств повышенной проходимости: Патент РФ 2174085 С1 В62Д 57/032 / Чернышев В.В., Брискин Е.С., Малолетов А.В.
279. Шагающая опора для транспортных средств повышенной проходимости: Пат. 2191131 РФ, В62 D57/032 / Чернышев В.В. 2002.
280. Шагающая опора для транспортных средств повышенной проходимости: Пат.2207583, В62 D57/032/ Чернышев В.В., Брискин Е.С., Савин А.Ю. 2003.
281. Шагающая опора для транспортных средств повышенной проходимости: Пат.2239577, В62 D57/032 /Чернышев В.В., Брискин Е.С., Тельдеков А.В. 2004.
282. Шагающая опора повышенной проходимости: Пат. 2156712 РФ,

- B62 D57/032 / Чернышев В.В. 2000.
283. Шагающее транспортное средство: А.с.527332 СССР В62 D57/02 /Корепало Г.Н., Маленков Н.И., Рыков Т.И., Кемурджиан А.Л. 1976.
284. Шагающее транспортное средство: А.с. 569474 СССР В62 D57/02 /Кажукало И.Ф., Кузьмин М.М., Мишкинюк В.К. и др. 1977.
285. Шагающее транспортное средство: Патент РФ 2003565 С1 В62Д 57/032. / Соболев В.М., Брискин Е.С., Григорян Г.Г., Жога В.В. и др.
286. Шагающий болотоход: полезная модель № 111831 РФ, В62D57/02 / Сафронов М.Н., Фонарюков В.А., Петров А.А., Швец Н.Ф., Гирин Д.В.
287. Шагающий болотоход: полезная модель № 122968 РФ, В62D57/02 / Сафронов М.Н., Фонарюков В.А., Петров А.А., Швец Н.Ф., Гирин Д.В.
288. Шагающий движитель: А.с. 1776602 СССР, МКИ2 В62Д 57/02. / Жога В.В., Тонконогов А.Н.
289. Шагающий движитель транспортного средства: А.с. 1536691 СССР В62 D57/02 /Величкин Н.А., Черкасов В.В., Окропиридзе В.В. и др. 1990.
290. Шагающий движитель транспортного средства: А.с. 1669134 СССР, МКИ2 В62Д 57/02. / Жога В.В., Соболев В.М., Флейтман Я.Ш.
291. Шагающий движитель транспортного средства: Патент РФ 2003566 С1 В62Д 57/032. / Жога В.В., Прицкер В.Д.
292. Шагающий робот для обнаружения противопехотных мин / Жога В.В., Смотров В.М., Фролова Н.Е. и др. // Прогресс транспортных средств и систем: матер. науч.-практич. конф. Ч.2,—Волгоград, 2002.,— С. 282–284.
293. Шибанов А.А. Маневренность шагающей машины с ортогональными движителями —М.:Машиноведение, 1986, N 4.
294. Шнейдер А.Ю., Гориневский Д.М, Управление опорными-реакциями шагающего аппарата при движении по грунтам с различными несущими свойствами. —Препринт Ин-та проблем передачи информации АН СССР, М., 1986.
295. Шурыгин В.А. Повышение энергетической эффективности привода

- манипулятора шагающего робота / Шурыгин В.А., Покровский Д.Н. // Интеллектуальные и многопроцессорные системы – 2005. Матер. междунаро. науч. конф. Таганрог, Донецк, Минск, 2005. Т.3, С.40–45.
296. Экспериментальные исследования механизма взаимодействия шагающего движителя с локальными препятствиями / Чернышев В.В., Шаров К.В., Шаронов Н.Г., Малолетов А.В. // Поволжский экологический вестник. Вып.10. 2004. С.127–132.
297. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление — Москва: Наука, 1969.—424 с.
298. Юревич Е.И. Робототехника: учебное пособие —С.Пб.: Издательство СПбГТУ, 2001.—300 с.
299. Юревич Е.И. Основы робототехники. СПб.: БХВ–Петербург, 2005. 416 с.
300. Яцун С.Ф., Вениаминов В.В. Динамика шага движения робота. // Вибрационные машины и технологии: Матер. V междунар. науч.-техн. конф. «Вибрация–2001» / Курск: Изд-во КГТУ, 2001. С.164–167.
301. Яцун, С.Ф. Виброробот для вертикального движения по металлической шероховатой поверхности / Яцун С.Ф., Локтионова О.Г., Черепанов А.А., Рублев С.Б. // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2010. - Т. 12. № 4-3. - С. 651-655.
302. Яцун, С.Ф. Исследование динамики управляемого прыжка робота / Яцун С.Ф., Рукавицын А.Н., Волкова Л.Ю. // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2012. - Т. 14. № 4-5. - С. 1355 — 1358.
303. Яцун, С.Ф. Моделирование движения многозвенного прыгающего робота и исследование его характеристик / Яцун С.Ф., Волкова Л.Ю. // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. - 2013. - № 4. - С. 137.
304. Яцун, С.Ф. Робот для перемещения по поверхностям с произвольным углом наклона / Яцун С.Ф., Дышенко В.С. // В сборнике: Вибрационные

- машины и технологии Сборник научных трудов: По материалам VI научно-технической конференции "Вибрация - - 2003. - Вибрационные машины и технологии". Редкол.: - С.Ф. Яцун (отв. ред. и др.). Курск, - 2003. - - С. 95-98.
305. A combined set of methods to enable autonomous legged locomotion in unstructured terrain /Frik M., Guddat M., Karatas M., Losch D.C. //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.— London, 2001.— С.595–602.
306. A simulation system for behaviour evaluation of off-road mobile robots/ Grand C., Ben Amar F., Bidaud P., Andrade G. //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— С.307–314.
307. Airbug — insect-like machine actuated by fluidic muscle /Berns K., Albiez J., Kepplin V., Hillenbrand C. //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— С.237–244.
308. Akinfiyev T., Fernández Saavedra R.E., Armada M. Optimization of parameters of resonance drives for walking robots //Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.291-296.
309. Albiez J.C., Kerscher T., Grimminger F., Hochholdinger U., Dillmann R., Berns K. PANTER - prototype for a fast-running quadruped robot with pneumatic muscles // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.617-624.
310. Aoustin Y.J.M., Bellavoire S., Branchu G., Chevallereau C., Lemoine Ph., Molina P., Formal'sky A. A semi-quadruped walking robot — first experimental results // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.579-584.
311. Armada M., Caballero R., Akinfiyev T., Montes H., Pedraza L. Extending humanoid robot functioning by application of nonlinear actuators // Proc. of the 11-th Int. Conf. on Advanced Robotics (ICAR 2003). Coimbra, Portugal, 2003.

Vol.3. P.1757-1762.

312. Aronson R.B. Robots go to war. —Machine design.1984. № 28.
313. Asano F., Luo Z-W., Yamakita M. A unified formulation and solutions to gait generation problems based on passive dynamic walking // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.451-458.
314. Banda-Olvera H., Muñiz-Muñiz L., Gómez-Ramírez E. Developing low-cost walking robots in Latin American Universities //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.923–928.
315. Bartholet T.G. The first “functionoid” developed by Odetics, Inc. —In: “Proc. of ICAR—83”. Tokio, 1983.
316. Berns K., Grimminger F., Hochholdinger U., Kerscher, Albiez J. Design and control of a leg for running machine PANTER // Proc. of the 11-th Int. Conf. on Advanced Robotics (ICAR 2003). Coimbra, Portugal, 2003. Vol.3. P.1737-1742.
317. Blazevic P., Iles A., Okhotsimsky D.E., Platonov A.K., Pavlovsky V.E., Lensky A.V. Development of multi-legged walking robot with articulated body // Climbing and Walking Robots. CLAWAR 1999: Proc. of the 2-nd Int. Conf. Portsmouth, UK, 1999. P.205-212.
318. Briskin E.S., Chernyshev V.V., Maloletov A.V. On conception of walking machines designing // Proc. of the 11-th Int. Conf. on Advanced Robotics 2003 (ICAR 2003). Coimbra, Portugal, 2003. Vol. 3. P.1763–1768.
319. Briskin E.S., Chernyshev V.V., Maloletov A.V. Power efficiency and control algorithms of walking machine with cycle propellers // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.861–870.
320. Budanov V. Underactuated leg of the walking machine //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—

- London, 2001.— C.167–171.
321. Buehler M. RePaC design and control — cheap and fast autonomous runners //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.579–585.
322. Caldwell D.G., Warren H.A. Is there a future for climbing and walking robotic system in military operations? //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.969–977.
323. Cardner J.F., Srinivasan K., Waldron K.J. Closed loop trajectory control of walking machines //Robotics. 1990. – 8, No. 1. P.13–22.
324. Celaya E., Albarral J.L. Implementation of a hierarchical walk controller for the LAURON III hexapod robot // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.409-416.
325. Chernyshev V.V., Briskin E.S. Passive sub support in mobile robot–technical systems with walking gears on the basis of cycle mechanisms // ICOVP–2001: Abstracts 5-th Int. Conf. on Vibration problems / Inst. for problems of mechanics. Moscow, 2001. C.26.
326. Chevallereau C., Murado A. Control for the tracking of a reference trajectory for a simplified trot of a quadruped //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.505–512.
327. Cruse H., Dürr V., Schmitz J. Control of hexapod walking — a decentralized solution based on biological data //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.79–86.
328. Dąbrowski T., Feja K., Granosik G. Biologically inspired control strategy of pneumatically driven walking robot //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.687–

- 694.
329. De S Martins-Filho L., Okhotsimsky D.E., Pavlovsky V.E. Proprioceptive localization and attitude estimation for legged robots — comparing two methods //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.719–725.
330. Design criteria for the leg of a walking machine derived by biological inspiration from quadrupedal mammals/ Witte H., Hackert R., Fischer M.S. and others //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.63–68.
331. Design Ideas and Development of a Reconfigurable Robot OSCAR-X / B. Jakimovski, B. Meyer, E. Maehle // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 391-398.
332. Development of a Multi-Body Wall Climbing Robot with Tracked Wheel Mechanism / H. Kim, K. Seo, K. Lee and J. Kim, H. S. Kim // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 439-446.
333. Development of dynamic locomotion for the entertainment robot — teaching a new dog old tricks /Yamamoto Y., Fujita M., De Lasa M., and other //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.695–702.
334. Development of Passive Spine and Actuated Rear Foot for an Ape-like Robot Daniel / Kühn, Felix Bernhard, Felix Grimminger, Sven Simon, And Frank Kirchner // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 1195-1201.
335. Digney B.L., Penzes S. High utility robotics in urban combat operations // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR

- 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.707-716.
336. Estremera J., Gonzales de Santos P. Discontinuous free crab-gait generation for four-legged robots //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.703–710.
337. Fernandez Saavedra R.E., Akinfiyev T., Armada M. Actuator with properties of a stepper motor //Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.871-878.
338. Fichter Eugene F., Fichter Becky L. A survey of legs of insects and spiders from a kinematics perspective // Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation. Philadelphia, USA. 1988. Vol.2. P. 984–986.
339. Fielding M.R., Dunlop R. Exponential fields to establish inter-leg influences for omni-directional hexapod gait //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.587–594.
340. Flannigan W C., Nelson G. M, and Quinn R. D. Locomotion Controller for a Crab-like Robot. Proceedings of the 1998 IEEEInternational Conference on Robotics&Automation, Leuven, Belgium, 1998, C. 152–156.
341. Fraczek J., Morecki A. Design, Analysis and Measurements Problem of Mili-Walking Mashines Using Multi-Body System Formulation //Thirteenth CISM – IFToMM Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators — Ro.Man.Sy. 2000: Book of Abstracts, July 3–6, 2000.— Zakopane, Poland, 2000.—P.355–362.
342. Frik M., Buschmann A., Guddat M., Karataş M., Losch D.C. Autonomous locomotion of walking machines in rough terrain //T heory and Practice of Robots and Manipulators. ROMANSY 13: Proc. of the 13-th CISM–IFToMM Symp., Zakopane, Poland, 2000. P.331–337.
343. Fuzzy logic control for the robot motion in dynamically changing environments /Gradetsky V., Veshnikov V., Kalinichenko S. at other. //Climbing

- and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.377–386.
344. Gaßmann B., Scholl K.-U., Berns K. Behaviour control of LAURON III for walking in unstructured terrain //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.651–658.
345. Gardner J.F. Efficient computation of force distribution for walking machines on round terrain // Robotics, 1992. 10, No.5. P.427-433.
346. Gardner J.F., Srinivasan K., Waldron K.J. Closed loop trajectory control of walking machines // Robotics. 1990.– 8, No.1. P.13–22.
347. Garcia E., Estremera J., Gonzales de Santos P. A control architecture for humanitarian-demining legged robots //Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.383-390.
348. Genta G., Amati N. Planar motion hexapod walking machines — a new configuration //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.619–626.
349. Genta G., Amati N., Padovani M. Performance of twin rigid frames rover on uneven ground — simulation and experimental tests // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2002: Proc. of the 5-th Int. Conf., Paris, France, 2002. P.515-522.
350. Germann D., Bruckmann T., Hiller M. Joystick force feedback based on proximity to the linearized workspace of the four-legged robot ALDURO //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.513–520.
351. Gorinevsky D.M., Schneider A. Force control in locomotion of legged vehicles over rigid and soft surfaces // Int. Journal of Robotics Research. Vol.9, No.2. P.4-23.
352. Gradetsky V., Solovtsov V., Kniazkov M., Rizzotto G.G., Amato P. Modular design of electro-magnetic mechatronic microrobots // Climbing and

- Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.651-658.
353. Guardabrazo Pedroche T.A., Jimenez Ruiz M.A., Gonzalez de Santos P. A detailed power consumption model for walking robots // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.235-242.
354. Habumuremyi J.C., Doroftei I. Mechanical design and MANFIS control of a leg for a new demining walking robot //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.457–464.
355. Hirose S. A study of design and control of a quadruped walking vehicle. — International journal of robotics research, 1984, № 2.
356. Hodgines J. Legged robots on rough terrain: experiments in adjusting step length // Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation. Philadelphia, USA, 1988. Vol.2. P.824–826.
357. Igarashi H., Kakikura M. Slip detection and trajectory correction for walking robots using optical // Proc. of the 11-th Int. Conf. on Advanced Robotics (ICAR 2003), Coimbra, Portugal, 2003. Vol. 2. P.1026-1031.
358. Ihme T., Deutscher M. Design and control aspects for six-legged walking robots to realize adaptation to the environment //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.627–634.
359. Improving a trotting robot's gait by adapting foot trajectory offsets /Ingvast J., Ridderström C., Hardarson F., Wikander J. //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.711–718.
360. Ingvast J., Ridderström C., Hardarson F., Wikander J. WARP1: towards walking in rough terrain — control of walking // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf.

- Catania, Italy, 2003. P.197-204.
361. Ivanescu M., Popescu A.N., Popescu D. Moving target interception for a walking robot by fuzzy observer and fuzzy controller //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.363–376.
362. Jatsun S., Saforov J., Vorontsov R. Dynamics of robot with vibrating engine //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.151–158.
363. Jiang W.Y., Liu A.M., Howard D. Foot-force distribution in legged robots //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.331–338.
364. Kaliyamoorthy S., Quinn R.D., Zill S.N. Roles of force sensors in hexapod locomotion // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.903-910.
365. Kaneko M., Abe M., Tanie K. A hexapod walking machine with decoupled freedoms. —IEEE journal of robotics and automation, 1985, № 4.
366. Kepplin V., Berns K. A concept for Walking Behavior in Rough Terrain // Climbing and Walking Robots. CLAWAR 99: Proc. of the 2nd Int. Conf. Portsmouth, UK., 1999. P.763–772.
367. Kessis J.J., Penne J., Ranbant J.P. Sixlegged walking robot has brains in its legs. —Sensor review, 1982, № 1.
368. Kirchner F., Spenneberg D. Omni-directional walking in multi-pod-robots based on feedback driven oscillators and local reflex mechanisms //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.— London, 2001.— C.643–650.
369. Kiriazov P.K., Virk G.S. On design optimization of robot limbs //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.173–180.
370. Klein Charles A., Chung-Tae-Sang. Force Interaction and Allocation for

- the Legs of a Walking Vehicle // IEEE Journal of Robotics & Automation. 1987, - 3, No.6. P.546–555.
371. Knapczyk J., Tora G. Influence of Leg Flexibilities on the Trajectory Planning of a 3-DOF Spherical Parallel Manipulator //Thirteenth CISM – IFToMM Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators — Ro.Man.Sy. 2000: Book of Abstracts, July 3–6, 2000.—Zakopane, Poland, 2000. —P.249–256.
372. Korenovski V.V., Pogrebnjak A.J. Features of mechanisms synthesis of walking robot propelling. —In: “Preprints RoManSy-86”, Cracow. Poland. 1986.
373. Kubota T., Takahashi H. Micro walking robot design for planetary exploration // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.357-364.
374. Lapshin V. Prance — is it an effective method of a walking robot emergency stop? //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.481–488.
375. Lee Wha-Joon, Orin David E. The kinematics of motion planning for multilegged vehicles over uneven terrain // IEEE Journal of Robotics & Automation, 1988, Vol.4, No.2. P.204–212.
376. Learning Approach to Study Effect of Flexible Spine on Running Behavior of a Quadruped Robot / H. Jalaly Bidgoly, Alalen Vafaei, A. Sadeghi, M. Nili Ahmadabadi // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 1195-1201.
377. Liston R.A. Walking Machine Studies // The Military Engineer. 1967, vol.59, No.338. P.10.
378. Load Allocation Control in Motion Transfer from Ladder Climbing to Brachiation for a Multi-locomotion Robot / Zhiguo Lu, Tadayoshi Aoyama, Kosuke Sekiyama And Toshio Fukuda // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for

- Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 1195-1201.
379. Longo, D. Performance Evaluation of Electrostatic Adhesion for Climbing Robots / Domenico Longo, Giovanni Muscato, Giuseppe Tarantello // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 1195-1201.
380. Markusek J., Vitko A., Jurišica L. Unified simulation environment for learning navigation of a robot operating in unknown terrain //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.— London, 2001.— C.435–441.
381. McGee T. Passive dynamic walking. *The International Journal of Robotics Research*, vol.9, No. 2, 1990.
382. Mocci U , Petternella M.. Salinan S. Experiences with six-legged walking machines with fixed gait. —In: “Proc. of II Int. symposium on control of human., lkoi98 extremities”, Dubrovnic, Yugoslavia, 1972.
383. Moore E.Z., Buehler M. Stable stair climbing in a simple hexapod robot terrain // Climbing and Walking Robots. CLAWAR 2001: Proc. of the 4-th Int. Conf. Karlsruhe, Germany, 2001. P.603–609.
384. Mosher R.S. Test end evaluation of versatile walk truck. —In; “Proc. on off-road mobility research symposium”, Wasington, 1968.
385. Multimodal control of hexapod mobile manipulator MELMANTIS-1 /Koyachi N., Adachi H., Izumi M. and other //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fifth International Conference CLAWAR 2002.—London, 2002.— C.471–478.
386. Müller J., Hiller M. Modelling, Simulation and Nonlinear Control of a Combined Legged and Wheeled Vehicle //Thirteenth CISM – IFToMM Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators — Ro.Man.Sy. 2000: Book of Abstracts, July 3–6, 2000.—Zakopane, Poland, 2000. —P.363–370.

387. Muscato G., Savally N. Computing requirements for CLAWAR machines //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.283–290.
388. Nonami K., Huang Q.-J. Humanitarian mine detection six-legged walking robot COMET-II with two manipulators //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.989–996.
389. Okada T., Hirokawa Y., Sakai T. Development of a rotating four-legged robot PEOPLER for walking on irregular terrain // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf., Catania, Italy, 2003. P.593-600.
390. Okhotsimsky D.E., Platonov A.K., Pavlovsky V.E., Lensky A.V., Kiril'chenko A.A., Yaroshevsky V.S. Concept, design and control of Six-legged walking robot // Climbing and Walking Robots. CLAWAR 1998: Proc. of the 1-st Int. Conf. Brussels (Belgium), 1998. P.361-366.
391. Omni-directional mobility of limb mechanism robot /Arai T., Takahashi Y., Maeda H. and others //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.635–642.
392. On Ground And Profile Practicability Of Multilegged Walking Machines/ Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В., Шерстобитов С.В., Григорян Г.Г., Савин А.Ю.// Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.1005–1012.
393. On Dynamics of Movement of Walking Machines with Gears Made on the Basis of Cycle Mechanism of Walking /Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В., Шерстобитов С.В. //Thirteenth CISM – IFToMM Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators — Ro.Man.Sy. 2000: Book of Abstracts, July 3–6, 2000.—Zakopane, Poland, 2000.—P.38.
394. On Dynamics of Movement of Walking Machines with Gears on the Basis of Cycle Mechanisms /Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В.,

- Шерстобитов С.В. //Theory and Practice of Robots and Manipulators — ROMANSY 13 : Proc. of the 13-th CISM–IFTToMM Symposium /International Centre for Mechanical Sciences. Wien; New York, 2000.—P.44–48.
395. On the modelling of SMART non-linear actuator for walking robots /Caballero R., Akinfiyev T., Montes H., Armada M. //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.159–166.
396. On the Turn of Walking Machines with Moving Propellers Made on the Basis of Cycled Mechanisms / Briskin E.S., Chernyshev V.V., Maloletov A.V. and other // Theory and Practice of Robots and Manipulators. ROMANSY 14: Proc. of the 14-th CISM–IFTToMM Symp. Udine, Italy, 2002. P.423–430.
397. Ozguner F. Tsai S. J., McGhee R.B. An approach to the use of terrain-preview information in rough-terrain locomotion by a hexapod walking machine —International journal of robotics research, 1984, № 2.
398. Palis F., Rusin V., Schneider A. Adaptive impedance/force control of legged robot systems //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.323–329.
399. Pavlovsky V.E., Platonov A.K. Cross-Country Capabilities of a Walking Robot: Geometrical, Kinematic and Dynamic Investigation //Thirteenth CISM – IFTToMM Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators — Ro.Man.Sy. 2000: Book of Abstracts, July 3–6, 2000.—Zakopane, Poland, 2000. —P. 131–138.
400. Perkins, A. D. Robotic Hopping with a Biometric Leg / A. D. Perkins, P. J. Csonka, and K. J. Waldron // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 125-132.
401. Peters, G. A Prototype Climbing Robot for Inspection of Complex Ferrous Structures / G. Peters, D. Pagano, D. K. Liu, K. Waldron // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support

Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 1195-1201.

402. Porta J.M., Celaya E. Efficient gait generation using reinforcement learning //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.411–418.
403. Quadruped demonstrates potential capabilities —Army research and development news magazine, 1964. № 4.
404. Reactive reflex based posture control for a four-legged walking machine /Albiez J., Luksch T., Ilg W., Berns K. //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.735–742.
405. Reeder P.D., Hemami H. Three-legged robots — kinematics, dynamics, and control //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.667–677.
406. Ridderström C., Ingvast J. Warp1: towards walking in rough terrain - smooth foot placement // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.467-474.
407. Schulz S., Pylatiuk C., Bretthauer G. Walking machine with compliant joints //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.231–236.
408. Silva M.F., Tenreiro Machado J.A., Endes Lopes A.M. Energy analysis of multi-legged locomotion systems //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.143–150.
409. Silva M.F., Tenreiro Machado J.A. Position and Force Control of a walking hexapod // Proc. of the 11-th Int. Conf. on Advanced Robotics (ICAR 2003). Coimbra, Portugal, 2003. Vol. 3. P.1743-1748.
410. Six Link Mechanisms for the Legs of Walking Machines Bessonov A.P., Umnov N.V., Korenovsky V.V. and others //Thirteenth CISM – IFToMM

Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators — Ro.Man.Sy. 2000: Book of Abstracts, July 3–6, 2000.—Zakopane, Poland, 2000. —P.347–354.

411. Schmucker U., Schneider A., Rusin V. Interactive virtual simulator (IVS) of six-legged robot “Katharine” // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.327-332.
412. Shieh W-B. Design and Optimization of Planar Leg Mechanisms Featuring Symmetrical Foot-point Paths. Thesis Report Ph.D. The University of Maryland, USA, 1996.
413. Song S.M., Vohnout V.J., Waldron K.J., Kinzel G.L. Computer-aided design of a leg for an energy efficient walking machine. —Mechanism and machine theory, 1984. № 1.
414. Song S.M., Waldron K.J. Geometric design of a walking machine for optimal mobility // Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. 1986. P.1-15.
415. Stativ walker foot design and implementation /Palacin J., Donaire O., Roca J., Marco S. //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.181–188.
416. Stelzer M., Hardt M., Von Stryk O. Efficient dynamic modeling, numerical optimal control, and experimental results for various gaits of a quadruped robot // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.601-608.
417. Sutherland I.E., Uller M.K. Foot prints in the Asphalt // The International Journal of Robotic Research, 1984, Vol.3, No.2. P.29–36.
418. Svinin M., Hosoe S., Ueda K. Optimal decentralization of reinforcement learning schemes in acquiring gait patterns by walking machines //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.— London, 2001.— C.427–434.

419. Takemura H., Matsumoto Y., Ogasawara T. Dynamic walking of an autonomous quadruped robot based on rhythm generation //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.— London, 2001.— C.727–734.
420. Three-dimensional adaptive dynamic walking of a quadruped robot by using neural system model / Kimura H., Fukuoka Y., Hada Y., Takase K. // Climbing and Walking Robots. CLAWAR 2001: Proc. of the 4-th Int. Conf. Karlsruhe, Germany, 2001. P.97–104.
421. The control of compound eight-legged walking machine movement with the individual drives/ Брискин Е.С., Чернышев В.В., Малолетов А.В., Савин А.Ю., Тельдеков А.В., Жога В.В.// Climbing and Walking Robots. V International Conference CLAWAR 2002, France, P. 487–493.
422. The walking truck. —Machine design, 1969, № 9.
423. Three-dimensional adaptive dynamic walking of a quadrupedrobot by using neural system model/ Kimura H., Fukuoka Y., Hada Y., Takase K. //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.97–104.
424. Tomovich R., Mcghee R.B. A finite state approach to the synthesis of bioengineering control systems. —IEEE Trans. human factors in electronics, 1966. № 2.
425. Uchida H., Nonami K. Quasi force control of mine detection six-legged robot COMET-I using attitude sensor //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.979–988.
426. Uchida H., Nonami K. Attitude control of six-legged robot using sliding mode control // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.103-110.
427. Umetani Y., Omichi T., Ibe T., Hirose S., Sirozu K., Ishibashi A. Fourlegged walking robot. —Robot, 1985, № 47.

428. Virk G.S. Functionality modules — specifications and details //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.275–282.
429. Waldron K.J., Mcghee R.B. The mechanics of mobile robots. —Robotics, 1986, № 2.
430. Waldron K.J. The Adaptive Suspension Vehicle // IEEE Control System Magazine. 1986. Vol.6. P.7-12.
431. Waldron K.J., Vohnout V.J., Pery A., Mcghee R.B. Configuration design of the adaptive suspension vehicle. —International journal of robotics research, 1984, № 2.
432. Waldron K.J. The mechanics of mobile robots. —In: “Proc.of ICAR-85”, Tokyo, 1985.
433. Warren H.A. CLAWAR2 — Mobile mashines operating in outdoor unstructed terrains //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fifth International Conference CLAWAR 2002.—London, 2002.— C.907–916.
434. Wójcik P. Mechanical Design of a four-legged walking machine with versatile leg construction //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.189–196.
435. Yokota S., Kobayashi H., Kawabata K. Development of mobile system using leg-type crawler for rough terrain // Climbing and Walking Robots and their Supporting Technologies. CLAWAR 2003: Proc. of the 6-th Int. Conf. Catania, Italy, 2003. P.301-307.
436. Yoneda K. Design of non-bio-mimetic walker wath fewer actuators //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.115–126.
437. Zhoga V.V. Computation of Walking Robots Movement Energy Expenditure // Proceedings of the 1998 IEEEInternational Conference on Robotics&Automation, Leuven, Belgium, 1998, C. 163–168.
438. Ziegler J., Banzhaf W. Evolution of robot leg movement in a physical

- simulation //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.395–402.
439. Zielinska T., Choong K.C., Heng J. Actuating system of six-legged walking machine //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.611–618.
440. Zielinska T., Heng J. Development of Walking Machines: Novel Leg Drive Design and Control //Thirteenth CISM – IFToMM Symposium on the Theory and Practice of Robots and Manipulators — Ro.Man.Sy. 2000: Book of Abstracts, July 3–6, 2000.—Zakopane, Poland, 2000.—P.324–329.
441. Zielinska T., Heng J., Seet G. Design and control of LAVA quadruped //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.679–686.
442. Zielinska T. Synthesis of control system — gait implementation problems //Climbing and Walking Robots: Proc. of the Fourth International Conference CLAWAR 2001.—London, 2001.— C.489–496.
443. <http://autsys.aalto.fi/en/MECANT>
444. <http://cyberneticzoo.com/walking-machines/1988-91-ambler-john-bares-william-red-whittaker-american/>
445. [http://en.wikipedia.org/wiki/Zadoc\\_Dederick](http://en.wikipedia.org/wiki/Zadoc_Dederick)
446. <http://phys.org/news/2013-08-robot.html>
447. <http://homepage.mac.com>
448. [http://www.delo.tver.ru/tsm/prod\\_bol.html](http://www.delo.tver.ru/tsm/prod_bol.html)
449. <http://www.enlight.ru/ib/tech/vtm/vniitm.pdf>
450. <http://www.i-r.ru/?p=shagaet-po-bolotu,-gde-i-losyu-ne-proyti>
451. [https://www.ri.cmu.edu/pub\\_files/pub3/santos\\_pablo\\_gonzalez\\_de\\_1991\\_1/santos\\_pablo\\_gonzalez\\_de\\_1991\\_1.pdf](https://www.ri.cmu.edu/pub_files/pub3/santos_pablo_gonzalez_de_1991_1/santos_pablo_gonzalez_de_1991_1.pdf)
452. <http://www.tcheb.ru/>
453. <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs.cmu.edu/user/epk/www/home.html>
454. <http://www.automation.hut.fi>

- 455. <http://maas-neotek.arc.nasa.gov/dante>
- 456. [http://www.minitex.ru/production/minitex\\_spb/kaiser/kaiser.htm](http://www.minitex.ru/production/minitex_spb/kaiser/kaiser.htm)
- 457. <http://www.plustech.fi>
- 458. <http://www.therobotlab.com>
- 459. <http://www.walking-machines.org/>
- 460. <http://www.walkingrobots.com>