



**Вановский Владимир Валерьевич**

**Резонансный механизм дробления газового пузырька в  
жидкости**

Специальность 01.02.05 —  
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
**Петров Александр Георгиевич**

Официальные оппоненты: **Ахатов Искандер Шаукатович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Сколковский институт науки и технологий,  
директор Центра проектирования, производственных  
технологий и материалов

**Аксенов Александр Васильевич**,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
Московский государственный университет имени  
М.В.Ломоносова,  
профессор механико-математического факультета

Ведущая организация: Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»

Защита состоится 23 апреля 2020 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при ИПМех РАН по адресу: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН и на сайте <http://ipmnet.ru/diss/diss/>.

Автореферат разослан 04 марта 2020 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 002.240.01 при ИПМех РАН,  
канд. физ.-мат. наук

Сысоева Елена Ярославовна

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В конце 80-х годов в связи с исследованиями шумов моря возник интерес к резонансным явлениям в колебаниях пузырьков. В серии работ Лонге-Хиггинса 1989-го года показывается, что колебания по деформационной моде приведут к колебаниям по радиальной моде на удвоенной частоте, и в случае приблизительного резонанса частот 2:1 вклад деформационных мод будет особенно велик. Уже в следующем году тот же автор провёл численное моделирование спектра шума моря на основе полученных результатов, дающее неплохое согласие с произведёнными Медвином измерениями.

В 1991-м году Уильямс и Гуо рассмотрели резонанс деформационной и радиальной моды 2:1. Методом двух масштабов было показано, что энергия из деформационной моды будет медленно перекачиваться в радиальную моду, затухание не учитывалось. Часть статьи была посвящена критике работ Лонге-Хиггинса в связи с отсутствием в них подобного механизма перекачки энергии. В том же году Лонге-Хиггинс выпустил статью, где подверг ответной критике работу Уильямса и Гуо, справедливо заметив, что механизм медленной резонансной перекачки энергии в направлении от деформационной к радиальной моде будет гаситься диссипацией. В обеих работах был рассмотрен только прямой процесс перехода энергии деформационной моды в акустическую энергию излучения радиальной моды.

В статье Фенга и Лиля 1993-го года была рассмотрена перекачка энергии между модами и было показано, что на самом деле перекачка происходит в обе стороны по очереди, если пренебречь затуханием. Также, в пренебрежении затуханием, из закона сохранения энергии было получено оценочное условие дробления для нескольких номеров мод по начальной амплитуде радиальных колебаний. В работе Мао 1995-го года приведены экспериментальные свидетельства наличия перекачки энергии между модами для свободно колеблющихся пузырьков, выдуваемых из сопла. В работе МакДугалда 1999-го года было проведено численное моделирование динамики пузырька для резонанса 2:1 и были получены формы пузырьков перед дроблением. Были предсказаны два типа дробления: пузырьковое кольцо и дробление на несколько частей.

Затухание колебаний пузырьков – фундаментальная тема, вошедшая во многие современные труды по гидродинамике. Любые серьёзные теоретические и экспериментальные исследования колебаний пузырьков требуют точного учёта затухания. Диссипация играет важную роль для описания затухания акустической волны в пузырьковой среде, задач кавитации, что имеет многочисленные инженерные и медицинские приложения. Среди них контрастно усиленная ультразвуковая томография, защита турбин от кавитационной эрозии, изолированный подрыв подводных конструкций, сонолюминесценция, подводные стелс-технологии, исследование газообмена атмосферы с океаном, исследование состава пузырьковых смесей. Также учёт диссипации обязателен для описания механизмов дробления пузырьков в акустической волне.

В 70-ые годы возникла современная теория затухания, описанная в работах Эллера, Чапмана и Плессета, Нигматулина и Хабеева, Просперетти. Просперетти привёл в работе, опубликованной в 1977-м году, наиболее строгий и аккуратный вывод линейной теории затухания одиночного пузырька, и дополнил его в 1991-м году оценками применимости сделанных предположений. Также следует отметить, что в работе Нигматулина, Хабеева и Нагиева 1981-го года учтены фазовые превращения, в работе Просперетти и соавторов 1988-го года учтена нелинейность колебаний, в многочисленных работах разных авторов проведены численные расчёты затухания для нелинейного случая, полученные результаты применены к затуханию волн в пузырьковой среде (см. работу Андо 2009-го года) и хорошо согласуются с экспериментом. Во многих работах доказывается теоретически и экспериментально способность слоя пузырьковой жидкости практически полностью погасить падающее на него акустическое излучение. Этот факт был использован при изолированном подрыве опоры старого моста в Сан-Франциско в 2015-м году.

Задача дробления пузырька в акустической волне имеет приложения в медицине, океанологии, а также смежна со многими другими проблемами кавитации и сонолюминесценции. Имеются экспериментальные подтверждения того факта, что с помощью дробления пузырьков ультразвуком вблизи гематоэнцефалического барьера можно обеспечить доставку препаратов в мозговые ткани (см. обзор Выходцевой 2008-го года), что является одной из основных проблем лечения болезней мозга. Механизм дробления пузырька ультразвуком до сих пор не получил полного описания, несмотря на большое количество научных работ по этой теме (см. например работу Гуедры и Инсеры 2018-го года). Также в работе Крама 1984-го года обнаружено ускорение процесса диффузии при возбуждении несферических колебаний, что даёт потенциальные приложения задачи в технологических процессах массообмена газ-жидкость.

Существует много экспериментальных подтверждений того факта, что пузырьки в акустической волне излучают на субгармонических частотах, делящих нацело частоту волны (см. работы Гута 1956-го года и Неппираса 1980-го года). Эллер и Флинн в 1969-м году показали, что наличие таких субгармоник может вызываться несферическими колебаниями пузырька, находящимися в целочисленном резонансе частот с радиальной модой. Просперетти в 1977-м году продемонстрировал, что учёт затухания деформационной моды приводит к появлению пороговой величины амплитуды возбуждающей волны, при которой возникают деформационные колебания пузырька, и предложил использовать это явление для измерения затухания колебаний пузырька.

Также существует множество экспериментальных подтверждений возможности дробления пузырька из-за деформационных колебаний его формы (см. обзор Лойтеборна и соавторов 1999-го года), в работах Хольта и Гайтана 1996-го года и Ву и Робертса 1998-го года были сделаны даже попытки объяснить явление сонолюминесценции неустойчивостью радиальных колебаний при резонансе. В статье Фенга и Лиля 1993-го года было показано, что энергия активнее

всего перекачивается из радиальных колебаний в деформационные при соотношении частот колебаний 2:1. В работах [1;2] были получены период перекачки энергии и отношение амплитуд мод в зависимости от номера моды, быстро растущее с увеличением номера моды  $n$ , в последней из них было показано, что наибольшее увеличение амплитуды колебаний происходит при перекачке энергии в осесимметричные деформационные моды.

Основным недостатком указанных работ было рассмотрение только свободных колебаний пузырька без диссипации, которая, как известно, довольно велика. Таким образом, для оценки возможности дробления по резонансному механизму требуется исследовать динамику колебаний пузырька с учётом диссипации и вынуждающей силы, что было сделано, например в работе Харкина и соавторов 2013-го года, где были получены параметрические диаграммы стабильности поверхности пузырька. Вообще, пороговый характер возникновения неустойчивости сферических колебаний — хорошо изученная теоретически и экспериментально тема. Для такой параметрической неустойчивости были изучены возникающие бифуркации и хаос. Эксперименты с определением таких порогов для пузырьков разного размера были описаны в работе Клеве и соавторов 2018-го года. Однако не было работ, где вместо нахождения порога возникновения неустойчивости проводились бы исследования возможности дробления в предположении, что неустойчивость уже развита и энергия активно перетекает из радиальных колебаний в деформационные.

Из вышесказанного следует, что предлагаемый резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости, основанный на значительном возрастании амплитуды деформационной моды колебаний при перекачке в неё энергии из возбуждаемой акустической волной радиальной моды при выполнении резонансных условий (далее они называются резонансом частот 2:2:1: возбуждающая волна находится в резонансе с радиальной модой, а частоты радиальной и деформационной мод соотносятся как 2:1), имеет многочисленные приложения, а его исследование и получение оценочного условия дробления является актуальной проблемой гидродинамики многофазных сред. Наличие большого количества работ по динамике свободных и вынужденных колебаний несферического пузырька также подтверждает актуальность исследования.

**Практическая значимость** обеспечивается многочисленными возможными приложениями резонансного механизма дробления пузырька:

- в медицине для прорыва гематоэнцефалического барьера и доставки лекарств в мозг пациента с помощью облучаемых ультразвуком контрастных агентов (покрытых оболочкой пузырьков);
- в процессах массообмена для активизации массообмена путём возбуждения деформационных колебаний;
- в фундаментальной физике для управления составом пузырьковой смеси и для объяснения появления субгармоник;
- в технологии подводных сооружений и механизмов для предотвращения кавитационной эрозии;

– в морской акустике для объяснения характеристик звука моря.

**Целью** данной работы является описание резонансного механизма дробления газового пузырька в жидкости и оценка условий его реализации.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить аналитическое описание методом гамильтоновой нормальной формы резонансной перекачки энергии между радиальной и произвольной деформационной модой свободных малых колебаний газового пузырька в жидкости в отсутствие затухания при резонансе частот мод 2:1. Проанализировать полученные результаты, найти период перекачки энергии и относительное увеличение амплитуды деформации в ходе перекачки в зависимости от индексов моды.
2. Исследовать механизмы затухания колебаний газового пузырька в жидкости. Получить удобные для использования аналитические выражения для линейного отклика малого пузырька на возбуждение акустической волной с учётом термической, вязкой и акустической диссипации, а также эффектов поверхностного натяжения. Сравнить роль различных механизмов затухания. Рассчитать огибающую резонансных пиков для воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении.
3. Исследовать малые вынужденные колебания малого газового пузырька в акустической волне в жидкости при резонансе частот между волной, радиальной и деформационной модами колебаний 2:2:1. В пренебрежении затуханием деформационной моды описать аналитически процесс перекачки энергии между модами.
4. Получить оценочные условия дробления газового пузырька в жидкости по резонансному механизму в случаях быстрого и медленного старта акустической волны, а также характерное время быстрого её старта (времени включения волны, за которое переходные процессы установления колебаний пузырька не успевают пройти).

### **Научная новизна:**

1. Методом гамильтоновой нормальной формы аналитически описана резонансная перекачка энергии между радиальной и произвольной деформационной модой свободных малых колебаний газового пузырька в жидкости в отсутствие затухания при резонансе частот 2:1. Найдены период перекачки энергии и относительное увеличение амплитуды деформации в ходе перекачки в зависимости от индексов моды  $n, m$ .
2. Получены удобные для использования формулы, описывающие свободные и вынужденные колебания пузырька с учётом акустической, вязкой, тепловой диссипации и поверхностного натяжения. Получена огибающая резонансных кривых для вынужденных колебаний пузырька, которая может быть использована для нахождения условий резонансного дробления пузырька.

3. Выполнено оригинальное исследование малых вынужденных колебаний небольшого газового пузырька в акустической волне в жидкости при резонансе частот 2:2:1. С помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова аналитически описан процесс перекачки энергии между модами в пренебрежение затуханием деформационной моды.
4. Впервые получены оценочные условия дробления газового пузырька в жидкости по резонансному механизму в случаях быстрого и медленного старта акустической волны, а также характерное время быстрого старта.

**Методология и методы исследования.** Для решения задачи о свободных колебаниях пузырька при резонансе частот колебаний по радиальной и деформационной модам 2:1 использовалась методика инвариантной нормализации гамильтониана, предложенная академиком В.Ф.Журавлёвым. Для описания механизмов диссипации колебаний пузырька использовалась техника осреднения по объёму. Для исследования вынужденных колебаний пузырька использовалась методика осреднения Крылова-Боголюбова. Для верификации аналитических результатов путём сравнения с численными решениями, использовались разнообразные методы вычислительной математики, предназначенные для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и подсчёта квадратур.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Нормальная форма гамильтониана свободно колеблющегося пузырька в случае резонанса частот радиальной и произвольной деформационной моды 2:1 позволяет получить аналитическое описание процесса перекачки энергии между модами, что даёт возможность вычислить период перекачки энергии, отобрать моды с наиболее низким периодом в предположении равномерного распределения энергии между модами, а также вычислить увеличение амплитуды деформации в ходе перекачки энергии. Полученное увеличение амплитуды весьма значительно (до нескольких десятков раз) и является предпосылкой для дальнейшего исследования возможности резонансного дробления пузырька с учётом диссипации и для случая вынужденных колебаний.
2. В предположениях гомобаричности (однородности давления внутри пузырька), отсутствия фазовых переходов, малости вязких, поверхностных и акустических эффектов, методом осреднения по объёму можно единым образом описать свободные и вынужденные радиальные колебания пузырька в линейной постановке с учётом тепловых, вязких, поверхностных и акустических эффектов. Акустические эффекты можно учесть в первом приближении с помощью уравнения Келлера. Можно показать, что тепловой механизм диссипации доминирует над остальными для воздушных пузырьков размером от 5 микрон до 5 мм в воде при атмосферном давлении. Параметры свободных колебаний можно получить в неявном виде, как решение алгебраического уравнения на комплексную частоту колебаний. Линейный отклик в случае вынужденных колебаний непосредственно выражается через

безразмерные параметры задачи, что позволяет вычислить огибающую резонансных кривых для вынужденных колебаний пузырька.

3. С помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова можно получить асимптотическое описание динамики малых колебаний пузырька при резонансе частот между возбуждающей волной, радиальной и деформационной модами колебаний 2:2:1. С помощью полученных результатов по затуханию колебаний пузырька можно учесть все существенные механизмы диссипации энергии радиальной моды (термический, акустический, вязкий) и эффекты поверхностного натяжения. Затуханием деформационной моды можно пренебречь для не слишком больших резонансных пузырьков. Можно показать, что амплитуда деформационной моды значительно вырастает, и способна многократно превысить амплитуду радиальной моды. Исходя из этого можно получить оценочные условия резонансного дробления пузырька в случае быстрого и медленного включения акустической волны, а также характерное время быстрого её включения.

**Достоверность** полученных результатов для резонансной перекачки энергии в случае свободных и вынужденных колебаний пузырька обеспечивается сравнением с численными расчётами, а также проведением аналогии с хорошо известной задачей о качающейся пружине. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными Петровым и Фомичевым в 2009-м году в упрощённой постановке для эллипсоидального пузырька. Достоверность результатов по затуханию свободных и вынужденных малых радиальных колебаний газового пузырька в жидкости обеспечивается соответствием результатов многочисленным работам в этой области.

**Апробация работы.** Основные результаты работы представлены приблизительно на 20 конференциях и на 7 семинарах, среди которых стоит отметить:

- X и XI Всероссийские съезды по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011 и Казань, 2015)
- 8th and 9th International Symposiums on Cavitation (CAV 2012, CAV 2015) (Сингапур, 2012 и Лозанна, Швейцария, 2015)
- 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014) (Вена, Австрия, 2014)
- The 16th International Conference on Fluid Flow Technologies (CMFF'15) (Будапешт, Венгрия, 2015)
- 14th International Conference on Vibration Engineering and Technology of Machinery (VETOMAC XIV) (Лиссабон, Португалия, 2018)
- 14th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics (HEFAT 2019) (Виклоу, Ирландия, 2019)
- Три доклада на семинарах «Механика систем» имени академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем под руководством акад. В.Ф. Журавлева и акад. Д.М. Климова: 18-го мая 2015 г., 10-го октября 2016 г. и 9-го декабря 2019 г.

– Выступление на видеосеминаре по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбПУ-НИИМ МГУ 24 апреля 2018 г.

На 4 конференциях автор был удостоен диплома за лучший доклад на секции.

**Личный вклад.** Автор принял активное участие в постановке задач и выборе методов для исследования, самостоятельно решил все поставленные задачи, самостоятельно и в соавторстве подготовил результаты к публикации. В частности, в задаче о резонансной перекачке энергии для свободных колебаний пузырька [1; 2], он самостоятельно получил потенциал скорости жидкости, кинетическую и потенциальную энергию, построил лагранжиан и гамильтониан системы и, используя аналогию с качающейся пружиной, применил метод инвариантной нормализации к получению нормальной формы гамильтониана, которую затем самостоятельно исследовал аналитически и численно. В задаче о затухании свободных и вынужденных радиальных колебаний пузырька в жидкости [5; 8] он воспользовался постановкой задачи Петрова А. Г., самостоятельно добавив учёт вязкой и акустической диссипации, а также поверхностного натяжения. В задаче о вынужденных колебаниях пузырька при резонансе частот 2:2:1 [3–7] он воспользовался алгоритмом для качающейся пружины, но самостоятельно поставил задачу, подобрал замены, приводящие уравнения к пригодному для осреднения виду, решил и проанализировал уравнения. Автор самостоятельно получил оценочные условия дробления пузырька и предложил две реализации механизма резонансного дробления: при резком включении акустической волны и при плавном её включении, а также оценил характерное время такого быстрого включения. Также автор проанализировал полученные результаты и предложил пути дальнейшего развития исследования.

Диссертационная работа выполнялась при поддержке грантов РФФИ №11-01-00535-а, №12-01-09283-моб\_з, №14-01-00818, №14-01-00892, №14-01-31370 мол\_а, №17-01-00901 и гранта РНФ №14-19-01633 а также в рамках темы госзадания № АААА-А17-117021310382-5.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 статьях, из которых 6 индексируются в базах данных «Сеть науки» (Web of Science) или «Скопус» (Scopus) и входят в список рекомендуемых изданий ВАК, а также в большом количестве сборников материалов и тезисов международных и всероссийских конференций.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность, практическая значимость и достоверность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, проводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель и ставятся задачи, излагаются научная новизна и выносимые на защиту положения представляемой работы, кратко описывается методология, апробация, личный вклад и публикации автора по теме работы, приводится краткое содержание последующих глав.

В первой главе методом инвариантной нормализации гамильтониана решается задача о динамике свободно колеблющегося пузырька при резонансе частот радиальной и произвольной деформационной моды колебаний 2:1 в отсутствие диссипации, что составляет собой содержание статей [1; 2]. Строится аналитическое описание процессов перекачки энергии, позволяющее получить период перекачки в произвольную моду и выделить моды, которые скорее всего будут возбуждаться. Обнаруживается аналогия с задачей о качающейся пружине при таком же резонансе между модами колебаний. Показывается, что, в отличие от пружины, амплитуда колебаний деформационной моды пузырька значительно превышает амплитуду радиальной моды, и обсуждается возможность дальнейшего дробления пузырька по такому механизму.

Во введении к главе проводится обзор литературы, относящейся к проблеме. Отдельным подразделом разбирается решение задачи о качающейся пружине, являющейся простейшей модельной аналогией задачи о пузырьке. Следующие разделы посвящаются постановке задачи, её решению, анализу полученных результатов и выводам.

Пузырёк представляется модельной системой с тремя степенями свободы: первая из них отвечает за его объёмную деформацию, а остальные две за несферическую деформацию, описываемую искажением формы по полиному Лежандра с индексами  $n, m$ . Течение жидкости предполагается потенциальным и потенциал течения  $\varphi$  находится из решения внешней задачи Неймана  $\Delta\varphi = 0$  с граничными условиями на равенство нормальных скоростей границы пузырька, задаваемых потенциалом и уравнением границы. Потенциал раскладывается по сферическим функциям до второго порядка малости по сферическим и несферическим относительным деформациям.

Далее находятся кинетическая и потенциальная энергии системы пузырёк-жидкость. Кинетическая энергия, в пренебрежении кинетической энергией газа внутри пузырька, сводится к интегралу по поверхности пузырька функции  $\varphi\nabla\varphi$  умноженной на плотность жидкости пополам. Потенциальная энергия вычисляется как сумма энергии поверхностного натяжения границы газ-жидкость и работы против внешнего давления при адиабатическом расширении пузырька. Энергии приводятся до третьего порядка малости по малым величинам деформации границы пузырька. Для упрощения восприятия, в третьем порядке малости энергии выписываются в пренебрежении нерезонансными членами, которые при резонансе частот колебаний 2:1 дают нулевое среднее значение.

Из решения линейной системы (закон сохранения энергии для второго порядка малости) находятся частоты колебаний пузырька по радиальной и деформационной модам, совпадающие с миннаэртзовской и лэмбовой частотами. Затем вычисляется резонансный радиус пузырька, соответствующий отношению частот 2:1. На рисунке 1 изображена зависимость радиуса воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении от  $n$  — номера резонансной моды (условие резонанса зависит только от нижнего индекса) при резонансе частот 2:1,  $\sigma = 0.073$

Н/м,  $p_\infty = 10^5$  Па,  $\gamma = 1.4$ . Резонансные условия не зависят от  $m$  — второго индекса деформационной моды, из чего следует, что одновременно в резонансе с радиальной модой будут  $2n + 1$  деформационных мод.

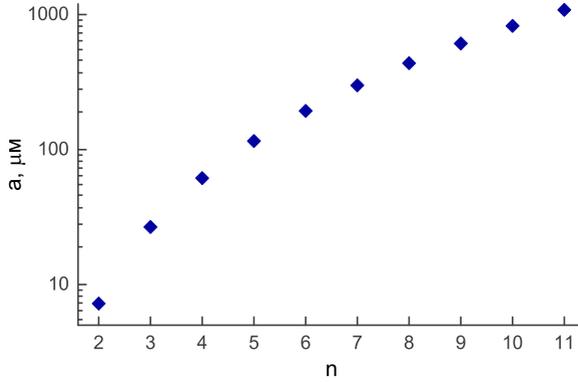


Рис. 1 — Размер резонансного воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении в зависимости от номера деформационной моды  $n$

Далее строится функция Лагранжа колеблющегося пузырька, из которой с помощью преобразования Лежандра получается функция Гамильтона. Производится переход к безразмерным переменным, в которых невозмущённый гамильтониан (второго порядка малости) является гамильтонианом колебательной системы с частотами 2, 1 и 1, а возмущение является безразмерной функцией, зависящей от индексов полинома Лежандра несферической моды  $n$  и  $m$ . С помощью техники инвариантной нормализации, разработанной академиком В. Ф. Журавлёвым, гамильтониан приводится к нормальной форме в первом приближении. После перехода к переменным Биркгофа находятся четыре первых интеграла системы. Последний из этих интегралов описывает динамику изменения энергии, запасённой в деформационной моде, как динамику движения точечной массы в потенциале  $\Pi(\xi)$  из семейства, изображённого на рисунке 2а. Переменная  $\xi$  здесь отвечает за отношение энергии, запасённой в деформационной моде, к общей энергии колебаний. Потенциалы отличаются друг от друга значением другого третьего интеграла  $\Sigma$ , который является эффективным моментом системы по деформационным модам и пренебрежимо мал в случае малого начального отклонения пузырька от сферичности. Заштрихованы регионы допустимого начального положения энергии деформационной моды в случаях  $\Sigma = 0$  (штриховка серым цветом) и  $\Sigma = 0.6$  (ниже, штриховка малиновым цветом). Из полученного значения потенциала находится период перекачки энергии колебаний из радиальной моды в деформационную и обратно. При стремлении начальной энергии деформации  $\xi_0 \rightarrow 0$  вычисляется асимптотика для этого периода

$$T = \frac{1}{2z_{\max}K} \ln \frac{8}{\xi_0} (1 + O(\xi_0)), \quad K = \frac{4n + mn(2n + 1) - 1}{8}$$

где  $z_{\max}$  является начальным значением амплитуды колебаний пузырька по радиальной моде. Период перекачки зависит от индексов  $n, m$  деформационной моды и если предположить, что все резонансные моды с одним и тем же  $n$  в начале возбуждены с одной и той же энергией (кроме осесимметричной, возбуждённой с двойной энергией вследствие вырождения по азимутальному углу), то, как видно из рисунка 2б, быстрее всего энергия перейдёт в  $n, n$ -ую деформационную моды (точнее, две моды, отличающиеся по азимутальному углу).

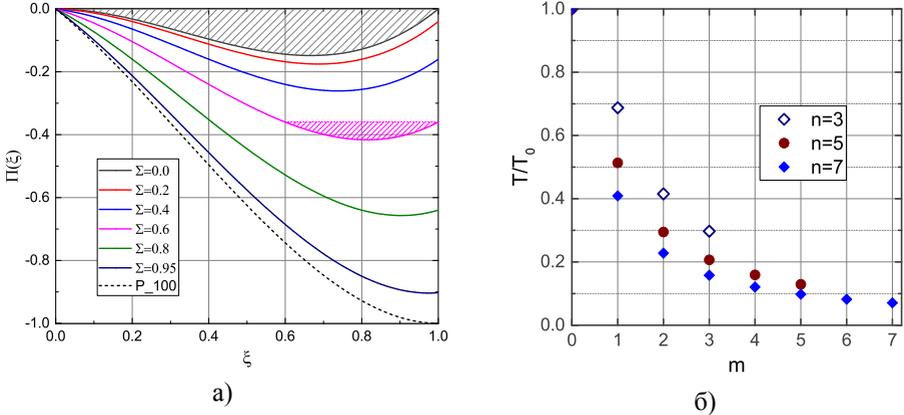


Рис. 2 — а) Семейство потенциалов энергии деформационной моды для разных значений эффективного момента  $\Sigma$ ; б) Отношение периодов перекачки  $n, m$  и  $n, 0$  деформационной мод для  $n = 3, 5, 7$

Огибающие для колебаний по радиальной моде и деформационной моде при  $\xi_0 \rightarrow 0$  представляются суммой солитонов, отстоящих друг от друга на период  $T$ . Как видно из рисунка 3, асимптотики описывают процесс перекачки энергии. Период колебаний, вычисленный из моделирования, с погрешностью около 0.5% соответствует теоретически предсказанной величине.

Наконец, вычисляется отношение максимальной амплитуды деформационной моды  $A_\xi$  к начальной амплитуде радиальной моды  $A_0$ . Показывается, что оно максимально при  $m = 0$  и в этом случае примерно равно  $2\sqrt{(n+1)(2n+1)}$ . Зависимость отношения  $A_\xi/A_0$  от  $n$  и  $m$  изображена на рисунке 4. Из графика видно, что при одной и той же начальной амплитуде радиальных колебаний амплитуда колебаний резонансной моды тем больше, чем больше ее номер  $n$ , достигая нескольких десятков при  $n \sim 10$ . Делается вывод, что этот результат может послужить отправной точкой для поиска нового резонансного механизма дробления пузырьков, однако при свободных колебаниях скорее всего перекачка энергии будет гаситься диссипацией. Оценивается допустимая расстройка условий резонанса. Предлагается в следующих главах учесть диссипацию и рассмотреть вынужденные колебания с диссипацией, как более интересную с точки зрения возможности дробления систему.

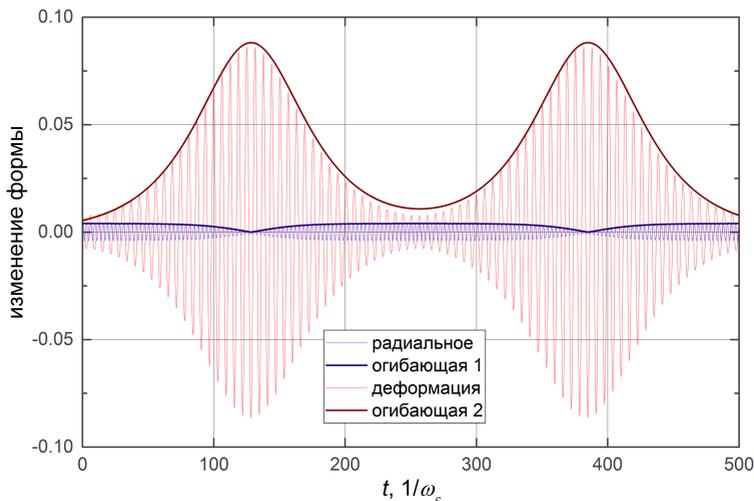


Рис. 3 — Сравнение результатов прямого численного моделирования с асимптотиками. Синим цветом (колебания с малым размахом) изображено поведение радиальной моды, красным — деформационной, жирными линиями изображены полученные аналитически асимптотики для амплитуд обеих мод

**Вторая глава** посвящена учёту диссипации энергии малых радиальных колебаний пузырька в приближениях гомобаричности, постоянства температуры жидкости и отсутствия фазовых переходов. Рассматриваются все основные механизмы диссипации: вязкий, термический и акустический, также предлагается способ одновременного решения задачи для свободных и вынужденных колебаний с помощью единой системы уравнений. Показывается, что в большинстве реальных случаев определяющую роль оказывает именно термический механизм диссипации, также определяются условия, при которых важны другие механизмы затухания. Путём усреднения по объёму характеристик пузырька выводятся точные формулы для параметров линейных свободных и вынужденных колебаний малого сферического пузырька в жидкости. Обсуждается применение полученных результатов для описания затухания волн в пузырьковой среде, описания резонансного механизма дробления пузырька и для других приложений. Результаты, изложенные в главе 2, вошли в работы [4; 5; 8].

Во введении проводится литературный обзор по теме главы. Далее приводится подробный вывод уравнения Келлера, используемого для учёта акустических эффектов в первом порядке малости по числу Маха. После этого решается задача о свободных и вынужденных малых радиальных колебаниях пузырька. Для этого записываются уравнения теплопроводности для газа внутри пузырька (температура жидкости считается постоянной), уравнение Келлера для динамики границы пузырька и граничные условия на разность давлений на границе пузырька, позволяющие учесть поверхностное натяжение и вязкость. Уравнения

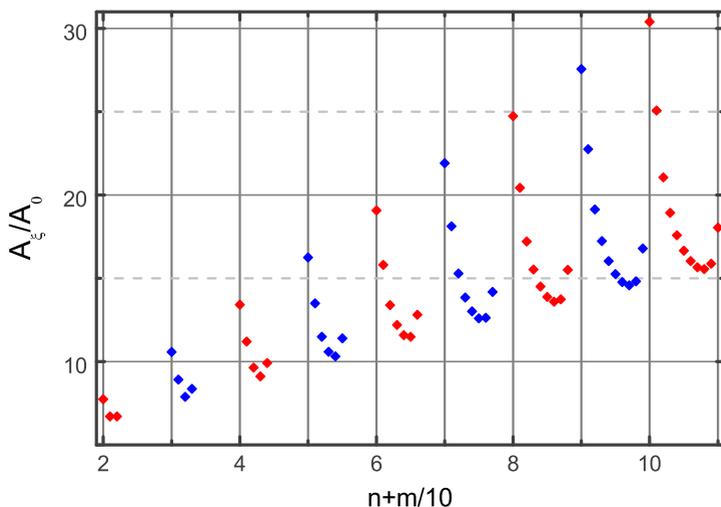


Рис. 4 — Отношение максимальных амплитуд  $n, m$ -ой деформационной моды и радиальной моды в ходе перекачки. Для удобства визуализации на одном графике всех семейств мод, вдоль оси  $x$  отложена функция  $n + 0.1m$

линеаризуются, осредняются по объёму и получается единая система двух линейных уравнений на амплитуду колебаний пузырька и амплитуду колебаний давления на границе пузырька. Вводятся удобные безразмерные величины, отвечающие за важность диссипативных эффектов и поверхностное натяжение. В случае свободных колебаний достаточно положить амплитуду возбуждающей волны равной нулю, и тогда из условий вырожденности системы вычисляется комплексная частота колебаний, действительная и мнимая часть которой отвечают за частоту и затухание свободных колебаний. Полученное нелинейное уравнение относительно частоты в общем случае решается только численно, однако для преобладающего термического механизма диссипации уравнение в точности совпадает с уравнением, полученным в монографии А. Г. Петрова, откуда приводятся удобные асимптотики. В случае вынужденных колебаний решение системы получается в явном виде.

На рисунке 5а представлено сравнение различных механизмов затухания для воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении. Тепловое затухание играет определяющую роль для всех пузырьков размером от 5 микрон до 5 мм. На рисунке 5б нижними кривыми представлены зависимости отклика воздушных пузырьков разного радиуса в воде при атмосферном давлении от частоты возбуждающей волны  $\Omega$ , верхняя кривая — огибающая резонансных пиков  $R_\Omega$  или отношение безразмерной амплитуды радиальных колебаний пузырька к безразмерной амплитуде давления в возбуждающей волне при резонансной частоте возбуждающей волны. На верхней оси абсцисс отложен размер пузырька с частотой свободных радиальных колебаний равной частоте, отложенной на

нижней оси абсцисс. Даже при резонансе отклик не слишком велик и падает с уменьшением радиуса пузырька, что подтверждает высказанное в первой главе предположение о диссипации, гасящей перекачку энергии.

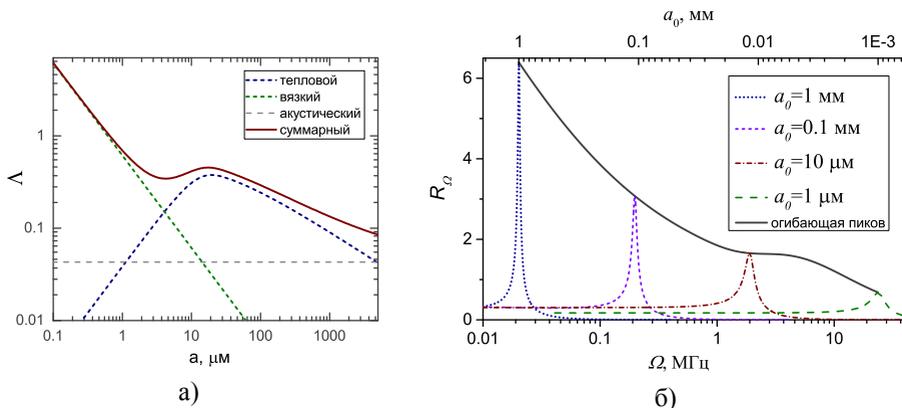


Рис. 5 — а) Сравнение механизмов затухания. Логарифмический декремент затухания вызванный тепловой, вязкой и акустической диссипацией, а также всеми механизмами вместе; б) Резонансные кривые отклика для пузырьков разных радиусов (различные прерывистые линии) и огибающая резонансных пиков (сплошная жирная линия)

Вторая глава представляет, в основном, методическую ценность, так как позволяет получить удобные формулы для учёта диссипации при свободных и вынужденных колебаниях пузырька. У полученных результатов есть приложения в самых различных областях науки и техники: описание затухания волн в пузырьковой среде, подводные стелс-технологии, методика изолированного подводного подрыва конструкций и др. В следующей главе приводится пример применения полученных результатов для оценки условий резонансного дробления газового пузырька в акустической волне в жидкости.

В третьей главе с помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова получается асимптотическое описание динамики малых колебаний пузырька в случае резонансной частоты возбуждающей волны, а также резонанса частот радиальной и деформационной моды 2:1 (что можно назвать резонансом 2:2:1). Рассматривается осесимметричная деформационная мода, как наиболее интересная вследствие максимального возрастания амплитуды при перекачке энергии свободных колебаний [2]. С помощью полученных результатов по затуханию колебаний пузырька учитываются все существенные механизмы диссипации энергии радиальной моды (термический, акустический, вязкий), эффекты поверхностного натяжения. Считается, что затуханием деформационной моды можно пренебречь для пузырьков не слишком большого радиуса. Показывается, что амплитуда деформационной моды значительно вырастает и способна

многократно превысить амплитуду радиальной моды, что может привести к дроблению пузырька.

Предлагается новый резонансный механизм дробления газового пузырька в акустической волне. Показывается, что дробление пузырька с резонансным радиусом возможно при относительно небольшой амплитуде давления в возбуждающей волне резонансной частоты: порядка нескольких процентов от равновесного давления. Получается оценочное условие дробления для случаев быстрого и медленного включения акустической волны. Данный механизм дробления может иметь широкие приложения, в том числе для прорыва гематоэнцефалического барьера в медицине. Содержание главы 3 составляют статьи [3–7].

Глава начинается с введения, в котором проводится обзор литературы, посвящённой вынужденным колебаниям пузырька при возбуждении деформационных мод, а также проблеме дробления и возможным применениям эффекта дробления пузырька в акустической волне. Далее идёт раздел, посвящённый описанию малых вынужденных колебаний пузырька при резонансе частот 2:2:1. В следующем разделе проводится анализ полученных результатов и выводятся оценочные условия дробления. Глава заканчивается выводами.

Для постановки задачи используется функция Лагранжа пузырька, вычисленная в первой главе. Рассматривается осесимметричный пузырёк, для которого отношение амплитуд мод при перекачке энергии максимально, как показывается в первой главе. Введение диссипативной функции Рэлея, пропорциональной кинетической энергии, аналогично добавлению в уравнения Гамильтона члена, ответственного за затухание. Также в уравнения Гамильтона искусственно вводится вынуждающая сила. С помощью функции Лагранжа коэффициент возбуждающей силы  $\alpha$  связывается с безразмерной амплитудой переменной части внешнего давления  $\Delta p$ , а безразмерный коэффициент диссипации  $\beta$  находится из равенства высоты резонансного пика рассматриваемой системы уравнений для радиально колеблющегося пузырька высоте пика, найденной во второй главе  $R_\Omega$  (для воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении  $R_\Omega$  обозначена на рисунке 5б жирной линией). Таким образом искусственно введённые коэффициенты диссипации и вынуждающей силы соотносятся с действительными значениями затухания и амплитуды колебаний давления в акустической волне

$$\alpha/\Delta p \approx 4/(3\gamma), \quad \beta \approx 2/(3\gamma R_\Omega)$$

где  $\gamma$  — коэффициент адиабаты газа внутри пузырька.

Для использования первой теоремы Боголюбова об осреднении возбуждающая сила и диссипация считаются малыми:  $\alpha = \epsilon^2$ ,  $\beta = \epsilon\beta_1$ . Находится приближённое решение системы, при использовании которого для замены переменных, система приводится к виду, пригодному для применения стандартного метода Крылова–Боголюбова, то есть описывает колебания с резонансом 2:2:1 (отношение частоты возбуждающей волны к частоте радиальных колебаний к частоте деформационных колебаний) с добавкой первого порядка малости по  $\epsilon$ . Собственные значения этой системы имеют отрицательную действительную

часть  $\lambda = -\beta_1/4 \pm \sqrt{\beta_1^2/16 - (4n - 1)/8}$  и решение экспоненциально быстро ( $\sim \exp(-\epsilon\beta_1 t/4)$  в случае не слишком большого затухания) приближается к стационарной точке. Таким образом, по второй теореме Боголюбова решение будет устойчивым в найденной стационарной точке. Общее решение — сумма быстро осциллирующего члена с постоянной амплитудой, постоянного члена и быстро осциллирующих членов с медленно затухающими амплитудами, зависящими от “медленного времени”  $\tilde{t} = \sqrt{\alpha}t$ . Затухающие амплитуды находятся из решения осреднённой системы при учёте начальных условий.

На рисунке 6 результаты точного численного моделирования исходной системы сравниваются с асимптотическим решением на интервале времени  $t \in (0, 2000)$  для значений параметров  $\alpha = 0.0004$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $n = 4$  и при начальных условиях  $x(0) = 0.008$ ,  $z(0) = 0.003$ ,  $u(0) = w(0) = 0$ , где  $x$  и  $z$  — амплитуды радиальной и деформационной мод,  $u$  и  $w$  — соответствующие им импульсы. Графики разорваны на две части  $t \in (0, 500)$  и  $t \in (1900, 2000)$ , отвечающие началу процесса установления колебаний и установившимся колебаниям. Из графиков видно, что полученное асимптотическое решение качественно описывает поведение системы при установлении колебаний и с большой точностью количественно описывает установившиеся колебания. Численно проверено, что амплитуда колебаний практически не меняется при небольшой расстройке резонанса (порядка  $\sqrt{\alpha}$ ) и изменении коэффициента затухания в широких пределах, а также, что качественное соответствие процессов установления колебаний сохраняется и для других значений параметров, однако может ухудшиться при уменьшении начальной амплитуды деформационных колебаний. Установившиеся амплитуды колебаний  $x(t)$  и  $z(t)$  асимптотического решения отличаются примерно на 0.5% и 3% от таковых для численного решения, что вполне объясняется неучтёнными членами следующего порядка малости по  $\epsilon$ .

На рисунке 7а приводится то же решение, но теперь огибающая асимптотического решения сравнивается с численным решением в положительной полуплоскости. Максимальная амплитуда деформационной моды достигается во время переходного процесса и примерно в 1.7 раза больше установившейся. Поэтому стоит рассмотреть две разные возможности дробления: когда амплитуда акустической волны медленно растёт (случай 1) и когда акустическая волна достигает своей конечной амплитуды за малое время, и максимальная деформация пузырька происходит в течение переходного процесса (случай 2).

Объясняется причина различия результатов на этапе установления колебаний. Решение при начальных условиях  $x(0) = u(0) = 0$  неустойчиво по малым возмущениям  $x$ ,  $u$  и при  $t \rightarrow \infty$  выходит на периодическое (пример решения для малых начальных  $x$  и  $u$  приведён на рисунке 7б). Поэтому для очень малых начальных возмущений по деформационной моде становится существенным время перекачки энергии из радиальной моды, вычисленное в первой главе. Более того, как показал Просперетти, учёт диссипации деформационной моды приводит к возникновению пороговой амплитуды возбуждающей волны, ниже которой

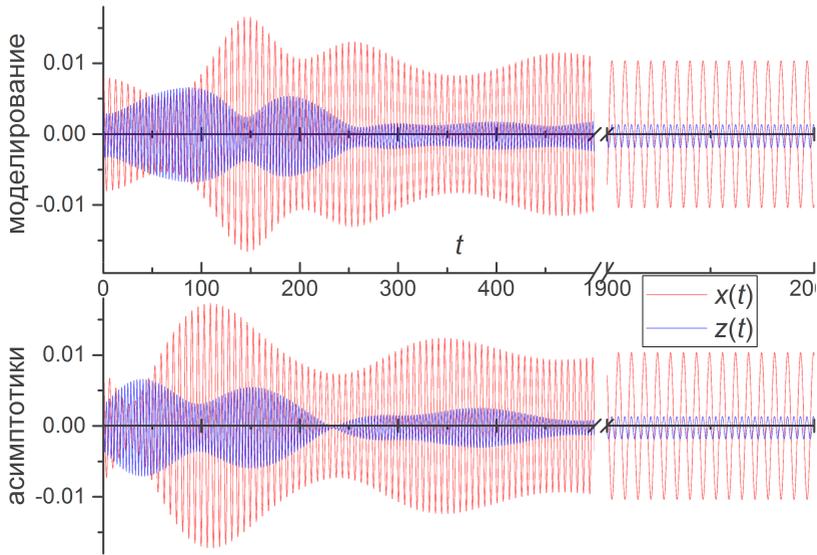


Рис. 6 — Сравнение результатов численного моделирования с асимптотическим решением. Синим цветом (кривая с меньшим конечным размахом) изображено поведение радиальной моды, а красным — деформационной, на верхнем графике приведено точное численное решение, на нижнем — асимптотики деформационная мода вообще не будет возбуждаться, и нулевое решение приобретёт устойчивость. Однако, численное моделирование показывает, что для полученного далее оценочного условия дробления, даже в случае быстрого старта, приведённые ниже оценки дают хорошую точность.

Для оценочного условия дробления принимается, что амплитуда деформационной моды должна достигнуть значения 0.5, при котором может возникнуть перешеек между частями пузырька. Выводится оценочный критерий дробления пузырька как минимальная амплитуда возбуждающей волны, при которой возможно дробление, в двух случаях:

*Случай 1 (медленный старт акустической волны, когда скачки амплитуды деформационных колебаний в переходном процессе успевают гаситься диссипацией).* Пузырек может раздробиться, если

$$\Delta p > \frac{3\gamma(4n-1)}{32(n+1)(2n+1)} \approx \frac{\gamma}{5n}$$

*Случай 2 (быстрый старт).* При условиях  $\tau_{\text{start}} \ll 30/\Omega$ ,  $R_\Omega > 4/(3\gamma)$ , где  $\tau_{\text{start}}$  — характерное время старта акустической волны (достижения полной мощности), пузырек может раздробиться при выполнении условия

$$\Delta p > \frac{3\gamma(4n-1)}{32(n+1)(2n+1)} \left[ 1 + \exp \left( -\frac{\pi}{\sqrt{6(4n-1)R_\Omega^2 \Delta p - 1}} \right) \right]^{-2}$$

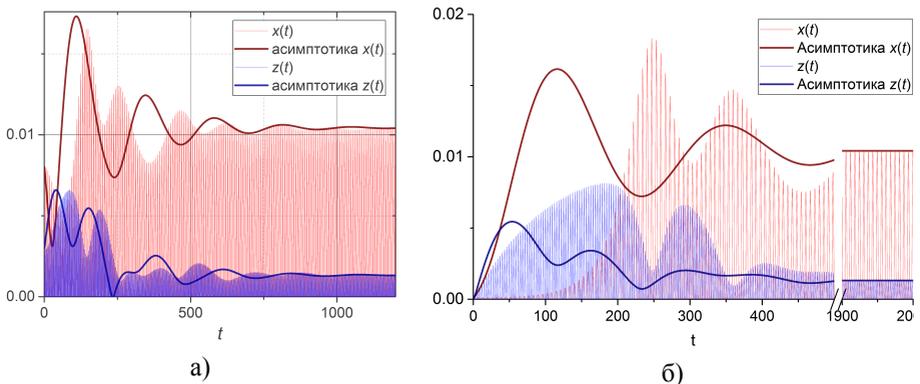


Рис. 7 — а) Сравнение результатов прямого численного моделирования с асимптотиками. Синим (линия с меньшей амплитудой) и красным цветами тонкими линиями изображены графики колебаний по радиальной и деформационной моде, полученные прямым численным моделированием, жирными тёмными синей и красной линиями изображены огибающие асимптотики для обеих мод; б) То же в случае малой начальной амплитуды колебаний по деформационной моде

отличающегося от условия в случае 1 наличием в правой части множителя, экспонента в котором описывает насколько амплитуда деформационных колебаний пузырька в процессе установления колебаний превысит финальную амплитуду при учете диссипации (принимается, что перед запуском акустической волны деформация пузырька мала, но достаточна для удовлетворительного соответствия асимптотического и численного решений системы).

На рисунке 8 иллюстрируется полученный оценочный критерий дробления воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении. Синими ромбиками и красными кружками изображены минимальные отношения амплитуды переменной части внешнего давления для пузырька резонансного радиуса к постоянному уровню давления в акустической волне, при котором оценочный критерий дробления будет выполнен при медленном и быстром старте, соответственно. Пунктирная линия — характерное время старта акустической волны, такое, чтобы старт можно было считать быстрым, то есть чтобы волна достигала максимальной амплитуды за время, меньшее времени установления колебаний пузырька. Правая ось ординат — характерное время старта акустической волны  $\tau_{\text{start}}$  в миллисекундах. По оси абсцисс отложен номер резонансной моды  $n$ , определяющей резонансный радиус пузырька и частоту акустической волны, резонансной к свободным радиальным колебаниям пузырька такого радиуса.

Рассматриваются примеры применения оценочного критерия к воздушному пузырьку в воде при атмосферном давлении. Для пузырька радиусом около 0.06 мм, соответствующему резонансу с 4-ой модой, критическая амплитуда колебаний давления в возбуждающей волне составляет около 4.3% от атмосферного давления, при быстром старте — 2.3%. Для номера моды  $n = 6$

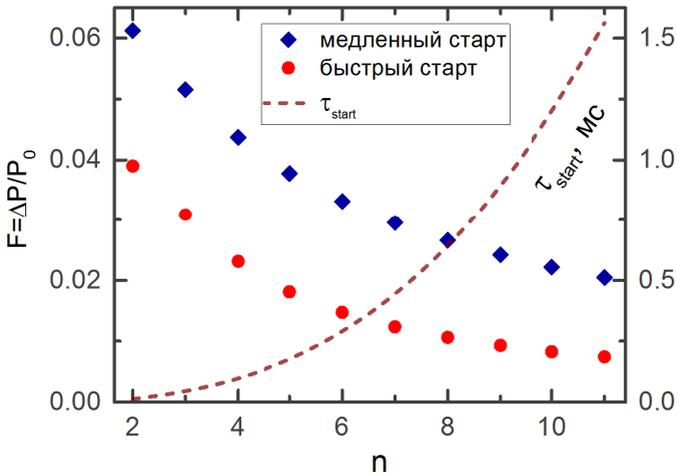


Рис. 8 — Оценочное условие дробления для случаев быстрого и медленного старта, а также характерное время быстрого старта

пузырёк имеет резонансный радиус около 0.11 мм, и для него при медленном старте ( $\tau_{\text{start}} > 0.3$  мс) критическая амплитуда колебаний давления в волне составляет около 3.3% от атмосферного давления, при быстром старте — 1.4%. Полученные оценки амплитуды волны, дробящей пузырьки, гораздо ниже используемых в медицине, что подчёркивает практическую значимость исследования, позволяя надеяться, что при подборе резонансных условий удастся значительно уменьшить амплитуду ультразвуковой волны, вызывающей открытие гематоэнцефалического барьера. Конечно, для строгого доказательства такой возможности следует провести точные расчеты при учете больших деформаций поверхности пузырька и затухания деформационной моды, а также получить экспериментальное подтверждение результатов. Обсуждаются следующие недостатки полученного оценочного условия дробления, из которых следуют возможные пути дальнейшего развития исследования:

- отсутствие учёта диссипации деформационной моды и пороговой амплитуды возбуждающей волны для начала перекачки;
- существование погрешности моделирования начала процесса перекачки при малой начальной амплитуде деформационной моды, и, как следствие, погрешность нахождения оценочного условия дробления в случае быстрого старта;
- использование уравнений, применимых для малых колебаний. Для получения более точного условия дробления с учётом большой амплитуды колебаний перед моментом дробления пока представляется возможным только численное решение уравнений гидро- и газодинамики для жидкости вне пузырька и газа внутри пузырька;
- отсутствие точной модели влияния возможной расстройки частоты и расстройки резонансного соотношения;

- недостатки теории диссипации, описанные во второй главе;
- отсутствие учёта деформации формы пузырька в потоке и при всплытии, а также изменения радиуса пузырька за счёт фазовых переходов;
- отсутствие учёта влияния стенок сосуда;
- отсутствие учёта влияния пузырьков друг на друга.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Методом нормальной формы получено аналитическое описание резонансной перекачки энергии между радиальной и произвольной деформационной модой свободных малых колебаний газового пузырька в жидкости в отсутствие затухания при резонансе частот мод 2:1. Найден период перекачки энергии и относительное увеличение амплитуды деформации в ходе перекачки в зависимости от номера моды. Полученные аналитически результаты показали хорошее соответствие результатам точного численного моделирования уравнений Гамильтона.
2. Единым образом получены параметры свободных и вынужденных колебаний пузырька с учётом акустической, вязкой, тепловой диссипации и поверхностного натяжения, рассчитана огибающая резонансных кривых для вынужденных колебаний пузырька, которая может быть использована для нахождения условий резонансного дробления пузырька. Проанализированы различные механизмы затухания и определены условия доминирования термической диссипации над другими механизмами.
3. Исследованы малые вынужденные колебания малого газового пузырька в акустической волне в жидкости при резонансной частоте акустической волны, а также резонансе частот между радиальной и деформационной модами колебаний 2:1. С помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова аналитически описан процесс перекачки энергии между модами в пренебрежение затуханием деформационной моды. Полученные результаты оказались в хорошем соответствии с результатами численного моделирования уравнений Гамильтона.
4. Предложен новый резонансный механизм дробления пузырька при описанном выше резонансе. Получены оценочные условия дробления газового пузырька в жидкости по резонансному механизму в случаях быстрого и медленного включения акустической волны, а также характерное время быстрого включения. Полученная величина амплитуды давления в акустической волне много меньше равновесного давления в жидкости, что придаёт ценность исследованию такого механизма дробления для многочисленных приложений, в частности, медицинских.

Также обсуждается дальнейшее развитие исследования — в будущем желательно учесть затухание деформационной моды, расстройку резонансных условий и нелинейность колебаний, а также провести численное моделирование динамики пузырька вплоть до момента дробления и проверить экспериментально полученные результаты.

Автор выражает благодарность научному руководителю Петрову Александру Георгиевичу за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство, многочисленным слушателям докладов автора за ценные советы по развитию работы. Также автор благодарит своих близких и родных за терпение и моральную поддержку в процессе подготовки диссертации, и вспоминает с теплом и благодарностью своего покойного учителя физики и математики Немцева Игоря Юрьевича, без таланта и вдохновения которого это путешествие могло бы и не начаться.

## Публикации автора по теме диссертации

1. *Вановский В. В., Петров А. Г.* Колебания газового пузырька в жидкости при резонансе частот радиальной и произвольной осесимметричной моды колебаний 2: 1 // *Доклады Академии наук.* — 2011. — Т. 437, № 3. — С. 331–335.
2. *Вановский В. В., Петров А. Г.* Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости // *Доклады Академии наук.* — 2012. — Т. 444, № 4. — С. 385–385.
3. *Vanovskiy V. V., Petrov A. G.* The condition of the resonant break-up of a gas bubble subjected to an acoustic wave in liquid // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2015. — Vol. 656, no. 1. — P. 012041.
4. *Вановский В. В., Петров А. Г.* Условие резонансного дробления газового пузырька в акустической волне в жидкости // *Доклады Академии наук.* — 2016. — Т. 469, № 2. — С. 162–166.
5. *Вановский В. В., Петров А. Г.* Пружинная аналогия нелинейных колебаний пузырька в жидкости при резонансе // *Прикладная математика и механика.* — 2017. — Т. 81, № 4. — С. 445–461.
6. *Петров А. Г., Вановский В. В.* Нелинейные колебания маятника на пружине при резонансе 1: 1: 2. Теория, эксперимент и физические аналогии // *Труды Математического института имени ВА Стеклова.* — 2018. — Т. 300, № 0. — С. 168–175.
7. *Вановский В. В., Петров А. Г.* Критерий резонансного дробления газового пузырька в акустической волне в жидкости // *Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015).* — 2015. — С. 388–390.
8. *Вановский В. В.* Сравнение механизмов диссипации малых колебаний сферического пузырька в жидкости // *Волны и вихри в сложных средах: 10-ая международная конференция - школа молодых ученых; 03-05 декабря 2019 г., Москва: Сборник материалов школы.* — 2019. — С. 87–90.

Вановский Владимир Валерьевич

**Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости**

Специальность 01.02.05 —  
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

---

Подписано в печать 11.02.2020. Заказ № 2-2020  
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 75 экз.  
Отпечатано на ризографе ИПМех РАН  
119526, Москва, проспект Вернадского, д.101, корп.1

