

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем
механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук



На правах рукописи

Вановский Владимир Валерьевич

**Резонансный механизм дробления газового пузырька в
жидкости**

Специальность 01.02.05 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Петров Александр Георгиевич

Москва — 2019

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Свободные колебания пузырька при резонансе частот радиальной и деформационной мод 2:1	15
1.1 Введение	15
1.1.1 Задача о качающейся пружине	17
1.2 Постановка и решение задачи	23
1.2.1 Постановка задачи о малых свободных колебаниях пузырька при резонансе частот 2:1	23
1.2.2 Потенциал скорости течения жидкости	24
1.2.3 Кинетическая энергия пузырька	25
1.2.4 Потенциальная энергия пузырька	25
1.2.5 Собственные частоты колебаний и условия резонанса	26
1.2.6 Функция Лагранжа и уравнения Гамильтона пузырька	27
1.2.7 Инвариантная нормализация гамильтониана пузырька	28
1.2.8 Система уравнений Гамильтона пузырька в переменных Биркгофа	29
1.2.9 Решение уравнений о перекачке энергии и пружинная аналогия	30
1.3 Анализ полученных результатов	32
1.3.1 Период перекачки энергии	32
1.3.2 Сравнение с численными решениями	34
1.3.3 Отношение амплитуд мод и обсуждение возможности дробления	36
1.4 Выводы	38
Глава 2. Затухание колебаний сферического пузырька в жидкости	39
2.1 Введение	39
2.2 Вывод уравнения Келлера	42
2.3 Линейная теория в приближениях гомобаричности, постоянства температуры жидкости и отсутствия фазовых переходов	46

	Стр.	
2.3.1	Постановка задачи	47
2.3.2	Линеаризация уравнений	48
2.3.3	Усреднение по объёму	50
2.3.4	Случай свободных колебаний	51
2.3.5	Случай вынужденных колебаний	52
2.4	Анализ результатов	52
2.4.1	Случай свободных колебаний	52
2.4.2	Случай вынужденных колебаний	54
2.5	Выводы	57
Глава 3.	Вынужденные колебания пузырька в жидкости при резонансе частот 2:2:1	58
3.1	Введение	58
3.2	Исследование малых вынужденных колебаний пузырька в жидкости при резонансе частот 2:2:1	60
3.2.1	Уравнения вынужденных колебаний пузырька с учётом диссипации энергии	61
3.2.2	Оценка введённых коэффициентов диссипации и возбуждающей силы из физических соображений	62
3.2.3	Приведение системы к стандартному для осреднения виду с помощью замены переменных	63
3.2.4	Решение системы	64
3.3	Анализ полученных результатов. Оценочное условие дробления	66
3.3.1	Сравнение с численными решениями	66
3.3.2	Оценочное условие дробления	68
3.3.3	Обсуждение полученного оценочного условия дробления. Возможности дальнейшего развития исследования	73
3.4	Выводы	74
Заключение	75	
Список сокращений и условных обозначений	77	
Словарь терминов	81	

	Стр.
Список литературы	82
Список рисунков	93
Список таблиц	95

Введение

В конце 80-х годов в связи с исследованиями шумов моря возник интерес к резонансным явлениям в колебаниях пузырьков. В серии работ Лонге-Хиггинса [1–3] 1989-го года, вводятся некоторые интегральные теоремы для колебаний пузырька, а также показывается, что, с учётом нелинейных членов, колебания по деформационной моде приведут к колебаниям по радиальной моде на удвоенной частоте, и в случае приблизительного резонанса частот 2:1 вклад деформационных мод будет особенно велик, что по мнению автора может объяснить некоторые особенности акустического спектра шума моря. Уже в следующем году тот же автор привёл численное моделирование спектра шума моря [4], дающее неплохое согласие с недавно произведёнными измерениями [5].

В 1991-м году выходит работа Уильямса и Гуо [6], содержащая весьма близкую для темы диссертации постановку задачи. Рассматривался резонанс деформационной и радиальной моды 2:1, методом двух масштабов было показано, что энергия из деформационной моды будет медленно перекачиваться в радиальную моду, затухание не учитывалось. Часть статьи была посвящена критике работ Лонге-Хиггинса в связи с отсутствием в них подобного механизма перекачки энергии [2; 3]. В том же году Лонге-Хиггинс выпустил статью [7], где подверг ответной критике работу Уильямса и Гуо, справедливо заметив, что механизм медленной резонансной перекачки энергии в направлении от деформационной к радиальной моде будет гаситься диссипацией, а также показав, что предложенный им механизм вполне способен обеспечить требуемый уровень шумов моря даже с учётом диссипации. В обеих работах был рассмотрен только прямой процесс, приводящий к переходу энергии деформационной моды в акустическую энергию излучения радиальной моды.

В работе Янга, Фенга и Лиля [8] сделана попытка расширить результаты [7] на различные типы начальных возмущений и резонансов. В статье Фенга и Лиля [9] была рассмотрена перекачка энергии между модами и было показано, что в самом деле перекачка происходит в обе стороны по очереди, если пренебречь затуханием. Также, в пренебрежении затуханием, из закона сохранения энергии было получено оценочное условие дробления для нескольких номеров мод по амплитуде радиальных колебаний. В работе Мао [10] 1995-го года приведены экспериментальные свидетельства наличия перекачки энергии между модами

для свободно колеблющихся пузырьков, выдуваемых из сопла. В работе Мак-Дугалда [11] 1999-го года было проведено численное моделирование динамики пузырька в случае резонанса 2:1 и были получены формы пузырьков практически перед дроблением. Были предсказаны два типа дробления: пузырьковое кольцо и дробление на несколько частей.

Затухание колебаний пузырьков – фундаментальная тема, вошедшая во многие современные труды по гидродинамике. Любые серьёзные теоретические и экспериментальные исследования колебаний пузырьков требуют точного учёта затухания. Диссипация играет важную роль для описания механизмов дробления пузырьков в акустической волне [12; 13], затухания акустической волны в пузырьковой среде [14–16], задач кавитации [17], что имеет многочисленные инженерные и медицинские приложения. Среди них прорыв гематоэнцефалического барьера с помощью направленного воздействия ультразвуком на специально введённые в кровь микропузырьки [18], контрастно усиленная ультразвуковая томография, защита турбин от кавитационной эрозии, изолированный подрыв подводных конструкций, сонолюминесценция, подводные стелс-технологии, исследование газообмена атмосферы с океаном, исследование состава пузырьковых смесей [19].

В 70-ые годы возникла современная теория затухания, описанная в работах Эллера [20], Чапмана и Плессета [21], Нигматуллина и Хабеева [22], Просперетти [23]. Последняя работа содержит наиболее строгий и аккуратный вывод линейной теории затухания одиночного пузырька, дополненный в 1991-м году оценками применимости сделанных предположений [24]. Также следует отметить, что в дальнейших работах Нигматуллина, Хабеева и Нагиева учтены фазовые превращения [25; 26] (см. также монографию [27], в работе Просперетти и соавторов [28] учтена нелинейность колебаний, проведены численные расчёты (см., например работы Жанга [29; 30] и Нигматуллина с соавторами о сферически симметричной задаче [31]), полученные результаты применены к затуханию волн в пузырьковой среде (см. например [14–16]) и хорошо согласуются с экспериментом [32; 33]. Во многих работах доказывается теоретически и экспериментально способность слоя пузырьковой жидкости практически полностью погасить падающую на него акустическую волну [34].

Задача дробления пузырька в акустической волне имеет приложения в медицине, океанологии [19], а также смежна со многими другими проблемами кавитации и сонолюминесценции. Имеются экспериментальные подтверждения

того факта, что с помощью дробления пузырьков ультразвуком вблизи гематоэнцефалического барьера, можно обеспечить доставку препаратов в мозговые ткани [35], что является одной из основных проблем лечения болезней мозга. Механизм дробления пузырька до сих пор не получил полного описания, несмотря на большое количество научных работ по этой теме [36]. Также наблюдается ускорение процесса диффузии при возбуждении несферических колебаний [37], что даёт потенциальные приложения задачи в технологических процессах массообмена газ-жидкость.

Существует много экспериментальных подтверждений того факта, что пузырьки в акустической волне излучают на субгармонических частотах, делящих нацело частоту волны [38; 39]. Наличие таких субгармоник может вызываться несферическими колебаниями пузырька, находящимися в целочисленном резонансе частот с радиальной модой [40]. Несферические вынужденные колебания пузырька исследовались во многих работах [41], начиная с 1958 г. [42]. В работах [43; 44] показано, что учёт затухания деформационной моды приводит к появлению пороговой величины амплитуды возбуждающей волны, при которой возникают деформационные колебания пузырька, в работе [43] предложено использовать это явление для измерения затухания колебаний пузырька.

Также существует множество экспериментальных подтверждений возможности дробления пузырька из-за деформационных колебаний его формы [45], были сделаны даже попытки объяснить явление сонолюминесценции неустойчивостью радиальных колебаний при резонансе [46; 47]. Обычно деформационные колебания пузырька возникают вследствие нелинейного взаимодействия между его колебательными модами, и во многих теоретических исследованиях было показано, что энергия активнее всего перекачивается из радиальных колебаний в деформационные при соотношении частот колебаний 2:1 [9]. Возможность дробления пузырька вследствие такой усиленной перекачки энергии была предсказана в работах [9; 48; 49], где был изучен эффект перекачки энергии между модами для свободных колебаний пузырька. В последних двух работах были получены период перекачки энергии и отношение амплитуд мод в зависимости от номера моды, быстро растущее с увеличением номера моды n . Также в работе [49] было показано, что наибольшее увеличение амплитуды колебаний происходит при перекачке энергии в осесимметричные деформационные моды, поэтому они представляют наибольший интерес.

Основным недостатком указанных работ было рассмотрение только свободных колебаний пузырька без диссипации, которая, как известно, довольно велика. Таким образом, для оценки возможности дробления по резонансному механизму требуется построить теорию с учётом диссипации и вынуждающей силы, что было сделано, например в [36; 50], где были получены параметрические диаграммы стабильности поверхности пузырька. Вообще, пороговый характер возникновения неустойчивости сферических колебаний — хорошо изученная теоретически и экспериментально тема. Эксперименты с определением таких порогов для пузырьков разного размера были описаны в работах [47; 51–55]. Для такой параметрической неустойчивости были изучены возникающие бифуркации и хаос [56], изучалось поведение системы вблизи порога возникновения неустойчивости [57]. Однако не было работ, где вместо оценки и нахождения величины порога возникновения неустойчивости проводились бы исследования возможности дробления в предположении, что неустойчивость уже развита и энергия активно перетекает из радиальных колебаний в деформационные.

Целью данной работы является описание резонансного механизма дробления газового пузырька в жидкости и оценка условий его реализации.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить аналитическое описание методом гамильтоновой нормальной формы резонансной перекачки энергии между радиальной и произвольной деформационной модой свободных малых колебаний газового пузырька в жидкости в отсутствие затухания при резонансе частот мод 2:1. Проанализировать полученные результаты, найти период перекачки энергии и относительное увеличение амплитуды деформации в ходе перекачки в зависимости от индексов моды.
2. Исследовать механизмы затухания колебаний газового пузырька в жидкости. Получить удобные для использования аналитические выражения для линейного отклика малого пузырька на возбуждение акустической волной с учётом термической, вязкой и акустической диссипации, а также эффектов поверхностного натяжения. Сравнить роль различных механизмов затухания. Вычислить огибающую резонансных пиков для воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении.
3. Исследовать малые вынужденные колебания малого газового пузырька в акустической волне в жидкости при резонансной частоте акустической

волны, а также резонансе частот между радиальной и деформационной модами колебаний 2:1. Описать аналитически процесс перекачки энергии между модами пренебрегая затуханием деформационной моды.

4. Получить оценочные условия дробления газового пузырька в жидкости по резонансному механизму в случаях быстрого и медленного старта акустической волны, а также характерное время быстрого её старта.

Научная новизна:

1. Получено аналитическое описание методом гамильтоновой нормальной формы резонансной перекачки энергии между радиальной и произвольной деформационной модой свободных малых колебаний газового пузырька в жидкости в отсутствие затухания при резонансе частот мод 2:1. Найден период перекачки энергии и относительное увеличение амплитуды деформации в ходе перекачки в зависимости от индексов моды n, m .
2. Получены удобные для использования формулы, описывающие свободные и вынужденные колебания пузырька с учётом акустической, вязкой, тепловой диссипации и поверхностного натяжения. Получена огибающая резонансных кривых для вынужденных колебаний пузырька, которая может быть использована для нахождения условий резонансного дробления пузырька.
3. Выполнено оригинальное исследование малых вынужденных колебаний небольшого газового пузырька в акустической волне в жидкости при резонансной частоте акустической волны, а также резонансе частот между радиальной и деформационной модами колебаний 2:1. С помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова аналитически описан процесс перекачки энергии между модами в пренебрежение затуханием деформационной моды.
4. Впервые получены оценочные условия дробления газового пузырька в жидкости по резонансному механизму в случаях быстрого и медленного старта акустической волны, а также характерное время быстрого её старта.

Практическая значимость обеспечивается многочисленными возможными приложениями резонансного механизма дробления пузырька, в частности, в медицине для прорыва гематоэнцефалического барьера и доставки лекарств в мозг пациента с помощью облучаемых ультразвуком контрастных агентов (пу-

зырьков, покрытых тонкой оболочкой), в процессах массообмена для управления составом пузырьковой смеси и активизации массообмена за счёт возбуждения деформационных колебаний, в фундаментальной физике для исследования условий появления субгармоник, в технологии подводных механизмов для предотвращения кавитационной эрозии, в морской акустике для объяснения спектральных характеристик звука моря.

Методология и методы исследования. Для решения задачи о свободных колебаниях пузырька при резонансе частот мод $2:1$ была использована методика инвариантной нормализации гамильтониана, предложенная академиком В.Ф.Журавлёвым. Для описания механизмов диссипации колебаний пузырька была использована техника осреднения по объёму. Для исследования вынужденных колебаний пузырька использовалась методика осреднения Крылова-Боголюбова. Для верификации аналитических результатов путём сравнения с численными решениями, использовались разнообразные методы вычислительной математики, предназначенные для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и подсчёта квадратур.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Нормальная форма гамильтониана свободно колеблющегося пузырька в случае резонанса частот радиальной и произвольной деформационной моды $2:1$ позволяет получить аналитическое описание процесса перекачки энергии между модами, что даёт возможность вычислить период перекачки энергии, отобрать моды с наиболее низким периодом в предположении равномерного распределения энергии между модами, а также вычислить увеличение амплитуды деформации в ходе перекачки энергии. Полученное увеличение амплитуды весьма значительно (до нескольких десятков) и является предпосылкой для дальнейшего исследования возможности резонансного дробления пузырька по описанному механизму с учётом диссипации и для случая вынужденных колебаний.
2. В предположениях гомобаричности (однородности давления внутри пузырька), отсутствия фазовых переходов, малости вязких, поверхностных и акустических эффектов, методом осреднения по объёму можно единым образом описать свободные и вынужденные радиальные колебания пузырька в линейной постановке с учётом тепловых, вязких, поверхностных и акустических эффектов. Акустические эффекты можно учесть в первом приближении с помощью уравнения Келлера. Можно показать,

что тепловой механизм диссипации доминирует над остальными для воздушных пузырьков размером от 5 микрон до 5 мм в воде при атмосферном давлении. Параметры свободных колебаний можно получить в неявном виде, как решение алгебраического уравнения на комплексную частоту колебаний, линейный отклик в случае вынужденных колебаний непосредственно выражается через безразмерные параметры задачи. Вычисляется огибающая резонансных кривых для вынужденных колебаний пузырька, которая может быть использована для нахождения условий резонансного дробления пузырька.

3. С помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова можно получить асимптотическое описание динамики малых колебаний пузырька в случае резонансной частоты возбуждающей волны, а также резонанса частот радиальной и деформационной моды 2:1. С помощью полученных результатов по затуханию колебаний пузырька можно учесть все существенные механизмы диссипации энергии радиальной моды (термический, акустический, вязкий), эффекты поверхностного натяжения, при этом затуханием деформационной моды можно пренебречь. Можно показать, что амплитуда деформационной моды значительно вырастает, и способна многократно превысить амплитуду радиальной моды. Исходя из этого можно получить оценочные условия резонансного дробления пузырька в случае быстрого и медленного старта акустической волны, а также характерное время быстрого её старта.

Достоверность полученных результатов для резонансной перекачки энергии в случае свободных и вынужденных колебаний пузырька обеспечивается сравнением с численными расчётами, а также проведением аналогии с хорошо известной задачей о качающейся пружине. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами в упрощённой постановке [58] для эллипсоидального пузырька. Достоверность результатов по затуханию свободных и вынужденных малых радиальных колебаний газового пузырька в жидкости обеспечивается соответствием результатов многочисленным работам в этой области (см. например [27]).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на примерно 20 конференциях и 7 семинарах, среди которых стоит отметить:

- X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011)

- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015)
- 8th International Symposium on Cavitation (CAV 2012) (Сингапур, 2012)
- 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014) (Вена, Австрия, 2014)
- The 16th International Conference on Fluid Flow Technologies (CMFF'15) (Будапешт, Венгрия, 2015)
- 9th International Symposium on Cavitation (CAV 2015) (Лозанна, Швейцария, 2015)
- 14th International Conference on Vibration Engineering and Technology of Machinery (VETOMAC XIV) (Лиссабон, Португалия, 2018)
- 14th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics (HEFAT 2019) (Виклоу, Ирландия, 2019)
- Три доклада на семинарах «Механика систем» имени академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем под руководством акад. В.Ф. Журавлева и акад. Д.М. Климова: 18-го мая 2015 г., 10-го октября 2016 г. и 9-го декабря 2019 г.
- Выступление на видеосеминаре по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбПУ-НИИМ МГУ 24 апреля 2018 г.

На 4 конференциях автор был удостоен диплома за лучший доклад на соответствующей секции.

Личный вклад. Автор принял активное участие в постановке задач и выборе методов для исследования, самостоятельно решил все поставленные задачи, самостоятельно и в соавторстве подготовил результаты к публикации. В частности, в задаче о резонансной перекачке энергии для свободных колебаний пузырька, он самостоятельно получил потенциал скорости жидкости, кинетическую и потенциальную энергию, построил лагранжиан и гамильтониан системы и, воспользовавшись советом научного руководителя обратить внимание на аналогию с качающейся пружиной, применил метод инвариантной нормализации к получению нормальной формы гамильтониана, которую затем самостоятельно исследовал аналитически и численно. В задаче о затухании свободных и вынужденных радиальных колебаний пузырька в жидкости он воспользовался постановкой задачи, описанной в [59, сс. 284-291], самостоятельно добавив учёт вязкой и акустической диссипации, а также поверхностного натяжения. В задаче о вынужденных колебаниях пузырька при резонансе 2:2:1 он воспользовался алго-

ритмом для качающейся пружины, предложенным научным руководителем [60], но самостоятельно поставил задачу, подобрал замены, приводящие уравнения к пригодному для осреднения виду, решил и проанализировал уравнения. Автор самостоятельно получил оценочные условия дробления пузырька и предложил два механизма резонансного дробления: при резком включении акустической волны и при плавном её включении, а также оценил характерное время такого быстрого включения. Также автор проанализировал полученные результаты и предложил пути дальнейшего развития исследования, имеющие описанные выше практические приложения.

Диссертационная работа выполнялась при поддержке грантов РФФИ №11-01-00535-а, №12-01-09283-моб_з, №14-01-00818, №14-01-00892, №14-01-31370 мол_а, №17-01-00901 и гранта РНФ №14-19-01633 а также в рамках темы госзадания № АААА-А17-117021310382-5.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 статьях, из которых 6 индексированы в базах данных «Сеть науки» (Web of Science) или «Скопус» (Scopus) и входят в список рекомендуемых изданий ВАК, а также в большом количестве сборников материалов и тезисов международных и всероссийских конференций.

Содержание работы

В главе 1 диссертации методом инвариантной нормализации гамильтониана решается задача о динамике пузырька при резонансе радиальной и произвольной деформационной моды колебаний 2:1, что составляет собой содержание статей [48; 49]. Будут получено аналитическое описание процессов перекачки энергии, позволяющее получить период перекачки в произвольную моду, выделить наиболее возбудимые моды, а также получить увеличение амплитуды деформации после перекачки и проанализировать возможность дробления.

Глава 2 посвящена затуханию малых радиальных колебаний пузырька в приближениях гомобаричности, постоянства температуры жидкости и отсутствия фазовых переходов. Рассмотрены все основные механизмы диссипации: вязкий, термический и акустический, также предложен способ одновременного решения задачи для свободных и вынужденных колебаний с помощью единой системы

уравнений. Показано, что в большинстве реальных случаев определяющую роль оказывает именно термический механизм диссипации, также определены условия, при которых важны другие механизмы затухания. Путём усреднения по объёму характеристик пузырька выводятся точные формулы для параметров линейных свободных и вынужденных колебаний малого сферического пузырька в жидкости. Обсуждается применение полученных результатов для описания затухания волн в пузырьковой среде, описания резонансного механизма дробления пузырька и для других приложений. Результаты, изложенные в главе 2, вошли в работы [12; 13; 61].

В главе 3 с помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова [62] получено асимптотическое описание динамики малых колебаний пузырька в случае резонансной частоты возбуждающей волны, а также резонанса частот радиальной и деформационной моды 2:1. С помощью полученных результатов по затуханию колебаний пузырька учтены все существенные механизмы диссипации энергии радиальной моды (термический, акустический, вязкий), эффекты поверхностного натяжения, показано, что затуханием деформационной моды можно пренебречь для пузырьков не слишком большого радиуса. Доказано, что амплитуда деформационной моды значительно вырастает и способна многократно превысить амплитуду радиальной моды, что может привести к дроблению пузырька.

Предложен новый резонансный механизм дробления газового пузырька в акустической волне. Показано, что дробление пузырька с резонансным радиусом возможно при относительно небольшой амплитуде давления в возбуждающей волне резонансной частоты: порядка нескольких процентов от равновесного давления. Получено оценочное условие дробления для случаев быстрого и медленного включения акустической волны. Для его полного обоснования в дальнейшем необходимо провести точные расчёты с учётом нелинейных колебаний поверхности пузырька и затухания деформационной моды, а также потребуются экспериментальные подтверждения. Данный механизм дробления может иметь широкие приложения, в том числе для прорыва гематоэнцефалического барьера в медицине. Содержание главы 3 составляют статьи [12; 13; 63–65].

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 95 страниц, включая 16 рисунков и 0 таблиц. Список литературы содержит 115 наименований.

Глава 1. Свободные колебания пузырька при резонансе частот радиальной и деформационной мод 2:1

Рассматривается свободно колеблющийся пузырёк при наличии резонанса между радиальной и произвольной деформационной модой колебаний 2:1. Перекачка энергии между модами описывается с помощью метода инвариантной нормализации гамильтониана. Обнаруживается аналогия с задачей о качающейся пружине при том же резонансе между модами колебаний. Показывается что, в отличие от пружины, амплитуда колебаний деформационной моды пузырька значительно превышает амплитуду радиальной моды, и делается вывод, что это может привести к дальнейшему дроблению пузырька.

Во введении проводится обзор литературы, относящейся к проблеме. Отдельным подразделом разбирается решение задачи о качающейся пружине, являющейся простейшей модельной аналогией задачи о пузырьке. Следующие разделы посвящаются постановке задачи, её решению, анализу полученных результатов и выводам.

1.1 Введение

Свободные колебания пузырьков в жидкости исследовались начиная с конца XIX-го века в огромном количестве ставших уже классическими трудов. В монографии сэра Горация Лэмба [66, с. 463, с. 566] получены частота и логарифмический декремент вязкого затухания произвольной деформационной гармоники. В статье Миннарта [67] 1933-го года получена так называемая миннаэрттовская частота радиальных колебаний пузырька в жидкости, также проведено систематическое экспериментальное исследование зависимости частоты от размера пузырька, рода жидкости и газа, а также температуры, экспериментально показано, что формула для частоты справедлива с доступной в те времена точностью. Миннарт не учитывал затухание и считал процесс расширения-сжатия газа адиабатическим, хотя его результаты будут верны и для политропического закона расширения газа. Логарифмический декремент затухания радиальных колебаний был измерен вскоре Майером и Таммом [68]. Во второй главе будет

проведён подробный учёт затухания и будет показано, что предположение об адиабатичности не совсем верно, однако в этой главе мы также пренебрегаем эффектами затухания.

Влияние несферичности формы пузырька на частоту его объёмных колебаний экспериментально исследовали в 50-х годах Страсберг и Фицпатрик [69; 70], изучая акустическое излучение пузырька, отрывающегося от сопла. Плессет [71] в 1954-м построил дифференциальное уравнение, описывающее нелинейные колебания по несферической моде по типу уравнения Рэля-Плессета для сферической моды. В обзоре Плессета и Просперетти [17] в 1977-м было высказано соображение о возможности дробления пузырька при достижении амплитудой деформационной моды значения порядка радиуса пузырька, также был предсказан механизм параметрической перекачки энергии в деформационную моду при резонансе частот 2:1. Более того, было показано, что учёт вязкой диссипации несферической моды приводит к уравнению Матьё, из решения которого следует, что будет существовать пороговое значение амплитуды радиальной моды, начиная с которого будет возбуждаться деформационная мода. В работе [72] методами теории возмущений была уточнена формула Лэмба для частоты деформационной моды с учётом слабой нелинейности колебаний.

В конце 80-х в связи с исследованиями шумов моря возник интерес к резонансным явлениям в колебаниях пузырьков. В серии работ Лонге-Хиггинса [1–3] 1989-го года вводятся некоторые интегральные теоремы для колебаний пузырька, а также показывается, что с учётом нелинейных членов колебания по деформационной моде приведут к колебаниям по радиальной моде на удвоенной частоте, и, в случае приблизительного резонанса частот 2:1, вклад деформационных мод в радиальные колебания пузырька будет особенно велик. По мнению автора это явление может объяснить некоторые особенности акустического спектра шума моря. Уже в следующем году тот же автор привёл численное моделирование спектра шума моря [4], которая хорошо согласовывалась с недавно произведёнными измерениями [5].

В 1991-м году выходит работа Уильямса и Гуо [6], содержащая очень близкую для этой главы постановку задачи. Рассматривался резонанс деформационной и радиальной моды 2:1, методом двух масштабов было показано, что энергия из деформационной моды будет медленно перекачиваться в радиальную моду, как и в этой главе, затухание не учитывалось, это было сделано в контексте критики работ [2; 3]. В том же году Лонге-Хиггинс выпустил статью [7], где под-

верг ответной критике работу Уильямса и Гуо, справедливо заметив, что механизм медленной резонансной перекачки энергии в направлении от деформационной к радиальной моде будет гаситься диссипацией, а также показав, что предложенный им механизм вполне способен обеспечить требуемый уровень шумов моря даже с учётом диссипации. В обеих работах был рассмотрен только прямой процесс, приводящий к переводу энергии деформационной моды в акустическую энергию излучения радиальной моды.

В работе Янга, Фенга и Лиля [8] сделана попытка расширить результаты [7] на различные типы начальных возмущений и резонансов. В статье Фенга и Лиля [9] была рассмотрена перекачка энергии между модами и было показано, что в самом деле перекачка происходит в обе стороны по очереди, если пренебречь затуханием. Также, в пренебрежении затуханием, из закона сохранения энергии было получено оценочное условие дробления для нескольких номеров мод по амплитуде радиальных колебаний. В работе Мао [10] 1995-го года приведены экспериментальные свидетельства наличия перекачки энергии между модами для свободно колеблющихся пузырьков, выдуваемых из сопла. В работе Мак-Дугалда [11] 1999-го года было проведено численное моделирование динамики пузырька в случае резонанса 2:1 и были получены формы пузырьков практически перед дроблением. Были предсказаны два типа дробления: пузырьковое кольцо и дробление на несколько частей. Особняком стоит тема резонансной перекачки энергии в случае поступательного движения пузырька, см. например [73].

Новые результаты появились в связи с развитием метода инвариантной нормализации гамильтониана, описанного ниже. Задача о свободных эллипсоидальных колебаниях газового пузырька исследовалась аналитически методом гамильтоновой нормальной формы [58]. В данной главе будет решена методом инвариантной нормализации гамильтониана задача о динамике пузырька при резонансе радиальной и произвольной деформационной моды колебаний 2:1, что составляет собой содержание статей [48; 49].

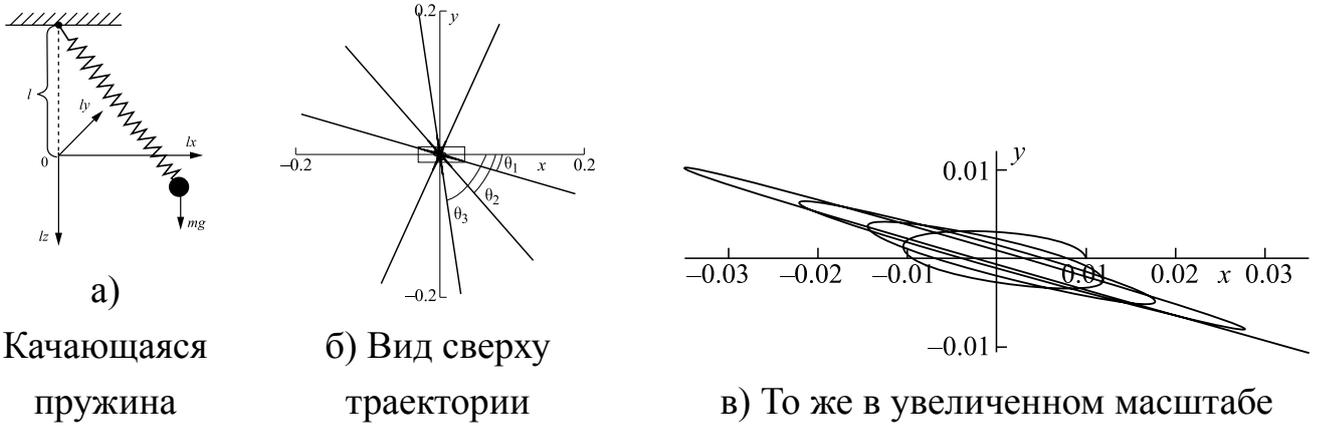
1.1.1 Задача о качающейся пружине

В книге Рута 1877-го года [74, с. 90] и работе Кортевега 1898-го года [75] на качественном уровне было предсказано, что даже малое возмущение в урав-

нении колебаний при резонансном соотношении частот может вызвать большое отклонение системы от невозмущённой траектории. Чуть более подробный анализ условий резонанса приведён в работе Бета 1913-го года [76]. Классический пример такого резонанса представляет физическая задача о плоских колебаниях качающейся пружины при резонансе частот вертикальных и горизонтальных колебаний 2:1, рассмотренная Виттом и Гореликом [77] в 1933 г. В этой работе описан эксперимент, в котором наблюдается периодическая перекачка энергии вертикальных колебаний маятника в горизонтальные. Этот опыт был выполнен по предложению академика Л.И. Мандельштама для иллюстрации некоторых особенностей колебаний молекул углекислого газа, которые обнаружил Э. Ферми [78] двумя годами ранее, анализируя спектры комбинационного рассеяния газообразного углекислого газа. В описанной Ферми модели молекулы частота продольной моды практически совпадает с удвоенной частотой поперечной моды, вследствие чего происходит модуляционный режим обмена энергии между модами колебаний молекул, что приводит к появлению дополнительных полос в рамановских спектрах. Качающаяся пружина — простейший классический аналог системы с двумя колебательными степенями свободы, на что и обратили свое внимание Мандельштам, Витт и Горелик, а также последующие авторы (см. например [79]).

Задача о нелинейных пространственных колебаниях материальной точки на невесомом упругом подвесе (качающаяся пружина — рисунок 1.1а) представляется более содержательной, и имеет приложения во многих областях физики, в том числе известен квантовый аналог задачи [80]. Частота вертикальных колебаний предполагается равной удвоенной частоте качаний (резонанс 1:1:2). В этом случае колебания по вертикали неустойчивы, что приводит к перекачке энергии вертикальных колебаний в энергию качаний маятника. Амплитуда колебаний материальной точки по вертикали уменьшается, и через определенный период времени маятник начинает совершать качания в некоторой вертикальной плоскости. Эти качания также неустойчивы, что приводит к обратной перекачке энергии в вертикальную моду колебаний. Опять повторяются колебания по вертикали. Однако после вторичной перекачки энергии вертикальных колебаний в энергию качания видимая плоскость качания поворачивается на некоторый угол, как видно из результатов прямого численного моделирования, изображённых на рисунке 1.1б, причём видно, что практически весь угол поворота колебаний формируется во время почти вертикальных колебаний маятника, как пружины.

Фрагмент траектории внутри прямоугольника, ответственный за формирование первого направления горизонтальных колебаний, отображён в увеличенном масштабе на рисунке 1.1в. В работах [13;81;82] эти эффекты описаны аналитически: найден период перекачки энергии, изменения амплитуд обеих мод со временем и изменение угла видимой плоскости колебаний.



а) Качающаяся пружина

б) Вид сверху траектории

в) То же в увеличенном масштабе

Рисунок 1.1 — Качающаяся пружина а) и вид сверху траектории точечной массы в двух разным масштабах б) и в) для начальных условий $\delta = 0.1$, $\xi_1 = 0.1$, $\xi_2 = 0.03$

Перейдем к построению асимптотического решения рассматриваемой задачи. Обозначим координаты по осям x, y с рисунка 1.1 как x_1, x_2 . Запишем задачу Коши системы уравнений для координат x_1, x_2, z [82] в безразмерных координатах и времени (нормированных на длину пружины l и частоту качаний), пренебрегая в ней слагаемыми выше второй степени

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, & \dot{u}_1 &= -x_1 - 3x_1z, & \dot{x}_2 &= u_2, & \dot{u}_2 &= -x_2 - 3x_2z, \\ \dot{z} &= w, & \dot{w} &= -4z - \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2), & z(0) &= \delta, & w(0) &= 0, \\ x_1(0) &= \xi_{10}\delta, & u_1(0) &= 0, & x_2(0) &= 0, & u_2(0) &= \xi_{20}\delta \end{aligned} \quad (1.1)$$

где параметры, входящие в начальные условия δ , ξ_{10} и ξ_{20} предполагаются малыми. Решение этой задачи строится в работе [81] методом инвариантной нормальной формы, представляется в элементарных функциях и описывает медленный периодический процесс перехода энергии колебаний по вертикали в

энергию качаний по горизонтали

$$\begin{aligned}
 z(t) &= Z(t) \cos 2(t - t_1), \quad r(t) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R(t) \cos(t - t_2) \\
 \frac{Z(t)}{\delta} &= \left| \operatorname{th} \frac{3\delta}{4}(t - T/2) \right| + \left| \operatorname{th} \frac{3\delta}{4}(t - 3T/2) \right| - 1 + \dots \\
 \frac{R(t)}{2\delta} &= \operatorname{sech} \frac{3\delta}{4} \left(t - \frac{T}{2} \right) + \operatorname{sech} \frac{3\delta}{4} \left(t - \frac{3T}{2} \right) + \dots \\
 T &= \frac{4}{3\delta} \ln \frac{32}{\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2} + \dots
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $R(t) = \sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t)}$, $X_1(t)$, $X_2(t)$ и $Z(t)$ — медленно меняющиеся амплитуды колебаний $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $z(t)$, соответственно, T — период перекачки энергии между модами. Функции $R(t)$ и $Z(t)$ подчинены закону сохранения энергии $R^2(t) + 4Z^2(t) = 4\delta^2$. При перекачке энергии отношение максимальных значений амплитуд горизонтальной моды колебаний к вертикальной равно двум

$$R_{\max}(t)/Z_{\max}(t) = 2$$

Для исследования поворота плоскости колебаний строим решение в переменных орбиты. Если нелинейные члены уравнений отсутствуют, то решение этой системы записывается в виде

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r_x \cos(t + s) \cos \psi - r_y \sin(t + s) \sin \psi \\
 x_2 &= r_x \cos(t + s) \sin \psi + r_y \sin(t + s) \cos \psi \\
 \dot{x} &= -r_x \sin(t + s) \cos \psi - r_y \cos(t + s) \sin \psi \\
 \dot{y} &= -r_x \sin(t + s) \sin \psi + r_y \cos(t + s) \cos \psi
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Постоянные интегрирования называются элементами орбиты. Их геометрический смысл таков: r_x и r_y — полуоси эллиптической траектории, параметр s характеризует положение точки на эллипсе в момент времени $t = 0$, ψ — угол наклона оси эллипса r_x к оси x . Если нелинейные члены (1.1) не нулевые, то элементы орбиты становятся функциями времени. Чтобы получить уравнения, описывающие их изменение, нужно сделать в (1.1) замену переменных по формулам (1.3), после которой получится система линейных уравнений относительно

производных элементов орбиты. Разрешая ее получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dr_x}{dt} &= 3r_x z \sin(t+s) \cos(t+s) \\
\frac{dr_y}{dt} &= -3r_y z \sin(t+s) \cos(t+s) \\
\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3z r_x r_y}{r_x^2 - r_y^2} \cos^2(t+s) \\
\frac{ds}{dt} &= \frac{3z}{r_x^2 - r_y^2} [r_x^2 \cos^2(t+s) - r_y^2 \sin^2(t+s)] \\
\frac{d^2 z}{dt^2} + 4z &= -\frac{3}{2} [r_x^2 \cos^2(t+s) + r_y^2 \sin^2(t+s)]
\end{aligned} \tag{1.4}$$

с начальными условиями $r_x(0) = r_{x0} = \delta \xi_{10}$, $r_y(0) = r_{y0} = \delta \xi_{20}$, $\psi(0) = 0$, $s(0) = 0$, $z(0) = \delta$, $\dot{z}(0) = 0$.

На полупериоде перекачки энергии $t \in (0, T/2)$ асимптотическое решение уравнения для z имеет вид $z = \delta \cos t$. Подставим его в правые части первых четырёх уравнений системы (1.4). Получим уравнения в стандартной форме с малым параметром δ . В соответствии с первой теоремой Боголюбова [3] на отрезке порядка $1/\delta$ оно приближается решением автономной системы с осредненными по периоду правыми частями

$$\begin{aligned}
\frac{dr_x}{dt} &= \frac{3}{4} \delta r_x \sin 2s \\
\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3\delta r_x^2 r_{x0} r_{y0}}{2(r_x^4 - r_{x0}^2 r_{y0}^2)} \cos 2s \\
\frac{ds}{dt} &= \frac{3\delta (r_x^4 + r_{x0}^2 r_{y0}^2)}{4(r_x^4 - r_{x0}^2 r_{y0}^2)} \cos 2s
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Разделив первое уравнение системы (1.5) на третье получим

$$\frac{dr_x}{ds} = r_x \frac{r_x^4 - r_{x0}^2 r_{y0}^2}{r_x^4 + r_{x0}^2 r_{y0}^2} \operatorname{tg} 2s, \quad r_x r_y = r_{x0} r_{y0}$$

Это уравнение имеет интеграл

$$\cos 2s = (r_{x0}^2 - r_{y0}^2)C, \quad C = \frac{r_x^2}{r_x^4 - r_{x0}^2 r_{y0}^2} \tag{1.6}$$

Отсюда получаем дифференциальные уравнения для r_x и ψ :

$$\begin{aligned}
\frac{dr_x}{dt} &= \frac{3}{4} \delta r_x \sqrt{1 - (r_{x0}^2 - r_{y0}^2)^2 C^2} \\
\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3}{2} \delta r_{x0} r_{y0} (r_{x0}^2 - r_{y0}^2) C
\end{aligned}$$

Система уравнений интегрируется точно в элементарных функциях

$$\begin{aligned} 2r_x^2 &= (r_{x0}^2 + r_{y0}^2) \operatorname{ch} \frac{3}{2} \delta t + \sqrt{(r_{x0}^2 + r_{y0}^2)^2 \operatorname{ch}^2 \frac{3}{2} \delta t - 4r_{x0}^2 r_{y0}^2} \\ \psi &= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\xi_{10}\xi_{20} \operatorname{th} 2s}{\xi_{10}^2 - \xi_{20}^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Формулы (1.6) и (1.7) представляют собой точные решения уравнений (1.5) для переменных орбиты. Это решение имеет смысл на полупериоде перекачки энергии $0 < t < T/2$.

Из решений (1.6 и 1.7) получаем простую формулу для поворота плоскости колебаний за полупериод $t = T/2$

$$\psi_1 = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\xi_{10}\xi_{20}}{\xi_{10}^2 - \xi_{20}^2} \quad (1.8)$$

Численная проверка показывает высокую точность формулы (1.8). Так для приведённых значений $\xi_{10} = 0.1$ и $\xi_{20} = 0.03$ численное решение задачи Коши (1.1) даёт значение угла поворота (в радианах) $\psi_1 = -0.291$, а аналитическая формула (1.8) — очень близкое значение $\psi_1 = -0.285$.

Для экспериментальной проверки эффектов перекачки энергии колебаний и поворота плоскости колебаний требуется пружина высокого качества, чтобы снизить потери энергии за счет диссипативных сил, но эффект вполне наблюдаем. Эта задача имеет отношение к качественному объяснению эффекта Ферми для расщепления частот в спектре молекулы углекислого газа [78] (см. также [83; 84]). В ней также, как и в рассматриваемом пружинном маятнике имеются две собственные частоты ω и 2ω . Согласно решению для маятника колебания с частотой ω имеют медленно меняющуюся амплитуду с частотой δ и колебания происходят по закону близкому к

$$2C \sin \omega t \sin \delta t = C \cos(\omega t - \delta t) - C \cos(\omega t + \delta t)$$

При этом частоты расщепляются на две близкие частоты $\omega \pm \delta$, что наблюдается экспериментально.

Данные результаты, опубликованные в [64; 81; 82] актуальны и для задачи о перекачке энергии свободных колебаний пузырька между модами, далее будет показано, что между двумя этими колебательными системами можно провести асимптотическую аналогию, и что при резонансе частот 2:1 между радиальной и какой-то (n, m) -ой деформационной модой у пузырька будет сразу $2n + 1$ деформационных мод, одновременно удовлетворяющих условиям резонанса, между

которыми будет распределяться энергия деформационных колебаний. Для простоты будет принято, что у пузырька задействована только две из этих мод (соответствующие каким-то (n, m)). Однако для более общего решения задачи представляется целесообразным учесть взаимодействие мод между собой и построить более точную модель, учитывающую некоторое начальное распределение энергии между модами, которое можно попробовать определить экспериментально из сравнения результатов расчёта по такой модели с данными, например, по акустическому излучению пузырька в ближнем поле.

1.2 Постановка и решение задачи

Для получения системы уравнений в гамильтоновом виде используется стандартная процедура перехода от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона с помощью преобразования Лежандра. Для этого требуется вычислить кинетическую и потенциальную энергии колеблющегося пузырька, которые находятся в предположениях, потенциального течения жидкости вокруг пузырька и отсутствия затухания.

К полученному гамильтониану применяется процедура инвариантной нормализации. При этом подразумевается, что колебания по обеим модам имеют небольшую амплитуду. Оказывается, что уравнения при некоторой замене переменных с точностью до резонансных членов совпадают с таковыми для качающейся пружины. Аналогично решению задачи с пружиной, находится решение для колебаний пузырька. Также находится период перекачки энергии в зависимости от номера моды и начальных условий и максимальное отношение амплитуд мод, достигаемое в ходе перекачки.

1.2.1 Постановка задачи о малых свободных колебаниях пузырька при резонансе частот 2:1

Рассматривается колеблющийся газовый пузырёк в бесконечной идеальной жидкости. Форма пузырька может быть разложена по базису сферических

функций, однако для простоты предполагается, что существенны отклонения от сферичности, описываемые только одной из них, находящейся в резонансе частот с радиальной модой колебаний, все остальные искажения формы с большой вероятностью будут уничтожены вязким затуханием. У этого предположения есть недостатки. В частности, будет показано, что одновременно являются резонансными все моды описываемыми одним и тем же нижним индексом полинома Лежандра. Тем не менее, такая постановка отвечает требованиям разумной минимальности и позволяет получить искомые эффекты перекачки энергии. Также уравнение для формы пузырька несколько искусственно накладывает условия на его форму, что будет верно только в нашей слабо нелинейной постановке.

Пусть пузырёк обладает двумя степенями свободы и его уравнение поверхности:

$$r(\theta, \psi, t) = a_0 (1 + a(t) + P_n^m(\eta)(\xi_1(t) \cos m\psi + \xi_2(t) \sin m\psi)) \quad (1.9)$$

где a_0 — невозмущённый радиус пузырька, $\eta = \cos \theta$, θ — полярный угол, $P_n^m(\eta)$ — n, m -ый присоединённый полином Лежандра, $n = 2, 3, \dots$; $m = 0, 1, \dots, n$, ψ — обозначение для азимутального угла (вместо обычно используемого φ , такой выбор объясняется желанием избежать путаницы с принятым обозначением потенциала).

1.2.2 Потенциал скорости течения жидкости

Потенциал скорости $\varphi(r, \theta, \psi, t)$ в области Ξ , заполненной жидкостью, находится из решения задачи Неймана

$$\Delta \varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\partial \Xi} = v_n \quad (1.10)$$

где v_n обозначает нормальную к поверхности пузырька проекцию скорости жидкости v (или скорости границы пузырька), а $\partial/\partial n$ производную вдоль нормали к поверхности пузырька. В сферических координатах граничное условие (1.10) записывается так

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial r}{\partial \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = a_0 (\dot{a} + P_n^m(\eta)(\dot{\xi}_1 \cos m\psi + \dot{\xi}_2 \sin m\psi)) \quad (1.11)$$

Найдём с точностью до второго порядка малости по a и ξ_1, ξ_2 решение краевой задачи (1.11)

1.2.3 Кинетическая энергия пузырька

Выражаем кинетическую энергию жидкости через интеграл по поверхности

$$E_K = \frac{\rho}{2} \iint_{\partial \Xi} \varphi v_n dS = -\frac{\rho}{2} \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\eta=-1}^1 \varphi r^2(\psi, \theta, t) \dot{r}(\psi, \theta, t) d\eta \quad (1.12)$$

где ρ — плотность жидкости. Подставляя (1.10) и потенциал жидкости в (1.12), получаем с точностью до третьего порядка малости по a и ξ_1, ξ_2 кинетическую энергию жидкости. Следуя методу нормальной формы, можно резко упростить выкладки, если в третьем порядке малости по a и ξ_1, ξ_2 принимать во внимание только резонансные члены, в которые входят переменные обеих мод (радиальной моды a и деформационной ξ_1, ξ_2). Выпишем кинетическую энергию без нерезонансных членов

$$E_K = 4\pi\rho a_0^5 \left(\frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{N^2(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2)}{2} \right) + 4\pi\rho a_0^5 N^2 \left[\frac{3}{2} a(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) + \right. \\ \left. + \left(\frac{4(n+3) - mn(2n+1)}{4} \right) a(\xi_1 \dot{\xi}_1 + \xi_2 \dot{\xi}_2) \right], \quad (1.13)$$

$$N^2 = \frac{(1 + \delta_{m0})(n+m)!}{2(n+1)(2n+1)(n-m)!}$$

1.2.4 Потенциальная энергия пузырька

Для нахождения потенциальной энергии пузырька необходимо вычислить объём V и площадь S пузырька, затем учесть, что потенциальную энергию в наших приближениях можно вычислить через изменения этих величин

$$\Pi = \sigma(S - S_0) + p_\infty(V - V_0) + \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \quad (1.14)$$

где V_0 и S_0 — невозмущённые объём и площадь пузырька, σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе газ-жидкость, p_∞ — давление в жидкости вдали от пузырька, p_0 — начальное давление внутри пузырька, γ — показатель адиабаты газа. В выражении для потенциальной энергии первый член отвечает за

энергию поверхностного натяжения, второй и третий за работу против сил давления, считая, что газ расширяется по закону адиабаты: $pV^\gamma = const$ (что допустимо только при условии малости тепловых потерь). Раскладывая V и S до третьего порядка малости, получаем потенциальную энергию пузырька в форме

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + O_4(a, \xi_1, \xi_2), \quad \Pi_1 = 4\pi a_0^2 a (2\sigma + (p_\infty - p_0)a_0) \quad (1.15)$$

Из условия равновесия следует $\Pi_1 = 0$, что является формулой Лапласа для давления под искривленной поверхностью $p_0 = p_\infty + \frac{2\sigma}{a_0}$. Подставляя условие равновесия и пренебрегая нерезонансными членами, получаем потенциальную энергию до второго и третьего порядка малости по a и ξ_1, ξ_2

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= 4\pi\sigma a_0^2 \left[\left(3\gamma - 1 + \frac{3p_\infty a_0 \gamma}{2\sigma} \right) a^2 + \kappa_n N^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right], \\ \Pi_3 &= 4\pi\sigma a_0^2 \cdot 2(n+1)N^2 \left(3\gamma - 1 + \frac{3p_\infty a_0 \gamma}{2\sigma} \right) a (\xi_1^2 + \xi_2^2), \\ \kappa_n &= \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.2.5 Собственные частоты колебаний и условия резонанса

Из решения линейной системы (закон сохранения энергии до второго порядка малости) находим частоты колебаний радиальной [67] ω_a и n, m -ой деформационной [66, с. 463] ω_ξ мод

$$\omega_a^2 = \frac{2\sigma}{\rho a_0^3} \left(3\gamma - 1 + \frac{3p_\infty a_0 \gamma}{2\sigma} \right), \quad \omega_\xi^2 = \frac{2\sigma \kappa_n}{\rho a_0^3} \quad (1.17)$$

Оказывается, что частота n, m -ой деформационной моды не зависит от второго индекса, что обеспечивает одновременное соблюдение условий резонанса для всех мод с одним и тем же первым индексом n . Так как и в кинетической и в потенциальной энергии присутствуют резонансные члены только вида $a\xi^2$, остаётся единственный возможный резонанс третьего порядка $\omega_a/\omega_\xi = 2 : 1$ (только при таком условии резонансные члены не обнулятся при усреднении вдоль решений линейной системы). Условие резонанса записывается в виде

$$\frac{a_0}{a_\sigma} = \frac{4\kappa_n + 1}{3\gamma} - 1, \quad a_\sigma = \frac{2\sigma}{p_\infty} \quad (1.18)$$

Для газовых пузырьков в воде при атмосферном давлении $a_\sigma \approx 1.4$ микрон. На рисунке 1.2 изображена зависимость радиуса воздушного пузырька a_0 в воде при атмосферном давлении от n — номера резонансной моды (условие резонанса зависит только от нижнего индекса) при резонансе $\omega_a/\omega_\xi = 2 : 1$, $\sigma = 0.073$ Н/м, $p_\infty = 10^5$ Па, $\gamma = 1.4$. Так как основной интерес представляют малые пузырьки

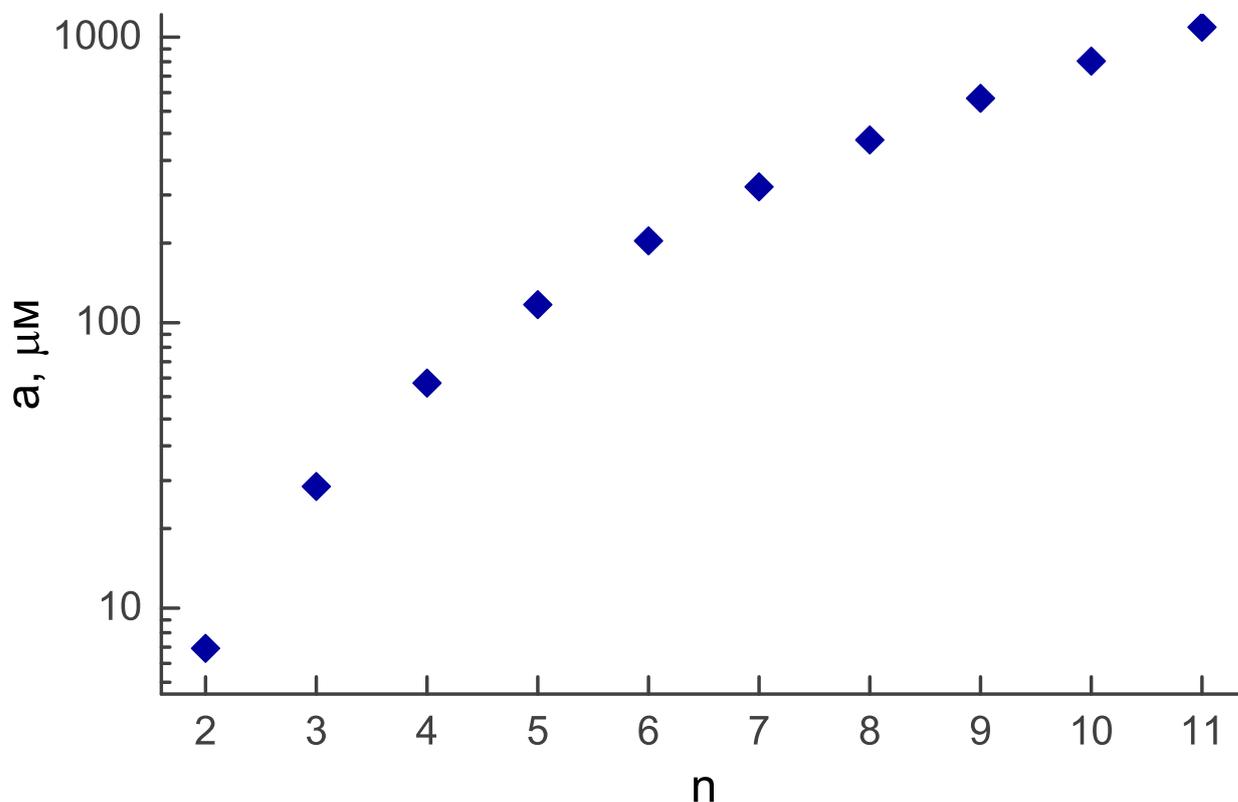


Рисунок 1.2 — Размер резонансного воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении в зависимости от номера деформационной моды n

радиусом менее 1 мм, выходит, что следует рассматривать моды с $n \leq 10$. К этому выводу также приводят соображения о большой величине коэффициента вязкого затухания деформационных мод высокого порядка, примерно квадратично растущего с увеличением номера моды $\beta_\mu = (n + 2)(2n + 1)\mu/a_0^2$ [66, с. 566].

1.2.6 Функция Лагранжа и уравнения Гамильтона пузырька

Находим функцию Лагранжа $L = E_K - \Pi$ пузырька. В безразмерных переменных $\tau = \omega_\xi t$, $z = a$, $x_{1,2} = N\xi_{1,2}$ с точностью до резонансных членов 3-го

порядка малости по z и $x_{1,2}$, а также при резонансе $\omega_a/\omega_\xi = 2 : 1$ она имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{z}^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 4z^2 - x_1^2 - x_2^2 \right) + \frac{3}{2} z \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) + \left(n + 3 - \frac{mn(2n+1)}{4} \right) \dot{z}(x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2) - 4(n+1)z(x_1^2 + x_2^2), \quad (1.19)$$

Используя известную процедуру преобразования Лежандра лагранжиана системы в гамильтониан, получаем выражение для гамильтониана системы H с точностью до резонансных членов третьей степени малости по z , x_1 , x_2

$$H = H_0 + F_1$$

$$H_0 = \frac{1}{2} (w^2 + u_1^2 + u_2^2 + 4z^2 + x_1^2 + x_2^2)$$

$$F_1 = -\frac{3}{2} z (u_1^2 + u_2^2) - \left(n + 3 - \frac{mn(2n+1)}{4} \right) w (x_1 u_1 + x_2 u_2) + 4(n+1)z(x_1^2 + x_2^2) \quad (1.20)$$

где w — обобщённый импульс радиальной моды, u_1 и u_2 — обобщённые импульсы обеих деформационных мод, H_0 — невозмущённый гамильтониан, а F_1 — гамильтониан возмущения.

1.2.7 Инвариантная нормализация гамильтониана пузырька

Аналогично тому, как в статье [81] были изучены трёхмерные колебания качающейся пружины, воспользуемся процедурой инвариантной нормализации гамильтониана, описанной в [85]. Для описания резонанса 2:1 достаточно получить нормальную форму в первом приближении. Согласно методу инвариантной нормализации сначала находится общее решение невозмущённой системы с гамильтонианом H_0

$$z(t) = Z \cos 2t + \frac{W}{2} \sin 2t, \quad x_{1,2}(t) = X_{1,2} \cos t + U_{1,2} \sin t, \quad (1.21)$$

$$w(t) = W \cos 2t - 2Z \sin 2t, \quad u_{1,2}(t) = U_{1,2} \cos t - X_{1,2} \sin t$$

Нормальная форма в первом приближении получается путём усреднения возмущения вдоль траекторий порождающей системы, то есть при подстановке в

систему (1.20) вместо z, w, x_1, u_1, x_2, u_2 решений невозмущенного уравнения и последующего усреднения во времени

$$\bar{F}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1(z(t), x_1(t), x_2(t), w(t), u_1(t), u_2(t)) dt \quad (1.22)$$

Подставляя (1.21), получаем

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= K ((Z(X_1^2 + X_2^2 - U_1^2 - U_2^2) + W(X_1U_1 + X_2U_2)) \\ K &= \frac{4n + mn(2n + 1) - 1}{8} \end{aligned} \quad (1.23)$$

1.2.8 Система уравнений Гамильтона пузырька в переменных Биркгофа

Дальнейшие выкладки упростятся, если перейти к переменным Биркгофа [86, с. 72] с помощью канонического преобразования валентности $2i$

$$z_1 = \frac{W}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}iZ, \quad z_2 = U_1 + iX_1, \quad z_3 = U_2 + iX_2 \quad (1.24)$$

Нормальная форма первого приближения будет иметь вид $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{F}$, где невозмущенный гамильтониан

$$\tilde{H}_0 = i(2z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3) \quad (1.25)$$

а возмущение

$$\tilde{F} = -\frac{K}{\sqrt{2}} \left(z_1(\bar{z}_2^2 + \bar{z}_3^2) - \bar{z}_1(z_2^2 + z_3^2) \right) \quad (1.26)$$

В силу нормальности формы полученного гамильтониана, то есть коммутации двух частей гамильтониана $\{\tilde{H}_0, \tilde{F}\} = 0$, общее решение системы уравнений с гамильтонианом \tilde{H} является композицией решений систем с гамильтонианом (1.25)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2iz_1 & z_1 = Z_1 e^{2it} \\ \dot{z}_2 = iz_2 & \Rightarrow z_2 = Z_2 e^{it} \\ \dot{z}_3 = iz_3 & z_3 = Z_3 e^{it}, \end{cases} \quad (1.27)$$

и системы с гамильтонианом (1.26), где для удобства читателя решение будет выписано в заглавных буквах, которые затем нужно будет подставить в первое решение (1.27) вместо констант

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= \frac{K}{\sqrt{2}}(Z_2^2 + Z_3^2), \\ \dot{Z}_2 &= -\sqrt{2}K Z_1 \bar{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 &= -\sqrt{2}K Z_1 \bar{Z}_3\end{aligned}\tag{1.28}$$

1.2.9 Решение уравнений о перекачке энергии и пружинная аналогия

У автономного гамильтониана \tilde{F} вследствие нормальности и автономности гамильтониана \tilde{H} имеются два очевидных первых интеграла, а третий первый интеграл можно угадать из симметрии уравнений и проверить непосредственным вычислением

$$\begin{aligned}H_0 &= Z_1 \bar{Z}_1 + \frac{1}{2} Z_2 \bar{Z}_2 + \frac{1}{2} Z_3 \bar{Z}_3 \\ \tilde{F} &= -\frac{K}{\sqrt{2}} \left(Z_1 (\bar{Z}_2^2 + \bar{Z}_3^2) - \bar{Z}_1 (Z_2^2 + Z_3^2) \right) \\ \Sigma &= i \frac{Z_2 \bar{Z}_3 - Z_3 \bar{Z}_2}{2H_0}\end{aligned}\tag{1.29}$$

Первый из первых интегралов выражает собой полную энергию системы, второй — сохранение гамильтониана возмущения, третий — сохранение некоторого момента (по аналогии с задачей о качающейся пружине).

Если в качестве новой переменной ввести отношение энергии деформационных мод к полной энергии

$$\xi = \frac{Z_2 \bar{Z}_2 + Z_3 \bar{Z}_3}{2H_0} \in [0,1]\tag{1.30}$$

то непосредственной подстановкой можно проверить существование четвёртого первого интеграла системы

$$\frac{\dot{\xi}^2}{2} + \Pi(\xi) = E_{\text{eff}}, \quad \Pi(\xi) = 4K^2 H_0 \xi (\xi(\xi - 1) - \Sigma^2)\tag{1.31}$$

где первый интеграл E_{eff} будет играть роль эффективной энергии, а динамика изменения относительной энергии деформационной моды ξ будет описываться

динамикой частицы единичной массы с энергией E_{eff} в эффективном потенциальном поле $\Pi(\xi)$. Коэффициент $4K^2H_0$ отвечает за ускорение частицы в $2K\sqrt{H_0}$ раз, потому для простоты анализа положим здесь его равным единице. Получим однопараметрическое семейство потенциалов, изображённое на рисунке 1.3. Легко заметить, что отношение $\Sigma/\xi \in [0,1]$, потому значение Σ^2 ограничено

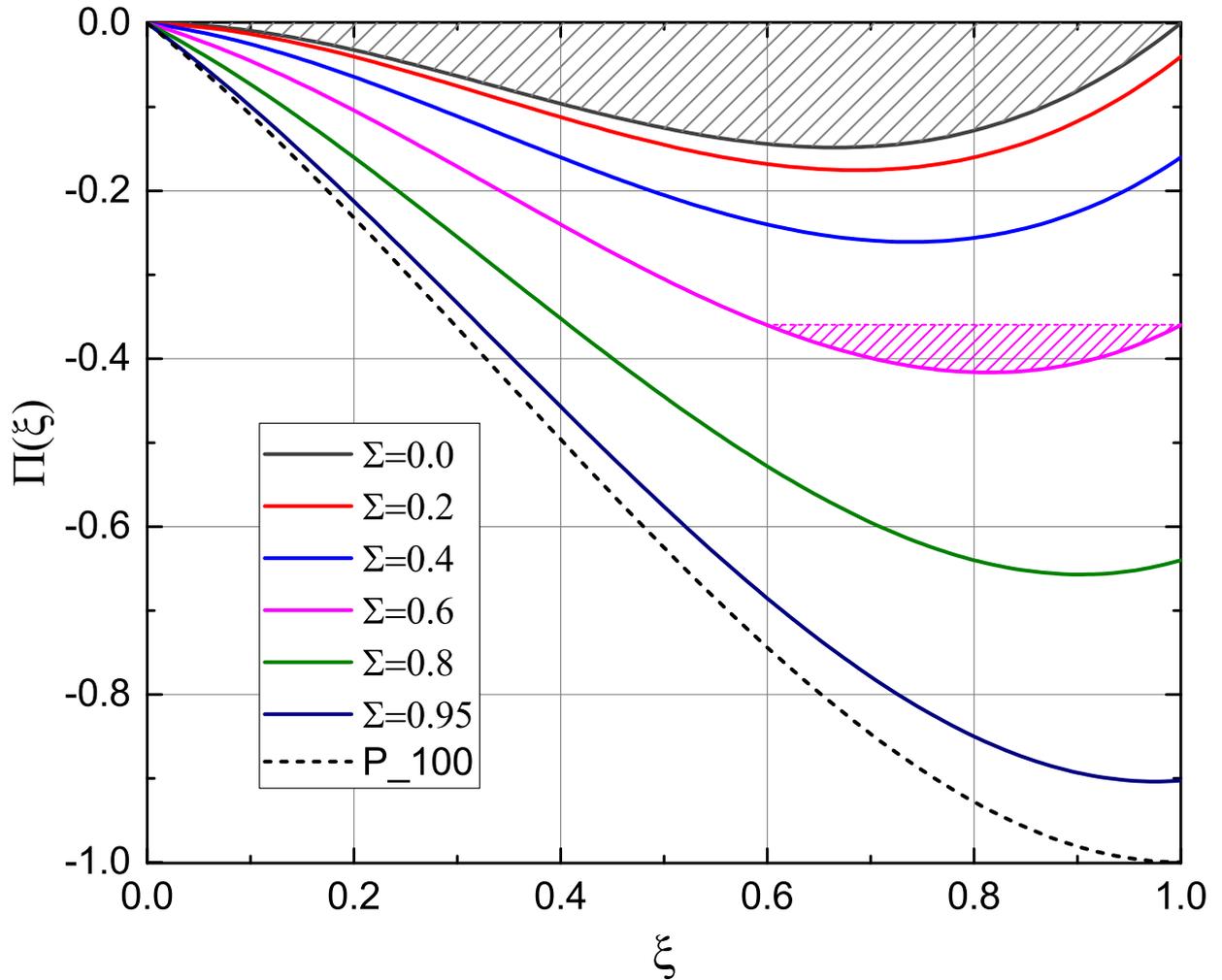


Рисунок 1.3 — Семейство потенциалов энергии деформационной моды в зависимости от значения эффективного момента Σ . Заштрихованы регионы допустимого начального положения энергии деформационной моды в случаях $\Sigma = 0$ (штриховка серым цветом) и $\Sigma = 0.6$ (штриховка малиновым цветом)

сверху минимальным значением ξ^2 . Также, если для потенциальной кривой с параметром Σ обозначить регион допустимых начальных значений $\xi \in [\Sigma, 1]$, то получаем $\Pi(\xi) \leq \Pi(\sigma) = \Pi(1)$. Как и следовало ожидать, потенциал на допустимых значениях ξ вызывает колебательное движение частицы от минимального до максимального значения ξ , причём на кривой имеется единственный минимум. Аналогичные результаты можно получить, если заметить, что при замене

$\tilde{t} = 8Kt/3$ система уравнений (1.27) переходит в систему уравнений для задачи о трёхмерной качающейся пружине [81], для которой найдено общее решение.

1.3 Анализ полученных результатов

В контексте проблемы резонансного дробления пузырька особенно интересен случай малых начальных несферических деформаций пузырька $\xi_0 = \xi(0) \ll 1$, когда вначале возбуждается преимущественно радиальная мода, и лишь затем перекачка энергии приводит к значительному возбуждению деформационной моды. В этом случае можно пренебречь начальным значением Σ . Также характерные значения полной энергии H_0 , которая вначале практически равна энергии радиальной моды, меньше 1, так как начальная деформация пузырька принимается небольшой.

1.3.1 Период перекачки энергии

Для нахождения периода выпишем начальные условия и определения для используемых в них переменных (выписываем только до второго порядка малости, хотя в общем случае можно выписать точнее)

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} (4z^2 + x_1^2 + x_2^2 + w^2 + u_1^2 + u_2^2) \Big|_0 \\ \Sigma &= \frac{x_2 u_1 - x_1 u_2}{2H_0} \Big|_0 \\ \xi_0 = \xi(0) &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + u_1^2 + u_2^2}{2H_0} \Big|_0 \\ \dot{\xi}_0 &= 0 \\ z = a, \quad w &\approx \dot{a}, \quad x_1 = N\xi_1, \quad x_2 = N\xi_2, \quad u_1 \approx N\dot{\xi}_1, \quad u_2 \approx N\dot{\xi}_2 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Далее из найденного первого интеграла (1.31) найдём минимальное и максимальное значения ξ_{\min} , ξ_{\max} как нетривиальные корни уравнения

$$\xi^3 - \xi^2 - \Sigma^2 \xi = \frac{E_{\text{eff}}}{4K^2 H_0} = \frac{\dot{\xi}_0^2}{8K^2 H_0} + (\xi_0^3 - \xi_0^2 - \Sigma^2 \xi_0) \tag{1.33}$$

Выразим период из того же уравнения движения в эффективном потенциале

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\xi}^2}{2} = E_{\text{eff}} - \Pi(\xi) &\Leftrightarrow T = \sqrt{2} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{E_{\text{eff}} - \Pi(\xi)}} = \\ &= \frac{1}{K\sqrt{2H_0}} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{E_{\text{eff}}}{4K^2H_0} + \Sigma^2\xi + \xi^2 - \xi^3}} \end{aligned} \quad (1.34)$$

В статье [81] показано, как интеграл можно выразить через эллиптический, если решить кубическое уравнение на ξ .

В предельном случае $\xi \rightarrow 0$ пузырьк вначале колеблется по радиальной моде с небольшим возмущением деформационной моды. Пусть максимальная амплитуда радиальной моды во время таких колебаний равна z_{\max} , также в этом случае можно принять $\xi_{\min} = \xi_0$, $\Sigma = 0$. Будет происходить процесс срыва радиальных колебаний, когда сколь угодно малое начальное возмущение деформационной моды приводит к практически полной периодической перекачке энергии между модами, но за большое время. Можно получить асимптотическую формулу для периода перекачки колебаний

$$T = \frac{1}{2z_{\max}K} \ln \frac{8}{\xi_0} (1 + O(\xi_0)) \quad (1.35)$$

Так как в общем случае одновременно выполняется условие резонанса для всех $2n + 1$ присоединенных мод, энергия будет перекачиваться в ту моду, период перекачки для которой наименьший. Предположим, что энергия запасенная в каждой моде одинакова, что означает равенство всех ξ_0 , как отношений энергии деформационной моды к энергии радиальной моды. Единственное исключение сделаем для осесимметричной моды $n, 0$, считая, что ей соответствуют две вырожденные моды, а значит её параметр ξ_0 будет в два раза больше. Тогда отношение периодов n, m -ой и $n, 0$ мод будет равно

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2(4n - 1)}{4n - 1 + nm(2n + 1)} \quad (1.36)$$

Графики отношения периодов n, m -ой и $n, 0$ моды для трёх различных $n = 3, 5, 7$ представлены на рисунке 1.4 Видим из графика, что в сделанных предположениях перекачка энергии быстрее всего будет происходить в n, n -ую моду.

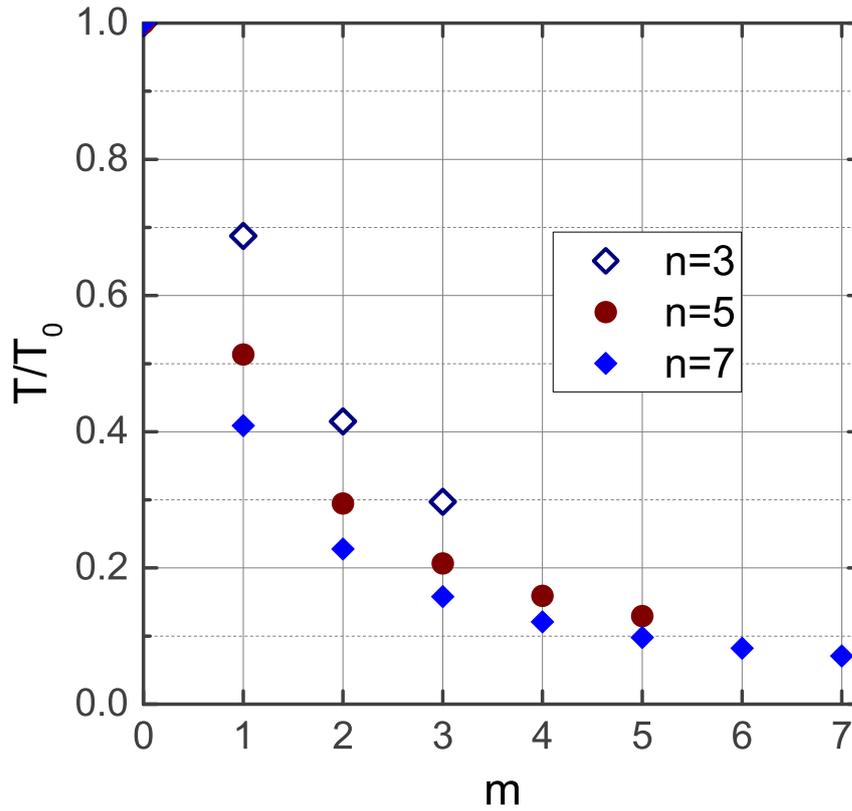


Рисунок 1.4 — Отношение периодов перекачки n, m и $n, 0$ деформационной мод в предположении равномерного распределения энергии между модами (за исключением удвоенной энергии на осесимметричную моду). Пустые ромбы, кружки и заполненные ромбы соответствуют $n = 3, 5$ и 7

1.3.2 Сравнение с численными решениями

Огибающие для колебаний по радиальной моде и деформационной моде при $\xi_0 \rightarrow 0$ представляются суммой солитонов, отстоящих друг от друга на период T

$$\begin{aligned}
 Z(t) &= z_{\max} \left(\left| \operatorname{th} \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{8}{\xi_0} \right) \right| + \left| \operatorname{th} \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{3}{2} \right) \ln \frac{8}{\xi_0} \right) \right| - 1 \right) \\
 \sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t)} &= 2z_{\max} \left(\operatorname{sech} \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{8}{\xi_0} \right) + \operatorname{sech} \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{3}{2} \right) \ln \frac{8}{\xi_0} \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.37}$$

Полученные результаты хорошо согласуются с [58], где рассмотрена перекачка энергии колебаний между модами в случае эллипсоидального осесимметричного пузырька (при $n = 2, m = 0$). На рисунке 1.5 изображён результат численного моделирования для $n = 7, m = 0, z_0 = 0.004, x_{10} = 0.0007, w_0 = x_{20} = u_{10} = u_{20} = 0$ исходной системы уравнений Гамильтона для гамильтониана, записанного до

третьего порядка малости с присутствием нерезонансных членов. Жирными ли-

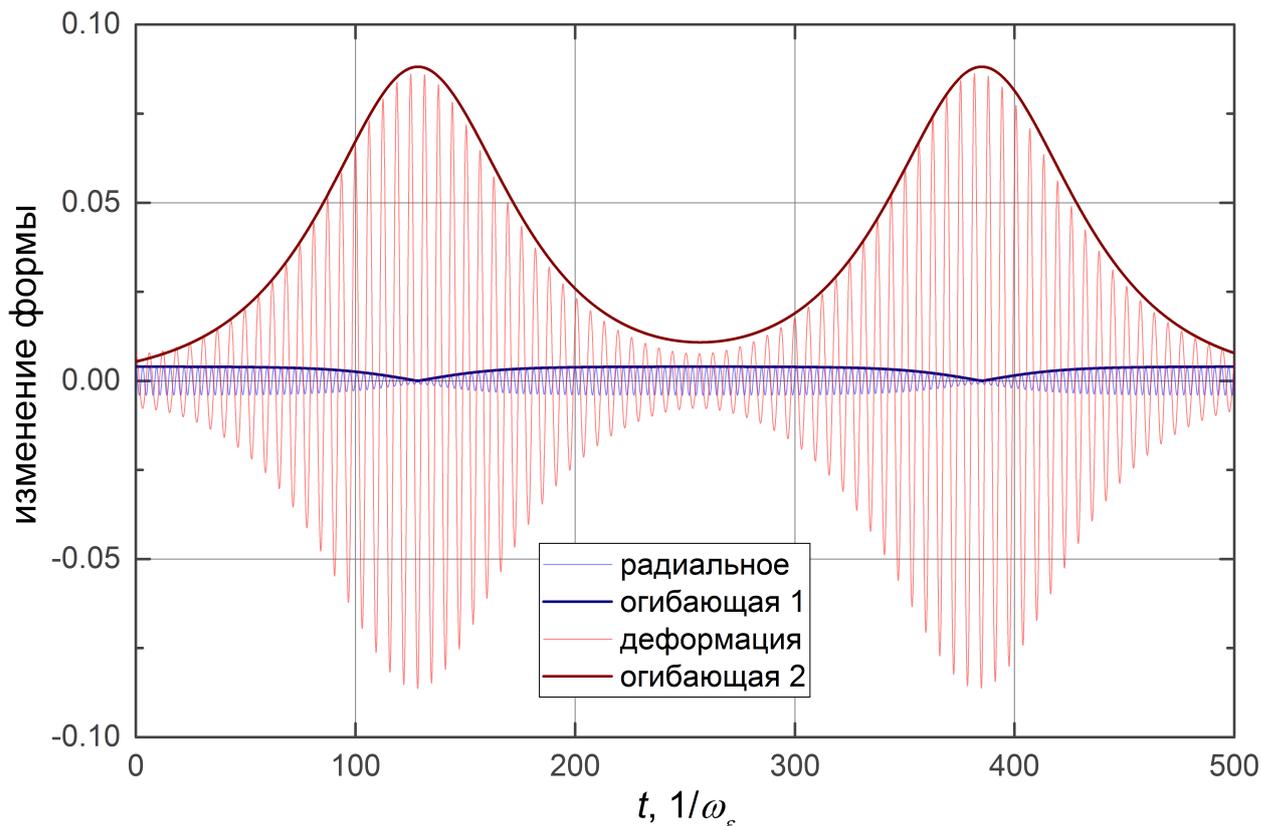


Рисунок 1.5 — Сравнение результатов прямого численного моделирования с асимптотиками. Синим цветом изображено поведение радиальной моды, красным — деформационной, жирными линиями изображены полученные аналитически асимптотики для максимальных амплитуд обеих мод

ниями изображены полученные аналитически асимптотики для максимальных амплитуд радиальных и деформационных колебаний относительно радиуса пузырька, выраженных из уравнения (1.37), как показано в следующем подразделе. Как мы видим, они неплохо согласуются с графиком численного решения. Аналитическая формула для периода (1.36) даёт $T \approx 256.8$. На рисунке 1.6 изображена верхняя полуплоскость графика, но уже до большего времени. Оцененный по графику период перекачки даёт значение $T \approx 255.7$. Надо помнить, что для получения периода в секундах безразмерный период T делится на угловую частоту деформационных колебаний ω_ξ (1.17).

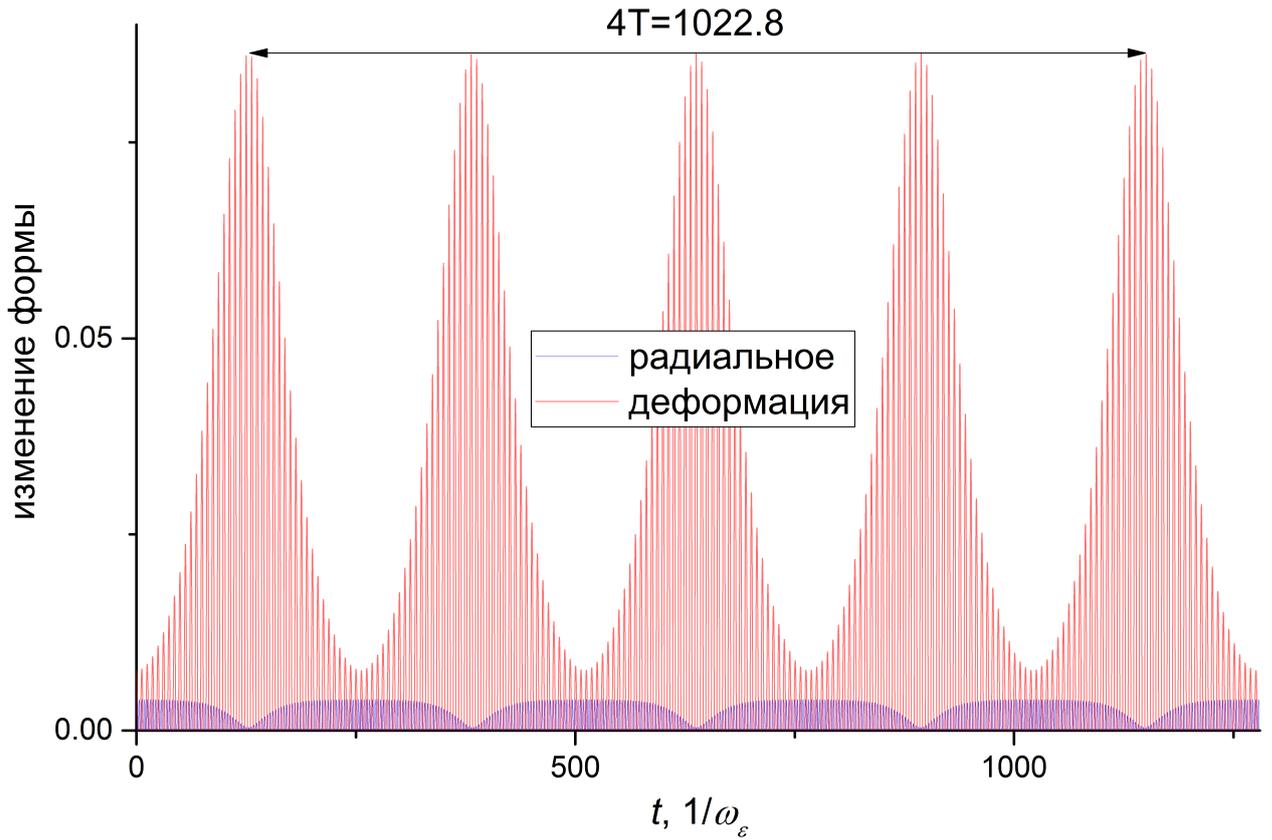


Рисунок 1.6 — Измерение периода перекачки по результатам численного моделирования. Синим цветом изображено поведение радиальной моды, а красным — деформационной

1.3.3 Отношение амплитуд мод и обсуждение возможности дробления

Рассмотрим отношение максимальной амплитуды деформационной моды A_ξ к начальной амплитуде радиальной моды A_0 в процессе срыва радиальных колебаний. Амплитуды рассматриваем в долях a_0 — радиуса пузырька. В случае малой начальной деформации почти вся энергия перекачивается, то есть $\sqrt{x_{1\max}^2 + x_{2\max}^2} \approx 2z_{\max}$. Искомое отношение

$$A_0 = z_{\max}, A_\xi = \frac{\sqrt{x_{1\max}^2 + x_{2\max}^2} \cdot \max(P_n^m(\eta))}{Nz_0}$$

Получаем, что отношение максимальной амплитуды деформации к начальной амплитуде сферических колебаний максимально при $m = 0$ и в этом случае примерно равно

$$\frac{A_\xi}{A_0} \approx 2\sqrt{(n+1)(2n+1)}, \quad m = 0 \quad (1.38)$$

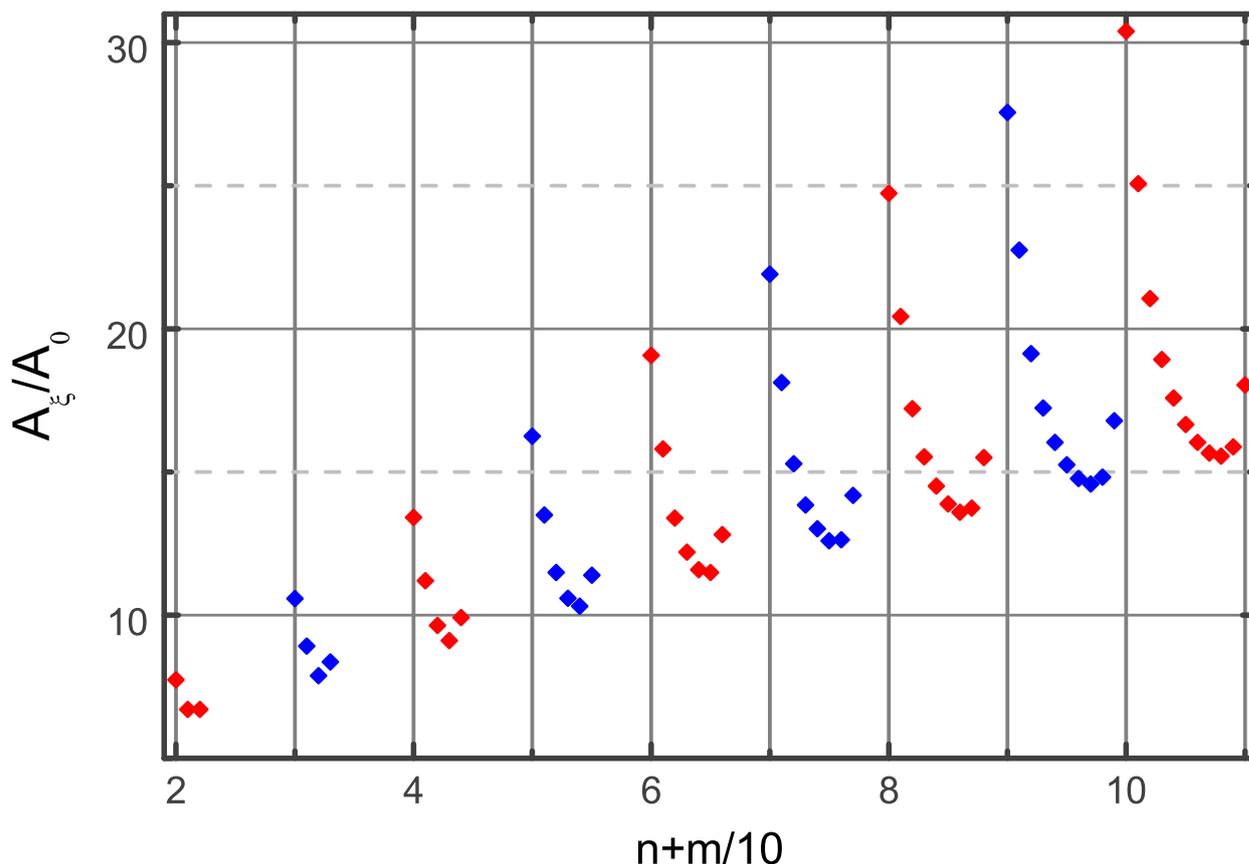


Рисунок 1.7 — Отношение максимальных амплитуд n, m -ой деформационной моды и радиальной моды в ходе перекачки. Для удобства визуализации на одном графике всех семейств мод вдоль оси x отложена функция $n + 0.1m$. Красный и синий цвет точек помогает визуально различить чётные и нечётные моды (по номеру первого индекса n)

Зависимость отношения A_ξ/A_0 от n и m изображена на рисунке 1.7. Как видно, при одной и той же амплитуде радиальных колебаний амплитуда колебаний резонансной моды тем больше, чем больше ее номер n достигая нескольких десятков при $n \leq 10$. Этот результат может послужить отправной точкой для поиска нового резонансного механизма дробления пузырьков. Не исключено, что при выборе достаточно вязкой жидкости и газа с низкой теплопроводностью можно будет получить дробление пузырька среднего размера за время, меньшее характерного времени затухания радиальных и деформационных колебаний. Интересно то, что не подходят ни резонансные пузырьки малого радиуса (вследствие большой диссипации радиальных колебаний), ни большого (для них является резонансным большой номер деформационной моды и значит уже она будет быстро затухать), также для быстрой перекачки (меньше 10 периодов) требуется существенная амплитуда начальных радиальных колебаний и начальной деформации.

Также интересно было бы оценить допустимую расстройку условий резонанса. Можно предположить, что если за время перекачки T/ω_ξ разница фаз между колебаниями не изменится существенно, тогда возможность перекачки сохранится, что даёт следующее условие для допустимой расстройки условий резонанса $\delta = |\omega_a/\omega_\xi - 2|$, при которых изложенная выше теория применима

$$\left| \frac{2\omega_\xi - \omega_a}{\omega_\xi} T \right| \ll 1 \Leftrightarrow \delta T \ll 1 \quad (1.39)$$

1.4 Выводы

Рассмотрено явление перекачки колебаний из радиальной в произвольную трёхмерную деформационную моду, отвечающую n, m -ому присоединённому полиному Лежандра. При рассмотрении использовался эффективный метод инвариантной нормализации гамильтониана. Полученные результаты оказались в полном согласии с результатами для осесимметричных колебаний эллипсоидального пузырька, отвечающего ($n = 2, m = 0$). Приведены соображения, почему перекачка может происходить не более чем в десятую моду. Показано, что период перекачки наименьший для $n = m$, что позволяет предположить, что энергия преимущественно будет переходить в эту моду. Тот факт, что при увеличении номера резонансной моды амплитуда её колебаний быстро растёт, позволяет предположить, что для пузырьков резонансных радиусов это может послужить механизмом их дробления. Однако приведённая теория не учитывает диссипации. Если учесть диссипацию, как это будет сделано в следующей главе, то окажется, что характерное время затухания радиальных колебаний будет меньше чем время перекачки для достаточно малых пузырьков, и, по всей видимости, дробление свободно колеблющегося пузырька происходить не будет. Для больших же пузырьков перекачку энергии будет гасить уже вязкая диссипация деформационной моды, растущая практически квадратично с номером моды n . Таким образом, полученные результаты дают предпосылки к возможности дробления, но сама возможность при обычных условиях может существовать только для вынужденных колебаний пузырька. Также разработанная теория даёт возможность подобрать условия, при которых перекачка будет происходить быстрее.

Глава 2. Затухание колебаний сферического пузырька в жидкости

Затухание колебаний пузырьков – фундаментальная тема, вошедшая во многие современные труды по гидродинамике. Любые серьёзные теоретические и экспериментальные исследования колебаний пузырьков требуют точного учёта затухания. Диссипация играет важную роль для описания механизмов дробления пузырьков в акустической волне, затухания акустической волны в пузырьковой среде, задач кавитации, что имеет многочисленные инженерные и медицинские приложения. Среди них прорыв гематоэнцефалического барьера с помощью направленного воздействия ультразвуком на специально введённые в кровь микропузырьки, контрастно усиленная ультразвуковая томография, защита турбин от кавитационной эрозии, изолированный подрыв подводных конструкций, сонолюминесценция, подводные стелс-технологии, исследование газообмена атмосферы с океаном, исследование состава пузырьковых смесей.

2.1 Введение

Первые качественные рассуждения о затухании звука в пористых средах появились в работах Кундта, Кирхгофа, Лэмба и лорда Рэля во второй половине XIX-го века. Кундт в 1868-м году [87] экспериментально рассмотрел прохождение звука через тонкие трубы, сделав предположение о вязком и термическом затухании звука, влияющем на скорость прохождения. Кирхгоф в том же году опубликовал статью [88] с теоретическим рассмотрением термической диссипации в таких трубах. Лорд Рэлей в 1883-м году рассмотрел более общую задачу распространения звука в пористых телах [89]. Лэмб в своей монографии [66, с. 566] нашёл формулу для вязкого затухания колебаний пузырька по произвольной деформационной моде. Данный коэффициент затухания весьма мал для обычных пузырьков с не очень большим номером возмущённой моды, однако для резонансных пузырьков он ограничивает их размер порядком 1 мм, а номер моды где-то числом $n \approx 10$, потому как далее перекачка энергии в деформационную моду будет значительно гаситься квадратично растущим коэффициентом затухания. Для небольших номеров мод затуханием деформационных колебаний можно

пренебречь, так как и акустическое излучение и тепловые эффекты не играют для таких пузырьков существенной роли вследствие малого изменения их объёма при колебаниях.

$$\beta_{\mu} = (n + 2)(2n + 1)\mu/a_0^2 \quad (2.1)$$

Первое количественное описание затухания волны в пузырьковой жидкости принадлежит перу ученика лорда Рэля Маллока (1910) [90], однако рассмотрен только вязкий механизм затухания. В 40-ые годы случился всплеск интереса к данной тематике, что объясняется развитием подводной техники, и, как следствие, повышенным вниманием военных к проблемам подводных сонаров, защиты от подводного обнаружения, а также подводных взрывов. Появляются новые подходы и результаты немецких, японских, британских и американских учёных того времени [68; 91–95]. Отдельно стоит выделить работу Пфриема 1940 г. [96], в которой впервые было использовано приближение гомобаричности для расчёта тепловой диссипации, однако диссипация была учтена достаточно неточно вследствие некоторой некорректности модели. Также отдельно стоит вынести работы [97–101], где исследовались подводные взрывы и колебания взрывных пузырей, что заложило основу будущим исследованиям акустической диссипации. Развитие теории затухания колеблющегося пузыря привело к созданию методики учёта затухания акустической волны в пузырьковой среде, ключевая работа по этой теме была выполнена Фолди в 1945 г. [102]. Неплохой исторический обзор результатов до 1950-го года содержится в статье Мартина 2019 г. [103]. Следует отметить, что большое количество работ, появлявшихся в то время, представляло собой засекреченные отчёты, что привело к некоторой задержке развития этой области науки и, зачастую, схожести некоторых работ между собой.

Следующим серьёзным прорывом была работа Девина в 1959 г. [104], в которой был использован уже вполне современный подход с приближением гомобаричности и усреднением параметров по объёму пузырька. Также интересна работа Хсиеха и Плессета 1961 г. [105], где рассматривалось распространение волн в пузырьковой среде и оценивалась применимость изотермического и адиабатического приближения поведения газа в пузырьке. Однако в обеих работах расчёт термической и акустической диссипации содержал существенные упрощения, приведшие к неточным результатам. В работе [106] проводится экспериментальная проверка формулы Девина, согласие не более чем удовлетворительное. В работе Келлера и Колоднера 1956 г. [107], где рассматривалась

акустическая диссипация подводных пузырей, образовавшихся при подводных взрывах, было выведено уравнение Келлера [108], используемое с тех пор для учёта акустических эффектов [109].

В 70-ые годы возникла современная теория затухания, описанная в работах Эллера [20], Чапмана и Плессета [21], Нигматуллина и Хабеева [22], Просперетти [23]. Последняя работа содержит наиболее строгий и аккуратный вывод линейной теории затухания одиночного пузырька, дополненный в 1991-м году оценками применимости сделанных предположений [24]. Также следует отметить, что в дальнейших работах Нигматуллина, Хабеева и Нагиева учтены фазовые превращения [25;26] (см. также монографию [27]), в работе Просперетти и соавторов [28] учтена нелинейность колебаний, в большом числе работ проведены численные расчёты (см., например работы Жанга [29; 30] и Нигматуллина с соавторами о сферически симметричной задаче [31]), полученные результаты применены к затуханию волн в пузырьковой среде (см. например [14–16]) и хорошо согласуются с экспериментом [32; 33]. Во многих работах доказывается теоретически и экспериментально способность слоя пузырьковой жидкости практически полностью погасить падающую на него акустическую волну [34].

Данная глава посвящена затуханию малых радиальных колебаний пузырька в ключевых предположениях гомобаричности и усреднения по объёму характеристик пузырька. Рассмотрены все основные механизмы диссипации: термический, вязкий и акустический, также предложен способ одновременного решения задачи для свободных и вынужденных колебаний с помощью единой системы уравнений. Показано, что в большинстве реальных случаев определяющую роль оказывает именно термический механизм диссипации, также определены условия, при которых важны другие механизмы затухания. Выводятся точные формулы для параметров линейных свободных и вынужденных колебаний малого сферического пузырька в жидкости в приближениях гомобаричности и постоянства температуры жидкости. Полученные результаты сравниваются с экспериментами. Обсуждается их применение для описания затухания волн в пузырьковой среде, резонансного механизма дробления пузырька и для других приложений. Результаты, изложенные в текущей главе, вошли в работы [12; 13; 61].

2.2 Вывод уравнения Келлера

Остановимся подробнее на выводе важнейшего результата, полученного Келлером в 1956 г. Вывод Келлера [107], подробно описанный в [108; 109], содержит несколько неточностей. В частности, никак не исследовано влияние объёмной вязкости и мало исследованы границы применимости использованных упрощений. Приведённый вывод более строг и основывается непосредственно на уравнениях Навье-Стокса в сферически-симметричном случае. Уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости записывается как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \rho r^2 v = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение Навье-Стокса в приближении неизменных коэффициентов обычной и объёмной вязкости и в отсутствие массовых сил

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{\mu/3 + \zeta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{r^2} v \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Также потребуются граничные условия, связывающие давление внутри и снаружи пузырька на его границе

$$p_b = p(a, t) + \frac{2\sigma}{a} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} - \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r} v \right) \quad (2.4)$$

Здесь учтены как лапласовская, так и вязкая добавка к давлению, вычисленная через тензор вязких напряжений в жидкости на границе пузырька. Для строгости вывода учитывается объёмная вязкость, за которую отвечает коэффициент объёмной вязкости ζ , однако, далее мы покажем, что она не вносит существенный вклад в конечное уравнение.

Перейдём к потенциалу скорости жидкости, определённого через $v = \nabla \varphi$. Для упрощения дальнейшей записи переходим к записи частных производных подстрочными индексами. Уравнение неразрывности (2.2), выраженное через потенциал

$$\rho_t + \rho_r \varphi_r + \rho \Delta \varphi = 0, \quad \Delta f = f_{rr} + 2f/r \quad (2.5)$$

Уравнение Навье-Стокса (2.3), записанное через потенциал и после деления обеих частей на плотность

$$\left(\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_r^2\right)_r + \frac{p_r}{\rho} = \frac{4\mu/3 + \zeta}{\rho} (\Delta\varphi)_r + \frac{2\mu}{\rho r^2} \varphi_r \quad (2.6)$$

Граничные условия (2.4) через потенциал

$$p_b(t) = p(a,t) + \frac{2\sigma}{a} - 2\mu\varphi_{rr} - \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right) \Delta\varphi \quad (2.7)$$

Мы можем проинтегрировать (2.5) по радиусу в пределах от произвольного $r \geq a$ до бесконечности

$$\left(\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_r^2\right)\Big|_r^\infty + c^2 \int_r^\infty \frac{d\rho}{\rho} = \int_r^\infty \frac{\left(\frac{4\mu}{3} + \zeta\right) (\Delta\varphi)_r + \frac{2\mu\varphi_r}{r^2}}{\rho} dr \quad (2.8)$$

Для дальнейшего упрощения полученных уравнений нужно сделать следующие предположения:

1. Потенциал на бесконечности стремится к константе, а давление и плотность жидкости к своим невозмущённым значениям, не зависящим от времени p_∞, ρ_∞ ;
2. Скорость звука $= dp/d\rho$ постоянна во всём интервале изменений давления и плотности, что позволит связать давление и плотность $p = p_\infty + c^2(\rho - \rho_\infty)$;
3. Относительное изменение плотности мало, как и влияние вязкости. Далее в некоторых местах можно считать плотность равной плотности на бесконечности. Коэффициенты вязкости практически неизменны.

Подставим в уравнение (2.8) пределы с учётом условий на бесконечности и продифференцируем уравнение по времени

$$\varphi_{tt} + \varphi_r \varphi_{rt} + c^2 \frac{\rho_t}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} \int_r^\infty \frac{\left(\frac{4\mu}{3} + \zeta\right) (\Delta\varphi)_r + \frac{2\mu\varphi_r}{r^2}}{\rho} dr \quad (2.9)$$

Подставляем ρ_t из (2.5)

$$\varphi_{tt} - c^2 \Delta\varphi = c^2 \frac{\rho_r \varphi_r}{\rho} - \varphi_r \varphi_{rt} + \frac{\partial}{\partial t} \int_r^\infty \frac{\left(\frac{4\mu}{3} + \zeta\right) (\Delta\varphi)_r + \frac{2\mu\varphi_r}{r^2}}{\rho} dr \quad (2.10)$$

Если пренебречь правой частью, то потенциал скорости жидкости будет удовлетворять волновому уравнению, общее решение которого

$$\varphi(r,t) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r} \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в условие для скорости на границе пузырька $\varphi_r(a,t) = \dot{a}$, получаем связь между производными f и g

$$f'(t - a/c) = g'(t + a/c) - ca\dot{a} - c\varphi(a,t) \quad (2.12)$$

Также в сделанных предположениях и после отбрасывания членов второго порядка малости уравнение (2.8) упрощается до некоторого обобщения уравнения Бернулли для сжимаемой вязкой жидкости

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_r^2 + \frac{p - p_\infty}{\rho} = \frac{4\mu/3 + \zeta}{\rho}\Delta\varphi - \frac{2\mu}{\rho} \int_r^\infty \frac{\varphi_r}{r^2} dr \quad (2.13)$$

Подставляя в уравнение (2.13) условие для давления на границе пузырька (2.7) и используя выражение для скорости границы пузырька $\dot{a} = \varphi_r(a,t)$, получаем

$$\frac{p_b - p_\infty}{\rho} = -\varphi_t(a,t) - \frac{1}{2}\dot{a}^2 + \frac{4\mu\dot{a}}{\rho a} - \frac{2\mu}{\rho} \int_a^\infty \frac{\varphi_r}{r^2} dr + \frac{2\sigma}{\rho a} \quad (2.14)$$

Дифференцируя потенциал (2.11), получаем

$$\varphi_t(a,t) = \frac{f'(t - a/c) + g'(t + a/c)}{a} \quad (2.15)$$

Подставляя производную потенциала (2.15) в уравнение (2.14) и выражая $f'(t - a/c)$ через соотношение (2.12), а также пренебрегая малым членом с быстро убывающим интегралом и умножая левую и правую части уравнения на a/c , получаем

$$\frac{a}{c} \frac{p_b - p_\infty}{\rho} + \frac{2g'(t + a/c)}{c} = \varphi(a,t) + a\dot{a} - \frac{a\dot{a}^2}{2c} + \frac{4\mu\dot{a} + 2\sigma}{\rho c}$$

Продифференцируем полученное уравнение по времени. Важно не забывать учитывать при взятии производных сложных функций, что радиус пузырька a зависит от времени

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\dot{a}}{c} + \frac{a}{c} \frac{d}{dt} \right) \frac{p_b - p_\infty}{\rho} + \left(1 + \frac{\dot{a}}{c} \right) \frac{2g''(t + a/c)}{c} = \\ & = \varphi_t(a,t) + \dot{a}\varphi_a(a,t) + \dot{a}^2 + \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) a\ddot{a} - \frac{\dot{a}^3}{2c} + \frac{4\mu\ddot{a}}{\rho c} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Наконец, подставим в уравнение (2.16) производную потенциала из уравнения (2.14), заменим $\varphi_a(a,t)$ на \dot{a} и пренебрежём малым интегральным членом

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\dot{a}}{c} + \frac{a}{c} \frac{d}{dt} \right) \frac{p_b - p_\infty}{\rho} + \left(1 + \frac{\dot{a}}{c} \right) \frac{2g''(t + a/c)}{c} = \\ & = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{a}}{3c} \right) \dot{a}^2 + \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) a\ddot{a} + \frac{4\mu}{\rho} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{c} \right) + \frac{2\sigma}{\rho a} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Последнее, что осталось сделать для получения уравнения Келлера, связать функцию g , отвечающую за сходящуюся к центру пузырька волну, с давлением в возбуждающей колебания пузырька акустической волне. Для этого воспользуемся подходом из той же работы [108]. Если записать потенциал возбуждающей акустической волны в сферических координатах относительно центра пузырька, разложить на сферически симметричную часть и часть, не обладающую такой симметрией, то последняя должна равняться нулю в начале координат вместе со своим градиентом (из существования потенциала и скорости в нуле координат). А сферически симметричная часть должна удовлетворять волновому уравнению, и, следовательно, записываться в виде

$$\Phi_{\text{symm}}(r,t) = g_1(t + r/c)/r + g_2(t - r/c)/r$$

Так как мы не учитываем отражения акустических волн от стенок сосуда, и пузырёк сам не может создать сходящуюся волну вида $g(t + r/c)/r$, то эта волна должна относиться к возбуждающей акустической волне, то есть $g_1 = g$. Условие регулярности акустической волны в $r = 0$ немедленно приведёт к равенству $g_2 = -g_1$. Далее получаем из определения производной

$$\Phi(0,t) = \Phi_{\text{symm}}(r,t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g(t + r/c) - g(t - r/c)}{r} = 2g'(t)/c$$

Отсюда можно выразить

$$2g''(t + a/c)/c = \Phi_t(0,t + a/c) \quad (2.18)$$

Для плоской волны с давлением $p = p_\infty + p_S(t)$ это сведётся к

$$2g''(t + a/c)/c = \Phi_t(0,t + a/c) = -\frac{p_S(t)}{\rho} \quad (2.19)$$

Подставляя полученное равенство (2.19) в уравнение (2.17) и откидывая малую поправку к вязкому эффекту $4\mu\ddot{a}/(\rho c)$, получаем уравнение Келлера в том виде, в котором оно использовалось в работе [28]

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\dot{a}}{c}\right) \frac{p_b(t) - p_\infty - p_S(0,t + a/c)}{\rho} + \frac{a}{c} \frac{d}{dt} p_b(t) = \\ = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{a}}{3c}\right) \dot{a}^2 + \left(1 - \frac{\dot{a}}{c}\right) a\ddot{a} + \frac{4\mu\dot{a}}{\rho a} + \frac{2\sigma}{\rho a} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Полученное уравнение обсуждается в работе [110]. Показывается, что уравнение имеет только первый порядок точности по числу Маха \dot{a}/c , что приводит

к его идентичности с точностью до погрешности целому семейству уравнений, включающих уравнение Херринга [92], описанное также в работе [100]. Проводится численное моделирование исходной системы методом характеристик и показывается, что уравнение Келлера даёт меньшую погрешность по сравнению с аналогами. Также показывается, что предпочтительным является использование уравнения Келлера, записанного через энтальпию, как в работе [101], где уравнение было получено в эмпирическом приближении Кирквуда-Бете [98]. Похожие результаты сравнения уравнений получены в работе [111]. В работе [112] показывается, что уравнение в энтальпийной форме также имеет только первый порядок точности. В отчёте [113] проводится сравнение результатов численного моделирования различных таких уравнений.

2.3 Линейная теория в приближениях гомобаричности, постоянства температуры жидкости и отсутствия фазовых переходов

Рассматриваются свободные и вынужденные колебания пузырька в наиболее распространённой линейной постановке.

Основные сделанные предположения:

- гармонические колебания малого сферического пузырька;
- вязкость достаточно мала, чтобы течение вокруг пузырька можно было считать слабовозмущённым;
- акустические эффекты также достаточно малы и хорошо описываются уравнением Келлера;
- жидкость и газ находятся вдали от фазовых переходов
- газ близок к идеальному;
- гомобаричность внутри пузырька, то есть независимость давления газа от пространственной переменной;
- постоянство температуры жидкости.

Учитываются все основные механизмы диссипации: вязкий, термический и акустический, также предлагается способ одновременного решения задачи для свободных и вынужденных колебаний с помощью единой системы уравнений. Показывается, что в большинстве реальных задач определяющую роль играет именно термический механизм диссипации. Также, определяются условия,

при которых становятся значимыми другие механизмы затухания. Анализируются границы применимости указанных приближений. Результаты, полученные в такой постановке, имеют аналитический вид, что делает их удобными для использования в многочисленных приложениях.

2.3.1 Постановка задачи

Рассматривается малый пузырьёк, заполненный газом, в поле давления акустической волны в жидкости. Размер пузырька a принимается много меньше длины волны в жидкости, чтобы давление в волне можно было считать однородным на масштабах пузырька. Плотность газа считается пренебрежимо малой по сравнению с плотностью жидкости, что позволяет использовать приближение гомобаричности (детальные оценки будут проведены далее). Температуропроводность жидкости гораздо выше, чем газа, что даёт возможность считать температуру жидкости постоянной и равной T_∞ . Течение жидкости вокруг пузырька предполагается слабо возмущённым вязкостью, что позволяет учесть вязкость как небольшую диссипативную добавку к давлению на границе пузырька. Принимается, что температуры газа и жидкости далеки от температуры фазовых превращений, и фазовые переходы не вносят существенного вклада в диссипацию. Акустические эффекты принимаются малыми и учитываются с помощью уравнения Келлера (2.20), представляющего собой уравнение Рэлея-Плессета с поправкой на малые эффекты сжимаемости. Подставим в уравнение (2.20) давление возбуждающей акустической волны $p_S(t)$, считая его однородным на масштабах пузырька

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{a}}{c}\right) a\ddot{a} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{a}}{3c}\right) \dot{a}^2 = \\ & = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{\dot{a}}{c}\right) (p_b(t) - p_\infty - p_S(t + a/c)) + \frac{a}{c} \frac{d}{dt} p_b(t) + \frac{4\mu\dot{a}}{\rho a} + \frac{2\sigma}{\rho a} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для газа внутри пузырька с однородным давлением внутри $p_b(t)$ запишем уравнение состояния идеального газа

$$\frac{p_b}{\rho_g T} = Const \quad (2.22)$$

где ρ_g — плотность газа в какой-то точке его объёма, а T — температура газа в той же точке. Уравнение теплопроводности в объёме пузырька $r \leq a$

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho_g c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp_b(t)}{dt} \quad (2.23)$$

где κ — коэффициент теплопроводности газа, а c_p его теплоёмкость на единицу массы. Давление можно исключить из уравнения (2.23), если разделить его обе части на $c_p \rho_g T = \gamma p_b(t)/(\gamma - 1)$. Получим уравнение:

$$\frac{\kappa}{T} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{d}{dt} \ln T - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{d}{dt} \ln p_b(t) \quad (2.24)$$

где k — коэффициент температуропроводности газа.

Далее следует записать граничные условия для давления и температуры. Первое из граничных условий связывает давления газа и жидкости на границе пузырька, в нём учтено давление Лапласа, а также тензор вязких напряжений. Оно получается из (2.7) пренебрежением последним членом, что обосновано малостью пузырька по сравнению с длиной волны и малостью акустических эффектов в целом

$$p_b = p_{\text{ext}} + 2\sigma/a + 4\mu\dot{a}/a \quad (2.25)$$

где p_{ext} — давление жидкости у границы пузырька. Для температуры можно записать два граничных условия, отвечающих за отсутствие теплового источника в центре пузырька и равенство температуры на границе пузырька и температуры жидкости T_∞

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \\ T(t, a) &= T_\infty \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3.2 Линеаризация уравнений

При достаточно малых амплитудах колебаний пузырька, затухание будет весьма точно описываться линейным приближением. В этом приближении можно единым образом учесть диссипацию для свободных и вынужденных колебаний.

Давление в акустической волне будем считать меняющимся гармонически по закону

$$p_S(t) = p_\infty S_0 e^{i\Omega t} \quad (2.27)$$

Для свободных колебаний $S_0 = 0$, а для вынужденных оно обозначает безразмерную амплитуду давления в акустической волне. Решение представляется в виде действительных частей комплексных функций

$$\begin{aligned} a &= a_0(1 + Ae^{i\Omega t}), & p_{\text{ext}} &= p_\infty(1 + Pe^{i\Omega t}), \\ T &= T_\infty(1 + \theta(r)e^{i\Omega t}), & \rho_g &= \rho_{g0}(1 + \rho'_g(r)e^{i\Omega t}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Здесь $A \ll 1$ и $P \ll 1$ это постоянные, отвечающие за безразмерную амплитуду радиальных колебаний пузырька и давления в жидкости на границе пузырька, а $\theta(r)$ и $\rho'_g(r)$ функции радиуса, отвечающие за колебания температуры и плотности внутри пузырька.

Подставляя формулы (2.28) в ур-ия (2.24 и 2.26) и отбрасывая все члены, кроме линейных, получаем линеаризованное уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} k \left(\theta''(r) + \frac{2}{r} \theta'(r) \right) - i\Omega \theta(r) &= -i\Omega \frac{\gamma - 1}{\gamma} \tilde{P}, \\ \tilde{P} &= P - \frac{2\sigma}{a_0 p_\infty} A + 4i \frac{\mu \Omega}{p_\infty} A \end{aligned} \quad (2.29)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \theta'(0) &= 0 \\ \theta(a_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Та же процедура линеаризации применяется к уравнению (2.21)

$$\frac{\rho a_0^2 \Omega^2}{p_\infty} A + \left(1 + i \frac{a_0 \Omega}{c} \right) (P - S_0) = 0 \quad (2.31)$$

Общее решение (2.29) записывается в виде

$$\theta = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \tilde{P} \left(1 + \frac{C_1}{r} \sinh(r \sqrt{i\Omega/k}) + \frac{C_2}{r} \cosh(r \sqrt{i\Omega/k}) \right)$$

Подставляем граничные условия (2.30), вычисляем значения констант $C_1 = -a_0 / \sinh(a_0 \sqrt{i\Omega/k})$, $C_2 = 0$. Таким образом, общее решение для безразмерной температуры будет

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \tilde{P} \left(1 - \frac{\sinh(xZ)}{x \sinh(Z)} \right), \\ Z &= a_0 \sqrt{\frac{i\Omega}{k}}, \quad x = \frac{r}{a_0} \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.3.3 Усреднение по объёму

Следующим шагом будет усреднение уравнений по объёму пузырька. Осреднённые величины обозначаем чертой над названием. Среднее давление газа внутри пузырька

$$\bar{p}_b = p_\infty(1 + Pe^{i\Omega t}) + 2\frac{\sigma}{a} + 4\mu\frac{\dot{a}}{a} = p_\infty(1 + \tilde{P}e^{i\Omega t}) + 2\frac{\sigma}{a_0}$$

Запишем закон сохранения массы газа в отсутствие фазовых переходов:

$$\bar{\rho}_g a^3 = const \Rightarrow \bar{\rho}'_g = 1 - 3A$$

Усредним безразмерную температуру по объёму пузырька:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= 3 \int_0^1 \theta(x) x^2 dx = \frac{\gamma-1}{\gamma} \tilde{P}(1 - 3G(Z)), \\ G(Z) &= \frac{1}{\sinh Z} \int_0^1 \sinh(xZ) x dx = \frac{Z \coth Z - 1}{Z^2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Из уравнения состояния (2.22) получаем

$$\bar{\theta} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \tilde{P}(1 - 3G(Z)) = \frac{\tilde{P}}{1 + \frac{2\sigma}{a_0 p_\infty}} + 3A$$

Для удобства введём безразмерные параметры, отвечающие за величину соответствующих эффектов:

$M = a_0 \Omega / c$ — число Маха, отвечает за акустическое излучение;

$Vis = 4\mu\Omega / p_\infty$ — отношение вязкой добавки к давлению к внешнему давлению, отвечает за вязкость;

$St = 2\sigma / (a_0 p_\infty)$ — отношение давления Лапласа к внешнему давлению, отвечает за поверхностное натяжение;

$Pe = a_0^2 \Omega / k$ — число Пекле, примерно равно квадрату отношения размера пузырька к термической глубине проникновения за период, отвечает за тепловые эффекты;

$Dy = \rho a_0^2 \Omega^2 / p_\infty$ — отношение кинетической добавки к давлению к внешнему давлению, отвечает за инерцию жидкости.

Для пузырьков обычных размеров в воде при не слишком больших частотах числа M , Vis , St много меньше 1.

Далее, используя линеаризованное уравнение Келлера (2.31) и подставляя \tilde{P} из (2.29), получаем финальную линейную систему уравнений относительно P и A .

$$\left. \begin{aligned} P - S_0 + \frac{Dy}{1 + iM} A &= 0 \\ (P + (iVis - St)A) \cdot \left[(1 + St)^{-1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (1 - 3G(Z)) \right] + 3A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Дальнейшая процедура зависит от выбранного случая. Для изучения свободных колебаний полагаем амплитуду акустической волны $S_0 = 0$, из условия вырожденности системы (2.34) находим комплексную частоту Ω . В случае вынужденных колебаний действительная частота Ω задана, и результирующая амплитуда колебаний пузырька A по отношению к амплитуде возбуждающей волны S_0 находится как решение системы системы (2.34).

2.3.4 Случай свободных колебаний

Комплексная частота колебаний Ω выражается через условие вырожденности системы (2.34)

$$\left(\frac{Dy}{1 + iM} + St - iVis \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + St} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (3G(Z) - 1) \right) = 3 \quad (2.35)$$

Полученное нелинейное комплексное уравнение относительно Ω в общем случае решается только численно. Собственная частота колебаний и логарифмический декремент затухания выражаются через

$$\Omega_X = \text{Re}\Omega, \quad \Lambda = 2\pi \text{Im}\Omega / \text{Re}\Omega$$

2.3.5 Случай вынужденных колебаний

Линейный отклик на возмущающую силу S_0 получается напрямую из решения линейной системы (2.34)

$$R_\Omega = \frac{A(\Omega)}{S_0} = \left(\frac{Dy}{1 + iM} + St - iVis - \frac{3}{\frac{1}{1 + St} - \frac{\gamma - 1}{\gamma}(1 - 3G(\sqrt{iPe}))} \right)^{-1} \quad (2.36)$$

2.4 Анализ результатов

2.4.1 Случай свободных колебаний

На рисунке 2.1 сравниваются различные механизмы затухания для воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении. Тепловое затухание играет определяющую роль для всех пузырьков размерами от 5 микрон до 5 мм.

Учитывая тот факт, что в большинстве приложений основную роль играет термическая диссипация, стоит отдельно рассмотреть случай пренебрежимой малости эффектов поверхностного натяжения, акустической и вязкой диссипации. Тогда, учитывая $Z = a_0 \sqrt{i\Omega/k} = Z_X + iZ_Y$ и вводя миннаэртговскую частоту свободных колебаний (без затухания и без учёта поверхностного натяжения) ω_0 , получим

$$1 + 3(\gamma - 1)G(Z) = \omega_0^2/\Omega^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3\gamma p_\infty}{\rho a_0^2}}$$

Можно ввести число Пекле для свободных незатухающих колебаний

$$Pe_0 = a_0^2 \omega_0 / k$$

Собственная частота колебаний и логарифмический декремент затухания

$$\Omega_X = \frac{k}{a_0^2} 2Z_X Z_Y, \quad \Lambda = \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z_Y}{Z_X} - \frac{Z_X}{Z_Y} \right)$$

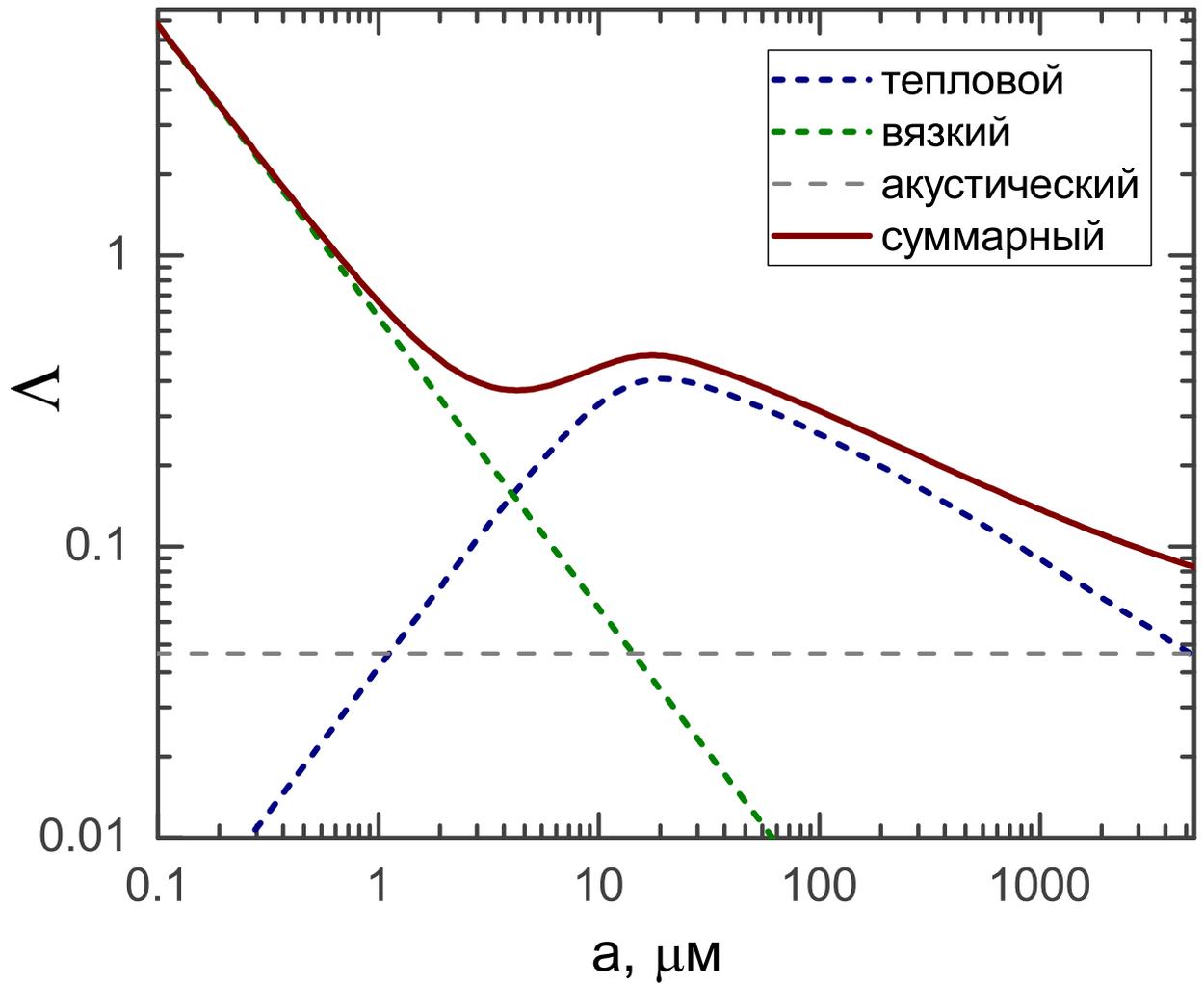


Рисунок 2.1 — Сравнение механизмов затухания. Логарифмический декремент затухания вызванный тепловой, вязкой и акустической диссипацией, а также суммарный декремент

получаются в неявной форме из уравнения

$$Pe_0^2 + Z^4[1 + 3(\gamma - 1)G(Z)] = 0 \quad (2.37)$$

Можно получить удобные асимптотические разложения [59, с. 289] для учёта теплового затухания. Подставляя в (2.37) асимптотическое разложение

$$G(Z) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{45}Z^2 + \frac{2}{945}Z^4 + O(Z^6), & |Z| \ll 1 \\ \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z^2} + O(e^{-|Zx|}), & |Zx| \gg 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

получаем асимптотическое разложение для $Z = Z_X + iZ_Y$

$$Z = \begin{cases} \frac{\sqrt{2Pe_0}}{2\gamma^{1/4}} \left[1 + i - \frac{1-i}{60\gamma^{3/2}}(\gamma-1)Pe_0 + O(Pe_0^2) \right], & Pe_0 \ll 1 \\ \frac{\sqrt{2Pe_0}}{2}(1+i) - \frac{3}{4}(\gamma-1) + \frac{3}{32}(9\gamma-1)(\gamma-1)\frac{1-i}{\sqrt{2Pe_0}}, & Pe_0 \gg 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

и разложения для собственной частоты колебаний и коэффициента затухания

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Omega_X}{\omega_0} &= \begin{cases} \gamma^{-1/2}, & Pe_0 \leq 7 \\ 1 - \frac{3}{4}(\gamma-1)\sqrt{\frac{2}{Pe_0}}, & Pe_0 > 7 \end{cases} \\ \Lambda &= \begin{cases} \frac{\pi(\gamma-1)Pe_0}{15\gamma^{3/2}}, & Pe_0 \leq 5 \\ 3\pi \left[\frac{\gamma-1}{\sqrt{2Pe_0}} - \frac{(3\gamma+1)(\gamma-1)}{4Pe_0} \right], & Pe_0 > 5 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

На рисунке 2.2 представлено сравнение асимптотик для логарифмического декремента затухания, заданных формулами (2.40) с точным значением (тоже с учётом только тепловой диссипации). Видим отличное совпадение для всех значений вдали от пограничного значения числа Пекле $Pe_0 = 5$. Такое значение было выбрано с целью минимизации максимального расхождения асимптотик и точного результата. На рисунке 2.3 представлено такое же сравнение асимптотик, но уже для частоты свободных колебаний пузырька. Видим тоже неплохое совпадение. Заметим, что при малых числах Пекле частота стремится к адиабатической, а при больших — к изотермической, чего и следовало ожидать.

2.4.2 Случай вынужденных колебаний

На рисунке 2.4 нижними кривыми представлены кривые отклика для воздушных пузырьков разного радиуса в воде при атмосферном давлении, верхняя кривая — огибающая всех резонансных пиков R_Ω , а именно: отношение безразмерной амплитуды радиальных колебаний пузырька к безразмерной амплитуде давления в возбуждающей волне при резонансной частоте возбуждающей волны. На верхней оси абсцисс отложен размер пузырька, соответствующий частоте

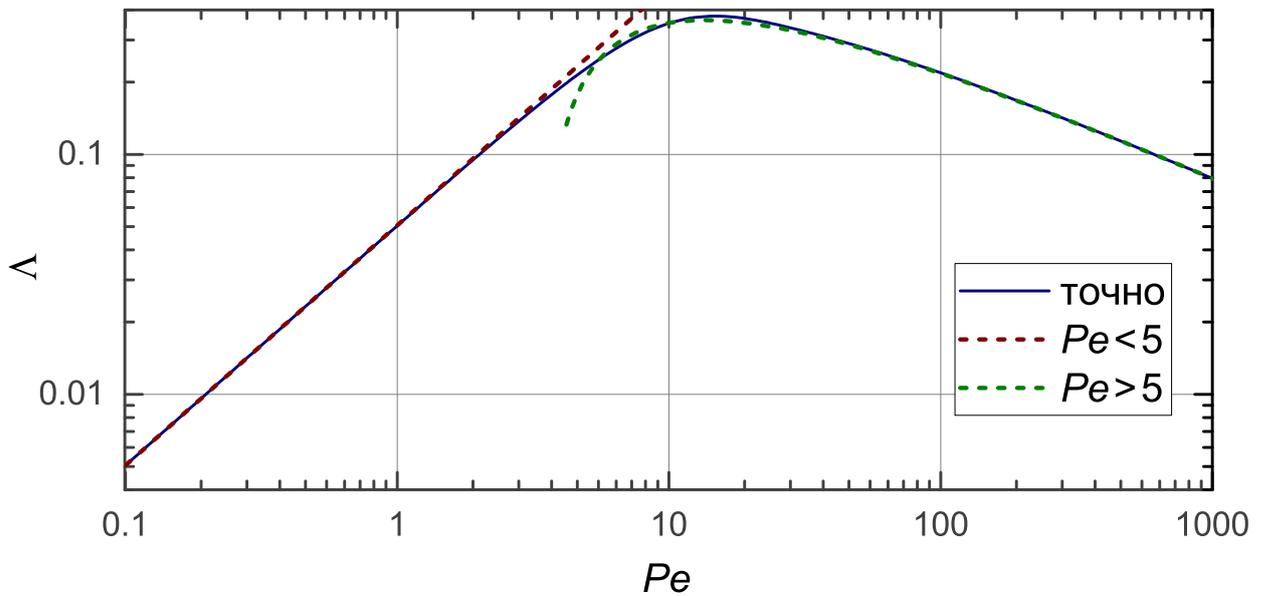


Рисунок 2.2 — Асимптотики для логарифмического декремента термической диссипации. Пунктиром изображены асимптотики, сплошной линией — точное значение

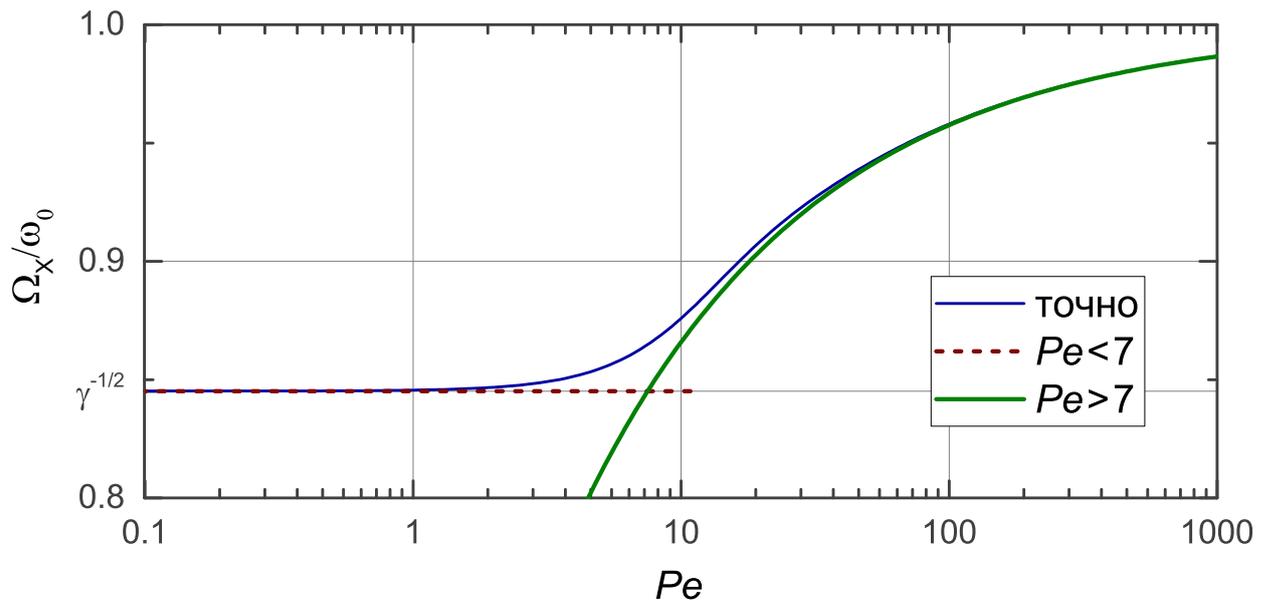


Рисунок 2.3 — Асимптотики для частоты свободных колебаний пузырька с учётом термической диссипации. Красным пунктиром и зелёной сплошной линией изображены асимптотики, сплошной синей линией — точное значение свободных радиальных колебаний, отложенной на нижней оси абсцисс. Можно убедиться, что даже при резонансе отклик не слишком велик и падает с уменьшением радиуса пузырька.

Заметим, что хотя M , Vis и St являются малыми параметрами, они будут оказывать существенное влияние на отклик и добротность пузырька, рассмат-

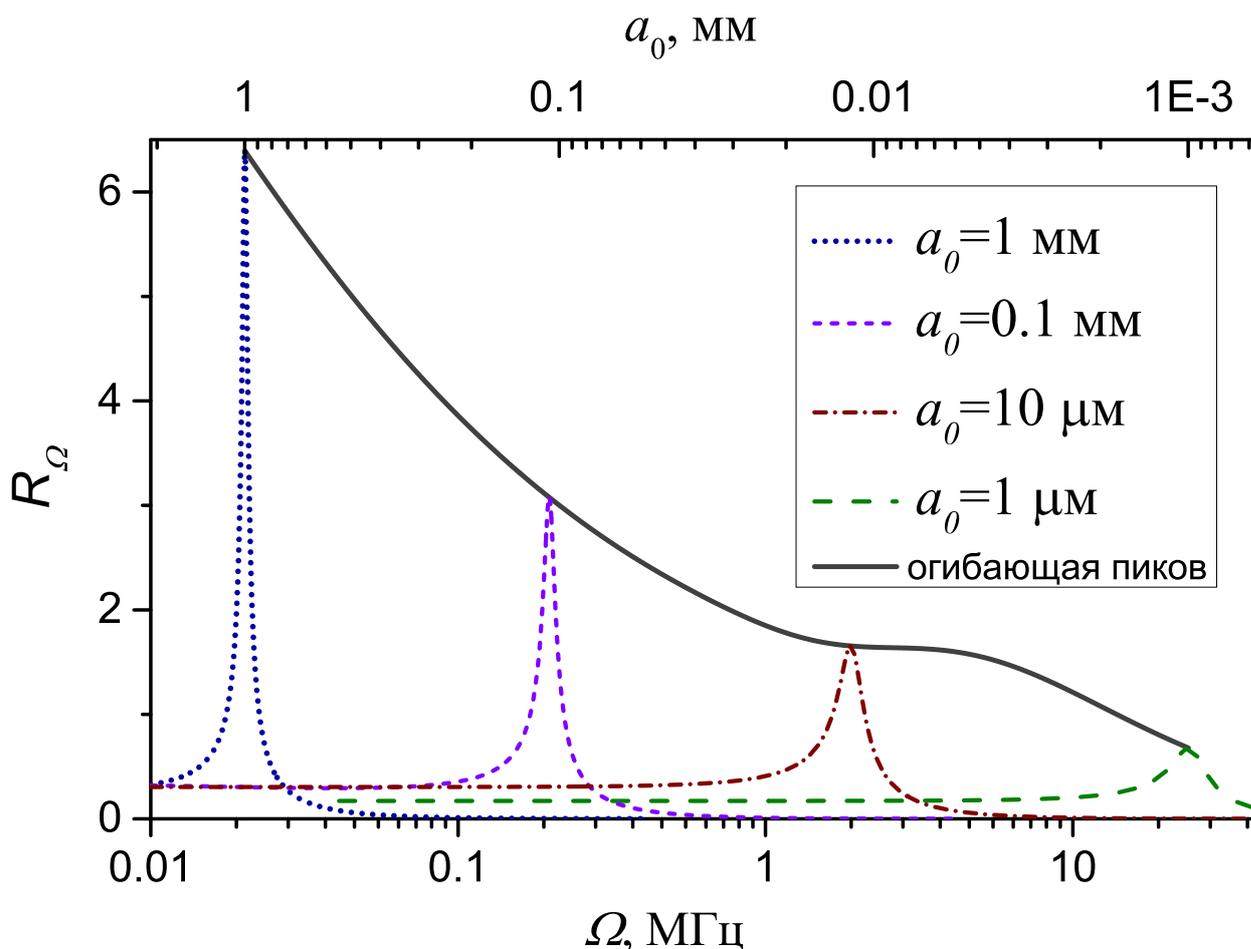


Рисунок 2.4 — Резонансные кривые отклика для пузырьков разных радиусов (различные прерывистые линии) и огибающая резонансных пиков (сплошная жирная линия)

риваемого как колебательная система, вблизи резонанса. Тем не менее эффект термической диссипации, связанный с числом Пекле Pe будет доминировать над остальными механизмами затухания практически во всех реальных случаях. Для воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении условием доминирования термической диссипации вблизи резонанса будет радиус больше 5 микрон. Также видим, что для частот, больших чем резонансная частота, отклик быстро падает с увеличением частоты вследствие квадратичной зависимости от неё числа Dy (влияния инерции). Учёт распространения тепла внутри жидкости даёт изменение отклика менее чем на 1% для рассматриваемых пузырьков во всех точках резонансных кривых, поэтому этим фактором действительно можно было пренебречь.

2.5 Выводы

Изучение механизмов затухания колебаний газового пузырька в жидкости интересно, в первую очередь, благодаря своим многочисленным применениям в других задачах. Поэтому описание затухания в максимально простой и единой форме для случаев свободных и вынужденных колебаний с учётом всех важнейших механизмов затухания представляется важным. В данной работе единым образом получена прямая формула для вычисления отклика при вынужденных колебаниях и в неявном виде формула для вычисления параметров свободных колебаний. Методика объёмного осреднения дала возможность упростить решение и получить новые результаты для анализа. Сделанные предположения описывают с неплохой точностью большинство реальных задач о колебаниях пузырьков. Недостатками данной работы являются отсутствие учёта фазовых превращений, которые могут быть существенны вблизи температуры фазовых переходов, а также линейность теории, делающая её непригодной для описания значительно деформированных пузырьков.

У полученных результатов есть многочисленные применения в самых различных областях науки и техники, как то описание затухания волн в пузырьковой среде, подводные стелс-технологии, методика изолированного подводного подрыва конструкций и др. В следующей главе будет приведён пример применения полученных результатов для оценки условий резонансного дробления газового пузырька в акустической волне в жидкости.

Глава 3. Вынужденные колебания пузырька в жидкости при резонансе частот 2:2:1

В этой главе рассматриваются вынужденные колебания пузырька в жидкости при резонансе частот радиальной и произвольной деформационной мод 2:1. Колебания считаются малыми, однако, как и в первой главе, учитываются нелинейные члены уравнений Гамильтона, приводящие к перекачке энергии между модами. Частота возбуждающей волны считается равной собственной частоте колебаний пузырька, поэтому резонанс записывается в виде 2:2:1. Также учитывается затухание, процедура его учёта изложена в предыдущей главе. Уравнения исследуются с помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова. Результаты используются для вывода оценочных условий резонансного дробления пузырька в случаях мгновенного либо плавного включения акустической волны.

Глава начинается с введения, в котором проведён обзор литературы, посвящённой вынужденным колебаниям пузырька при возбуждении деформационных мод, а также проблеме дробления и возможным применениям эффекта дробления пузырька в акустической волне. Далее идёт раздел, посвящённый описанию малых вынужденных колебаний пузырька при резонансе частот 2:2:1. В следующем разделе проводится анализ полученных результатов и выводятся оценочные условия дробления. Глава заканчивается выводами.

3.1 Введение

Задача о дроблении пузырька в акустической волне имеет приложения в медицине, океанологии [19], а также смежна со многими другими проблемами кавитации и сонолюминесценции. Имеются экспериментальные подтверждения того факта, что с помощью дробления пузырьков ультразвуком вблизи гематоэнцефалического барьера, можно обеспечить доставку препаратов в мозговые ткани [18; 35], что является одной из основных проблем лечения болезней мозга. Механизм дробления пузырька до сих пор не получил полного описания, несмотря на большое количество научных работ по этой теме [36]. Также наблюдается ускорение процесса диффузии при возбуждении несферических колебаний [37],

что даёт потенциальные приложения задачи в технологических процессах массо-обмена газ-жидкость.

Существует много экспериментальных подтверждений излучения пузырьками в акустической волне на субгармонических частотах, делящих нацело частоту волны [38; 39]. Наличие таких субгармоник может вызываться несферическими колебаниями пузырька, находящимися в целочисленном резонансе частот с радиальной модой [40]. Несферические вынужденные колебания пузырька исследовались во многих работах [41], начиная с 1958 г. [42]. В работах [43; 44] показано, что учёт затухания деформационной моды приводит к появлению пороговой величины амплитуды возбуждающей волны, при которой возникают деформационные колебания пузырька, в работе [43] предложено использовать это явление для измерения затухания колебаний пузырька. В работе [114; 115] возбуждение нелинейных несферических колебаний исследовано численно с учётом вязкости и сжимаемости жидкости.

Также существует множество экспериментальных подтверждений возможности дробления пузырька из-за деформационных колебаний его формы [45]. Также были сделаны попытки объяснения явления сонолюминесценции неустойчивостью радиальных колебаний при резонансе [46; 47]. Обычно деформационные колебания пузырька возникают вследствие нелинейного взаимодействия между его колебательными модами, и во многих теоретических исследованиях было показано, что энергия гораздо сильнее перекачивается из радиальной моды в деформационную при соотношении частот колебаний 2:1 [9]. Возможность дробления пузырька вследствие такой усиленной перекачки энергии была предсказана в работах [9; 48; 49], где был изучен эффект перекачки энергии между модами для свободных колебаний пузырька. В последних двух работах были получены период перекачки энергии и отношение амплитуд мод в зависимости от индексов моды n, m , быстро растущее с увеличением номера моды n . Также в работе [49] было показано, что наибольшее увеличение амплитуды колебаний происходит при перекачке энергии в осесимметричную деформационную моду, поэтому в данной главе рассмотрен резонансная перекачка энергии между ней и радиальной модой.

Основным недостатком процитированных выше работ было рассмотрение только свободных колебаний пузырька без диссипации, которая, как показано в предыдущей главе, довольно велика. Таким образом, для оценки возможности дробления по резонансному механизму требуется построить теорию с учётом диссипации и вынуждающей силы, что было сделано, например в [36; 50], где

были получены параметрические диаграммы стабильности поверхности пузырька. Вообще, пороговый характер возникновения неустойчивости сферических колебаний — хорошо изученная теоретически и экспериментально тема. Эксперименты с определением таких порогов для пузырьков разного размера были описаны в работах [47; 51–55]. Для такой параметрической неустойчивости были изучены возникающие бифуркации и хаос [56], изучалось поведение системы вблизи порога возникновения неустойчивости [57]. В работах [12; 13; 63–65], обобщению результатов которых посвящена эта глава, проводится исследование возможности резонансного дробления в предположении, что неустойчивость уже развита и энергия активно перетекает из радиальных колебаний в деформационные. Исследования проводятся в предположениях точного резонанса частот 2:1 радиальной и деформационной моды колебаний, а также резонансной частоты возбуждающей волны. Предлагается новый механизм дробления, основанный на резонансной перекачке энергии между модами и вычисляется оценочное условие дробления в двух случаях — быстрого и медленного старта акустической волны.

3.2 Исследование малых вынужденных колебаний пузырька в жидкости при резонансе частот 2:2:1

Рассмотрены вынужденные колебания газового пузырька в поле акустической волны, резонансной по отношению к радиальной моде. Предполагается, что радиальная мода находится в резонансе 2:1 с n -ой осесимметричной деформационной модой. Все важные механизмы диссипации энергии (тепловой, акустический и вязкий) радиальных колебаний учтены в линейном гомобаричном приближении, описанном во второй главе. Считается, что для деформационной моды диссипацией можно пренебречь, так как термическая и акустическая диссипация для неё несущественны, а вязкий эффект можно считать малым для не слишком больших пузырьков (до 1 мм). Задача о перекачке энергии решается с помощью эффективной техники осреднения Крылова-Боголюбова [62]. Из полученных результатов выводится эмпирический критерий дробления пузырька для случая быстрого и медленного старта возбуждающей акустической волны, а также вычисляется время старта волны, который можно считать быстрым.

3.2.1 Уравнения вынужденных колебаний пузырька с учётом диссипации энергии

Используем функцию Лагранжа $L = E_K - \Pi$ пузырька, найденную в первой главе (1.19). Запишем уравнения Лагранжа для пузырька с добавленным диссипативным членом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial E_K}{\partial z} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} &= - \frac{\partial R}{\partial \dot{z}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial E_K}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где R — диссипативная функция Рэлея. В линейном приближении она имеет вид $R = -\tilde{\beta} E_K$, где $\tilde{\beta}$ — коэффициент затухания. Оценка коэффициента затухания для случая вынужденных колебаний с учетом различных физических эффектов: вязкости жидкости, тепловой диссипации и излучения приведена далее.

Исследуем уравнения (3.1) вынужденных колебаний пузырька, учитывая диссипацию энергии и безразмерную амплитуду Δp переменной части внешнего давления

$$p_\infty = p_0 (1 + \Delta p \cos 2t)$$

меняющегося с безразмерной резонансной частотой, равной двум. Функция Гамильтона в безразмерных переменных имеет вид (1.20), где в функцию F_1 включена добавка, соответствующая потенциальной энергии внешнего переменного поля давления, либо к правой части уравнений Гамильтона добавлено слагаемое $z \alpha \cos \Omega t$.

Если также добавить нерезонансные члены (для осесимметричного случая их несложно получить), уравнения Гамильтона принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{x} - u &= \frac{\partial F_1}{\partial u} = -K_n x u - (n + 3) x w - 3 z u \\
\dot{z} - w &= \frac{\partial F_1}{\partial w} = -(n + 3) x u - 3 z w \\
\dot{u} + x &= -\frac{\partial F_1}{\partial x} = -8(n + 1) x z + \frac{1}{2} K_n u^2 + (n + 3) u w \\
\dot{w} + 4z &= -\frac{\partial F_1}{\partial z} = -4(n + 1) x^2 + \\
&+ 3 \left(4(\gamma - 1) + \frac{4/3 + 2(\gamma - 1)}{\kappa_n} \right) z^2 + \frac{3}{2} (u^2 + w^2) - \alpha \cos 2t - \beta w \\
K_n &= \frac{1}{2} \left(3I_1(n) - \frac{I_2(n)}{n + 1} \right) (n + 1)^{1/2} (2n + 1)^{3/2}, \\
I_1(n) &= \int_{-1}^1 P_n^3(\eta) d\eta, \quad I_2(n) = \int_{-1}^1 P_n'^2(\eta) P_n(\eta) (1 - \eta^2) d\eta
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где n — номер многочлена Лежандра, характеризующего осесимметричную деформационную моду колебаний пузырька, x, z — обобщенные координаты, u, w — обобщенные импульсы деформационной и радиальной мод колебаний пузырька, $\beta = \tilde{\beta}/\omega_\xi$ — безразмерный коэффициент затухания. Коэффициент α возбуждающей силы связывается с физическими параметрами пузырька и безразмерной амплитудой переменной части внешнего давления с помощью уравнений Лагранжа

$$\frac{\alpha}{\Delta p} = \frac{4}{3\gamma} - \frac{2 - 2/(3\gamma)}{\kappa_n} \approx \frac{4}{3\gamma}$$

3.2.2 Оценка введенных коэффициентов диссипации и возбуждающей силы из физических соображений

Далее оценим величину безразмерного коэффициента диссипации β из равенства высот резонансных пиков рассматриваемой системы уравнений (3.2) и решения уравнений радиально колеблющегося пузырька. Для этого нам понадобятся результаты с рисунка 2.4, а именно верхняя кривая — огибающая всех резонансных пиков R_Ω — отношение безразмерной амплитуды радиальных колебаний пузырька к безразмерной амплитуде давления в возбуждающей волне

при резонансной частоте возбуждающей волны $\Omega = \omega_a$. На верхней оси абсцисс отложен размер пузырька, соответствующий частоте свободных радиальных колебаний, отложенной на нижней оси абсцисс. Сама процедура учета разных механизмов диссипации пузырька описана в главе 2.

В предположении резонанса частоты возбуждающей волны и собственной частоты радиальной моды, а также в линейном приближении, уравнения (3.2) для радиальных колебаний имеют вид

$$\dot{z} - w = 0, \quad \dot{w} + 4z = -\alpha \cos 2t - \beta w$$

Из решения этих уравнений

$$z = \frac{\alpha}{2\beta} \sin 2t, \quad \frac{z_{\max}}{\Delta p_{\max}} = \frac{\alpha}{2\beta \Delta p} = R_{\Omega}$$

следует связь между безразмерным коэффициентом диссипации и резонансным откликом пузырька

$$\beta = \frac{1}{2R_{\Omega}} \left(\frac{4}{3\gamma} - \frac{2 - 2/(3\gamma)}{\kappa_n} \right) \approx \frac{2}{3\gamma R_{\Omega}}$$

3.2.3 Приведение системы к стандартному для осреднения виду с помощью замены переменных

Для использования первой теоремы Боголюбова об осреднении считаем возбуждающую силу и диссипацию малыми: $\alpha = \varepsilon^2$, $\beta = \varepsilon \beta_1$. Далее, ищем решение системы, используя которое для замены переменных, можно будет привести систему к виду, пригодному для применения стандартного метода Крылова–Боголюбова. Ищем решение в виде

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \Lambda \sin t + \varepsilon^2 \left(x_0 \frac{\cos 2t + 1}{2} + \tilde{x} \right), \quad z = \varepsilon^2 (\tilde{z} + z_0) \\ u &= \varepsilon \Lambda \cos t + \varepsilon^2 \tilde{u}, \quad w = \varepsilon^2 (\tilde{w} + (n+3) \frac{\Lambda^2}{2} \sin 2t) \\ \Lambda &= \pm \frac{2}{\sqrt{4n-1}}, \quad x_0 = \frac{K_n \Lambda^2}{2}, \quad z_0 = -\frac{8n+5}{16} \Lambda^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подстановка замен (3.3) в уравнения (3.2) позволяет привести систему к стандартному для осреднения виду

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}} - \tilde{u} &= \varepsilon A_1, & \dot{\tilde{z}} - \tilde{w} &= \varepsilon A_2, & \dot{\tilde{u}} + \tilde{x} &= \varepsilon A_3, & \dot{\tilde{w}} + 4\tilde{z} &= \varepsilon A_4 \\
A_1 &= \frac{\Lambda^3}{16} [(4(n+3)^2 - 2K_n^2) \cos 3t - (4n^2 + 21 + 6K_n^2) \sin t] - \\
&\quad - \Lambda [(K_n \tilde{u} + 3(n+3)\tilde{w}) \sin t + (3\tilde{z} + K_n \tilde{x}) \cos t] \\
A_2 &= -\frac{\Lambda^3}{2} (n+3) K_n \cos^3 t - (n+3) \Lambda [\tilde{u} \sin t + \tilde{x} \cos t] \\
A_3 &= \frac{\Lambda^3}{4} [(n+3)^2 \sin 3t + (17n^2 + 32n + 19) \sin t] + \\
&\quad + \Lambda [(K_n \tilde{u} + (n+3)\tilde{w}) \cos t - 8(n+1)\tilde{z} \sin t] \\
A_4 &= -4\Lambda^3 K_n (n+1) \sin t \cos^2 t + \Lambda [3\tilde{u} \cos t - 8(n+1)\tilde{x} \sin t] - \\
&\quad - \beta_1 \left[\tilde{w} + \frac{\Lambda^2}{2} (n+3) \sin 2t \right]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Полученная система отличается от системы уравнений вынужденных колебаний пружины [60] правыми частями, также имеющими первый порядок малости по параметру ε . Для построения асимптотического решения используется принципиально тот же метод.

3.2.4 Решение системы

Решение линейной системы при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= X \cos t + U \sin t, & \tilde{z} &= Z \cos 2t + \frac{W}{2} \sin 2t \\
\tilde{u} &= U \cos t - X \sin t, & \tilde{w} &= W \cos 2t - 2Z \sin 2t
\end{aligned} \tag{3.5}$$

При $\varepsilon \neq 0$ коэффициенты X, Z, U, W будут зависеть от времени. Учитывая это и подставляя выражения (3.5) в систему (3.4), получаем систему

$$\begin{aligned}
C(t) \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{U} \end{pmatrix} &= \varepsilon \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}, & C(2t) \begin{pmatrix} \dot{Z} \\ \dot{W}/2 \end{pmatrix} &= \varepsilon \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4/2 \end{pmatrix}, \\
C(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Разрешая систему относительно $\dot{X}, \dot{U}, \dot{Z}, \dot{W}$ и пользуясь удобным свойством матрицы поворота $C^{-1}(t) = C(-t)$, найдем

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \varepsilon(A_1 \cos t - A_3 \sin t), \quad \dot{U} = \varepsilon(A_1 \sin t + A_3 \cos t) \\ \dot{Z} &= \varepsilon(A_2 \cos 2t - (A_4/2) \sin 2t), \quad \dot{W} = \varepsilon(2A_2 \sin 2t + A_4 \cos 2t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя в выражения (3.4) для коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4 величины $\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{w}$ в виде (3.5) и, в соответствии с первой теоремой Боголюбова, осредняя полученные правые части равенств (3.7) по времени, приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d(\varepsilon t)} &= -\frac{Z}{\Lambda} - \frac{\Lambda^3}{32} [8n(9n+16) + 97 + 6K_n^2], \quad \frac{dU}{d(\varepsilon t)} = -\frac{W}{2\Lambda} \\ \frac{dZ}{d(\varepsilon t)} &= \frac{X}{2\Lambda} - \frac{\beta_1 Z}{2} + \frac{(n+3)\Lambda^2 \beta_1}{8}, \quad \frac{dW}{d(\varepsilon t)} = \frac{U}{\Lambda} - \frac{\beta_1 W}{2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отметим, что уравнения расщепляются на независимые пары относительно X и Z и относительно U и W . Легко проверить, что собственные значения этой системы имеют отрицательную действительную часть

$$\lambda = -\frac{\beta_1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{4}\right)^2 - \frac{4n-1}{8}} \quad (3.9)$$

и решение экспоненциально быстро ($\sim \exp(-\varepsilon\beta_1 t/4)$ в случае не слишком большого затухания) приближается к стационарной точке

$$\begin{aligned} X &= X_0 = -\frac{\Lambda^5 \beta_1}{32} (10n(8n+15) + 91 + 6K_n^2), \quad U = 0 \\ Z &= Z_0 = -\frac{\Lambda^4}{32} (8n(9n+16) + 97 + 6K_n^2), \quad W = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Также следует отметить, что по второй теореме Боголюбова [62] решение будет устойчивым в стационарной точке. Асимптотическое решение имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\alpha} \Lambda \sin t + \alpha \left(x_0 \frac{\cos 2t + 1}{2} + (X(\sqrt{\alpha}t) \cos t + U(\sqrt{\alpha}t) \sin t) \right) \\ z(t) &= \alpha (z_0 + Z(\sqrt{\alpha}t) \cos 2t + W(\sqrt{\alpha}t) \sin 2t/2) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Общее решение — сумма быстро осциллирующего члена с постоянной амплитудой, постоянного члена и быстро осциллирующих членов с медленно затухающими амплитудами, зависящими от "медленного времени" $\tilde{t} = \sqrt{\alpha}t$. Последние

можно найти из решения (3.8) при учете начальных условий. Для случая не слишком большого затухания $\beta_1^2 < 2(4n - 1)$ получим

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= \frac{\sqrt{2(4n - 1) - \beta_1^2}}{4}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{\beta_1}{4\tilde{\omega}} \\ X &= X_0 + \sqrt{2} e^{-\beta_1 \tilde{t}/4} (C_2 \cos(\tilde{\omega} \tilde{t} - \psi) - C_1 \sin(\tilde{\omega} \tilde{t} - \psi)) \\ Z &= Z_0 + e^{-\beta_1 \tilde{t}/4} (C_1 \cos \tilde{\omega} \tilde{t} + C_2 \sin \tilde{\omega} \tilde{t}) \\ U &= e^{-\beta_1 \tilde{t}/4} (C_3 \cos \tilde{\omega} \tilde{t} + C_4 \sin \tilde{\omega} \tilde{t}) \\ W &= \sqrt{2} e^{-\beta_1 \tilde{t}/4} (C_3 \sin(\tilde{\omega} \tilde{t} + \psi) - C_4 \cos(\tilde{\omega} \tilde{t} + \psi)) \\ x(0) &= \alpha(X_0 + x_0 + \sqrt{2}(C_2 \cos \psi + C_1 \sin \psi)), \quad z(0) = \alpha(Z_0 + z_0 + C_1) \\ u(0) &= \pm \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4n - 1}} + \alpha C_3, \quad w(0) = \alpha\sqrt{2}(C_3 \sin \psi - C_4 \cos \psi)\end{aligned}\tag{3.12}$$

Решение при начальных условиях $x(0) = u(0) = 0$ неустойчиво по малым возмущениям x, u и при $t \rightarrow \infty$ выходит на периодическое.

Таким образом, получено асимптотическое периодическое решение, устойчивое по второй теореме Боголюбова (собственные числа (3.9) системы имеют отрицательную действительную часть)

$$\begin{aligned}x(t) &= \pm \sqrt{\frac{\alpha}{4n - 1}} \left(2 \sin t - \frac{10n(8n + 15) + 91 + 6K_n^2 \beta \cos t}{(4n - 1)^2} \right) + \\ &\quad + \alpha \left(\frac{2K_n(\cos 2t + 1)}{4n - 1} + \tilde{x}(t) \right) \\ z(t) &= \alpha \left(-\frac{8n + 5}{4(4n - 1)} - \frac{8n(9n + 16) + 97 + 6K_n^2 \cos 2t}{(4n - 1)^2} + \tilde{z}(t) \right)\end{aligned}\tag{3.13}$$

Здесь $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ — быстро осциллирующие функции с медленно затухающей амплитудой, определяемые из равенств (3.11) и (3.12).

3.3 Анализ полученных результатов. Оценочное условие дробления

3.3.1 Сравнение с численными решениями

На рисунке 3.1 приведено сравнение точного численного моделирования исходной системы (3.2) для интервала времени $t \in (0, 2000)$ для значений пара-

метров $\alpha = 0.0004$, $\beta_1 = 1$, $n = 4$ и при начальных условиях

$$x(0) = 0.008, \quad u(0) = 0, \quad z(0) = 0.003, \quad w(0) = 0$$

Графики разорваны на две части $t \in (0, 500)$ и $t \in (1900, 2000)$, отвечающие началу процесса установления колебаний и установившимся колебаниям, соответственно. Из графиков видно, что полученное асимптотическое решение качественно описывает поведение системы при установлении колебаний и с большой точностью количественно описывает установившиеся колебания. Численно проверено, что амплитуда колебаний практически не меняется при небольшой расстройке частоты (порядка $\sqrt{\alpha}$) и изменении коэффициента затухания в широких пределах, а также, что качественное соответствие процессов установления колебаний присутствует и для других значений параметров, однако может ухудшиться при уменьшении амплитуды деформационных колебаний. Установившиеся амплитуды колебаний $x(t)$ и $z(t)$ асимптотического решения отличаются примерно на 0.5% и 3% от таковых для численного решения, что вполне объясняется неучтёнными членами следующего порядка малости по ε .

Это же решение сравнивается с огибающими асимптотик на рисунке 3.2. Для лучшей визуализации показана только положительная часть графика и только до момента времени $t = 1200$.

Различие численного и асимптотического решений на этапе установления колебаний объясняется малой начальной амплитудой деформационных колебаний $\sqrt{x_0^2 + u_0^2}$. В самом деле, из начальной системы уравнений (3.2) следует, что $x_0 = u_0 = 0$ является неустойчивым решением системы. Более того, если учесть диссипацию деформационной моды, то будет существовать пороговая амплитуда возбуждающей волны, ниже которой деформационная мода вообще не будет возбуждаться, и нулевое решение приобретёт устойчивость (это показано, например, в [43]). Однако, в нашем приближении отсутствия диссипации деформационной моды неустойчивость всегда развивается, и асимптотическое решение довольно неплохо описывает максимальную амплитуду деформационной моды в процессе установления колебаний и с высокой точностью описывает установившиеся колебания даже для малой начальной амплитуды деформационной моды, как показано на рисунке 3.3. Моделирование было проведено для тех же значений $n = 4$, $\alpha = 0.0004$, $\beta_1 = 1$, но для меньших начальных амплитуд деформаций $x_0 = u_0 = z_0 = w_0 = 0.0001$ и для интервала времени $t \in (0, 2000)$. Чтобы оценить точность асимптотического решения для установившихся колебаний, находились

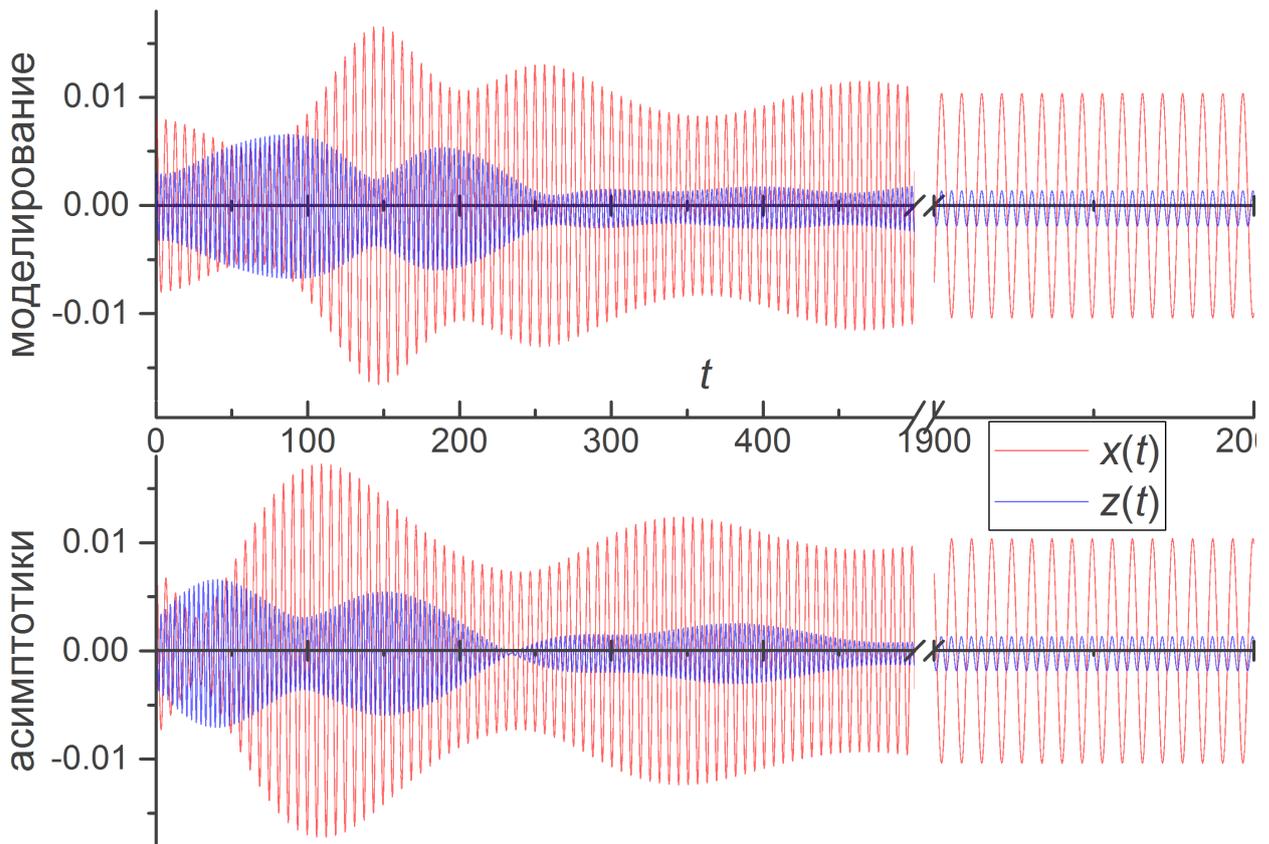


Рисунок 3.1 — Сравнение результатов численного моделирования с асимптотическим решением. Синим цветом изображено поведение радиальной моды, а красным — деформационной, на верхнем графике приведено точное численное решение, на нижнем — асимптотики

максимальные значения $x(t)$ и $z(t)$ и сравнивались с асимптотиками. Отличие составило тоже около 3% для $z(t)$ и около 0.5% для $x(t)$.

3.3.2 Оценочное условие дробления

Рассмотрим возможность дробления пузырька, как результат достижения амплитудой деформационной моды значения $\xi = 1/2$, полученного эмпирическим путем (это приблизительная величина амплитуды деформационных колебаний, при которой пузырек оказывается разделенным одним или несколькими перешейками). Для иллюстрации на рисунке 3.4 изображены некоторые ”опасные” для дробления пузырька моды при амплитуде ξ порядка 1, слева снизу — мода с $n = 2$ и $\xi = 0.5$.

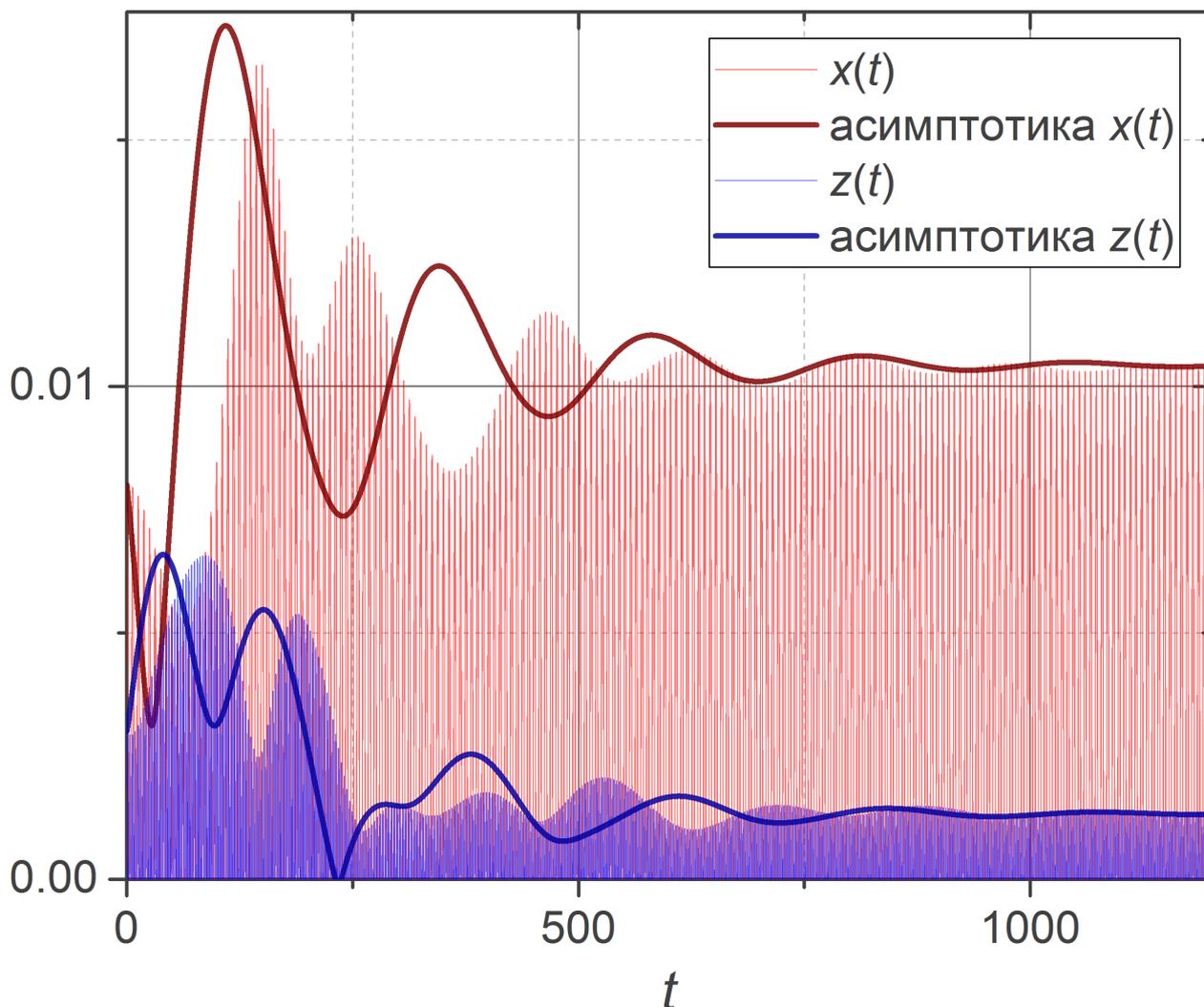


Рисунок 3.2 — Сравнение результатов прямого численного моделирования с асимптотиками. Синим и красным цветами тонкими линиями изображены графики колебаний по радиальной и деформационной моде, полученные прямым численным моделированием, жирными тёмными синей и коричневой линиями изображены огибающие асимптотических решений для обеих мод

Согласно рисунку 3.2, максимальная амплитуда деформационной моды достигается во время переходного процесса и примерно в 1.7 раза больше установившейся. Поэтому рассмотрим две разные возможности дробления, когда амплитуда акустической волны медленно растет (случай 1) и когда акустическая волна достигает своей конечной амплитуды за малое время, и максимальная деформация пузырька происходит в течение переходного процесса (случай 2).

Получим оценочный умышленный критерий дробления пузырька как минимальную амплитуду возбуждающей волны, при которой возможно дробление, в этих двух случаях:

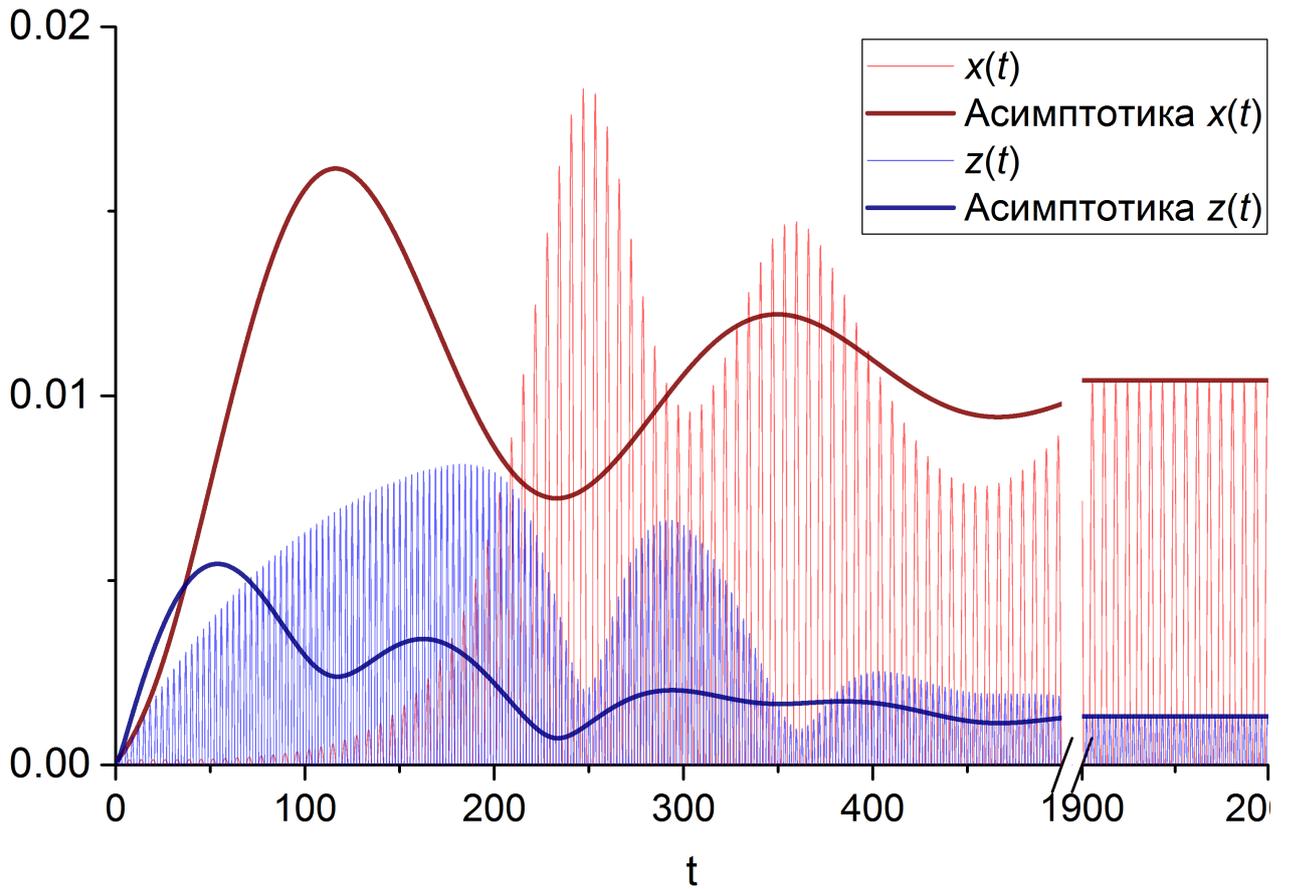


Рисунок 3.3 — Сравнение результатов численного моделирования с асимптотическим решением в случае малой начальной амплитуды колебаний деформационной моды. Синим цветом изображено поведение радиальной моды, а красным — деформационной, тонкой светлой линией изображено точное численное решение, а жирной тёмной — огибающая асимптотического решения

Случай 1 (медленный старт акустической волны, когда скачки амплитуды деформационных колебаний в переходном процессе успевают гаситься диссипацией). Пузырек может раздробиться, если

$$\Delta p > \frac{3\gamma(4n-1)}{32(n+1)(2n+1)} \approx \frac{\gamma}{5n} \quad (3.14)$$

Случай 2 (быстрый старт). При условии

$$\tau_{\text{start}} \ll 30/\Omega, \quad R_\Omega > 4/(3\gamma) \quad (3.15)$$

где τ_{start} — характерное время старта акустической волны (достижения ею полной мощности), пузырек может раздробиться при выполнении условия

$$\Delta p > \frac{3\gamma(4n-1)}{32(n+1)(2n+1)} \left[1 + \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{6(4n-1)R_\Omega^2 \Delta p - 1}} \right) \right]^{-2} \quad (3.16)$$

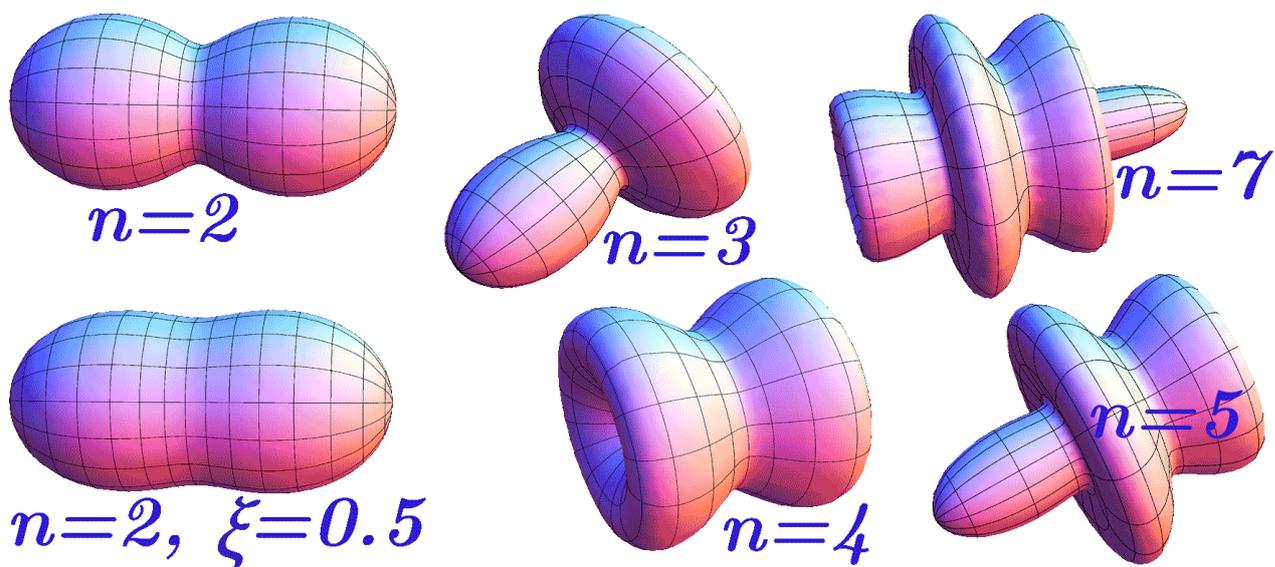


Рисунок 3.4 — Опасные моды, при значительном возбуждении которых возможно дробление для $\xi \sim 1$

отличающегося от условия (3.14) наличием в его правой части множителя, экспонента в котором описывает насколько амплитуда деформационных колебаний пузырька в процессе установления колебаний превысит финальную амплитуду при учете диссипации (принимая, что перед запуском акустической волны деформация пузырька мала, но достаточна для удовлетворительного соответствия асимптотического и численного решений системы (3.2)). Отдельный интерес представляет случай почти нулевой начальной амплитуды деформационной моды, при котором становится важным характерное время перекачки энергии в деформационную моду, найденное в главе 1, однако этот случай выходит за рамки данной работы.

На рисунке 3.5 иллюстрируется полученный оценочный критерий дробления воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении. Синими ромбиками и красными кружками изображены минимальные отношения амплитуды переменной части внешнего давления для пузырька резонансного радиуса к постоянному уровню давления, при котором оценочный критерий дробления будет выполнен при медленном и быстром старте, соответственно. Пунктирная линия — характерное время старта акустической волны, такое, чтобы старт можно было считать быстрым, т.е., чтобы волна достигала максимальной амплитуды за время, меньшее времени установления колебаний пузырька. Правая ось ординат — характерное время старта акустической волны τ_{start} в миллисекундах. По оси абсцисс отложен номер резонансной моды n , определяющей резонансный радиус

пузырька (1.18) и частоту акустической волны, резонансной к свободным радиальным колебаниям пузырька такого радиуса (1.17).

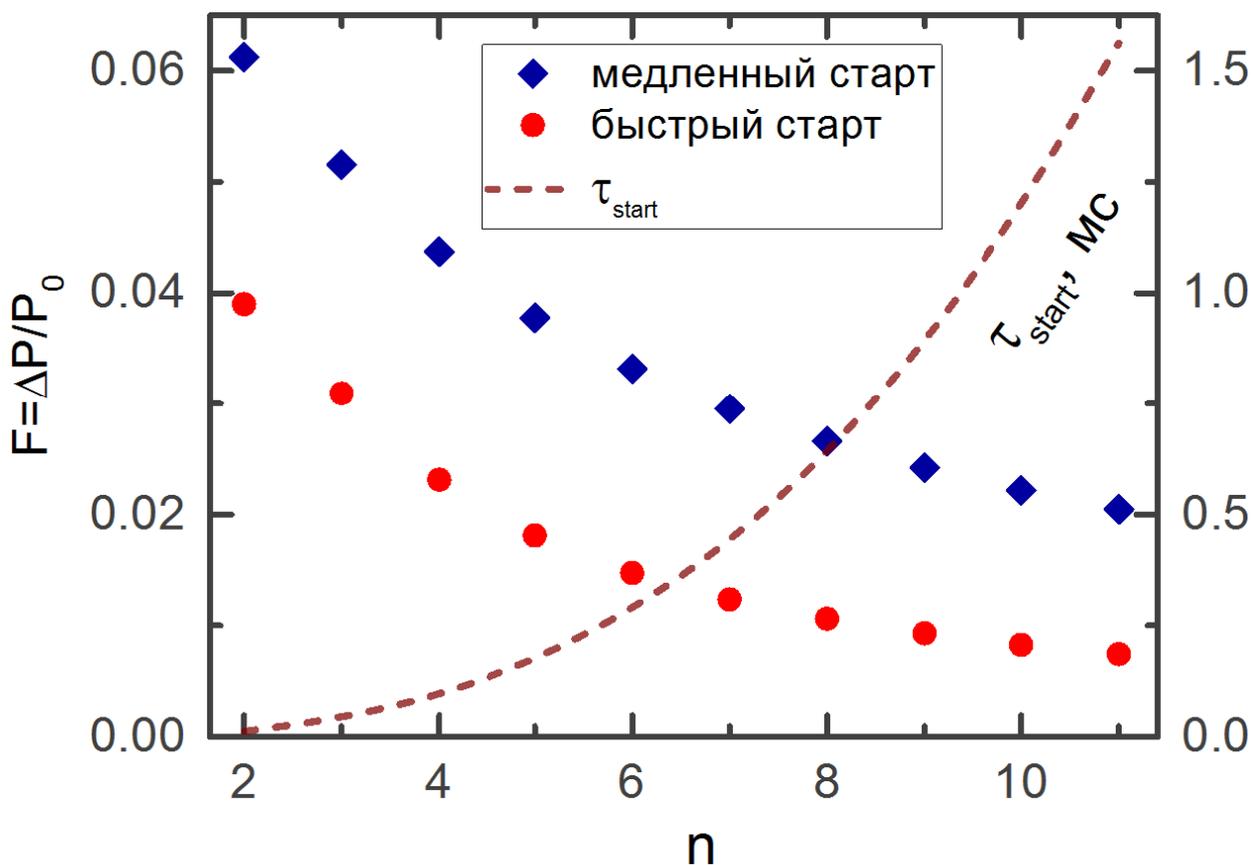


Рисунок 3.5 — Оценочное условие дробления для случаев быстрого и медленного старта, а также характерное время быстрого старта

Для примера рассмотрим случай возможного дробления воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении по четвертой деформационной моде, которой, как следует из резонансного соотношения отвечает пузырек радиуса $a \approx 0.06$ мм, и, как видно из рисунка 3.5, при медленном старте ($\tau_{start} > 0.1$ мс) критическая амплитуда колебаний давления в возбуждающей волне составляет около 4.3% от постоянного уровня давления, при быстром старте — 2.3%.

Второй пример: для номера моды $n = 6$ пузырёк имеет радиус $a \approx 0.11$ мм; для него при медленном старте ($\tau_{start} > 0.3$ мс) критическая амплитуда колебаний давления в волне составляет около 3.3% от постоянного уровня давления, при быстром старте — 1.4%.

3.3.3 Обсуждение полученного оценочного условия дробления. Возможности дальнейшего развития исследования

Полученные результаты показывают, что амплитуда критического давления в волне вполне достижима, особенно в случае быстрого старта, что позволяет надеяться на возможность дробления пузырьков по резонансному механизму. Конечно, для строгого доказательства такой возможности следует провести точные расчеты при учете больших деформаций поверхности пузырька и затухания деформационной моды, а также получить экспериментальное подтверждение результатов. Недостатками полученного оценочного условия дробления, из которых следуют возможные пути дальнейшего развития исследования, являются:

- отсутствие учёта диссипации деформационной моды и потерянная таким образом пороговая амплитуда для перекачки;
- существование погрешности моделирования начала процесса перекачки при малой начальной амплитуде деформационной моды, и, как следствие, погрешность нахождения оценочного условия дробления в случае быстрого старта;
- использование уравнений, применимых для малых колебаний. Для получения более точного условия дробления с учётом большой амплитуды колебаний перед моментом дробления пока представляется возможным только численное решение уравнений гидро- и газодинамики для жидкости вне пузырька и газа внутри пузырька;
- отсутствие точной модели влияния возможной расстройки частоты и расстройки резонансного соотношения, в том числе необходимо учесть динамику изменения радиуса пузырька за счёт фазовых переходов;
- недостатки теории диссипации, описанные в прошлой главе;
- отсутствие учёта деформации формы пузырька в потоке или при всплывании;
- отсутствие учёта влияния стенок сосуда;
- отсутствие учёта влияния пузырьков друг на друга;

3.4 Выводы

С помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова получено асимптотическое описание динамики малых колебаний пузырька в случае резонансной частоты возбуждающей волны, а также резонанса частот радиальной и деформационной моды 2:1. С помощью полученных в главе 2 результатов по затуханию колебаний пузырька учтены все существенные механизмы диссипации энергии радиальной моды (термический, акустический, вязкий), эффекты поверхностного натяжения, также показано, что затуханием деформационной моды можно пренебречь для пузырьков не слишком большого радиуса. Доказано, что в использованных предположениях амплитуда деформационной моды значительно вырастает и способна многократно превысить амплитуду радиальной моды, что может привести к дроблению пузырька.

Предложен новый резонансный механизм дробления газового пузырька в акустической волне. Показано, что дробление пузырька с резонансным радиусом возможно при относительно небольшой амплитуде давления в возбуждающей волне резонансной частоты: порядка нескольких процентов от равновесного давления в жидкости. Получено оценочное условие дробления для случаев быстрого и медленного включения акустической волны. Для его полного обоснования нужно будет провести точные расчёты с учётом нелинейных колебаний поверхности пузырька и затухания деформационной моды, а также потребуются сложные эксперименты с контролем соблюдения резонансных условий. Данный механизм дробления может иметь широкие приложения, в том числе для прорыва гематоэнцефалического барьера в медицине с целью доставки лекарств в ткани мозга.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Методом нормальной формы получено аналитическое описание резонансной перекачки энергии между радиальной и произвольной деформационной модой свободных малых колебаний газового пузырька в жидкости в отсутствие затухания при резонансе частот мод 2:1. Найден период перекачки энергии и относительное увеличение амплитуды деформации в ходе перекачки в зависимости от номера моды. Полученные аналитически результаты показали хорошее соответствие результатам точного численного моделирования уравнений Гамильтона.
2. Единым образом получены параметры свободных и вынужденных колебаний пузырька с учётом акустической, вязкой, тепловой диссипации и поверхностного натяжения, получена огибающая резонансных кривых для вынужденных колебаний пузырька, которая может быть использована для нахождения условий резонансного дробления пузырька. Проанализированы различные механизмы затухания и определены условия доминирования термической диссипации над другими механизмами.
3. Исследованы малые вынужденные колебания малого газового пузырька в акустической волне в жидкости при резонансной частоте акустической волны, а также резонансе частот между радиальной и деформационной модами колебаний 2:1. С помощью методики осреднения Крылова-Боголюбова аналитически описан процесс перекачки энергии между модами в пренебрежение затуханием деформационной моды. Полученные результаты оказались в хорошем соответствии с результатами численного моделирования уравнений Гамильтона.
4. Предложен новый резонансный механизм дробления пузырька при описанном выше резонансе. Получены оценочные условия дробления газового пузырька в жидкости по резонансному механизму в случаях быстрого и медленного старта акустической волны, а также характерное время быстрого старта. Полученная величина амплитуды давления в акустической волне много меньше равновесного давления в жидкости, что придаёт ценность исследованию такого механизма дробления для многочисленных приложений, в частности, медицинских.

Таким образом описан новый резонансный механизм дробления пузырька, который может иметь приложения в медицине. Возможно дальнейшее развитие исследования, в будущем желательно учесть затухание деформационной моды, расстройку резонансных условий и нелинейность колебаний, а также провести численное моделирование динамики пузырька вплоть до момента дробления и проверить экспериментально полученные результаты.

Автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Петрову А. Г. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит своих близких и родных за терпение и моральную поддержку в столь затянутом процессе подготовки диссертации.

Список сокращений и условных обозначений

Величина	Размерность	Описание
A	[-]	амплитуда радиальных колебаний
A_ξ	[-]	амплитуда деформационных колебаний
$A_i(t)$	[-]	функции правых частей (3.4)
a	[м]	радиус пузырька
a_0	[м]	невозмущённый радиус пузырька
a_σ	[м]	радиус пузырька с давлением Лапласа равным среднему давлению в жидкости
α	[-]	коэффициент возбуждающей силы
$B(t)$	[-]	функция определённая в (3.4)
β	[-]	коэффициент затухания
β_1	[-]	приведённый коэффициент затухания $\beta/\sqrt{\alpha}$
$\tilde{\beta}$	[с ⁻¹]	размерный коэффициент затухания
β_μ	[с ⁻¹]	коэффициент вязкого затухания деформационных колебаний
$C \dots$	[...]	различные константы
$C(t)$	[-]	матрица поворота на угол t
c	[м/с]	скорость звука в жидкости
c_p	[Дж/(кг·К)]	теплоёмкость газа
γ	[-]	показатель адиабаты газа
Dy	[-]	отношение динамического давления к внешнему давлению
δ, ε	[-]	малые параметры
$\partial/\partial n$	[-]	производная вдоль нормали к границе
E_K	[-]	кинетическая энергия жидкости
F, \tilde{F}, F_1	[-]	гамильтониан возмущения
$G(Z)$	[-]	функция определённая в (2.33)
f, g, g_1, g_2	[-]	произвольные функции
φ	[м ² /с]	потенциал скорости в жидкости
Φ	[м ² /с]	потенциал скорости возбуждающей волны
Φ_{symm}	[м ² /с]	сферически симметричная часть потенциала скорости возбуждающей волны

Величина	Размерность	Описание
H, \tilde{H}	[-]	гамильтониан
H_0, \tilde{H}_0	[-]	невозмущённый гамильтониан
η	[-]	$\cos \theta$
K, K_n	[-]	нормировочная постоянная
k	[м ² /с]	коэффициент температуропроводности газа
$\kappa = \rho c_p k$	[Вт/(м·К)]	теплопроводность газа
κ_n	[-]	нормировочная постоянная (1.16)
L	[-]	лагранжиан $E_K - \Pi$
M	[-]	число Маха
N	[-]	нормировочная постоянная (1.13)
$O_n(\dots)$	[-]	малое n -го порядка по ...
P	[-]	безразмерное давление газа в пузырьке
\tilde{P}	[-]	безразмерное эффективное давление жидкости возле стенки пузырька
$P_n^m(\eta)$	[-]	n, m -ая присоединённая функция Лежандра
p_b	[Па]	давление газа на границе пузырька
p_{ext}	[Па]	давление жидкости у границы пузырька
p_∞	[Па]	внешнее невозмущенное давление жидкости
$p_S(t)$	[Па]	давление в возбуждающей волне
v_g	[м/с]	скорость газа
Λ (Гл. 2)	[-]	логарифмический декремент затухания свободных колебаний пузырька
Λ (Гл. 3)	[-]	постоянная $\pm 2/\sqrt{4n-1}$
λ	[-]	собственное значение
n, m	[-]	индексы присоединённой функции Лежандра
μ	[Па·с]	вязкость жидкости
Pe	[-]	число Пекле
Π	[Дж]	потенциальная энергия
R (Гл. 1)	[-]	отклонение пружины от вертикали
R (Гл. 3)	[-]	диссипативная функция Рэлея
r	[м]	переменная для радиус-вектора
r_x, r_y	[-]	полуоси эллиптической траектории подвешенной на пружине массы
ρ	[кг/м ³]	плотность жидкости

Величина	Размерность	Описание
ρ_g	[кг/м ³]	плотность газа
ρ_∞	[кг/м ³]	невозмущенная плотность жидкости
S	[м ²]	площадь поверхности пузырька
S_0	[-]	безразмерная амплитуда акустической волны
St	[-]	отношение давления Лапласа к внешнему давлению
s	[-]	параметр положения точки на эллипсе
Σ	[-]	эффективный момент (1.29)
σ	[Н/м]	коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость-газ
T (Гл. 1, 3)	[-]	период перекачки энергии
T (Гл. 2)	[К]	температура газа
T_∞	[К]	температура жидкости
t	[с]	переменная для времени
τ_{start}	[с]	время старта акустической волны
θ	[рад]	полярный угол
Θ	[-]	безразмерная температура газа
U	[-]	медленно меняющаяся амплитуда колебаний u
u, u_1, u_2	[-]	безразмерные импульсы по координатам x, x_1 и x_2 , соответственно
Vis	[-]	отношение эффективного вязкого давления к внешнему давлению
V	[м ³]	объем пузырька
v	[м/с]	скорость жидкости
W	[-]	медленно меняющаяся амплитуда колебаний w
w	[-]	безразмерный импульс по координате z
$x, x_1, x_2,$	[-]	безразмерные координаты, соответствующие колебаниям с ординарной частотой ω_ξ
ξ, ξ_1, ξ_2		
Ξ	[-]	пространство заполненное жидкостью
X, X_1, X_2	[-]	медленно меняющиеся амплитуды колебаний по координатам x, x_1 и x_2 , соответственно
Ω	[рад/с]	угловая частота
Ω_X	[рад/с]	угловая частота свободных колебаний пузырька
$\omega, \tilde{\omega}$	[рад/с]	угловая частота

Величина	Размерность	Описание
ω_a	[рад/с]	угловая частота радиальных колебаний
ω_ξ	[рад/с]	угловая частота деформационных колебаний пузырька/ горизонтальных колебаний пружины
ψ	[рад]	азимутальный угол
Z (Гл. 1, 3)	[-]	медленно меняющаяся амплитуда колебаний по координате z
Z (Гл. 2)	[-]	отношение радиуса пузырька к термической длине (масштабу термической диффузии в газе за один период колебаний)
Z_i	[-]	медленно меняющиеся амплитуды колебаний переменных Биркгофа z_i
Z_X и Z_Y	[-]	действительная и мнимая части Z
z	[-]	безразмерная координата, соответствующая колебаниям с двойной частотой $2\omega_\xi$
z_i	[-]	переменные Биркгофа
\bar{z}	[-]	усреднённое по объёму значение некоторой z
\bar{z}	[-]	комплексно сопряженное значение z
z_{\max}	[-]	максимальное значение некоторой z
z_0	[-]	начальное/невозмущённое значение некоторой z
ζ	[Па·с]	объёмная (вторая) вязкость жидкости

Словарь терминов

автономность (системы уравнений, гамильтониана) : отсутствие прямой зависимости от переменной времени

гамильтонова нормальная форма : представление гамильтониана в виде суммы двух частей, являющихся первыми интегралами друг друга (см. [85])

гематоэнцефалический барьер : мембранный барьер между кровеносной системой и мозговыми тканями непроницаемый для крупных молекул, и, как следствие, большинства лекарственных препаратов

гомобаричность : однородность давления в заданном объёме

деформационная мода колебаний : мода колебаний пузырька, характеризующаяся несферическим искажением формы, описываемым некоторым полиномом Лежандра

качающаяся пружина : маятник, обладающий тремя степенями свободы, одна из них соответствует вертикальным колебаниям (как пружинного маятника), остальные — горизонтальным колебаниям (как математического маятника)

контрастный агент : покрытый тонкой эластичной оболочкой пузырёк, используемый в ультразвуковых исследованиях

лапласовская добавка к давлению : дополнительное давление Лапласа под искривлённой границей раздела фаз, создаваемое силами поверхностного натяжения

резонансные члены : члены возмущения системы дифференциальных уравнений, которые при осреднении вдоль решения невозмущённой системы не зануляются

термическая диссипация : диссипация вследствие потерь энергии на теплопроводность

число Маха : отношение характерной скорости к скорости звука, отвечает за эффекты сжимаемости среды

число Пекле : безразмерный параметр, примерно равный квадрату отношения размера пузырька к термической глубине проникновения за период, отвечает за эффекты теплопереноса

Список литературы

1. *Longuet-Higgins Michael S.* Some integral theorems relating to the oscillations of bubbles // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1989. — Vol. 204. — Pp. 159–166.
2. *Longuet-Higgins Michael S.* Monopole emission of sound by asymmetric bubble oscillations. Part 1. Normal modes // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1989. — Vol. 201. — Pp. 525–541.
3. *Longuet-Higgins Michael S.* Monopole emission of sound by asymmetric bubble oscillations. Part 2. An initial-value problem // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1989. — Vol. 201. — Pp. 543–565.
4. *Longuet-Higgins Michael S.* Bubble noise spectra // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1990. — Vol. 87, no. 2. — Pp. 652–661.
5. *Medwin Herman, Beaky Matthew M.* Bubble sources of the Knudsen sea noise spectra // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1989. — Vol. 86, no. 3. — Pp. 1124–1130.
6. *Williams JE Ffowcs, Guo YP.* On resonant nonlinear bubble oscillations // *Journal of fluid mechanics*. — 1991. — Vol. 224. — Pp. 507–529.
7. *Longuet-Higgins Michael S.* Resonance in nonlinear bubble oscillations // *Journal of fluid mechanics*. — 1991. — Vol. 224. — Pp. 531–549.
8. *Yang Seung-Man, Feng ZC, Leal LG.* Nonlinear effects in the dynamics of shape and volume oscillations for a gas bubble in an external flow // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1993. — Vol. 247. — Pp. 417–454.
9. *Feng ZC, Leal LG.* On energy transfer in resonant bubble oscillations // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. — 1993. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 826–836.
10. *Mao Yi, Crum Lawrence A, Roy Ronald A.* Nonlinear coupling between the surface and volume modes of an oscillating bubble // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1995. — Vol. 98, no. 5. — Pp. 2764–2771.
11. *McDougald Neil K, Leal L Gary.* Numerical study of the oscillations of a non-spherical bubble in an inviscid, incompressible liquid. Part I: free oscillations from

- non-equilibrium initial conditions // *International journal of multiphase flow*. — 1999. — Vol. 25, no. 5. — Pp. 887–919.
12. Вановский ВВ, Петров АГ. Условие резонансного дробления газового пузырька в акустической волне в жидкости // *Доклады Академии наук*. — 2016. — Т. 469, № 2. — С. 162–166.
 13. Вановский ВВ, Петров АГ. Пружинная аналогия нелинейных колебаний пузырька в жидкости при резонансе // *Прикладная математика и механика*. — 2017. — Т. 81, № 4. — С. 445–461.
 14. Kargl Steven G. Effective medium approach to linear acoustics in bubbly liquids // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2002. — Vol. 111, no. 1. — Pp. 168–173.
 15. Wilson Preston S, Roy Ronald A, Carey William M. Phase speed and attenuation in bubbly liquids inferred from impedance measurements near the individual bubble resonance frequency // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2005. — Vol. 117, no. 4. — Pp. 1895–1910.
 16. Ando Keita, Colonius Tim, Brennen Christopher E. Improvement of acoustic theory of ultrasonic waves in dilute bubbly liquids // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2009. — Vol. 126, no. 3. — Pp. EL69–EL74.
 17. Plesset Milton S, Prosperetti Andrea. Bubble dynamics and cavitation // *Annual review of fluid mechanics*. — 1977. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 145–185.
 18. In vivo transcranial cavitation threshold detection during ultrasound-induced blood–brain barrier opening in mice / YS Tung, F Vlachos, JJ Choi et al. // *Physics in Medicine & Biology*. — 2010. — Vol. 55, no. 20. — P. 6141.
 19. Leighton TG. From seas to surgeries, from babbling brooks to baby scans: The acoustics of gas bubbles in liquids // *International Journal of Modern Physics B*. — 2004. — Vol. 18, no. 25. — Pp. 3267–3314.
 20. Eller Anthony I. Damping constants of pulsating bubbles // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1970. — Vol. 47, no. 5B. — Pp. 1469–1470.
 21. Chapman Richard Bruce, Plesset Milton Spinoza. Thermal effects in the free oscillation of gas bubbles // *Journal of Basic Engineering*. — 1971. — Pp. 373–376.

22. *Нигматулин РИ, Хабеев НС.* Теплообмен газового пузырька с жидкостью // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1974. — № 5. — С. 94–100.
23. *Prosperetti Andrea.* Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1977. — Vol. 61, no. 1. — Pp. 17–27.
24. *Prosperetti Andrea.* The thermal behaviour of oscillating gas bubbles // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1991. — Vol. 222. — Pp. 587–616.
25. *Нигматулин РИ, Хабеев НС.* Динамика и тепломассообмен парогазовых пузырьков с жидкостью // *М.: Институт механики МГУ.* — 1978. — С. 229–243.
26. *Nigmatulin RI, Khabeev NS, Nagiev FB.* Dynamics, heat and mass transfer of vapour-gas bubbles in a liquid // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* — 1981. — Vol. 24, no. 6. — Pp. 1033–1044.
27. *Нигматулин Роберт Искандерович.* Динамика многофазных сред. — М.: Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1987. — Т. 1. — 464 с.
28. *Prosperetti Andrea, Crum Lawrence A, Commander Kerry W.* Nonlinear bubble dynamics // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1988. — Vol. 83, no. 2. — Pp. 502–514.
29. *Zhang Yuning.* A generalized equation for scattering cross section of spherical gas bubbles oscillating in liquids under acoustic excitation // *Journal of Fluids Engineering.* — 2013. — Vol. 135, no. 9. — P. 091301.
30. Effects of mass transfer on damping mechanisms of vapor bubbles oscillating in liquids / Yuning Zhang, Yuhang Gao, Zhongyu Guo, Xiaoze Du // *Ultrasonics sonochemistry.* — 2018. — Vol. 40. — Pp. 120–127.
31. On the forced oscillations of a small gas bubble in a spherical liquid-filled flask / RI Nigmatulin, I Sh Akhatov, NK Vakhitova, RT Lahey // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2000. — Vol. 414. — Pp. 47–73.
32. *Нигматулин РИ, Губайдуллин ДА, Федоров ЮВ.* Акустические волны разной геометрии в полидисперсных пузырьковых жидкостях. Теория и эксперимент // *Доклады Академии наук.* — 2013. — Т. 450, № 6. — С. 665–669.

33. Губайдуллин ДА, Губайдуллина ДД, Федоров ЮВ. Акустические волны в жидкостях с полидисперсными пузырьками газа. Сравнение теории с экспериментом // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. — 2013. — № 6. — С. 81–90.
34. Губайдуллин ДА, Федоров ЮВ. Падение акустической волны на многослойную среду, содержащую слой пузырьковой жидкости // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. — 2017. — № 1. — С. 109–116.
35. Vykhodtseva Natalia, McDannold Nathan, Hynynen Kullervo. Progress and problems in the application of focused ultrasound for blood–brain barrier disruption // *Ultrasonics*. — 2008. — Vol. 48, no. 4. — Pp. 279–296.
36. Guédra Matthieu, Inserra Claude. Bubble shape oscillations of finite amplitude // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2018. — Vol. 857. — Pp. 681–703.
37. Crum LA. Acoustic cavitation series: part five rectified diffusion // *Ultrasonics*. — 1984. — Vol. 22, no. 5. — Pp. 215–223.
38. Güth W. Nichtlineare Schwingungen von Luftblasen in Wasser // *Acta Acustica united with Acustica*. — 1956. — Vol. 6, no. 6. — Pp. 532–538.
39. Neppiras Ernest A. Acoustic cavitation // *Physics reports*. — 1980. — Vol. 61, no. 3. — Pp. 159–251.
40. Eller Anthony, Flynn HG. Generation of subharmonics of order one-half by bubbles in a sound field // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1969. — Vol. 46, no. 3B. — Pp. 722–727.
41. Eller Anthony I, Crum Lawrence A. Instability of the motion of a pulsating bubble in a sound field // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1970. — Vol. 47, no. 3B. — Pp. 762–767.
42. Benjamin T Brook, Strasberg M. Excitation of oscillations in the shape of pulsating gas bubbles; theoretical work // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1958. — Vol. 30, no. 7. — Pp. 697–697.

43. *Prosperetti Andrea*. Application of the subharmonic threshold to the measurement of the damping of oscillating gas bubbles // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1977. — Vol. 61, no. 1. — Pp. 11–16.
44. *Francescutto Alberto, Nabergoj Radoslav*. Pulsation amplitude threshold for surface waves on oscillating bubbles // *Acta Acustica united with Acustica*. — 1978. — Vol. 41, no. 3. — Pp. 215–220.
45. Experimental and theoretical bubble dynamics / W Lauterborn, Th Kurz, R Mettin, CD Ohl // *Advances in chemical physics*. — 1999. — Vol. 110. — Pp. 295–380.
46. *Holt R Glynn, Gaitan D Felipe*. Observation of stability boundaries in the parameter space of single bubble sonoluminescence // *Physical review letters*. — 1996. — Vol. 77, no. 18. — P. 3791.
47. *Wu CC, Roberts PH*. Bubble shape instability and sonoluminescence // *Physics Letters A*. — 1998. — Vol. 250, no. 1-3. — Pp. 131–136.
48. *Вановский ВВ, Петров АГ*. Колебания газового пузырька в жидкости при резонансе частот радиальной и произвольной осесимметричной моды колебаний 2: 1 // *Доклады Академии наук*. — 2011. — Т. 437, № 3. — С. 331–335.
49. *Вановский ВВ, Петров АГ*. Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости // *Доклады Академии наук*. — 2012. — Т. 444, № 4. — С. 385–385.
50. *Harkin Anthony A, Kaper Tasso J, Nadim Ali*. Energy transfer between the shape and volume modes of a nonspherical gas bubble // *Physics of Fluids*. — 2013. — Vol. 25, no. 6. — P. 062101.
51. *Holt R Glynn, Gaitan D Felipe* // The onset of resonance-controlled instability in spherical bubble oscillations. — 1996.
52. *Ohsaka K, Trinh EH*. A two-frequency acoustic technique for bubble resonant oscillation studies // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2000. — Vol. 107, no. 3. — Pp. 1346–1351.
53. Microbubble shape oscillations excited through ultrasonic parametric driving / Michel Versluis, David E Goertz, Peggy Palanchon et al. // *Physical review E*. — 2010. — Vol. 82, no. 2. — P. 026321.

54. Experimental evidence of nonlinear mode coupling between spherical and nonspherical oscillations of microbubbles / Matthieu Guédra, Claude Inserra, Cyril Mauger, Bruno Gilles // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 94, no. 5. — P. 053115.
55. Surface modes with controlled axisymmetry triggered by bubble coalescence in a high-amplitude acoustic field / Sarah Cleve, Matthieu Guédra, Claude Inserra et al. // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 98, no. 3. — P. 033115.
56. Feng ZC, Leal LG. Bifurcation and chaos in shape and volume oscillations of a periodically driven bubble with two-to-one internal resonance // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1994. — Vol. 266. — Pp. 209–242.
57. Maksimov AO, Leighton TG. Transient processes near the acoustic threshold of parametrically-driven bubble shape oscillations // *Acta Acustica united with Acustica*. — 2001. — Vol. 87, no. 3. — Pp. 322–332.
58. Петров АГ, Фомичев АВ. Колебания газового пузыря в жидкости при резонансе частот радиальных и деформационных колебаний 2: 1 // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. — 2009. — № 2. — С. 102–115.
59. Петров АГ. Аналитическая гидродинамика. — М.: Физматлит, 2010. — 520 с.
60. Петров АГ. О вынужденных колебаниях качающейся пружины при резонансе // *Доклады Академии наук*. — 2015. — Т. 464, № 5. — С. 553–553.
61. Вановский ВВ. Сравнение механизмов диссипации малых колебаний сферического пузырька в жидкости // *Волны и вихри в сложных средах: 10-ая международная конференция - школа молодых ученых; 03-05 декабря 2019 г., Москва: Сборник материалов школы*. — 2019. — С. 87–90.
62. Боголюбов НН, Митропольский ЮА. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Издательство Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974. — 410 с.
63. Vanovskiyy VV, Petrov AG. The condition of the resonant break-up of a gas bubble subjected to an acoustic wave in liquid // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2015. — Vol. 656, no. 1. — P. 012041.

64. *Петров АГ, Вановский ВВ.* Нелинейные колебания маятника на пружине при резонансе 1: 1: 2. Теория, эксперимент и физические аналогии // *Труды Математического института имени ВА Стеклова.* — 2018. — Т. 300, № 0. — С. 168–175.
65. *Вановский ВВ, Петров АГ.* Критерий резонансного дробления газового пузырька в акустической волне в жидкости // *Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015).* — 2015. — С. 388–390.
66. *Lamb Horace.* Hydrodynamics. — Cambridge University Press, 1895. — 604 pp.
67. *Minnaert Marcel.* XVI. On musical air-bubbles and the sounds of running water // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.* — 1933. — Vol. 16, no. 104. — Pp. 235–248.
68. *Meyer Erwin, Tamm Konrad.* Eigenschwingung und Dämpfung von Gasblasen in Flüssigkeiten // *Akust. Z.* — 1939. — Vol. 4. — P. 145.
69. *Strasberg M.* The pulsation frequency of nonspherical gas bubbles in liquids // *The Journal of the Acoustical Society of America.* — 1953. — Vol. 25, no. 3. — Pp. 536–537.
70. *Fitzpatrick HM, Strasberg M.* Hydrodynamic sources of sound // *Proc. First ONR Symp. on Naval Hydrodynamics.* — 1956. — Pp. 241–280.
71. *Plesset MS.* On the stability of fluid flows with spherical symmetry // *Journal of Applied Physics.* — 1954. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 96–98.
72. *Tsamopoulos John A, Brown Robert A.* Nonlinear oscillations of inviscid drops and bubbles // *Journal of fluid Mechanics.* — 1983. — Vol. 127. — Pp. 519–537.
73. *Shaw Stephen J.* Translation and oscillation of a bubble under axisymmetric deformation // *Physics of fluids.* — 2006. — Vol. 18, no. 7. — P. 072104.
74. *Routh Edward John.* A treatise on the stability of a given state of motion: particularly steady motion. — Macmillan and Company, 1877.
75. *Korteweg DJ.* Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale, vibrations de relation, dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté // *Arch. Néderl. sci. exactes et natur.* — 1898. — Pp. 229–260.

76. *Beth HJE*. XVIII. The oscillations about a position of equilibrium where a simple linear relation exists between the frequencies of the principal vibrations // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. — 1913. — Vol. 26, no. 152. — Pp. 268–324.
77. *Vumt A, Горелик Г*. Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем // *Ж. техн. физики*. — 1933. — Т. 3, № 2-3. — С. 294–307.
78. *Fermi Enrico*. Über den ramaneffekt des kohlendioxyds // *Zeitschrift für Physik*. — 1931. — Vol. 71, no. 3-4. — Pp. 250–259.
79. *Маркеев АП*. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2: 1 // *Прикладная математика и механика*. — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 757.
80. Monodromy of the quantum 1: 1: 2 resonant swing spring / A Giacobbe, RH Cushman, DA Sadovskii, BI Zhilinskiĭ // *Journal of mathematical physics*. — 2004. — Vol. 45, no. 12. — Pp. 5076–5100.
81. *Петров АГ, Фомичев АВ*. О нелинейных трехмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине при резонансе // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2008. — № 5. — С. 15–26.
82. *Петров АГ*. О повороте видимой плоскости колебаний качающейся пружины при резонансе 1: 1: 2 // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2017. — № 3. — С. 18–30.
83. CO2 Molecule as a Quantum Realization of the $1 \square 1 \square 2$ Resonant Swing-Spring with Monodromy / Richard H Cushman, Holger R Dullin, Andrea Giacobbe et al. // *Physical review letters*. — 2004. — Vol. 93, no. 2. — P. 024302.
84. *Алдошин ГТ, Яковлев СП*. Аналитическая модель колебаний молекулы углекислого газа. Резонанс Ферми // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2015. — № 1. — С. 42–53.
85. *Журавлёв ВФ*. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // *Прикладная математика и механика*. — 2002. — Т. 66, № 3. — С. 356.

86. *Биркгоф Джордж Дэвид*. Динамические системы. — Удмуртский университет, 1999. — 407 с.
87. *Kundt A.* IV. On the velocity of sound in tubes // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. — 1868. — Vol. 36, no. 240. — Pp. 22–26.
88. *Kirchhoff Gustav*. Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung // *Annalen der Physik*. — 1868. — Vol. 210, no. 6. — Pp. 177–193.
89. *Rayleigh Lord*. XXVI. On porous bodies in relation to sound // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. — 1883. — Vol. 16, no. 99. — Pp. 181–186.
90. *Mallock Henry Reginald Arnulph*. The damping of sound by frothy liquids // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. — 1910. — Vol. 84, no. 572. — Pp. 391–395.
91. *Saneyosi Z.* Heat conduction damping of pulsating gas bubble in liquid which resonates to supersonic wave // *Electrotech. J.* — 1941. — Vol. 5. — Pp. 49–51.
92. *Herring Conyers*. Theory of the pulsations of the gas bubble produced by an underwater explosion. — Columbia Univ., Division of National Defense Research, 1941.
93. *Epstein PAUL S.* On the absorption of sound waves in suspensions and emulsions // *Theodore von Karman Anniversary Volume*. — 1941. — Pp. 162–188.
94. *Spitzer Jr Lyman*. Acoustic properties of gas bubbles in a liquid. — 1943.
95. *Willis French Hoke*. Measurements of ultrasonic absorption and velocity in liquid mixtures // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1947. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 242–248.
96. *Pfriem H.* Zur thermischen dämpfung in kugelsymmetrisch schwingenden gasblasen // *Akust. Zh.* — 1940. — Vol. 5. — Pp. 202–207.

97. *Willis HF*. Underwater explosions, time interval between successive explosions // *British report*. — 1941.
98. *Kirkwood John G*. Progress Report on The Pressure Wave Produced by an Underwater Explosion III to August 15, 1942. — National Defense Research Committee of the Office of Scientific Research and ..., 1942.
99. *Cole Robert H, Weller Royal*. Underwater explosions // *Physics Today*. — 1948. — Vol. 1. — P. 35.
100. *Trilling Leon*. The collapse and rebound of a gas bubble // *Journal of Applied Physics*. — 1952. — Vol. 23, no. 1. — Pp. 14–17.
101. *Gilmore FR*. The collapse and growth of a spherical bubble in a viscous compressible liquid // *California Institute of Technology Hydrodynamics Laboratory, Report*. — 1952. — no. 26-4.
102. *Foldy Leslie L*. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers // *Physical Review*. — 1945. — Vol. 67, no. 3-4. — P. 107.
103. *Martin PA*. Acoustic scattering by one bubble before 1950: Spitzer, Willis, and Division 6 // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2019. — Vol. 146, no. 2. — Pp. 920–926.
104. *Devin Jr Charles*. Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1959. — Vol. 31, no. 12. — Pp. 1654–1667.
105. *Hsieh Din-Yu, Plesset Milton S*. On the propagation of sound in a liquid containing gas bubbles // *The physics of fluids*. — 1961. — Vol. 4, no. 8. — Pp. 970–975.
106. *Koger HG, Houghton G*. Damping and pulsation of large nitrogen bubbles in water // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1968. — Vol. 43, no. 3. — Pp. 571–575.
107. *Keller Joseph B, Kolodner Ignace I*. Damping of underwater explosion bubble oscillations // *Journal of applied physics*. — 1956. — Vol. 27, no. 10. — Pp. 1152–1161.

108. *Keller Joseph B, Miksis Michael*. Bubble oscillations of large amplitude // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1980. — Vol. 68, no. 2. — Pp. 628–633.
109. *Epstein David, Keller Joseph B*. Expansion and contraction of planar, cylindrical, and spherical underwater gas bubbles // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1972. — Vol. 52, no. 3B. — Pp. 975–980.
110. *Prosperetti A, Lezzi A*. Bubble dynamics in a compressible liquid. Part 1. First-order theory // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1986. — Vol. 168. — Pp. 457–478.
111. *Hickling Robert, Plesset Milton S*. Collapse and rebound of a spherical bubble in water // *The Physics of Fluids*. — 1964. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 7–14.
112. *Jahsman William E*. Collapse of a gas-filled spherical cavity // *Journal of Applied Mechanics*. — 1968. — Vol. 35, no. 3. — Pp. 579–587.
113. *Riley Mark*. Analytical solutions for predicting underwater explosion gas bubble behaviour. — 2010. — 30 pp.
114. Нелинейные несферические колебания пузырька газа при периодическом изменении давления окружающей жидкости / АА Аганин, МА Ильгамов, ЛА Косолапова, ВГ Малахов // *Теплофизика и аэромеханика*. — 2008. — Т. 15, № 3. — С. 521–533.
115. *Аганин АА, Косолапова ЛА, Малахов ВГ*. Динамика несферического газового пузырька в жидкости // *Вестник ТГГПУ*. — 2011. — Т. 25, № 3.

Список рисунков

1.1	Качающаяся пружина и вид сверху траектории точечной массы в двух разным масштабах	19
1.2	Размер резонансного воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении в зависимости от номера деформационной моды n	27
1.3	Семейство потенциалов энергии деформационной моды в зависимости от значения эффективного момента Σ	31
1.4	Отношение периодов перекачки n, m и $n, 0$ деформационной мод для $n = 3, 5, 7$	34
1.5	Сравнение результатов прямого численного моделирования с асимптотиками	35
1.6	Измерение периода перекачки по результатам численного моделирования	36
1.7	Отношение максимальных амплитуд n, m -ой деформационной моды и радиальной моды в ходе перекачки	37
2.1	Сравнение механизмов затухания. Логарифмический декремент затухания вызванный тепловой, вязкой и акустической диссипацией, а также суммарный декремент	53
2.2	Асимптотики для логарифмического декремента термической диссипации	55
2.3	Асимптотики для частоты свободных колебаний пузырька с учётом термической диссипации	55
2.4	Резонансные кривые отклика для пузырьков разных радиусов и огибающая резонансных пиков	56
3.1	Сравнение результатов численного моделирования с асимптотическим решением	68
3.2	Сравнение результатов прямого численного моделирования с асимптотиками	69
3.3	Сравнение результатов численного моделирования с асимптотическим решением в случае малой начальной амплитуды колебаний деформационной моды	70

- 3.4 Опасные моды, при значительном возбуждении которых возможно дробление 71
- 3.5 Оценочное условие дробления для случаев быстрого и медленного старта, а также характерное время быстрого старта 72

Список таблиц